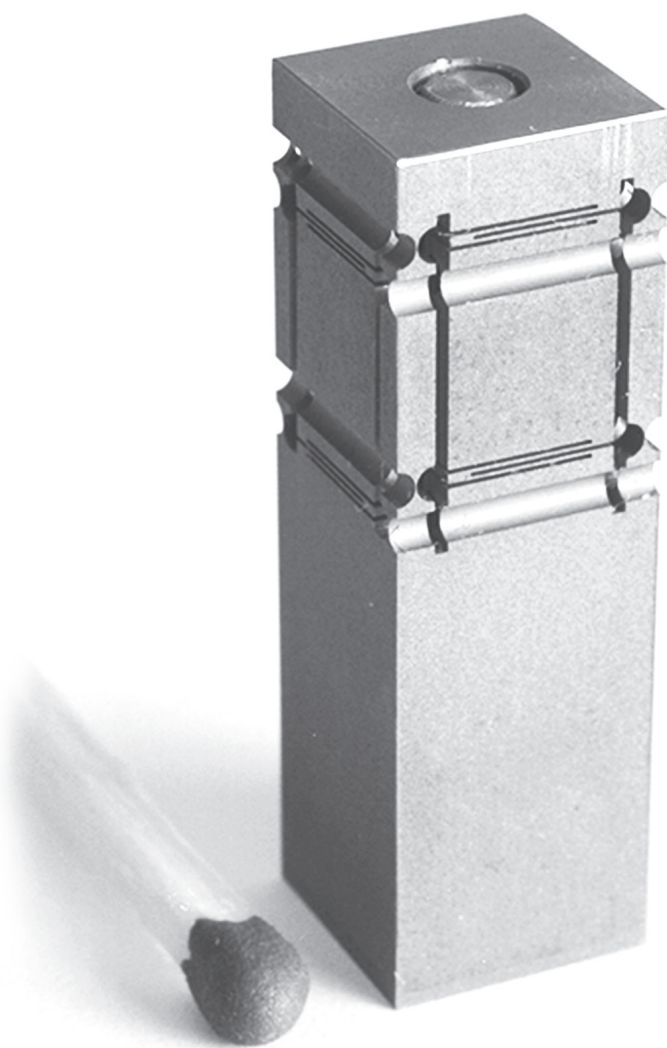


Conception des guidages flexibles

Simon Henein



Conception ***des guidages flexibles***

Les structures mécaniques articulées, utilisant généralement des guidages lisses ou roulants miniaturisés, ont aujourd'hui atteint leurs limites en termes de précision.

Les guidages flexibles, reposant sur le principe physique de l'élasticité de la matière, ne souffrent pas quant à eux de ces inconvénients. Bien que leurs méthodes de conception soient connues et utilisées depuis plusieurs dizaines d'années, elles demeurent à l'heure actuelle dispersées et fragmentaires.

L'objectif de cet ouvrage est d'établir les bases d'une méthode générale de conception des structures articulées à guidages flexibles de haute précision, et de sortir la robotique moderne de l'impasse dans laquelle elle se trouve en lui ouvrant la voie vers un très vaste spectre d'applications.

Né en 1973, de nationalités suisse et égyptienne, **Simon Henein** effectue sa scolarité au Caire. Il obtient son diplôme d'ingénieur en microtechnique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) en 1996, puis le titre de docteur ès sciences techniques de cette même institution en 2000. Il s'engage ensuite professionnellement au Centre Suisse d'Electronique et Microtechnique (CSEM) où il conçoit et développe des mécanismes dédiés à des applications robotiques, spatiales, astrophysique, biomédicales et horlogères ainsi qu'à l'Institut Paul Scherrer où il développe des instruments pour le synchrotron suisse SLS. Depuis le 1^{er} novembre 2012, il est Professeur associé en microtechnique à l'EPFL où il dirige la Chaire Patek Philippe en conception micromécanique et horlogère.

Conception des guidages flexibles

Conception des guidages flexibles

Simon Henein

La Collection **META**

Le préfixe «meta», d'origine grecque, caractérise une classe de mots qui ont en commun le concept de dépassement: métaphysique, métalangage, métamathématiques, métamorphose...

Au-delà du réel apparent et de la routine, nous éprouvons parfois le sentiment de comprendre l'essence même d'un problème. En somme, toute recherche scientifique bien comprise consiste à dépasser les perceptions naïves de la réalité et à arracher les voiles successifs qui dérobent celle-ci à notre compréhension.

A ce titre, il y a des travaux de recherche qui créent des percées à travers lesquelles tout un mouvement scientifique se développe.

L'ambition de la collection META est de publier des monographies permettant des avancées de ce type, soit que l'auteur ait réalisé lui-même un travail de pointe, soit qu'il ait opéré une synthèse de l'état de l'art.

Dans la même collection:

Dynamics and Self-organization of Locally Coupled Neural Networks (1997)

Patrick Thiran

Neuro-Fuzzy Controllers (1997)

Jelena Godjevac

Des moutons et des robots (2000)

Pierre Arnaud

La Fondation des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) publie principalement les travaux d'enseignement et de recherche de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), des universités et des hautes écoles francophones. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par e-mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Première édition

ISBN 978-2-88074-481-4

© 2001, 2002, **2013** Presses polytechniques et universitaires romandes,

CH – 1015 Lausanne

Imprimé en Suisse

Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

*à Isabelle, Michelange et Colin
à la mémoire de Foad*

Table des matières

Préface	ix
Avant propos	xi
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.2 Intérêt des guidages flexibles	2
1.2.1 Comparaison avec les guidages lisses et roulants	2
1.2.2 Comparaison avec les guidages sans contact	5
1.3 Classification des éléments flexibles	6
1.4 Buts de l'ouvrage	7
1.5 Délimitation du domaine d'étude	7
1.6 Plan de l'ouvrage	9
1.7 Guide de lecture	9
2 Etat de l'art	11
2.1 Généralités sur les guidages flexibles	11
2.2 Guidages en translation	13
2.2.1 Tables à lames parallèles	13
2.2.2 Tables à cols	13
2.3 Guidages en rotation	14
2.3.1 Pivots à lames croisées	14
2.3.2 Pivots à cols	15
2.3.3 Barres de torsion	15
2.4 Structures flexibles	16
2.5 Méthodologie	17
2.5.1 Mécanismes compliantes	17
2.5.2 Modèle des corps pseudo-rigides	19
2.6 Applications	20
2.6.1 Amplification pour actionneurs piézoélectriques	20
2.6.2 Instruments de mesure	20
2.6.3 Instruments optiques	20
2.6.4 Cardans de gyroscopes	21
2.6.5 Applications aérospatiales	21
2.6.6 Assemblages isostatiques	22
2.7 Conclusion	22

I	Théorie	25
3	Fondements théoriques	27
3.1	Hypothèses fondamentales	27
3.2	Courses admissibles	28
3.2.1	Critère de plastification	28
3.2.2	Endommagement par fatigue	30
3.2.3	Facteur de correction	31
3.2.4	Facteur de sécurité	32
3.2.5	Synthèse sur les courses admissibles	33
3.3	Rigidités	35
3.3.1	Définitions	35
3.3.2	Rigidités des guidages à articulations flexibles	36
3.3.3	Rigidités généralisées	36
4	Articulations élémentaires	37
4.1	Considérations générales	37
4.1.1	Classification des articulations	37
4.1.2	Définition des rigidités généralisées et des courses	38
4.2	La lame	40
4.2.1	Définition	40
4.2.2	Rigidités	40
4.2.3	Courses	41
4.3	Le fil	42
4.3.1	Définition	42
4.3.2	Rigidités	42
4.3.3	Courses	43
4.4	La barre de torsion	43
4.4.1	Encastrement des extrémités	44
4.4.2	Axe de torsion	45
4.5	Le col circulaire	47
4.5.1	Définition	47
4.5.2	Rigidité angulaire	48
4.5.3	Course angulaire	49
4.5.4	Rigidité en translation	50
4.5.5	Rigidité en torsion	51
4.5.6	Rigidité angulaire transverse	52
4.5.7	Rigidité en traction-compression	52
4.5.8	Autres rigidités	53
4.5.9	Rapports de rigidités	54
4.5.10	Col circulaire tronqué	54
5	Guidages en translation	57
5.1	Table à deux lames parallèles	57
5.1.1	Equilibre des forces	57
5.1.2	Rigidité à charge nulle	59
5.1.3	Course à charge nulle	60

5.1.4	Trajectoire à charge nulle	60
5.1.5	Charge en traction-compression : modèle simplifié	61
5.1.6	Charge en traction-compression : modèle complet	62
5.1.7	Synthèse	75
5.2	Table hyperguidée à quatre lames parallèles	75
5.2.1	Rigidité en translation	75
5.2.2	Course	77
5.2.3	Conclusions principales	78
5.3	Table à quatre cols prismatiques	79
5.3.1	Paramétrisation	79
5.3.2	Rigidité à charge nulle	80
5.3.3	Course à charge nulle	81
5.3.4	Charge critique (flambage)	81
5.3.5	Charge en traction-compression : modèle simplifié	82
5.3.6	Charge en traction-compression : modèle complet	84
5.3.7	Optimisation	87
5.4	Table à quatre cols circulaires	92
5.5	Conclusion des guidages en translation	95
6	Guidages en rotation	97
6.1	Pivot à deux lames croisées séparées	97
6.2	Pivot à deux lames croisées non séparées	100
6.3	Pivot RCC à deux lames	101
6.4	Pivot RCC à quatre cols	102
6.5	Pivot croisé à quatre cols	105
6.6	Comparaison entre les pivots	108
6.7	Charges radiales	110
6.7.1	Variation de rigidité angulaire	110
6.7.2	Rigidités radiales	111
6.7.3	Charges admissibles	111
6.8	Pivot hyperguidé à trois lames	111
II	Expérimentation et technologie	113
7	Limites technologiques de l'électroérosion	115
7.1	Electroérosion	115
7.2	Qualités de l'électroérosion à fil	116
7.3	Limites technologiques	117
7.3.1	Géométrie	117
7.3.2	Etat de surface	121
7.3.3	Vitesse et coût	122
8	Mesures de rigidités	123
8.1	But de l'expérience	123
8.2	Protocole expérimental	124
8.2.1	Cols de section millimétrique	124
8.2.2	Cols de section micrométrique	125

8.2.3	Banc de mesure	125
8.3	Analyse des résultats	128
8.3.1	Validation du modèle	128
8.3.2	Correction du modèle pour les cols micrométriques	128
8.4	Interprétation	132
8.5	Conclusions	133
9	Essais de fatigue	135
9.1	But de l'expérience	135
9.2	Protocole expérimental	136
9.3	Banc de mesure	137
9.4	Analyse des résultats	138
9.5	Interprétation	139
9.6	Conclusions	140
III	Méthode et exemples de conception	141
10	Structures flexibles	143
10.1	Cinématique	143
10.1.1	Définitions	143
10.1.2	Enoncé de la méthode	144
10.1.3	Analyse cinématique	145
10.1.4	Synthèse cinématique	148
10.1.5	Cinématiques parallèles	148
10.2	Choix des matériaux	150
10.3	Volume de travail	150
10.3.1	Synthèse théorie-technologie	150
10.3.2	Disposition sérielle de DDL redondants	152
10.3.3	Butées mécaniques	157
10.4	Rigidités	158
10.4.1	Minimisation des rigidités naturelles	158
10.4.2	Maximisation des rigidités naturelles (stockage d'énergie)	163
11	Démonstrateurs	165
11.1	Modules en translation $X Y$	165
11.1.1	Module $X Y$ pour la micro-électroérosion	165
11.1.2	Micromanipulateur embarqué	167
11.1.3	Autres guidages $X Y$	167
11.2	Robot Double Tilt	170
11.3	Robot Orion	170
11.4	Robot Delta Cube	172
11.5	Robot Tribias	174
11.6	Conclusion	176

12 Conclusion générale	177
12.1 Rappel des résultats	177
12.2 Contributions nouvelles	178
12.3 Portée et limites	179
12.3.1 Généralité et impact de la méthode	179
12.3.2 Validation expérimentale	180
12.4 Perspectives	181
12.4.1 Modélisation	181
12.4.2 Matériaux	181
12.4.3 Procédés de fabrication	182
12.4.4 Types d'articulations élémentaires	183
12.5 Note finale	183
Annexes	184
A Abaques et courbes de Wöhler	185
A.1 Unités	185
A.2 Abaques	185
A.2.1 Lecture des abaques	185
A.3 Exemples	187
A.3.1 Col circulaire	187
A.3.2 Table à quatre cols circulaires	188
A.4 Table hyperguidée à quatre lames parallèles	198
A.5 Courbes de Wöhler	199
B Formulaire	203
Bibliographie	211

Préface

La poursuite permanente de la miniaturisation conduit à des produits intégrant un nombre croissant de fonctions dans un volume toujours plus réduit. Les installations de production, quant à elles, voient leur complexité, leurs dimensions, leurs coûts de construction et de maintenance ainsi que leur consommation d'énergie augmenter sans cesse. Les concepts de micro- et nano-fabrique ont été proposés afin d'inverser cette tendance en remplissant un grand nombre de fonctions dans un espace restreint et confiné, isolé des perturbations mécaniques, thermiques, électromagnétiques, des poussières et de l'humidité. Les dimensions de ces installations sont de quelques dizaines de dm^3 et les précisions de mouvement des robots intégrés à ces fabriques vont de quelques nanomètres au micromètre pour des courses dépassant le centimètre.

Pour atteindre ces performances de précision et de propreté, il est indispensable d'assurer une grande raideur des guidages et d'éviter tout frottement générateur d'hystérésis et de poussières. Une solution avantageuse est d'équiper les robots de paliers flexibles aux propriétés suivantes : une raideur élevée, aucun jeu, pas d'émission de particules et une réalisation relativement peu coûteuse sans système d'asservissement ni apport d'énergie.

La thèse, dont cet ouvrage est issu, a établi les bases d'une méthode générale de conception de cinématiques spatiales à guidages flexibles de haute précision. Ce document contient les développements théoriques ainsi que les expressions et les abaques utiles pour leur dimensionnement. Ces recherches ont également permis de proposer et caractériser plusieurs concepts originaux de modules parmi lesquels on peut citer une articulation à lames croisées à grande course, un guidage en translation à rigidité réglable (la rigidité peut être imposée à zéro, voire à une valeur négative), un robot parallèle à 2 rotations d'axes coplanaires et un autre robot parallèle à 3 translations. Les limites de fabrication par électroérosion d'articulations flexibles ont été établies pour différents matériaux et leur comportement étudié en détail.

Cet ouvrage très complet où se côtoient harmonieusement concepts, méthodes, résultats et exemples de réalisation intéressera tout ingénieur passionné par les mécanismes de haute précision, les microsystèmes, la robotique, la cinématique ou la micro-fabrique. Il y trouvera une forte stimulation à l'innovation, des solutions concrètes et une méthode rigoureuse de dimensionnement.

Professeur Reymond Clavel
Institut de systèmes robotiques, EPFL
17 juin 2001

Avant propos

Cet ouvrage traite des structures mécaniques articulées qui constituent l'un des éléments limitants des robots et des mécanismes de précision actuels. Résultant d'évolutions apportées aux structures des premières machines et des premiers robots industriels, elles utilisent généralement des guidages lisses ou roulants miniaturisés. Cette approche a aujourd'hui pratiquement atteint ses limites en termes de précision pour des raisons inhérentes au principe physique de guidage, telles que la présence de frottement, la faible rigidité des éléments roulants de petites dimensions et les tolérances de fabrication.

Les guidages flexibles reposent sur le principe physique de l'élasticité de la matière qui ne souffre pas des limites de précision du contact glissant ou roulant entre solides. Ils présentent les avantages d'être exempts de frottement, d'usure et de jeu, de ne pas nécessiter de lubrification et de pouvoir être réalisés de manière monolithique donc très compacte, précise et rigide. Ainsi, ils sont compatibles avec une augmentation de la précision des robots, non pas de quelques pour cent, mais de plusieurs ordres de grandeur.

Bien que les guidages flexibles soient connus et utilisés depuis plusieurs dizaines d'années, les méthodes de conception qui sont proposées dans l'état de l'art restent fragmentaires. Ainsi, l'objectif principal de cet ouvrage est le suivant :

Etablir les bases d'une méthode générale de conception des structures articulées à guidages flexibles de haute précision.

Il offre un catalogue de guidages flexibles, des principes de conception, des méthodes d'analyse et de synthèse et des règles au dimensionnement sous forme de formules, de lois de similitudes et d'abaques. L'approche novatrice adoptée vise à effectuer un saut technologique dans le domaine des structures articulées qui sorte la robotique de haute précision de l'impasse dans laquelle elle se trouve et lui ouvre la voie vers un très vaste spectre d'applications inaccessibles aujourd'hui.

La poursuite de cet objectif est également l'occasion d'*explorer les limites du micro-usinage par électroérosion à fil* et de *réaliser des robots démonstrateurs* répondant aux besoins d'entreprises impliquées dans le domaine de la robotique de haute précision.

La première partie du livre traite la **théorie**. Elle commence par le rappel des fondements de la théorie de la mécanique des structures et l'interprétation en ses termes des notions de rigidité, de course et de charge admissible. Cette théorie est ensuite appliquée aux articulations flexibles élémentaires (lames, fils, barres de torsion) pour calculer les paramètres essentiels à la conception de guidages. Cette étude montre également quel rôle cinématique peuvent jouer ces articulations en déterminant le nombre et la nature des degrés de liberté de chacune d'elles. La théorie

est ensuite appliquée aux guidages flexibles à un degré de liberté en translation et en rotation les plus courants. Ceci est réalisé de manière à aboutir à des formules simplifiées qui soient d'utilisation et d'interprétation aisées. Les lois de similitude sont également décrites et des abaques de dimensionnement sont tracés.

La deuxième partie du livre aborde les aspects *expérimentation et technologie*. Nous explorons les limites technologiques de l'électroérosion à fil, qui est le procédé d'usinage le mieux adapté à la fabrication de structures flexibles. Des essais expérimentaux nous ont permis de trouver les limites de ce procédé d'usinage en termes de géométries usinables (élancement des profils et des sections, fentes, rayons), d'état de surface (rugosité, profondeur de la zone modifiée), de vitesse et de coût. Nous avons ensuite sélectionné un sujet d'expérience pour tester les formules théoriques. Il s'agit du col circulaire (isthme de matière reliant deux segments rigides) que nous avons considéré comme étant l'articulation élémentaire la plus représentative de l'ensemble des autres articulations. Nous avons alors réalisé des mesures de rigidité (mesures réalisées sur 25 tables à quatre cols circulaires) ainsi que des essais de fatigue (essais réalisés sur 217 cols circulaires). La conclusion de ces mesures est que si la rugosité des surfaces électroérodées est faible ($R_a \leq 0.2 \mu\text{m}$), alors les modèles théoriques sont corroborés par nos expériences. Si la rugosité est plus importante, alors il faut apporter des corrections aux formules utilisées. Ces corrections étant corrélées avec les paramètres d'usinage, elles peuvent donc être déterminées expérimentalement pour une technologie d'usinage donnée.

La troisième partie décrit la *méthode de conception* qui consiste en l'exercice itératif de traductions analytiques et synthétiques entre les structures à guidages flexibles et celles analogues à guidages idéaux. Cette approche permet d'utiliser les méthodes classiques de conception cinématique pour synthétiser ou analyser des structures flexibles. Ensuite les limites technologiques établies dans la seconde partie sont prises en considération dans le modèle théorique pour montrer les limites actuelles des guidages flexibles en termes de courses. Nous établissons également des principes de conception qui permettent de maximiser les courses des guidages et d'augmenter ou de diminuer leurs rigidités. Enfin, plusieurs démonstrateurs originaux, réalisés selon des cahiers des charges établis par des industries impliquées dans la robotique de précision, illustrent la mise en application de la méthode et montrent à la fois son efficacité et son grand potentiel créatif.

La démarche méthodique de cet ouvrage et les principes généraux de conception auxquels il a abouti ont conduit aux contributions nouvelles suivantes :

- Etablissement d'une méthode de conception originale et invention de structures flexibles inédites.
- Développement de modèles théoriques et de formules de dimensionnement originaux.
- Mise au point de protocoles expérimentaux nouveaux.

Cet ouvrage se veut être non seulement un outil de conception, mais également un tremplin pour la créativité des ingénieurs et chercheurs qui y feront appel.

Remerciements

Cet ouvrage est tiré de la thèse de doctorat N°2194 intitulée *Conception des structures articulées à guidages flexibles de haute précision* que j'ai présentée au Département de Microtechnique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne au mois de juin 2000. Ce travail est une contribution au projet n°6.01 ARTIST du Programme Prioritaire MINAST du Conseil des Ecoles Polytechniques Fédérales qui a débuté le 1er janvier 1996 et s'est achevé le 31 décembre 1999.

Je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse, Professeur Reymond Clavel, pour m'avoir orienté vers le domaine prometteur des structures flexibles et m'avoir soutenu dans la rédaction de cet ouvrage.

Je remercie les membres de mon jury de thèse pour leur travail soigneux et approfondi, ainsi que pour la pertinence de leurs remarques constructives : Docteur Thomas Gmür, Docteur Pierre-Marcel Genequand, Docteur Ulrich Gengenbach, Professeur Jacques Giovanola, Professeur Roland Siegwart et Monsieur Max Odiet.

Je remercie Monsieur Oliver Babel, directeur des Presses polytechniques et universitaires romandes, pour sa soigneuse relecture du livre.

Je remercie Stefano Bottinelli qui a usiné la plupart des structures flexibles présentées dans cet ouvrage sur les machines d'électroérosion de l'entreprise Agie SA, ainsi que Cédric Aymon qui a participé à la réalisation des essais de fatigue.

Je remercie Pierre Boillat qui a prêté son génie à de nombreux remues-ménages très fructueux.

Neuchâtel, juin 2001
Simon Henein

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Depuis le début du XX^e siècle, la miniaturisation est devenue l'une des tendances les plus marquées de l'évolution technique. Il se trouve en effet qu'elle est un moyen efficace d'augmenter les performances des systèmes techniques. C'est ainsi que les appareils microtechniques tels que les téléphones mobiles, les stimulateurs cardiaques ou les prothèses auditives par exemple voient leurs dimensions diminuer rapidement au fil des années. Il en va de même de leurs composants (circuits intégrés, composants opto-électroniques, microsystèmes, etc.) qui nécessitent des moyens de production d'une précision sans cesse meilleure pour être fabriqués¹. Cette tendance s'accélégrant, il est indispensable d'adapter les instruments et les outils qui permettent de percevoir et d'agir à l'échelle du micromètre, voire du nanomètre². Lorsque l'adaptation d'outils existants ne suffit plus aux besoins de la miniaturisation, il devient nécessaire d'en inventer de nouveaux.

Les robots de haute précision constituent l'une des catégories d'outils qui nous permettent d'agir sur la matière à l'échelle sub-micrométrique³. Ils permettent d'accomplir, de manière généralement automatique, des tâches de manipulation, d'usinage et d'assemblage qui dépassent de très loin les capacités manuelles de l'être humain et ne peuvent, à l'heure actuelle, être réalisées par aucun autre moyen. Ces robots sont le résultat de l'évolution des premiers robots industriels. La structure mécanique, les actionneurs, les capteurs et la commande de ces robots ont été adaptés pour les besoins de la haute précision. Dans le cas des structures mécaniques, cette adaptation a conduit à l'amélioration des guidages lisses et roulants utilisés pour les articuler. Or cette progression a pratiquement atteint ses limites en termes de précision pour des raisons physiques, telles que la présence de frottement, la faible rigidité des éléments roulants de petites dimensions et les tolérances de fabrication.

1. Bien que la miniaturisation des systèmes s'accompagne d'une diminution du nombre d'éléments qu'ils comportent, grâce à l'intégration d'un nombre maximal de fonctions dans un nombre minimal de composants, les systèmes conservent nécessairement une interface avec le monde macroscopique, qu'elle soit électrique, magnétique, optique ou mécanique. Les robots représentent un outil indispensable à la réalisation de ces interfaces qui constituent souvent le talon d'Achille des microsystèmes.

2. Le nanomètre (10^{-9} mètre) est une longueur d'un millième de micromètre, soit un millionième de millimètre.

3. Les technologies du silicium ou les biotechnologies sont d'autres exemples de moyens non robotiques d'agir sur le monde sub-micrométrique.

Ces limitations sont intrinsèques au principe de guidage qui repose sur le frottement ou le contact roulant entre solides. Le seul moyen de les dépasser est de changer radicalement de principe physique de guidage pour en adopter d'autres qui soient compatibles avec une augmentation de la précision des robots, non pas de quelques pour cent, mais de plusieurs ordres de grandeurs. C'est le cas par exemple des guidages sans contact tels que les guidages magnétiques, à air, ou hydrostatiques et des guidages à articulations flexibles (FIG.1.1)⁴ dont traite cet ouvrage. Ces derniers reposent sur le principe physique de l'élasticité de la matière qui ne souffre pas des limites de précision du contact entre solides.

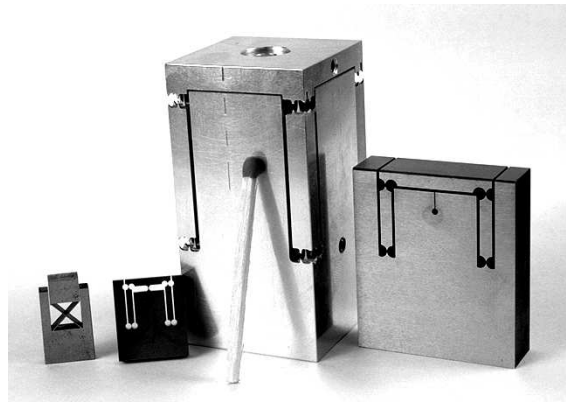


FIG. 1.1 – Exemples de guidages flexibles monolithiques électroérodés.

1.2 Intérêt des guidages flexibles

Pour montrer quel est l'intérêt des guidages flexibles, nous les comparons aux autres types de guidages : lisses, roulants, magnétiques, hydrostatiques, hydrodynamiques ou à air.

1.2.1 Comparaison avec les guidages lisses et roulants

Avantages des guidages flexibles

Absence de frottement : le contact roulant ou glissant entre solides engendre inévitablement du frottement qui est généralement néfaste pour le fonctionnement de la liaison. Il dissipe de l'énergie, provoquant un échauffement et un phénomène d'hystérésis mécanique. Le frottement dépend de la vitesse de déplacement relatif entre les corps de manière hautement non linéaire, ce qui provoque à basse vitesse un mouvement saccadé (*stick & slip*) qui limite la résolution des mouvements. De plus, il est à l'origine de l'usure des parties en contact. L'utilisation des guidages roulants, pour des mouvements de très petite amplitude n'entraînant pas de révolutions complètes des éléments roulants, conduit à des phénomènes de *fretting*⁵ qui limitent la durée de vie des guidages en accélérant leur usure et leur corrosion.

4. Sauf indication contraire, les figures et les photographies sont de l'auteur.

5. Le *fretting* est une usure induite par des débattements d'amplitude trop faible pour que les déchets d'usure soient évacués des zones de frottement. Il subsiste alors entre les surfaces en

Les articulations flexibles, quant à elles, sont exemptes de tout frottement solide ou frottement de roulement. Seul subsiste le frottement intérieur du matériau⁶ sollicité élastiquement ; il est pratiquement négligeable.

Absence d'usure : l'usure des guidages lisses et roulants diminue leur précision en modifiant leur géométrie et en augmentant leurs jeux. De plus elle est le principal facteur limitant leur durée de vie.

Les guidages flexibles sont exempts de toute usure. Leur durée de vie n'est limitée que par la fatigue du matériau⁷ utilisé et sa corrosion éventuelle.

Absence de risque de grippage : le grippage est une forme sévère d'usure adhésive des surfaces en frottement qui les lie ou les soude et bloque le fonctionnement du guidage. La présence de poussières ou d'impuretés peut favoriser le grippage.

Il n'existe pas de risque de grippage avec les guidages flexibles, ce qui leur confère une grande fiabilité, même dans des milieux peu propres.

Absence de lubrification : les guidages lisses et roulants nécessitent généralement une lubrification pour diminuer le coefficient de frottement et l'usure. Le maintien d'une bonne lubrification durant toute la durée de vie des mécanismes requiert un entretien régulier. De plus les lubrifiants peuvent difficilement être utilisés dans les salles blanches et dans le vide partiel (microscopes, satellites) car ils constituent une source de pollution.

Les guidages flexibles ne nécessitent aucune lubrification, ne libèrent aucune particule d'usure polluante et ne requièrent pas d'entretien.

Grandes rigidités transverses : il est indispensable d'avoir une structure mécanique très rigide pour obtenir des mouvements de précision. La rigidité des guidages roulants est faible s'ils ne sont pas précontraints (pression hertzienne d'un corps roulant sur une surface de roulement) et ce d'autant plus que les corps roulants sont de petit diamètre.

Les rigidités transverses des guidages flexibles peuvent être extrêmement élevées si ces derniers sont bien conçus. Plus les structures sont de petites dimensions, plus l'avantage des guidages flexibles en termes de rigidités est grand.

Absence de jeu : lorsqu'ils ne sont pas précontraints, les guidages lisses et roulants présentent du jeu mécanique duquel résultent plusieurs inconvénients. Les jeux

contact une fine poudre qui accélère l'usure en la rendant abrasive. Souvent cette poudre réagit chimiquement avec l'air en s'oxydant, ce qui aggrave encore la détérioration des surfaces : on parle alors de fretting-corrosion.

6. Le frottement intérieur d'un matériau est généralement défini comme étant l'inverse du facteur de qualité $Q^{-1} = \tan \delta$ d'un résonateur réalisé avec ce matériau (δ est le déphasage entre la contrainte alternative appliquée au résonateur et la déformation mesurée) (Schaller & Benoit 1979). Pour les aciers, il est typiquement de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} (Moore 1975), ce qui est tout à fait négligeable devant le frottement solide. Les sources de frottement intérieur sont le mouvement des dislocations, les défauts ponctuels, les précipités, le mouvement des parois de Bloch et l'effet thermoélastique. Le frottement intérieur est ainsi d'une toute autre nature que le frottement solide. Il est d'ailleurs possible que l'utilisation de matériaux dont le frottement interne est élevé permette d'améliorer les performances dynamiques des structures flexibles en amortissant les vibrations parasites indésirables.

7. Comme nous le montrons dans les parties théoriques et expérimentales, un dimensionnement judicieux permet de garantir des durées de vie en fatigue quasi-infinies.

des guidages diminuent la précision des structures mécaniques qu'ils articulent de deux manières. Du point de vue statique, ils modifient la cinématique des structures articulées de manière généralement imprévisible. Du point de vue dynamique, ils diminuent les fréquences propres de vibrations des structures, ce qui les rend moins précises et ils peuvent être à l'origine d'affolements⁸ qui provoquent des chocs néfastes. Lorsqu'ils sont trop gênants, ces jeux peuvent être rattrapés par des systèmes de précontrainte mécanique, mais ces derniers complexifient les mécanismes.

Les guidages flexibles sont exempts de jeu, de par leur principe.

Pièces monolithiques : les guidages lisses et roulants sont constitués de plusieurs pièces mécaniques assemblées. Ces assemblages augmentent généralement l'encombrement des guidages et les tolérances de fabrication diminuent leur précision de construction.

Les guidages flexibles peuvent être fabriqués de manière monolithique, ce qui les rend très compacts et précis et évite l'assemblage délicat et coûteux de petites pièces⁹. La rigidité en flexion des poutres étant inversement proportionnelle au cube des portées, une construction compacte permet donc d'augmenter significativement la rigidité des structures.

Inconvénients des guidages flexibles

Courses limitées : la course des guidages lisses et roulants n'est, en principe, limitée que par la taille des éléments les constituant.

Il n'en va pas de même pour les guidages flexibles qui voient leur course limitée par les limites élastiques de la matière. Des déformations trop importantes des parties flexibles engendrent des contraintes qui peuvent déformer plastiquement ou provoquer la rupture des articulations. Ceci limite l'usage des guidages flexibles aux applications à faible course. Pour cette raison, nous avons pris soin de décrire plusieurs principes de conception permettant de maximiser les courses des guidages.

Force de rappel : les rigidités des guidages flexibles selon leurs degrés de liberté (rigidités naturelles) ne peuvent généralement pas être ramenées à zéro, comme le voudraient des liaisons idéales. Lors de la déformation des articulations, il apparaît une force de rappel qui tend à les ramener vers leur position non déformée. Dans certains cas, cette force de rappel qui varie avec l'amplitude de la déformation peut être gênante : par exemple, une partie de la force des actionneurs est utilisée pour déformer la structure élastique, ce qui réduit la force utile. Dans d'autres cas, elle peut être utile : la force de rappel peut, par exemple, être utilisée pour précontraindre un mécanisme et supprimer ses jeux.

Modèles géométriques complexes : les liaisons idéales élémentaires (glissières, pivots, appuis plans, rotules, etc.) suivent des modèles géométriques dont la description mathématique est simple (translation le long d'une droite, rotation autour d'un

8. On dit qu'un organe de machine est *affolé* lorsqu'il n'est plus en contact avec les autres corps sensés le guider.

9. Mentionnons à ce sujet que certains auteurs qualifient cette approche de conception monolithique de *Design For No Assembly paradigm (DFNA)* (Ananthasuresh & Kota 1995; Kota et al. 1999).

point, etc.). Les guidages lisses et roulants reproduisent relativement fidèlement ces mouvements idéaux.

En revanche, les guidages flexibles suivent généralement des mouvements plus complexes à décrire (translation curviligne, rotation autour d'un centre instantané se déplaçant au cours du mouvement, etc.). Ceci complique l'établissement des modèles géométriques des structures flexibles. Notons néanmoins que ces trajectoires se répètent avec une très grande précision. Il s'agit donc là d'une difficulté de modélisation et non d'un inconvénient de fonctionnement.

Conclusion

Il est intéressant d'utiliser des guidages flexibles à chaque fois que :

- les courses sont faibles,
- la précision des mouvements doit être élevée,
- le frottement, le jeu et l'usure sont gênants,
- la lubrification est gênante ou impossible,
- la fiabilité doit être très grande,
- la présence d'une force de rappel n'est pas gênante,
- l'encombrement est réduit,
- les mécanismes réalisés sont utilisés en salle blanche ou dans le vide partiel,
- la durée de vie doit être très longue,
- aucun entretien n'est prévu.

1.2.2 Comparaison avec les guidages sans contact

Guidages magnétiques

Les guidages magnétiques supportent un corps rigide mobile au moyen d'un champ magnétique porteur, donc sans aucun contact mécanique avec lui. Ceci apporte un grand nombre d'avantages (absence de frottement solide, d'usure, de lubrification, etc.). Ils présentent par contre l'inconvénient de nécessiter des électroaimants, des capteurs et une boucle de régulation active. C'est ce qui explique leur apparition tardive dans l'histoire des techniques. [Bleuler \(1984\)](#) et [Schweitzer *et al.* \(1994\)](#) situent l'apparition des premiers paliers magnétiques dans la première moitié du XX^e siècle ([Kemper 1937](#); [Beams *et al.* 1946](#)) et l'expansion de son utilisation dans les années 1970 ([Sabnis *et al.* 1975](#)). Ainsi, c'est la complexité de mise en œuvre et de fonctionnement des guidages magnétiques qui les rend peu adaptés à la réalisation de structures articulées à plusieurs degrés de liberté telles que celles qui sont utilisées en robotique de haute précision.

Guidages hydrostatiques et hydrodynamiques

Dans les guidages hydrostatiques et hydrodynamiques, un film fluide de lubrifiant est utilisé pour séparer les corps en frottement relatif. Le film doit être suffisamment épais pour que les aspérités des surfaces ne se touchent pas. Le frottement solide est alors remplacé par le frottement fluide qui est plus faible et ne provoque pas d'usure des surfaces. Pour que le film ait assez de portance pour supporter les charges du guidage il doit être mis sous pression. Dans les paliers hydrodynamiques, le

film lubrifiant se forme par le mouvement relatif des pièces grâce à la viscosité du fluide. Ces paliers présentent l'inconvénient de ne fonctionner en état de frottement fluide que lorsque la vitesse est suffisamment élevée. Ils ne sont donc pas utilisables pour articuler des structures de robots. Pour pallier cet inconvénient, les guidages hydrostatiques utilisent une pompe qui injecte le lubrifiant sous pression dans des poches, ce qui permet de produire un film fluide même à l'arrêt. Cette solution présente l'inconvénient de nécessiter une pompe, et un circuit de récupération et de filtrage du lubrifiant. De plus elle consomme beaucoup d'énergie.

Les guidages hydrostatiques qui sont connus depuis la fin du XIX^e siècle ([Girard 1865](#); [Thurston 1885](#)) ne sont utilisés dans les machines-outils que depuis les années 1950 ([Dowson 1998](#)). La complexité et le coût de leur mise en œuvre font qu'ils sont peu adaptés à la réalisation de structures articulées de robots dotés de nombreux degrés de liberté, sauf dans des cas particuliers où les charges sont très élevées et où le coefficient de frottement de démarrage doit être maintenu aussi bas que possible.

Guidages à air

Les guidages à air reposent sur le même principe que les guidages hydrostatiques, mais utilisent un gaz (l'air) comme lubrifiant au lieu d'un liquide. Ceci permet de se passer de circuit de récupération puisque l'air peut être relâché dans l'atmosphère. Ces guidages restent néanmoins complexes et coûteux puisqu'ils nécessitent un compresseur d'air et un circuit d'alimentation. Les guidages à air sont connus depuis le XIX^e siècle ([Willis 1828](#); [Hirn 1854](#)). Les premières applications datent du début du XX^e siècle mais les développements les plus importants ont été réalisés après la Deuxième Guerre mondiale dans des applications militaires et nucléaires.

Conclusion

En comparaison avec les guidages sans contact, les guidages flexibles sont d'une mise œuvre beaucoup plus simple et moins coûteuse : ils ne nécessitent pas de contrôle actif de position, ni de source d'énergie externe.

1.3 Classification des éléments flexibles

Nous avons choisi de classer les éléments flexibles en trois catégories de complexité croissante :

Articulations flexibles élémentaires : cette catégorie comprend les éléments flexibles les plus simples, tels que les poutres, les barres de torsion ou les membranes. A elles seules, les articulations flexibles élémentaires ne permettent généralement pas de réaliser de liaisons mécaniques à un degré de liberté. Ces articulations n'ont généralement pas d'équivalent proche parmi les liaisons mécaniques standard¹⁰.

Guidages flexibles : les éléments flexibles de cette catégorie sont constitués d'une combinaison d'articulations élémentaires et de segments rigides reliés entre eux. Les

10. Nous désignons par *liaisons mécaniques standard* les liaisons de catégorie inférieure (*lower pairs*) telles que définies par [Reuleaux \(1875\)](#) (voir également [Hunt 1978](#)) ou encore ([Waldron & Kinzel 1999](#)), à savoir les liaisons pivot, glissière, glissière hélicoïdale, pivot glissant, appui plan, rotule, etc.

guidages flexibles sont les homologues des guidages lisses ou roulants des structures articulées classiques¹¹. Ils ont généralement des équivalents proches parmi les liaisons mécaniques standard.

Structures articulées à guidages flexibles : les éléments flexibles de cette dernière catégorie, que nous appelons aussi plus simplement *structures flexibles*, sont constitués d'une combinaison de guidages flexibles et de segments rigides. Ces structures sont les homologues des structures articulées classiques. Relativement complexes, elles peuvent avoir un plus grand nombre de degrés de liberté (généralement pas plus de 6). Certains segments rigides de ces structures sont conçus pour être entraînés par la force motrice d'actionneurs. L'un des segments constitue la base fixe de la structure (*bloc de base*) et un autre l'organe terminal mobile (*bloc mobile*).

1.4 Buts de l'ouvrage

Le principal objectif de cet ouvrage est le suivant :

Etablir les bases d'une méthode générale de conception des structures articulées à guidages flexibles de haute précision.

Il a pour but de constituer un *outil de conception* et un *instrument d'analyse* dédié aux ingénieurs et aux chercheurs travaillant dans le domaine de la robotique de haute précision. L'approche novatrice adoptée vise à effectuer un saut technologique dans le domaine des structures articulées qui sorte la robotique de haute précision de l'impasse dans laquelle elle se trouve aujourd'hui et lui ouvre la voie vers un très vaste spectre d'applications encore inaccessibles.

Cet outil consiste en un catalogue de guidages flexibles, des principes de conception, des méthodes d'analyse et de synthèse et des règles de dimensionnement sous forme de formules, de lois de similitudes et d'abaques.

La poursuite de cet objectif est également l'occasion de *pousser les limites du micro-usinage par électroérosion à fil* et de *réaliser des robots démonstrateurs* répondant aux cahiers des charges d'entreprises impliquées dans le domaine de la robotique de haute précision. Cet ouvrage est un outil destiné principalement aux trois premières phases de conception des robots de haute précision qui vont de l'établissement du cahier des charges au développement de la solution retenue (FIG. 1.2). Il constitue également un outil de base pour les phases d'optimisation qui sont néanmoins plus spécifiques aux applications, donc plus difficiles à généraliser et qui nécessitent l'utilisation d'outils complémentaires tels que l'analyse modale numérique ou la mécanique vibratoire, par exemple.

1.5 Délimitation du domaine d'étude

Modélisation : cet ouvrage se limite à l'étude du comportement *statique* des structures à guidages flexibles. L'étude se concentre en particulier sur les rigidités, les

11. Par opposition aux *structures articulées à guidages flexibles*, nous désignons par *structures articulées classiques* le squelette des robots traditionnels qui sont constitués de segments rigides discrets reliés entre eux par des guidages lisses ou roulants.

- 
- 1 Etablissement du Cahier des Charges : nombre de DDL, volume de travail, encombrement, précision absolue, répétabilité, vitesse de fonctionnement, charges, rigidités, types d'actionneurs, types de capteurs, etc.
 - 2 Etablissement du Catalogue de Solutions : recherche de cinématiques et pré-dimensionnement.
 - 3 Développement de la solution retenue : dimensionnement analytique, étude statique.
 - 4 Réalisation d'un premier prototype (éventuellement).
 - 5 Optimisation : simulations numériques par éléments finis, étude dynamique, analyse modale, modèles géométriques exacts, modèle de contrôle.
 - 6 Réalisation d'un second prototype.
 - 7 Intégration d'un contrôleur.
 - 8 Tests et caractérisation.
 - 9 Poursuite de l'optimisation, étude d'industrialisation, etc.

FIG. 1.2 – *Principales phases de conception d'un robot de haute précision. Cet ouvrage est un outil destiné essentiellement aux trois premières phases (accolade). Elle peut également servir de base pour les phases d'optimisation (accolade en pointillés).*

courses admissibles, les charges admissibles ainsi que la cinématique des structures. Le comportement dynamique ainsi que les phénomènes vibratoires (Del Pedro & Pahud 1989) de ces structures ne sont, quant à eux, pas traités.

Le but de cette modélisation est d'aboutir à un outil de conception et de dimensionnement des guidages à articulations flexibles qui soit rapide et simple d'utilisation. Ceci nous force parfois à privilégier la simplicité des modèles plutôt que leur exactitude¹². Pour cette raison nous nous limitons à l'étude des articulations flexibles dans le cadre de *l'hypothèse des petites déformations*¹³.

Matériaux : nous nous limitons aux *alliages métalliques* couramment utilisés en mécanique. Ainsi, nous n'abordons pas la possibilité d'utiliser des polymères (Domininghaus 1993), des composites (Hull *et al.* 1996), des céramiques ou des alliages à mémoires de forme (Bellouard 2000).

Procédés de fabrication : l'étude se concentre essentiellement sur *l'électroérosion à fil* qui est aujourd'hui l'un des procédés de fabrication les mieux adaptés à l'usinage des articulations flexibles. Les possibilités d'usinage par électroérosion à enfonçage ainsi que par fraisage ou tournage conventionnels sont également mentionnées. En revanche, d'autres procédés d'usinage, tels que l'usinage par laser, l'usinage par jet d'eau ou le moulage par injection ne sont pas abordés.

Type d'articulations élémentaires : nous étudions principalement les guidages flexibles constitués d'articulations élémentaires qui sont des *poutres sollicitées en flexion ou en torsion*. Les autres articulations élémentaires telles que les membranes flexibles ou les soufflets ne sont pas abordées.

12. Lorsque nous recourons à beaucoup de simplifications, nous nous efforçons de quantifier l'erreur induite par les hypothèses simplificatrices.

13. *L'hypothèse des petites déformations* stipule que la déformation des structures est suffisamment faible par rapport à leurs dimensions pour négliger leur effet sur le cas de charge.

Applications : nous abordons les structures à guidages flexibles du point de vue de leur utilisation pour des applications de *robotique de très haute précision*, telles que la micro-manipulation, le micro-assemblage ou le micro-usinage de pièces de petites dimensions (inférieures au centimètre). En revanche, nous n'étudions que sommairement l'utilisation des guidages flexibles dans les instruments de mesure et dans les machines de plus grandes dimensions. Nous ne traitons pas non plus des microsystèmes (MEMS¹⁴) fabriqués au moyen des technologies du silicium.

1.6 Plan de l'ouvrage

Nous avons choisi de structurer le livre en trois parties.

La première partie intitulée **Théorie** (chap. 3 à 6) est une approche purement théorique du sujet d'étude. Premièrement les fondements théoriques de la modélisation des articulations sont présentés. Nous utilisons essentiellement la théorie classique de la mécanique des structures (calculs de rigidités) et nous abordons également la théorie de la mécanique de la rupture par fatigue (calcul des courses ou déflexions maximales). Par l'application de ces théories aux articulations flexibles, nous cherchons à déduire des principes de conception et des règles de dimensionnement (formules simplifiées, lois de similitude, abaques, etc.) des structures articulées à guidages flexibles. Cette partie aborde les deux premières catégories d'éléments flexibles qui sont les *articulations élémentaires* et les *guidages flexibles*.

Le but de la seconde partie intitulée **Expérimentation et Technologie** (chap. 7 à 9) est double. En premier lieu, nous identifions les *limites technologiques* de l'usinage par électroérosion à fil en termes de précision (tolérances de fabrication), d'état de surface, et de géométrie. En second lieu, nous effectuons des mesures expérimentales visant à tester la validité des modèles théoriques établis dans la première partie. Lorsque les modèles ne sont pas parfaitement corroborés par l'expérience, nous montrons quelles modifications peuvent leur être apportées pour renforcer leur pouvoir prédictif.

La troisième partie décrit la **Méthode de conception** des structures flexibles (chap. 10 et 11). Cette méthode traite de la synthèse et de l'analyse cinématique des structures flexibles complexes et décrit des principes de conception permettant de maximiser leur volume de travail et de modifier leurs rigidités. Une synthèse entre les résultats des parties théoriques et expérimentales montre quelles sont les limites des guidages flexibles en terme de course. Plusieurs exemples de structures flexibles que nous avons réalisées illustrent la mise en application de la méthode de conception.

1.7 Guide de lecture

En vue de son utilisation en tant qu'outil, cet ouvrage est écrit de manière à ce que ses parties lues séparément restent compréhensibles. Ainsi, le lecteur désirant dimensionner un guidage flexible particulier peut se référer directement à la section correspondante dans la première partie (*Théorie*) sans nécessairement lire ce qui précède. De même, le lecteur curieux d'apprendre la méthode de conception,

14. MEMS : Micro-Electro-Mechanical-Systems.

mais ne désirant pas passer au travers des développements théoriques sous-jacents peut ne lire que la troisième partie (*Méthode de conception*). Dans la deuxième partie (*Expérimentation et technologie*), c'est essentiellement le chapitre 7 (*Limites technologiques de l'électroérosion*) qui est utile au concepteur. Les chapitres 8 et 9 (*Mesures de rigidité* et *Essais de fatigue*) dont le rôle essentiel est de valider les modèles théoriques peuvent être omis. Le *formulaire* placé en annexe résume les principales formules établies dans le livre.

Chapitre 2

Etat de l'art

Ce chapitre décrit de manière synthétique les travaux antérieurs à cet ouvrage qui traitent des guidages à articulations flexibles. Ces derniers sont utilisés en mécanique de précision depuis plus de 60 ans et ont été abondamment étudiés. Toutefois, ils traitent essentiellement de guidages à 1 ou 2 DDL particuliers, dédiés à des applications particulières (instruments de mesure, instruments optiques, applications spatiales) et ne proposent pas d'approche générale des guidages flexibles, ni de méthode de conception unifiée.

Les nombreuses références de livres, d'articles et de brevets données dans ce chapitre sont autant de portes d'accès aux études pointues complémentaires à cet ouvrage.

2.1 Généralités sur les guidages flexibles

Les avantages des guidages flexibles étaient déjà bien connus au début du XX^e siècle. Par exemple, [Eastman \(1937\)](#) présente leurs avantages, discute du choix des matériaux et présente une structure flexible parallèle à 3 DDL en rotation¹. Il discute de l'importance des congés de raccordement aux extrémités des cols prismatiques pour éviter le phénomène de concentration de contrainte. Il montre que la rigidité des guidages dépend des charges transverses qu'ils supportent. Dans le cas du pivot à lames croisées, il montre que la variation de rigidité dépend de la direction de la charge ([Eastman 1960](#)).

Les moyens de fabrication utilisés pour réaliser les guidages présentés à cette époque sont l'assemblage de lames (éléments discrets) et le fraisage. La difficulté de fabrication limite grandement leurs possibilités d'utilisation². A cette époque, l'électroérosion semble trop peu connue pour être mentionnée parmi les moyens de fabrication.

[Thorp \(1953\)](#) décrit un guidage en translation dont la cinématique est celle des "barres de Watt" (FIG. 2.1) utilisant des cols prismatiques pour pivots. Il calcule

1. Il s'agit d'une structure tridimensionnelle à centre de rotation déporté (RCC : *Remote Center Compliance*) comportant 6 rotules flexibles. Ces dernières sont constituées de deux cols prismatiques mis bout-à-bout perpendiculairement (voir rotules du robot Delta Cube sect. 11.4). Elles sont fabriquées par fraisage.

2. "The difficulty of manufacturing flexure pivots with precisely defined elastic properties tends to limit their use to applications in which restraint plays only a secondary part" ([Eastman 1960](#)).

également la déformée de lames fléchies chargées en traction-compression. On trouve dans ([Notes on Applied Science 1956](#)) des descriptions du pivot à lames croisées, de la table à deux lames parallèles, de la table compensée à deux lames parallèles, de mécanismes de réduction de mouvement utilisant le mouvement parasite de la table à deux lames parallèles et d'autres mécanismes à lames. Différentes méthodes pour encastrer les lames dans les segments rigides des mécanismes sont également décrites.

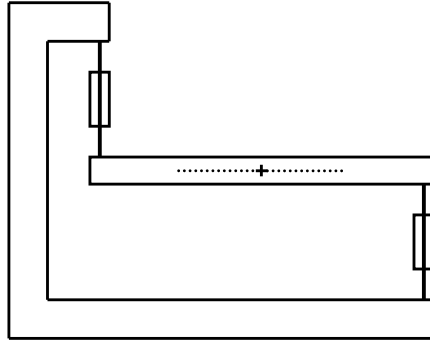


FIG. 2.1 – Barres de Watt à lames renforcées en leur centre. Pour de faibles déplacements, le centre du bloc mobile suit une trajectoire approximativement rectiligne. (Inspiré de ([Bassière & Gaignebet 1966](#)))

Depuis cette période, la plupart des ouvrages sur les mécanismes de précision présentent les guidages flexibles comme alternative aux guidages roulants ou à couteau ([Bassière & Gaignebet 1966](#); [Trylinski 1971](#); [Smith & Chetwynd 1992](#); [Slocum 1992](#); [Nakazawa 1994](#); [Koster 1998](#)) (FIG. 2.2) et de nombreux articles font de brèves synthèses des possibilités offertes par les guidages flexibles ([Billig 1960](#); [Jones 1962](#); [Sydenham 1981](#); [Sydenham 1984](#)). A notre connaissance, il n'existe pas d'ouvrages abordant les structures flexibles de manière générique comme nous le faisons ici.

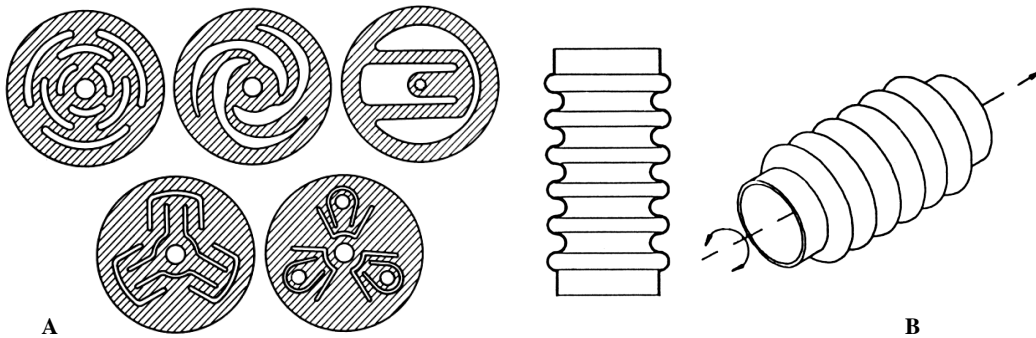


FIG. 2.2 – Articulations élémentaires non abordées dans cet ouvrage. A : Des membranes judicieusement découpées permettent de réaliser une liaison généralement à 3 DDL (deux rotations et une translation). B : Le soufflet constitue une liaison à 5 DDL (seul le DDL correspondant à la torsion autour de son axe de révolution est bloqué.)

([Bassière & Gaignebet 1966](#), A)([Smith & Chetwynd 1992](#), B)

2.2 Guidages en translation

2.2.1 Tables à lames parallèles

Jones & Young (1956), Yoshimura *et al.* (1990) et Muranaka *et al.* (1991) étudient les imperfections du second ordre de la table à deux lames parallèles, à savoir la rotation parasite du bloc mobile lorsque la force n'est pas appliquée à mi-hauteur des lames (FIG. 5.1) ou lorsque les tolérances de fabrication ou de montage ont pour conséquence que les lames ne sont pas parfaitement parallèles. Ils considèrent également l'effet de lames dont les rigidités sont légèrement différentes et l'effet des forces de gravité. Ces considérations les conduisent à la table compensée avec couplage (§ 10.3.2).

Neugebauer (1980) détermine l'effet d'une charge en traction-compression sur la rigidité de la table à deux lames parallèles sans pour autant aboutir à une formule simplifiée du type (5.43).

Clay (1937) dit avoir inventé le guidage à lames parallèles compensé (FIG. 10.6) en 1925. Remarquant que ce guidage ne produit une translation rectiligne que si les rigidités des lames sont identiques, Jones (1951) propose d'utiliser des petits blocs rigides que l'on peut déplacer le long des lames pour équilibrer leurs rigidités. Plainevaux (1953) (Plainevaux 1954b; Plainevaux 1954a) étudie le mouvement parasite vertical de la table compensée sous charge et propose de rigidifier la partie centrale des lames et d'utiliser un système de couplage du mouvement du bloc intermédiaire. Genequand (1998) décrit la conception d'un tel système de manière monolithique.

Kyusojin & Sagawa (1988) présentent des variantes originales de tables à lames parallèles compensées.

Les grandes déformations de la table à lames parallèles ont été étudiées en détail par De Bona & Zelenika (1992)³.

La table hyperguidée à quatre lames parallèles (sect. 5.2) a été étudiée par Toyoda & Tanimura (1988) qui calculent sa rigidité mais pas sa course admissible (§ 5.2.2). Ce guidage a également été utilisé par Battles *et al.* (1993).

2.2.2 Tables à cols

Le col circulaire est décrit en détail par Paros & Weisbord (1965) qui en calculent les rigidités en flexion et en traction-compression. Ils décrivent également la rotule à fil de section circulaire. Ces calculs sont repris par Her & Chang (1994) qui les utilisent pour dimensionner une table de micro-positionnement et tracer un abaque. Chen *et al.* (1992) font des simulations par éléments finis de cols circulaires et observent, pour le cas particulier testé, un écart relatif avec les résultats analytiques (Paros & Weisbord 1965) inférieur à 1%. Ils effectuent une analyse modale dynamique d'une table X Y composée de deux tables à quatre cols montées en série. Smith *et al.* (1987) effectuent également des simulations par éléments finis du col circulaire et en déduisent une formule simplifiée pour le calcul de la rigidité an-

3. Voir également (De Bona *et al.* 1993; De Bona & Zelenika 1993; De Bona & Zelenika 1994b; De Bona & Zelenika 1994a).

gulaire⁴. Ryu & Gweon (1997) étudient l'influence des tolérances d'usinage sur la précision des mouvements de la table à quatre cols circulaires.

Kuetgens *et al.* (1994) et Dettmer *et al.* (1995) décrivent une table à quatre cols circulaires usinée par fraisage avec des outils de coupe en diamant dans un bloc de silicium monocristallin pour un interféromètre à rayons X. La structure est entraînée par un actionneur piézoélectrique. La forme du bloc mobile a été optimisée par des simulations par éléments finis de manière à minimiser sa rotation parasite.

Genequand & Schwab (1985) et Schwab *et al.* (1988) décrivent une table à 2 DDL dotée de leviers de démultiplication. Cette structure est articulée par des cols prismatiques. Elle est composée de deux plaques identiques montées en parallèle, ce qui permet aux deux actionneurs à vis d'être fixés au bâti. Matsushima & Nishi (1984) décrivent une autre structure flexible parallèle à 2 DDL XY .

Letonje & Janezic (1999) simulent par éléments finis le col de profil hyperbolique et comparent sa rigidité angulaire et sa course admissible à celles du col circulaire : pour des dimensions extérieures identiques et une même épaisseur dans la partie centrale, le col hyperbolique a une rigidité naturelle plus élevée et une course admissible plus faible que le col circulaire. King & Xu (1996) (Xu & King 1996) comparent les cols prismatique, elliptique et circulaire par des simulations par éléments finis. Pour la réalisation d'amplificateurs de mouvement pour des actionneurs piézoélectriques, ils préconisent l'utilisation de cols elliptiques avec des axes dont le rapport des longueurs est de 20.

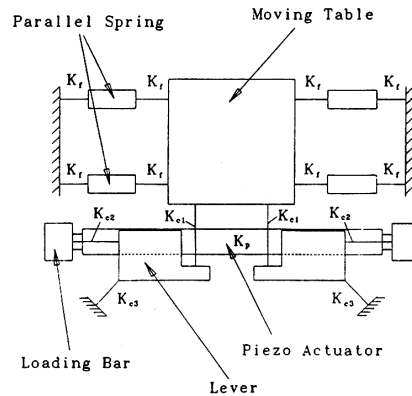


FIG. 2.3 – Table hyperguidée à huit cols prismatiques avec actionneur piézoélectrique. (Yang *et al.* 1996)

La table hyperguidée à huit cols (FIG. 2.3) est simulée par éléments finis par (Hara *et al.* 1990; Yang & Jouaneh 1992; Yang *et al.* 1996). Pour des applications à très faible course (typiquement une centaine de micromètres de course pour des dimensions d'une dizaine de centimètres), cette structure permet de réaliser des guidages rectilignes aux caractéristiques quasi-linéaires.

4. Nous discutons la concordance entre ces différentes formules dans (Henein *et al.* 1997).

2.3 Guidages en rotation

2.3.1 Pivots à lames croisées

Le pivot à deux lames croisées est probablement le plus connu et le plus étudié des guidages flexibles. On trouve à son sujet de nombreux travaux⁵ traitant de sa cinématique, de ses rigidités sous charge, de la disposition relative des deux lames et de leurs encastremements. Des pivots à lames croisées peuvent être trouvés sur le marché (Lucas Aerospace 1991; Meizel 1999) (FIG. 2.4). Weinstein (1965a) décrit un pivot à lames croisées préchargé dont on peut régler la rigidité angulaire par la variation de la précontrainte d'un ressort de précharge (FIG. 2.5).

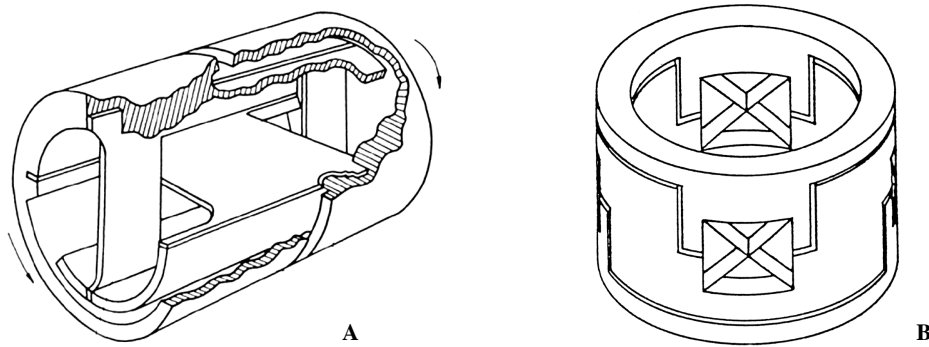


FIG. 2.4 – A : Pivot à lames croisées séparées disponible sur le marché. B : Cardan flexible monolithique découpé par électroérosion à fil dans un tube. Cette structure comporte quatre pivots à lames croisées non séparées.

(Sydenham 1984, A)(Haberland 1978, B)

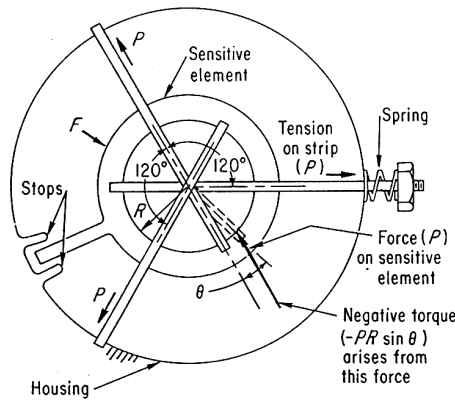


FIG. 2.5 – Système de réglage de la rigidité angulaire du pivot à lames croisées.

(Weinstein 1965a)

Haberland (1977, Haberland (1978) décrit un pivot à lames croisées non séparées (sect. 6.2) qu'il utilise pour réaliser un cardan de gyroscope (FIG. 2.4). Payne (1997)

5. (Young 1944; Haringx 1949; Wittrick 1948; Nickols 1951; Wittrick 1951; Troeger 1962; Weinstein 1965a; Weinstein 1965b; Weinstein 1965b; Siddall 1970; Seeling 1970; De Bona et al. 1999).

décrit un pivot à lames multiples, liées en leur centre. Différentes méthodes de fabrication des pivots à lames croisées sont décrites dans de nombreux brevets⁶.

2.3.2 Pivots à cols

Tanaka & Nakayama (1982) décrivent un pivot RCC à quatre cols (FIG. 6.4) utilisé pour réaliser un goniomètre de haute précision (voir également (Tanaka & Nakayama 1983)). (Tanaka 1983) étudie le comportement dynamique d'un guidage en rotation à quatre cols circulaires. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'autres descriptions de pivots à quatre cols (sect. 6.5).

2.3.3 Barres de torsion

L'utilisation de barres de torsion pour réaliser des guidages (FIG. 2.6 et 2.7) est relativement peu répandue (Jones 1955; Newell 1978; Nave 1982; Brooks 1989b; Goldfarb & Speich 1997). Elles ont davantage été étudiées pour la réalisation de ressorts (Duchemin 1985). Boresi *et al.* (1993) étudient le comportement en torsion de barres de section non circulaire. Nous reprenons certains de ces résultats à la section 4.4.

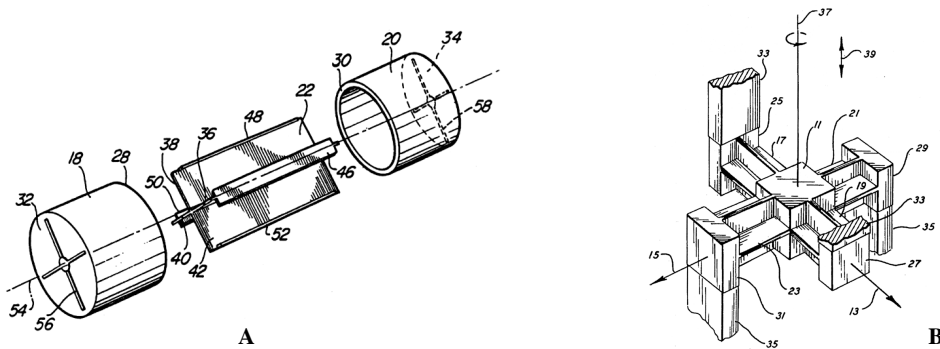


FIG. 2.6 – *Pivot et cardan utilisant des barres de torsion.*
(Brooks 1989b, A) (Newell 1978, B)

2.4 Structures flexibles

Plusieurs structures parallèles planes à 2 et 3 DDL $XY(\theta Z)$ réalisées avec des articulations élémentaires à cols circulaires et entraînées par des actionneurs piézoélectriques sont décrites dans la littérature (Goto 1989; Ryu *et al.* 1997; Ryu *et al.* 1999). Arai *et al.* (1996) décrivent une structure flexible à 3 DDL en translation XYZ basée sur la cinématique parallèle du robot “Star” (Hervé 1993).

Davies (1999) décrit une structure parallèle à 6 DDL utilisant des articulations élémentaires de type fil (FIG. 2.8). Suivant la manière dont elle est entraînée, elle peut être ramenée à une structure à 3 DDL en rotation ou à 3 DDL en translation.

6. (Troeger 1974a; Troeger 1974b; Haberland 1981; Bahiman 1983; Flaherty 1987; Leijenhofst (van) & Suringh 1987; Paulsen 1989; Brooks 1991; Backus *et al.* 1991; Krivec 1996; Genequand 1997; Payne 1997; Brooks 1989a)

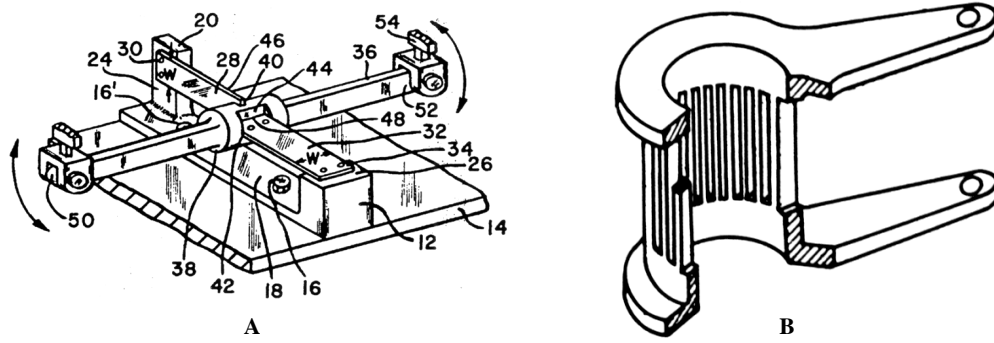


FIG. 2.7 – A : Pivot utilisant deux lames en torsion. B : Cage d'écureuil.
(Nave 1982, A) (Bassière & Gaignebet 1966, B)

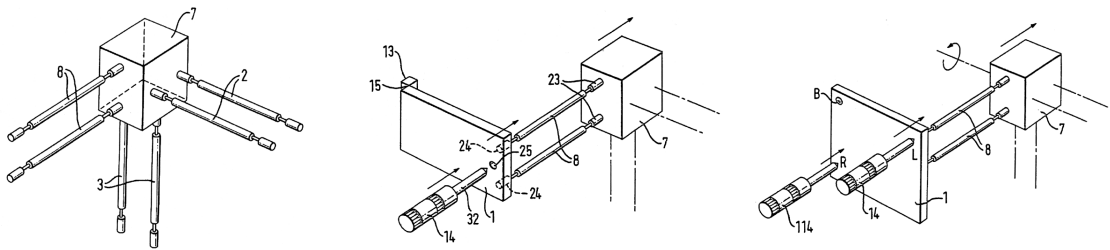


FIG. 2.8 – Structure flexible parallèle. Si la plaque (1) est reliée au bâti par un pivot (15), la structure a 3 DDL en translation (cette cinématique a la même configuration qu'un robot Delta). Si la plaque (1) est reliée au bâti par une rotule (B), la structure a 6 DDL.

(Davies 1999)

Hara & Sugimoto (1990) décrivent une structure parallèle plane à articulations flexibles à 3 DDL $XY\theta Z$ et une à 6 DDL utilisant des actionneurs piézoélectriques (FIG. 2.9). Tanikawa & Arai (1999) décrit une structure parallèle à 6 DDL dont la cinématique est celle de la plate-forme de Stewart (1965). Mentionnons enfin Pertsch *et al.* (1998) qui font un état de l'art des structures flexibles utilisées en robotique de haute précision.

2.5 Méthodologie

2.5.1 Mécanismes compliant

Aux Etats-Unis, plusieurs équipes de chercheurs ont abordé les structures flexibles, qu'ils dénomment "mécanismes compliant⁷", de manière générique (Midha *et al.* 1992; Erdman 1993; Ananthasuresh & Kota 1995; Kota *et al.* 1999; Burns & Crossley 1966; Shoup & McLarnan 1971; Midha *et al.* 1994). Ils catégorisent ces mécanismes en

- mécanismes "partiellement compliant⁸", qui comportent des guidages lisses ou roulants et des guidages flexibles ;
- mécanismes "complètement compliant⁹", qui ne comportent que des guidages

7. *Compliant mechanisms* en anglais.

8. *Partially compliant* en anglais.

9. *Fully compliant* en anglais.

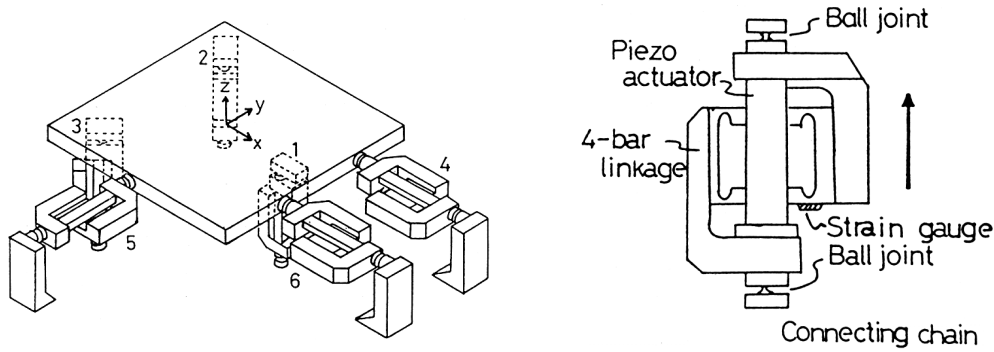


FIG. 2.9 – Structure flexible à 6 DDL entraînée par des actionneurs piézoélectriques.
(Hara & Sugimoto 1990)

flexibles ;

- mécanismes à “compliance localisée¹⁰”, qui sont partiellement ou complètement compliants et dont les articulations flexibles reliant les segments rigides sont de petites dimensions par rapport aux dimensions du mécanisme ;
- mécanismes à “compliance distribuée¹¹” qui sont partiellement ou complètement compliants et dont des segments entiers sont flexibles (FIG. 2.10).

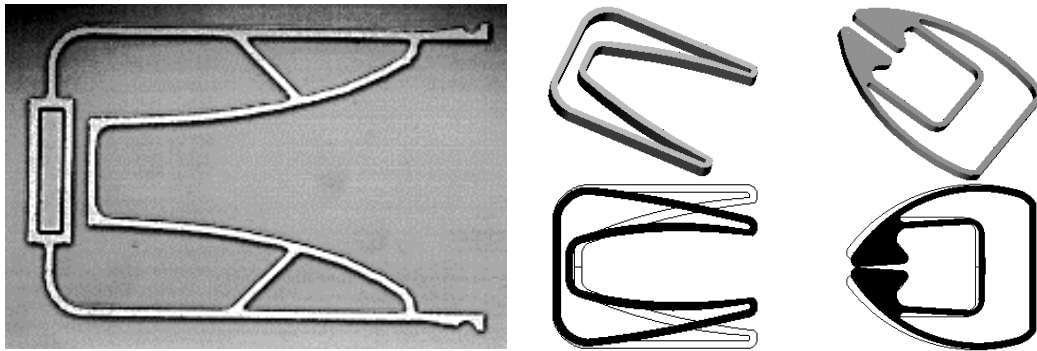


FIG. 2.10 – Mécanismes compliants à compliance distribuée. Ces structures jouent le rôle de petits préhenseurs.

(Kota et al. 1999) (Ananthasuresh & Kota 1995)

Ces auteurs proposent une méthode de synthèse systématique des structures flexibles reposant sur des algorithmes d’optimisation (Frecker et al. 1997; Kota 1997) dont les paramètres d’entrée sont les forces et les charges exercées sur la structure ainsi que les déplacements désirés. Par un processus itératif entièrement automatique, l’algorithme génère une cinématique puis en optimise les dimensions.

10. *Lumped compliance* en anglais.

11. *Distributed compliance* en anglais.

A notre connaissance, cette approche n'a été utilisée pratiquement que dans la conception de microsystèmes (MEMS) (Kota 1999) dont les mécanismes sont bidimensionnels et généralement à 1 DDL. Elle a en particulier été utilisée pour amplifier le mouvement d'actionneurs électrostatiques, piézoélectriques ou à matériaux à mémoire de forme. Les non-linéarités liées aux grandes déformations ne sont pas prises en compte par ces algorithmes.

Il paraît impossible aujourd'hui de concevoir des structures flexibles tridimensionnelles à plus de 3 DDL par de tels algorithmes. En revanche cette approche numérique pourrait être intéressante pour optimiser certains paramètres des structures conçues selon notre méthode (chap. 10).

2.5.2 Modèle des corps pseudo-rigides

Dans le but de modéliser la cinématique de guidages flexibles, Burns & Crossley (1968) proposent de remplacer les articulations flexibles par des guidages idéaux judicieusement placés, dotés d'une rigidité naturelle non nulle et reliant entre eux des segments rigides. Ils appellent ce modèle "modèle des corps pseudo-rigides"¹². Initialement utilisée pour modéliser des structures dont la compliance est localisée, cette approche a plus tard été utilisée pour des articulations simples dont la compliance est distribuée, comme une poutre en console¹³. Elle est utilisée pour modéliser les phénomènes non linéaires liés aux grandes déformations des articulations flexibles, sans recourir à l'approche analytique¹⁴.

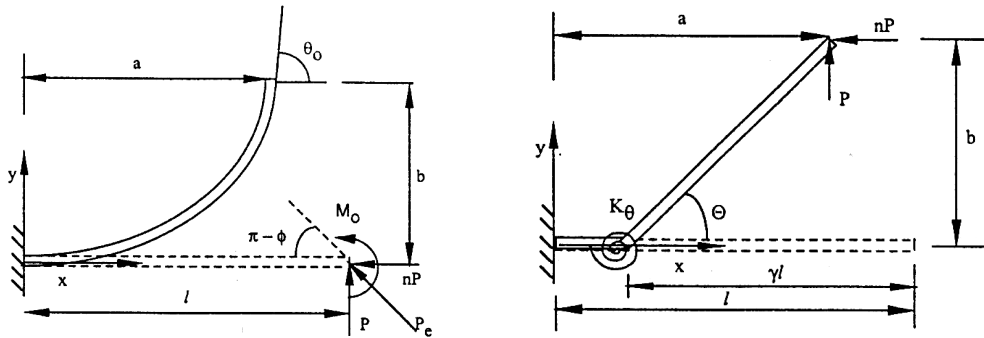


FIG. 2.11 – Grande déformation d'une poutre en console et sa modélisation par le "modèle des corps pseudo-rigides."

(Salim & Wurmus 1998)

La méthode que nous proposons (chap. 10 à 12) ressemble au "modèle des corps pseudo-rigides" mais vise un autre but : concevoir et analyser de manière aisée des structures flexibles tridimensionnelles ayant jusqu'à 6 DDL. Ainsi nous ne cherchons pas à modéliser avec la plus grande exactitude possible des articulations élémentaires comme le font les précédents travaux, mais nous proposons une méthode

12. *Pseudo-rigid-body model* en anglais.

13. (Howell & Midha 1994; Howell & Midha 1995; Salim & Wurmus 1998; Howell *et al.* 1996)

14. La modélisation analytique des grandes déformations des lames fait intervenir des intégrales elliptiques pour résoudre des équations différentielles non linéaires du second ordre (Hymans 1946; Ashwell 1950; Mattiasson 1981; Munteanu *et al.* 1996; De Bona & Zelenika 1997). Elle est par conséquent lourde d'utilisation.

simple qui permet la synthèse et l'analyse de structures flexibles complexes. Nous établissons une équivalence¹⁵ entre structures à guidages flexibles et structures à guidages idéaux, et non pas une équivalence entre articulations élémentaires et guidages idéaux.

2.6 Applications

2.6.1 Amplification pour actionneurs piézoélectriques

Les structures flexibles sont couramment utilisées pour amplifier le mouvement d'actionneurs piézoélectriques¹⁶. Une approche originale consiste à découper par laser une structure flexible dans une plaque de céramique piézoélectrique, puis à coller des électrodes dans les zones que l'on désire rendre actives ou sensibles (Breguet *et al.* 1997; Breguet & Clavel 1998). Cette approche permet d'avoir dans un même bloc de matière la structure mécanique, les actionneurs et les capteurs.

2.6.2 Instruments de mesure

Les structures flexibles permettent de réaliser des corps d'épreuve de capteurs de force. Les balances de précision Mettler-Toledo (Hungerbühler & Burkhard 1994), par exemple, utilisent un corps d'épreuve sophistiqué (FIG. 2.12) qui permet de démultiplier la force produite par la masse pesée avant de la compenser par un actionneur électromagnétique. L'utilisation d'une structure flexible monolithique permet de réduire considérablement le nombre de pièces nécessaires à la réalisation du mécanisme et d'en augmenter la précision.

Nous avons participé à la conception d'un capteur de force inventé par Odiet (1999) qui utilise une table à quatre cols circulaires comme corps d'épreuve.

Nickols (1955) décrit un mécanisme de précision utilisant le mouvement parasite de la table à deux lames parallèles pour produire une très forte démultiplication de mouvement dans un instrument de mesure.

Perry (1890) aborde l'étude du ruban vrillé (FIG. 2.12 B) utilisé comme amplificateur de mouvement.

2.6.3 Instruments optiques

Des structures flexibles à 1 ou 2 DLL sont couramment utilisées pour l'alignement de composants optiques¹⁷. D'autres sont également utilisées pour la réalisation d'interféromètres (Bradley 1962; Deslattes 1969) ou pour déplacer des échantillons sous des microscopes (Stone 1988; Zhao *et al.* 1993). Ces applications optiques présentent la particularité de ne pas produire de forces autres que celles de gravité sur

15. Nous appelons cette équivalence cinématique *analogie cinématique* (§ 10.1.2)

16. (Scire & Teague 1978; Sato *et al.* 1991; Sato *et al.* 1993; King & Xu 1996; Xu & King 1996; Salim & Wurmus 1998; Jänker *et al.* 1998; Hladky-Hennion *et al.* 1998; Dörrer 1998; Pertsch *et al.* 1998; Barillot *et al.* 1999)

17. (Jones 1952; Jones 1956b; Jones 1956a; Genequand 1983; Schwab & Genequand 1985; Rundle 1989)

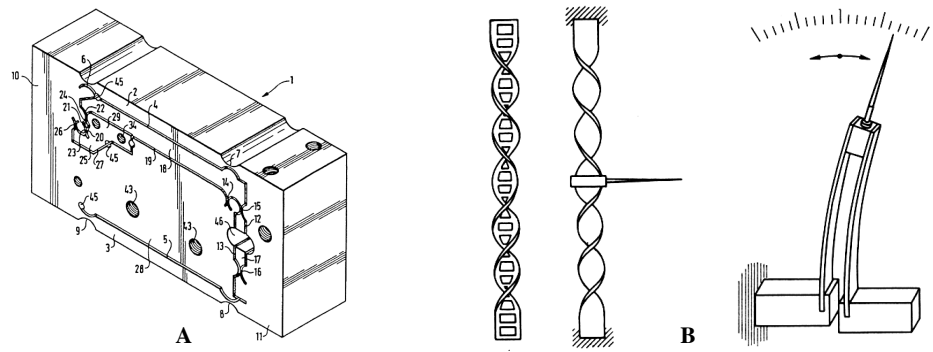


FIG. 2.12 – A : Cellule de pesée de balance Mettler-Toléro. Cette structure flexible monolithique découpée par électroérosion à fil dans un alliage d'aluminium a pour rôle de démultiplier, au moyen de leviers, la force produite par la masse pesée. B : Systèmes flexibles d'amplification de mouvement pour appareils de mesure (rubans de torsion découpés ou plein et amplificateur à lames).

(Hungerbühler & Burkhard 1994, A) (Bassière & Gaignebet 1966, B)

les guidages. Ainsi, les exigences en termes de rigidité sont moins importantes que dans le cas des structures de robots comme celles que nous concevons.

2.6.4 Cardans de gyroscopes

De nombreux articles et brevets décrivent des cardans flexibles utilisés pour guider des gyroscopes¹⁸. On trouve également divers cardans flexibles dont les méthodes de fabrication ont été brevetées¹⁹. Plusieurs sont fabriqués par électroérosion²⁰ (FIG. 2.13).

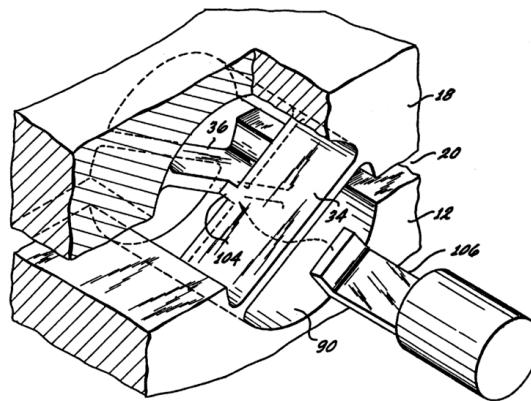


FIG. 2.13 – Usinage par électroérosion d'un pivot à lames croisées monolithique.
(Craig 1981)

18. (Weisbord & Krupick 1974; Haberland 1977; Haberland 1978; Wyse 1977; Previte 1978; Duncan 1981; Rouston 1987; Kempas 1986)

19. (Kutash 1974; Wyse 1976; Craig & Council 1978; Previte 1980; Brown 1983)

20. (Craig *et al.* 1979; Craig 1981; Kempas 1987; Wilkey 1989)

2.6.5 Applications aérospatiales

La grande fiabilité de fonctionnement et l'absence de toute lubrification²¹ font des guidages flexibles des éléments mécaniques parfaitement adaptés aux applications aérospatiales. *Zago et al. (1997)* décrivent par exemple un support flexible utilisé pour isoler un dispositif de communication inter-satellites par faisceau laser des vibrations du satellite sur lequel il est embarqué (*Zago et al. 1998*). Il décrit également une structure flexible à 2 DDL en rotation (scanner $\theta X \theta Y$) utilisée pour dévier un faisceau laser avec une très haute dynamique (même type d'applications). Il décrit enfin un guidage en translation rectiligne utilisé pour déplacer le miroir d'un interféromètre embarqué sur un satellite destiné à des observations météorologiques. Le guidage est une table compensée à quatre lames parallèles avec un levier de couplage (FIG. 10.6 et 10.7). *Spanoudakis et al. (2000)* décrivent un autre mécanisme à 2 DDL en rotation ($\theta X \theta Y$) utilisé pour incliner le miroir d'un dispositif optique qui sera également satellisé.

Olson (1970) décrit des essais de fatigue réalisés sur des pivots à lames croisées avec un grand nombre de cycles (10^8) en vue d'applications aérospatiales.

2.6.6 Assemblages isostatiques

Yoder (1986) montre différentes manières de fixer des miroirs au moyen d'articulations flexibles de manière à ne pas induire de contraintes qui pourraient les déformer et à minimiser les déplacements parasites dus aux variations de température. *Slocum et al. (1997)* décrivent d'autres assemblages isostatiques reposant sur des articulations flexibles.

2.7 Conclusion

Nous voyons au travers de cette description de l'état de l'art que les guidages flexibles qui sont utilisés en mécanique de précision depuis plus 60 ans ont été abondamment étudiés. Nous remarquons également que la plupart de ces études portent sur des guidages à 1 ou 2 DDL, alors que les structures flexibles à plus de 3 DDL sont relativement peu nombreuses. Enfin, nous notons qu'aucune approche globale des guidages flexibles, ni méthode de conception générale ne sont proposées²².

Ainsi, ces travaux pointus ne peuvent être que d'une aide ponctuelle pour l'ingénieur ou le scientifique qui cherche à concevoir une structure articulée à guidages flexibles pour une application particulière en robotique de haute précision. Ne disposant pas d'outil spécifique, le concepteur doit recourir aux théories très générales de la mécanique des structures, de la mécanique de la rupture ou de la modélisation par éléments finis, par exemple, pour traiter son problème. Or ces théories qui sont généralement utilisées dans le génie civil pour la conception et le dimensionnement de structures métalliques de bâtiments ou de ponts et dans la mécanique traditionnelle pour le dimensionnement des machines ne sont pas façonnées de manière à être

21. Les lubrifiants ne peuvent pas être utilisés dans le vide, même partiel.

22. La seule approche générique des structures flexibles que nous connaissions est celle dite des "mécanismes compliants", or comme nous l'avons relevé, elle est inadaptée à la conception de structures tridimensionnelles ayant jusqu'à 6 DDL dédiée à la robotique de haute précision.

directement utilisées pour la conception de guidages flexibles. Ainsi, le concepteur doit, d'une part, appliquer ces théories à des éléments dont la modélisation n'est pas courante et, d'autre part, se soucier de vérifier si le modèle utilisé reste valable. En effet dans le cas particulier des guidages flexibles de haute précision, le recours à des éléments déformables dont les dimensions sont de quelques dizaines de micromètres et dont les variations de section sont importantes est courant. Or à cette échelle, il est légitime de se demander si les hypothèses de base de ces théories, à savoir la continuité, l'homogénéité et l'isotropie (sect. 3.1) restent vérifiées. Ces deux étapes constituent un frein considérable qui ralentit et limite la conception.

Pour cette raison, nous nous sommes donnés pour objectif d'appliquer ces théories aux principaux éléments constitutifs des structures flexibles, afin de mettre à la disposition du concepteur des formules de dimensionnement utilisables directement et de vérifier expérimentalement la validité de ces théories dans le cas particulier des articulations flexibles de petites dimensions usinées par électroérosion.

Première partie

Théorie

Chapitre 3

Fondements théoriques

Ce chapitre établit les fondements théoriques à partir desquels sont calculées les rigidités et les courses des articulations élémentaires (chap. 4) et des guidages flexibles (chap. 5 et 6). Nous reprenons les hypothèses fondamentales de la *mécanique des structures* et nous traitons des articulations flexibles élémentaires comme des poutres sollicitées en flexion simple ou en torsion. Pour le calcul des courses admissibles, nous utilisons comme critère de plastification le critère de l'énergie de distortion maximale. Pour déterminer la contrainte admissible dans le matériau, nous prenons en compte le phénomène d'endommagement par fatigue. Il est nécessaire d'apporter un facteur de correction aux résultats obtenus par des essais de fatigue standard si l'on veut les utiliser pour des articulations flexibles. Ce facteur de correction peut être déterminé en effectuant des essais de fatigue sur des éprouvettes spéciales sollicitant directement des articulations flexibles (chap. 9).

3.1 Hypothèses fondamentales

Les formules et abaques présentés dans ce document sont établis à partir de la *théorie de la mécanique des structures*¹. Cette théorie est basée sur trois hypothèses concernant la constitution de la matière : la continuité, l'homogénéité et l'isotropie, ainsi que deux hypothèses relatives à la nature des déformations : leur proportionnalité avec les contraintes et leur grandeur très faible par rapport aux dimensions du solide. Pour le calcul de la déformée des poutres en flexion, nous faisons intervenir une hypothèse simplificatrice supplémentaire : nous considérons que la courbure des poutres est égale à la dérivée seconde de leur déformée. Ceci nous permet d'utiliser la relation

$$y''(x) \simeq \frac{1}{\rho(x)} = \frac{-M(x)}{EI(x)} + \left\{ \frac{\eta}{GA(x)} \frac{dF(x)}{dx} \right\} \quad (3.1)$$

où y'' est la dérivée seconde de la déformée de la poutre, ρ sa courbure, M le moment fléchissant, E le module de Young, I le moment d'inertie de la section de la poutre, F l'effort tranchant, η un coefficient de forme², G le module de glissement et A l'aire

1. La *mécanique des structures* (Del Pedro & Gmür 2001) est également appelée *résistance des matériaux* (Del Pedro 1985) ou *mécanique des matériaux* (Massonnet & Cescotto 1994; Gere & Timoshenko 1990). Ces ouvrages sont ceux que nous avons utilisés lors de la rédaction de ce chapitre.

de la section de la poutre. Le terme entre accolades représente l'influence de l'effort tranchant que, sauf indication contraire, nous négligeons.

Les résultats présentés dans cet ouvrage ne sont corrects que dans la mesure où ces hypothèses sont vérifiées.

Nous considérerons que les trois premières hypothèses le sont, à condition que les dimensions des parties flexibles des articulations restent supérieures à quelques dizaines de micromètres³.

Un essai de traction permet de vérifier la validité de l'hypothèse de proportionnalité. Cette hypothèse est généralement valable pour les alliages élastiques utilisés pour la réalisation d'articulations flexibles.

L'hypothèse des petites déformations est celle de laquelle les articulations flexibles risquent de s'écarter le plus. En effet, vu que nous cherchons à maximiser la course des articulations, les déformations ont souvent de grandes amplitudes. Toutefois, la complexité du problème nous incite à ne pas prendre en compte l'influence des grandes déformations dans cet ouvrage.

L'influence de l'effort tranchant sur la déformée est souvent négligeable. Dans les cas où elle ne l'est pas, nous la prenons en compte (sect. 4.5).

3.2 Courses admissibles

La course d'une articulation flexible est le plus grand débattement (en rotation ou en translation) qu'elle peut supporter sans rupture ni plastification. Premièrement, le modèle théorique servant à calculer la course fait intervenir un *critère de plastification* (Collins 1993) permettant de déterminer quel état de contrainte limite provoque la plastification de l'articulation (§ 3.2.1). Deuxièmement, le modèle fait intervenir le phénomène d'*endommagement par fatigue* (Pomey & Lieurade 1982; Brand 1984; Duprat 1997; Spinnler 1997a) car l'amplitude des contraintes nécessaires pour produire la rupture diminue lorsque le nombre de cycles de sollicitation augmente (§ 3.2.2). Troisièmement, le modèle fait intervenir un *facteur de sécurité* qui prend en compte l'incertitude sur la limite de fatigue ainsi que les incertitudes liées aux imperfections et aux hypothèses simplificatrices du modèle utilisé pour calculer les contraintes dans l'articulation (§ 3.2.4).

3.2.1 Critère de plastification

Pour définir l'état de contrainte limite qui provoque la plastification de l'articulation, nous utilisons le *critère de l'énergie de distorsion maximale*⁴ qui stipule que l'énergie fournie pour augmenter ou diminuer le volume initial ne joue aucun rôle dans la rupture de l'équilibre élastique ; seule l'énergie fournie pour déformer le volume entre en ligne de compte.

2. Pour les sections rectangulaires, nous avons le coefficient de forme $\eta = 6/5$.

3. Si les dimensions des zones flexibles s'approchent trop de la taille des grains de la matière, les hypothèses de continuité, d'homogénéité et d'isotropie risquent de ne plus pouvoir être appliquées telles quelles.

4. Le critère de l'énergie de distorsion maximale est également appelé *critère de Von Mises-Hencky* ou *critère du plus grand travail de distorsion*.

Flexion

Pour le calcul des courses de certaines des articulations qui nous concernent ici, nous considérons des poutres sollicitées en flexion. Nous négligeons généralement l'effet de l'effort tranchant. L'état de contrainte dans la matière reste donc uniaxial : les éléments de matière constituant la poutre sont sollicités en traction-compression. Pour cet état de contrainte la plastification survient lorsque la contrainte de traction compression atteint une valeur limite σ_{lim} qui peut être déterminée par un essai de traction.

Dans la plupart des cas traités dans cet ouvrage, nous avons affaire à des poutres prismatiques de section rectangulaire. Notons h l'épaisseur de la poutre, b sa largeur. La contrainte normale subie par un élément de matière situé à une distance y de l'axe neutre de la poutre, dans une section où le moment de flexion est M est selon la formule classique :

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (3.2)$$

Les contraintes normales sont donc maximales sur les fibres externes (en $y = \pm h/2$). Si la contrainte maximale admissible⁵ dans la matière est σ_{adm} alors le moment maximal admissible est donc :

$$M_{adm} = \frac{bh^2\sigma_{adm}}{6}. \quad (3.3)$$

Nous utilisons cette formule à maintes reprises dans les chapitres suivants.

Torsion

Pour le calcul des courses d'autres articulations nous considérons des poutres sollicitées en torsion pure. Dans ce cas, le critère de l'énergie de déformation maximale établit que la plastification se produit lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite $\tau_{lim} = \sigma_{lim}/\sqrt{3}$.

REMARQUE : Un autre critère de plastification couramment utilisé est le *critère du plus grand cisaillement*⁶. Selon ce critère, pour les poutres en flexion pure, la plastification survient lorsque la contrainte normale sur les fibres externes atteint la valeur limite σ_{lim} . Ce résultat est identique à celui trouvé avec le critère de l'énergie de distorsion maximale. Toujours selon le critère du plus grand cisaillement, pour les poutres en torsion, la plastification survient lorsque la contrainte de cisaillement τ atteint une valeur $\tau_{lim} = \sigma_{lim}/2$. Ce résultat diffère légèrement de la valeur trouvée avec le critère de l'énergie que nous avons choisi, où $\tau_{lim} = \sigma_{lim}/\sqrt{3}$. Pour les aciers, il semble que cette dernière valeur soit la plus réaliste (Spinnler 1997a).

5. La notion de *contrainte admissible* est définie plus en détail au paragraphe 3.2.4.

6. Le critère du plus grand cisaillement est également appelé *critère de Tresca* ou *critère de la contrainte tangentielle maximum*.

3.2.2 Endommagement par fatigue

Nous venons de voir comment le critère de plastification permet de prédire la survenue de la plastification dans une poutre soumise à de la flexion ou de la torsion, si l'on connaît la contrainte limite σ_{lim} qui provoque la plastification d'une éprouvette en traction. Il s'agit à présent de déterminer plus précisément quelle est la valeur de σ_{lim} , sachant que le phénomène d'endommagement par fatigue a pour conséquence de la faire varier en fonction du nombre de sollicitations. Pour la connaître, l'on recourt couramment à des *essais de fatigue* réalisés sur des éprouvettes standardisées sollicitées avec des contraintes périodiques, analogues à celles qui se produisent dans l'articulation que l'on cherche à dimensionner. Une fois la valeur de la contrainte limite connue pour les éprouvettes, un facteur de correction c , tenant compte des différences entre les conditions de l'essai de fatigue et les conditions réelles de l'articulation, permet de trouver la contrainte limite σ_{lim} que supporte l'articulation. Les fournisseurs de matière disposent fréquemment de valeurs de limites de fatigue qui permettent d'éviter de recourir au fastidieux travail des essais de fatigue.

Essais de fatigue

DÉFINITIONS : La **limite de fatigue** σ_D est la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il n'est pas constaté de rupture après un *nombre infini de cycles*. La **limite d'endurance** $\sigma_D(N)$ est la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il est constaté 50% de ruptures après un *nombre fini N de cycles*.

REMARQUE : Pour les aciers et les alliages de titane, la limite de fatigue σ_D correspond approximativement à la limite d'endurance pour 10^7 cycles $\sigma_D(10^7)$. Ceci n'est généralement pas le cas pour d'autres alliages tels que ceux d'aluminium ou de cuivre pour lesquels il n'existe parfois pas de limite de fatigue.

MODES DE SOLLICITATION : Les essais de fatigue s'effectuent généralement selon l'un des cinq modes de sollicitation suivants : efforts axiaux (traction ou compression), flexion plane, flexion rotative, torsion ou contraintes combinées. On distingue également les modes de sollicitation par le taux de variation de contrainte⁷ R dont les valeurs typiques nous concernant sont : $R = 0$ pour les contraintes répétées et $R = -1$ pour les contraintes purement alternées.

Pour pouvoir déduire avec le plus de précision possible σ_{lim} à partir des essais de fatigue, nous avons intérêt à ce que le mode de sollicitation utilisé lors de l'essai soit le plus semblable possible au mode de sollicitation que subit l'articulation. Par exemple, pour une articulation dont les parties flexibles sont sollicitées en flexion dans les deux directions autour de sa position nominale, nous utilisons la limite de fatigue du matériau en flexion plane sous contraintes purement alternées. Si le fournisseur de matière ne dispose pas de cette valeur, il est possible d'utiliser la limite de fatigue pour un autre mode de sollicitation à condition de faire intervenir un facteur de correction. Pour le choix de ce facteur de correction nous pouvons donner les indications suivantes :

- la limite de fatigue en flexion est supérieure à celle en traction, qui est elle-même supérieure à celle en torsion ;
- la limite de fatigue sous contraintes répétées est supérieure à celle sous contraintes alternées.

3.2.3 Facteur de correction

Plusieurs facteurs influencent la résistance à la fatigue du matériau d'une articulation qui peut s'écarter considérablement de celle des éprouvettes standardisées. Voici les principaux paramètres :

- L'état de surface résultant de l'usinage et du traitement éventuel de la pièce : il comprend la rugosité superficielle, l'état structural des couches superficielles du matériau (écrouissage, phénomènes thermiques) et les modifications de l'état de contrainte (contraintes résiduelles).
- La taille des pièces : lorsque la taille diminue, la probabilité de présence de défauts diminue et l'appui des couches augmente (*effet d'échelle*)⁸. Ces deux phénomènes tendent à augmenter la limite de fatigue.
- La contrainte moyenne : l'intensité de la contrainte statique à laquelle se superpose la contrainte cyclique influence le comportement en fatigue.
- La température : la limite de fatigue diminue lorsque la température augmente.
- L'effet d'entaille⁹ : il concentre les contraintes et diminue la limite de fatigue.
- La corrosion : les piqûres de corrosion peuvent se comporter comme des petites entailles facilitant l'amorce de fissures de fatigue.

La prise en compte de tous ces facteurs permet de trouver la *limite de fatigue corrigée*

$$\sigma'_D = c \times \sigma_D, \quad (3.4)$$

c étant le facteur de correction englobant les différents phénomènes cités ci-dessus et éventuellement le facteur de passage d'un mode de sollicitation à l'autre (§ 3.2.2).

7. Si la contrainte varie au cours du temps entre une valeur minimale σ_{min} et une valeur maximale σ_{max} alors le taux de variation de contraintes est $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$. REMARQUE : les contraintes sont comptées comme positives lorsque la matière est soumise à de la traction, et comme négatives en compression.

8. **Effet d'échelle** : lorsqu'une pièce mécanique est sollicitée en flexion ou en torsion, ses couches superficielles sont soumises à un gradient de contraintes. Plus les dimensions de la pièce sont petites, plus ce gradient est élevé pour une même contrainte en surface. Cette augmentation du gradient de contrainte pour une taille des grains de matière et des défauts qui reste inchangée a pour effet que les couches les moins sollicitées sont plus rapprochées des couches fortement sollicitées et peuvent, par conséquent, mieux les soutenir.

9. Le terme d'**entaille** est utilisé pour indiquer la présence d'une discontinuité dans la forme de la pièce qui tend à concentrer les contraintes mécaniques.

Incertitudes

Les essais de fatigue présentent toujours un certain caractère aléatoire¹⁰. Pour une série de mesures apparemment identiques, on trouvera des valeurs de limite de fatigue différentes suivant approximativement une distribution gaussienne autour d'une valeur moyenne. Ainsi, il subsiste toujours une incertitude sur les valeurs de σ_D .

De plus, il y a inévitablement une incertitude sur la valeur du facteur de correction c , liée à l'impossibilité de quantifier précisément l'influence des différents phénomènes en jeu. Ainsi, les incertitudes sur les valeurs des limites de fatigue corrigées σ'_D sont toujours supérieures aux incertitudes sur les valeurs originales σ_D .

Détermination de σ_{lim}

La contrainte limite σ_{lim} n'est autre que la valeur de la limite de fatigue corrigée $\sigma'_D(N)$ correspondant au nombre N de cycles que doit supporter l'articulation. L'incertitude sur $\sigma'_D(N)$ se retrouve donc intégralement sur σ_{lim} .

Déduire la valeur de la contrainte limite σ_{lim} à partir des résultats d'essais de fatigue standard induit inévitablement une grande incertitude sur cette valeur.

3.2.4 Facteur de sécurité

La rupture survient lorsque la contrainte réelle au sein de la matière atteint la contrainte limite $\sigma = \sigma_{lim}$. Pour éviter la rupture, il faut donc garantir que les contraintes dans l'articulation restent inférieures à cette valeur limite : $\sigma < \sigma_{lim}$. Nous venons de voir qu'il subsiste inévitablement une incertitude sur la valeur de σ_{lim} . De plus, il existe une incertitude sur la valeur de σ due aux imperfections et aux hypothèses simplificatrices du modèle utilisé pour calculer les contraintes dans l'articulation en fonction de sa déformation. Ces incertitudes sur les deux termes de l'inégalité nous obligent à faire intervenir un facteur de sécurité S qui permette de garantir qu'elle soit toujours vérifiée. Nous choisissons donc une contrainte admissible σ_{adm} inférieure à σ_{lim} :

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{lim}}{S}. \quad (3.5)$$

Nous choisirons par exemple S entre 1,5 et 3 selon la *marge de sécurité*¹¹ désirée. Cette dernière est l'écart entre la plus forte contrainte σ qui puisse apparaître dans l'articulation (en tenant compte des incertitudes), et la plus faible contrainte limite qui soit envisageable (en tenant compte des incertitudes) (fig. 3.1, 3.2 et 3.3).

10. La dispersion des essais de fatigue ne peut pas être réduite au-delà d'une certaine limite qui est liée à des aspects physiques du phénomène : inclusions dans le matériau, hétérogénéité de structure, etc.

11. En réalité, la présence d'une marge de sécurité positive n'exclut pas totalement la possibilité de rupture des articulations. En effet, si les distributions statistiques de σ_{lim} et de σ sont des distributions de Gauss, les notions de facteur de sécurité et de marge de sécurité ne peuvent être interprétées que par une approche probabiliste. Dès lors, la marge de sécurité donne une information sur la *probabilité de rupture de l'articulation*, probabilité qui diminue avec l'augmentation de la marge, mais qui ne peut être ramenée à 0. Par souci de simplicité, nous n'adopterons pas cette optique probabiliste dans cet ouvrage

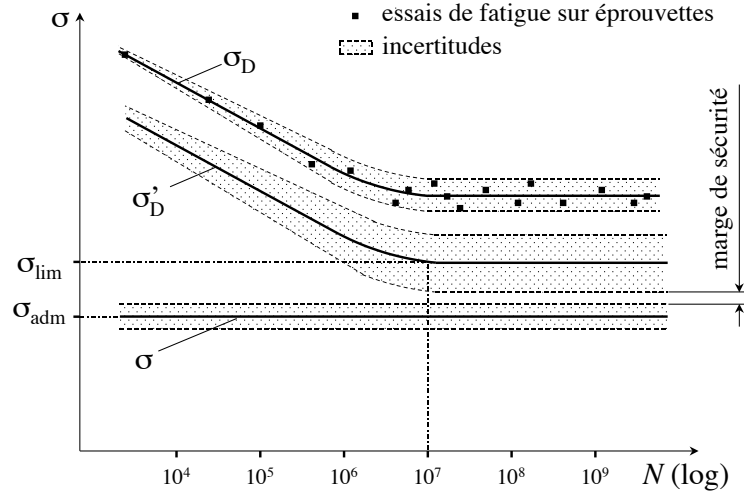


FIG. 3.1 – Détermination de σ_{adm} à partir d'essais de fatigue conventionnels (carrés noirs). Exemple d'un matériau qui présente une limite de fatigue $\sigma_D = \sigma_D(10^7)$ (comme la plupart des aciers et des alliages de titane) avec lequel on veut réaliser une articulation qui supporte un nombre infini de sollicitations. Le caractère aléatoire de la rupture de fatigue a pour conséquence qu'il subsiste une incertitude (pointillés) sur la courbe de Wöhler (courbe σ_D). Le facteur de correction c permet de trouver la courbe de Wöhler corrigée (courbe σ'_D) correspondant à l'articulation : $\sigma'_D = c \times \sigma_D$. L'incertitude sur c induit une incertitude sur σ'_D (pointillés) supérieure à l'incertitude sur σ_D . Les contraintes dans l'articulation (courbe σ) sont estimées au moyen d'un modèle qui ne peut être qu'approximatif et laisse une certaine incertitude (pointillés). Le choix du facteur de sécurité $S = \sigma'_D / \sigma_{adm}$ se fait de telle sorte qu'il subsiste une marge de sécurité entre les zones d'incertitude de σ'_D et de σ lorsque $\sigma = \sigma_{adm}$.

3.2.5 Synthèse sur les courses admissibles

Pour les articulations dont les éléments flexibles sont sollicités en flexion, la course est la déformation qui engendre des contraintes maximales de traction-compression σ égales à la contrainte admissible du matériau σ_{adm} .

Pour les articulations dont les éléments flexibles sont sollicités en torsion, la course est la déformation qui engendre des contraintes de cisaillement maximales τ égales à $\sigma_{adm} / \sqrt{3}$.

La contrainte admissible σ_{adm} s'obtient à partir de la limite de fatigue ou d'endurance corrigée σ'_D pour le nombre N de cycles de sollicitations en faisant intervenir un facteur de sécurité S .

La limite de fatigue corrigée σ'_D s'obtient à partir de la limite de fatigue σ_D par la prise en compte des facteurs influençant le comportement en fatigue de la pièce réelle.

La limite de fatigue σ_D se mesure par des essais de fatigue standardisés dont les résultats peuvent souvent être trouvés auprès des fournisseurs :

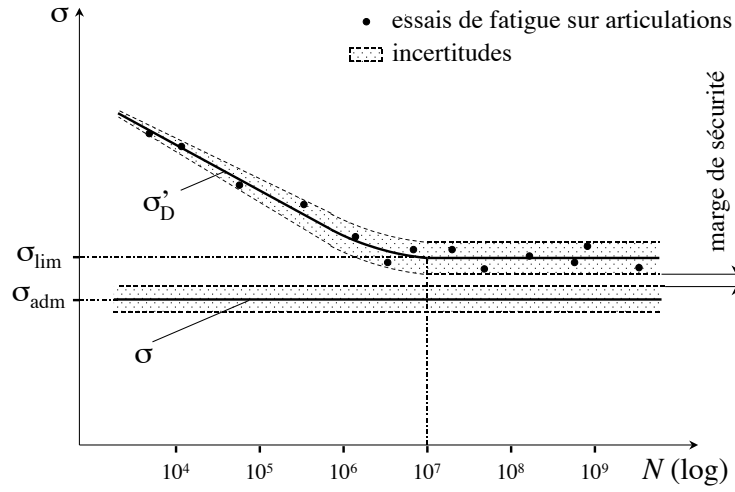


FIG. 3.2 – Détermination de σ_{adm} à partir d'essais de fatigue effectués directement sur une série d'articulations (ronds noirs). Le caractère aléatoire de la rupture de fatigue a pour conséquence qu'il subsiste une incertitude (pointillés) sur la course de Wöhler (courbe σ'_D). Toutefois, cette incertitude reste inférieure à celle de la courbe σ'_D de la figure 3.1, car ici il n'y a pas besoin de faire intervenir de facteur de correction. Cette réduction de l'incertitude permet de choisir un facteur de sécurité plus faible sans diminuer la marge de sécurité. Ainsi, la valeur de σ_{adm} est plus élevée et donne une course supérieure sans augmenter le risque de rupture.

- Pour que l'articulation supporte au moins un aller retour sur toute sa course, la contrainte admissible devra être inférieure à la limite de traction du matériau : $\sigma_{adm} < R_m$.
- Pour que l'articulation supporte plusieurs allers retours sur toute sa course sans endurer de déformations plastiques, la contrainte admissible devra être inférieure à la limite élastique du matériau : $\sigma_{adm} < R_e$.
- Pour que l'articulation supporte N (plusieurs centaines, milliers ou millions) allers retours sur toute sa course, la contrainte admissible devra être inférieure à la limite d'endurance corrigée du matériau pour N cycles avec prise en compte du facteur de sécurité : $\sigma_{adm} < \sigma'_D(N)/S$ où $\sigma'_D(N) = c \times \sigma_D(N)$.
- Pour que l'articulation supporte un nombre infini d'allers retours sans rompre, la contrainte admissible devra être inférieure à la limite de fatigue du matériau avec prise en compte du facteur de sécurité : $\sigma_{adm} < \sigma'_D/S$ où $\sigma'_D = c \times \sigma_D$.

Au travers de cette approche théorique de la course des articulations flexibles nous voyons que la principale difficulté réside dans la détermination de la contrainte admissible σ_{adm} dans le matériau. Parmi les étapes qui nous mènent de la limite de fatigue donnée par les fabricants σ_D à σ_{adm} , celle qui induit le plus d'incertitude sur la valeur de σ_{adm} est la prise en compte du facteur de correction c . C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de déterminer expérimentalement ce facteur pour les matériaux que nous utilisons le plus fréquemment. C'est ce qui est fait au chapitre

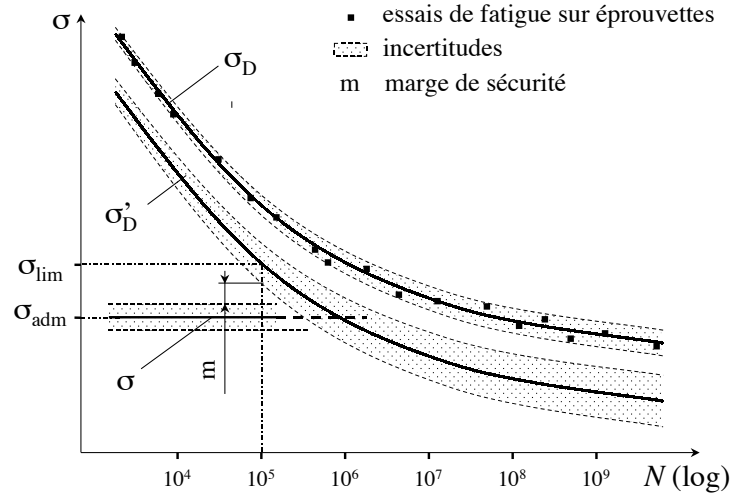


FIG. 3.3 – Détermination de σ_{adm} à partir d'essais de fatigue conventionnels (carrés noirs). Exemple d'un matériau qui ne présente pas de limite de fatigue (comme la plupart des alliages d'aluminium et de cuivre) avec lequel on veut réaliser une articulation qui supporte au moins 10^5 sollicitations.

9, où nous étudions en particulier l'influence de la rugosité résultant du processus d'usinage sur le facteur de correction c .

3.3 Rigidités

3.3.1 Définitions

Soit un corps déformable sur lequel est appliquée une force P , de telle manière que les diverses conditions de forme et de charge entraînent un déplacement du point d'application de P suivant sa ligne d'action. Notons f la longueur de ce déplacement. La force est liée au déplacement par la fonction $P = F(f)$ appelée *caractéristique force-déformation*. La **rigidité en translation**¹² est par définition $k = \frac{dF}{df}$. En pratique, dans la plupart des structures que nous étudions, nous faisons l'hypothèse que la caractéristique force-déformation est *linéaire*, donc que la rigidité k est une constante indépendante de la déformation f . Nous notons alors la rigidité en translation K (lettre K majuscule). L'unité de la rigidité en translation est le N/m.

Soit un corps déformable auquel est appliqué un couple C au centre d'inertie de l'une de ses sections, de telle manière que les diverses conditions de forme et de charge entraînent une rotation de cette section autour d'un axe parallèle à celui de C . Notons α l'angle de rotation de cette section. Le moment est lié à la rotation par la fonction $C = M(\alpha)$ appelée *caractéristique moment-déformation*. La **rigidité en rotation** ou *rigidité angulaire* est par définition $k_\alpha = \frac{dM}{d\alpha}$. En pratique, dans la

12. Ce que nous appelons *rigidité en translation* (N/m) est généralement appelé plus simplement *rigidité* dans la littérature. Nous avons choisi d'accoler systématiquement le substantif *en translation* pour bien la distinguer de la *rigidité angulaire* (Nm/rad).

plupart des structures que nous étudions, nous faisons l'hypothèse que la caractéristique moment-déformation est *linéaire*, donc que la rigidité k_α est une constante indépendante de la rotation α . Nous notons alors la rigidité en rotation K_α (lettre K majuscule). L'unité de la rigidité en rotation est le Nm/rad.

3.3.2 Rigidités des guidages à articulations flexibles

Sans liaison, un solide possède 6 DDL. La liaison de ce solide avec un élément fixe au moyen d'un guidage mécanique bloque certains de ces DDL (DDL bloqués) et en conserve d'autres (DDL libres)(FIG. 3.4).

Nous nommons force ou moment *naturel* une force ou un moment qui sollicite le guidage selon un de ses DDL libres. Nous appelons **rigidité en translation naturelle** et **rigidité angulaire naturelle** les rigidités liées respectivement aux forces naturelles et aux moments naturels.

Nous nommons force ou moment *transverse* une force ou un moment qui sollicite le guidage selon un de ses DDL bloqués. Nous appelons **rigidité en translation transverse** et **rigidité angulaire transverse** les rigidités liées respectivement aux forces transverses et aux moments transverses.

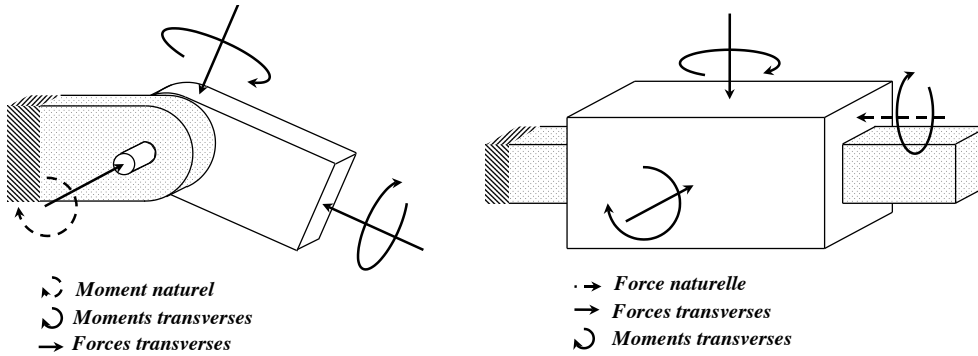


FIG. 3.4 – Rigidités naturelles et transverses du pivot et du guidage prismatique.

3.3.3 Rigidités généralisées

Au sens strict, une rigidité en translation est le rapport d'une force et d'un déplacement (unité N/m) et une rigidité angulaire le rapport d'un moment et d'une rotation (unité Nm/rad). Or pour l'étude des articulations flexibles, il est utile de s'intéresser également aux rotations induites par des forces, ainsi qu'aux déplacements induits par des moments. C'est la raison pour laquelle nous introduisons la notion de **rigidité généralisée** qui est le rapport d'une *force généralisée* (i.e. une force ou un moment) et d'un *déplacement généralisé* (i.e. un déplacement ou une rotation). Les rigidités généralisées peuvent avoir quatre unités différentes : N/m, N/rad, Nm/rad et N. Les rigidités généralisées des articulations élémentaires sont définies au chapitre 4 (sect. 4.1).

Chapitre 4

Articulations élémentaires

Ce chapitre traite des *articulations élémentaires* qui sont les éléments flexibles de base utilisés pour articuler les segments rigides qui composent les guidages flexibles et les structures flexibles. Parmi les ressorts classiques, seuls les bras flexibles, les ressorts à lames et les barres de torsion présentent des rapports de rigidités suffisamment élevés pour être utilisés comme articulations flexibles. Hormis les ressorts, les membranes et les soufflets peuvent également être utilisés comme articulations, mais ils ne sont pas étudiés ici.

Les rigidités généralisées ainsi que les courses admissibles des articulations élémentaires les plus courantes (lame, fil, barre de torsion, col circulaire) sont calculées. Dans le cas du col circulaire, la complexité des calculs nous conduit à tracer des abaques et à établir des formules simplifiées. Le calcul détaillé des rapports de rigidités nous permet de déterminer le nombre de degrés de liberté (DDL) de chaque articulation : 3 DDL pour la lame et le col circulaire, 5 DDL pour le fil et 1 DDL pour la barre de torsion.

4.1 Considérations générales

4.1.1 Classification des articulations

Tout comme les ressorts, les articulations élémentaires peuvent être classées en fonction de leur *état de contrainte* (FIG. 4.1). Les états de contrainte qui engendrent des ***contraintes normales*** sont la *traction ou compression simple* (ressorts annulaires, rondelles Belleville), et la *flexion* (bras ou poutres flexibles, ressorts à lames, ressorts spirales, ressorts hélicoïdaux de torsion). Les états de contrainte qui engendrent des ***contraintes tangentielles*** sont la *torsion simple* (barres de torsion, ressorts hélicoïdaux de traction ou de compression) et le *cisaillement simple* (cet état de contrainte ne pouvant jamais exister dans un solide entier, il n'existe pas de ressort exploitant exclusivement ce mode de sollicitation).

Mais alors que le rôle des ressorts est de stocker de l'énergie (barillet...), d'exercer des forces (précharges, attaches...), de filtrer des chocs ou des vibrations (suspensions...), ou de mesurer une force (corps d'épreuve, dynamomètres...), celui des articulations est de réaliser une *liaison cinématique*. Cette différence a pour conséquence que seuls peuvent être utilisés des ressorts dont les rigidités *transverses* sont beaucoup plus grandes que les rigidités *naturelles* (mode de sollicitation qui corres-

pond au DDL de l'articulation). Il en résulte pratiquement que, parmi les ressorts, seuls les bras flexibles, les ressorts à lames et les barres de torsion sont utilisables comme articulations.

Un *rapport de rigidités* élevé est obtenu en exploitant d'une part le fait que, de manière générale pour toute poutre élancée, les rigidités en traction-compression sont beaucoup plus élevées que les rigidités en flexion et en torsion, et d'autre part, parce que plus l'élancement des sections droites des poutres est grand (on parle alors de lames), plus le rapport des rigidités autour des deux axes principaux d'inertie de la section droite est grand.

Hormis les ressorts, il existe d'autres éléments élastiques pouvant faire office d'articulations élémentaires : il s'agit des *membranes* et des *soufflets*. Dans ces éléments, l'état de contrainte est généralement triaxial, ce qui rend leur étude complexe. C'est pourquoi ils ne sont pas traités en détail dans cet ouvrage.

Nous classifions les articulations élémentaires selon les catégories suivantes :

- Lame : liaison à 3 DDL (sect. 4.2)
- Fil : liaison à 5 DDL (sect. 4.3)
- Barre de torsion : liaison à 1 DDL (si elle est conçue pour être rigide en flexion)(sect. 4.4).
- Membrane : liaison généralement à 3 DDL (non traitée en détail dans cet ouvrage, sect. 2.1)
- Soufflet : liaison à 5 DDL (non traité en détail dans cet ouvrage, sect. 2.1)

4.1.2 Définition des rigidités généralisées et des courses

Dans cette section, nous définissons les différentes rigidités généralisées¹ des articulations élémentaires que nous calculons plus loin. Pour chacun des modes de sollicitation décrits ci-dessus, nous définissons une *course admissible* qui correspond au déplacement ou à la rotation qui engendre des contraintes normales ou tangentielles égales aux contraintes admissibles.

$K_{\alpha M}$ Si un moment M appliqué à l'extrémité de la poutre produit une rotation de celle-ci d'un angle α , alors nous définissons $K_{\alpha M} = \frac{M}{\alpha} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$. Course admissible : α_M (FIG. 4.2 a).

K_{fM} Si un moment M appliqué à l'extrémité de la poutre y produit une flèche f , alors nous définissons $K_{fM} = \frac{M}{f} \text{ [N]}$. Course admissible : f_M (FIG. 4.2 a).

$K_{\alpha P}$ Si une force P appliquée à l'extrémité de la poutre produit une rotation de celle-ci d'un angle α , alors nous définissons $K_{\alpha P} = \frac{P}{\alpha} \left[\frac{\text{N}}{\text{rad}} \right]$. Course admissible : α_P (FIG. 4.2 b).

K_{fP} Si une force P appliquée à l'extrémité de la poutre y produit une flèche f , alors nous définissons $K_{fP} = \frac{P}{f} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$. Course admissible : f_P (FIG. 4.2 b).

K_{cis} Soit une force P agissant sur le bloc mobile (infiniment rigide) attaché à l'extrémité de la poutre de telle manière que la rotation de celle-ci soit nulle (le bloc se translate). Si cette force produit une flèche f , alors nous définissons² $K_{cis} = \frac{P}{f} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$. Course admissible : f_{cis} (FIG. 4.2 c).

1. La notion de *rigidité généralisée* est définie à la section 3.3.

2. Nous avons choisi la notation K_{cis} comme $K_{\text{cisaillement}}$ car pour ce mode de sollicitation, la partie centrale de la poutre est sollicitée en cisaillement simple.

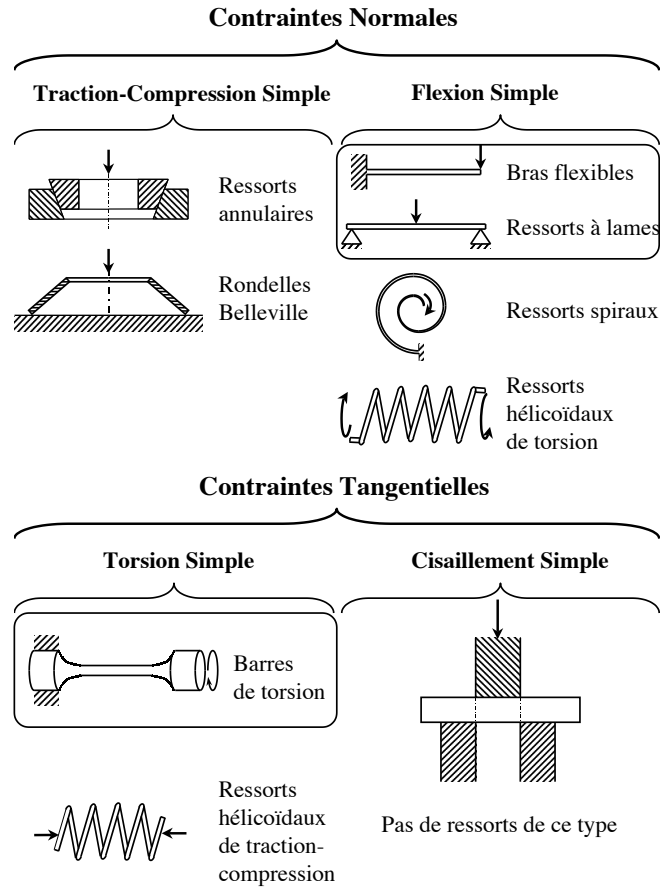


FIG. 4.1 – Classification des ressorts selon les contraintes qu'ils subissent. Les ressorts encadrés peuvent jouer le rôle d'articulations élémentaires car ils ont des rigidités transverses très supérieures aux rigidités selon leur mode normal de sollicitation. Les autres ressorts ne sont pas utilisables comme articulations flexibles car ils ont un faible rapport de rigidités. (Inspiré de (Duchemin 1984))

K_{trac} Si une force P agissant à l'extrémité de la poutre en la sollicitant en traction (respectivement en compression) l'allonge d'une longueur f , alors nous définissons la rigidité en traction $K_{trac} = \frac{P}{f} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$. Course admissible : f_{trac} (FIG. 4.2 d).

K_{tors} Si un moment M agissant à l'extrémité de la poutre en la sollicitant en torsion produit une rotation de cette extrémité d'un angle α , alors nous définissons $K_{tors} = \frac{M}{\alpha} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$. Course admissible : α_{tors} (FIG. 4.2 e).

Nous pouvons définir des termes similaires pour des forces et des moments sollicitant la poutre en flexion transverse. Nous notons alors ces rigidités $K_{\alpha M}^t$, K_{fP}^t , $K_{\alpha P}^t$, K_{fP}^t et K_{cis}^t et les courses admissibles associées respectivement α_M^t , f_P^t , α_P^t , f_P^t et f_{cis}^t (FIG. 4.2 f, g et h).

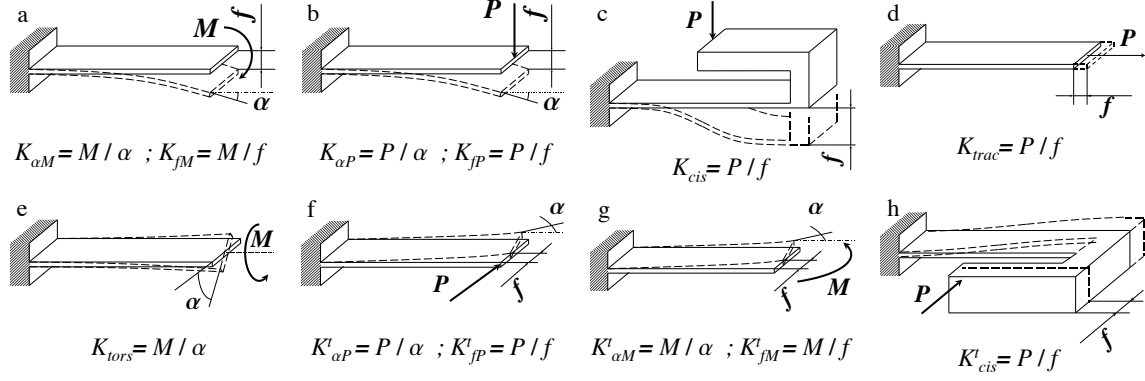
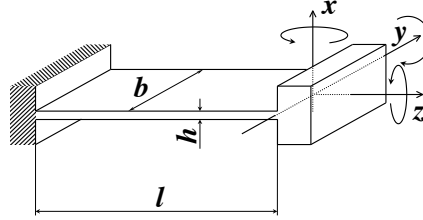


FIG. 4.2 – Définitions des rigidités généralisées des articulations élémentaires.

4.2 La lame

4.2.1 Définition

Nous dénommons **lame** toute poutre prismatique de section rectangulaire dont la largeur b et la longueur l sont au moins dix fois supérieures à l'épaisseur h : $b > 10h$ et $l > 10h$. Les moments d'inertie de la section droite sont $I_x = hb^3/12$ et $I_y = bh^3/12$ et le moment d'inertie polaire est $I_p = (bh^3 + hb^3)/12$. Nous notons E le module de Young et G le module de glissement.

FIG. 4.3 – Lame. Paramètres géométriques : l longueur ; b largeur ; h épaisseur.

4.2.2 Rigidités

Les formules classiques de théorie de la mécanique des structures nous donnent (en négligeant l'effort tranchant) :

$$\boxed{K_{\alpha M} = \frac{EI_y}{l}} \quad \boxed{K_{fM} = \frac{2EI_y}{l^2}} \quad \boxed{K_{\alpha P} = \frac{2EI_y}{l^2}} \quad \boxed{K_{fP} = \frac{3EI_y}{l^3}} \quad \boxed{K_{cis} = \frac{12EI_y}{l^3}} \quad (4.1)$$

Pour la flexion dans la direction transverse, il suffit de remplacer I_y par I_x dans les formules (4.1). Les rigidités en traction et en torsion³ sont :

$$\boxed{K_{trac} = \frac{bhE}{l}} \quad \boxed{K_{tors} = \frac{bh^3G}{3l}} \quad (4.2)$$

RAPPORTS DE RIGIDITÉS

- Rigidité angulaire transverse versus rigidité angulaire naturelle :
 $K_{\alpha M}^t/K_{\alpha M} = I_x/I_y = (b/h)^2$. Si $b > 10h$ alors $K_{\alpha M}^t/K_{\alpha M} > 100$. Nous pouvons donc considérer le DDL en rotation correspondant à la flexion transverse comme bloqué.
- Rigidité en torsion versus rigidité angulaire naturelle⁴ :
 $K_{tors}/K_{\alpha M} = 4G/E \simeq 1.5$. La rigidité en torsion étant du même ordre de grandeur que la rigidité en flexion naturelle, nous pouvons considérer le DDL correspondant à la torsion comme libre.
- Rigidité en traction-compression versus rigidité en translation naturelle :
 $K_{trac}/K_{cis} = (l/h)^2$. Si $l > 10h$ alors $K_{trac}/K_{cis} > 100$. Nous pouvons donc considérer le DDL en translation correspondant à la traction-compression comme bloqué.
- Rigidité en translation transverse versus rigidité en translation naturelle :
 $K_{cis}^t/K_{cis} = I_x/I_y = (b/h)^2$. Si $b > 10h$ alors $K_{cis}^t/K_{cis} > 100$. Nous pouvons donc considérer le DDL en translation correspondant à la flexion transverse comme bloqué.

BILAN :

*Une lame constitue une liaison à **3 DDL** (deux rotations et une translation) dont les rapports de rigidités sont d'autant plus élevés que les rapports b/h et l/h sont élevés.*

4.2.3 Courses

Pour les mouvements selon les 3 DDL naturels, nous obtenons les courses suivantes⁵ :

$$\boxed{\alpha_M = \frac{2\sigma_{adm}l}{Eh}} \quad \boxed{f_{cis} = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Eh}} \quad \boxed{\alpha_{tors} = \frac{\tau_{adm}l}{hG} \text{ où } \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}} \quad (4.3)$$

Pour les mouvements selon les 3 DDL transverses, nous obtenons les courses suivantes :

$$\boxed{\alpha_M^t = \frac{2\sigma_{adm}l}{Eb}} \quad \boxed{f_{cis}^t = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Eb}} \quad \boxed{f_{trac} = \frac{\sigma_{adm}l}{E}} \quad (4.4)$$

3. Nous tirons cette formule qui n'est valable que pour des sections très élancées ($b \gg h$) de (Massonnet & Cescotto 1994).

4. Le module de Young et le module de glissement sont liés par la relation $G = E/(2(1+\mu))$. Or la plupart des matériaux que nous utilisons pour réaliser des articulations flexibles ont un coefficient de Poisson $\mu = 0.3$ donc $G \simeq E/2.6$.

5. REMARQUE : pour le calcul de la course angulaire en torsion α_{tors} nous utilisons la formule de la contrainte tangentielle en fonction du moment de torsion $\tau = 3M/(bh^3G)$. Cette formule donnée par Massonnet & Cescotto (1994, page 148) n'est valable que lorsque l'élancement de la section est grand ($b \gg h$).

4.3 Le fil

4.3.1 Définition

Nous dénommons **fil** toute poutre prismatique dont les deux moments d'inertie de la section droite sont proches ($I_x \simeq I_y$) et dont l'élancement du profil est supérieur à 10 ($l/m > 10$, m étant la plus grande des dimensions de la section). Nous n'étudions ici que les deux cas particuliers les plus courants qui sont les fils de section circulaire (diamètre d ; moments d'inertie $I_x = I_y = \pi d^4/64$ et $I_p = \pi d^4/32$) et carrée (côtés $h = b$; moments d'inertie $I_x = I_y = h^4/12$ et $I_p = h^4/6$).

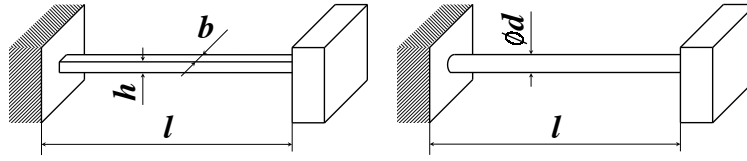


FIG. 4.4 – Fils de sections carrées et circulaires. Paramètres géométriques : l longueur ; h épaisseur ; b largeur ($b = h$) ; d diamètre.

4.3.2 Rigidités

Toutes les rigidités calculées pour la lame (4.1, 4.2) sont également valables pour les fils de section circulaire et carrée sauf les rigidités en torsion⁶ qui s'écrivent respectivement :

$$\boxed{K_{tors}^{\circ} = \frac{GI_p}{l}} \quad \boxed{K_{tors}^{\diamond} = 0.141 \frac{h^4 G}{l}} \quad (4.5)$$

RAPPORTS DE RIGIDITÉS

- Rigidité angulaire transverse versus rigidité angulaire naturelle :
Les deux moments d'inertie étant voisins ($I_x \simeq I_y$), nous avons $K_{\alpha M}^t \simeq K_{\alpha M}$ aussi bien pour les sections circulaires que carrées.
- Rigidité en torsion versus rigidité angulaire naturelle :
 $K_{tors}^{\circ}/K_{\alpha M} = 2G/E \simeq 0.77$; $K_{tors}^{\diamond}/K_{\alpha M} = 1.7G/E \simeq 0.65$. Les rigidités en torsion sont du même ordre de grandeur que la rigidité en flexion naturelle, qui est elle-même voisine de la rigidité angulaire transverse : nous pouvons donc considérer les 3 DDL en rotation comme libres.
- Rigidité en traction-compression versus rigidité en translation naturelle :
 $K_{trac}^{\circ}/K_{cis}^{\circ} = (4/3)(l/d)^2$. Si $l > 10d$ alors $K_{trac}^{\circ}/K_{cis}^{\circ} > 133$.
 $K_{trac}^{\diamond}/K_{cis}^{\diamond} = (l/h)^2$. Si $l > 10h$ alors $K_{trac}^{\diamond}/K_{cis}^{\diamond} > 100$.
Nous pouvons donc considérer le DDL en translation correspondant à la traction-compression comme bloqué.

6. Nous tirons cette formule de (Massonnet & Cescotto 1994).

- Rigidité en translation transverse versus rigidité en translation naturelle :
Les deux moments d'inertie étant voisins ($I_x \simeq I_y$), nous avons $K_{cis}^t \simeq K_{cis}$ aussi bien pour les sections circulaires que carrées. Nous pouvons donc considérer les DDL en translation correspondant aux translations transverses et naturelle comme libres.

BILAN :

*Un fil constitue une liaison à **5 DDL** (seule la translation sollicitant le fil en traction-compression est bloquée) dont les rapports de rigidités sont d'autant plus élevés que le profil est élancé (rapports l/h pour les sections carrées et l/d pour les sections circulaires élevés).*

4.3.3 Courses

Fil de section circulaire

Pour un fil de section circulaire de diamètre d , nous avons les courses angulaires suivantes :

$$\boxed{\alpha_M^\circ = \alpha_M^{t\circ} = \frac{2\sigma_{adm}l}{Ed}} \quad \boxed{\alpha_{tors}^\circ = \frac{2\tau_{adm}l}{Gd} \quad \text{où} \quad \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}} \quad (4.6)$$

et les courses en translation suivantes :

$$\boxed{f_{cis}^\circ = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Ed}} \quad \boxed{f_{cis}^{t\circ} = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Ed}} \quad \boxed{f_{trac}^\circ = \frac{\sigma_{adm}l}{E}} \quad (4.7)$$

Fil de section carrée

Pour un fil section carrée de côté h , toutes les courses calculées pour la lame (4.3, 4.4) sont également valables (avec $b = h$) sauf la course en torsion qui s'écrit⁷ :

$$\boxed{\alpha_{tors}^\circ = \frac{1.48 \tau_{adm}l}{Gh} \quad \text{où} \quad \tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}} \quad (4.8)$$

4.4 La barre de torsion

La rigidité en torsion des poutres dont la section est ouverte et formée de parois minces ne dépend pratiquement pas de la forme de la section (FIG. 4.5) (Massonnet & Cescotto 1994, page 148). On peut considérer sans grande erreur que les différents rectangles (dimensions h et b avec $b > 10h$) qui composent la section résistent à la torsion indépendamment l'un de l'autre. Pour une poutre composée de n rectangles de dimensions h_i, b_i ($1 < i < n$), la rigidité en torsion s'écrit donc

$$K_{tors} \simeq \frac{G}{3l} \sum_{i=1}^n h_i^3 b_i. \quad (4.9)$$

7. Pour le calcul de la course en torsion du fil de section carrée, nous calculons la contrainte de cisaillement à l'aide de la formule $\tau = M/(0.208h^3)$ donnée par Massonnet & Cescotto (1994, page 148).

La rigidité en flexion, quant à elle, dépend grandement de la disposition de ces rectangles. Il est donc possible, par un choix adéquat du profil, d'obtenir un rapport élevé entre les rigidités en flexion et la rigidité en torsion.

Si elle est conçue de manière à être rigide en flexion, une barre de torsion constitue une liaison à 1 DDL en rotation.

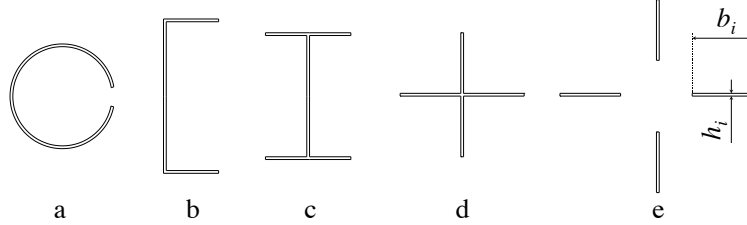


FIG. 4.5 – Sections ouvertes à parois minces. Des barres de torsion ayant ce type de sections sont plus rigides en flexion qu'en torsion, ce qui permet de réaliser des liaisons à 1 DDL en rotation.

4.4.1 Encastrement des extrémités

Il est important de noter que la formule (4.9) n'est valable qu'en torsion uniforme, c'est-à-dire que lorsque toutes les sections droites peuvent gauchir librement. Boresi *et al.* (1993) donnent la rigidité d'une poutre prismatique à parois minces et de section ouverte qui est encastrée de telle sorte que ses deux extrémités ne peuvent pas gauchir :

$$K_{tors}^{\Gamma} \simeq \frac{JG}{l - 2\alpha \tanh \frac{l}{2\alpha}} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{EI_p}{JG}} \quad \text{et} \quad J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i^3 b_i \quad (4.10)$$

I_p est le moment d'inertie polaire de la section⁸. Il est intéressant de comparer cette formule à (4.9) au travers d'un exemple pour illustrer l'influence de l'encastrement sur la rigidité angulaire. Considérons deux poutres en I identiques dont l'une a ses extrémités libres de gauchir et l'autre ses extrémités encastrées dans des blocs rigides les empêchant de gauchir (FIG. 4.6). Nous avons tracé (FIG. 4.7) la rigidité angulaire de ces deux poutres en fonction de leur longueur. Nous voyons que pour des poutres peu élancées (l/b petit), la poutre aux extrémités encastrées est beaucoup plus rigide en torsion que la poutre dont les extrémités sont libres de gauchir. Plus la poutre est élancée, plus cette différence s'atténue. Ceci s'explique par le fait que l'encastrement induit des contraintes de traction-compression dans les pans horizontaux de la poutre (barres inférieures et supérieures du I), contraintes qui se dissipent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'encastrement. Ainsi, si elles sont élancées, les poutres A et B (FIG. 4.6) ont leur partie centrale qui subit le même cas de charge. Ceci se voit si l'on trace la rotation de l'extrémité de la poutre en fonction de la longueur (FIG. 4.7).

8. Les formules des moments d'inertie polaire des sections en I ou en U par exemple peuvent être trouvées dans la plupart des ouvrages sur la mécanique des structures. Par exemple (Massonnet & Cescotto 1994; Gere & Timoshenko 1990).

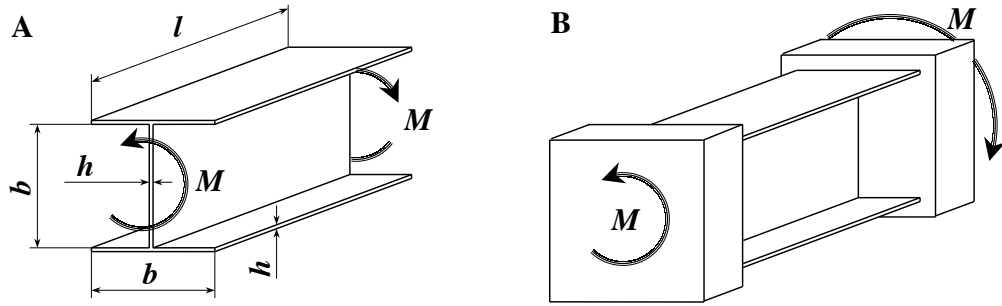


FIG. 4.6 – Barres de torsion avec extrémités libres de gauchir (A) et encastrées (B). Les cotes que nous avons choisies pour l'exemple sont : $h = 0.5\text{mm}$ et $b = 10\text{mm}$. Pour tracer les courbes (FIG. 4.7) nous avons fait varier l entre 0 et 5mm. Le moment d'inertie polaire de cette poutre est $I_p = bh^3$.

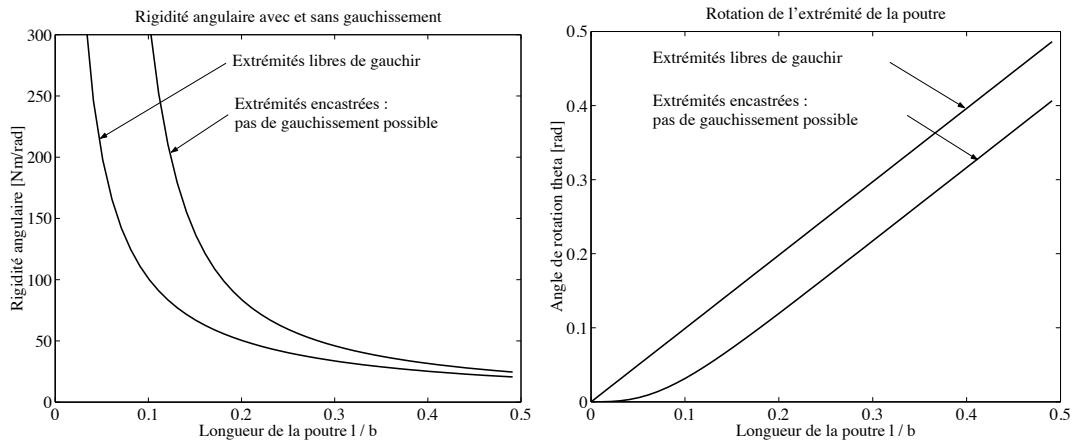


FIG. 4.7 – Influence de l'encastrement des barres de torsion sur leur rigidité angulaire : seule la déformation des extrémités des poutres est affectée par l'encastrement. Les paramètres que nous avons choisis pour tracer cet exemple sont : $E = 210\text{ GPa}$; $G = 81\text{ GPa}$; $M = 10\text{ Nm}$; les paramètres géométriques sont ceux de la figure 4.6.

Ainsi, lors de la réalisation de guidages flexibles à partir de barres de torsion, il faut veiller à ce que la fixation des extrémités des barres aux blocs rigides n'entrave pas leur liberté au gauchissement. Cela permet de diminuer leur rigidité en torsion sans affecter leurs rigidités transverses, ce qui a pour conséquence d'augmenter leurs rapports de rigidités. Cela a aussi pour effet de diminuer les contraintes normales que subissent les barres au niveau de leurs extrémités et d'augmenter ainsi leur course admissible. La réalisation pratique de telles liaisons est très délicate et difficile à étudier analytiquement. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de [Boresi et al. \(1993\)](#) pour plus de détails à ce sujet.

4.4.2 Axe de torsion

Une force agissant sur une poutre prismatique de section quelconque en porte-à-faux ne fléchit cette dernière sans la tordre que si elle passe par l'*axe de torsion*. Cet axe coupe la section de la poutre en un point que nous appelons le *centre de*

torsion C . Pour les sections possédant deux axes de symétrie, le centre de torsion se trouve à l'intersection de ces axes, qui coïncide avec le centre d'inertie G de l'aire de la section. Pour les sections ne possédant qu'un seul axe de symétrie, le centre de cisaillement se trouve sur cet axe mais ne coïncide pas avec le centre d'inertie G de la section. Dans ce dernier cas, la localisation exacte du centre de cisaillement est complexe et sort du cadre de cet ouvrage. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de [Boresi et al. \(1993\)](#) qui traite ce sujet en détail. Nous nous contentons ici de donner les formules de la position du centre de cisaillement de la section en U et en secteur de cercle qui présentent la propriété intéressante de pivoter autour d'un point situé à l'extérieur de la section. La figure 4.9 montre où se trouve le centre de cisaillement des sections les plus courantes.

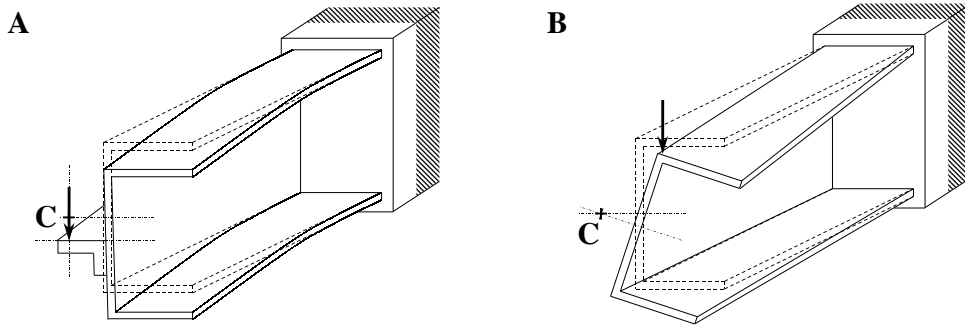


FIG. 4.8 – L'axe de torsion d'une barre en U est situé à l'extérieur du profil : une force passant par cet axe fléchit la barre sans la tordre (A) ; une force ne passant pas par cet axe fléchit et tord la barre (B), faisant pivoter son extrémité approximativement autour du centre de torsion C .

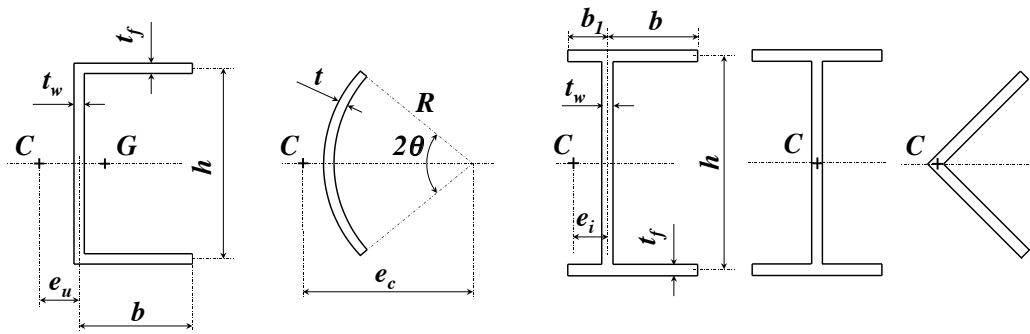


FIG. 4.9 – Position du centre de torsion C de différentes barres de torsion.

$$e_u = \frac{b}{2 + \frac{1}{3} \frac{t_w h}{t_f b}} ; \quad \frac{e_c}{R} = \frac{2(\sin \theta - \theta \cos \theta)}{\theta - \sin \theta \cos \theta} ; \quad \frac{e_i}{b} = \frac{1 - \frac{b_1^2}{b^2}}{2 + \frac{2b_1}{b} + \frac{t_w h}{3t_f b}} , \quad b_1 < b. \quad (4.11)$$

4.5 Le col circulaire

4.5.1 Définition

Nous dénommons **col circulaire**⁹ toute poutre de section rectangulaire et d'épaisseur variable dont le profil décrit deux demi-cercles concaves (FIG. 4.10) et dont le rayon r des demi-cercles est au moins supérieur à cinq fois l'épaisseur minimale de la poutre :

$$\frac{r}{e} > 5. \quad (4.12)$$

Cette condition garantit que le facteur de concentration de contrainte soit voisin de 1, c'est-à-dire que la variation de section soit suffisamment douce pour éviter toute concentration de contrainte au milieu du col (Pomey & Lieurade 1982; Lu & Lieurade 1998). L'épaisseur de la poutre est

$$h(x) = 2r + e - 2\sqrt{r^2 - (r - x)^2}. \quad (4.13)$$

Son moment d'inertie est

$$I(x) = \frac{b(h(x))^3}{12}. \quad (4.14)$$

Soit $y(x)$ l'équation de la déformée de la poutre, $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ sa dérivée première et $y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ sa dérivée seconde. Selon l'équation (3.1) nous avons

$$y''(x) = \frac{-M_x(x)}{EI(x)}. \quad (4.15)$$

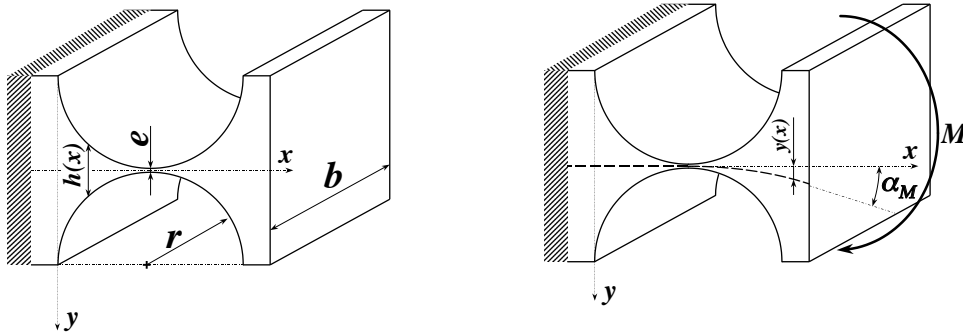


FIG. 4.10 – Col circulaire. Paramètres géométriques : e épaisseur du col en sa partie la plus étroite ; r rayon de l'encoche ; b largeur. Rigidité angulaire : $K_{\alpha M} = M/\alpha$. Course angulaire admissible : α_M .

9. Remarque relative à la terminologie : la dénomination **col** est attribuable à l'auteur. Ce mot est emprunté à l'anatomie qui l'utilise pour indiquer la partie la plus étroite de certains os : col du fémur, de l'humérus, du péroné. Dans le langage courant, il indique la "partie étroite, rétrécie (d'un récipient) : col d'une bouteille, d'un vase, d'une cornue, d'un matras. Col d'une tuyère." (Le Grand Robert de la langue française). Il vient du latin *collum* qui signifie cou. La littérature rédigée en anglais nomme ce type d'élément flexible *circular notch hinge*, *circular necked down flexure*, ou *right circular flexure hinge* (Kato et al. 1984).

Les *rigidités généralisées* et les courses du col circulaire sont plus complexes que celles des articulations élémentaires étudiées jusqu'ici. Ainsi les formules analytiques exactes¹⁰ sont inutilisables de par leur complexité, et nous avons préféré tracer des abaques par calcul numérique. Comme nous pouvons le voir sur les abaques des pages 190 à 195, les courbes d'“iso-rigidité” tracées en fonction de l'épaisseur e et du rayon r selon des échelles logarithmiques sont quasiment rectilignes et parallèles entre elles. Nous pouvons en déduire qu'il existe pour ces rigidités des formules du type

$$K_{\alpha M} = C_1 E b e^{C_2} r^{C_3}, \quad (4.16)$$

C_1 , C_2 et C_3 étant des constantes à déterminer, qui épousent relativement bien les formules exactes. Les constantes peuvent être déterminées numériquement pour un point donné de l'espace des solutions (e, r) . Nous avons donc défini un *col standard*¹¹ pour lequel les formules simplifiées sont optimisées.

$$\text{Col standard : } e = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \text{et} \quad r = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (4.17)$$

Nous avons également défini un sous-ensemble de l'espace des solutions comme *domaine de validité*¹² des formules simplifiées.

$$\text{Domaine de validité : } 10^{-6} \text{ m} < e < 10^{-3} \text{ m} \quad , \quad 10^{-4} \text{ m} < r < 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad \frac{r}{e} > 5. \quad (4.18)$$

Nous calculons l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte qui apparaît sur ce domaine pour chacune des rigidités et des courses que nous présentons.

4.5.2 Rigidité angulaire

FORMULE EXACTE : Si un moment de flexion pure M est appliqué au col (FIG. 4.10) nous avons $M_x(x) = -M$ et la rigidité angulaire est par définition

$$K_{\alpha M} = \frac{M}{y'(2r)}. \quad (4.19)$$

Nous avons utilisé cette formule pour tracer l'abaque de la figure A.2 par calcul numérique.

FORMULE SIMPLIFIÉE¹³ : Pour le col standard (4.17) nous avons déterminé numériquement les coefficients de la formule (4.16) : $C_1 = 0.071$, $C_2 = 2.5$ et $C_3 = -0.5$.

10. Le terme *exact* n'indique pas qu'une formule prédit parfaitement la réalité, mais qu'elle est déduite rigoureusement de la théorie de la résistance des matériaux (§ 3.1).

11. Nous estimons qu'un col d'une épaisseur de $50\mu\text{m}$ et d'un rayon de 3 mm est représentatif des cols utilisés en microtechnique et réalisés par électroérosion.

12. Nous estimons que ce domaine couvre la majorité des cols rencontrés en microtechnique. Notons toutefois que pour des épaisseurs inférieures à une dizaine de microns, il est nécessaire de vérifier expérimentalement si les hypothèses de la mécanique des milieux continus restent applicables.

Paros & Weisbord (1965) arrivent au même résultat par une approche analytique et donnent la formule simplifiée $K_{\alpha M_s} \simeq K_{\alpha M}$ suivante :

$$K_{\alpha M_s} = \frac{2Ebe^{2.5}}{9\pi\sqrt{r}}. \quad (4.20)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal¹⁴ entre la formule simplifiée (4.20) et la formule exacte (4.19) est compris entre 0% et 2.6% de la valeur exacte.

LOIS DE SIMILITUDE¹⁵ : $K_{\alpha M}^* = b^* E^*$; $K_{\alpha M}^* \simeq e^{*2.5}$; $K_{\alpha M}^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$.

ABAQUE¹⁶ : La rigidité angulaire est $K_{\alpha M} = K_{\alpha M_n} E b$ où $K_{\alpha M_n}$ est la *rigidité normalisée*¹⁷ qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.2.

4.5.3 Course angulaire

FORMULE SIMPLIFIÉE : Connaissant le moment maximal admissible en fonction de la contrainte admissible (3.3) et la rigidité angulaire (4.20), on peut trouver une

13. Il est parfois nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices supplémentaires pour établir des formules d'une taille raisonnable à utiliser. Pour distinguer ces formules *simplifiées*, qui sont approximatives, des formules *exactes*, nous utilisons le signe $\simeq$.

14. Cet écart représente l'erreur résultant de la simplification de la formule exacte. Nous calculons cette erreur de la manière suivante : $(K_{\alpha M} - K_{\alpha M_s})/K_{\alpha M}$. C'est exactement de la même manière que nous calculons les erreurs des formules simplifiées suivantes.

15. Les lois de similitude sont notées de la façon suivante : $K^* = x^*$ veut dire que la rigidité K est *rigoureusement proportionnelle* à la grandeur physique x selon la théorie classique de la résistance des matériaux, sans devoir recourir à d'autres hypothèses simplificatrices que celles présentées à la section 3.1. $K^* \simeq x^*$ veut dire que la rigidité K est *approximativement proportionnelle* à la grandeur x ; l'utilisation du signe $\simeq$ indique que, pour établir cette relation de proportionnalité, des hypothèses simplificatrices supplémentaires ont dû être introduites. Des relations de proportionnalité pourront être utilisées *localement*. C'est-à-dire que, si pour la valeur x_1 nous connaissons la rigidité correspondante K_1 , alors pour une valeur x_2 proche de x_1 ($x_2 \simeq x_1$), nous pouvons déduire la valeur correspondante en appliquant la "règle de trois". Exemple de loi de similitude et notation : la rigidité angulaire du col circulaire est approximativement proportionnelle à l'épaisseur e du col élevée à la puissance 2.5. C'est-à-dire que si un col donné, d'une épaisseur e , a une rigidité angulaire K , alors un col identique, mais d'épaisseur e' voisine de e , aura une rigidité $K' \simeq K(e'/e)^{2.5}$. Si l'on repère par un astérisque (*) le quotient des grandeurs homologues, nous avons $K^* = K'/K$ et $e^* = e'/e$. Nous pouvons alors écrire plus simplement : $K^* \simeq e^{*2.5}$. C'est cette notation que nous avons adoptée pour indiquer les lois de similitude.

16. Une lecture graphique sur un abaque permet de remplacer le calcul au moyen de formules. Etant donné sa rapidité, elle est particulièrement utile lors du pré-dimensionnement des articulations. Les abaques sont un tracé de courbes de niveau "d'iso-rigidité" ou "d'iso-course" dans un espace logarithmique. Cette représentation permet de n'utiliser qu'un seul graphique pour une famille de guidages dont les dimensions varient de plusieurs ordres de grandeur. Le paragraphe A.2.1 détaille la méthode de lecture de ces abaques.

17. La *rigidité normalisée* correspond à la rigidité d'un col dont la largeur et le module de Young sont unitaires ($b = 1$ et $E = 1$). Son unité n'est pas celle d'une rigidité angulaire telle qu'elle est définie au paragraphe 3.3.2. Il en va de même des autres rigidités normalisées présentées dans cette section (sect. 4.5).

formule simplifiée de la course angulaire du col circulaire :

$$\alpha_M \simeq \frac{3\pi\sigma_{adm}\sqrt{r}}{4E\sqrt{e}}. \quad (4.21)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte est compris entre 0% et 2.6% de la valeur exacte.

LOIS DE SIMILITUDE : $\alpha_M^* = \sigma_{adm}^*/E^*$; $\alpha_M^* \simeq \sqrt{1/e^*}$; $\alpha_M^* \simeq \sqrt{r^*}$; $\alpha_M^* = b^{*0}$ (α_M est indépendant de b).

ABaque : La course angulaire d'un col circulaire est $\alpha_M = \alpha_{Mn}\sigma_{adm}/E$ où α_{Mn} est la *course normalisée* qui est obtenue graphiquement sur l'abaque FIG. A.3.

4.5.4 Rigidité en translation

FORMULE EXACTE : Pour une force P agissant à mi-longueur du col (FIG. 4.11), nous avons $M_x(x) = Px - Pr$. En utilisant (4.15) nous obtenons la rigidité en translation :

$$K_{cis} = \frac{P}{y(2r)} \quad (4.22)$$

Dans ce cas précis, la déformation liée à l'effort tranchant est importante comparativement à la déformation liée à l'effort de flexion¹⁸. Nous avons donc pris en compte le terme lié à l'effort tranchant dans l'équation (3.1) lors du calcul de la formule simplifiée et du tracé de l'abaque.

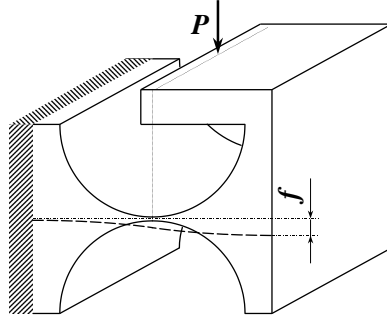


FIG. 4.11 – *Rigidité en translation : une force P appliquée sur le bloc mobile du pivot de telle sorte que la direction de son vecteur passe par la partie centrale du joint, provoque une translation verticale f du bloc mobile. La rigidité en translation du pivot est : $K_{cis} = P/f$.*

18. Ceci s'explique par le fait qu'avec cette distribution particulière du moment le long du col circulaire, le moment fléchissant est nul au centre du col, là où il est le plus étroit. Dans cette zone, c'est donc principalement l'effort tranchant qui est responsable de la déformation.

FORMULE SIMPLIFIÉE :

$$K_{cis} \simeq 0.218 \frac{Ebe^{1.5}}{r^{1.5}}. \quad (4.23)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte est compris entre -9% et 9% de la valeur exacte.

LOIS DE SIMILITUDE : $K_{cis}^* = E^*$; $K_{cis}^* \simeq b^*$; $K_{cis}^* \simeq e^{*1.5}$; $K_{cis}^* \simeq r^{*-1.5}$.

ABaque : La rigidité en translation est $K_{cis} = K_{cisn}Eb$ où K_{cisn} est la *rigidité normalisée* qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.4.

4.5.5 Rigidité en torsion

Le calcul de la rigidité en torsion de poutres dont la section n'est pas circulaire est d'une grande complexité car la loi de conservation de la planéité des sections droites n'est plus valable. On trouve toutefois dans la littérature (Massonnet & Cescotto 1994) des formules simplifiées dans le cas des sections rectangulaires dont le rapport b/h est très grand (4.2). Si nous considérons le col circulaire comme une succession de lames d'épaisseurs différentes mises bout à bout (FIG. 4.12), nous pouvons en déduire sa rigidité angulaire

$$K_{tors} = \frac{M}{\alpha} = \frac{bG}{3} \left(\int_0^{2r} \frac{1}{h^3(x)} dx \right)^{-1}. \quad (4.24)$$

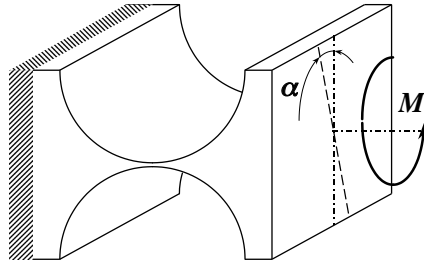


FIG. 4.12 – *Rigidité angulaire en torsion : pour un moment pur M sollicitant le joint en torsion et engendrant une rotation de son extrémité d'un angle α , nous avons une rigidité en torsion $K_{tors} = M/\alpha$.*

FORMULE SIMPLIFIÉE : Nous en avons tiré une formule simplifiée

$$K_{tors} \simeq 0.284 \frac{Gbe^{2.5}}{\sqrt{r}}. \quad (4.25)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte est compris entre -0.4% et 2.2% de la valeur exacte.

LOIS DE SIMILITUDE : $K_{tors}^* = G^*$; $K_{tors}^* \simeq b^*$; $K_{tors}^* \simeq e^{*2.5}$; $K_{tors}^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$.

ABAQUE : La rigidité en torsion d'un col circulaire est $\boxed{K_{tors} = K_{tors\ n} Gb}$ où $K_{tors\ n}$ est la *rigidité en torsion normalisée* qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.5.

4.5.6 Rigidité angulaire transverse

FORMULE SIMPLIFIÉE :

$$\boxed{K_{\alpha M}^t \simeq 0.0295 \frac{Eb^3 \sqrt{e}}{\sqrt{r}}}. \quad (4.26)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte est compris entre -11% et 22% de la valeur exacte.

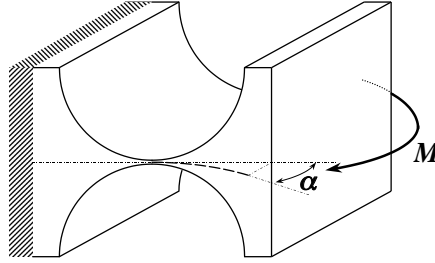


FIG. 4.13 – *Rigidité angulaire transverse : pour un moment de flexion pure M faisant fléchir le col autour de son axe transverse d'un angle α nous avons une rigidité angulaire $K_{\alpha M}^t = M/\alpha$.*

LOIS DE SIMILITUDE : $K_{\alpha M}^{t*} = E^*$; $K_{\alpha M}^{t*} = b^{*3}$; $K_{\alpha M}^{t*} \simeq \sqrt{e^*}$; $K_{\alpha M}^{t*} \simeq \sqrt{r^*}$.

ABAQUE : La rigidité angulaire transverse est $\boxed{K_{\alpha M}^t = K_{\alpha M n}^t Eb^3}$ où $K_{\alpha M n}^t$ est la rigidité angulaire normalisée qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.6.

4.5.7 Rigidité en traction-compression

FORMULE SIMPLIFIÉE :

$$\boxed{K_{trac} \simeq 0.353 \frac{Eb \sqrt{e}}{\sqrt{r}}}. \quad (4.27)$$

Sur le domaine de validité (4.18) l'écart maximal entre la formule simplifiée et la formule exacte est compris entre -11% et 22% de la valeur exacte.

LOIS DE SIMILITUDE : $K_{trac}^* = E^*$; $K_{trac}^* = b^*$; $K_{trac}^* \simeq \sqrt{e^*}$; $K_{trac}^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$.

ABAQUE : La rigidité en traction-compression est $\boxed{K_{trac} = K_{trac\ n} Eb}$ où $K_{trac\ n}$ est la rigidité angulaire normalisée qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.7.

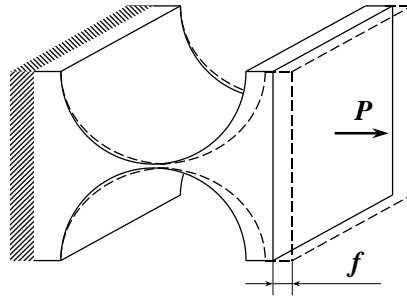


FIG. 4.14 – *Rigidité en traction-compression* : pour une force de traction P allongeant le col d’une longueur f , nous avons une rigidité en traction-compression $K_{trac} = P/f$.

4.5.8 Autres rigidités

Rigidité en translation transverse

Etant donné que pour une sollicitation en translation transverse l’effort tranchant ne peut pas être négligé, la rigidité K_{cis}^t n’est a priori ni proportionnelle à h , ni à b . Nous ne pouvons donc pas trouver de formule simplifiée du type (4.16).

“Rigidités généralisées” K_{fM} , K_{fP} et $K_{\alpha P}$

Nous calculons ici d’autres “rigidités généralisées” sans en donner de formules simplifiées. Ces termes sont utilisés plus loin (sect. 5.4).

Le premier de ces termes est le rapport entre le moment M (FIG. 4.10) et la flèche f qu’il engendre à l’extrémité du col :

$$K_{fM} = \frac{M}{f} = \frac{M}{y(2r)} \quad (4.28)$$

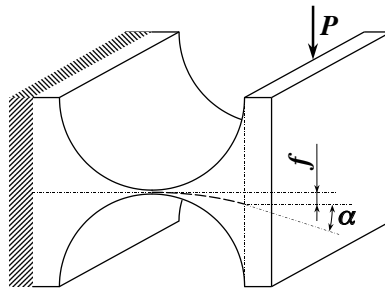


FIG. 4.15 – *Rigidités généralisées* $K_{fP} = \frac{P}{f}$ et $K_{\alpha P} = \frac{P}{\alpha}$.

Les deux termes suivants sont liés à l’angle et à la flèche engendrés par une force de flexion P agissant à l’extrémité du col (FIG. 4.15). Dans ce cas nous avons

$M_x(x) = -P(2r - x)$ et les deux termes s'écrivent

$$K_{fP} = \frac{P}{f} = \frac{P}{y(2r)} \quad \text{et} \quad K_{\alpha P} = \frac{P}{\alpha} = \frac{P}{y'(2r)} \quad (4.29)$$

4.5.9 Rapports de rigidités

- Rigidité angulaire naturelle versus rigidité angulaire transverse :
 $K_{\alpha M}^t / K_{\alpha M} = 0.417(b/e)^2$. Si $b > 10e$ alors $K_{\alpha M}^t / K_{\alpha M} > 41$. La rigidité angulaire transverse étant supérieure de plus d'un ordre de grandeur à la rigidité angulaire naturelle, le DLL en flexion transverse est considéré comme bloqué.
- Rigidité en torsion versus rigidité angulaire naturelle :
 $K_{tors} / K_{\alpha M} = 4G/E \simeq 1.5$. La rigidité en torsion étant du même ordre de grandeur que la rigidité en flexion naturelle, le DDL en rotation correspondant à la torsion est considéré comme libre.
- Rigidité en traction-compression versus rigidité en translation naturelle :
 $K_{trac} / K_{cis} = 1.62r/e$. Si $r > 5e$, alors $K_{trac} / K_{cis} > 8$. La rigidité en traction-compression étant près d'un ordre de grandeur supérieure à la rigidité en translation naturelle, le DDL correspondant à la traction-compression peut être considéré comme bloqué.
- Rigidité en translation transverse versus rigidité en translation naturelle :
 Nous ne donnons pas de formule simplifiée de la rigidité en translation transverse, donc nous ne pouvons pas calculer ce rapport de rigidité. Néanmoins, nous pouvons prédire que comme dans le cas de la lame (sect. 4.2) ce rapport sera grand, et ce d'autant plus que la section du profil est élancée (rapport b/e élevé). Le DDL correspondant à la translation transverse est considéré comme bloqué.

BILAN :

*Le col circulaire constitue une liaison à **3 DDL** (deux rotations et une translation) dont les rapports de rigidités sont d'autant plus élevés que les rapports b/e et r/e sont élevés. Le col circulaire possède les mêmes degrés de liberté que la lame¹⁹.*

4.5.10 Col circulaire tronqué

Pour diminuer l'encombrement du col circulaire il est possible de le tronquer à partir d'une épaisseur égale à environ 4 fois l'épaisseur minimale e en ne changeant pratiquement pas la course admissible ni la rigidité (FIG. 4.16). En effet l'amplitude de la déformation d'une lame en flexion est proportionnelle au cube de son épaisseur (donc la majeure partie de la déformation a lieu dans la partie centrale du col) et l'intensité des contraintes est proportionnelle au carré de son épaisseur. Donc à la position, le long du col, où l'épaisseur est $4e$, la contrainte est 16 fois plus faible que dans la partie centrale (pour une sollicitation en flexion pure), il est donc tolérable, à cet endroit, d'avoir un effet de concentration de contrainte lié au petit congé de

19. Comparé à la lame, le col circulaire présente l'avantage de ne pas présenter d'angles vifs agissant comme concentrateurs de contraintes à ses extrémités.

raccordement entre l'arc de cercle et l'extrémité du bras auquel il est rattaché. Un profil elliptique (FIG. 5.29 d) remplit la même fonction que les arcs de cercle tronqués et présente en outre l'avantage d'avoir une courbure minimale dans la partie la plus sollicitée du col.

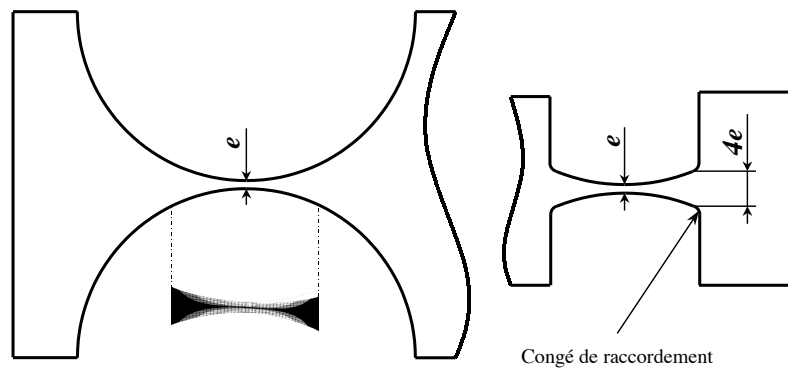


FIG. 4.16 – Col circulaire et col circulaire tronqué pratiquement équivalent et moins encombrant. La simulation par éléments finis montre que les contraintes sont localisées dans la partie centrale du joint (les tons de gris correspondent à l'intensité des contraintes (valeur absolue) : noir = 53 MPa ; blanc = 475 MPa).

Chapitre 5

Guidages en translation

Ce chapitre traite des guidages flexibles en translation les plus simples et les plus courants : il s'agit de la *table à deux lames parallèles*, la *table hyperguidée à quatre lames parallèles*, la *table à quatre cols prismatiques* et la *table à quatre cols circulaires*. Pour chacun de ces guidages nous calculons les rigidités, les courses et les charges admissibles. Nous montrons que, pour un encombrement et une course donnés, la table à quatre cols prismatiques (respectivement circulaires) dont l'épaisseur des cols h (resp. e) et la longueur l_c (resp. le rayon r) sont minimaux est le meilleur de ces guidages en termes de rapports de rigidité. Par rapport aux cols prismatiques, les cols circulaires présentent en outre l'avantage de ne pas comporter d'angles vifs agissant comme concentrateurs de contraintes. Ainsi, lorsque le procédé de fabrication le permet nous préconisons l'utilisation, comme guidages en translation, de tables à quatre cols circulaires dont le rayon des cols est minimal.

La table hyperguidée à quatre lames parallèles, quant à elle, présente l'avantage, par rapport aux autres guidages présentés, de constituer un guidage en translation *rectiligne*. Par contre, pour un même encombrement, sa course est moindre, sa caractéristique force-déformation est progressive et elle induit des efforts importants dans les blocs de base et mobile.

5.1 Table à deux lames parallèles

5.1.1 Equilibre des forces

La table à deux lames parallèles est constituée d'un bloc de base fixe et d'un bloc mobile reliés entre eux par deux lames flexibles parallèles qui sont identiques. Une force¹ $\bar{P}$ agissant sur le bloc mobile déforme les deux lames de manière quasi-identique, ce qui produit une translation du bloc mobile.

Isolons l'une des deux lames. Nous pouvons décomposer les efforts agissant à chacune de ses extrémités en une force horizontale P , une force verticale T , et un moment M . Faisons l'hypothèse que l'amplitude de la déformation de la lame sous l'effet de ces efforts est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger son influence

1. Remarque relative à la notation : les lettres chapeautées d'une barre sont les grandeurs concernant le bloc mobile de la table à lames parallèles. Comme nous le verrons dans les calculs, il est souvent préférable d'isoler l'une des deux lames pour étudier son comportement. Nous avons réservé les lettres sans barre pour les grandeurs ne concernant que l'une des deux lames.

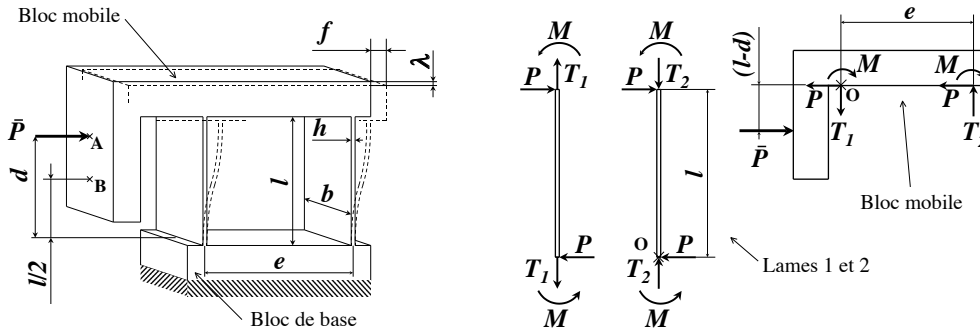


FIG. 5.1 – Table à deux lames parallèles et équilibre des forces : h épaisseur des lames ; b largeur des lames ; l longueur des lames ; e écartement des lames ; d distance entre le bloc de base et le point d'application de la force d'entraînement $\bar{P}$; f déplacement horizontal ; λ déplacement vertical.

sur l'équilibre de la lame. L'équilibre des forces horizontales (respectivement verticales) nous indique que les forces P (respectivement les forces T) agissant à chaque extrémité sont de même amplitude et de sens opposé. L'équilibre des moments nous permet de déduire que

$$M = \frac{Pl}{2}. \quad (5.1)$$

Isolons à présent la plate-forme mobile. Elle subit les réactions des forces et des moments agissant sur les lames, et la force $\bar{P}$ agissant au point A situé à une distance d de la base. Dans ce cas l'équilibre des forces selon l'axe horizontal nous indique que $P = \bar{P}/2$. L'équilibre des forces selon l'axe vertical nous indique que la force de traction T_1 dans l'une des lames est égale à la force de compression dans l'autre $T_1 = T_2 = T$. En utilisant l'équation (5.1), l'équilibre des moments au point O donne :

$$T = \frac{\bar{P}}{e} \left(d - \frac{l}{2} \right) \quad (5.2)$$

Il en résulte que les forces T_1 et T_2 de traction-compression des lames s'annulent si la force $\bar{P}$ agit à une distance $d = l/2$ (point B) de la base. Il en résulte également que plus le point d'application de $\bar{P}$ s'éloigne de B et plus l'écartement e des lames est petit, plus les forces de traction et compression augmentent.

Vu que les lames n'ont pas une rigidité infinie en traction-compression, la présence d'une force T_1 (respectivement T_2) non nulle allonge (respectivement raccourcit) la lame 1 (respectivement la lame 2). Ceci a pour conséquence de faire pivoter le bloc de sortie. La table à lames parallèles n'est rigoureusement un guidage en translation pure que si la force d'entraînement $\bar{P}$ agit sur le bloc mobile à une distance $l/2$ du bloc de base.

Comme les lames sont beaucoup plus rigides en traction-compression qu'en flexion, il est possible en première approximation de négliger l'influence des forces T_1 et T_2 sur leur déformée, auquel cas la table à deux lames parallèles peut être considérée comme un guidage en translation pure même lorsque la force d'entraînement $\bar{P}$ n'agit pas à une distance $l/2$ du bloc de base. Il faut toutefois bien garder à l'esprit que ceci est une approximation qui est d'autant plus mauvaise que l'intensité de ces

forces est grande. On a donc intérêt à minimiser T par une conception judicieuse. Ceci peut se faire essentiellement de deux manières :

- en rapprochant au maximum le point d'application de la force $\bar{P}$ du point B situé à une distance $l/2$ de la base ;
- en maximisant l'écartement e des lames.

Le paragraphe 5.1.5 étudie plus en détail l'effet des forces de traction et de compression sur les lames.

5.1.2 Rigidité à charge nulle

Considérons le cas particulier où la force $\bar{P}$ agit au point B, ce qui annule les forces de traction compression : $T_1 = T_2 = 0$. A présent, isolons l'une des deux lames. Une force P et un moment $M = Pl/2$ agissent à chacune de ses extrémités. Plaçons des axes comme sur la figure 5.2. Une section de la lame située à une distance x de l'origine subit un moment

$$M_x(x) = M - P(l - x) = Px - \frac{Pl}{2}. \quad (5.3)$$

Selon l'équation (3.1) nous pouvons en déduire la dérivée seconde de la déformée de la lame :

$$y''(x) = \frac{-M_x(x)}{EI} = \frac{Pl/2 - Px}{EI}. \quad (5.4)$$

Par intégration et sachant que $y'(0) = 0$ et que $y(0) = 0$ on en déduit la dérivée première

$$y'(x) = \frac{P}{2EI}(lx - x^2), \quad (5.5)$$

ainsi que l'équation de la déformée

$$y(x) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right). \quad (5.6)$$

La déformée en bout de poutre est

$$y(l) = \frac{Pl^3}{12EI}. \quad (5.7)$$

La rigidité en translation d'une lame $K_o = P/f$ est par conséquent

$$\boxed{K_o = \frac{12EI}{l^3}}. \quad (5.8)$$

Sachant que $P = \bar{P}/2$ nous pouvons également déduire de (5.7) la rigidité en translation de la table à deux lames parallèles $\bar{K}_o = \bar{P}/f = \bar{P}/y(l)$:

$$\boxed{\bar{K}_o = \frac{24EI}{l^3}} \quad (5.9)$$

qui est le double de celle d'une seule lame. En effet, les deux lames travaillent comme deux ressorts montés en parallèle.

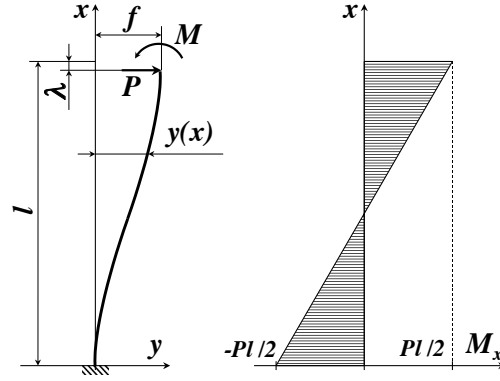


FIG. 5.2 – Déformée et moment fléchissant de l'une des lames de la table à deux lames parallèles.

5.1.3 Course à charge nulle

L'équation (5.3) nous indique que le moment de flexion est nul au milieu de la lame (en $x = l/2$) et que son intensité² est maximale aux encastresments de la lame dans les blocs de base et mobile (en $x = 0$ et $x = l$) où il vaut $M_{max} = Pl/2$. Or nous savons que le moment maximal admissible par la lame est $M_{adm} = \sigma_{adm}bh^2/6$ d'après l'équation (3.3). Donc la force maximale admissible sur une lame est $P_{adm} = 2M_{adm}/l$ et la force maximale admissible sur le bloc mobile est $\bar{P}_{adm} = 2P_{adm}$. La course à charge nulle est donc $f_{adm_o} = \bar{P}_{adm}/\bar{K}_o$:

$$f_{adm_o} = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Eh}. \quad (5.10)$$

5.1.4 Trajectoire à charge nulle

La trajectoire le long de laquelle se translate le bloc mobile n'est pas une droite mais une parabole. Pour le démontrer il faut calculer le déplacement vertical λ de l'extrémité des lames qui correspond à la différence entre la longueur des lames avant déformation et la longueur de la projection des lames déformées sur l'axe x (FIG. 5.2). On trouve dans la littérature (Gere & Timoshenko 1990) la formule classique

$$\lambda \simeq \frac{1}{2} \int_0^l (y'(x))^2 dx, \quad (5.11)$$

qui fait appel à un développement en série limitée, et qui n'est donc valable que pour de faibles angles de déflexion des lames. A l'aide de (5.11) et (5.5) on obtient

$$\lambda \simeq \frac{P^2 l^5}{240 E^2 I^2} \quad (5.12)$$

2. Nous appelons *intensité* du moment sa valeur absolue $|M_x(x)|$.

qui se simplifie si l'on utilise (5.8) pour donner le déplacement vertical λ en fonction du déplacement en translation f :

$$\lambda \simeq \frac{3f^2}{5l}. \quad (5.13)$$

Nous en déduisons ainsi que le bloc mobile suit une trajectoire parabolique, et que le déplacement longitudinal est inversement proportionnel à la longueur des lames.

5.1.5 Charge en traction-compression : modèle simplifié

Continuons de considérer le cas particulier où la force $\bar{P}$ agit au point B, ce qui annule les forces de traction-compression ($T_1 = T_2 = 0$), mais rajoutons cette fois une force verticale $\bar{N}$ qui agit au centre du bloc mobile³. Nous considérons que le signe de cette force est positif lorsqu'elle sollicite les lames en compression, et négatif lorsqu'elle les sollicite en traction. Isolons l'une des deux lames. En plus des efforts M , P et T déjà mentionnés, la lame supporte une charge supplémentaire $N = \bar{N}/2$. Si nous négligeons encore une fois l'effet des forces de traction-compression sur la déformée de la lame, alors la présence de la charge $\bar{N}$ ne modifie aucunement la trajectoire suivie par le bloc mobile (5.13). Cherchons à présent quelle est la rigidité en translation de la table ainsi chargée.

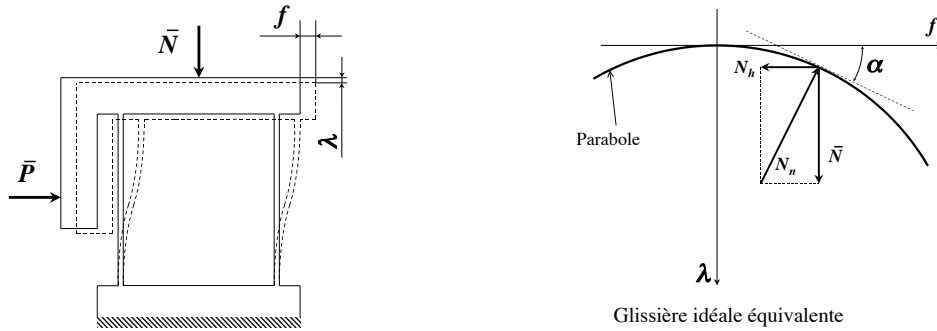


FIG. 5.3 – Table à deux lames parallèles sous charge de traction-compression et modèle simplifié.

Dans un premier temps, faisons l'hypothèse que la rigidité en translation (5.9) est nulle : $\bar{K}_o = 0$. Le guidage se comporte alors comme une glissière idéale de forme parabolique dont l'équation de la trajectoire est $\lambda(f) = -3f^2/(5l)$. Si elle est positive, la charge $\bar{N}$ tend donc à écarter le coulisseau de sa position centrale. La glissière exerce sur le coulisseau une force de réaction N_n qui est normale à sa trajectoire. Pour maintenir le coulisseau en position, il faut y exercer une force de rappel horizontale N_h . Nommons α la pente de la parabole, nous obtenons alors :

$$N_h = \bar{N} \tan \alpha = \bar{N} \frac{d\lambda}{df} = \frac{-6\bar{N}}{5l} f.$$

3. Dans la pratique cette force $\bar{N}$ peut être produite par une masse déposée sur le bloc mobile ou par toute autre force externe.

Le guidage se comporte donc comme s'il avait une rigidité négative constante

$$\bar{K}_n = \frac{-6\bar{N}}{5l}. \quad (5.14)$$

Ceci est la conséquence de la propriété spécifique de la parabole d'avoir une dérivée linéaire : plus le coulisseau s'écarte de sa position d'équilibre, plus $\bar{N}$ tend à l'écarter encore plus, et ceci de manière proportionnelle au déplacement horizontal f .

Dans le cas où la charge $\bar{N}$ est négative (charge en traction), la formule (5.14) reste valable, et le guidage se comporte comme s'il avait une rigidité positive constante.

Si nous reprenons à présent en considération la rigidité $\bar{K}_o$ du guidage à lames, la rigidité totale de la table devient $\bar{K}_{tot} = \bar{K}_o + \bar{K}_n$. Nous pouvons en conclure que la rigidité en translation de la table à deux lames parallèles dépend de la charge $\bar{N}$ qui lui est appliquée, et elle est constante sur toute la course pour une charge $\bar{N}$ donnée :

$$\bar{K}_{tot} = \frac{24EI}{l^3} - \frac{6\bar{N}}{5l}. \quad (5.15)$$

Ceci nous permet de constater qu'il existe une charge $\bar{N}_o$ qui rend nulle la rigidité $\bar{K}_{tot}$ de la table à deux lames parallèles :

$$\bar{N}_o = \frac{20EI}{l^2}. \quad (5.16)$$

Le modèle simplifié que nous venons de décrire permet d'expliquer d'une manière relativement intuitive pourquoi la rigidité en translation de la table à deux lames parallèles dépend de la charge qui lui est appliquée, pourquoi elle est constante pour une charge donnée et comment il se fait qu'il existe une charge qui la fait tendre vers zéro. Le modèle complet que nous décrivons ci-dessous nous mène aux mêmes conclusions par un développement plus rigoureux. De plus, il permet de mettre en évidence des phénomènes que ne révèle pas le modèle simplifié : flambage des lames, rigidité en compression de la table, course dépendant de la charge.

5.1.6 Charge en traction-compression : modèle complet

Nous avons jusqu'à présent systématiquement négligé l'effet des forces de traction-compression sur la déformée des lames. Ceci était correct en première approximation en particulier pour de faibles amplitudes de déformation. Il s'agit à présent de prendre en compte l'effet de ces forces pour connaître plus précisément le comportement de la table à deux lames parallèles sous charge. Etant donné que ces forces agissent dans le plan des lames, il est indispensable de prendre en compte l'amplitude de leurs déformations lors du calcul des efforts induits par ces forces dans les lames.

Ce modèle, qui est plus fidèle à la réalité que le précédent, permet de rendre compte du *flambage* des lames lorsque les charges de compression dépassent un certain seuil. En effet, au-delà d'une certaine charge appelée *charge critique*, il se produit un phénomène d'instabilité élastique qui fait croître brusquement l'amplitude des déformations et provoque la ruine du système.

Ce modèle permet également de calculer, avec plus de rigueur qu’au paragraphe 5.1.5, la rigidité en translation de la table à deux lames parallèles sous charge, ainsi que sa rigidité transverse en translation verticale. Ceci pour des charges inférieures aux charges critiques, c’est-à-dire lorsque le système est élastiquement stable.

Flambage : charge critique et instabilité élastique

Considérons que seule une force verticale de compression $\bar{N}$ agit au centre du bloc mobile. Cette force se répartit de manière égale sur les deux lames, comprimant chacune d’elles avec une force $N = \bar{N}/2$. Bloquons le mouvement horizontal du bloc mobile tout en le laissant libre de se translater verticalement. Lorsque la force verticale dépasse la charge critique $\bar{N}_c$ les deux lames flambent en prenant l’allure visible sur la figure 5.4. Ce mode de flambage n’est qu’une variante du mode bien connu également visible sur la figure dont la charge critique est donnée par la formule d’Euler⁴ :

$$N_{Euler} = \frac{\pi^2 EI}{l_o^2}. \quad (5.17)$$

Dans notre cas, nous avons $l_o = l/2$ ce qui nous permet de trouver la charge critique pour une lame

$$\boxed{N_c = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}}, \quad (5.18)$$

ainsi que la charge critique sur la table, puisque $\bar{N} = 2N$:

$$\boxed{\bar{N}_c = \frac{8\pi^2 EI}{l^2}}. \quad (5.19)$$

Il est important de noter que la charge critique ne dépend pas de la contrainte admissible dans le matériau σ_{adm} . Il est vain, par exemple, d’espérer augmenter la charge critique d’une table à lames parallèles en acier en traitant thermiquement les lames pour augmenter leur limite élastique.

Notons également que la charge critique est indépendante de la déformation initiale f de la table⁵.

Il est essentiel de rappeler ici que le modèle de flambage que nous utilisons fait l’hypothèse que la poutre reste dans le domaine de déformation élastique pour toute charge allant jusqu’à la charge critique $0 \leq \bar{N} < \bar{N}_c$. Ainsi, la charge critique que nous venons de calculer constitue un seuil au-delà duquel le système se ruine inévitablement par un phénomène d’instabilité élastique, quelle que soit la limite élastique du matériau utilisé. En réalité, le matériau a une limite élastique finie, il se pourrait donc, suivant les cas, que la ruine soit causée par l’apparition de contraintes dans les lames qui dépassent la contrainte admissible par ces dernières, pour des charges inférieures à la charge critique, c’est-à-dire avant que l’instabilité élastique ne se produise. A ce stade de notre développement nous ne pouvons tirer qu’une

4. La démonstration de la formule d’Euler peut être trouvée dans la plupart des ouvrages traitant de la théorie de la résistance des matériaux, par exemple (Massonnet & Cescotto 1994) (Gere & Timoshenko 1990). Nous ne la démontrons donc pas ici.

5. Ceci est contraire à l’intuition commune qui voudrait généralement que la charge critique diminue lorsque la table s’écarte de sa position nominale.

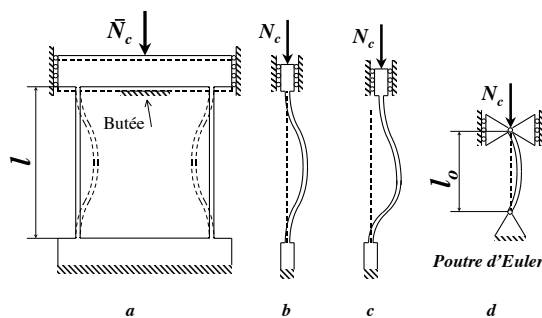


FIG. 5.4 – *Flambage de la table à deux lames parallèles. Lorsque la charge en compression sur la table atteint la charge critique, les lames flambent en prenant l'allure visible en (a). Les lames peuvent flamber soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur, aléatoirement. Lorsque les lames flambent, le système devient instable. Pour pouvoir l'observer dans cet état, il faut placer une butée. La charge critique est indépendante de la flèche f de la lame : les lames (b) et (c) ont la même charge critique. La poutre d'Euler équivalente au cas de charge (b) est représentée en (d).*

seule conclusion : la charge admissible d'une table à lames parallèles est toujours inférieure à sa charge critique.

$$\bar{N}_{adm} \leq \frac{8\pi^2 EI}{l^2} \quad (5.20)$$

A la fin de cette section nous prouvons que pour des courses faibles par rapport à la course maximale admissible par la table à deux lames parallèles, la charge admissible est bel et bien égale à la charge critique. Par contre, pour des courses plus grandes (proches de f_{adm}), le dépassement de la limite élastique se produit pour des charges inférieures à $\bar{N}_c$.

Comportement en traction-compression dans le domaine élastiquement stable

Considérons encore une fois que la force $\bar{P}$ est appliquée au point B et qu'elle n'induit donc pas de forces de traction-compression dans les lames : $T_1 = T_2 = 0$. Cette force translate le bloc mobile d'une distance f que nous allons cette fois-ci prendre en compte dans le calcul de l'équilibre de la lame⁶. La charge $\bar{N}$ étant appliquée au centre du bloc mobile, elle va se répartir de manière égale sur les deux lames, produisant sur chacune d'elle une force $N = \bar{N}/2$. Isolons l'une des deux lames. Les efforts agissant sur son extrémité sont : $P = \bar{P}/2$, M et N (FIG. 5.5).

6. Au début de la section 5.1 nous avons effectué le même calcul en négligeant l'influence de la déformation de la lame sur l'équilibre des forces qui agissent sur elle.

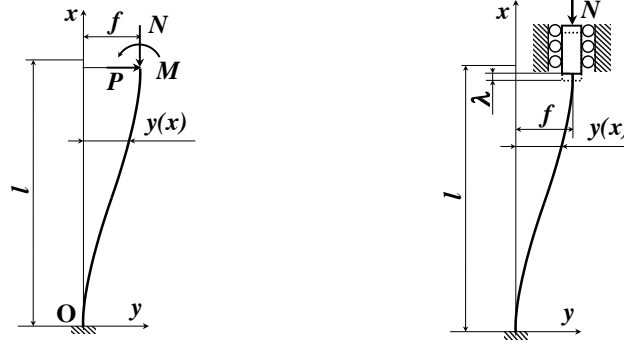


FIG. 5.5 – Déformée de l'une des lames de la table à deux lames parallèles sous charge de traction-compression.

La lame étant en équilibre, ces trois efforts ne sont pas indépendants : la somme des moments en O permet de trouver la loi qui les relie : $2M - Nf - Pl = 0$. Ce qui donne

$$\boxed{M = \frac{Nf + Pl}{2}} \quad (5.21)$$

Une section de la lame située à une distance x de la base subit le moment suivant :

$$M_x(x) = M - N(f - y(x)) - P(l - x) \quad (5.22)$$

L'équation (3.1) nous donne la dérivée seconde de la déformée $y''(x) = -M_x(x)/(EI)$ qui conduit à l'équation différentielle suivante

$$y''(x) + \frac{N}{EI}y(x) = \frac{-P}{EI}x + \frac{Pl + Nf - M}{EI}. \quad (5.23)$$

Il s'agit d'une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants du type

$$y'' + k^2y = k_ax + k_b \quad (5.24)$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}} ; k_a = \frac{-P}{EI} ; k_b = \frac{Pl + Nf - M}{EI}. \quad (5.25)$$

La solution générale de l'équation sans second membre est du type

$$y_g = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (5.26)$$

Il est aisé de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y_p = ax + b, \quad (5.27)$$

avec

$$\boxed{a = \frac{-P}{N} \quad \text{et} \quad b = \frac{Pl - M}{N} + f.} \quad (5.28)$$

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de y_p et y_g :

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + ax + b.} \quad (5.29)$$

Sa dérivée est

$$\boxed{y'(x) = -kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx + a.} \quad (5.30)$$

Les conditions aux extrémités de la lame sont connues :

$$y(0) = 0 ; y'(0) = 0 ; y(l) = f.$$

La première condition permet de trouver C_1 et la seconde C_2

$$\boxed{C_1 = \frac{M - Pl}{N} - f \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{P}{kN}.} \quad (5.31)$$

La troisième condition donne

$$\left(\frac{M - Pl}{N} - f \right) \cos kl + \frac{P}{kN} \sin kl - \frac{Pl}{N} + \frac{Pl - M}{N} + f = f.$$

L'équation (5.21) nous permet d'éliminer l'inconnue M et de trouver P en fonction de f :

$$P = f \frac{N(1 + \cos kl)}{-l(1 + \cos kl) + \frac{2 \sin kl}{k}}. \quad (5.32)$$

Cette formule peut être écrite plus simplement⁷ :

$$\boxed{P = \frac{Nf}{\frac{2}{k} \tan \frac{kl}{2} - l}.} \quad (5.33)$$

Nous avons à présent complètement résolu l'équation différentielle (5.23) : nous pouvons calculer la déformée (5.29) de la lame, ou sa dérivée (5.30), connaissant la force P et la charge⁸ N qui s'y appliquent ainsi que ses dimensions h , b , l et son module de Young E . Pour ce faire il faut utiliser les équations encadrées ci-dessus : (5.21), (5.28), (5.31) et (5.32). La figure 5.9 montre l'allure de la déformée $y(x)$.

La dernière équation (5.33) nous donne la rigidité en translation d'une lame $K = P/f$:

$$K = \frac{N}{\frac{2}{k} \tan \frac{kl}{2} - l} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{N}{EI}}. \quad (5.34)$$

7. Pour réaliser cette simplification nous utilisons les relations goniométriques $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = 2(\cos a)^2 - 1$.

8. Lorsque la charge sollicite la lame en traction N est négatif. Le terme k (5.25) ainsi que la constante C_2 (5.31) deviennent des nombres complexes imaginaires mais les formules présentées dans cette section restent toutes valables. Pour les utiliser il suffit de faire appel aux formules d'Euler : $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$. Vu que la plupart des logiciels de calcul le font automatiquement, les formules présentées ici peuvent généralement être utilisées telles quelles aussi bien pour des charges en traction qu'en compression.

Ceci nous permet de constater qu'il existe une charge N_o qui induit une rigidité nulle :

$$\boxed{N_o = \frac{\pi^2 EI}{l^2}}. \quad (5.35)$$

Il est intéressant d'écrire l'équation (5.34) comme une fonction de K_o et de N/N_o . Pour ce faire, posons

$$\gamma = N/N_o.$$

Nous avons alors

$$N = \gamma N_o = \frac{\gamma \pi^2 EI}{l^2} \quad (5.36)$$

et

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\gamma}. \quad (5.37)$$

Remplaçons les termes N et k de l'équation (5.34) par (5.36) et (5.37). En mettant en évidence le terme $K_o = 12EI/l^3$ nous obtenons :

$$K = K_o Z(\gamma) \quad \text{avec} \quad Z(\gamma) = \frac{\gamma \pi^2}{12 \left(\frac{2}{\pi \sqrt{\gamma}} \tan \frac{\pi \sqrt{\gamma}}{2} - 1 \right)}. \quad (5.38)$$

Cette équation permet de calculer la rigidité en translation d'une lame d'une table à deux lames parallèles sous charge de traction-compression connaissant la rigidité à vide de la lame K_o , la charge N_o qui induit une rigidité nulle et la charge appliquée N . (Rappelons que $\gamma = N/N_o$).

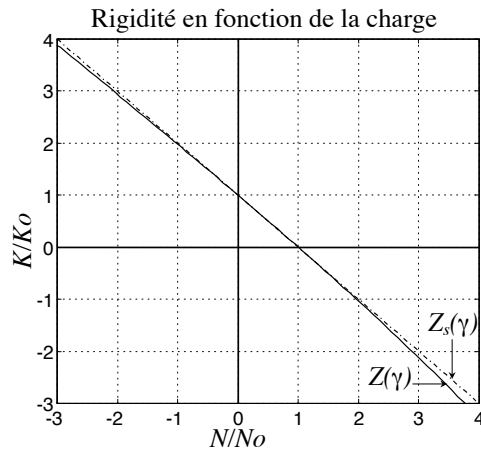


FIG. 5.6 – Tracé de la fonction $Z(\gamma)$ et de la fonction simplifiée $Z_s(\gamma)$. Ce graphique montre que la rigidité en translation de l'une des lames de la table à deux lames parallèles varie quasiment linéairement en fonction de la charge N appliquée.

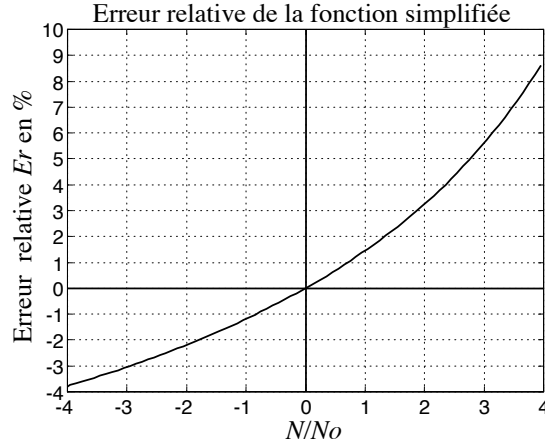


FIG. 5.7 – Erreur relative de la fonction simplifiée $Z_s(\gamma)$.

Le tracé de la fonction $Z(\gamma)$ (FIG. 5.6) montre que c'est une courbe de pente négative, avec $Z(0) = 1$ et $Z(1) = 0$. Entre ces deux points la courbe est pratiquement rectiligne. Ainsi, il est possible d'approximer la fonction exacte $Z(\gamma)$ par la droite passant par ces deux points dont l'équation est $Z_s(\gamma) = 1 - \gamma$. La figure 5.7 montre l'erreur relative E_r entre les fonctions exacte et simplifiée : $E_r = (Z - Z_s)/Z$. Nous constatons que cette erreur est inférieure à 1.5% pour $-1 < \gamma < 1$, c'est-à-dire pour $-N_o < N < N_o$ et inférieure à 9% pour $-4 < \gamma < 4$, c'est-à-dire pour $-4N_o < N < 4N_o$. Ainsi, dans la pratique, il est possible d'utiliser la fonction simplifiée Z_s sans commettre d'erreur importante. Nous avons donc :

$$K = K_o Z(\gamma) \simeq K_o Z_s(\gamma) = K_o(1 - \gamma) = K_o\left(1 - \frac{N}{N_o}\right) = K_o - \frac{K_o}{N_o}N.$$

Ce qui nous fournit une formule extrêmement simple pour le calcul de la rigidité en translation d'une lame chargée :

$$\boxed{K \simeq K_o - \frac{K_o}{N_o}N} \quad \text{avec} \quad K_o = \frac{12EI}{l^3} \quad \text{et} \quad N_o = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (5.39)$$

Résultats pour la table entière (avec ses deux lames)

Considérons à présent la table à deux lames parallèles dans son entier. Nous savons que $P = \bar{P}/2$ et $N = \bar{N}/2$. La charge $\bar{N}_o$ qui rend nulle la rigidité de la table devient d'après (5.35) :

$$\boxed{\bar{N}_o = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}}. \quad (5.40)$$

Nous constatons que la charge critique $\bar{N}_c$ (5.19) qui fait flamber les lames est quatre fois supérieure à la charge qui induit la rigidité nulle :

$$\boxed{\bar{N}_c = 4\bar{N}_o}. \quad (5.41)$$

Si nous comparons la formule (5.40) avec celle obtenue avec le modèle approché (5.16) qui ne tient pas compte de l'effet des forces de compression sur la déformée des lames, nous constatons que la seule différence tient dans les coefficients 20 et $2\pi^2 \simeq 19.7$, qui sont très proches numériquement. Pour la suite des développements nous conserverons la formule (5.40) qui est plus rigoureuse.

Sachant que $\bar{\gamma} = \bar{N}/\bar{N}_o = 2N/(2N_o) = \gamma$, que $\bar{K}_o = 2K_o$ et que $\bar{K} = 2K$, l'équation (5.38) devient pour la table à deux lames parallèles :

$$\boxed{\bar{K} = \bar{K}_o Z(\gamma) \quad \text{avec} \quad Z(\gamma) = \frac{\gamma \pi^2}{12 \left(\frac{2}{\pi \sqrt{\gamma}} \tan \frac{\pi \sqrt{\gamma}}{2} - 1 \right)}}. \quad (5.42)$$

La fonction $Z(\gamma)$ étant identique à celle de l'équation (5.38), il est possible d'utiliser la fonction simplifiée $Z_s(\gamma) = 1 - \gamma$ qui en donne, comme nous l'avons vu, une excellente approximation. Nous obtenons :

$$\boxed{\bar{K} \simeq \bar{K}_o - \frac{\bar{K}_o}{\bar{N}_o} \bar{N} \quad \text{avec} \quad \bar{K}_o = \frac{24EI}{l^3} \quad \text{et} \quad \bar{N}_o = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}}. \quad (5.43)$$

Déplacement vertical en fonction de la charge

Maintenant que nous connaissons l'équation de la déformée de la lame sous charge $y(x)$, calculons son déplacement vertical $\lambda(f, N)$ (FIG. 5.5) en fonction, à la fois du déplacement horizontal du bloc mobile et de la charge. Ce déplacement peut être décomposé en deux parties : un déplacement λ_1 résultant de la variation de déformée induite par la charge N (effet du moment fléchissant) et un déplacement λ_2 résultant du raccourcissement induit par N (effet des efforts de compression). Selon la formule classique (Gere & Timoshenko 1990), nous avons :

$$\lambda_1 \simeq \frac{1}{2} \int_0^l (y'(x))^2 dx.$$

Le raccourcissement, quant à lui, se calcule très simplement (loi de Hooke) :

$$\lambda_2 = \frac{Nl}{hbE}.$$

Le déplacement total est la somme de ces deux composantes :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Vu la complexité de la fonction $y(x)$, nous ne calculons pas ici symboliquement $\lambda(f, N)$. Il est par contre aisé d'effectuer ce calcul numériquement par ordinateur pour observer l'allure de cette fonction pour des cas particuliers. C'est ce qui est montré à la figure 5.8. Nous constatons premièrement que la rigidité transverse en translation verticale $K_c = N/\lambda$ de la table est d'autant plus faible que la table est écartée de sa position d'équilibre. Nous constatons également que cette rigidité n'est pas linéaire mais dégressive : pour un déplacement f donné, plus la charge en compression est élevée plus la rigidité est faible.

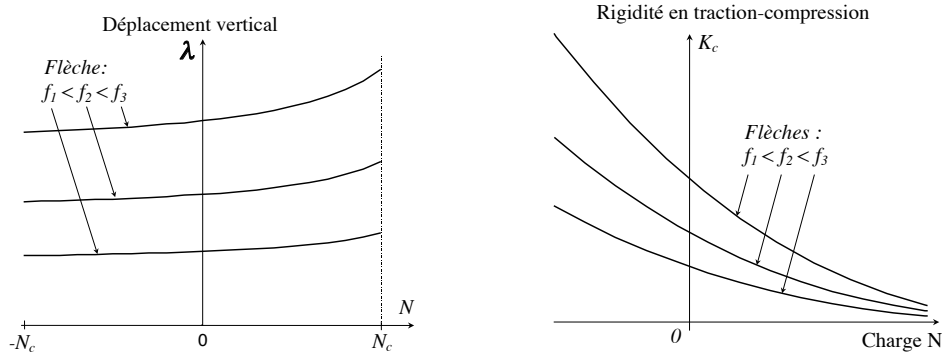


FIG. 5.8 – Déplacement vertical λ et rigidité transverse en translation verticale $\bar{K}_c$ en fonction de la charge N .

Course admissible en fonction de la charge

La course f_{adm} est le déplacement qui produit dans les lames une contrainte égale à la contrainte admissible σ_{adm} . Cette contrainte est proportionnelle au moment dans la lame (3.3). Or le moment n'est pas uniformément réparti le long de la lame. Il s'agit donc de localiser la partie de la lame qui subit le moment de flexion le plus intense⁹. L'expression (5.22) nous donne la répartition du moment le long de la lame. Cette formule fait intervenir l'équation de la déformée de la lame $y(x)$ qui est relativement complexe. Il n'est donc pas aisé de calculer symboliquement la position x le long de la lame pour laquelle l'intensité du moment est maximale. Il nous est par contre facile de connaître l'allure de la fonction $M_x(x)$. C'est ce qui est montré à la figure 5.10.

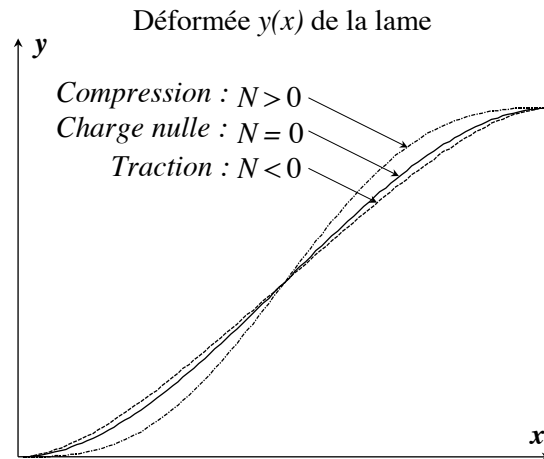


FIG. 5.9 – Allure de la déformée $y(x)$ de la lame pour différentes charges de traction-compression inférieures à la charge critique (domaine élastiquement stable).

9. Nous appelons *intensité* du moment sa valeur absolue $|M_x(x)|$.

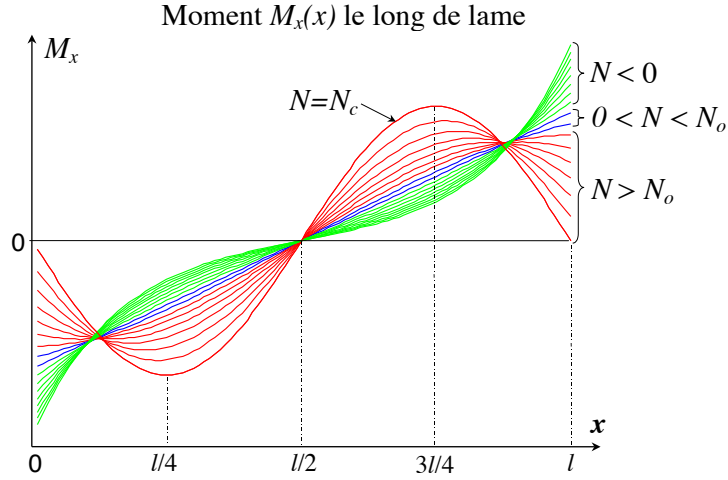


FIG. 5.10 – Allure du moment $M_x(x)$ le long de la lame pour différentes charges N . Pour des charges en traction ou en compression inférieures à N_o , les extremums du moment apparaissent toujours au niveau des encastremets de la lame (en $x = 0$ et en $x = l$). Pour des charges supérieures ($N_o < N < N_c$), ses extremums n'apparaissent plus au niveau des encastremets. Pour une charge égale à la charge critique $N = N_c$ il est possible de montrer que ses extremums apparaissent en $x = l/4$ et en $x = 3l/4$.

Nous constatons que pour des charges de compression comprises entre 0 et N_o , le moment d'intensité maximale apparaît toujours aux encastremets de la lame dans le bloc mobile et dans le bloc de base¹⁰ :

$$\text{lorsque } 0 \leq N \leq N_o \quad \text{alors} \quad M_{max}(N) = |M_x(0)| = |M_x(l)| = \frac{Nf + Pl}{2} \quad (5.44)$$

$$\text{et} \quad M_{max}(N) \leq M_{max}(0).$$

Il est remarquable de noter que sur cet intervalle le moment maximal dans la lame diminue lorsque la charge en compression N augmente ; il est par conséquent toujours inférieur au moment pour une charge nulle ($N = 0$).

Pour des charges en traction (N négatif), nous constatons également que le moment maximal apparaît aux encastremets des lames dans le bloc mobile et dans le bloc de base :

$$\text{lorsque } N < 0 \quad \text{alors} \quad M_{max}(N) = |M_x(0)| = |M_x(l)| = \frac{Nf + Pl}{2} \quad (5.45)$$

$$\text{et} \quad M_{max}(N) > M_{max}(0).$$

Sur cet intervalle, le moment maximal augmente d'autant plus que l'intensité de la force de traction ($|N|$) est grande ; il est par conséquent toujours supérieur au moment pour une charge nulle ($N = 0$).

D'après (5.33) et (5.39) nous savons que

$$P = Kf = \left(K_o - \frac{K_o}{N_o}N\right)f,$$

10. M_{max} est une fonction de la charge N . M_x est une fonction de x (position le long de la lame).

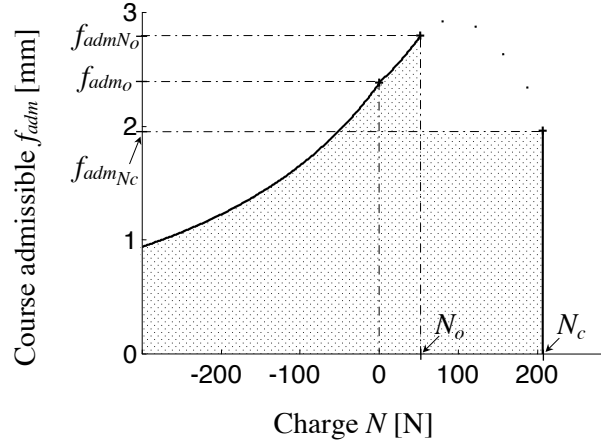


FIG. 5.11 – Course admissible en fonction de la charge. Cette fonction est constituée de quatre tronçons. Le premier, pour $N < 0$ est défini par (5.51). Le deuxième pour $0 \leq N < N_o$ est défini par (5.52). Le troisième pour $N_o < N < N_c$ n'a pas été calculé. Tout ce que nous en savons est qu'il est situé au-dessus de $f_{adm}(N_c)$. Le quatrième tronçon pour $N = N_c$ est une droite verticale définie par (5.58). Cette figure correspond à un cas pour lequel la condition (5.55) est vérifiée. Ce graphique peut également être interprété comme un tracé de la charge admissible en fonction de la course. Nous avons montré que toutes les combinaisons de charges et de courses qui correspondent au domaine grisé n'engendrent pas de contraintes supérieures à la contrainte admissible.

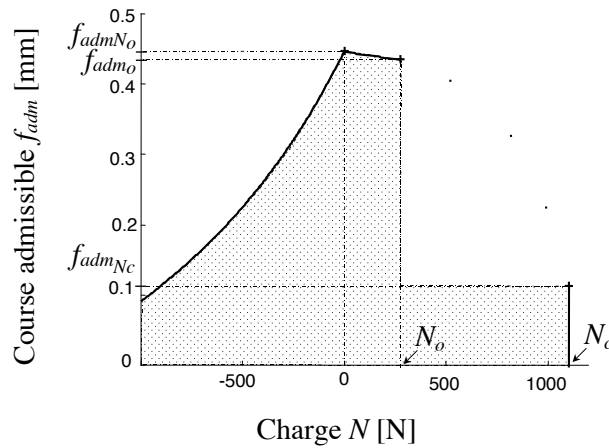


FIG. 5.12 – Comme la figure 5.11, cette figure présente la course admissible en fonction de la charge. Mais dans ce cas, contrairement au cas de la figure 5.11, la condition (5.55) n'est pas vérifiée. Ceci a pour conséquence que la course admissible décroît lorsque la charge croît entre 0 et N_o .

ce qui nous permet d'éliminer P de l'équation (5.45) et de trouver le moment aux encastrements de la poutre en fonction de la course f et de la charge N :

$$M = f \left(\frac{N}{2} + \frac{K_o l}{2} - \frac{K_o N l}{2N_o} \right). \quad (5.46)$$

Ce moment qui sollicite la lame en flexion produit selon (3.3) une contrainte

$$\sigma_{flex} = \frac{6M}{bh^2}. \quad (5.47)$$

La force N sollicite également la lame en compression et induit une contrainte

$$\sigma_{comp} = \frac{N}{bh}. \quad (5.48)$$

La contrainte maximale qui apparaît dans la lame est la somme¹¹ des contraintes dues au moment de flexion et à la force de compression

$$\sigma = \sigma_{flex} + |\sigma_{comp}|. \quad (5.49)$$

En combinant (5.46), (5.47), (5.48) et (5.49), nous obtenons la contrainte en fonction de la charge et de la course :

$$\sigma = 3f \left(\frac{Eh}{l^2} + \frac{N(\pi^2 - 12)}{bh^2\pi^2} \right) + \left| \frac{N}{bh} \right|. \quad (5.50)$$

En isolant f dans cette équation nous pouvons déduire la formule de la course admissible en fonction de la contrainte admissible (FIG. 5.11 et 5.12) :

$$\boxed{f_{adm} = \frac{hl^2\pi^2(N + bh\sigma_{adm})}{3bEh^3\pi^2 + 3l^2N(\pi^2 - 12)} \quad \text{valable pour} \quad N < 0} \quad (5.51)$$

$$\boxed{f_{adm} = \frac{hl^2\pi^2(-N + bh\sigma_{adm})}{3bEh^3\pi^2 + 3l^2N(\pi^2 - 12)} \quad \text{valable pour} \quad 0 \leq N < N_o} \quad (5.52)$$

A l'aide de cette dernière formule, calculons la course admissible pour $N = N_o$

$$f_{adm}(N_o) = \frac{4l^2\sigma_{adm}}{Eh\pi^2} - \frac{h}{3}. \quad (5.53)$$

Il est intéressant de savoir si la course admissible pour la charge N_o est plus grande ou plus faible que la course à charge nulle. Nous avons

$$\frac{f_{adm}(N_o)}{f_{adm_o}} = \frac{12}{\pi^2} - \frac{Eh^2}{\sigma_{adm}l^2}. \quad (5.54)$$

11. Le terme σ_{flex} est toujours positive, quel que soit le signe de N . La contrainte σ_{comp} , quant à elle, est négative lorsque la charge sollicite les lames en traction (N négatif). C'est ce qui explique l'utilisation de la valeur absolue en (5.49).

d'où nous pouvons déduire une condition sur l'élancement du profil de la lame qui garantit que la course pour une charge N_o est supérieure à la course à charge nulle (le rapport (5.54) doit être supérieur à 1).

$$\boxed{\frac{l}{h} > \left(\frac{(12 - \pi^2)\sigma_{adm}}{E\pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}}}. \quad (5.55)$$

Si cette condition est vérifiée, alors la course admissible croît lorsque la charge en compression N croît entre 0 et N_o . Si cette condition n'est pas vérifiée, alors la course admissible décroît lorsque la charge croît sur ce même intervalle.

D'après la figure 5.10 nous constatons que pour des charges comprises entre N_o et N_c , le moment maximal n'apparaît plus aux encastrement de la lame mais ailleurs, en deux points situés symétriquement de part et d'autre du centre de la lame. Notons x_{max_1} la position de celui qui est le plus rapproché du bloc de base et x_{max_2} la position de celui qui est le plus proche du bloc mobile. Pour trouver leur position il nous faut résoudre l'équation

$$\frac{d}{dx}M_x(x) = 0. \quad (5.56)$$

La fonction $M_x(x)$ (5.22) fait intervenir l'équation de la déformée $y(x)$ qui est relativement complexe. Nous ne développons donc pas ici la résolution de cette équation¹². Nous ne ferons que donner son résultat pour le cas particulier où la charge est égale à la charge critique :

$$\text{lorsque } N = N_c \quad \text{alors} \quad x_{max_1} = \frac{l}{4} \quad \text{et} \quad x_{max_2} = \frac{3l}{4}. \quad (5.57)$$

Le moment maximal est alors

$$M_{max} = |M_x(x_{max_1})| = |M_x(x_{max_2})| = \frac{bEfh^3\pi}{6l^2}.$$

En considérant, comme nous l'avons fait plus haut, la contrainte due au moment de flexion M_{max} et la contrainte de compression due à la force N_c nous pouvons calculer la course admissible :

$$\boxed{f_{adm} = \frac{l^2\sigma_{adm}}{Eh\pi} - \frac{h\pi}{3} \quad \text{valable pour} \quad N = N_c} \quad (5.58)$$

Nous n'avons pas calculé la course admissible pour des charges comprises entre N_o et N_c mais nous savons qu'elle est supérieure à $f_{adm_{N_c}}$. Pour la réalisation de tables à deux lames parallèles, nous pouvons donc utiliser toutes les combinaisons de flèches et de charges qui correspondent aux domaines grisés des figures 5.11 et 5.12 sans risquer de dépasser la contrainte admissible.

12. L'équation (5.56) est difficile à résoudre dans le cas général. Par contre, elle se simplifie dans le cas particulier où la charge est égale à la charge critique $N = N_c$. Elle peut alors aisément être résolue sur un logiciel de calcul symbolique comme Mathematica par exemple.

5.1.7 Synthèse

Nous avons montré que la rigidité en translation $\bar{K}$ de la table à deux lames parallèles dépend de la charge $\bar{N}$ qui lui est appliquée. A charge nulle la table a une rigidité $\bar{K}_o$. Cette rigidité augmente si la table supporte une charge en traction, et elle diminue si la table supporte une charge en compression. Pour une charge en compression égale à $\bar{N}_o$, la rigidité s'annule. Pour des charges plus importantes encore, elle devient négative. Si la charge en compression atteint la charge critique $\bar{N}_c = 4\bar{N}_o$ alors le système devient instable et les lames se ruinent par flambage. Nous avons montré que pour des charges en traction ou en compression dont l'intensité est inférieure à N_o la formule simplifiée (5.43) permet de calculer la rigidité de la table avec une erreur relative inférieure à 1.5% par rapport à la formule exacte (5.38). Pour des charges plus importantes allant jusqu'à la charge critique $\bar{N}_c$, cette formule reste utilisable, bien que l'erreur relative augmente (elle reste inférieure à 9%).

Nous avons également montré que pour une charge nulle, la course admissible par la table à deux lames parallèles f_{adm_o} est donnée par la formule (5.10). Le fait de charger en traction la table réduit la course admissible (5.51). Le fait de charger en compression la table augmente (respectivement réduit) la course admissible si la condition (5.55) est vérifiée (respectivement si la condition (5.55) n'est pas vérifiée)((5.51) et (5.52)).

5.2 Table hyperguidée à quatre lames parallèles

La table hyperguidée à quatre lames parallèles est constituée de deux tables à deux lames parallèles (sect. 5.1) ayant le même bloc mobile (FIG. 5.13). Les blocs fixe et mobile sont supposés infiniment rigides. Vu que le système est symétrique autour de l'axe O , le bloc mobile subit une translation *rectiligne* lorsque la force F lui est appliquée. Ainsi, cette structure est couramment utilisée lorsque la trajectoire *parabolique* (respectivement *circulaire*¹³) de la table à deux lames parallèles (respectivement de la table à quatre cols) pose problème pour l'application visée.

5.2.1 Rigidité en translation

Lorsque le bloc mobile s'écarte de sa position d'équilibre, il apparaît dans les lames une force de traction provoquant un allongement de celles-ci qui compense exactement le déplacement longitudinal qu'elles provoqueraient sans traction (5.13). Or nous avons vu au paragraphe 5.1.6 que la rigidité en translation de la table à deux lames dépend de la charge en traction ou en compression qui lui est appliquée. Dans la cas présent, nous avons affaire à une force de traction qui est d'autant plus grande que le bloc mobile s'écarte de sa position centrale. Ceci a pour conséquence que la rigidité de la table hyperguidée à quatre lames parallèles est progressive.

La force de traction N qui apparaît dans les lames est telle qu'elle annule le déplacement vertical λ qu'elles auraient si N était égal à 0. Nous avons vu au paragraphe 5.1.6 que la rigidité transverse en translation verticale est complexe à calculer. Pour

13. Lorsque la longueur des cols de la table à quatre cols est très courte alors la trajectoire du bloc mobile est approximativement circulaire.

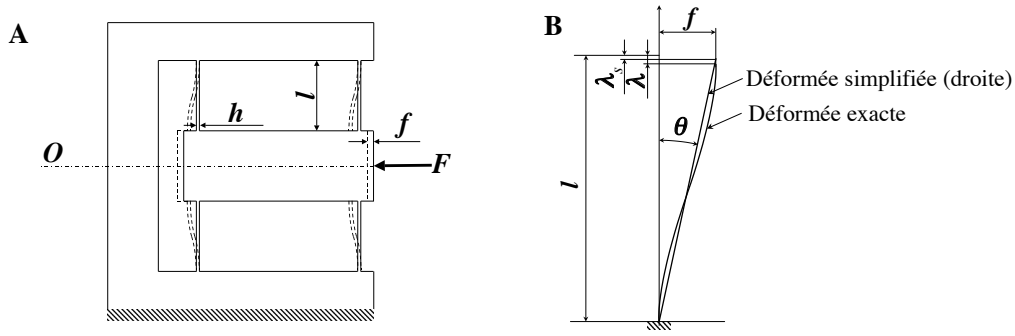


FIG. 5.13 – A : Table hyperguidée à quatre lames parallèles : h épaisseur des lames ; b largeur des lames ; l longueur des lames d'un encastrement à l'autre. B : Déformée de l'une des lames de la table s'il n'apparaissait pas de force de traction. Pour calculer le déplacement vertical λ nous utilisons un modèle simplifié qui recourt à l'hypothèse que la déformée est une droite. Selon ce modèle, la force de traction N qui apparaît aux extrémités de la lame est telle qu'elle allonge cette dernière en traction pure d'une longueur λ_s .

déterminer N nous allons donc recourir au modèle simplifié représenté à la figure 5.13 : nous faisons l'hypothèse que la déformée de la lame lorsque $N = 0$ est une droite. Dans ce cas le déplacement vertical se calcule aisément :

$$\lambda_s = l(1 - \cos(\theta)) \simeq \frac{l\theta^2}{2}. \quad (5.59)$$

Pour de faibles angles θ , nous avons

$$\theta = \arctg \frac{f}{l} \simeq \frac{f}{l}. \quad (5.60)$$

Selon ce modèle, la force N est telle qu'elle allonge la lame en traction pure d'une longueur λ . Appelons K_{trac} la rigidité en traction-compression de la lame :

$$K_{trac} = \frac{bhE}{l}. \quad (5.61)$$

Nous avons alors

$$N \simeq \frac{-bhEf^2}{2l^2}. \quad (5.62)$$

En remplaçant le terme N de l'équation (5.33) par (5.62) on obtient l'équation de la caractéristique force-déformation de la table hyperguidée à quatre¹⁴ lames parallèles :

$$F \simeq \frac{6bhEf^4}{3fl^3 - \sqrt{6}hl^3 \tanh \frac{\sqrt{3}f}{h}}. \quad (5.63)$$

La rigidité de la table hyperguidée à quatre lames parallèles est la pente de cette caractéristique. La figure 5.14 montre l'allure de cette caractéristique pour un cas typique.

14. Les quatre lames de la table se comportent, du point de vue de la rigidité, comme des ressorts montés en parallèle. La rigidité de la table est donc le quadruple de la rigidité d'une seule lame. Plusieurs étapes de calcul intermédiaires qui aboutissent à la formule (5.63) ne sont pas détaillées ici.

5.2.2 Course

La force de traction N sollicite les lames en flexion et en traction. Nommons σ_{trac} les contraintes résultant de la traction et σ_{flex} les contraintes résultant de la flexion. σ_{trac} est constante tout le long de la lame

$$\sigma_{trac} = \frac{N}{bh}. \quad (5.64)$$

σ_{flex} est directement proportionnelle au moment fléchissant (3.3)

$$\sigma_{flex} = \frac{6M}{bh^2}.$$

Pour une charge en traction, le moment de flexion M est maximal aux encastremets de la lame comme nous l'avons vu à la figure 5.10. L'équation (5.21) nous donne

$$M = \frac{Nf + Pl}{2}.$$

En remplaçant P par (5.33) et en simplifiant, nous obtenons

$$\sigma_{flex} = \frac{3Ef^3}{l^2 \left(\sqrt{6} f \coth \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} f}{h} - 2h \right)}. \quad (5.65)$$

La somme des contraintes est $\sigma = \sigma_{trac} + \sigma_{flex}$:

$$\sigma = \frac{3Ef^3}{l^2 \left(\sqrt{6} f \coth \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} f}{h} - 2h \right)} + \frac{Ef^2}{2l^2}. \quad (5.66)$$

Cette expression peut être normalisée de la manière suivante

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{3(f/l)^3}{\sqrt{6} (f/l) \coth \frac{\sqrt{3/2} (f/l)}{h/l} - 2(h/l)} + \frac{(f/l)^2}{2}, \quad (5.67)$$

ce qui permet de tracer un abaque de dimensionnement (FIG.A.10) dont les paramètres sans unité sont σ/E , f/l et h/l .

La figure 5.15 montre comment varie cette contrainte en fonction de la flèche f et de l'épaisseur h au travers d'un exemple. Comme le montre (5.66) la contrainte est directement proportionnelle à E/l^2 .

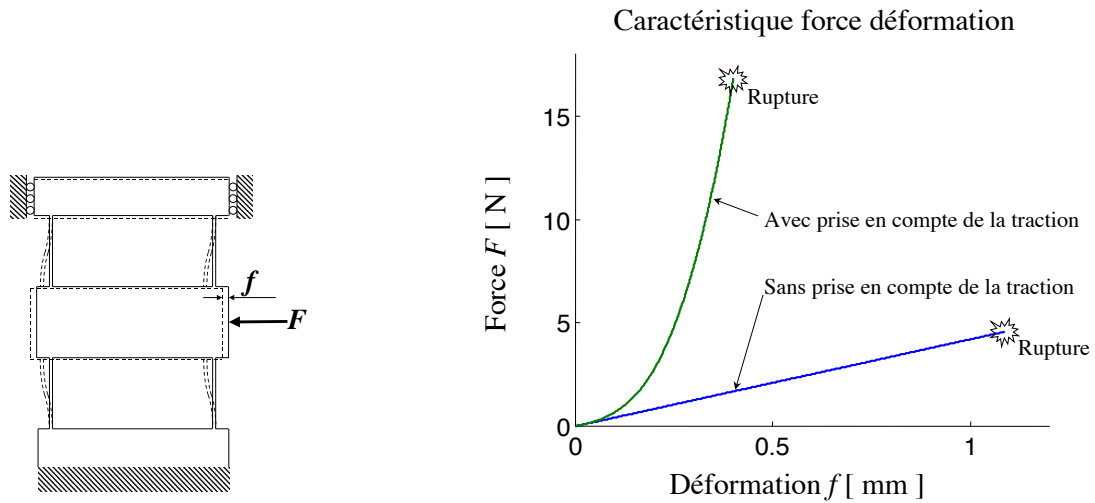


FIG. 5.14 – Caractéristique force-déformation d'une table hyperguidée à quatre lames parallèles. Les paramètres choisis pour tracer cette caractéristique sont les suivants : $h = 0.1 \text{ mm}$; $l = 10 \text{ mm}$; $b = 5 \text{ mm}$; $\sigma_{adm} = 685 \text{ MPa}$; $E = 210 \text{ GPa}$. La courbe supérieure est la caractéristique de la table telle que décrite à la figure 5.13. Cette caractéristique est progressive. La course admissible est de 0.4 mm . La courbe inférieure est la caractéristique de la table sans prise en compte de la traction dans les lames qui correspond au cas de charge schématisé à gauche. La course admissible est de 1.1 mm . Les deux courbes sont tangentes à l'origine.

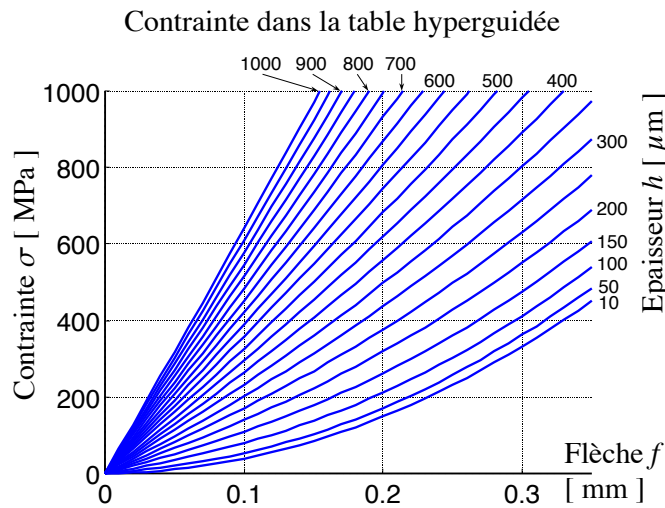


FIG. 5.15 – Contrainte maximale dans les lames d'une table hyperguidée à quatre lames parallèles en fonction de la flèche f et de l'épaisseur h des lames. Pour cet exemple, nous avons choisi $l = 10 \text{ mm}$ et $E = 210 \text{ GPa}$.

5.2.3 Conclusions principales

La caractéristique force-déformation de la table hyperguidée à quatre lames parallèles est donnée par la formule (5.63). Nous n'avons pas pu établir de formule explicite de la course admissible mais nous donnons une formule donnant la contrainte

en fonction de la flèche (5.66) qui permet, par itérations, de calculer la course. Cette course est bien inférieure à la course admissible d'une table à deux lames parallèles réalisée avec les mêmes lames. Ceci est causé par l'hyperstatisme de cette structure qui provoque des efforts de traction dans les lames. L'abaque de la figure A.10 permet de déterminer rapidement l'ordre de grandeur de la course pour les cas courants.

L'hyperstatisme de cette structure rend son étude difficile, c'est pourquoi nous avons dû recourir à un grand nombre d'hypothèses simplificatrices. Ainsi les formules présentées dans cette section peuvent, selon les cas, présenter d'importantes erreurs par rapport à la réalité¹⁵. Lors du dimensionnement de ce type de structures, il est indispensable de tenir compte de ces incertitudes, notamment en faisant intervenir un grand facteur de sécurité lors du calcul de la course admissible. Le développement présenté dans cette section révèle néanmoins des informations qualitatives extrêmement utiles pour la conception de la table hyperguidée à quatre lames parallèles :

- Sa trajectoire en translation est rectiligne (c'est probablement là le seul avantage de cette structure par rapport à la table à deux lames parallèles classique).
- Sa caractéristique force-déformation est fortement progressive.
- Sa course est nettement inférieure à celle d'une table à deux lames parallèles dotée des mêmes lames.
- L'hyperstatisme de cette structure induit des efforts importants (force N) dans les blocs de base et mobile. Si ces corps ne sont pas conçus pour être très rigides alors le modèle présenté n'est plus applicable.

5.3 Table à quatre cols prismatiques

5.3.1 Paramétrisation

La table à quatre cols prismatiques est constituée d'un bloc de base fixe et d'un bloc mobile, reliés par deux bras parallèles identiques (FIG. 5.16). Chaque bras est, quant à lui, constitué d'un segment considéré infiniment rigide et de deux petites lames flexibles identiques que nous appelons *cols prismatiques* situés chacun à une extrémité du segment rigide. Pour étudier cette structure, nous introduisons un paramètre ξ qui dépend du rapport entre les longueurs des parties flexibles et rigides des bras :

$$\xi = \frac{2l_c}{l} \quad \text{avec} \quad 0 < \xi \leq 1. \quad (5.68)$$

La longueur du segment rigide s'écrit alors $l_r = l - 2l_c = l(1 - \xi)$. Ainsi, en faisant varier le paramètre ξ entre 0 et 1 nous passons d'un segment rigide qui fait toute la longueur du bras, à un segment rigide de longueur nulle, c'est-à-dire à une lame continue. La table à deux lames parallèles est donc le cas particulier de la table à quatre cols prismatiques où $\xi = 1$.

15. L'hypothèse simplificatrice que nous avons utilisée pour calculer la force de traction N dans les lames qui consiste à supposer que la déformée de lames pour $N = 0$ est une droite (FIG. 5.13) a pour conséquence que nous sous-estimons N . La contrainte réelle est par conséquent supérieure à la contrainte donnée par (5.66).

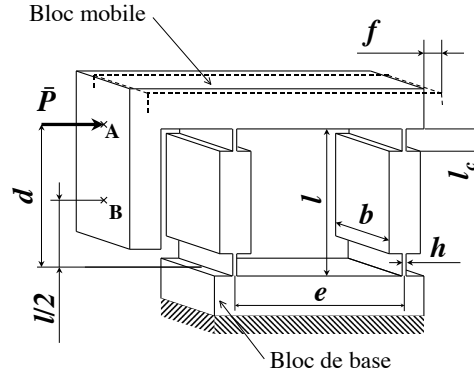


FIG. 5.16 – Table à quatre cols prismatiques : h épaisseur des cols prismatiques (petites lames flexibles); l_c longueur des cols prismatiques; b largeur des bras; l longueur des bras; e écartement des bras; d distance entre le bloc de base et le point d'application de la force d'entraînement $\bar{P}$; f déplacement horizontal; λ déplacement vertical.

5.3.2 Rigidité à charge nulle

Une force horizontale $\bar{P}$ agissant sur le bloc mobile déforme les deux bras de manière quasi identique, ce qui provoque une translation du bloc mobile d'une distance f .

Isolons l'un des deux bras. Comme nous l'avons fait pour la table à deux lames parallèles à la section 5.1, il est aisé de montrer que lorsque la force $\bar{P}$ agit sur le bloc mobile au point B, situé à une distance $l/2$ du bloc de base, alors elle n'induit aucune force de traction ou de compression dans les bras. Nous considérons que ceci est le cas dans tout le développement qui suit. L'équilibre des moments agissant sur un bras nous permet de montrer comme à la section 5.1 qu'une force horizontale $P = \bar{P}/2$ et un moment $M = Pl/2$ agissent à chacune des extrémités du bras, donc que la distribution du moment de flexion le long du bras décrite par l'équation (5.22) est également valable ici. Nous pouvons en déduire que le moment de flexion est nul au milieu du bras, en $x = l/2$.

Isolons à présent la moitié inférieure de l'un des bras. A son extrémité située en $x = l/2$, n'agit qu'une force P . Le bras et la distribution du moment étant symétriques autour du point situé en $x = l/2$ nous pouvons en déduire que la flèche que subit ce point est la moitié de la flèche totale du bras. La flèche du demi-bras est donc $f_b = f/2$.

Enfin, isolons le col prismatique inférieur. Agissent à son extrémité la force P et un moment $M_c = Pl(1 - \xi)/2$. Appelons f_c et α_c respectivement la flèche et l'angle de rotation de son extrémité. Nous avons alors pour de faibles angles

$$f_b = f_c + \sin \alpha_c l(1 - \xi)/2 \simeq f_c + \alpha_c l(1 - \xi)/2.$$

A l'aide des paramètres définis au paragraphe 4.1.2 et en appliquant le principe de superposition, calculons f_c et α_c .

$$f_c = \frac{P}{K_{fP}} + \frac{Pl(1 - \xi)}{2K_{fM}} \quad \text{et} \quad \alpha_c = \frac{P}{K_{\alpha P}} + \frac{Pl(1 - \xi)}{2K_{\alpha M}}.$$

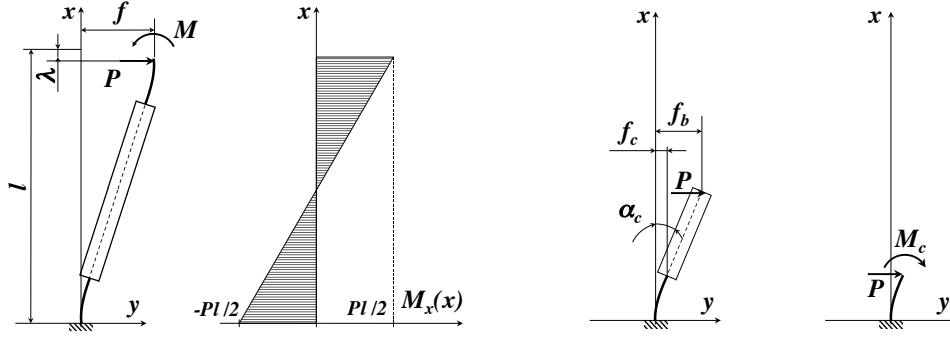


FIG. 5.17 – Modèle utilisé pour calculer la rigidité en translation (à charge nulle) de la table à quatre cols prismatiques.

Utilisons les formules (4.1) en remplaçant l par la longueur du col prismatique $l_c = \xi l/2$. Nous pouvons en déduire la rigidité en translation du bras $K_o = P/f = P/(2f_b)$

$$K_o = \frac{bh^3 E}{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^3}. \quad (5.69)$$

Sachant que $\bar{P} = 2P$, nous pouvons en déduire la rigidité en translation de la table à quatre cols prismatiques

$$\bar{K}_o = \frac{2bh^3 E}{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^3}. \quad (5.70)$$

5.3.3 Course à charge nulle

Le moment admissible par le col prismatique est selon la formule (3.3) $M_{adm} = bh^2 \sigma_{adm}/6$. La force maximale admissible est donc $P_{adm} = 2M_{adm}/l$ et la course admissible est $f_{adm} = P_{adm}/K$. Ainsi, nous obtenons

$$f_{adm} = \frac{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^2 \sigma_{adm}}{3Eh}. \quad (5.71)$$

5.3.4 Charge critique (flambage)

Considérons que seule une force verticale de compression $\bar{N}$ agit au centre du bloc mobile. Cette force se répartit de manière égale sur les deux bras, comprimant chacun d'eux avec une force $N = \bar{N}/2$. Bloquons le mouvement horizontal du bloc mobile tout en le laissant libre de se translater verticalement. Lorsque la force verticale dépasse la charge critique $\bar{N}_c$ les deux bras flambent en prenant l'allure visible sur la figure 5.18. Pour ce mode de déformation, la formule d'Euler (5.17) avec $l_o = \xi l/2$ nous permet de trouver la charge critique pour un bras :

$$N_c = \frac{4\pi^2 EI}{\xi^2 l^2}. \quad (5.72)$$

Sachant que $\bar{N} = 2N$, nous pouvons en déduire la charge critique de la table à quatre cols prismatiques :

$$\boxed{\bar{N}_c = \frac{8\pi^2 EI}{\xi^2 l^2}}. \quad (5.73)$$

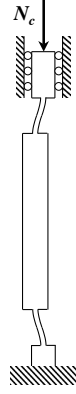


FIG. 5.18 – *Flambage de l'un des bras de la table à quatre cols circulaires.*

5.3.5 Charge en traction-compression : modèle simplifié

Dans cette section nous étudions le comportement de la table à quatre cols prismatiques soumise à une charge $\bar{N}$ inférieure à la charge critique $\bar{N}_c$.

Hypothèses simplificatrices

Le modèle que nous utilisons ici recourt à des hypothèses simplificatrices importantes :

- La première hypothèse est que la charge de compression ne modifie par la déformée des bras.
- La seconde hypothèse est que le paramètre ξ est proche de 0, c'est-à-dire que les cols prismatiques sont très courts (l_c petit) et que la longueur du segment rigide est proche de l .
- La troisième hypothèse découle des deux premières, elle consiste à considérer les cols prismatiques comme des pivots ponctuels idéaux dotés d'une rigidité angulaire non nulle. Cette hypothèse nous permet de considérer que la trajectoire suivie par le bloc mobile en translation est un arc de cercle de rayon l .

Parabole épousant au mieux un cercle

Dans un premier temps, faisons une quatrième hypothèse : considérons que la rigidité en translation (5.70) de la table à quatre cols prismatiques est nulle : $\bar{K}_o = 0$. Le guidage se comporte alors comme une glissière idéale en arc de cercle dont l'équation de la trajectoire est dans le repère visible sur la figure 5.19 :

$$\lambda_{cercle}(f) = -l + \sqrt{(l^2 - f^2)}. \quad (5.74)$$

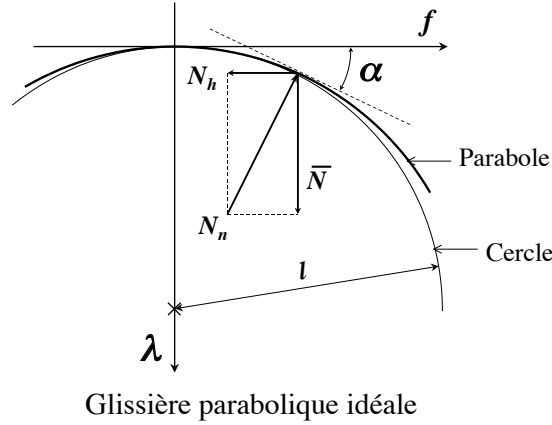


FIG. 5.19 – *Modèle simplifié pour le calcul de la rigidité sous charge de traction-compression de la table à quatre cols prismatiques. Pour des déplacements de faible amplitude, l'arc de cercle et la parabole peuvent être confondus.*

Si elle est positive, la charge $\bar{N}$ tend donc à écarter le coulisseau de sa position centrale. Ce dernier se comporte donc comme s'il avait une rigidité négative $\bar{K}_n$ en translation. Nous avons vu au paragraphe 5.1.5 que si la trajectoire suivie par le bloc mobile est une parabole, alors $\bar{K}_n$ est constant sur toute la trajectoire. Dans le cas présent, la trajectoire est circulaire et non parabolique, donc $\bar{K}_n$ varie pour différentes positions le long de la trajectoire. Pour de faibles débattements angulaires des bras il est toutefois possible d'approximer avec une très faible erreur l'arc de cercle par une portion de parabole. La parabole d'équation

$$\lambda_{parabole}(f) = \frac{-f^2}{2l} \quad (5.75)$$

a la même dérivée première et la même dérivée seconde que l'arc de cercle en $f = 0$, elle se confond donc pratiquement avec la glissière curviligne. Nous pouvons à présent faire notre cinquième et dernière hypothèse, qui est que le bloc mobile suit la parabole décrite par (5.75). La glissière exerce sur le coulisseau une force de réaction N_n qui est normale à sa trajectoire. Pour maintenir le coulisseau en position il faut y exercer une force de rappel horizontale N_h . Nommons α la pente de la parabole, nous obtenons alors :

$$N_h = \bar{N} \operatorname{tg} \alpha = \bar{N} \frac{d}{df} \lambda_{parabole} = \frac{-\bar{N}}{l} f = \bar{K}_n f.$$

Le guidage se comporte donc comme s'il avait une rigidité négative constante :

$$\bar{K}_n = \frac{-\bar{N}}{l}. \quad (5.76)$$

Dans le cas où la charge $\bar{N}$ est négative (charge en traction), la formule (5.76) reste valable, et le guidage se comporte comme s'il avait une rigidité positive constante.

Si nous reprenons en considération la rigidité $\bar{K}_o$ que nous avons supposée nulle (quatrième hypothèse simplificatrice), alors la rigidité totale de la table devient $\bar{K}_{tot} = \bar{K}_o + \bar{K}_n$. Nous pouvons donc en conclure que la rigidité en translation de la table à quatre cols prismatiques dépend de la charge en compression $\bar{N}$ qui lui est appliquée, et elle est approximativement constante sur toute la course pour une charge $\bar{N}$ donnée :

$$\boxed{\bar{K}_{tot} \simeq \bar{K}_o + \frac{\bar{N}}{l}}. \quad (5.77)$$

Ceci nous permet de constater qu'il existe une charge $\bar{N}_o$ qui rend nulle la rigidité $\bar{K}_{tot}$:

$$\boxed{\bar{N}_o \simeq l\bar{K}_o}. \quad (5.78)$$

5.3.6 Charge en traction-compression : modèle complet

Comme dans le paragraphe précédent, nous étudions ici le comportement de la table à quatre cols prismatiques soumise à une charge $\bar{N}$ inférieure à la charge critique $\bar{N}_c$. Mais dans le développement qui suit nous ne recourons pas aux nombreuses hypothèses simplificatrices utilisées précédemment.

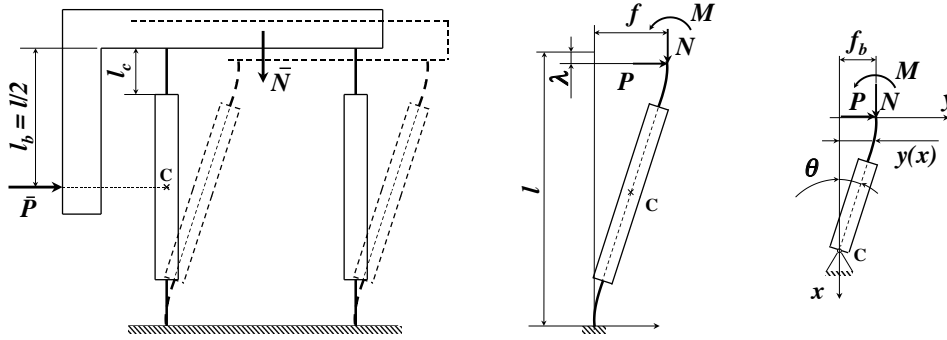


FIG. 5.20 – Modèle utilisé pour étudier le comportement sous charge de traction-compression de la table à quatre cols prismatiques.

Considérons encore une fois que la force $\bar{P}$ est appliquée au point B et qu'elle n'induit donc pas de forces de traction-compression dans les lames. Cette force translate le bloc mobile d'une distance f . La charge $\bar{N}$ étant appliquée au centre du bloc mobile, elle va se répartir de manière égale sur les deux bras, produisant sur chacun d'eux une force de compression $N = \bar{N}/2$. Isolons l'un des deux bras. Les efforts agissant sur ses extrémités sont : $P = \bar{P}/2$, $M = Pl/2$ et N . La lame étant en équilibre, ces trois efforts ne sont pas indépendants : la nullité de la somme des moments donne

$$M = \frac{Nf + Pl}{2}. \quad (5.79)$$

La distribution du moment ainsi que la géométrie du bras étant symétriques par rapport au point C situé au milieu du bras, nous pouvons en déduire que la déformée du bras sera également symétrique par rapport à C. Isolons à présent la moitié supérieure du bras, nous obtenons le système représenté à la figure 5.20. La flèche du demi-bras est $f_b = f/2$. La longueur du demi-bras est $l_b = l/2$. Avec les axes

placés comme sur la figure, la distribution du moment fléchissant le long de la poutre est :

$$M_x(x) = M - N(f_b - y(x)) - Px. \quad (5.80)$$

Nous pouvons en déduire l'équation différentielle de la déformée

$$y''(x) + \frac{N}{EI}y(x) = \frac{P}{EI}x - \frac{M}{EI} + \frac{Nf_b}{EI}, \quad (5.81)$$

qui est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants du type

$$y'' + k^2y = k_ax + k_b \quad (5.82)$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}} ; k_a = \frac{P}{EI} ; k_b = \frac{Nf_b - M}{EI}.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est du type

$$y_g = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (5.83)$$

Il est aisé de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y_p = ax + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{P}{N} \quad \text{et} \quad b = \frac{-Pl_b}{N}. \quad (5.84)$$

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de y_p et y_g :

$$y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + ax + b. \quad (5.85)$$

Sa dérivée est :

$$y'(x) = -kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx + a. \quad (5.86)$$

Les conditions aux extrémités de la lame sont connues :

$$y(0) = f_b ; y'(0) = 0 ; y'(\xi l_b) = -\theta = \frac{-y(\xi l_b)}{(1 - \xi)l_b}$$

Les deux premières conditions permettent de trouver

$$C_1 = f_b + \frac{Pl}{N} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{-P}{kN}. \quad (5.87)$$

Pour simplifier l'écriture de la troisième condition, posons

$$c = \cos k\xi l_b, \quad s = \sin k\xi l_b \quad \text{et} \quad t = (1 - \xi)l_b.$$

Nous obtenons alors l'égalité

$$-kf_b s - \frac{kPl_b}{N} - \frac{Pc}{N} + \frac{P}{N} = \frac{1}{t} \left(-f_b c - \frac{Pl_b c}{N} + \frac{Ps}{kN} - \frac{P\xi l_b}{N} + \frac{Pl_b}{N} \right).$$

Mettons en évidence P , nous obtenons

$$P = f_b \frac{N(ks - c)}{-ktsl_b - ct + t + lc - \frac{s}{k} + \xi l_b - l_b}, \quad (5.88)$$

ce qui nous permet de trouver la rigidité en translation d'un demi-bras de table à quatre cols prismatiques sous charge de compression $K_b = P/f_b$.

Or, sachant que $f = 2f_b$, la rigidité d'un bras en translation s'écrit $K = P/f = P/(2f_b) = K_b/2$, et sachant que $\bar{P} = 2P$ nous pouvons en déduire que la rigidité en translation d'une table à quatre cols prismatiques $\bar{K}$ est égale à la rigidité $\bar{K}_b$ d'un demi-bras : $\bar{K} = \bar{P}/f = 2P/f = 2K = K_b$. D'après (5.88) nous obtenons :

$$\boxed{\bar{K} = \frac{N(ks - c)}{-ktsl_b - ct + t + lc - \frac{s}{k} + \xi l_b - l_b}.} \quad (5.89)$$

Rigidité transverse en translation verticale

Calculons le déplacement λ sous l'effet de la charge N du demi-bras étudié plus haut. La charge sollicite le bras en flexion et en traction-compression. Nommons λ_{flex} le déplacement engendré par les efforts de flexion et λ_{comp} celui engendré par la traction-compression. Les efforts de flexion modifient la déformée du col prismatique ce qui provoque un raccourcissement

$$\lambda_{flex1} = \int_0^{\xi l_b} (y'(x))^2 dx, \quad (5.90)$$

de sa projection sur un axe vertical d'après (5.11) et sachant que $l_c = \xi l_b$. La modification de déformée induit une modification de l'angle du segment rigide, ce qui produit un déplacement vertical supplémentaire

$$\lambda_{flex2} = l_b(1 - \xi)(1 - \cos(\arctg y'(\xi l_b))). \quad (5.91)$$

Les efforts de traction-compression induisent un raccourcissement du col prismatique

$$\lambda_{comp} = \frac{Nl_c}{hbE} \quad (5.92)$$

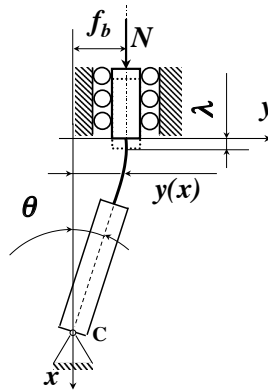


FIG. 5.21 – Rigidité transverse en translation verticale d'un demi-bras : $K_{cb} = N/\lambda$.

Le déplacement total est

$$\lambda = \lambda_{flex1} + \lambda_{flex2} + \lambda_{comp}. \quad (5.93)$$

La rigidité transverse du demi-bras est $K_{cb} = N/\lambda$. La rigidité transverse d'un bras entier est $K_c = N/(2\lambda)$, et la rigidité transverse de la table est $\bar{K}_c = 2K_c = K_{cb}$. Ainsi, la rigidité transverse de la table à quatre cols prismatiques est égale à la rigidité transverse d'un demi-bras :

$$\boxed{\bar{K}_c = \frac{N}{\lambda}}. \quad (5.94)$$

Il est fastidieux de calculer symboliquement cette rigidité. Il est par contre aisé d'effectuer ce calcul numériquement par ordinateur pour des grandeurs typiques. Ceci permet de connaître qualitativement le comportement en compression de la table à quatre cols prismatiques. La figure 5.22 nous montre l'allure de la caractéristique force-déformation ainsi que celle de la rigidité $\bar{K}_c$. Nous constatons que la rigidité transverse est d'autant plus faible que la flèche est importante et qu'elle est dégressive (la rigidité diminue lorsque la charge augmente).

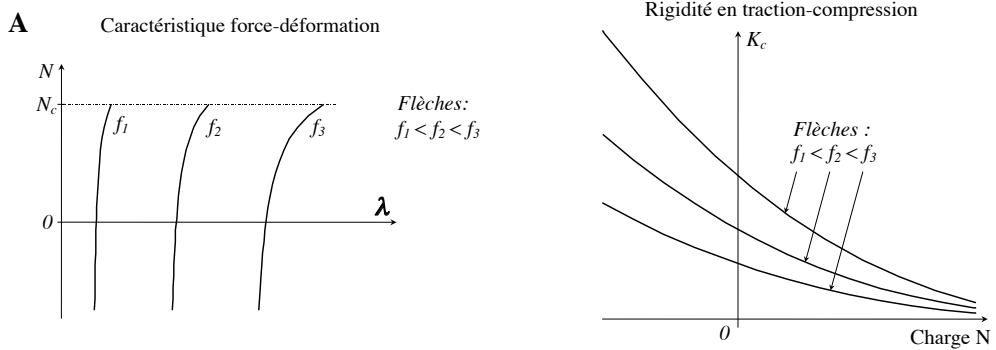


FIG. 5.22 – A : Caractéristique force-déformation en translation verticale. B : La rigidité transverse en translation verticale est la dérivée de la caractéristique force-déformation.

5.3.7 Optimisation

Imaginons que nous ayons à concevoir une table à quatre cols prismatiques selon un cahier des charges nous imposant un encombrement (longueur l et épaisseur b), une course (f) et un matériau (E et σ_{adm}). Il existe une infinité de combinaisons de paramètres ξ et h qui permettent de satisfaire ce cahier des charges. Nous cherchons les combinaisons qui

- **A** maximisent l'épaisseur des cols prismatiques, de manière à faciliter l'usinage et à diminuer la sensibilité aux tolérances ;
- **B** maximisent la charge critique ;
- **C** minimisent l'élancement des cols prismatiques, également pour faciliter l'usinage ;

- **D** maximisent la rigidité transverse en translation verticale ;
- **E** minimisent la rigidité en translation ;

Tous ces critères vont dans le sens soit d'une facilitation de la fabrication du guidage, soit d'une amélioration de ses propriétés mécaniques. Mais ils n'aboutissent pas tous à la même combinaison optimale de paramètres ξ et h . Dans les sections qui suivent (A à E) nous déterminons chaque optimum et discutons des compromis.

A Maximisation de l'épaisseur h

Pour une valeur donnée de ξ , la formule (5.71) nous donne l'épaisseur maximale compatible avec le cahier des charges :

$$h = \frac{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^2\sigma_{adm}}{3Ef}. \quad (5.95)$$

Respecter le critère A revient donc à coupler les paramètres ξ et h (FIG. 5.23).

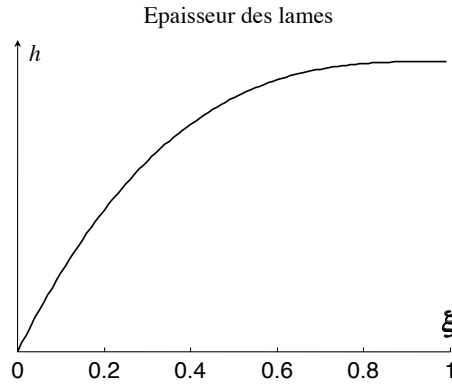


FIG. 5.23 – *Epaisseur maximale h compatible avec le cahier des charges imposé en fonction du paramètre ξ (5.95).*

B Maximisation de la charge critique $\bar{N}_c$

Pour une valeur donnée de ξ , la valeur de h qui maximise la charge critique est son maximum tel qu'il est défini en (5.95). Cette équation nous permet d'éliminer¹⁶ h de (5.72) et d'obtenir la charge critique en fonction du paramètre ξ :

$$N_c(\xi) = \frac{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)^3 bl^4 \pi^2 \sigma_{adm}^3}{81E^2 f^3}. \quad (5.96)$$

La fonction $N_c(\xi)$ est une courbe en cloche dont l'allure est visible à la figure 5.24. Pour trouver le maximum de cette fonction, dérivons-la :

$$\frac{d}{d\xi} N_c(\xi) = \frac{(3 - 3\xi + \xi^2)^2 (3 - 12\xi + 7\xi^2) bl^4 \pi^2 \sigma_{adm}^3}{81E^2 f^3}. \quad (5.97)$$

16. Rappelons que $I = bh^3/12$.

Cette dérivée possède plusieurs zéros. Celui qui nous intéresse est situé entre 0 et 1 :

$$\boxed{\xi_{optimal} = \frac{6 - \sqrt{15}}{7} \simeq 0.3.} \quad (5.98)$$

L'équation (5.95) nous donne l'épaisseur $h_{optimal}$ correspondant à $\xi_{optimal}$. Nous connaissons donc la combinaison de paramètres qui maximise la charge critique.

Cherchons quelle est la longueur des cols prismatiques correspondant à $\xi_{optimal}$. L'équation (5.68) nous donne :

$$l_{c\,optimal} = \frac{6 - \sqrt{15}}{7} \times \frac{l}{2} \simeq \frac{l}{6.58}. \quad (5.99)$$

La table dotée de la charge critique la plus élevée est celle dont la longueur des cols prismatiques l_c est égale à approximativement un septième de la longueur totale des bras.

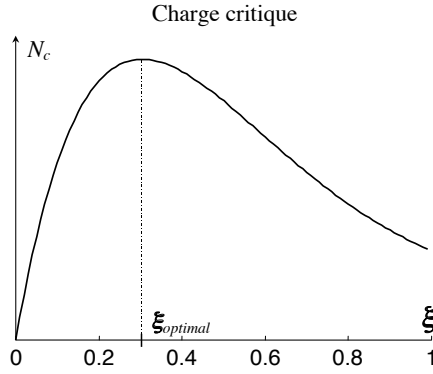


FIG. 5.24 – Charge critique en fonction du paramètre ξ . Il existe une valeur de ξ qui maximise la charge critique : $\xi_{optimal} \simeq 0.3$.

C Minimisation de l'élancement du profil du col ϵ

Nous définissons l'élancement des cols prismatiques comme étant le rapport entre leur longueur et leur épaisseur

$$\epsilon = \frac{l_c}{h}. \quad (5.100)$$

Ainsi, pour une valeur donnée de ξ , la valeur de h qui minimise l'élancement est son maximum tel qu'il est défini en (5.95). En remplaçant dans (5.100) h par (5.95) et l_c par $\xi l/2$, nous obtenons l'élancement en fonction de ξ :

$$\boxed{\epsilon(\xi) = \frac{3Ef}{2(3 - 3\xi + \xi^2)l\sigma_{adm}}.} \quad (5.101)$$

Sur l'intervalle $0 < \xi \leq 1$ cette fonction est monotone croissante (FIG. 5.25), c'est-à-dire que l'élancement des cols flexibles augmente lorsque le paramètre ξ augmente. En pratique l'on a donc intérêt à diminuer ξ pour minimiser l'élancement.

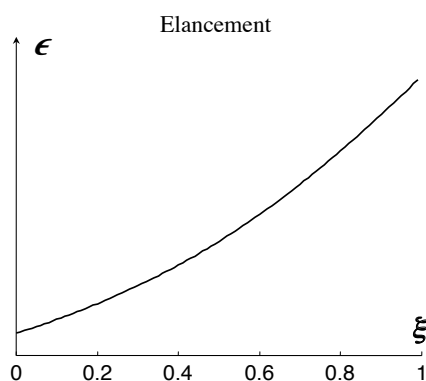


FIG. 5.25 – *Elancement des cols prismatiques en fonction du paramètre ξ .*

D Maximisation de la rigidité transverse en translation verticale $\bar{K}_c$

Pour une valeur donnée de ξ , la valeur de h qui maximise la charge critique est son maximum tel qu'il est défini en (5.95). A la figure 5.8, nous avons tracé l'allure de la courbe de la rigidité transverse en translation verticale K_c (§ 5.3.6) de la table en fonction de la charge N . En utilisant la relation (5.95), nous pouvons, de la même manière, tracer l'allure de la courbe de la rigidité transverse en fonction du paramètre ξ pour différentes charges N (FIG. 5.26). Nous constatons que ce critère dicte le choix d'un paramètre ξ qui soit aussi petit que possible.

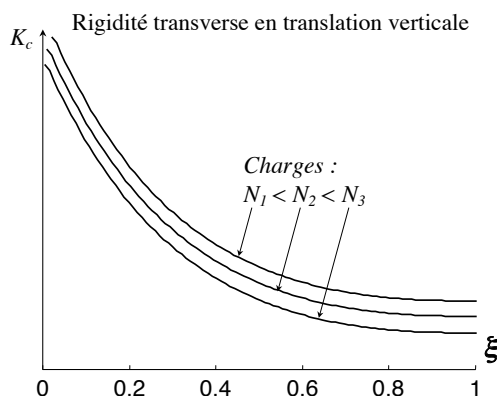


FIG. 5.26 – *Allure de la rigidité transverse en translation verticale K_c en fonction du paramètre ξ . Nous constatons que plus ξ est petit, plus la rigidité est grande.*

E Minimisation de la rigidité en translation

La formule (5.70) nous indique que pour minimiser la rigidité en translation il faut maximiser ξ et minimiser h .

Cette dernière contrainte sur h est contraire à celle obtenue avec les quatre précédents critères (A à D). Si nous renonçons à la satisfaire et qu'au lieu de minimiser h nous le maximisons selon (5.95), alors nous obtenons la rigidité en translation en

fonction de ξ :

$$\bar{K}_o = \frac{2\xi^2(3 - 3\xi + \xi^2)^2 bl^3 \sigma_{adm}^3}{27E^2 f^3}. \quad (5.102)$$

Cette fonction est tracée à la figure 5.27. Nous constatons que la rigidité en translation est d'autant plus faible que ξ est petit.

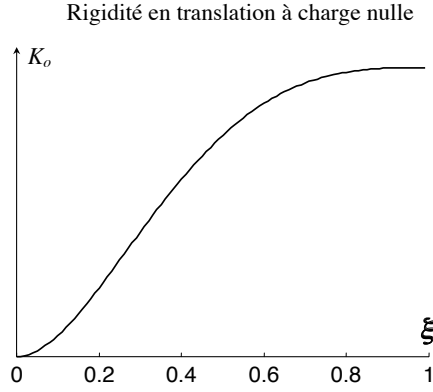


FIG. 5.27 – Rigidité en translation à charge N nulle en fonction du paramètre ξ (5.102). Plus ξ est petit, plus la rigidité en translation est faible.

Discussion des compromis

Les quatre premiers critères dictent une maximisation du paramètre h . Nous avons montré que respecter cette contrainte revient à coupler les deux paramètres ξ et h (5.95). Ainsi, la recherche de la combinaison optimale des deux paramètres se ramène à la recherche d'un seul paramètre optimal $\xi_{optimal}$.

Les critères C, D et E dictent tous de minimiser ξ . Mais comme le montre le critère A, plus ξ est petit, plus l'épaisseur h des cols diminue, or il existe une limite technologique qui rend impossible l'usinage de cols flexibles dont l'épaisseur est inférieure à un certain seuil. C'est cette limite technologique qui fixe la valeur de $\xi_{optimal}$ pour ces trois critères.

Le critère B dicte de choisir $\xi_{optimal} \simeq 0.3$. Si l'épaisseur h correspondante peut être usinée, alors c'est cette valeur de ξ qu'il faut choisir. Si l'épaisseur h correspondante est trop petite pour être usinée, alors la limite technologique fixe à nouveau la valeur de ξ et l'optimum se confond avec celui des critères C, D et E.

Dans la pratique, la priorité est généralement donnée aux critères A, C, D et E plutôt qu'à B. Donc le choix des paramètres ξ et h s'effectue de la manière suivante :

- Détermination de la plus faible épaisseur h usinable avec la technologie utilisée¹⁷ (en prenant en compte les tolérances).
- Calcul du paramètre ξ correspondant, à l'aide de la formule (5.95).
- Calcul de la longueur du col à l'aide de la formule (5.68).

17. Les limites technologiques sont étudiées au chapitre 7. Les épaisseurs les plus faibles usinables par électroérosion à fil varient typiquement entre 10 μm et 100 μm .

5.4 Table à quatre cols circulaires

Nous avons montré à la section précédente que le fait de rigidifier la partie centrale des lames de la table à deux lames parallèles pour la transformer en table à quatre cols prismatiques permet d'améliorer ses caractéristiques en termes de charge admissible et de rapport de rigidités. Le col prismatique présente toutefois un inconvénient important : il s'agit de la présence d'angles vifs qui agissent comme des concentrateurs de contraintes. Pour pallier cet inconvénient, des cols de profils différents peuvent être utilisés. Une première solution consiste à mettre des congés de raccordement aux encastrement du col prismatique dans les segments rigides (FIG. 5.29 c). Une seconde solution très courante consiste à utiliser des cols de profil circulaire (FIG. 5.29 a). Cette géométrie présente l'avantage d'être simple à décrire : trois paramètres e , r et b suffisent pour la définir entièrement. Elle est très simple à programmer sur la commande numérique des machines d'usinage ou peut être réalisée par simple perçage. D'autres géométries relativement simples telles que des profils elliptiques (FIG. 5.29 d) ou hyperboliques (Letonje & Janezic 1999) peuvent également être utilisées, mais elles ne sont pas abordées ici.

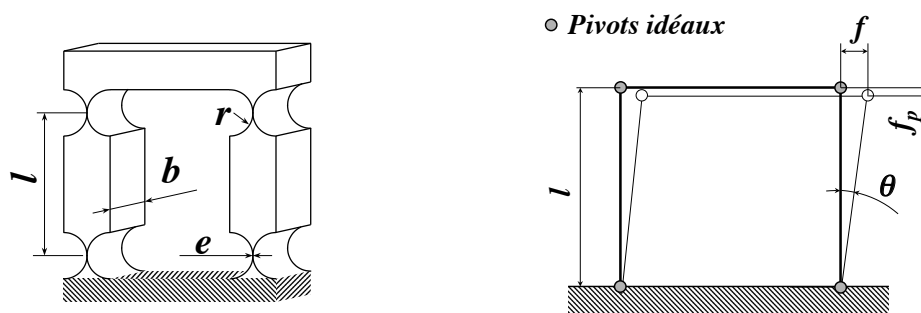


FIG. 5.28 – Table à quatre cols circulaires et modèle géométrique simplifié : e épaisseur du col en sa partie la plus étroite ; r rayon des encoches ; b largeur ; l longueur des bras entre les centres des cols.

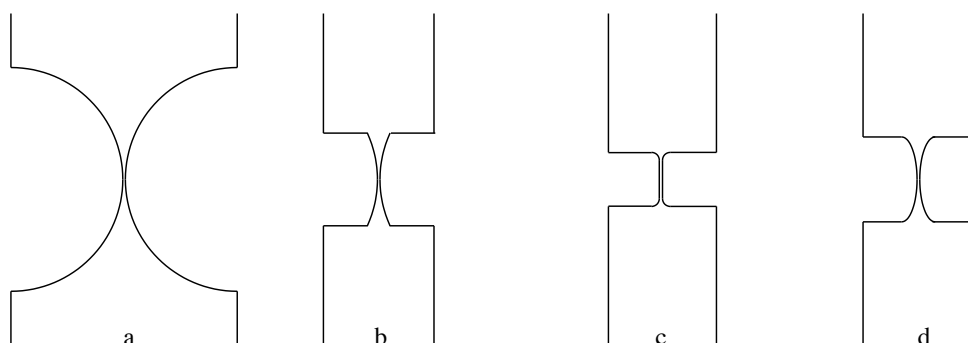


FIG. 5.29 – Différents profils de cols qui atténuent les effets de concentration de contraintes : (a) col circulaire ; (b) col circulaire tronqué ; (c) col prismatique avec congés de raccordement ; (d) col elliptique.

Rigidité en translation

FORMULE SIMPLIFIÉE : Pour modéliser simplement cette structure nous faisons les hypothèses suivantes :

- Les cols circulaires se comportent comme des pivots ponctuels idéaux dont la rigidité angulaire est $K_{\alpha M}$ et dont les autres rigidités sont infinies (FIG. 5.28).
- Les angles de rotation des pivots sont suffisamment faibles pour les confondre avec leur sinus : $\sin \theta \simeq \theta$.

En adoptant ce modèle simplifié, la rigidité en translation se calcule très aisément par une approche énergétique. Pour un déplacement d'une longueur f du bloc mobile, les quatre pivots fléchissent d'un angle $\theta \simeq f/l$. Sachant que le travail mécanique fourni par la force F pour engendrer le déplacement f est égal à l'énergie élastique stockée dans les quatre pivots, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2}Kf^2 \simeq 4 \times \frac{1}{2}K_{\theta}\theta^2 \quad (5.103)$$

d'où l'on tire la rigidité linéaire de la table en fonction de la rigidité angulaire des pivots

$$K \simeq \frac{4K_{\theta}}{l^2}. \quad (5.104)$$

En remplaçant K_{θ} par (4.20) nous obtenons

$$K \simeq \frac{8Ebe^{2.5}}{9\pi l^2 \sqrt{r}}. \quad (5.105)$$

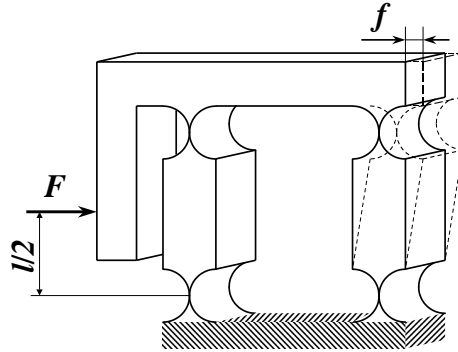


FIG. 5.30 – Rigidité en translation et course de la table à quatre cols circulaires : pour une force horizontale F , appliquée sur la plate-forme mobile, engendrant un déplacement f , nous avons une rigidité en translation $K = F/f$. La course linéaire f_{adm} est le déplacement qui engendre des contraintes dans les cols égales à σ_{adm} .

LOIS DE SIMILITUDE : $K^* = E^*$, $K^* = b^*$, $K^* \simeq 1/l^{*2}$, $K^* \simeq e^{*2.5}$, $K^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$.

FORMULE EXACTE : En réalité, les cols circulaires ne se comportent pas comme des pivots ponctuels mais comme des poutres de section variable sollicitées en flexion.

Tout comme nous avons calculé la rigidité en translation de la table à quatre cols prismatiques (§ 5.3.2 et FIG. 5.17), nous pouvons déterminer la rigidité en translation de la table à quatre cols de profil quelconque

$$K = \frac{2}{\frac{L^2}{2K_{\theta M}} - \frac{L}{K_{\theta P}} - \frac{L}{K_{fM}} + \frac{2}{K_{fP}}}. \quad (5.106)$$

Les termes K_{fP} , $K_{\alpha P}$, K_{fM} et $K_{\alpha M}$ caractérisent les cols (§ 4.1.2). Nous avons calculé ces termes dans le cas des cols circulaires (sect. 4.5). Pour le tracé de l'abaque de la figure A.8 nous utilisons cette formule exacte.

ABAQUE : La rigidité en translation est : $K = K_n Eb/l^2$ où K_n est la rigidité normalisée qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.8.

Course en translation

FORMULE SIMPLIFIÉE : Connaissant la course angulaire d'un col circulaire (4.21), le modèle simplifié nous permet de calculer la course en translation

$$f \simeq \frac{3\pi l \sigma_{adm} r^{0.5}}{4Ee^{0.5}}. \quad (5.107)$$

LOIS DE SIMILITUDE : $f^* = \sigma_{adm}^*$; $f^* = 1/E^*$; $f^* \simeq l^*$; $f^* \simeq 1/\sqrt{e^*}$; $f^* \simeq \sqrt{r^*}$.

ABAQUE : La course est : $f = f_n \sigma_{adm} l/E$ où f_n est la course normalisée qui est obtenue graphiquement sur l'abaque de la figure A.9.

Déplacement vertical

Selon le modèle géométrique simplifié, le bloc mobile se translate le long d'une trajectoire circulaire. Un déplacement horizontal f du bloc mobile s'accompagne d'un déplacement vertical

$$f_v = l - \sqrt{l^2 - f^2} = l(1 - \cos \theta) \simeq \frac{l\theta^2}{2}. \quad (5.108)$$

Rigidité transverse en translation

FORMULE SIMPLIFIÉE : Selon le même modèle géométrique simplifié que celui utilisé pour la rigidité en translation de la table à quatre cols circulaires, nous pouvons déterminer sa rigidité transverse en translation

$$K^t \simeq \frac{4K_{\alpha M}^t}{l^2} \quad (5.109)$$

où $K_{\alpha M}$ est la rigidité angulaire transverse d'un col (4.26). Nous faisons ici l'hypothèse que la partie massive des bras est infiniment rigide si elle est comparée à la

rigidité des cols. Cette hypothèse est raisonnable dans le cas de la flexion des cols dans la direction naturelle. Par contre, dans la direction perpendiculaire, la rigidité des cols est beaucoup plus élevée et il devient abusif de négliger la flexion dans la partie massive des bras. Les rigidités obtenues risquent d'être supérieures à la réalité. Pour obtenir une meilleure approximation de la déflexion f , il faut y ajouter la flèche et l'angle que fait la partie massive des bras, qui n'est autre qu'une poutre prismatique en flexion.

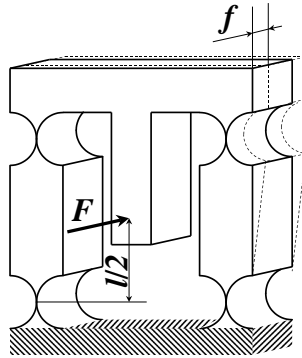


FIG. 5.31 – *Rigidité transverse en translation de la table à quatre cols circulaires : soit une force horizontale F appliquée sur la plate-forme mobile à mi-hauteur des bras, dont la direction est normale au déplacement naturel de la table. Cette force engendre une translation de la plate-forme d'une distance f . Nous définissons la rigidité transverse en translation de la table comme étant : $K^t = F/f$.*

5.5 Conclusion des guidages en translation

Au cours de cette étude des guidages en translation les plus courants nous avons montré que le fait de rigidifier la partie centrale des lames de la table à deux lames parallèles et d'affiner leur épaisseur en conséquence pour maintenir la course admissible inchangée permet d'augmenter les rapports de rigidité de ce guidage. Par rapport aux cols prismatiques, les cols circulaires présentent en outre l'avantage de ne pas présenter d'angles vifs agissant comme des concentrateurs de contrainte. Ainsi, nous préconisons l'utilisation de tables à quatre cols circulaires lorsque le procédé de fabrication le permet.

Chapitre 6

Guidages en rotation

Ce chapitre traite des guidages en rotation les plus simples et les plus courants : le *pivot à lames croisées séparées*, le *pivot à lames croisées non séparées*, le *pivot RCC à lames*, le *pivot RCC à quatre cols* et le *pivot croisé à quatre cols*. Pour chacune de ces structures nous calculons la rigidité et la course angulaires, nous calculons la translation parasite qui accompagne la rotation, nous discutons de l'effet des charges radiales sur la rigidité angulaire et nous discutons des charges admissibles. La comparaison entre ces différents pivots nous conduit aux conclusions suivantes : à encombrement et course égaux, les pivots à cols présentent une plus grande rigidité radiale que les pivots à lames. Ceci nous conduit à préconiser l'utilisation des pivots à cols. Parmi eux, le *pivot croisé à quatre cols* est celui qui a la plus grande course angulaire (elle est proche du double de la course des cols qui le constituent). Néanmoins, ce pivot croisé présente l'inconvénient d'avoir deux chaînes cinématiques qui se croisent, ce qui ne permet pas de le réaliser dans un seul plan et complique son usinage. Le *pivot RCC à quatre cols*, quant à lui, peut être réalisé dans un seul plan. Il présente par contre l'inconvénient d'avoir une course angulaire qui, au mieux, est deux fois plus faible que celle du pivot croisé. La translation parasite et le déplacement du centre instantané de rotation du pivot RCC et du pivot croisé sont voisins.

6.1 Pivot à deux lames croisées séparées

Ce guidage est couramment utilisé pour réaliser un pivot flexible à partir d'éléments discrets (lames et blocs rigides assemblés). Il est constitué de deux lames disposées orthogonalement reliant le bloc mobile au bloc fixe. Cette structure constitue un pivot dont l'axe de rotation O coïncide approximativement avec la droite d'intersection entre les deux plans définis par les lames au repos (non fléchies).

Modèle géométrique simplifié

Pour ce qui est de l'étude rigoureuse de la trajectoire suivie par le bloc mobile ainsi que de la déformée exacte des lames nous renvoyons le lecteur à la très vaste littérature sur le sujet (sect. 2.3). Nous nous contentons ici de rappeler que le pivot à lames croisées ne pivote pas exactement autour de l'axe O . La rotation du bloc mobile d'un angle θ s'accompagne d'une translation parasite (vecteur $\vec{PP'}$, FIG. 6.2).

Selon [Wittrick \(1951\)](#) nous avons ¹

$$PP' = \frac{\sqrt{2}}{12} l\theta^2 \simeq 0.118 l\theta^2. \quad (6.1)$$

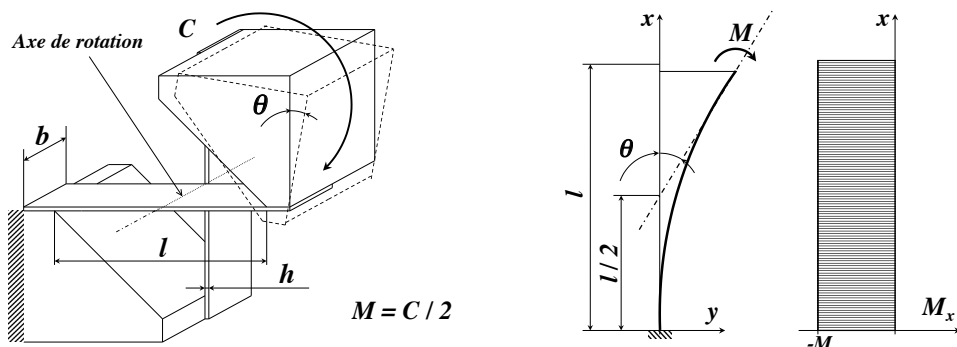


FIG. 6.1 – Pivot à deux lames croisées séparées : h épaisseur des lames ; b largeur des lames ; l longueur des lames d'un encastrement à l'autre. Pour de faibles angles de rotation, nous pouvons faire l'hypothèse que les lames se déforment selon des arcs de cercle, donc qu'elles sont en flexion pure.

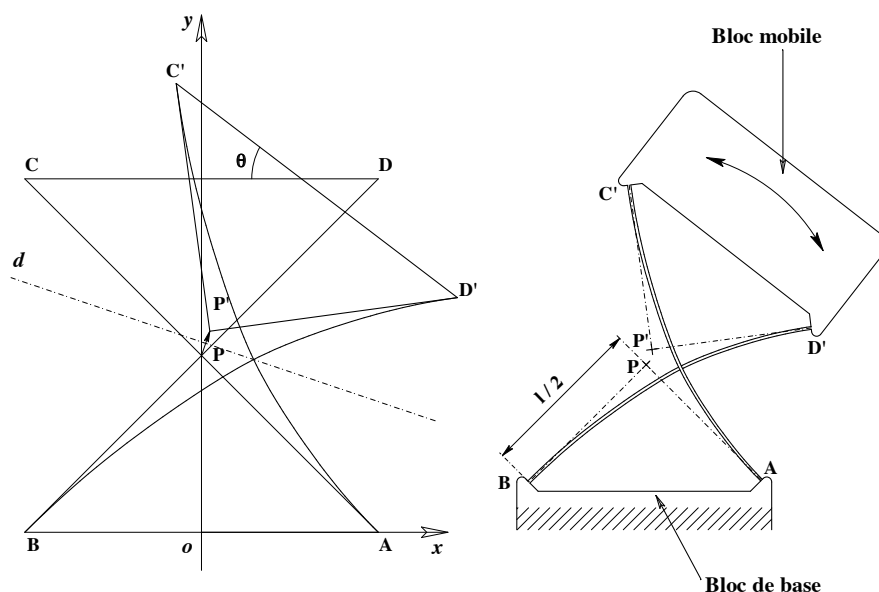


FIG. 6.2 – Translation parasite du pivot à lames croisées séparées : vecteur $\vec{PP'}$.

Rigidité angulaire

Pour de faibles angles de pivotement, nous pouvons faire l'hypothèse que les lames se déforment selon des arcs de cercle, auquel cas la rigidité angulaire $K_\theta = C/\theta$ du

1. [Haringx \(1949\)](#) et [Mesnager \(1903\)](#) donnent respectivement les formules $PP' = 0.112 l\theta^2$ et $PP' = 0.125 l\theta^2$ qui correspondent à 6% près à (6.1).

pivot à deux lames croisées est le double de celle d'une lame simple en flexion pure (FIG. 6.1) car les deux lames travaillent en parallèle.

$$\boxed{K_\theta = \frac{2EI}{l} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}} \quad (6.2)$$

Pour de grands angles de pivotement, le fait que les lames ne se déforment pas exactement selon des arcs de cercle a pour conséquence de faire augmenter la rigidité. Selon Haringx (1949), pour un pivotement de 45° , la rigidité angulaire est supérieure de 10% à la valeur donnée par (6.2).

Course angulaire

Si nous faisons l'hypothèse que les lames se déforment selon des arcs de cercle alors la course angulaire du pivot à deux lames croisées est la même que celle d'une lame simple soumise à un moment de flexion pure (3.3) :

$$\boxed{\theta_{adm} = \frac{2\sigma_{adm}l}{Eh}} \quad (6.3)$$

Pour de grands angles de pivotement, le fait que les lames ne se déforment pas exactement selon des arcs de cercles a pour conséquence de faire augmenter les contraintes dans les lames. Selon Haringx (1949), pour un pivotement de 45° , les contraintes sont supérieures de 30% à la valeur donnée par (6.3).

6.2 Pivot à deux lames croisées non séparées

Ce pivot est l'homologue monolithique du pivot à deux lames croisées séparées. Cette structure constitue un pivot dont l'axe de rotation coïncide approximativement avec la droite d'intersection entre les deux plans définis par les lames au repos (non fléchies).

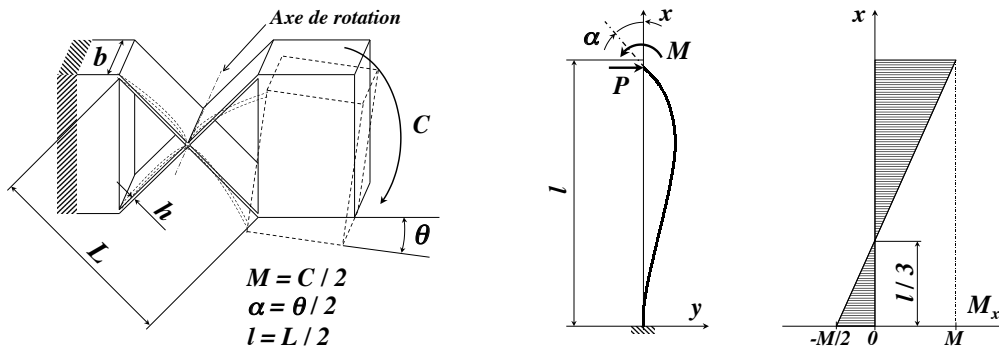


FIG. 6.3 – Pivot à deux lames croisées non séparées : h épaisseur des lames ; b largeur des lames ; L longueur des lames d'un encastrement à l'autre ; l demi-longueur des lames.

Rigidité angulaire

De l'étude du cas de charge d'une demi-lame² (FIG. 6.3) nous déduisons que la rigidité $K_\theta = C/\theta$ est

$$K_\theta = \frac{8EI}{L} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.4)$$

Nous remarquons que cette rigidité est le quadruple de celle du pivot à deux lames croisées séparées de mêmes dimensions.

Course angulaire

De l'étude du cas de charge d'une demi-lame (FIG. 6.3) nous déduisons que la course admissible est

$$\theta_{adm} = \frac{\sigma_{adm} L}{2Eh}. \quad (6.5)$$

Nous remarquons que cette course est le quart de la course du pivot à deux lames croisées séparées de mêmes dimensions.

2. Pour de faibles angles de rotation nous pouvons faire l'hypothèse que l'axe de rotation reste parfaitement fixe, ce qui conduit au cas de charge d'une poutre en flexion simple dont la flèche est nulle et la rotation de l'extrémité égale à α .

6.3 Pivot RCC à deux lames

Le pivot RCC³ est un guidage dont l'axe de rotation coïncide approximativement avec la droite d'intersection entre les deux plans définis par les lames au repos (non fléchies). La différence entre cette structure et les pivots à lames croisées séparées et non séparées réside dans la position relative de l'axe de rotation et des lames : dans le cas du pivot RCC, l'axe de rotation se trouve à l'extérieur de la structure (à un endroit où il peut ne pas y avoir de matière), alors que dans le cas des deux autres pivots, l'axe de rotation passe au travers des lames.

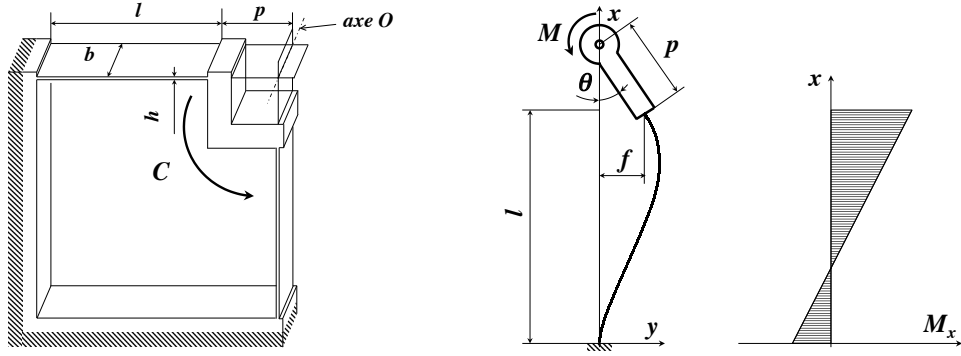


FIG. 6.4 – Pivot RCC à deux lames : h épaisseur des lames ; b largeur des lames ; l longueur des lames d'un encastrement à l'autre ; p distance entre l'axe de rotation O (droite d'intersection entre les deux plans définis par les lames) et l'extrémité des lames.

Rigidité angulaire

De l'étude du cas de charge de l'une des lames⁴ (FIG. 6.3) nous déduisons que la rigidité $K_\theta = C/\theta$ est

$$K_\theta = \frac{8EI}{l} \left(1 + \frac{3p}{l} + \frac{3p^2}{l^2} \right) \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.6)$$

Course angulaire

La course angulaire du pivot RCC à deux lames est

$$\theta_{adm} = \frac{\sigma_{adm} l^2}{E(2hl + 3hp)} \quad (6.7)$$

3. *RCC* est l'abréviation des mots anglais *Remote Center Compliance* (centre de rotation déporté). Ce terme indique que le centre de pivotement de l'articulation est situé à l'extérieur de la structure, à un endroit où il peut ne pas y avoir de matière.

4. Pour de faibles angles de rotation nous pouvons faire l'hypothèse que l'axe de rotation reste parfaitement fixe, ce qui nous conduit au cas de charge d'une poutre en flexion simple dont la flèche et la rotation de l'extrémité sont couplées : $f = p \sin \theta \simeq p\theta$.

REMARQUES

- La rigidité angulaire du pivot RCC à deux lames est *supérieure* à celle du pivot à deux lames croisées séparées ou non séparées réalisé avec les mêmes lames, et ce d'autant plus que le rapport p/l est grand.
- La course angulaire du pivot RCC à deux lames est *inférieure* à celle du pivot à deux lames croisées séparées ou non séparées réalisé avec les mêmes lames, et ce d'autant plus que le rapport p/l est grand.

6.4 Pivot RCC à quatre cols

Le pivot RCC à quatre cols circulaires constitue un pivot dont l'axe de rotation P coïncide approximativement avec la droite d'intersection entre les deux plans définis, pour chacun des bras, par les axes de rotation des cols. l et $\eta \times l$ sont les deux paramètres principaux définissant la géométrie. Si nous ramenons la longueur l à 1, les angles restent inchangés, et les longueurs sont divisées par l . Nous n'avons alors plus qu'un seul paramètre définissant la géométrie :

$$0 < \eta < 1. \quad (6.8)$$

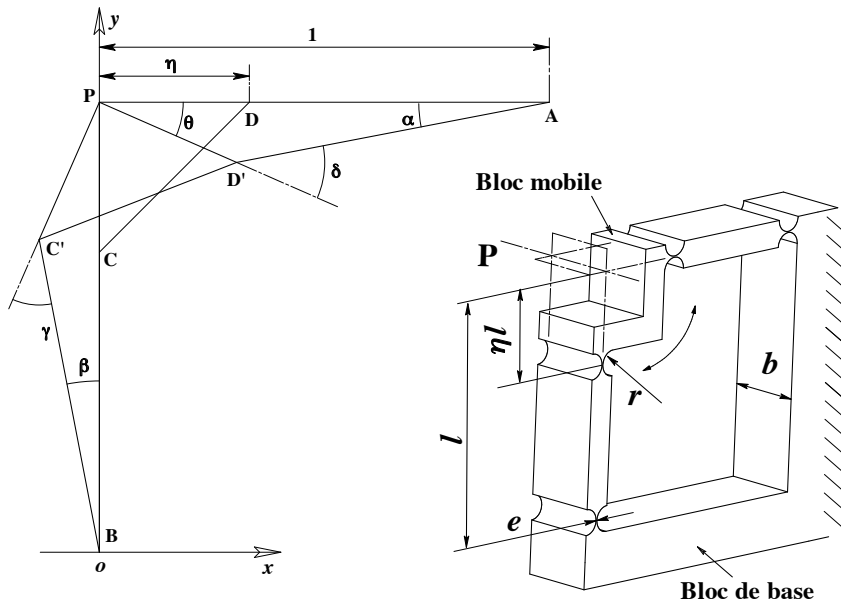


FIG. 6.5 – Pivot RCC à quatre cols circulaires et modèle géométrique simplifié (longueur unitaire : $l = 1$) : e épaisseur des cols en leur partie la plus étroite ; r rayon des encoches ; b largeur ; l distance entre le centre de rotation P et les pivots A et B ; $\eta \times l$ distance entre P et les pivots C et D .

Modèle géométrique simplifié

Pour modéliser simplement cette structure, nous faisons les hypothèses suivantes (FIG. 6.5) :

- Les cols circulaires se comportent comme des pivots ponctuels idéaux identiques dont la rigidité angulaire est $K_{\alpha M}$ et dont les autres rigidités sont infinies.
- Les angles de rotation des cols et du bloc mobile du pivot RCC sont suffisamment faibles pour supposer que :
 - le bloc mobile pivote exactement autour de l'axe P ,
 - les pivots de la base (respectivement les pivots du bloc mobile) tournent du même angle : $\alpha \simeq \beta$ et $\delta \simeq \gamma$,
 - les angles peuvent être confondus avec leur sinus : $\sin \alpha \simeq \alpha$; $\sin \delta \simeq \delta$; $\sin \theta \simeq \theta$.

Nous avons alors, pour une rotation du bloc mobile d'un angle θ , une rotation des pivots A et B d'un angle α , et une rotation des pivots C et D d'un angle δ avec

$$\alpha = \frac{\eta}{1-\eta}\theta \quad \text{et} \quad \delta = \left(1 + \frac{\eta}{1-\eta}\right)\theta \quad (6.9)$$

Rigidité angulaire

Le modèle géométrique simplifié permet de calculer la rigidité angulaire $K_{\theta}^{\text{RCC}} = M/\theta$ par une approche énergétique : le travail mécanique à fournir pour faire pivoter le bloc mobile d'un angle θ est égal à l'énergie élastique stockée dans les quatre pivots idéaux

$$\frac{1}{2}K_{\alpha M}^{\text{RCC}}\theta^2 = 2\left(\frac{1}{2}K_{\alpha M}\alpha^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}K_{\alpha M}\delta^2\right). \quad (6.10)$$

En utilisant (6.9) nous obtenons

$$\boxed{K_{\theta}^{\text{RCC}} = K_{\alpha M} \left(4\frac{\eta^2}{(1-\eta)^2} + 4\frac{\eta}{(1-\eta)} + 2 \right)} \quad (6.11)$$

où $K_{\alpha M}$ est la rigidité angulaire de l'un des pivots à col circulaire (4.20).

Course angulaire

D'après les équations (6.9) l'on a toujours $\delta \geq \alpha$. Ce sont donc les pivots C et D qui sont les plus sollicités lors de la rotation du bloc mobile et c'est leur course angulaire qui limite la course angulaire θ_{adm} de l'ensemble du pivot RCC.

$$\theta_{adm} = \frac{\alpha_M}{\frac{\eta}{1-\eta} + 1} \quad (6.12)$$

où α_M est la course angulaire des pivots C et D (4.21).

REMARQUES : la course angulaire du pivot RCC est toujours inférieure à la course des pivots qui le constituent, et ce d'autant plus que η est proche de 1. Si η tend vers 0, la course du pivot RCC tend vers la course des pivots qui le constitue (C et D).

Modèle géométrique exact

En réalité le pivot RCC ne pivote pas exactement autour de l'axe P : sa rotation d'un angle θ s'accompagne d'une translation parasite (vecteur $\vec{PP'}$) d'autant plus grande que le pivot s'écarte de sa position nominale. De même, le centre instantané de rotation, qui serait idéalement confondu avec P se déplace (vecteur $\vec{PI'}$).

Pour connaître l'amplitude des déplacements parasites nous utilisons le modèle géométrique montré à la figure 6.6. Nous faisons à nouveau l'hypothèse que les cols se comportent comme des pivots ponctuels idéaux, par contre nous ne recourons plus aux approximations des petits angles utilisées dans le modèle simplifié. Les angles de rotation des quatre pivots sont tous différents et sont liés par les relations :

$$\gamma = \beta + \theta \quad \text{et} \quad \delta = \alpha + \theta. \quad (6.13)$$

Le centre instantané de rotation I' est l'intersection des droites (AD') et (BC').

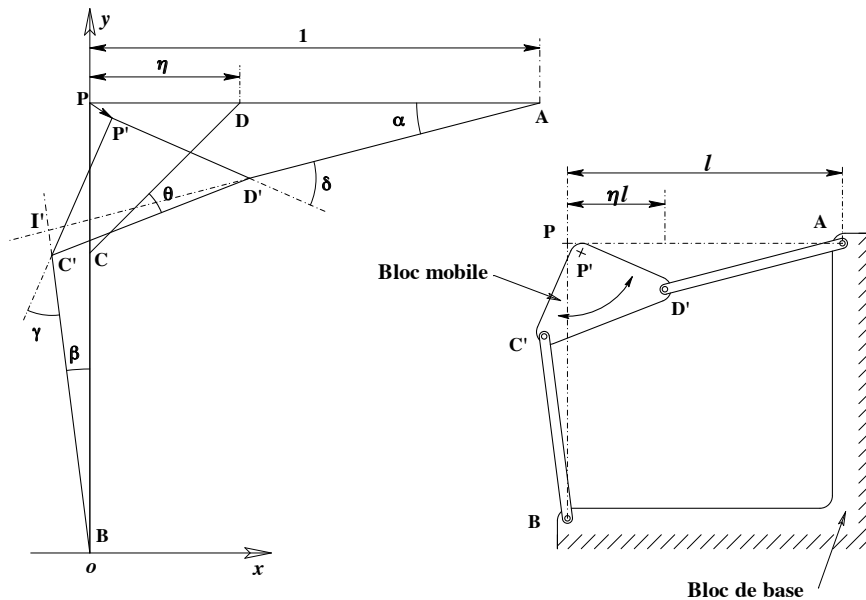


FIG. 6.6 – Géométrie exacte du pivot RCC (avec l'hypothèse que les pivots sont ponctuels). Position nominale : A B C D P. Position après rotation d'un angle θ : A' B' C' D' P'.

Nous avons tracé les angles de rotation des quatre pivots en fonction de l'angle de rotation θ du bloc mobile (FIG. 6.7). Cette figure montre également la norme des vecteurs $\vec{PP'}$ et $\vec{PI'}$ en pour cent de l . Pour ce tracé nous avons pris⁵ $\eta = 1/4$. Par exemple, pour une rotation du bloc mobile d'un angle de 15° , les pivots A, B, C et D tournent respectivement des angles suivants : $\alpha = 6^\circ$, $\beta = 4^\circ$, $\gamma = 19^\circ$ et $\delta = 21^\circ$. Le point P se translate d'une distance égale à 1.6% de l ($PP' = 1.6 \times l/100$). Le centre instantané de rotation se déplace d'une distance égale à 12% de l ($PI' = 12 \times l/100$).

5. Nous avons vu qu'il est judicieux de choisir le paramètre η aussi proche que possible de 0 pour minimiser le débattement angulaire des pivots. Ce sont des raisons pratiques de réalisation et d'interférences mécaniques qui limitent la valeur de ce paramètre. Nous avons choisi la valeur raisonnable de $1/4$ pour tracer le graphique de la figure 6.7.

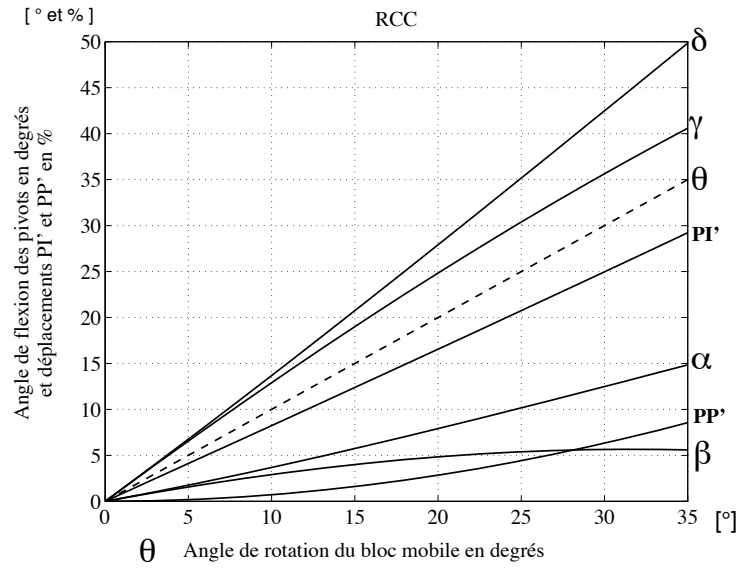


FIG. 6.7 – Débattements angulaires des quatre pivots en fonction de l'angle θ de rotation du bloc mobile et normes des vecteurs $\vec{PP'}$ et $\vec{PI'}$ en % de l (pour $l = 1$, et $\eta = 1/4$).

6.5 Pivot croisé à quatre cols

Le pivot croisé à quatre cols circulaires constitue un pivot dont l'axe de rotation P coïncide approximativement avec la droite d'intersection entre les deux plans définis, pour chacun des bras, par les axes de rotation des cols. l est le principal paramètre définissant la géométrie du pivot. Si nous ramenons la longueur l à 1, les angles restent inchangés, et les longueurs sont divisées par l .

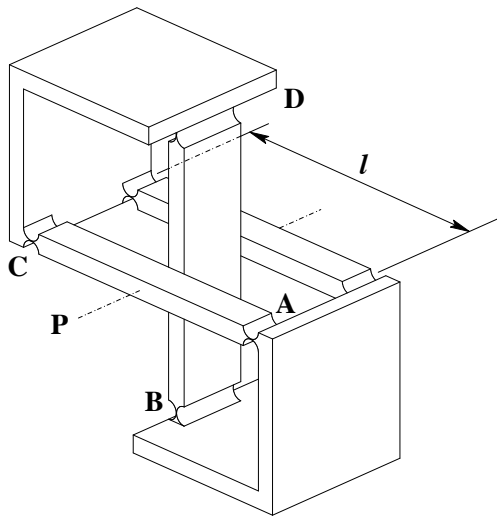


FIG. 6.8 – Pivot croisé à quatre cols.

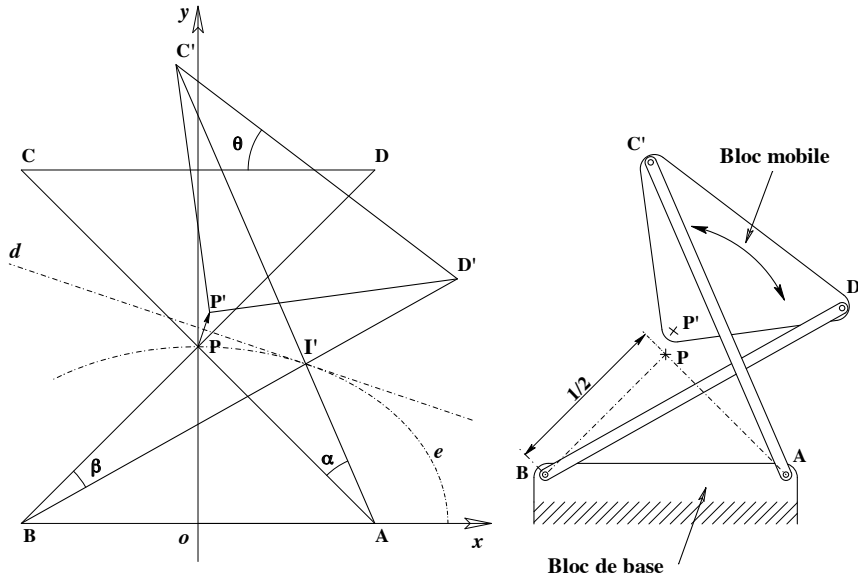


FIG. 6.9 – Modèle géométrique du pivot croisé à quatre cols. Position nominale : A B C D P. Position après rotation d'un angle θ du bloc mobile : A B C' D' P'. Vecteur translation parasite : $\vec{PP'}$. Vecteur déplacement du centre instantané de rotation : $\vec{PI'}$.

Modèle géométrique

En position nominale, la position du bloc mobile est définie par C D P (FIG. 6.9). Après une rotation d'un angle θ , la position devient C' D' P'. Le quadrilatère A B C' D' est un trapèze qui possède un axe de symétrie : d . Ainsi nous avons $I'A = I'D'$ et $I'B = I'C'$, d'où $I'B + I'A = I'B + I'D' = 1$. Nous pouvons en déduire que le lieu géométrique du centre instantané de rotation I' est une ellipse (e) dont l'équation dans le repère oxy est

$$4x^2 + 8y^2 = 1. \quad (6.14)$$

La symétrie du trapèze nous permet également de montrer que les pivots A et D (respectivement B et C) tournent du même angle α (resp. β) et que ces deux angles sont liés à l'angle de rotation du bloc mobile par la relation remarquable

$$\boxed{\alpha + \beta = \theta.} \quad (6.15)$$

La rotation du bloc mobile s'accompagne d'une translation parasite caractérisée par le vecteur $\vec{PP'}$. Soit $X_{I'}$ et $Y_{I'}$ les coordonnées du point I' . Nous avons

$$\frac{X_{I'}}{l} = \frac{\tan(\theta/2)}{\sqrt{2 + 4(\tan(\theta/2))^2}} = S \quad \text{et} \quad \frac{Y_{I'}}{l} = \frac{\sqrt{1 - 4S^2}}{2\sqrt{2}}. \quad (6.16)$$

Soit $X_{PP'}$ et $Y_{PP'}$ les coordonnées de $\vec{PP'}$. Nous avons

$$\frac{X_{PP'}}{l} = \frac{S(-1 + \sqrt{1 - 4S^2})}{-1 + 2S^2} \quad \text{et} \quad \frac{Y_{PP'}}{l} = \frac{-1 + 4S^2 + \sqrt{1 - 4S^2}}{\sqrt{2}(1 - 2S^2)}. \quad (6.17)$$

La norme de $\vec{PP'}$ est

$$\frac{PP'}{l} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{1 - 4S^2}}{-1 + 2S^2}}. \quad (6.18)$$

L'angle β de débattement des pivots B et C en fonction de l'angle θ de rotation du bloc mobile s'écrit

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \arccotg \frac{1 + 2\sqrt{2}S}{\sqrt{1 - 4S^2}}. \quad (6.19)$$

L'angle α de débattement des pivots A et D en fonction de l'angle θ de rotation du bloc mobile et de β est simplement

$$\alpha = \theta - \beta. \quad (6.20)$$

Nous avons tracé les angles des quatre pivots en fonction de l'angle de rotation θ du bloc mobile (FIG. 6.10). Cette figure montre également la norme des vecteurs $\vec{PP'}$ et $\vec{PI'}$ en pour cent de l . Pour de petits angles de rotation du bloc mobile, les pivots fléchissent environ de la moitié de cet angle :

$$\alpha \simeq \beta \simeq \frac{\theta}{2}. \quad (6.21)$$

Par exemple, pour un angle de rotation du bloc mobile $\theta = 15^\circ$, les pivot A et D tournent d'un angle $\alpha = 8^\circ$ et les pivots B et C tournent d'un angle $\beta = 7^\circ$. Le point P se translate d'une distance égale à 1.2% de l ($PP' = 1.2 l/100$). Le centre instantané de rotation se déplace d'une distance égale à 9% de l ($PI' = 9 l/100$).

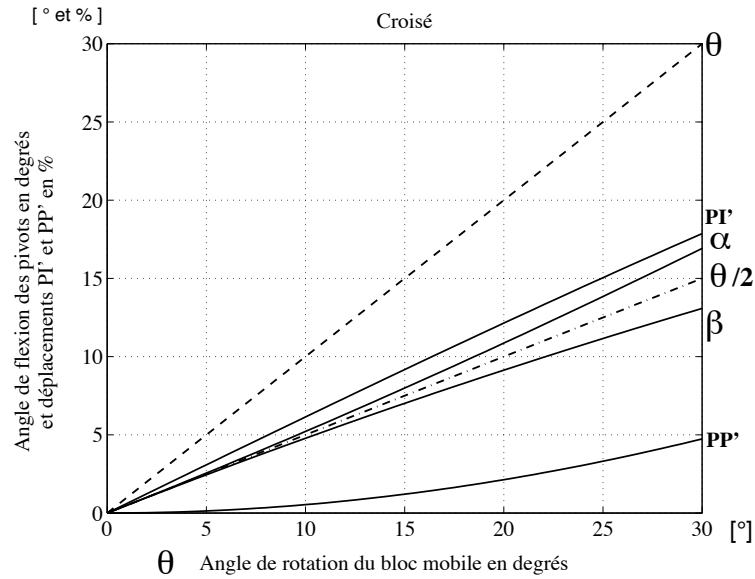


FIG. 6.10 – Débattements angulaires des quatre pivots en fonction de l'angle θ de rotation du bloc mobile et normes des vecteurs $\vec{PP'}$ et $\vec{PI'}$ en % (pour $l = 1$).

