- Un autre exemple est donné par la suite définie par la formule récurrente $x_{n+1} = x_n^3 + 1$ et $x_0 = 1$.

## 2.2 Limite d'une suite

### 2.2.1 Introduction

Soit $(x_n)$ la suite définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+n}.$$

On s'aperçoit que plus $n$ devient grand, moins les termes $x_n$ de la suite s'écartent du nombre réel 1. On dit dans ce cas que la suite $(x_n)$ converge vers 1 ou bien que le nombre réel 1 est la limite de la suite $(x_n)$. Donnons à présent une définition précise de la limite d'une suite.

### 2.2.2 Définition de la limite d'une suite

On dit qu'une suite $(x_n)$ de nombres réels est *convergente* et admet pour *limite* le nombre réel $x$, ou tout simplement que la suite $(x_n)$ *converge vers* $x$ si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel $n_0$ tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $|x_n - x| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

D'une manière générale, l'entier naturel $n_0$ dépend du nombre réel $\epsilon$. Par exemple, dans la figure 2.1, $x_n$ est dans l'intervalle $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ pour tout $n \geqslant 8$. Ainsi, pour cet $\epsilon > 0$, on peut choisir $n_0 = 8$ et obtenir $|x_n - x| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$.

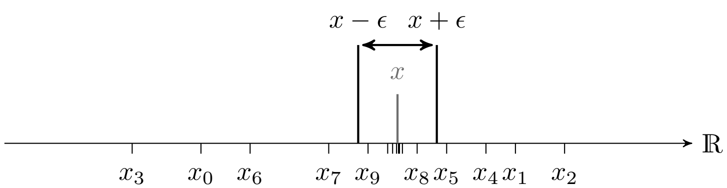


**Fig. 2.1** Une suite convergente.

### 2.2.3 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*. Une classe importante de suites divergentes sera présentée au paragraphe 2.3.15.

### 2.2.4 Unicité de la limite d'une suite

Soit $(x_n)$ une suite convergeant vers les nombres réels $a$ et $b$. Alors, $a$ et $b$ sont égaux.

### 4.1.21 Remarques

Supposons que pour une fonction $f : E \to F$, le nombre réel $\max_{x \in E} f(x)$ (resp. $\min_{x \in E} f(x)$) existe. Alors, cette fonction est majorée (resp. minorée) sur $E$ et, de plus, on a :

$$\max_{x \in E} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in E} f(x) \quad (\text{resp. } \min_{x \in E} f(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in E} f(x)).$$

Par contre, une fonction $f : E \to F$ peut très bien être majorée (resp. minorée) sur $E$, sans pour autant que le maximum (resp. minimum) de cette fonction sur $E$ existe. Pour s'en rendre compte, considérons la fonction $f : [0, 1[ \to \mathbb{R}$, qui, à tout élément $x$ de $[0, 1[$, fait correspondre le nombre réel $x^3$. Le supremum de cette fonction sur $[0, 1[$ est 1, mais comme ce nombre n'appartient pas à l'ensemble $\mathrm{Im} f = \{f(x) = x^3 : x \in [0, 1[\}$, on en déduit que le maximum de la fonction $f$ sur $[0, 1[$ n'existe pas.

Une fonction $f : E \to F$ peut atteindre son maximum (resp. minimum) en plusieurs points de $E$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ atteint son maximum aux points $\{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et son minimum aux points $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

### 4.1.22 Fonction monotone

Etant donné une fonction $f : E \to F$ et $A$ un sous-ensemble non vide de $E$, on dit que la fonction $f$ est *croissante* (resp. *strictement croissante*) sur $A$ si pour tout couple d'éléments $x_1, x_2$ de $A$, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). De même, elle est dite *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) sur $A$ si pour tout couple d'éléments $x_1, x_2$ de $A$, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$). Elle est dite *constante* sur $A$, s'il existe un nombre réel $c$ tel que pour tout élément $x$ de $A$ : $f(x) = c$.

Pour $f$ et $A$ comme ci-dessus, $f$ est dite *monotone* sur $A$ si elle est croissante ou décroissante sur $A$. Elle est dite *strictement monotone* sur $A$ si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur $A$.

### 4.1.23 Fonction paire, fonction impaire

Soit $E$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant zéro pour *centre de symétrie*, c'est-à-dire tel que $x \in E$ implique $-x \in E$. Une fonction $f : E \to F$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si pour tout élément $x$ de $E$ : $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe $0y$, tandis que celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0.

### 4.1.24 Fonction périodique

Le nombre réel $P$ est appelé ***une*** *période* de la fonction $f : E \to F$ si pour tout $x \in E$ :

$$x - P \in E, \quad x + P \in E \quad \text{et} \quad f(x + P) = f(x).$$

D'autre part, une fonction $f : E \to F$ est dite *périodique* si elle admet une période $P \neq 0$.

**Tableau 9.3** Développements limités.

| $f(x)$ | Partie principale du développement limité de $f$ autour du zéro |
|---|---|
| $e^x$ | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ |
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| $\cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ |
| $\text{Arcsin}\, x$ | $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ |
| $\text{Arctg}\, x$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ |
| $\text{sh}\, x$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ |
| $\text{ch}\, x$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ |
| $\text{Argsh}\, x$ | $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ |
| $\text{Argth}\, x$ | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ |
| $(1+x)^\alpha$ | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$ |
| $\frac{1}{(1+x)^2}$ | $1 - 2x + 3x^2 + \ldots + (-1)^n (n+1) x^n$ |
| $\sqrt{1+x}$ | $1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}x^n$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ | $1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}x^n$ |
| $\text{Log}(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ |
| $\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | $2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ |