

Jacques Zahnd

Logique élémentaire

Formulaire de logique

Notations du formulaire. Les schémas de déduction sont notés dans des boîtes divisées en deux compartiments. Celui de gauche (éventuellement vide) contient les prémisses et celui de droite contient la conclusion. Dans tout le formulaire, les metavariables A, B, C, R, S représentent des propositions; E, T, U, V représentent des termes; x, y, z, u, f représentent des variables.

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Déductions élémentaires

- S1 $\boxed{\Gamma; A \vdash A}$ *hypothèse*
- S2 $\boxed{\Gamma \vdash B \mid \Gamma; A \vdash B}$ *a fortiori*
- S3 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash B \mid \Gamma \vdash A \text{ et } B}$ *et-introduction*
- S4 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ et } B \mid \Gamma \vdash A} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \text{ et } B \mid \Gamma \vdash B}$ *et-élimination*
- S5 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash A \text{ ou } B} \quad \boxed{\Gamma \vdash B \mid \Gamma \vdash A \text{ ou } B}$ *ou-introduction*
- S6 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } B \mid \Gamma; A \vdash C \mid \Gamma; B \vdash C \mid \Gamma \vdash C}$ *disjonction des cas*
- S7 $\boxed{\Gamma; A \vdash B \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ *\Rightarrow -introduction*
- S8 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash B}$ *modus ponens*
- S9 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash \perp}$ *\perp -introduction*
- S10 $\boxed{\Gamma \vdash \perp \mid \Gamma \vdash B}$ *ex falso quodlibet*
- S11 $\boxed{\Gamma; A \vdash \perp \mid \Gamma \vdash \text{non}A}$ *réduction à l'absurde J*
- S12 $\boxed{\Gamma; \text{non}A \vdash \perp \mid \Gamma \vdash A}$ *réduction à l'absurde K*
- S13 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash B \Rightarrow A \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$ *\Leftrightarrow -introduction*
- S14 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash B \Rightarrow A}$ *\Leftrightarrow -élimination*

Relation fautive, contradiction

- S15 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}\perp}$ *\perp est fautive*
- S16 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash B}$ *tout se déduit d'une contradiction*
- S17 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}(A \text{ et } \text{non}A)}$
- S18 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } B \mid \Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non}A \text{ ou } B \mid \Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash B}$

Schémas d'implication

- S19 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow A}$ *réflexivité de l'implication*
- S20 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash B \Rightarrow C \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow C}$ *transitivité de l'implication*
- S21 $\boxed{\Gamma \vdash B \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ *tout implique le vrai*
- S22 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ *le faux implique tout*
 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash \text{non}A \Rightarrow B}$

Schémas d'implication et disjonction

- S23 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow (A \text{ ou } B)}$ $\boxed{\Gamma \vdash B \Rightarrow (A \text{ ou } B)}$ *ou-introduction (bis)*
- S24 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow C} \quad \boxed{\Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Rightarrow C}$
 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow D} \quad \boxed{\Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Rightarrow (C \text{ ou } D)}$
- S25 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } B \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow C} \quad \boxed{\Gamma \vdash C}$ *disjonction des cas (bis)*
- S26 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } B \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash B}$
- S27 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (A \text{ ou } C) \Rightarrow (B \text{ ou } C)}$
 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (C \text{ ou } A) \Rightarrow (C \text{ ou } B)}$

Schémas d'implication et conjonction

- S28 $\boxed{\Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Rightarrow A}$ $\boxed{\Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Rightarrow B}$
- S29 $\boxed{\Gamma \vdash C \Rightarrow A \quad \Gamma \vdash C \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash C \Rightarrow (A \text{ et } B)}$
 $\boxed{\Gamma \vdash C \Rightarrow A \quad \Gamma \vdash D \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (C \text{ et } D) \Rightarrow (A \text{ et } B)}$
- S30 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (A \text{ et } C) \Rightarrow (B \text{ et } C)}$
 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (C \text{ et } A) \Rightarrow (C \text{ et } B)}$

Schémas d'implication et négation

- S31 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non}B \Rightarrow \text{non}A}$ *contraposition*
 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}B \Rightarrow \text{non}A} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$
- S32 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash \text{non}B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non}A}$
- S33 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash \text{non}A \Rightarrow \text{non}B} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$

Tiers exclu, disjonction des cas contraires

- S34 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } \text{non}A}$ *tiers exclu*
- S35 $\boxed{\Gamma; A \vdash C \quad \Gamma; \text{non}A \vdash C} \quad \boxed{\Gamma \vdash C}$ *disjonction de cas contraires*
 $\boxed{\Gamma; A \vdash C \quad \Gamma; \text{non}A \vdash D} \quad \boxed{\Gamma \vdash (C \text{ ou } D)}$
- S36 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash \text{non}A \Rightarrow C} \quad \boxed{\Gamma \vdash C}$
 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash \text{non}A \Rightarrow D} \quad \boxed{\Gamma \vdash C \text{ ou } D}$
- S37 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}C \text{ ou } A \quad \Gamma \vdash C \text{ ou } B} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \text{ ou } B}$
- S38 $\boxed{\Gamma \vdash A \text{ et } B} \quad \boxed{\Gamma \vdash (C \text{ et } A) \text{ ou } (\text{non}C \text{ et } B)}$

Schémas d'équivalence

- S39 $\boxed{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash B}$ *modus ponens (bis)*
 $\boxed{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash A}$

- S40 $\boxed{\Gamma; A \vdash B \quad \Gamma; B \vdash A \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$ *\Leftrightarrow -introduction (bis)*
 $\boxed{\Gamma; A \vdash B \quad \Gamma; \text{non}A \vdash \text{non}B \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$
- S41 $\boxed{\Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))}$
- S42 $\boxed{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$ *deux propositions vraies sont équivalentes*
- S43 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}A \quad \Gamma \vdash \text{non}B \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$ *deux prop. fausses sont équivalentes*
- S44 $\boxed{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \text{non}B \mid \Gamma \vdash \text{non}(A \Leftrightarrow B)}$
- S45 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}(A \Leftrightarrow \text{non}A)}$
- S46 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A}$ *réflexivité de l'équivalence*
- S47 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash B \Leftrightarrow A}$ *symétrie de l'équivalence*
- S48 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \quad \Gamma \vdash B \Leftrightarrow C \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow C}$ *transitivité de l'équivalence*
- S49 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash B \Leftrightarrow C \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow C}$
 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow C \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow C}$

Substitutivité de l'équivalence

- S50.1 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash \text{non}A \Leftrightarrow \text{non}B}$
- S50.2 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \text{ ou } C) \Leftrightarrow (B \text{ ou } C)}$
- S50.3 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (C \text{ ou } A) \Leftrightarrow (C \text{ ou } B)}$
- S50.4 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \text{ et } C) \Leftrightarrow (B \text{ et } C)}$
- S50.5 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (C \text{ et } A) \Leftrightarrow (C \text{ et } B)}$
- S50.6 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)}$
- S50.7 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)}$
- S50.8 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)}$
- S50.9 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash (C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow B)}$

Algèbre de Boole

- S51.1 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \text{nonnon}A}$
- S51.2 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \text{non}B \mid \Gamma \vdash \text{non}A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non}A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash A \Leftrightarrow \text{non}B}$
- S52.1 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\text{non}A \text{ et } \text{non}B)}$ *De Morgan*
- S52.2 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\text{non}A \text{ ou } \text{non}B)}$ *De Morgan*
- S52.3 $\boxed{\Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}A \text{ et } \text{non}B)}$
- S52.4 $\boxed{\Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}A \text{ ou } \text{non}B)}$
- S52.5 $\boxed{\Gamma \vdash (A \text{ ou } A) \Leftrightarrow A}$

S52.6 $\Gamma \vdash (A \text{ et } A) \Leftrightarrow A$

S52.7 $\Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (B \text{ ou } A)$

S52.8 $\Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Leftrightarrow (B \text{ et } A)$

S52.9 $\Gamma \vdash (A \text{ ou } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ ou } C)$

S52.10 $\Gamma \vdash (A \text{ et } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ et } C)$

S52.11 $\Gamma \vdash (A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C))$

S52.12 $\Gamma \vdash (A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C))$

S52.13 $\Gamma \vdash ((A \text{ et } B) \text{ ou } B) \Leftrightarrow B$

S52.14 $\Gamma \vdash ((A \text{ ou } B) \text{ et } B) \Leftrightarrow B$

S52.15 $\Gamma \vdash ((A \text{ et } \text{non}A) \text{ ou } B) \Leftrightarrow B$

S52.16 $\Gamma \vdash ((A \text{ ou } \text{non}A) \text{ et } B) \Leftrightarrow B$

Formes booléennes de l'implication et de l'équivalence

S53 $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}A \text{ ou } B)$

S54 $\Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\text{non}A \Rightarrow B)$

S55 $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}(A \text{ et } \text{non}B)$

$\Gamma \vdash \text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{ et } \text{non}B)$

S56 $\Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Leftrightarrow \text{non}(A \Rightarrow \text{non}B)$

S57 $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$ *contraposition (bis)*

S58.1 $\Gamma \vdash ((A \text{ ou } B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C))$

S58.2 $\Gamma \vdash (C \Rightarrow (A \text{ et } B)) \Leftrightarrow ((C \Rightarrow A) \text{ et } (C \Rightarrow B))$

S59.1 $\Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}A \text{ ou } B) \text{ et } (\text{non}B \text{ ou } A))$

S59.2 $\Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}A \text{ et } \text{non}B) \text{ ou } (A \text{ et } B))$

Simplifications conditionnelles

S60.1 $\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Leftrightarrow B$

S60.2 $\Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow B$

S60.3 $\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \text{ et } B) \Leftrightarrow A$

S60.4 $\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow B$

S60.5 $\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B$

S60.6 $\Gamma \vdash \text{non}B \mid \Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}A$

S60.7 $\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow B$

S60.8 $\Gamma \vdash \text{non}A \mid \Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}B$

LOGIQUE DES PRÉDICATS

Déductions élémentaires

- S61 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xA \mid \Gamma \vdash (T|x)A}$ Si T est librement substituable à x dans A .
- S62 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash \forall xA}$ Si x ne figure pas librement dans Γ .
- S63 $\boxed{\Gamma \vdash (T|x)A \mid \Gamma \vdash \exists xA}$ Si T est librement substituable à x dans A .
- S64 $\boxed{\Gamma \vdash \exists xA \mid \Gamma; A \vdash B \mid \Gamma \vdash B}$ Si x ne figure librement ni dans B , ni dans Γ .

Schémas dérivés

- S65 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xA \mid \Gamma \vdash A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \forall xA \Rightarrow A}$
- S66 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash \exists xA} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow \exists xA}$
- S67 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}\exists xA \mid \Gamma \vdash A \Rightarrow B}$
- S68 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xA \mid \Gamma \vdash \exists xA} \quad \boxed{\Gamma \vdash \forall xA \Rightarrow \exists xA}$
- S69 $\boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash \forall xA \Rightarrow \forall xB} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \mid \Gamma \vdash \exists xA \Rightarrow \exists xB}$
Si x ne figure pas librement dans Γ .
- S70 $\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash \forall xA \Leftrightarrow \forall xB} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \mid \Gamma \vdash \exists xA \Leftrightarrow \exists xB}$
Si x ne figure pas librement dans Γ .
- S71 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non}\exists xA \Leftrightarrow \forall x\text{non}A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non}\forall xA \Leftrightarrow \exists x\text{non}A}$
 $\boxed{\Gamma \vdash \exists xA \Leftrightarrow \text{non}\forall x\text{non}A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \forall xA \Leftrightarrow \text{non}\exists x\text{non}A}$
- S72 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x\forall yA \Leftrightarrow \forall y\forall xA} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x\exists yA \Leftrightarrow \exists y\exists xA}$
- S73 $\boxed{\Gamma \vdash \exists x\forall yA \Rightarrow \forall y\exists xA}$
- S74 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\forall xA \text{ et } \forall xB)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\exists xA \text{ ou } \exists xB)}$
- S75 $\boxed{\Gamma \vdash \exists x(A \text{ et } B) \Rightarrow (\exists xA \text{ et } \exists xB)} \quad \boxed{\Gamma \vdash (\forall xA \text{ ou } \forall xB) \Rightarrow \forall x(A \text{ ou } B)}$
- S76 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xA \Leftrightarrow \forall y(y|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xA \Leftrightarrow \exists y(y|x)A}$
Si y est réversiblement substituable à x dans A .
- S77 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n A \mid \Gamma \vdash (T_1|x_1, \dots, T_n|x_n)A}$
Si T_1, \dots, T_n sont librement substituables à x_1, \dots, x_n dans A .
- S78 $\boxed{\Gamma \vdash (T_1|x_1, \dots, T_n|x_n)A \mid \Gamma \vdash \exists x_1 \cdots \exists x_n A}$
Si T_1, \dots, T_n sont librement substituables à x_1, \dots, x_n dans A .
- S79 $\boxed{\Gamma \vdash A \mid \Gamma \vdash (T_1|x_1, \dots, T_n|x_n)A}$ Si x_1, \dots, x_n ne figurent pas librement dans Γ et si T_1, \dots, T_n sont librement substituables à x_1, \dots, x_n dans A .
- S80 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xB \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xB \Leftrightarrow B}$ Si x ne figure pas librement dans B .
- S81 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\forall xA \text{ ou } B)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\exists xA \text{ et } B)}$
 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\forall xA \text{ et } B)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\exists xA \text{ ou } B)}$
Si x ne figure pas librement dans B (condition pour les quatre schémas).

LOGIQUE DES PRÉDICATS AVEC ÉGALITÉ

Dédutions élémentaires

$$\text{S82} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = T} \quad \textit{réflexivité de l'égalité}$$

$$\text{S83} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash (U|x)A} \quad \textit{substitutivité de l'égalité}$$

Si T et U sont librement substituables à x dans A.

Dédutions dérivées

$$\text{S84} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash U = T} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U \Leftrightarrow U = T} \quad \textit{symétrie de l'égalité}$$

$$\text{S85} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash U = V} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = V} \quad \textit{transitivité de l'égalité}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash (T = U \text{ et } U = V) \Rightarrow T = V}$$

$$\text{S86} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T|x)A \Leftrightarrow (U|x)A}$$

Si T et U sont librement substituables à x dans A.

$$\text{S87.1} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T = U \text{ et } (T|x)A) \Leftrightarrow (T = U \text{ et } (U|x)A)}$$

$$\text{S87.2} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T = U \Rightarrow (T|x)A) \Leftrightarrow (T = U \Rightarrow (U|x)A)}$$

$$\text{S87.3} \quad \boxed{\Gamma \vdash B \Rightarrow T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash (B \text{ et } (T|x)A) \Leftrightarrow (B \text{ et } (U|x)A)}$$

Si T et U sont librement substituables à x dans A (pour les trois schémas).

$$\text{S88} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T|x)V = (U|x)V}$$

Si T et U sont librement substituables à x dans V.

$$\text{S89} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x(x = T)} \quad \text{Si } x \text{ ne figure pas librement dans } T.$$

$$\text{S90} \quad \boxed{\Gamma; x = T \vdash B} \quad \boxed{\Gamma \vdash B}$$

Si x ne figure librement ni dans Γ , ni dans T, ni dans B.

$$\text{S91} \quad \boxed{\Gamma; x = T \vdash A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xA} \quad \text{Si } x \text{ ne figure librement ni dans } \Gamma, \text{ ni dans } T.$$

$$\text{S92} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists x(x = T \text{ et } A) \Leftrightarrow (T|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \forall x(x = T \Rightarrow A) \Leftrightarrow (T|x)A}$$

Si x ne figure pas librement dans T et si T est librement substituable à x dans A.

Quantificateurs d'unicité

Définitions

$$\text{S93} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow \forall x\forall y[(A \text{ et } (y|x)A) \Rightarrow x = y]}$$

Si y est distincte de x et réversiblement substituable à x dans A.

$$\text{S94} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA \Leftrightarrow (\exists xA \text{ et } HxA)}$$

Schémas dérivés

$$\text{S95} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow (\exists xA \Rightarrow \exists!xA)} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow (\text{non}\exists xA \text{ ou } \exists!xA)}$$

$$\text{S96} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow Hy(y|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA \Leftrightarrow \exists!y(y|x)A}$$

Si y est réversiblement substituable à x dans A.

$$\text{S97} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow \exists y\forall x(A \Rightarrow x = y)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA \Leftrightarrow \exists y\forall x(A \Leftrightarrow x = y)}$$

Si y est distincte de x et ne figure pas librement dans A.

$$S98 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow x = T} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow x = T} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA}$$

Si x ne figure librement ni dans Γ , ni dans T .

$$S99 \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash (U|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = U}$$

Si T et U sont librement substituables à x dans A .

$$S100 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxB \Rightarrow HxA}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow HxB} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA \Leftrightarrow \exists!xB}$$

Si x ne figure pas librement dans Γ (condition pour les trois schémas).

LOGIQUE DES PRÉDICATS AVEC ÉGALITÉ ET SÉLECTEURS

Déductions élémentaires

$$SEL1 \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xA} \quad \boxed{\Gamma \vdash T = SxA} \quad \boxed{\Gamma \vdash (T|x)A}$$

Si T est librement substituable à x dans A .

$$SEL2 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash SxA = SxB} \quad \text{Si } x \text{ ne figure pas librement dans } \Gamma.$$

$$SEL3 \quad \boxed{\Gamma \vdash SxA = Sy(y|x)A} \quad \text{Si } y \text{ est réversiblement substituable à } x \text{ dans } A.$$

Schémas dérivés

$$SEL4 \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xA \Leftrightarrow (SxA|x)A} \quad \boxed{\Gamma \vdash \forall xA \Leftrightarrow (SxnonA|x)A}$$

Si SxA est librement substituable à x dans A .

$$SEL5 \quad \boxed{\Gamma \vdash (Sx(x = T)) = T} \quad \text{Si } x \text{ ne figure pas librement dans } T.$$

$$SEL6 \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists xA \Leftrightarrow \forall x(x = SxA \Rightarrow A)}$$

$$SEL7 \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA \Leftrightarrow \forall x(A \Rightarrow x = SxA)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA \Leftrightarrow \forall x(A \Leftrightarrow x = SxA)}$$

$$SEL8 \quad \boxed{\Gamma \vdash HxA} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow (\exists xA \text{ et } x = SxA)} \quad \boxed{\Gamma \vdash \exists!xA} \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow x = SxA}$$

Termes conditionnels

TC1 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = Sx[(A \Rightarrow x = T_1) \text{ et } (nonA \Rightarrow x = T_2)]}$$

Si x ne figure librement ni dans A , ni dans T_1 , ni dans T_2 .

$$TC2 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = SiBT_1T_2}$$

$$TC3 \quad \boxed{\Gamma \vdash A} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = T_1} \quad \boxed{\Gamma \vdash nonA} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = T_2}$$

$$TC4 \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT T = T}$$

$$TC5 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow T_1 = T'_1} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = SiAT'_1T_2}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash nonA \Rightarrow T_2 = T'_2} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = SiAT'_1T'_2}$$

$$TC6 \quad \boxed{\Gamma \vdash T_1 = T'_1} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = SiAT'_1T_2}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash T_2 = T'_2} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1T_2 = SiAT_1T'_2}$$

$$TC7 \quad \boxed{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \boxed{\Gamma \vdash SiAT_1(SiBT_2T_3) = SiB(SiAT_1T_2)T_3}$$

THÉORIE DES ENSEMBLES

Inclusion, égalité, ensemble vide (§10.7)

E1 Axiome de l'inclusion $\vdash x \subset y \Leftrightarrow \forall a(a \in x \Rightarrow a \in y)$.

E2 Axiome de l'ensemble vide $\vdash \forall x(x \notin \emptyset)$.

E3 $\boxed{\Gamma \vdash T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow \forall z(z \in T_1 \Rightarrow z \in T_2)}$

Si z ne figure librement ni dans T_1 , ni dans T_2 .

E4 1. $\boxed{\Gamma \vdash T_1 \subset T_2 \mid \Gamma \vdash E \in T_1 \Rightarrow E \in T_2}$

2. $\boxed{\Gamma \vdash T_1 \subset T_2 \mid \Gamma \vdash E \in T_1 \mid \Gamma \vdash E \in T_2}$

3. $\boxed{\Gamma \vdash T_1 \subset T_2 \mid \Gamma \vdash E \notin T_2 \mid \Gamma \vdash E \notin T_1}$

E5 1. $\boxed{\Gamma \vdash z \in T_1 \Rightarrow z \in T_2 \mid \Gamma \vdash T_1 \subset T_2}$

2. $\boxed{\Gamma; z \in T_1 \vdash z \in T_2 \mid \Gamma \vdash T_1 \subset T_2}$

Si z ne figure librement ni dans Γ , ni dans T_1 , ni dans T_2 .

E6 $\vdash x \subset x$.

E7 $\vdash \emptyset \subset x$.

E8 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x(x \in \emptyset \Rightarrow R(x))}$

E9 $\vdash (x \subset y \text{ et } y \subset z) \Rightarrow x \subset z$.

E10 Axiome d'extensionnalité $\vdash x = y \Leftrightarrow (x \subset y \text{ et } y \subset x)$.

E11 $\boxed{\Gamma \vdash T_1 = T_2 \mid \Gamma \vdash E \in T_1 \Leftrightarrow E \in T_2}$

E12 $\vdash x \subset \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset$.

E13 $\vdash x = \emptyset \Leftrightarrow \forall a(a \notin x)$.

$\vdash x \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists a(a \in x)$.

E14 $\vdash (x \subset y \text{ et } y = \emptyset) \Rightarrow x = \emptyset$.

$\vdash (x \subset y \text{ et } x \neq \emptyset) \Rightarrow y \neq \emptyset$.

E15 $\boxed{\Gamma; z \in T \vdash \perp \mid \Gamma \vdash T = \emptyset}$

Si z ne figure librement ni dans Γ , ni dans T .

E16 $\vdash x = y \Leftrightarrow \forall a(a \in x \Leftrightarrow a \in y)$.

E17 Si z ne figure librement ni dans T_1 , ni dans T_2 :

1. $\boxed{\Gamma \vdash T_1 = T_2 \Leftrightarrow \forall z(z \in T_1 \Leftrightarrow z \in T_2)}$

Si, en outre, z ne figure pas librement dans Γ :

2. $\boxed{\Gamma \vdash z \in T_1 \Leftrightarrow z \in T_2 \mid \Gamma \vdash T_1 = T_2}$

3. $\boxed{\Gamma; z \in T_1 \vdash z \in T_2 \mid \Gamma; z \in T_2 \vdash z \in T_1 \mid \Gamma \vdash T_1 = T_2}$

Réunion et intersection de deux ensembles (§10.7)

E18 Axiome de la réunion de deux ensembles

$\vdash x \in a \cup b \Leftrightarrow (x \in a \text{ ou } x \in b)$.

E19 $\vdash a \cup a = a$.

E20 $\vdash a \cup b = b \cup a$.

E21 $\vdash a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

E22 $\vdash a \cup \emptyset = a$.

- E23 $\vdash a \subset a \cup b \quad \vdash b \subset a \cup b.$
 E24 $\vdash (a \subset c \text{ et } b \subset c) \Leftrightarrow a \cup b \subset c.$
 E25 $\vdash a \subset b \Leftrightarrow a \cup b = b.$
 E26 $\vdash (a \subset a' \text{ et } b \subset b') \Rightarrow (a \cup b \subset a' \cup b').$
 E27 $\vdash a \cup b = \emptyset \Leftrightarrow (a = \emptyset \text{ et } b = \emptyset).$
 E28 Axiome de l'intersection de deux ensembles
 $\vdash x \in a \cap b \Leftrightarrow (x \in a \text{ et } x \in b).$
 E29 $\vdash a \cap a = a.$
 E30 $\vdash a \cap b = b \cap a.$
 E31 $\vdash a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c.$
 E32 $\vdash a \cap \emptyset = \emptyset.$
 E33 $\vdash a \cap b \subset a \quad \vdash a \cap b \subset b.$
 E34 $\vdash (c \subset a \text{ et } c \subset b) \Leftrightarrow c \subset a \cap b.$
 E35 $\vdash a \subset b \Leftrightarrow a \cap b = a.$
 E36 $\vdash (a \subset a' \text{ et } b \subset b') \Rightarrow (a \cap b \subset a' \cap b').$
 E37 $\vdash a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$
 E38 $\vdash a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$
 E39 $\vdash a \cap b = \emptyset \Leftrightarrow \forall x(x \in a \Rightarrow x \notin b).$

Ensemble complémentaire d'un ensemble (§10.7)

- E40 Axiome de l'ensemble complémentaire
 $\vdash x \in \mathbb{C}_a(b) \Leftrightarrow (x \in a \text{ et } x \notin b).$
 E41 $\vdash \mathbb{C}_a(b) \subset a.$
 E42 $\vdash \mathbb{C}_a(b) = a \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset.$
 E43 $\vdash \mathbb{C}_a(b) = \emptyset \Leftrightarrow a \subset b.$
 E44 $\vdash \mathbb{C}_a(\emptyset) = a \quad \vdash \mathbb{C}_a(a) = \emptyset.$
 E45 $\vdash \mathbb{C}_{\emptyset}(b) = \emptyset.$
 E46 $\vdash \mathbb{C}_X(a \cup b) = \mathbb{C}_X(a) \cap \mathbb{C}_X(b).$
 E47 $\vdash \mathbb{C}_X(a \cap b) = \mathbb{C}_X(a) \cup \mathbb{C}_X(b).$
 E48 $\vdash a \subset b \Rightarrow \mathbb{C}_X(b) \subset \mathbb{C}_X(a).$
 $a \subset X; b \subset X \vdash a \subset b \Leftrightarrow \mathbb{C}_X(b) \subset \mathbb{C}_X(a).$
 E49 $\vdash \mathbb{C}_X(\mathbb{C}_X(a)) = X \cap a.$
 E50 $\vdash a \subset X \Leftrightarrow \mathbb{C}_X(\mathbb{C}_X(a)) = a.$

Ensembles à deux éléments (§11.3)

- E51 Axiome de l'ensemble à deux éléments
 $\vdash x \in \{a, b\} \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b).$
 E52 $\vdash a \in \{a, b\} \quad \vdash b \in \{a, b\}.$
 E53 $\vdash \{a, b\} \neq \emptyset.$
 E54 $\vdash \forall a \exists x(a \in x).$
 E55 $\vdash \{a, b\} = \{b, a\}.$

E56	$\Gamma \vdash \exists x(x \in \{a, b\} \text{ et } R) \Leftrightarrow ((a x)R \text{ ou } (b x)R)$
-----	---

$\Gamma \vdash \forall x(x \in \{a, b\} \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((a x)R \text{ et } (b x)R)$

Si a et b sont librement substituables à x dans R .

E57 $\vdash \{a, b\} \subset X \Leftrightarrow (a \in X \text{ et } b \in X)$.

E58 $\vdash \{a, b\} = \{a, c\} \Leftrightarrow b = c$.

Ensembles à un seul élément (§11.3)

E59 Définition (axiome) $\vdash \{a\} = \{a, a\}$.

E60 Théorème principal $\vdash x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$.

E61 $\vdash a \in \{a\}$.

E62 $\vdash \{a\} \neq \emptyset$.

E63 $\vdash \{a\} \subset X \Leftrightarrow a \in X$.

E64 $\vdash \{a\} \cap X \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in X$.

E65 $\vdash \{a\} \subset \{b\} \Leftrightarrow a = b$.

E66 $\vdash \{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a = b$.

E67 $\vdash a = b \Leftrightarrow \{a, b\} = \{a\}$.

E68 $\vdash \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$.

E69 $\vdash \{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset \Leftrightarrow a = b$.

E70 $\vdash X \subset \{a\} \Leftrightarrow (X = \emptyset \text{ ou } X = \{a\})$.

Ensemble des parties d'un ensemble (§11.3)

E71 Axiome de l'ensemble des parties $\vdash x \in \mathcal{P}(a) \Leftrightarrow x \subset a$.

E72 $\vdash a \in \mathcal{P}(a)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(a)$.

E73 $\vdash \mathcal{P}(a) \neq \emptyset$.

E74 $\vdash \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

E75 $\vdash \mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$.

E76 $\vdash \mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

E77 $\vdash a \subset b \Leftrightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(b)$.

Couples (§12.2)

E78 Définition (axiome) $\vdash (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

E79 Théorème principal $\vdash (a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$.

E80 $\vdash (a, b) = (b, a) \Rightarrow a = b$.

E81 Définition (axiome) $\vdash (z \text{ est un couple}) \Leftrightarrow \exists a \exists b (z = (a, b))$.

E82 $\vdash (x, y)$ est un couple.

E83 Axiome des projections d'un couple

$\vdash z \text{ est un couple} \Rightarrow z = (\mathbf{pr}_1 z, \mathbf{pr}_2 z)$.

E84 $\vdash \mathbf{pr}_1(x, y) = x \quad \vdash \mathbf{pr}_2(x, y) = y$.

E85 $\vdash z \text{ est un couple} \Leftrightarrow z = (\mathbf{pr}_1 z, \mathbf{pr}_2 z)$.

Graphes (§12.2)

E86 Définition (axiome)

$\vdash G \text{ est un graphe} \Leftrightarrow \forall z (z \in G \Rightarrow z \text{ est un couple})$.

E87 $\vdash \emptyset$ est un graphe.

E88 \vdash Si G est un graphe, alors $z \in G \Leftrightarrow (z \text{ est un couple et } z \in G)$.

E89 \vdash Si G est un graphe et $F \subset G$, alors F est un graphe.

E90 \vdash Si G et G' sont des graphes, alors $G \cup G'$ et $G \cap G'$ sont des graphes.

- E91 \vdash Si G et G' sont des graphes, alors
 $G \subset G' \Leftrightarrow \forall x \forall y ((x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G')$;
 $G = G' \Leftrightarrow \forall x \forall y ((x, y) \in G \Leftrightarrow (x, y) \in G')$.
- E92 \vdash Si G est un graphe, alors
 $G = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \forall y ((x, y) \notin G)$;
 $G \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \exists y ((x, y) \in G)$.

Réunions (§14.1)

E93 Schéma de réunion.

Premier schéma de déduction élémentaire spécifique de \mathcal{T}_{ENS}

$$\boxed{\Gamma \vdash \exists u [\forall y (y \in u \Leftrightarrow \exists x (x \in E \text{ et } y \in T(x)))]}$$

Si x, u, y sont des variables distinctes; x ne figure pas librement dans E ;
 u et y ne figurent librement ni dans E , ni dans T .

E94 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash \bigcup_{x \in E} T(x) = \text{Su} [\forall y (y \in u \Leftrightarrow \exists x' (x' \in E \text{ et } y \in T(x')))]}$$

Si x', u, y sont des variables distinctes; x' est réversiblement substituable
à x dans T ; $T(x')$ est le terme $(x'|x)T$; x' ne figure pas librement dans E ;
 u et y ne figurent librement ni dans E , ni dans T .

E95 Schéma principal

$$\boxed{\Gamma \vdash y \in \bigcup_{x \in E} T(x) \Leftrightarrow \exists x' (x' \in E \text{ et } y \in T(x'))}$$

Si x' et y sont des variables distinctes; x' est réversiblement substituable
à x dans T ; $T(x')$ est le terme $(x'|x)T$; x' ne figure pas librement dans E ;
 y ne figure librement ni dans E , ni dans T .

E96

$$\boxed{\Gamma \vdash E = E' \quad \Gamma \vdash \bigcup_{x \in E} T(x) = \bigcup_{x \in E'} T(x)}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash T(x) = T'(x) \quad \Gamma \vdash \bigcup_{x \in E} T(x) = \bigcup_{x \in E} T'(x)}$$

Si x ne figure pas
librement dans Γ .

E97

$$\boxed{\Gamma \vdash \bigcup_{x \in E} T(x) = \bigcup_{z \in E} T(z)}$$

Si z est réversiblement
substituable à x dans T .

Dans les schémas de théorèmes E98–E105, $T(x)$ représente un terme; $T(a)$
et $T(b)$ représentent les termes $(a|x)T$ et $(b|x)T$; on suppose que a et b sont
librement substituables à x dans T .

$$\text{E98 } \vdash \bigcup_{x \in \{a,b\}} T(x) = T(a) \cup T(b) \quad \vdash \bigcup_{x \in \{a\}} T(x) = T(a).$$

$$\text{E99 } \vdash \bigcup_{x \in \{a,b\}} x = a \cup b \quad \vdash \bigcup_{x \in \{a\}} x = a.$$

$$\text{E100 } \vdash \bigcup_{x \in \emptyset} T(x) = \emptyset.$$

$$\text{E101 } \vdash A \subset B \Rightarrow \bigcup_{x \in A} T(x) \subset \bigcup_{x \in B} T(x).$$

- E102 $\vdash \bigcup_{x \in A \cup B} \mathbb{T}(x) = \bigcup_{x \in A} \mathbb{T}(x) \cup \bigcup_{x \in B} \mathbb{T}(x).$
- E103 $\vdash x \in A \Rightarrow \mathbb{T}(x) \subset \bigcup_{x \in A} \mathbb{T}(x).$
- E104 $\vdash x \in A \Rightarrow \mathbb{T}(x) \in \bigcup_{x \in A} \{\mathbb{T}(x)\}.$
- E105 $\vdash \bigcup_{x \in A} \mathbb{T}(x) \subset Y \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow \mathbb{T}(x) \subset Y).$

Produits cartésiens (§14.1)

- E106 Définition $\vdash X \times Y = \bigcup_{x \in X} \left(\bigcup_{y \in Y} \{(x, y)\} \right).$
- E107 $\vdash z \in X \times Y \Leftrightarrow (z \text{ est un couple et } \mathbf{pr}_1 z \in X \text{ et } \mathbf{pr}_2 z \in Y).$
- E108 $\vdash X \times Y$ est un graphe.
- E109 Théorème principal $\vdash (x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } y \in Y).$
- E110 $\vdash X \times Y = \emptyset \Leftrightarrow (X = \emptyset \text{ ou } Y = \emptyset).$
- E111 $\vdash (X \subset X' \text{ et } Y \subset Y') \Rightarrow X \times Y \subset X' \times Y'.$
- E112 \vdash Si $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$, alors
 $(X \subset X' \text{ et } Y \subset Y') \Leftrightarrow X \times Y \subset X' \times Y'.$
- E113 $\vdash (X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y').$
- E114 $\vdash X \times (A \cup B) = (X \times A) \cup (X \times B).$
 $\vdash (A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X).$
- E115 $\vdash \{a\} \times \{b\} = \{(a, b)\}.$
 $\vdash \{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}.$
 $\vdash \{a, b\} \times \{c\} = \{(a, c), (b, c)\}.$
 $\vdash \{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}.$

Projections d'un graphe (§14.1)

- E116 Définition
 $\vdash G$ est un graphe $\Rightarrow \left(\mathbf{Pr}_1 G = \bigcup_{z \in G} \{\mathbf{pr}_1 z\} \text{ et } \mathbf{Pr}_2 G = \bigcup_{z \in G} \{\mathbf{pr}_2 z\} \right).$
- E117 Théorèmes principaux
 G est un graphe $\vdash x \in \mathbf{Pr}_1 G \Leftrightarrow \exists y((x, y) \in G).$
 G est un graphe $\vdash y \in \mathbf{Pr}_2 G \Leftrightarrow \exists x((x, y) \in G).$
- E118 $\vdash G$ est un graphe $\Rightarrow G \subset \mathbf{Pr}_1 G \times \mathbf{Pr}_2 G.$
- E119 \vdash Si G et G' sont des graphes, alors
 $G \subset G' \Rightarrow (\mathbf{Pr}_1 G \subset \mathbf{Pr}_1 G' \text{ et } \mathbf{Pr}_2 G \subset \mathbf{Pr}_2 G').$
- E120 $\vdash G \subset X \times Y \Rightarrow (\mathbf{Pr}_1 G \subset X \text{ et } \mathbf{Pr}_2 G \subset Y).$
- E121 $\vdash Y \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{Pr}_1(X \times Y) = X.$
 $\vdash X \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{Pr}_2(X \times Y) = Y.$
- E122 G est un graphe $\vdash G = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{Pr}_1 G = \emptyset.$
 G est un graphe $\vdash G = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{Pr}_2 G = \emptyset.$

Graphe réciproque d'un graphe (§14.1)

E123 Définition

$$\vdash G \text{ est un graphe} \Rightarrow G^{-1} = \bigcup_{z \in G} \{(\mathbf{pr}_2 z, \mathbf{pr}_1 z)\}.$$

E124 $\vdash G$ est un graphe $\Rightarrow G^{-1}$ est un graphe.

E125 Théorème principal

$$\vdash \text{Si } G \text{ est un graphe, alors } (x, y) \in G^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in G.$$

E126 G est un graphe $\vdash (G^{-1})^{-1} = G$.E127 G est un graphe $\vdash \mathbf{Pr}_1(G^{-1}) = \mathbf{Pr}_2 G$ et $\mathbf{Pr}_2(G^{-1}) = \mathbf{Pr}_1 G$.E128 G et G' sont des graphes $\vdash (G \cup G')^{-1} = G^{-1} \cup G'^{-1}$.

$$G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \vdash (G \cap G')^{-1} = G^{-1} \cap G'^{-1}.$$

E129 $\vdash \emptyset^{-1} = \emptyset$.*Graphe identique d'un ensemble (§14.1)*E130 Définition $\vdash \text{Id}_X = \bigcup_{a \in X} \{(a, a)\}$.E131 $\vdash \text{Id}_X \subset X \times X$.E132 $\vdash \text{Id}_X$ est un graphe.E133 Théorème principal $\vdash (x, y) \in \text{Id}_X \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } y = x)$.E134 $\vdash \mathbf{Pr}_1(\text{Id}_X) = X$ et $\mathbf{Pr}_2(\text{Id}_X) = X$.E135 $\vdash \text{Id}_\emptyset = \emptyset$.E136 $\vdash \text{Id}_{(X \cup Y)} = \text{Id}_X \cup \text{Id}_Y$.

$$\vdash \text{Id}_{(X \cap Y)} = \text{Id}_X \cap \text{Id}_Y.$$

E137 $\vdash (\text{Id}_X)^{-1} = \text{Id}_X$.*Opérateurs de collection simples (§14.2)*

E138 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash \{x \mid R\} = \text{Sy} \forall x (x \in y \Leftrightarrow R)}$$

Si y est distincte de x et ne figure pas librement dans R .

E139 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash \{x \mid R\} \text{ existe} \Leftrightarrow \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow R)}$$

Si y est distincte de x et ne figure pas librement dans R .E140 $\boxed{\Gamma \vdash \text{Hy} \forall x (x \in y \Leftrightarrow R)}$ Si y est distincte de x et ne figure pas librement dans R .E141 $\boxed{\Gamma \vdash \forall x (x \in T \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (\{x \mid R\} \text{ existe et } T = \{x \mid R\})}$ Si x ne figure pas librement dans T .E142 $\boxed{\Gamma \vdash \{x \mid R\} \text{ existe} \Leftrightarrow \forall x (x \in \{x \mid R\} \Leftrightarrow R)}$ E143 $\boxed{\Gamma \vdash \{x \mid R\} \text{ existe et } T = \{x \mid R\} \mid \Gamma \vdash U \in T \Leftrightarrow (U \mid x)R}$ Si x ne figure pas librement dans T et si U est librement substituable à x dans R .

$$\text{E144} \quad \boxed{\Gamma \vdash R \Leftrightarrow R' \quad \Gamma \vdash \{x|R\} \text{ existe} \Leftrightarrow \{x|R'\} \text{ existe}}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash R \Leftrightarrow R' \quad \Gamma \vdash \{x|R\} = \{x|R'\}}$$

Si x ne figure pas librement dans Γ .

$$\text{E145} \quad \boxed{\Gamma \vdash \{x|R\} \text{ existe} \Leftrightarrow \{z|(z|x)R\} \text{ existe}}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash \{x|R\} = \{z|(z|x)R\}}$$

Si z est réversiblement substituable à x dans R .

E146 *Schéma de séparation*

Deuxième schéma de déduction élémentaire spécifique de \mathcal{T}_{ENS}

$$\boxed{\Gamma \vdash \{x|x \in E \text{ et } R\} \text{ existe}} \quad \text{Si } x \text{ ne figure pas librement dans } E.$$

$$\text{E147} \quad \boxed{\Gamma \vdash R \Rightarrow x \in E} \quad \boxed{\Gamma \vdash \{x|R\} \text{ existe}}$$

Si x ne figure librement ni dans E , ni dans Γ .

Transformé d'un ensemble par un graphe (§14.2)

E148 Définition

\vdash Si G est un graphe, alors

$$G\langle X \rangle = \{y | \exists x(x \in X \text{ et } (x, y) \in G)\}.$$

E149 G est un graphe $\vdash \{y | \exists x(x \in X \text{ et } (x, y) \in G)\}$ existe.

E150 Théorème principal

G est un graphe $\vdash y \in G\langle X \rangle \Leftrightarrow \exists x(x \in X \text{ et } (x, y) \in G)$.

E151 G est un graphe $\vdash G\langle X \rangle \subset \mathbf{Pr}_2 G$.

E152 G est un graphe $\vdash G\langle \mathbf{Pr}_1 G \rangle = \mathbf{Pr}_2 G$.

E153 G est un graphe $\vdash G\langle X \rangle = G\langle X \cap \mathbf{Pr}_1 G \rangle$.

E154 G est un graphe $\vdash (x, y) \in G \Leftrightarrow y \in G\langle \{x\} \rangle$.

E155 G est un graphe $\vdash G\langle X \rangle = \bigcup_{x \in X} G\langle \{x\} \rangle$.

E156 G est un graphe $\vdash X \subset Y \Rightarrow G\langle X \rangle \subset G\langle Y \rangle$.

E157 G est un graphe $\vdash G\langle X \cup Y \rangle = G\langle X \rangle \cup G\langle Y \rangle$.

E158 G est un graphe $\vdash G\langle X \cap Y \rangle \subset G\langle X \rangle \cap G\langle Y \rangle$.

E159 G est un graphe $\vdash G\langle X \rangle = \emptyset \Leftrightarrow X \cap \mathbf{Pr}_1 G = \emptyset$.

E160 G est un graphe $\vdash x \in \mathbf{Pr}_1 G \Leftrightarrow G\langle \{x\} \rangle \neq \emptyset$.

E161 G est un graphe $\vdash G\langle \emptyset \rangle = \emptyset$.

E162 $\vdash \text{Id}_Y \langle X \rangle = X \cap Y$.

E163 $\vdash X \subset Y \Leftrightarrow \text{Id}_Y \langle X \rangle = X$.

Collections vides. Réunion, intersection, inclusion de collections (§14.2)

$$\text{E164} \quad \boxed{\Gamma \vdash \text{non} \exists x R \Leftrightarrow (\{x|R\} \text{ existe et } \{x|R\} = \emptyset)}$$

$$\text{E165} \quad \frac{\Gamma \vdash \{x|R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash \{x|S\} \text{ existe}}{\Gamma \vdash \{x|R \text{ ou } S\} \text{ existe et } \{x|R \text{ ou } S\} = \{x|R\} \cup \{x|S\}}.$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{x|R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash \{x|S\} \text{ existe}}{\Gamma \vdash \{x|R \text{ et } S\} \text{ existe et } \{x|R \text{ et } S\} = \{x|R\} \cap \{x|S\}}.$$

E166	$\Gamma \vdash \{x R\}$ et $\{x S\}$ existent	$\Gamma \vdash \forall x(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow \{x R\} \subset \{x S\}$
	$\Gamma \vdash \{x R\}$ et $\{x S\}$ existent	$\Gamma \vdash \forall x(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow \{x R\} = \{x S\}$

Collections non existantes (§14.2)

E167 $\vdash \{x | x \notin x\}$ n'existe pas.

E168 $\boxed{\Gamma \vdash \text{non} \forall x(x \in E)}$ Si x ne figure pas librement dans E .
 $\vdash \text{non} \exists u \forall x(x \in u)$. $\vdash \forall u \exists x(x \notin u)$.

E169 $\boxed{\Gamma \vdash \forall xR}$ $\Gamma \vdash \{x | R\}$ n'existe pas

E170 $\boxed{\Gamma \vdash \{x | R\}$ existe $\Gamma \vdash \{x | \text{non}R\}$ n'existe pas

E171 $\boxed{\Gamma \vdash \forall y \exists x(R \text{ et } y \in T(x))}$ $\Gamma \vdash \{x | R\}$ n'existe pas

Si y est distincte de x et ne figure librement ni dans R , ni dans T .

Opérateurs de collection généraux (§14.3)

E172 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} = \{z | \exists x_1 \cdots \exists x_n(z = E \text{ et } R)\}}$$

Si x_1, \dots, x_n, z sont des variables distinctes et si z ne figure librement ni dans E , ni dans R .

E173 Définition

$$\boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe} \Leftrightarrow \{z | \exists x_1 \cdots \exists x_n(z = E \text{ et } R)\} \text{ existe}}$$

Si x_1, \dots, x_n, z sont des variables distinctes et si z ne figure librement ni dans E , ni dans R .