Rigidité angulaire

Nous pouvons calculer la rigidité angulaire $K_{\theta}^{\text{croisé}} = M/\theta$ par une approche énergétique : le travail mécanique à fournir pour faire pivoter le bloc mobile d'un angle θ est égal à l'énergie élastique stockée dans les quatre pivots idéaux

$$\frac{1}{2}K_{\theta}^{\text{croisé}}\theta^2 = 2\left(\frac{1}{2}K_{\alpha M}\alpha^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}K_{\alpha M}\beta^2\right) = K_{\alpha M}(\alpha^2 + \beta^2). \quad (6.22)$$

En utilisant (6.15) nous obtenons

$$K_{\theta}^{\text{croisé}} = \frac{K_{\alpha M}}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}}. \quad (6.23)$$

où $K_{\alpha M}$ est la rigidité angulaire (4.20) de chacun des pivots à col circulaire (par exemple le pivot marqué C, FIG. 6.8). Pour de faibles angles de rotation on peut utiliser (6.21) et simplifier la dernière expression

$$K_{\theta}^{\text{croisé}} \simeq K_{\alpha M}. \quad (6.24)$$

La rigidité angulaire du pivot croisé à quatre cols circulaires est approximativement égale à la rigidité angulaire de chacun des quatre cols qui le constitue.

6.6 Comparaison entre les pivots

Considérons un pivot à lames croisées, un pivot RCC à quatre cols et un pivot croisé à quatre cols qui, en position nominale, s'inscrivent dans des carrés identiques de côté unitaire (FIG. 6.11). Nous avons tracé l'angle de débattement du pivot le plus sollicité de chaque structure ainsi que les normes des vecteurs translation parasite $\vec{P}\vec{P}'$ et de déplacement du centre instantané de rotation $\vec{P}\vec{I}'$ sur un même graphique (FIG. 6.12).

Les conclusions que nous pouvons tirer de la comparaison entre les pivots à lames croisées, RCC (avec $\eta = 1/4$) et croisé sont les suivantes :

- Les pivots RCC et croisé produisent une translation parasite et un déplacement du centre instantané de rotation très voisins qui sont environ 1.5 fois supérieurs à ceux du pivot à lames croisées.
- Pour une même rotation du bloc mobile, le RCC voit son pivot le plus sollicité fléchir d'un angle plus de 2 fois supérieur à celui du pivot le plus sollicité du système croisé. C'est là l'avantage principal du pivot croisé.
- En revanche le pivot croisé ne peut pas être réalisé dans un seul plan, ce qui complique sa fabrication. C'est là le principal avantage du pivot RCC : il s'agit d'une structure plane sans croisement.

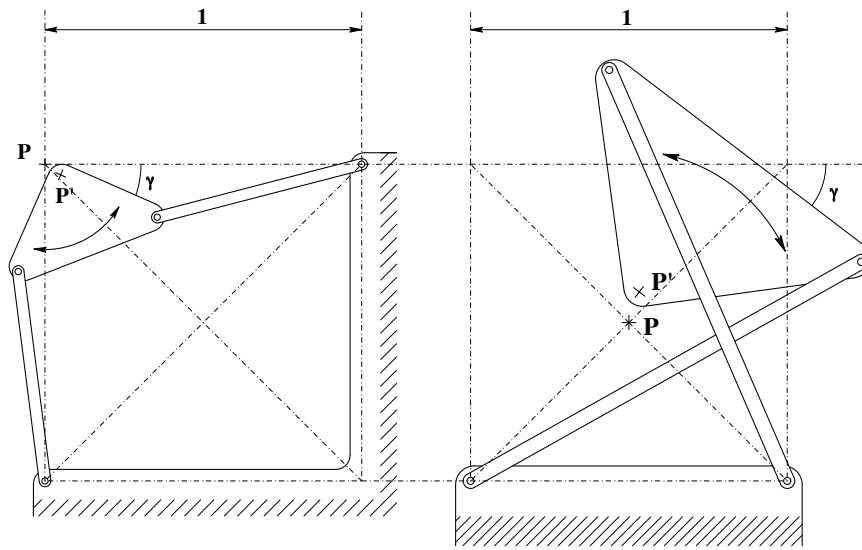


FIG. 6.11 – Pivots RCC et croisé inscrits dans des carrés identiques de côté 1 (le pivot à lames croisées n'est pas représenté).

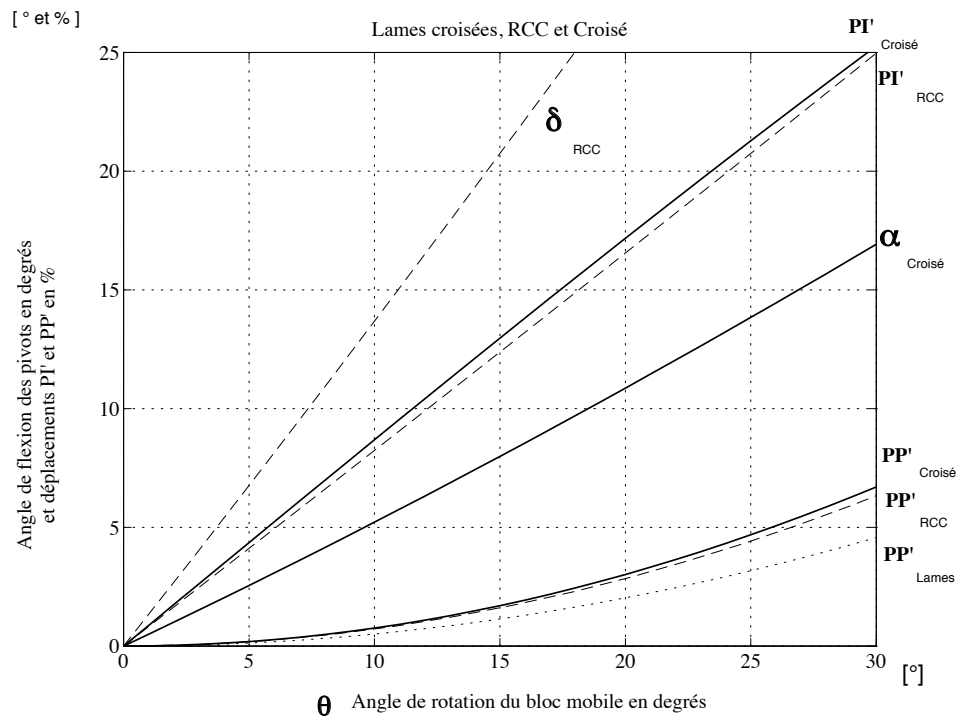


FIG. 6.12 – Comparaison entre les pivots à lames croisées (pointillés), RCC ($\eta = 1/4$) (traits discontinus) et croisé (traits continus) de mêmes dimensions.

6.7 Charges radiales

6.7.1 Variation de rigidité angulaire

Considérons une force radiale F appliquée sur le bloc mobile de l'un des pivots étudiés. Supposons que cette force soit appliquée au point coïncidant avec l'axe de rotation en position nominale (point P sur les différentes figures). La présence de cette force va-t-elle modifier la rigidité angulaire des pivots, et de quelle manière ? Vu la complexité du problème, répondre exactement (quantitativement) à cette question sort du cadre de cette recherche. En revanche, il est aisé d'y répondre qualitativement : il est possible de savoir très simplement si la force F augmente, diminue ou n'influence pratiquement pas la rigidité angulaire.

Pour un pivot sur lequel n'agit aucune force radiale, nous savons que l'énergie à fournir pour le faire pivoter d'un certain angle est égale à l'énergie stockée élastiquement dans ses parties flexibles (lames ou cols). La présence d'une force radiale ne modifie cet équilibre énergétique que dans la mesure où elle-même apporte ou requiert un travail mécanique de par son déplacement. Ainsi, si au cours d'une rotation écartant le pivot de sa position nominale, le point d'application de F se déplace de telle sorte que cette force fournit un travail mécanique, alors cette force diminue la rigidité angulaire du pivot : le travail de F constitue autant d'énergie potentielle libérée qui n'est plus à fournir pour faire tourner la structure. En revanche, si le point d'application de F se déplace de telle sorte que cette force requiert de l'énergie pour être déplacée, alors cette force augmente la rigidité angulaire du pivot (FIG. 6.13).

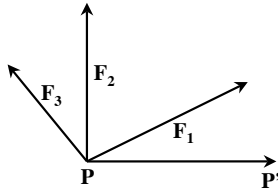


FIG. 6.13 – L'influence des forces radiales sur la rigidité des pivots dépend de leur direction par rapport au vecteur translation parasite du pivot $\vec{PP'}$. La force $\vec{F}_1$ diminue la rigidité angulaire car son travail est positif au cours du déplacement (restitution de son énergie potentielle). $\vec{F}_2$ qui est normale à $\vec{PP'}$ n'a pas d'influence sur la rigidité angulaire car son travail au cours du déplacement est nul. $\vec{F}_3$ augmente la rigidité angulaire car son travail est négatif au cours du déplacement (nécessite de l'énergie potentielle).

Cette approche nous permet de prédire qu'une force radiale qui sollicite en compression les lames (respectivement les cols) des pivots étudiés a pour effet :

- d'augmenter la rigidité angulaire du pivots à lames croisées et du pivot croisé à quatre cols ;
- de diminuer la rigidité angulaire du pivot à lames croisées non séparées, du pivot RCC à lames et du pivot RCC à quatre cols.

Une force radiale qui sollicite en traction les lames ou les cols de ces mêmes pivots a l'effet inverse.

Dans le cas d'une force radiale qui sollicite l'une des lames (respectivement l'un des bras) en compression et l'autre en traction, une observation plus précise des directions et sens respectifs du vecteur translation parasite $\vec{P}\vec{P}'$ et du vecteur force $\vec{F}$ est nécessaire pour connaître son influence sur la rigidité.

6.7.2 Rigidités radiales

Nous montrons au chapitre 5 que, pour un encombrement et une course donnés, la table à quatre cols prismatiques (respectivement circulaires) dont la longueur l_c (resp. le rayon r) sont minimaux est le meilleur de ces guidages en termes de rapports de rigidité. Or, tout comme la table à quatre cols, les pivots à quatre cols sont constitués de biellettes⁶ sollicitées en traction-compression. Nous pouvons donc extrapoler, sans en faire de démonstration formelle, que pour un même encombrement et une même course angulaire :

- les pivots à cols ont de plus grandes rigidités radiales que les pivots à lames,
- plus la longueur (ou le rayon) des cols est courte, plus les rigidités radiales sont élevées.

Par rapport aux cols prismatiques, les cols circulaires présentent l'avantage de ne pas comporter d'angles vifs agissant comme concentrateurs de contraintes. Ainsi, lorsque le procédé de fabrication le permet nous préconisons l'utilisation, comme guidages en rotation, de pivots à cols circulaires dont le rayon des cols est minimal.

6.7.3 Charges admissibles

Le calcul exact des charges radiales admissibles par les différents pivots étudiés en fonction de leur direction et de l'angle de pivotement θ sort du cadre de cet ouvrage. Notons toutefois que les charges critiques calculées pour l'une des lames de la table à deux lames parallèles (5.18) (respectivement l'un des bras de la table à quatre cols prismatiques (5.72)) sont également valables pour les pivots à lames (resp. pour les pivots à cols) étudiés ici. Pour les utiliser, il suffit de décomposer la force radiale en ses composantes parallèles aux lames (resp. aux bras) constituant le pivot.

6.8 Pivot hyperguidé à trois lames

Le pivot hyperguidé à trois lames (FIG. 6.14), qui est un homologue⁷ du guidage hyperguidé à quatre lames parallèles (sect. 5.2), présente qualitativement les mêmes propriétés :

- Il constitue un guidage en rotation pure : la bague mobile tourne autour du point O sans translation parasite.
- Sa caractéristique force-déformation est fortement progressive.

6. Nous appelons *biellette* un segment rigide aux deux extrémités duquel se trouvent deux cols flexibles.

7. La notion d'*homologie* est définie au paragraphe 10.1.1.

- Sa course est nettement inférieure à celle d'un pivot à deux lames croisées doté des mêmes lames.
- L'hyperstatisme de cette structure induit des efforts importants dans les blocs de base et mobile.

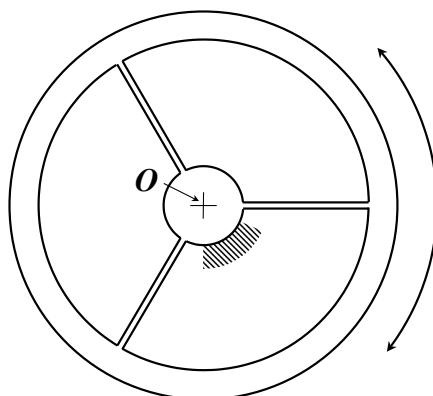


FIG. 6.14 – *Pivot hyperguidé à trois lames.*

Deuxième partie

Expérimentation et technologie

Chapitre 7

Limites technologiques de l'électroérosion

L'électroérosion à fil est particulièrement bien adaptée à l'usinage de structures flexibles car elle a une grande précision, elle produit très peu d'efforts sur les pièces et elle permet d'usiner des matériaux très durs après traitement thermique avec un excellent état de surface. Bien qu'elles soient très faibles, les forces générées par le processus d'étincelage peuvent déformer les pièces : des essais expérimentaux montrent que si l'élancement des profils des lames (l/h) dépasse 60, la qualité de l'usinage se dégrade. Ces mêmes forces peuvent également déformer le fil, ce qui diminue la précision des usinages et limite l'élancement des sections des lames (b/h). Un usinage en plusieurs passages de fil suivant différents régimes d'étincelage permet d'obtenir d'excellents états de surface ($R_a \simeq 0.18 \mu\text{m}$). Le temps d'usinage dépend de la longueur du parcours d'érosion et de l'état de surface désiré.

7.1 Electroérosion

L'*électroérosion* est un procédé d'usinage dans lequel l'enlèvement de matière est provoqué par des décharges électriques entre l'électrode (outil) et la pièce usinée (FIG. 7.1). Un générateur contrôle le courant, la durée et la fréquence des décharges tandis que la machine-outil gère les mouvements relatifs entre l'électrode et la pièce. Un groupe de filtration assure le renouvellement du diélectrique dans lequel se produisent les décharges et qui récolte les particules de matière érodée. La commande permet de spécifier la technologie d'usinage et de programmer les trajectoires de découpe. Dans le cas de l'électroérosion par enfonçage, l'usinage se fait par descente d'une électrode de forme tridimensionnelle. Dans le cas de l'électroérosion à fil, l'électrode n'est autre qu'un fil de 30 à 300 μm de diamètre qui permet de découper des formes complexes dont les surfaces usinées sont des *surfaces réglées*¹. L'électroérosion à fil présente l'avantage de ne pas requérir d'électrode spéciale pour chaque pièce. Ainsi, une très grande variété de structures peut être usinée par fil. Exceptionnellement, certains détails de structures ne pouvant être usinés au fil nécessitent un usinage par enfonçage².

1. Les *surfaces réglées* sont celles générées par le déplacement continu d'une droite (le fil) dans l'espace.

2. Par exemple, le robot Delta-Cube présenté à la section 11.4 est doté de 12 cols circulaires usinés par enfonçage.



FIG. 7.1 – L'électroérosion à fil est l'un des procédés d'usinage les mieux adaptés à la fabrication de structures flexibles. L'enlèvement de matière est provoqué par des décharges électriques (éclair sur les bords du lac Léman, 1999).

L'électroérosion est un procédé d'usinage relativement récent puisque ce n'est que depuis 1943 que cette technique est opérationnelle. De plus, il est resté longtemps un procédé relativement onéreux. Ce sont probablement là les deux raisons pour lesquelles la majeure partie de la littérature sur les guidages flexibles traite de ceux réalisés par assemblage d'éléments discrets et que seules les publications les plus récentes abordent les guidages flexibles électroérodés.

Les nombreuses qualités de l'électroérosion à fil en font l'un des procédés d'usinage les plus adaptés à la fabrication de structures flexibles. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi, dans le cadre de cet ouvrage, de n'aborder que ce dernier. Le travail expérimental que nous décrivons dans cette partie a pour but d'explorer les limites de l'électroérosion à fil en termes de précision, de géométrie et d'état de surface (chap. 7); il a également pour but d'étudier le comportement mécanique (rigidité (chap. 8) et fatigue (chap. 9)) des éléments flexibles électroérodés dont les sections ont des épaisseurs de quelques dizaines de microns.

7.2 Qualités de l'électroérosion à fil

Précision : Les machines modernes permettent d'obtenir des mouvements relatifs entre le fil et la pièce d'une très grande précision, en particulier si les axes sont dotés de règles optiques pour la mesure de la position : résolutions de l'ordre de $0.1 \mu\text{m}$, précisions absolues de l'ordre de $5 \mu\text{m}$.

Faible rugosité : l'électroérosion permet d'obtenir des surfaces dont la rugosité est très faible. Un usinage en trois phases permet typiquement d'atteindre une *rugosité moyenne arithmétique*³ $R_a \simeq 0.18 \mu\text{m}$ qui correspond à la classe de rugosité N4 (en comparaison, un fraisage classique donne une rugosité $R_a \simeq 3.2 \mu\text{m}$ (N8)).

Faibles sollicitations mécaniques : le processus d'étincelage produit sur les pièces usinées des forces négligeables. Pratiquement, les seules forces que subissent les pièces durant l'usinage sont celles produites par l'arrosage. La faiblesse de ces sollicitations

3. La définition de la *rugosité moyenne arithmétique* peut être trouvée par exemple dans (VSM 1991).

mécaniques permet de réaliser des détails très fins sans que les déformations de la pièce ne perturbent l'usinage. Par exemple, le col circulaire montré à la figure 7.6 a une épaisseur de $8\text{ }\mu\text{m}$ environ dans sa partie centrale.

Elancement des sections : l'usinage au fil permet de découper des pièces de grande épaisseur sans perte importante de précision. Ainsi, il est possible d'usiner, dans la masse, des poutres flexibles de très faible épaisseur et de largeur importante, c'est-à-dire dont la section est très élancée. Ceci conduit à des guidages flexibles avec de grands rapports de rigidités. Par exemple, nous montrons à la figure 7.3 une vue en coupe de la partie centrale de l'un des cols de la table à quatre cols de la figure 7.2. La largeur des cols est de 5.5 mm et leur épaisseur minimale de $25\text{ }\mu\text{m}$, donc l'élancement de la section dépasse 200, ce qui conduit à des rapports de rigidités $K_{\alpha M}/K_{\alpha M}^t$ supérieurs à 20 000.

Matériaux très durs : l'usinabilité des matériaux ne dépend pas de leurs propriétés mécaniques mais de leurs propriétés électriques, thermiques (conductivité, point de fusion), chimiques, etc. Ainsi il est possible d'usiner la plupart des alliages conducteurs indépendamment de leur dureté.

Usinage après traitement thermique : l'insensibilité du procédé d'usinage à la dureté permet de traiter thermiquement les pièces pour élever leur limite⁴ élastique avant l'usinage. Ceci n'est pas possible avec d'autres procédés tels que le fraisage pour lequel le traitement thermique doit être réalisé après l'usinage, ce qui comporte des risques de déformations et de fissuration, en particulier si les épaisseurs des pièces sont très variables comme dans le cas des guidages flexibles.

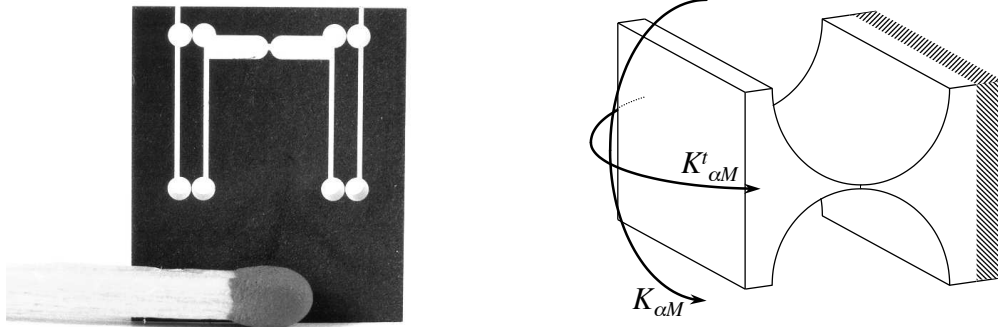


FIG. 7.2 – Table à quatre cols circulaires usinée par électroérosion à fil et rigidités angulaires de l'un des ses cols.

4. Elever la limite élastique permet d'élever le seuil de contrainte admissible dans le matériau ce qui augmente la course admissible des guidages ainsi réalisés.

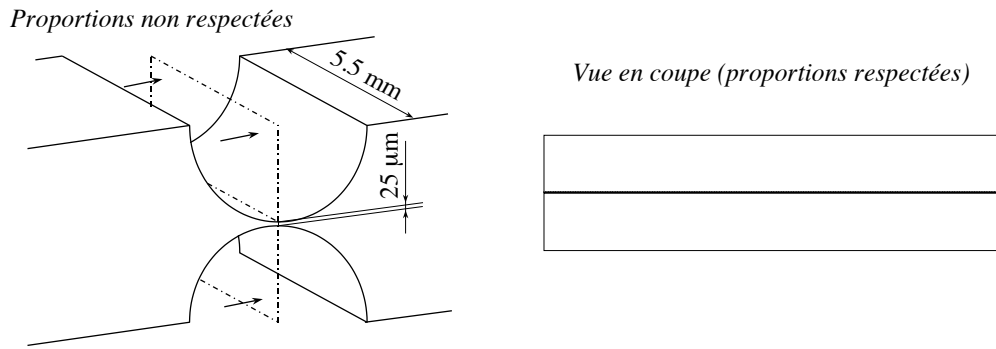


FIG. 7.3 – Vue en coupe de l'un des cols circulaires de la table de la figure 7.2. L'électroérosion à fil permet d'usiner des sections dont l'élancement est très grand (ici l'élancement est supérieur à 200 dans la partie centrale du col). Ceci permet d'obtenir des rapports de rigidités très élevés.

7.3 Limites technologiques

7.3.1 Géométrie

Elancement des profils : l/h

L'électroérosion produit sur les pièces usinées des forces dont les principales sont la force électrostatique (effet de condensateur entre l'électrode et la pièce), la force de répulsion liée à la formation d'une bulle de plasma autour de l'arc électrique et les forces liées à l'arrosage. Bien qu'elles soient très faibles en comparaison avec les forces produites par les procédés d'usinage par enlèvement de copeaux, ces forces peuvent déformer les pièces usinées si ces dernières sont très peu rigides et produire des vibrations perturbant l'étincelage. Si elles sont faibles, ces perturbations se manifestent par une instabilité du processus durant l'usinage et une dégradation de la précision et de l'état de surface (apparition de stries par exemple). Si elles sont plus fortes, elles peuvent aller jusqu'à la rupture de la pièce usinée.

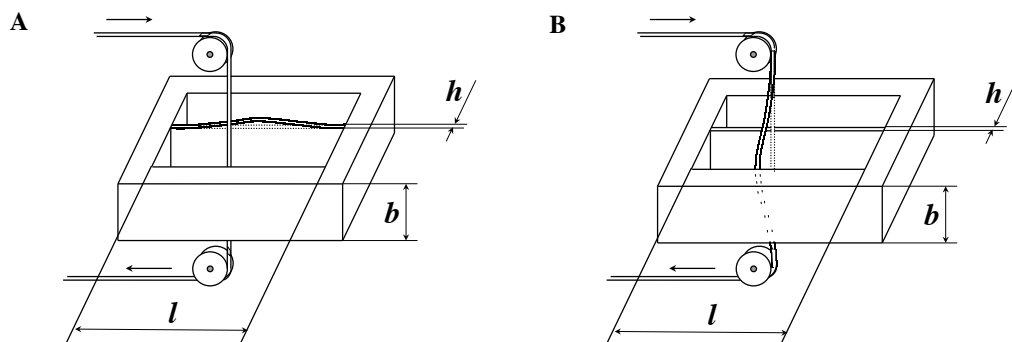


FIG. 7.4 – Les forces produites par le processus d'étincelage de l'électroérosion peuvent déformer les pièces usinées (A). Ce phénomène limite l'élancement l/h des profils des lames usinables. Ces mêmes forces peuvent également déformer le fil (B), ce qui limite l'élancement des sections b/h des lames.

Dans le cas particulier des lames encastrées à leurs deux extrémités durant l'usinage (FIG. 7.4 A) nous avons cherché à connaître l'élancement maximal usinable. Pour ce faire nous avons demandé à un sous-traitant spécialisé dans l'électroérosion à fil de haute précision⁵ d'usiner des séries de lames de même épaisseur et de longueur croissante, jusqu'à ce qu'une dégradation de l'état de surface indique que les vibrations de la lame ont perturbé l'usinage. Les essais ont été réalisés dans des plaques de $b = 5$ mm d'épaisseur d'acier 90MnCrV8 trempé, d'une dureté de 60 à 62 HRC. Les résultats obtenus sont résumés au tableau 7.1.

Le résultat important à tirer de cette expérience est que l'élancement maximal dépend peu de l'épaisseur h de la lame usinée. Dans ce cas particulier l'élancement limite est de 60 environ.

En raison de leur prix élevé nous n'avons pas effectué de tests sur des lames de largeurs différentes. Il est donc difficile de prédire l'influence de la largeur b sur l'élancement limite.

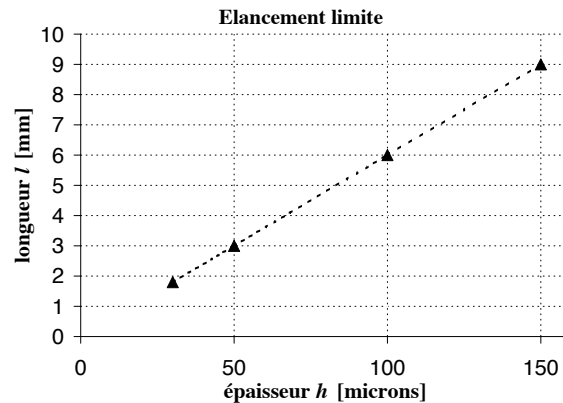


FIG. 7.5 – Longueurs maximales l des lames usinables par électroérosion à fil pour différentes épaisseurs h . Les points de ce graphique correspondent aux lignes en gras du tableau 7.1. On remarque que l est proportionnel à h , ce qui indique que pour la largeur ($b = 5$ mm) et la technologie utilisées, l'élancement maximal est d'environ 60.

5. F. Petitpierre SA., CH-2016 Cortaillod.

h [μm]	l [mm]	Elancement	Résultat	h [μm]	l [mm]	Elancement	Résultat
30	0.6	20	bon	50	1	20	bon
30	0.9	30	bon	50	1.5	30	bon
30	1.2	40	bon	50	2	40	bon
30	1.8	60	bon	50	3	60	bon
30	2.7	90	moyen	50	4.5	90	moyen
30	3.6	120	mauvais	50	6	120	mauvais
30	4.5	150	mauvais	50	7.5	150	mauvais
100	4	40	bon	150	6	40	bon
100	6	60	bon	150	9	60	bon
100	9	90	moyen	150	13.5	90	moyen
100	12	120	mauvais	150	18	120	mauvais

TABLEAU 7.1 – Résultats obtenus lors de l’usinage de lames d’épaisseur h , de longueur l et de largeur $b = 5 \text{ mm}$; “bon” indique que l’usinage a été réussi; “moyen” indique que dans sa partie centrale la lame a une erreur géométrique importante (de l’ordre de 0.1 mm) et une rugosité supérieure à la rugosité mesurée proche des encastrements; “mauvais” indique que la lame est rompue ou partiellement incomplète.

Elancement des sections : b/h

Le fil ne peut être guidé qu’en-dessus et en-dessous de la pièce usinée. Ainsi, plus la pièce est épaisse plus la longueur du fil libre est grande. Or les forces produites par le processus d’étincelage peuvent déformer le fil en creusant un “ventre” (FIG. 7.4 B). Cette courbure du fil induit une modification de la géométrie des pièces usinées qui ne peut que partiellement être corrigée par la machine. Il en résulte une baisse de la précision d’usinage qui est d’autant plus importante que les guides-fil sont éloignés l’un de l’autre.

Nous n’avons pas effectué de mesures expérimentales pour quantifier cette baisse de précision, mais nous pouvons donner des ordres de grandeur qui sont connus des utilisateurs de ce type de machines (TAB. 7.3).

Fentes et rayons

Le diamètre du fil ainsi que l’espace le séparant de la pièce durant l’usinage (appelé *gap*) limite la taille des rayons en fentes minimaux usinables. Le tableau 7.2 donne quelques valeurs typiques d’après (Agie 1995).

Diamètre du fil [μm]	30	50	100	250
Rayon minimal usinable [μm]	38	43	86	258
Largeur de fente minimale usinable [μm]	76	86	172	516

TABLEAU 7.2 – Valeurs typiques de rayons et fentes minimales en fonction du rayon du fil.

7.3.2 Etat de surface

En électroérosion, l'enlèvement de matière est provoqué principalement par un phénomène thermique : dans les décharges, la température est de l'ordre de 8000 à 12000°C. Ces décharges à haute température ont une influence sur la structure superficielle de la matière usinée⁶. Dans le cas d'une pièce en acier, la *zone modifiée* peut être décomposée en trois couches (Bianchi & Rigal 1987) :

1. Une couche de métal fondu, expulsé et redéposé sous forme de gouttelettes solidifiées peu adhérentes.
2. Une couche de métal resolidifié appelée communément *couche blanche*, d'épaisseur irrégulière et de dureté élevée (FIG. 7.6)(Sandler 1996).
3. Une couche affectée thermiquement dans laquelle la structure et la dureté du métal ont été modifiées par l'échauffement (sans fusion) provoqué par l'électroérosion.

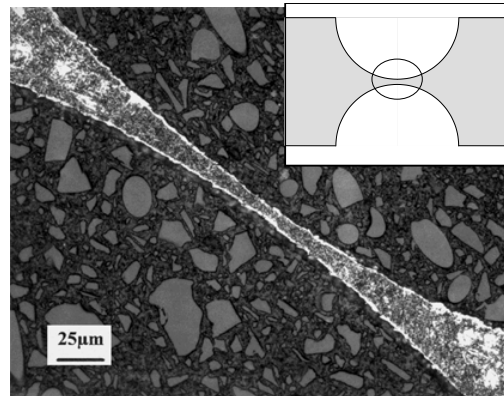


FIG. 7.6 – Vue au microscope de la partie centrale d'un col circulaire d'environ 8 µm d'épaisseur que nous avons usiné par électroérosion à fil dans de l'acier 60SiCr7. L'usinage en trois étapes a donné une rugosité $R_a = 0.3 \mu\text{m}$. La face du joint a été polie puis attaquée avec de l'acide picrique, ce qui révèle la présence de la couche blanche dont l'épaisseur varie entre 1 µm et 2.5 µm.

L'épaisseur totale de cette zone modifiée peut être de plusieurs dizaines de microns selon les usinages. Or les propriétés mécaniques de ces couches sont difficiles à connaître et dépendent grandement des paramètres d'usinage⁷. Ainsi, pour obtenir

6. Les études des couches superficielles des matériaux électroérodés sont relativement rares dans la littérature (Rajurkar 1985) (Lee *et al.* 1990) (Lim *et al.* 1991). De plus les propriétés de ces couches superficielles sont si sensibles aux conditions d'usinages ainsi qu'aux matériaux (de la pièce et de l'électrode) utilisés qu'il est difficile de généraliser les résultats obtenus dans ces divers travaux. Fukuzawa *et al.* (1995) ont exploré la possibilité d'utiliser les modifications de surface induites par l'électroérosion pour augmenter la résistance à l'usure et à la corrosion des pièces usinées.

7. Les gradients de température à la surface des pièces sont tels, que des contraintes résiduelles subsistent (Merdan & Arnell 1991) après l'usinage qui peuvent être à l'origine d'amorces de fissures d'autant plus profondes que l'énergie des décharges est élevée (Merdan & Arnell 1989) (Crookall & Khor 1975).

des articulations dont les propriétés mécaniques sont prédictibles, il s'agit de minimiser l'épaisseur des couches modifiées. Ceci est généralement réalisé par un usinage en plusieurs passages de fil selon trois régimes d'usinage⁸ :

Régime d'ébauche : découpage rapide de la pièce dans le plein avec des décharges de haute énergie qui produisent une zone modifiée d'épaisseur importante, une rugosité élevée (typiquement $R_a = 2 \mu\text{m}$) et une précision faible (typiquement $\pm 10 \mu\text{m}$).

Régime de semi-finition : enlèvement d'une fine couche de matière dans les zones de la structure qui requièrent un bon état de surface (typiquement $R_a = 0.5 \mu\text{m}$) et une meilleure précision (typiquement $\pm 6 \mu\text{m}$). Ce régime d'étincelage utilise des décharges de plus faible énergie et enlève une couche de matière au moins aussi épaisse que la couche modifiée laissée par le régime d'ébauche.

Régime de finition : usinage à très faible énergie dans les parties les plus sensibles (parties flexibles) où les contraintes sont élevées. Il permet d'améliorer encore l'état de surface (typiquement $R_a = 0.18 \mu\text{m}$) et la précision (typiquement $\pm 3 \mu\text{m}$).

Comparée à un usinage en un seul passage de fil, cette approche permet de diminuer le temps d'usinage, d'augmenter la précision et d'améliorer l'état de surface.

7.3.3 Vitesse et coût

Le prix des usinages par électroérosion à fil est approximativement proportionnel au temps d'usinage et dépend donc de la quantité de matière à éroder et de l'état de surface désiré (TAB. 7.3)(Agie 1995). Il s'agit donc, pour minimiser le prix d'usinage, de minimiser la longueur des découpes, de minimiser l'épaisseur des pièces, et de ne recourir aux régimes de semi-finition et de finition que dans les zones fortement sollicitées mécaniquement ou qui exigent une très grande précision géométrique.

$\varnothing$ fil μm	R_a μm	b mm	V mm/min	T_{Km} μm	$\varnothing$ fil μm	R_a μm	b mm	V mm/min	T_{Km} μm
100	0.8	10	1.7	± 4	100	0.2	10	0.5	± 3
		20	0.9	± 4			20	0.3	± 3
		50	0.4	± 6			50	0.2	± 4
50	0.9	1	2.5	± 3	50	0.2	1	0.4	± 2
		5	1	± 3			5	0.4	± 2
		10	0.5	± 5			10	0.2	± 3

TABLEAU 7.3 – Valeurs typiques de vitesses d'usinage V et de tolérance maximales sur le contour T_{Km} pour différents diamètres de fil, différentes rugosités R_a et différentes épaisseurs b de pièces. Ces valeurs correspondent à l'usinage de pièces test standardisées en acier X155CrVMo12-1 qui ne sont pas susceptibles de vibrer durant l'usinage. La tolérance maximale sur le contour est $T_{Km} = (U_{max} - U_{min})/2$ où U_{max} et U_{min} sont respectivement le plus grand écart positif et le plus grand écart négatif entre le contour théorique et le contour mesuré de la pièce usinée.

8. Dans certaines technologies d'électroérosion, plusieurs passages de fil sont réalisés avec le même régime d'usinage : par exemple un passage d'ébauche, une passe de semi-finition et deux passages de finition.

Chapitre 8

Mesures de rigidités

Ce chapitre décrit les résultats de mesures de rigidité effectuées sur 25 tables à quatre cols circulaires électroérodées dont les cols ont des épaisseurs e comprises entre $20\text{ }\mu\text{m}$ et $50\text{ }\mu\text{m}$. Ces mesures montrent que si la rugosité des surfaces électroérodées des cols est faible ($R_a \leq 0.2\text{ }\mu\text{m}$, usinage en trois étapes) alors le modèle théorique que nous avons établi dans la partie théorique permet de prédire précisément la rigidité des cols de section micrométrique. Si seul un usinage en une ou deux étapes est utilisé, laissant une rugosité plus importante, alors il faut apporter une correction à l'épaisseur mesurée e des cols pour que le modèle corresponde aux rigidités mesurées. Nous expliquons le recours à cette correction par la présence, sous les surfaces électroérodées, d'une fine couche ne jouant pas de rôle mécanique dans la flexion que nous appelons *couche neutre*. Les résultats montrent que l'épaisseur de cette couche neutre est corrélée avec la rugosité de surface. Elle est par conséquent partiellement prédictible.

8.1 But de l'expérience

Le but de cette expérience est de savoir si les modèles établis à partir de la théorie de la mécanique des structures pour le calcul de la rigidité des articulations constituées de poutres en flexion est valable lorsque ces articulations ont des sections de l'ordre de 25 à $50\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur et ont été usinées par électroérosion à fil. Le col circulaire étant une articulation de géométrie simple et présentant d'intéressantes propriétés mécaniques (sect. 4.5 et sect. 5.4) c'est lui que nous avons choisi comme sujet de notre expérience. Pour simplifier la réalisation du banc de mesure de rigidité, nous avons effectué nos mesures non pas sur des cols isolés mais sur des tables à quatre cols circulaires. En effet ces dernières sont beaucoup plus faciles à solliciter mécaniquement et la translation de leur bloc mobile est plus facile à mesurer que le débattement angulaire d'un col.

8.2 Protocole expérimental

L'expérience s'est déroulée en deux étapes (FIG. 8.1) :

1. Mesure de la rigidité en translation de 2 tables dont les cols sont de section millimétrique ($\simeq 1$ mm).
2. Mesure de la rigidité en translation¹ de 25 tables dont les cols sont de section micrométrique (20 à 50 μm).

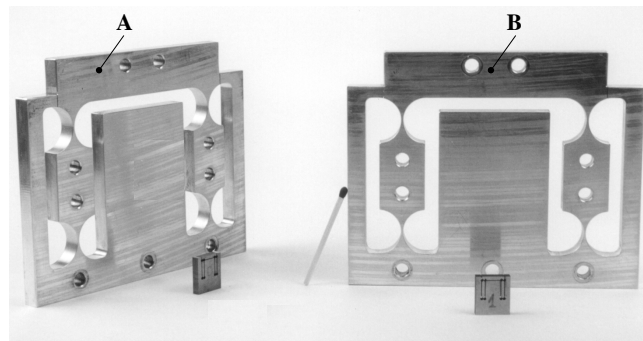


FIG. 8.1 – Photographie des deux tables à quatre cols circulaires de grandes dimensions (A et B) usinées par fraisage et de deux des 25 tables de petites dimensions usinée par électroérosion à fil.

8.2.1 Cols de section millimétrique

Nous avons usiné par fraisage deux tables à quatre cols circulaires de grandes dimensions² (TAB. 8.1). Les deux tables, appelées A et B, sont identiques aux tolérances de fabrication près. L'incertitude sur la mesure de l'épaisseur e est de $\pm 6 \mu\text{m}$.

e	r	l	b	Matériau	Module de Young
$993 \pm 6 \mu\text{m}$	10 mm	50 mm	8 mm	AlZnMgCu15	72 MPa

TAB. 8.1 – Paramètres géométriques et matériau des tables A et B.

1. Le banc de mesure (FIG. 8.5) est décrit au paragraphe 8.2.3.

2. Cf. FIG. 5.28 pour connaître la signification des paramètres géométriques.

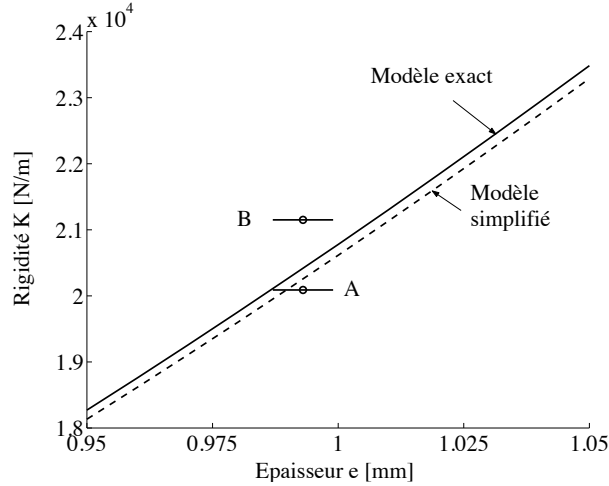


FIG. 8.2 – Confrontation du modèle théorique (5.106) et du modèle simplifié (5.105) à deux mesures réalisées sur des tables à quatre cols circulaires dont les cols sont de section millimétrique. Remarque : les axes ne partent pas de l'origine.

Nous avons mesuré les rigidités en translation des deux tables

$$K_A = 20.09 \text{ N/mm} \quad \text{et} \quad K_B = 21.15 \text{ N/mm},$$

alors que le modèle théorique (5.106) prédit une rigidité

$$K = 20.43 \text{ N/mm}.$$

Ainsi le modèle ne s'écarte des valeurs mesurées que de 1.7% (respectivement de -3.4%) dans le cas A (resp. dans le cas B). Nous avons jugé ces écarts suffisamment faibles pour considérer le modèle que nous utilisons comme valide dans le cas de cols circulaires de section millimétrique. La figure 8.2 montre cet écart graphiquement.

8.2.2 Cols de section micrométrique

Nous avons usiné par électroérosion à fil 25 tables à quatre cols circulaires de petites dimensions (TAB. 8.3 et 8.4) semblables à celle montrée à la figure 7.2. Nous avons utilisé une machine Agiecut 150 HSS+F avec un fil de 50 μm de diamètre. Les tables diffèrent par leur épaisseur e , la rugosité de leurs cols R_a et leur matériau. En dehors de ces trois points, les tables sont toutes identiques. Nous avons mesuré la rigidité de chacune des 25 tables. Pour représenter graphiquement ces résultats, nous avons réuni les tables de même rugosité et de même matériau en séries (1 à 6) et nous avons tracé des courbes de la rigidité en fonction de l'épaisseur pour chacune des séries pour comparer ces résultats au modèle théorique (5.106). L'ensemble des données et des mesures de rigidité est résumé dans le tableau 8.4 et représenté graphiquement aux figures 8.3 et 8.4. Les propriétés des trois matériaux que nous avons utilisés sont résumées dans le tableau 8.2.

8.2.3 Banc de mesure

La rigidité linéaire des tables à quatre cols circulaires a été mesurée en utilisant une balance de précision (Mettler Toledo®) dont la résolution est de 1 mg pour

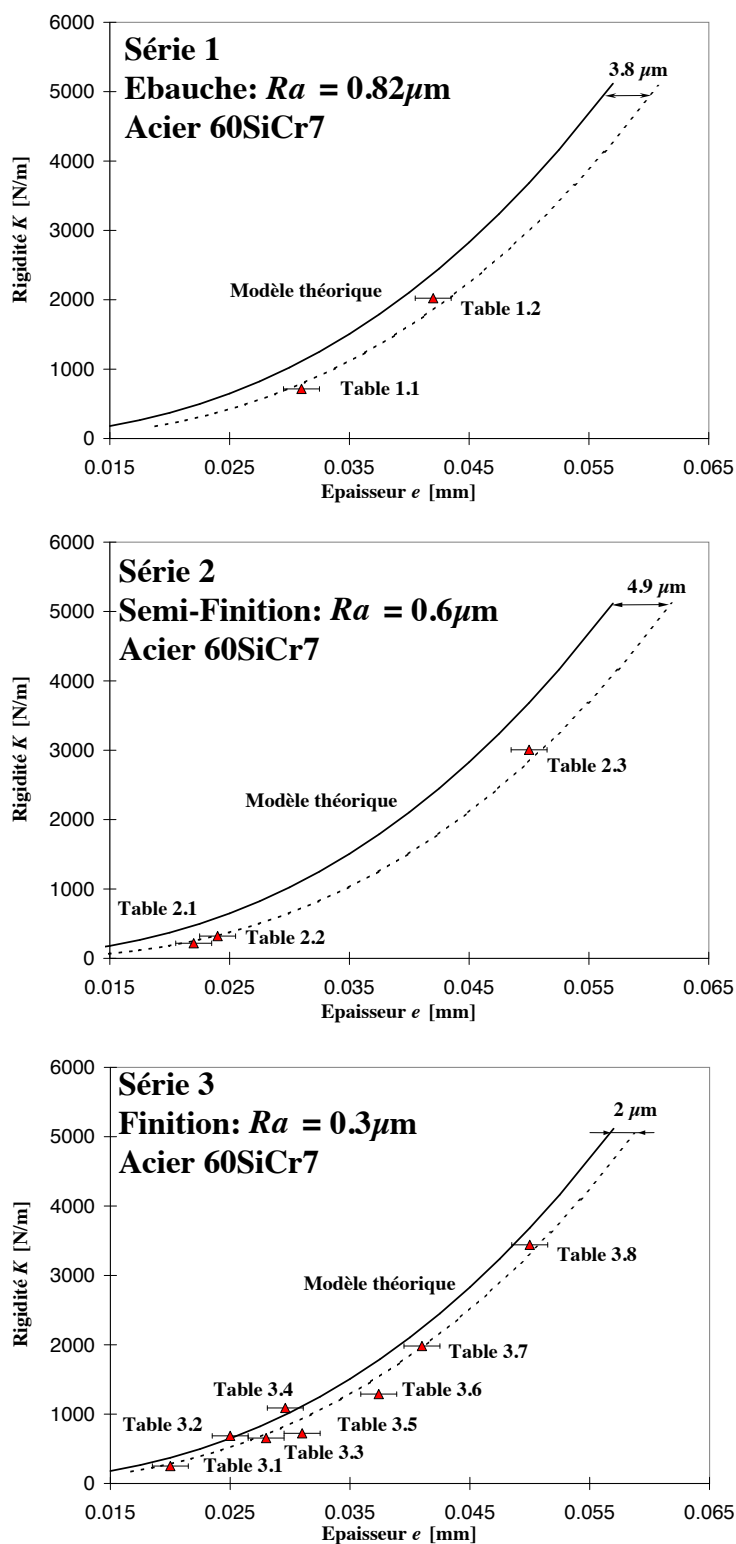


FIG. 8.3 – Mesures de rigidité des tables à quatre cols circulaires et comparaison avec le modèle théorique (trait continu). Chaque courbe en pointillés est une translation horizontale de la courbe théorique qui épouse le mieux les points de mesure.

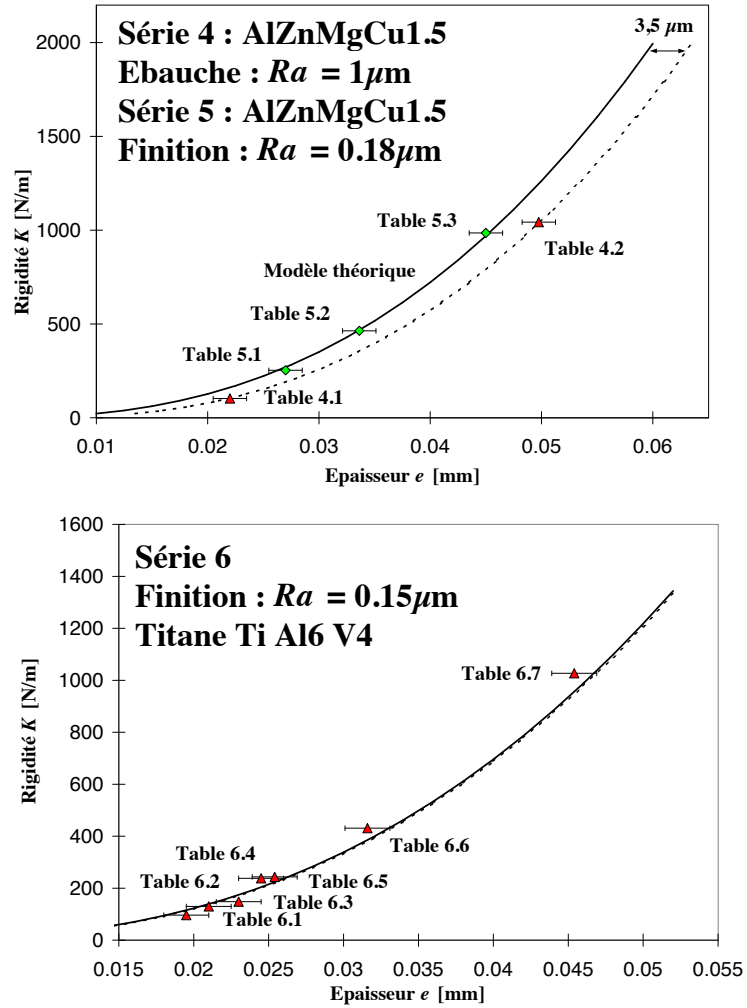


FIG. 8.4 – Mesures de rigidité des tables à quatre cols circulaires et comparaison avec le modèle théorique (trait continu). Chaque courbe en pointillés est une translation horizontale de la courbe théorique qui épouse le mieux les points de mesure.

Matériau :	acier 60SiCr7	AlZnMgCu1.5	TiAl6V4
Module de Young [GPa] :	210	72	114
Limite élastique [MPa] :	1030	480	830

TABLEAU 8.2 – *Matériaux des 25 tables (1.1 à 6.7).*

e	r	l	b	Rugosité R_a
20 μm à 50 μm	612.5 μm	8 mm	5.5 mm	0.15 μm à 1 μm

TABLEAU 8.3 – *Paramètres géométriques et rugosité des tables des séries 1 à 6.*

mesurer la force appliquée et un capteur de proximité optique à triangulation laser (Keyence®) dont la résolution est de 10 nm pour mesurer le déplacement du bloc mobile des tables. Les tables ont été déplacées au moyen d'un axe micrométrique motorisé permettant d'effectuer des pas de 1 μm (FIG. 8.5). L'incertitude sur la mesure de rigidité est inférieure à 0.1% de la valeur mesurée pour toutes les tables testées, nous ne l'avons donc pas représentée sur les graphiques (FIG. 8.3 à 8.4). Nous l'avons également négligée durant l'analyse des résultats.

L'épaisseur e des cols circulaires a été mesurée au moyen d'un projecteur de profil avec un grossissement de $200\times$. L'incertitude de cette mesure est de $\pm 1 \mu\text{m}$. Elle est représentée sur les graphiques au moyen d'une barre horizontale.

La rugosité a été mesurée sur des pièces tests réalisées dans le même matériau que les cols et avec les mêmes paramètres d'usinage. Nous n'avons pas effectué de mesure de rugosité sur les cols eux-mêmes.

8.3 Analyse des résultats

8.3.1 Validation du modèle

L'intérêt des mesures réalisées sur les tables A et B de grandes dimensions réside dans la faible incertitude relative sur l'épaisseur des joints. En effet, l'incertitude sur la mesure de l'épaisseur e de $\pm 6 \mu\text{m}$ induit, pour des cols d'une épaisseur de 1 mm environ, une incertitude de $\pm 1.5\%$ sur la valeur de la rigidité linéaire de la table.

En comparaison, l'incertitude sur la mesure de l'épaisseur des cols micrométriques qui est de $\pm 1 \mu\text{m}$ induit, pour des cols d'une épaisseur de 30 μm environ, une incertitude de $\pm 8.5\%$ sur la valeur de la rigidité linéaire.

La faible incertitude sur l'épaisseur des cols, ainsi que sur les mesures de rigidité des tables A et B, nous permet de valider notre modèle théorique avec un plus haut degré de confiance. L'écart inférieur à 3.5% du modèle par rapport aux mesures nous permet de conclure que ce dernier est valable lorsqu'il est appliqué à des cols de section millimétrique.

8.3.2 Correction du modèle pour les cols micrométriques

Les résultats des mesures réalisées sur les 25 tables de petites dimensions montrent que les rigidités mesurées sont généralement inférieures aux rigidités prédites par le modèle théorique : -14% en moyenne, avec un écart maximal de -54% (TAB. 8.4).