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \forall z(z \in T \Leftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n(z = E \text{ et } R)) \\ \hline \Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe et } T = \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \\ \hline \Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe et } T = \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \\ \hline \Gamma \vdash \forall z(z \in T \Leftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n(z = E \text{ et } R)) \end{array}$$

Si x_1, \dots, x_n, z sont des variables distinctes et si z ne figure librement ni dans E , ni dans T , ni dans R .

$$\boxed{\Gamma \vdash E = E'} \quad \boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} = \{E' | x_1 \cdots x_n | R\}}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash R \Leftrightarrow R'} \quad \boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} = \{E | x_1 \cdots x_n | R'\}}$$

Si x_1, \dots, x_n sont des variables distinctes et ne figurent pas librement dans Γ .

$$\boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} = \{E' | y_1 \cdots y_n | R'\}}$$

Si x_1, \dots, x_n sont des variables distinctes; y_1, \dots, y_n sont des variables distinctes qui ne figurent pas librement dans $\{E | x_1 \cdots x_n | R\}$; E' est le terme $(y_1 | x_1, \dots, y_n | x_n)E$; R' est la proposition $(y_1 | x_1, \dots, y_n | x_n)R$; y_i ($i = 1, \dots, n$) est librement substituable à x_i dans E et dans R .

$$\boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash T = \{E | x_1 \cdots x_n | R\}}$$

$$\Gamma \vdash \forall z(z \in T \Rightarrow A) \Leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n(R \Rightarrow (E|z)A)$$

Si x_1, \dots, x_n, z sont des variables distinctes; x_1, \dots, x_n ne figurent librement ni dans T , ni dans A ; z ne figure librement ni dans E , ni dans T , ni dans R ; E est librement substituable à z dans A .

$$\text{E178 } \frac{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash T = \{E | x_1 \cdots x_n | R\}}{\Gamma \vdash T \subset U \Leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n (R \Rightarrow E \in U)}$$

Si x_1, \dots, x_n sont des variables distinctes et ne figurent librement ni dans T , ni dans U .

$$\text{E179 } \frac{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash T = \{E | x_1 \cdots x_n | R\}}{\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n (R \Rightarrow E \in T)}$$

Si x_1, \dots, x_n sont des variables distinctes ne figurant pas librement dans T .

$$\text{E180 } \frac{\Gamma \vdash \{(x, y) | xy | R\} \text{ existe} \quad \Gamma \vdash T = \{(x, y) | xy | R\}}{\Gamma \vdash \forall x \forall y (R \Leftrightarrow (x, y) \in T)}$$

Si x, y sont des variables distinctes qui ne figurent pas librement dans T .

$$\text{E181 } \boxed{\Gamma \vdash R \Rightarrow E \in U} \mid \boxed{\Gamma \vdash \{E | x_1 \cdots x_n | R\} \text{ existe}}$$

Si x_1, \dots, x_n sont des variables distinctes et ne figurent librement ni dans Γ , ni dans U .

$$\text{E182 } \boxed{\Gamma \vdash R \Rightarrow x \in V} \mid \boxed{\Gamma \vdash \{E | x | R\} \text{ existe}}$$

Si x ne figure librement ni dans Γ , ni dans V .

Composé de deux graphes (§14.3)

E183 Définition

$$\vdash G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \Rightarrow \\ G' \circ G = \{(a, b) | \exists x ((a, x) \in G \text{ et } (x, b) \in G')\}.$$

E184 $\vdash G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \Rightarrow$

$$\{(a, b) | \exists x ((a, x) \in G \text{ et } (x, b) \in G')\} \text{ existe.}$$

E185 Théorème principal

$$\vdash \text{ Si } G \text{ et } G' \text{ sont des graphes, alors } G' \circ G \text{ est un graphe et} \\ (a, b) \in G' \circ G \Leftrightarrow \exists x ((a, x) \in G \text{ et } (x, b) \in G').$$

$$\text{E186 } \vdash G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \Rightarrow G' \circ G \subset \mathbf{Pr}_1 G \times \mathbf{Pr}_2 G'$$

$$\text{E187 } \vdash G, G', G'' \text{ sont des graphes} \Rightarrow G'' \circ (G' \circ G) = (G'' \circ G') \circ G.$$

$$\text{E188 } \vdash G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \Rightarrow (G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}.$$

E189 \vdash Si G et G' sont des graphes, alors

$$\mathbf{Pr}_1(G' \circ G) = G^{-1} \langle \mathbf{Pr}_1 G' \rangle;$$

$$\mathbf{Pr}_2(G' \circ G) = G' \langle \mathbf{Pr}_2 G \rangle;$$

$$\mathbf{Pr}_1(G' \circ G) \subset \mathbf{Pr}_1 G \text{ et } \mathbf{Pr}_2(G' \circ G) \subset \mathbf{Pr}_2 G'.$$

$$\text{E190 } \vdash G \text{ est un graphe} \Rightarrow (G \circ \emptyset = \emptyset \text{ et } \emptyset \circ G = \emptyset).$$

$$\text{E191 } \vdash (G \text{ est un graphe et } \mathbf{Pr}_1 G \subset X) \Rightarrow G \circ \text{Id}_X = G.$$

$$\vdash (G \text{ est un graphe et } \mathbf{Pr}_2 G \subset Y) \Rightarrow \text{Id}_Y \circ G = Y.$$

$$\text{E192 } \vdash G \text{ est un graphe} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Pr}_1 G} \subset G^{-1} \circ G.$$

$$\vdash G \text{ est un graphe} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Pr}_2 G} \subset G \circ G^{-1}.$$

$$\text{E193 } \vdash G \text{ est un graphe} \Rightarrow G \langle X \rangle = \mathbf{Pr}_2(G \circ \text{Id}_X).$$

$$\text{E194 } \vdash G \text{ et } G' \text{ sont des graphes} \Rightarrow (G' \circ G) \langle X \rangle = G' \langle G \langle X \rangle \rangle.$$

FONCTIONS

F1 Définition

$\vdash F$ est une fonction $\Leftrightarrow [F \text{ est un graphe et } \forall xHy((x, y) \in F)]$.

F2 $\vdash F$ est une fonction \Leftrightarrow

$[F \text{ est un graphe et } \forall x(x \in \mathbf{Pr}_1 F \Rightarrow \exists!x((x, y) \in F))]$.

F3 $\vdash F$ est une fonction $\Leftrightarrow (F \text{ est un graphe et } F \circ F^{-1} = \text{Id}_{\mathbf{Pr}_2 F})$.

F4 Définition

$\vdash F$ est une fonction $\Rightarrow (\text{Dom} F = \mathbf{Pr}_1 F \text{ et } \text{Prt} F = \mathbf{Pr}_2 F)$.

F5 Définition

$\vdash F$ est une fonction $\Rightarrow F @ x = \text{Sy}((x, y) \in F)$.

F6 \vdash Si F est une fonction, alors

$(x, y) \in F \Leftrightarrow (x \in \text{Dom} F \text{ et } y = F @ x)$.

F7 \vdash Si F est une fonction, alors

$x \in \text{Dom} F \Leftrightarrow (x, F @ x) \in F$;
 $\text{Prt} F = \{F @ x \mid x \in \text{Dom} F\}$.

F8 Définition

$\vdash (F : A \rightarrow B) \Leftrightarrow (F \text{ est une fonction et } \text{Dom} F = A \text{ et } \text{Prt} F \subset B)$.

F9 $\vdash (F : A \rightarrow B) \Leftrightarrow$

$(F \text{ est une fonction et } \text{Dom} F = A \text{ et } \forall x(x \in A \Rightarrow F @ x \in B))$.

F10 $\vdash F$ est une fonction $\Leftrightarrow (F : \text{Dom} F \rightarrow \text{Prt} F)$.

F11

$\Gamma \vdash \left[\begin{array}{l} f \text{ est une fonction et} \\ \text{Dom} f = E \\ \forall x(x \in \text{Dom} f \Rightarrow f @ x = T(x)) \end{array} \right] \Leftrightarrow f = \{(x, T(x)) \mid x \in E\}$
--

Si f et x sont des variables distinctes et si x ne figure pas librement dans E .

F12 $\vdash F$ est une fonction $\Leftrightarrow F = \{(x, F @ x) \mid x \in \text{Dom} F\}$.

F13

$\Gamma \vdash \exists! f \left[\begin{array}{l} f \text{ est une fonction et} \\ \text{Dom} f = E \\ \forall x(x \in \text{Dom} f \Rightarrow f @ x = T(x)) \end{array} \right]$
--

Si f et x sont des variables distinctes et si f ne figure librement ni dans E , ni dans T .

F14 Définition

$\Gamma \vdash (\lambda x \in E). T(x) = \text{Sf} \left[\begin{array}{l} f \text{ est une fonction et} \\ \text{Dom} f = E \\ \forall x(x \in \text{Dom} f \Rightarrow f @ x = T(x)) \end{array} \right]$

Si f et x sont des variables distinctes et si f ne figure librement ni dans E , ni dans T .

F15

$\Gamma \vdash f = (\lambda x \in E). T(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ est une fonction et} \\ \text{Dom} f = E \\ \forall x(x \in \text{Dom} f \Rightarrow f @ x = T(x)) \end{array} \right]$

Si f et x sont des variables distinctes et si f ne figure librement ni dans E , ni dans T .

- F16 $\boxed{\Gamma \vdash (\lambda x \in E).T(x) \text{ est une fonction}}$
 $\boxed{\Gamma \vdash \text{Dom}((\lambda x \in E).T(x)) = E}$
 $\boxed{\Gamma \vdash U \in \text{Dom}((\lambda x \in E).T(x)) \Rightarrow ((\lambda x \in E).T(x)) @ U = T(U)}$
 Si $T(U)$ est le terme $(U|x)T$ et si U est librement substituable à x dans $T(x)$.
- F17 $\boxed{\Gamma \vdash (x, y) \in (\lambda x \in E).T(x) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y = T(x))}$
- F18 $\boxed{\Gamma \vdash E = E' \mid \Gamma \vdash (\lambda x \in E).T(x) = (\lambda x \in E').T(x)}$
 $\boxed{\Gamma \vdash T(x) = T'(x) \mid \Gamma \vdash (\lambda x \in E).T(x) = (\lambda x \in E).T'(x)}$
 Si x ne figure pas librement dans Γ (2ème schéma seulement).
- F19 $\boxed{\Gamma \vdash (\lambda x \in E).T(x) = (\lambda x' \in E).T(x')}$
 Si x' est réversiblement substituable à x dans T .
- F20 $\boxed{\Gamma \vdash (\lambda x \in E).T(x) = \{(x, T(x)) \mid x \in E\}}$
 Si x ne figure pas librement dans E .
- F21 $\vdash F \text{ est une fonction} \Leftrightarrow F = (\lambda x \in \text{Dom}F).(F @ x)$.
- F22 \vdash Si F et G sont des fonctions,
 $F = G \Leftrightarrow [\text{Dom}F = \text{Dom}G \text{ et } \forall x(x \in \text{Dom}F \Rightarrow F @ x = G @ x)]$.
- F23 $\vdash \text{Id}_X = (\lambda x \in X).x$
 $\vdash \text{Id}_X$ est une fonction.
 $\vdash \text{DomId}_X = X$.
 $\vdash x \in X \Rightarrow \text{Id}_X @ x = x$.
- F24 $\vdash F = \emptyset \Leftrightarrow (F \text{ est une fonction et } \text{Dom}F = \emptyset)$.
 $\vdash F = \emptyset \Leftrightarrow (F \text{ est une fonction et } \text{Prt}F = \emptyset)$.
 $\vdash \emptyset$ est une fonction et $\text{Dom}\emptyset = \emptyset$ et $\text{Prt}\emptyset = \emptyset$.
- F25 $\vdash (F : \emptyset \rightarrow B) \Leftrightarrow F = \emptyset$.
 $\vdash (F : A \rightarrow \emptyset) \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ et } F = \emptyset)$.
 $\vdash \exists! F(F : \emptyset \rightarrow B)$.
 $\vdash A \neq \emptyset \Rightarrow \text{non}\exists F(F : A \rightarrow \emptyset)$.
- F26 \vdash Si F et G sont des fonctions, alors
 $G \circ F$ est une fonction;
 $\text{Dom}(G \circ F) = \{x \mid x \in \text{Dom}F \text{ et } F @ x \in \text{Dom}G\}$;
 $\forall x[x \in \text{Dom}(G \circ F) \Rightarrow (G \circ F) @ x = G @ (F @ x)]$.
- F27 \vdash Si F et G sont des fonctions et si $\text{Prt}F \subset \text{Dom}G$, alors
 $\text{Dom}(G \circ F) = \text{Dom}F$.
- F28 $\vdash (F : A \rightarrow B \text{ et } G : B \rightarrow C) \Rightarrow (G \circ F : A \rightarrow C)$.
- F29 $\vdash (F : A \rightarrow B) \Rightarrow (\text{Id}_B \circ F = F \text{ et } F \circ \text{Id}_A = F)$.
- F30 \vdash Si G est un graphe, alors
 $\exists F(F \text{ est une fonction et } F \subset G \text{ et } \text{Dom}F = \mathbf{Pr}_1 G)$.
- F31 \vdash Si G est une fonction, alors il existe une fonction F telle que
 F est une fonction et $G \circ F = \text{Id}_{\text{Prt}G}$.

F32 Définition

$\vdash F$ est une fonction injective \Leftrightarrow
 (F est une fonction et F^{-1} est une fonction).

F33 $\vdash F$ est une fonction injective $\Leftrightarrow [F$ est une fonction et
 $\forall x \forall x' ((x \in \text{Dom } F \text{ et } x' \in \text{Dom } F \text{ et } F @ x = F @ x') \Rightarrow x = x')]$.

F34 $\vdash \text{Id}_X$ est une fonction injective.

$\vdash \emptyset$ est une fonction injective.

F35 $\vdash (F$ est une fonction injective) $\Rightarrow (F^{-1}$ est une fonction injective).

F36 \vdash Si F et G sont des fonctions injectives, alors
 $G \circ F$ est une fonction injective.

F37 $\vdash F$ est une fonction injective \Leftrightarrow
 (F est une fonction et $F^{-1} \circ F = \text{Id}_{\text{Dom } F}$).

F38 Définition

$\vdash (F : A \xrightarrow{\text{inj}} B) \Leftrightarrow (F : A \rightarrow B \text{ et } F \text{ est une fonction injective})$.

$\vdash (F : A \xrightarrow{\text{sur}} B) \Leftrightarrow (F : A \rightarrow B \text{ et } \text{Pr } F = B)$.

$\vdash (F : A \xrightarrow{\text{bij}} B) \Leftrightarrow (F : A \xrightarrow{\text{inj}} B \text{ et } F : A \xrightarrow{\text{sur}} B)$.

F39 \vdash Si $F : A \rightarrow B$, alors

$(F : A \xrightarrow{\text{inj}} B) \Leftrightarrow \forall y (y \in B \Rightarrow \text{H}x (x \in A \text{ et } y = F @ x))$;

$(F : A \xrightarrow{\text{sur}} B) \Leftrightarrow \forall y (y \in B \Rightarrow \exists x (x \in A \text{ et } y = F @ x))$;

$(F : A \xrightarrow{\text{bij}} B) \Leftrightarrow \forall y (y \in B \Rightarrow \exists ! x (x \in A \text{ et } y = F @ x))$.

F40 $\vdash (F : A \xrightarrow{\text{inj}} B \text{ et } G : B \xrightarrow{\text{inj}} C) \Rightarrow (G \circ F : A \xrightarrow{\text{inj}} C)$.

$\vdash (F : A \xrightarrow{\text{sur}} B \text{ et } G : B \xrightarrow{\text{sur}} C) \Rightarrow (G \circ F : A \xrightarrow{\text{sur}} C)$.

$\vdash (F : A \xrightarrow{\text{bij}} B \text{ et } G : B \xrightarrow{\text{bij}} C) \Rightarrow (G \circ F : A \xrightarrow{\text{bij}} C)$.

F41 $\vdash (F : A \xrightarrow{\text{bij}} B) \Rightarrow (F^{-1} : B \xrightarrow{\text{bij}} A \text{ et } F^{-1} \circ F = \text{Id}_A)$.