Table N°	Matériau [DIN]	Stade du Régime	R_a [μm]	Epaisseur mesurée e_m [μm]	Rigidité mesurée K_m [N/m]	Rigidité théorique K [N/m]	Ecart relatif $\frac{K_m - K}{K}$ [%]
1.1	60SiCr7	ébauche	0.82	31	715	1111	-36
1.2	60SiCr7	ébauche	0.82	42	2023	2379	-15
2.1	60SiCr7	semi-fini.	0.6	22	218	470	-54
2.2	60SiCr7	semi-fini.	0.6	24	321	585	-45
2.3	60SiCr7	semi-fini.	0.6	50	3006	3684	-18
3.1	60SiCr7	finition	0.3	20	252	370	-32
3.2	60SiCr7	finition	0.3	25	687	647	+6
3.3	60SiCr7	finition	0.3	28	654	861	-24
3.4	60SiCr7	finition	0.3	30	1089	989	+10
3.5	60SiCr7	finition	0.3	31	724	1111	-35
3.6	60SiCr7	finition	0.3	37	1289	1779	-27
3.7	60SiCr7	finition	0.3	41	1981	2240	-12
3.8	60SiCr7	finition	0.3	50	3440	3684	-7
4.1	AlZnMgCu1.5	ébauche	1	22	103	161	-36
4.2	AlZnMgCu1.5	ébauche	1	50	1043	1247	-16
5.1	AlZnMgCu1.5	finition	0.18	27	253	269	-6
5.2	AlZnMgCu1.5	finition	0.18	34	463	467	-1
5.3	AlZnMgCu1.5	finition	0.18	45	985	969	+2
6.1	Ti Al6 V4	finition	0.15	20	96	115	-17
6.2	Ti Al6 V4	finition	0.15	21	130	138	-6
6.3	Ti Al6 V4	finition	0.15	23	148	174	-15
6.4	Ti Al6 V4	finition	0.15	24	238	204	+17
6.5	Ti Al6 V4	finition	0.15	25	243	223	+9
6.6	Ti Al6 V4	finition	0.15	32	431	385	+12
6.7	Ti Al6 V4	finition	0.15	45	1027	956	+7
A	AlZnMgCu1.5	fraisé	/	993	20090	20430	-1.7
B	AlZnMgCu1.5	fraisé	/	993	21150	20430	+3.5

TABLEAU 8.4 – Résultats des mesures de rigidité effectuées sur les tables à quatre cols circulaires.

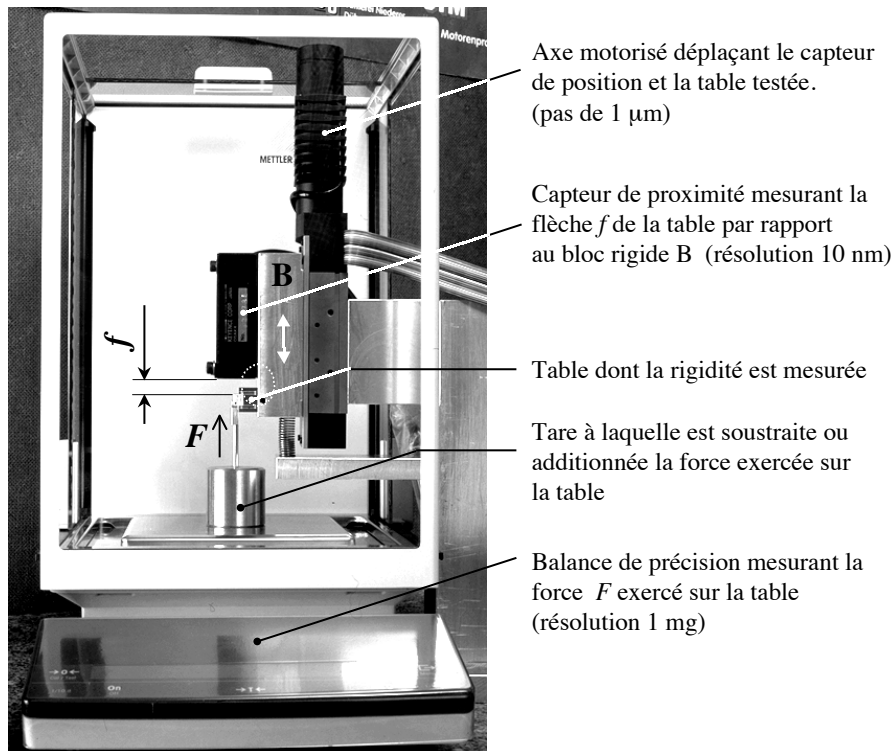


FIG. 8.5 – Banc de mesure de rigidité. Il a été conçu de manière à avoir une boucle mécanique (pointillés) aussi courte et aussi rigide que possible pour la mesure de la flèche f du bloc mobile de la table. La force F est exercée par une tare placée sur le plateau d'une balance de précision. Le déplacement est imposé par un axe motorisé capable de produire des pas de $1\ \mu\text{m}$ (la précision de l'axe motorisé n'a pas d'influence sur la précision de la mesure de rigidité).

Ainsi le modèle qui est valable pour les tables de grandes dimensions A et B produit des erreurs importantes pour les tables de petites dimensions. Pour expliquer cet écart nous avons émis les deux hypothèses suivantes :

1. Il existe à la surface des parties électroérodées une fine couche de matière qui ne joue pas de rôle mécanique dans la flexion. Nous appelons cette couche la *couche neutre*. Nous notons son épaisseur e_n . La présence de cette couche neutre explique à elle seule l'écart observé entre le modèle et les mesures réalisées sur les 25 petites tables.
2. L'épaisseur de la couche neutre dépend de la rugosité R_a de la surface électroérodée et d'elle seule.

Soit e_m l'épaisseur mesurée sur le col, alors son épaisseur effective est $e_e = e_m - 2e_n$ puisqu'il y a une couche neutre sur les deux faces électroérodées. Si notre première hypothèse est valide, alors une fois la couche neutre déduite de l'épaisseur totale, le modèle ne produit plus d'écart avec les mesures. Ainsi, en supposant que notre hypothèse soit valide et connaissant la rigidité des tables nous pouvons calculer l'épaisseur effective des cols de chaque table : c'est l'épaisseur e_e qui, selon notre

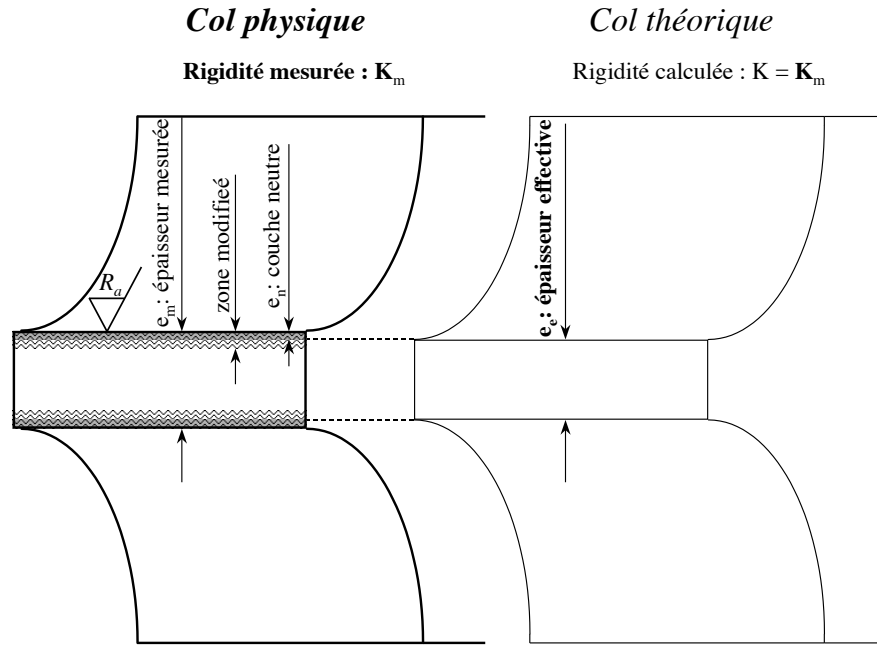


FIG. 8.6 – Nous avons émis l’hypothèse qu’il existe à la surface des cols électroérodés une couche neutre qui ne joue pas de rôle mécanique dans la flexion. Si l’on soustrait l’épaisseur de cette couche à l’épaisseur totale, alors notre modèle théorique permet de prédire la rigidité des cols. L’épaisseur de la couche neutre dépend de la rugosité.

modèle, donne une rigidité K égale à la rigidité mesurée. Nous pouvons ensuite en déduire l’épaisseur de la couche neutre³ $e_n = (e_m - e_e)/2$ (FIG. 8.6).

Si notre seconde hypothèse est valide, alors toutes les tables dont la rugosité des parties électroérodées des cols est la même ont une couche neutre de même épaisseur. En d’autres termes, toutes les tables d’une même série ont la même épaisseur de couche neutre. Graphiquement ceci veut dire qu’il existe une courbe qui est une translation horizontale d’une distance $2e_n$ de la courbe du modèle théorique qui passe par tous les points de mesure de chaque série. Nous avons tracé en traits discontinus sur les figures 8.3 à 8.4 les courbes qui sont des translations horizontales des courbes du modèle théorique et qui épousent le mieux les valeurs mesurées. Nous avons également indiqué la distance de cette translation qui correspond au double de l’épaisseur de la couche neutre⁴.

3. EXEMPLE : pour la table 1.1, l’épaisseur mesurée des cols est de $31 \mu\text{m}$ et la rigidité mesurée est de 715 N/m . Selon la formule (5.106), l’épaisseur de col qui correspond à la rigidité mesurée est $e_e = 26 \mu\text{m}$. Ainsi, la table se comporte comme si sur chacune des deux surfaces électroérodées de ses cols une couche neutre de $e_n = (31 - 26)/2 = 2.5 \mu\text{m}$ ne jouait pas de rôle mécanique. Si notre seconde hypothèse est valide, alors la table 2.2 dont la rugosité des parties érodées est la même doit avoir une couche neutre de même épaisseur. Comme montré plus loin, ceci est bel et bien le cas, aux incertitudes de mesures près.

4. EXEMPLE : la courbe en traits discontinus de la série 2 (FIG. 8.3) est une translation horizontale de la courbe du modèle théorique d’une distance de $4.9 \mu\text{m}$. Ainsi les cols de toutes les tables de cette série se comportent comme si, sur chacune de leurs deux surfaces électroérodées, l’épaisseur de $4.9/2 = 2.45 \mu\text{m}$ ne jouait pas de rôle mécanique, c’est ce que nous avons appelé la couche neutre.

Comme nous le voyons, il existe bel et bien pour les séries 1, 2, 4, 5 et 6 une courbe qui passe, aux incertitudes près, par tous les points de mesures. Ainsi ces 5 séries corroborent nos deux hypothèses.

Seule la série 3 ne vérifie pas nos hypothèses. Il n'existe pas de courbe qui soit une translation horizontale de la courbe du modèle théorique et qui passe par tous les points de mesures. Afin de trouver une explication à cette exception de la série 3 nous avons observé les surfaces électroérodées des cols au microscope électronique à balayage (FIG. 8.7). Ces clichés ont montré sur les cols en acier (séries 1, 2 et 3) la présence de gros cratères de l'ordre de $15\mu\text{m}$ de diamètre et de $10\mu\text{m}$ de profondeur en de nombreux endroits de la surface. Ces cratères sont beaucoup plus gros et irréguliers que les alvéoles hémisphériques laissées par les décharges électriques sur le reste de la surface. Leur présence peut s'expliquer par l'existence d'impuretés incluses dans le matériau qui explosent sous l'effet de l'étincelage en arrachant de la matière. Aucun cratère de cet aspect n'a été observé sur les tables réalisées dans les alliages d'aluminium (séries 4 et 5) et de titane (série 6).

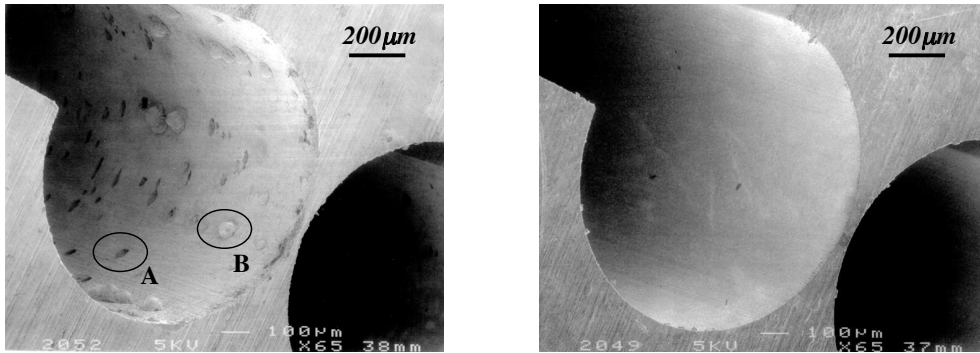


FIG. 8.7 – Photographies au microscope électronique à balayage de cols électroérodés. Des cratères (A) et des gouttelettes solidifiées (B) sont visibles sur le col en acier 60SiCr7 (gauche). Une photographie au même grossissement d'un col en aluminium AlZnMgCu1.5 (droite) montre une surface beaucoup plus régulière.

La présence de ces impuretés, qui sont dispersées aléatoirement dans le matériau et qui laissent sur les surfaces des imperfections dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur des cols les plus fins, modifie la rigidité des tables d'une manière qui ne peut pas être prédite et ce d'autant plus que les cols sont fins.

8.4 Interprétation

Considérons en premier lieu les séries 4, 5 et 6 qui ne souffrent pas de la présence d'impuretés. Nous notons que pour les séries 5 et 6 qui ont une très faible rugosité ($R_a = 0.18\mu\text{m}$ et $R_a = 0.15\mu\text{m}$ respectivement) la couche neutre est d'épaisseur négligeable. En d'autres termes si l'usinage a été réalisé en trois étapes, jusqu'au régime de finition, alors la formule (5.106 ou 5.105) peut être utilisée pour prédire la rigidité des cols sans qu'aucune correction ne soit nécessaire. Si l'usinage a été réalisé en une seule étape (ébauche seule), donnant une rugosité plus importante ($R_a = 1\mu\text{m}$ pour la série 5) alors une correction doit être apportée au modèle. Cette

correction consiste en la prise en compte de la couche neutre dont l'épaisseur non négligeable dépend de la rugosité.

Ce n'est probablement pas la rugosité elle-même qui explique la présence de la couche neutre, mais plutôt l'existence de la zone modifiée (sect. 7.3). Si nous avons choisi de chercher la corrélation entre l'épaisseur de la couche neutre et la rugosité (deuxième hypothèse), c'est que, parmi les nombreuses propriétés de la zone modifiée (profondeur, micro-dureté, module de Young, etc.), la rugosité est la grandeur physique la plus facilement accessible par la mesure. En d'autres termes, nous avons choisi la rugosité comme indicateur des modifications complexes de surface qui sont la cause profonde de l'existence de la couche neutre.

Considérons à présent les séries 1, 2 et 3, pour lesquelles nous savons que les impuretés du matériau ont affecté les valeurs de rigidité. Nous observons le phénomène a priori étrange que la couche neutre pour une rugosité $R_a = 0.82 \mu\text{m}$ (série 1 : $e_n = 3.8/2 = 1.9 \mu\text{m}$) est moins épaisse que pour une rugosité inférieure $R_a = 0.6 \mu\text{m}$ (série 2 : $e_n = 4.9/2 = 2.45 \mu\text{m}$). Nous attribuons ce phénomène à la présence de cratères de surface. Pour une rugosité plus faible ($R_a = 0.3 \mu\text{m}$, série 3), l'épaisseur de la couche neutre est inférieure ($e_n = 2/2 = 1 \mu\text{m}$), ce qui corrobore notre deuxième hypothèse.

8.5 Conclusions

Les deux hypothèses que nous avons émises sont vérifiées par nos expériences dans une large mesure. Ainsi, il existe très probablement à la surface des cols électroérochés une fine couche qui ne joue pas de rôle mécanique dans la flexion. L'épaisseur de cette couche, que nous avons appelée *couche neutre*, est constante pour une rugosité donnée. Un usinage en trois étapes (ébauche, semi-finition et finition) permet d'obtenir des très faibles rugosités pour lesquelles l'épaisseur de la couche neutre est pratiquement négligeable, ce qui permet d'utiliser le modèle théorique sans modification aucune. D'un usinage en une ou deux étapes seulement résulte une rugosité de surface plus importante et une épaisseur de couche neutre non négligeable. Il est alors nécessaire de soustraire l'épaisseur de la couche neutre de l'épaisseur totale des cols pour que le modèle théorique soit utilisable.

Il serait intéressant d'investiguer la possibilité d'utiliser un polissage de surface chimique (Xiaowei *et al.* 1997) ou mécanique pour éliminer les couches modifiées.

Il est essentiel d'utiliser des matériaux homogènes et exempts d'impuretés pour réaliser des cols de section micrométrique dont la rigidité en flexion soit prédictible. L'utilisation de l'acier 60SiCr7 est donc à déconseiller. Des aciers plus homogènes (Ziegler 1995) comme l'acier fritté X220CrVM013-4 par exemple devraient donner des résultats bien plus prédictibles.

Chapitre 9

Essais de fatigue

Ce chapitre décrit les résultats d'essais de fatigue réalisés sur 217 cols circulaires électroérodés de $50\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur. Nous avons comparé ces résultats aux valeurs de limite de fatigue obtenues lors d'essais standardisés (valeurs données par les fabricants). Les essais ont été réalisés avec deux aciers et un bronze. La principale conclusion que nous tirons de ces essais est que pour une très faible rugosité ($R_a \simeq 0.2\text{ }\mu\text{m}$, usinage en 3 étapes) la limite d'endurance $\sigma'_D(10^7)$ des cols (contrainte provoquant la rupture après 10^7 cycles) est supérieure à celle obtenue lors d'essais standard. Ceci nous porte à penser que pour cette même rugosité et pour d'autres matériaux de composition voisine, nous pouvons utiliser les limites de fatigue données par les fabricants pour choisir la contrainte admissible dans le matériau sans recourir à des essais de fatigue spéciaux sur des cols. Pour des rugosités supérieures (usinages en une ou deux étapes) la limite d'endurance diminue et peut devenir inférieure aux valeurs standardisées. Il est alors nécessaire de réaliser des essais spéciaux pour connaître la limite d'endurance des articulations, ou alors prendre un plus grand facteur de sécurité lors du choix de la contrainte admissible σ_{adm} .

9.1 But de l'expérience

Le but de cette expérience est de savoir si les limites de fatigue mesurées lors d'essais standard, telles que celles fournies par les fournisseurs de matériaux, sont utilisables pour déterminer la contrainte admissible σ_{adm} utilisée lors du dimensionnement de guidages dont les sections flexibles électroérodées sont de quelques dizaines de microns d'épaisseur.

Nous avons choisi le col circulaire comme sujet d'expérience car sa géométrie est simple et car il présente d'intéressantes propriétés mécaniques (sect. 4.5 et sect. 5.4). Nous avons réalisé des essais de fatigue sur des cols circulaires électroérodés dont la section a une épaisseur e de $50\text{ }\mu\text{m}$ dans sa partie la plus fine et qui sont sollicités en flexion alternée. Nous avons cherché à connaître pour ces cols le facteur de correction c qui permet de passer de la limite de fatigue σ_D à la limite de fatigue corrigée σ'_D (§ 3.2.3). Pour des raisons pratiques, nous avons cherché la limite d'endurance pour 10^7 cycles : $\sigma'_D(10^7)$ et non pas la limite de fatigue (nombre théoriquement infini de cycles) :

$$c = \frac{\sigma'_D(10^7)}{\sigma_D(10^7)}$$

Nous avons choisi trois alliages dont les propriétés mécaniques sont adaptées à la réalisation de guidages flexibles¹ : l'acier X220CrVMo13-4, l'acier Maraging X3NiCoMoTi18-9-5 et le bronze CuNi15Sn8. Nous disposons des valeurs de limite d'endurance $\sigma_D(10^7)$ de chacun de ces matériaux. Pour connaître le facteur de correction, nous avons donc effectué des essais de fatigue sur des cols électroérodés dans ces trois matériaux pour connaître la limite d'endurance corrigée $\sigma'_D(10^7)$.

9.2 Protocole expérimental

Pour réaliser les essais de fatigue en flexion alternée sur des cols circulaires de section micrométrique nous avons conçu une éprouvette spéciale permettant de solliciter plusieurs cols simultanément en flexion (FIG. 9.1). Cette éprouvette est constituée de 11 cols dont l'une des extrémités de chacun d'eux est liée à un bloc fixe et l'autre à des bras pivotants. Les bras pivotants sont reliés au bloc mobile d'une table à quatre cols par l'intermédiaire de lames qui ne transmettent à l'extrémité des bras que des forces tangentielles à leur axe neutre². Les points d'application de ces forces sont suffisamment éloignés des cols testés pour considérer que ces derniers sont sollicités en flexion pure. Les dimensions essentielles de cette éprouvette sont indiquées sur la figure 9.2.

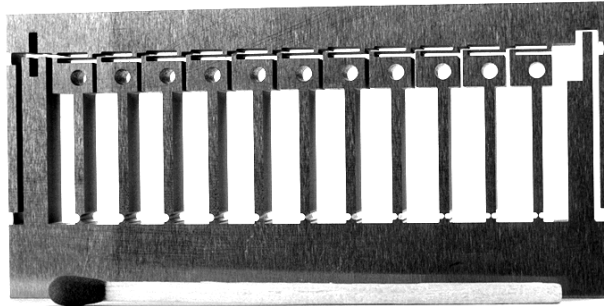


FIG. 9.1 – Photographie d'une éprouvette posée derrière une allumette.

Nous avons choisi de ne faire varier que deux paramètres entre les différents cols testés : la contrainte appliquée σ et la rugosité des surfaces électroérodées R_a . Etant donné que les 11 bras pivotants d'une même éprouvette tournent du même angle, la course angulaire α_M est identique pour chaque col. Pour faire varier la contrainte, nous avons fait varier le rayon³ r des cols en gardant l'épaisseur constante $e = 50\mu\text{m}$.

1. Les traitements thermiques ainsi que les propriétés de ces alliages sont données dans le tableau B.14.

2. En réalité, les lames horizontales reliant les bras pivotants au bloc mobile exercent sur les bras non seulement une force horizontale, mais également un moment et une force verticale. Toutefois, les lames sont suffisamment fines ($800\mu\text{m}$) pour que nous puissions négliger ces deux derniers efforts devant la force horizontale (ceci a été vérifié par calcul).

3. Il est important de noter que, dans tous les cas, nous avons respecté l'inégalité $r/e > 5$ qui garantit que le facteur de concentration de contrainte est égal à 1 (§ 4.5.1).

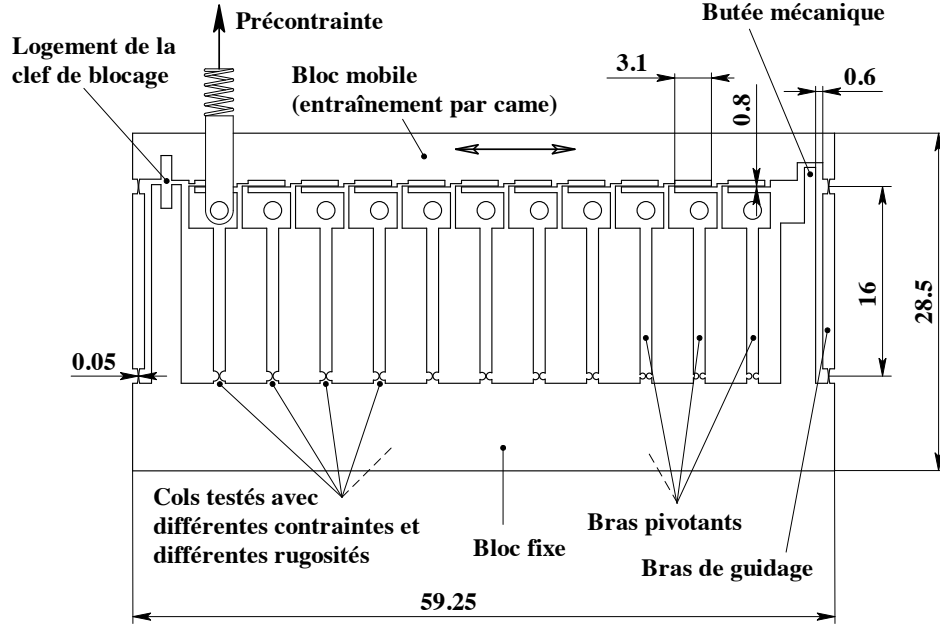


FIG. 9.2 – *Éprouvette spéciale pour essais de fatigue en flexion alternée sur des cols circulaires de section micrométrique. Les éprouvettes ont été usinées par électroérosion avec un fil de 0.1 mm de diamètre sur une machine Agiecut 150 HSS+F. L'épaisseur des éprouvettes est $b = 5$ mm. Les cotes sont en mm.*

Nous avons calculé la contrainte dans les cols en utilisant le modèle théorique décrit à la section 4.5 (4.21) :

$$\sigma = \frac{4\alpha_M E \sqrt{e}}{3\pi \sqrt{r}}. \quad (9.1)$$

L'épaisseur des cols a été mesurée au moyen d'un projecteur de profil avec un grossissement de $200\times$ qui laisse une incertitude de $\pm 1 \mu\text{m}$ sur l'épaisseur. Cette incertitude sur l'épaisseur se traduit après utilisation de (9.1) en une incertitude sur la contrainte calculée. Cette incertitude est montrée graphiquement sur les courbes de Wöhler en annexe. L'incertitude sur le nombre de cycles est de 1 cycle. Aux alentours de 10^7 cycles elle est négligeable.

Nous avons effectué nos essais en cherchant à localiser, avec la plus grande précision possible, la limite d'endurance pour 10^7 cycles⁴. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.2.2, cette limite correspond approximativement à la limite de fatigue pour les aciers.

9.3 Banc de mesure

Les éprouvettes ont été placées sur le banc de fatigue visible à la figure 9.3. Celui-ci est constitué d'un moteur entraînant à 100 Hz (tours/seconde) un arbre monté

4. Pour certaines applications, il peut être utile de connaître la limite d'endurance pour un nombre de cycles plus grand. Nous nous sommes limités à 10^7 pour des raisons de temps d'expérience (à 100 Hz, un test de 10^7 cycles dure environ 28 heures).

sur deux roulements à billes. Un troisième roulement monté avec une excentricité de 0.5 mm sur l'arbre sert de came sollicitant le bloc mobile de l'éprouvette. Ce dernier est plaqué contre la came par un ressort de précharge. La détection de la rupture des cols testés s'effectue au moyen de paires de petits contacts électriques placés de part et d'autre de chaque col, qui détectent le contact du bras pivotant lors d'une rupture de col. Pour s'assurer que le bras pivotant se sépare du bloc fixe dès que le col testé se rompt, nous avons rajouté sur chaque bras pivotant une force verticale (inférieure à 2 N) qui précontraint légèrement les cols axialement. La contrainte induite par cette force de traction (de l'ordre de 3% de la contrainte totale) a été prise en compte dans le calcul de la contrainte appliquée aux cols.

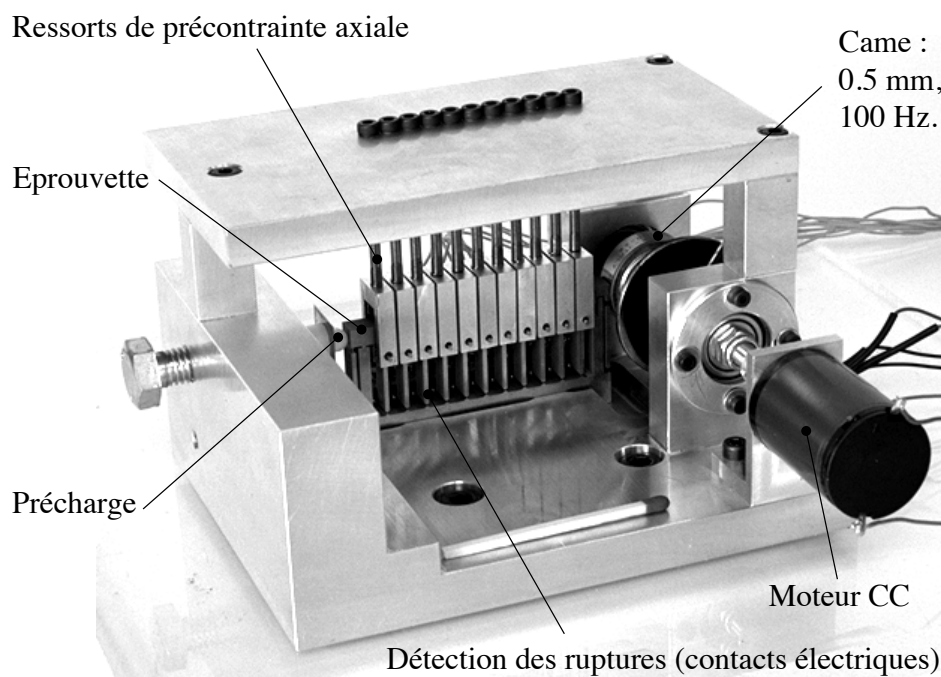


FIG. 9.3 – Photographie du banc de fatigue.

9.4 Analyse des résultats

Les courbes de Wöhler que nous avons tracées pour chaque rugosité et chaque matériau sont en annexe (sect. A.5). Nous avons testé un total de 217 cols. Le tableau 9.1 donne une synthèse des résultats. La figure 9.4 montre la relation entre le facteur de correction c obtenu et la rugosité pour les trois matériaux testés.

Matériau :	K190	K190	K190	W720	W720	W720	CN8	CN8
Cols testés :	44	41	22	11	22	11	33	33
R_a [μm] :	0.2	0.8	1.61	0.2	0.86	2.63	0.2	1.36
$\sigma'_D(10^7)$ [MPa] :	880	730	570	700	920	900	420	350
$\sigma_D(10^7)$ [MPa] :	850	850	850	735	735	735	225	225
c :	1	0.9	0.7	1	1.3	1.2	1.9	1.6
R_e [MPa] :	2050	2050	2050	1815	1815	1815	1100	1100
R_m [MPa] :	2350	2350	2350	1860	1860	1860	1170	1170

TABLEAU 9.1 – Résumé des résultats des essais de fatigue. $\sigma'_D(10^7)$ est la limite d'endurance corrigée obtenue d'après les courbes de Wöhler que nous avons tracées (annexe A.5), $\sigma_D(10^7)$ est la limite d'endurance obtenue par des essais standard et c est le facteur de correction. R_e est la limite élastique et R_m la résistance à la traction selon la littérature. Les matériaux sont notés selon leur appellation courante : K190=X220CrVMo13-4; W720=X3NiCoMoTi18-9-5; CN8=CuNi15Sn8.

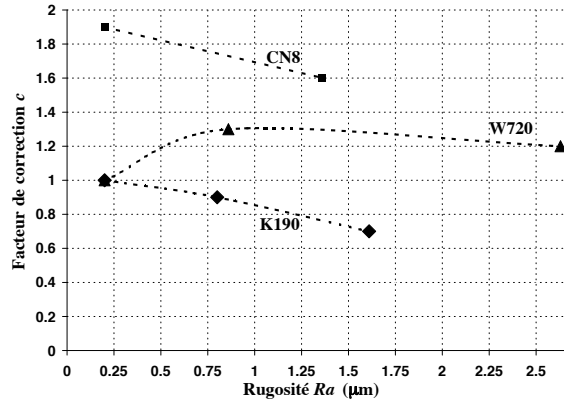


FIG. 9.4 – Relation entre les facteurs de correction c et la rugosité pour les trois matériaux testés (K190=X220CrVMo13-4; W720=X3NiCoMoTi18-9-5; CN8=CuNi15Sn8).

9.5 Interprétation

Pour la plupart des points de la figure 9.4, le facteur de correction c est supérieur à 1 (sa moyenne est de 1.2). Pour expliquer ce résultat, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'il s'agit entre autres causes, de l'effet d'échelle (§ 3.2.3).

Pour la rugosité la plus faible ($R_a = 0.2 \mu\text{m}$), nous observons que, pour les trois matériaux testés, le facteur de correction est supérieur ou égal à 1. Ainsi, pour un usinage en trois étapes laissant un très bon état de surface, la présence de la couche modifiée laissée par le processus d'étincelage ne semble pas dégrader le comportement en fatigue des cols. Au contraire, nous observons même une nette amélioration dans le cas du bronze ($c = 1.9$).

Dans la plupart des cas, nous observons une diminution du facteur de correction c avec l'augmentation de rugosité, ce qui concorde avec nos connaissances a

priori sur la fatigue⁵. Seule la valeur du facteur de correction pour l'acier maraging X3NiCoMoTi18-9-5 et une rugosité $R_a = 0.2 \mu\text{m}$ ne suit pas cette règle puisqu'elle est inférieure au facteur de correction pour $R_a = 0.86 \mu\text{m}$ et $R_a = 2.63 \mu\text{m}$. Nous pensons pouvoir imputer ce phénomène à la corrosion activée par l'immersion prolongée du matériau dans le bain de diélectrique⁶.

9.6 Conclusions

Pour les trois matériaux testés il est possible d'utiliser les limites de fatigue $\sigma_D(10^7)$ obtenues par des essais standard pour déterminer la contrainte admissible σ_{adm} dans le matériau, pour autant que l'usinage par électroérosion soit réalisé en trois étapes et laisse une rugosité très faible ($R_a < 0.2 \mu\text{m}$).

Si, pour diminuer le coût de l'usinage, les étapes de finition ou de finition et de semi-finition ne sont pas réalisées, laissant une rugosité plus importante, alors les résultats des essais standards restent utilisables, sauf dans le cas de l'acier X220CrVMo13-4 qui a été produit par frittage.

Le nombre d'essais réalisés (217) est insuffisant pour tirer des conclusions plus précises ou pour extrapoler avec certitude ces résultats pour d'autres alliages métalliques⁷. Pour des applications très pointues nécessitant une connaissance précise des limites de fatigue des matériaux utilisés, il est pratiquement indispensable d'effectuer des essais de fatigue spéciaux réalisés directement sur les structures articulées ou sur certaines de leurs articulations. Pour d'autres applications moins pointues, on pourra se fier aux données sur la fatigue trouvées dans la littérature ou établies par les fournisseurs des matériaux.

5. La littérature offre plusieurs exemples d'études sur les effets de l'électroérosion sur le comportement en fatigue des matériaux (Abu Zeid 1997) (Jeelani & Collins 1988) qui montrent une baisse de la limite de fatigue avec l'augmentation de la rugosité ou de l'énergie des décharges.

6. Nous avons observé une corrosion de l'acier W720 (X3NiCoMoTi18-9-5) après son immersion dans le bain de diélectrique. Ceci n'a pas été le cas de l'acier K190 (X220CrVMo13-4). Le temps d'immersion est bien plus long pour l'usinage avec une rugosité $R_a = 0.2 \mu\text{m}$ que pour les rugosités inférieures. Ceci pourrait expliquer que seuls les cols dont la rugosité est la plus faible voient leur limite de fatigue diminuée par la présence de piqûres de corrosion à leur surface.

7. Le tableau B.14 donne les propriétés de quelques matériaux intéressants pour la réalisation d'articulations flexibles.

Troisième partie

Méthode et exemples de conception

Chapitre 10

Structures flexibles

L'*analogie cinématique* entre les structures à guidages flexibles et celles à guidages idéaux permet d'utiliser les méthodes classiques de conception cinématique pour synthétiser ou analyser des structures flexibles. Des exemples d'analyse utilisant le critère de Grübler pour déterminer le nombre de DDL d'une structure sont décrits. Ils révèlent l'éventuelle présence de DDL internes ou d'hyperstatismes dans les structures. Des exemples de synthèse sont décrits au chapitre 11. Les avantages des cinématiques parallèles sont très intéressants pour la robotique de haute précision à structures flexibles et leurs inconvénients généralement moins gênants qu'en robotique classique, ce qui incite à les utiliser.

Une synthèse entre les résultats de la première et de la deuxième partie du livre montre quelles sont les limites des guidages flexibles en termes de course : des guidages isolés peuvent atteindre des courses proches de la moitié de leurs dimensions, alors que la course des structures complexes dépasse rarement un dixième de leurs dimensions (encombrement). Les courses angulaires dépassent rarement une quinzaine de degrés. Il existe certains principes de conception qui permettent d'augmenter la course des guidages comme l'utilisation redondante de deux guidages identiques montés en série. D'autres principes de conception permettant de minimiser ou de maximiser les rigidités naturelles des guidages sont décrits. Pour protéger les guidages des surcharges et des dépassements de course, il est important de placer judicieusement des butées mécaniques.

10.1 Cinématique

10.1.1 Définitions

Structure articulée : une structure articulée est le squelette d'un robot¹ ou d'un mécanisme, c'est-à-dire la partie mécanique qui supporte les efforts et transmet les mouvements. Elle est constituée de segments rigides reliés entre eux par des guidages. Elle comporte un segment fixe, appelé *base* et un segment qui porte l'outil ou dont le mouvement est utilisé, appelé *organe terminal*. Certains autres segments appelés *segments moteurs* subissent les forces produites par les actionneurs pour déplacer l'organe terminal selon ses degrés de liberté.

1. Dans le cas des robots, la structure articulée est souvent appelée *porteur* (André *et al.* 1983) (Coiffet 1992).

Cinématique des structures articulées : la cinématique étudie le mouvement des structures articulées, indépendamment des forces en présence (Hunt 1978). Ce mouvement peut être décrit par la position, la vitesse et l'accélération des différentes parties de la structure.

Géométrie cinématique : ce sous-ensemble de la cinématique n'étudie que les déplacements des structures articulées indépendamment de la variable temporelle (Hunt 1978). Dans cette section nous ne traitons que de cette partie de la cinématique qui est la plus simple.

Principe d'analogie cinématique : deux structures articulées sont dites *cinématiquement analogues* si leurs déplacements sont identiques, indépendamment des éléments physiques qui les constituent et des forces en présence. Ainsi, une structure articulée dont les guidages sont de type roulant et une autre structure dont les guidages sont de type flexible peuvent avoir la même cinématique si leurs mouvements sont identiques. Nous appelons cette équivalence entre les fonctions essentielles de ces deux structures aux éléments constitutifs différents l'*analogie cinématique*².

Guidages analogues : deux guidages sont dits *analogues* s'ils ont la même cinématique, indépendamment de leur constitution physique. Exemple : les pivots à lames croisées, le roulement à bille et le palier lisse rotatif sont trois guidages analogues.

Guidages homologues : deux guidages sont dits *homologues*³ s'ils ont une constitution physique voisine, indépendamment de leur cinématique. Exemple : le pivot à lames croisées et la table à deux lames parallèles sont des guidages homologues car ils sont tous deux constitués de deux lames flexibles reliant deux blocs rigides.

10.1.2 Enoncé de la méthode

L'*analogie* entre les structures articulées à guidages idéaux et celles à guidages flexibles permet d'utiliser les méthodes classiques de conception cinématique pour synthétiser ou analyser des structures flexibles.

La *synthèse* s'effectue en traduisant une structure à guidages idéaux conçue à l'aide de méthodes classiques en une structure à guidages flexibles analogue.

L'*analyse* s'effectue en traduisant la structure à guidages flexibles en une structure à guidages idéaux analogue et en étudiant sa cinématique à l'aide des méthodes classiques.

La *traduction* d'une structure à guidages idéaux en une structure à guidages flexibles (ou vice-versa) s'effectue en remplaçant les guidages idéaux par des guidages flexibles analogues (ou vice-versa).

2. Le principe d'*analogie cinématique* introduit par l'auteur est inspiré de l'anatomie qui qualifie d'*analogues* des organes qui ont des fonctions semblables et parfois une ressemblance de forme, mais dont l'origine est entièrement différente (Lender et al. 1992). Exemple : l'aile d'oiseau et l'aile d'insecte.

3. Le concept d'*homologie* entre les guidages introduit par l'auteur est inspiré de l'embryologie qui qualifie d'*homologues* des organes dont le mode d'utilisation peut être différent mais qui dérivent des mêmes ébauches embryonnaires dans deux groupes zoologiques voisins (Lender et al. 1992). Exemple : la patte antérieure de mammifère et l'aile d'oiseau.

L'exercice itératif de traductions synthétique et analytique est d'une grande aide lors de la conception de structures flexibles. Comme la traduction d'une langue à une autre, la traduction d'une structure à guidages idéaux en une structure flexible (ou vice-versa) n'est pas automatique, car elle n'est pas univoque. Elle requiert de l'expérience et une capacité d'interprétation. Ainsi, cette méthode de conception n'est pas systématique, mais *heuristique*⁴.

10.1.3 Analyse cinématique

Notre méthode permet de recourir aux nombreuses démarches de conception et d'analyse cinématique que l'on trouve dans la littérature pour des structures articulées à guidages idéaux lors de la conception de structures flexibles. Ce n'est pas le lieu ici de décrire ni même d'énumérer ces démarches qui sont abondamment décrites dans la littérature (Reuleaux 1875) (Artobolevski 1975) (Hunt 1978) (Erdman 1993) (Flückiger 1998) (Waldron & Kinzel 1999).

Nous ne décrivons ici que le critère d'analyse cinématique de Grübler (1917)⁵ qui permet de déterminer le nombre de degrés de liberté M d'une structure articulée comportant n guidages à d_i ($1 \leq i \leq n$) degrés de liberté et comportant b boucles

$$M = \sum_{i=1}^n d_i - 6b. \quad (10.1)$$

Pour des structures planes, cette formule devient

$$M = \sum_{i=1}^n d_i - 3b. \quad (10.2)$$

Exemples d'analyse

Analysons, selon cette méthode, la cinématique du bras flexible de la figure 10.1. Il s'agit d'une structure sérielle (pas de boucle : $b = 0$) composée de deux articulations ($n = 2$) de 3 DDL chacune, reliant 3 segments rigides : le bloc fixe **o**, le bloc mobile **m** et le bloc intermédiaire **i**. Selon le critère (10.1), le nombre de degrés de ce bras est $M = 3 + 3 - 0 = 6$. Comme le montre la figure, les 3 DDL a, b et c correspondent aux mouvements du bloc mobile, alors que les DDL d, e et f correspondent aux mouvements du bloc intermédiaire, et ne déplacent pratiquement pas le bloc mobile. Ainsi, nous pouvons interpréter le résultat du critère (10.1) en disant que, du point de vue fonctionnel, ce bras ne possède que 3 DDL, et que les DDL c, d et e sont des degrés de liberté *internes*⁶ à la structure. Ceci nous permet de traduire ce bras en la structure à guidages idéaux de la figure 10.2 d qui a 3 DDL identiques aux 3 DDL *externes* du bras flexible (a, b et c).

4. Heuristique se dit d'une méthode d'exploration d'un problème procédant par évaluations successives et hypothèses provisoires (Le Grand Robert de la langue française).

5. Cette méthode est généralement attribuée à Grübler (1917) (Schoenflies & Grübler 1908), mais on l'attribue parfois également à Kutzbach (1929). L'expression (10.1) n'est pas la formule originale, mais une manière pratique de l'écrire qui est proposée par Hunt (1978).

6. On peut trouver une définition de la notion de degré de liberté *interne* dans (Waldron & Kinzel 1999), par exemple.

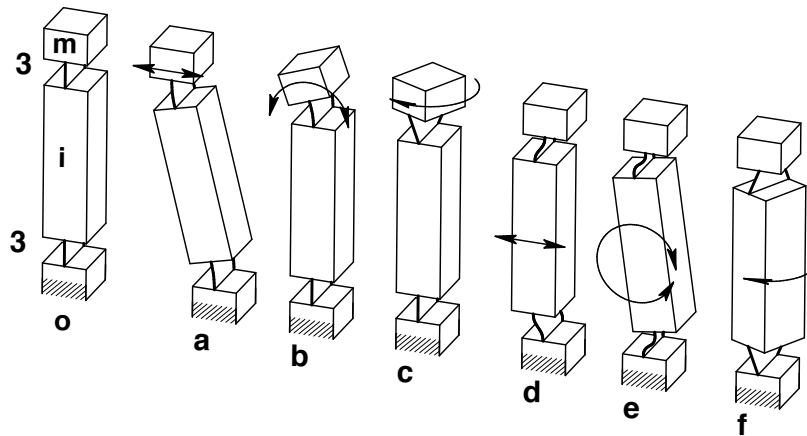
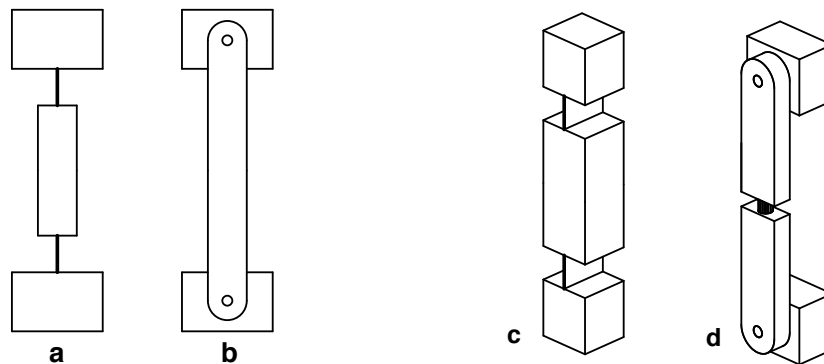


FIG. 10.1 – Les 6 DDL d'un bras flexible.

FIG. 10.2 – Traduction du bras flexible en une structure à guidages idéaux dans le plan ($a \rightarrow b$) et dans l'espace ($c \rightarrow d$) (d : le bras est articulé en son milieu par un guidage rotoïde dont l'axe de rotation est confondu avec l'axe du bras).

Si l'on désire utiliser ce bras pour réaliser une structure articulée plane, alors les DDL f et c ne sont plus à considérer, étant donné que leur axe de rotation n'est pas normal au plan de la structure. Interprété comme une structure plane, le bras flexible a 4 DDL, dont 2 externes (a et b) et 2 internes (d et e). Il peut donc être traduit en la structure à guidages idéaux de la figure 10.2 b .

A lumière de ces résultats, analysons à présent la table à quatre cols en la considérant comme une structure plane. Nous pouvons la traduire en la structure à guidages idéaux de la figure 10.3 b . Appliquons le critère (10.2) à cette structure : elle comporte 4 articulations à 1 DDL ($n = 4$) et 1 boucle ($b = 1$). Son nombre de DDL est donc $M = 4 - 3 = 1$. La table à quatre cols est bel et bien un guidage à 1 DDL.

Analysons à présent la table à quatre cols comme une structure articulée spatiale. Nous pouvons la traduire en la structure à guidages idéaux de la figure 10.3 c . Appliquons le critère (10.1) à cette structure : elle comporte 6 articulations à 1 DDL ($n = 6$) et 1 boucle ($b = 1$). Son nombre de DDL est donc $M = 6 - 6 = 0$. Or l'expérience montre que la table à quatre cols possède 1 DDL. L'enseignement à

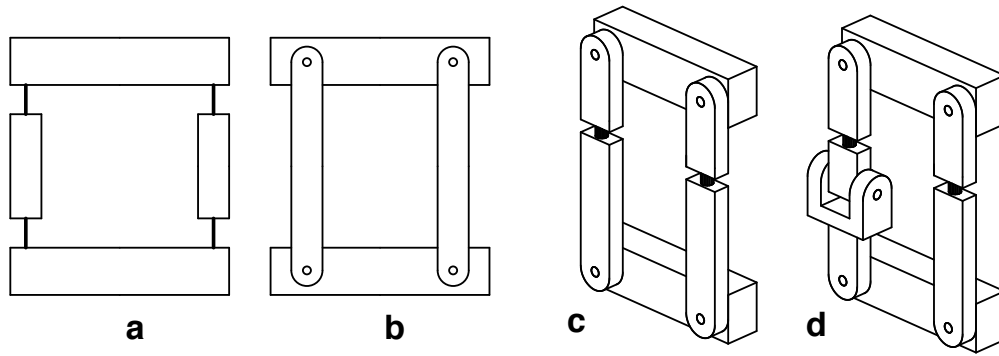


FIG. 10.3 – Analyse de la table à quatre cols comme une structure plane ($a \rightarrow b$), puis comme une structure spatiale ($a \rightarrow c$). La cinématique c est hyperstatique. La cinématique analogue d est isostatique.

tirer du résultat du critère appliqué est que cette structure comporte un hyperstatisme⁷. En effet, cette structure ne possède 1 DDL que si ses deux bras sont dans le même plan. Si cette structure est fabriquée par électroérosion à fil de manière monolithique, alors il est aisé de garantir la coplanarité du mouvement des deux bras et l'hyperstatisme n'est pas gênant. Notons que pour supprimer cet hyperstatisme, il serait par exemple possible de rajouter une articulation à l'un des bras (FIG. 10.3 d).

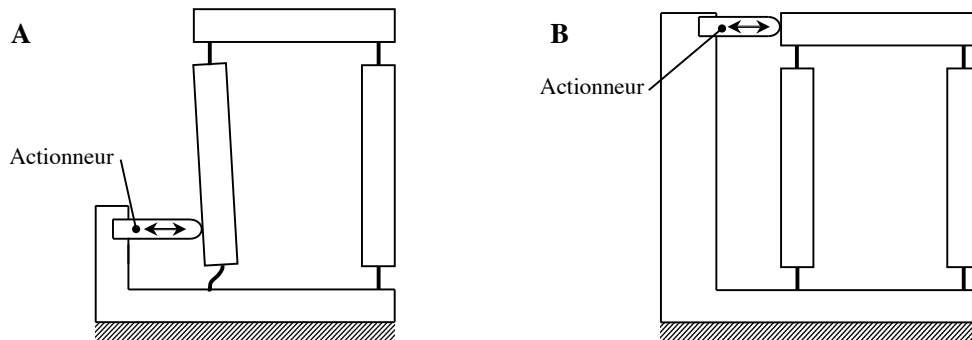


FIG. 10.4 – Des forces externes, comme celles produites par les actionneurs peuvent exciter les DDL internes des structures et perturber leur bon fonctionnement (A : mauvais, B : bon).

Considérons à présent les degrés de liberté internes de la table à quatre cols. Selon la figure 10.1, nous savons que chacun des deux bras peut se déplacer selon les DDL d, e et f. La table possède donc 6 DDL internes. Si aucune force ne vient exciter ces DDL, alors leur présence n'altère en rien la fonction du guidage. Par contre, si des forces liées à l'accélération⁸ de la masse du bloc intermédiaire ou

7. La mise en évidence des hyperstatismes est très importante, car leur présence peut faire varier fortement les rigidités des structures flexibles ainsi que les contraintes que subissent leurs articulations, et ceci de manière essentiellement imprévisible. Il s'agit donc, lors de la conception, de veiller à éviter les hyperstatismes.

8. Il est important de connaître les degrés de liberté internes d'une structure pour en faire l'analyse dynamique, étant donné qu'ils sont susceptibles d'être le siège de vibrations importantes.

à des charges externes appliquées sur le bloc mobile ou sur le bloc intermédiaire déplacent ce dernier selon l'un de ses DDL internes, alors la fonction du guidage peut être altérée. Par exemple, l'utilisation d'un actionneur qui agit directement sur le bloc intermédiaire est déconseillée⁹ (FIG. 10.4 A). Il est préférable d'entraîner directement le bloc mobile (FIG. 10.4 B).

Ces exemples illustrent comment des outils et des principes de conception utilisés habituellement pour étudier le comportement cinématique de structures à guidages idéaux peuvent être utilisés pour analyser le comportement de structures flexibles.

10.1.4 Synthèse cinématique

Au chapitre 11 nous montrons comment synthétiser une structure flexible à partir d'une structure analogue à guidages idéaux au travers de plusieurs exemples.

10.1.5 Cinématiques parallèles

Avantages et inconvénients

Considérons les avantages et les inconvénients des robots parallèles¹⁰ tels qu'énumérés par Clavel (1994) du point de vue des robots de très haute précision à structures flexibles. Les avantages des robots parallèles sont :

- rigidité mécanique élevée,
- fréquence propre élevée, donc peu d'erreur de reproductibilité des mouvements due à une oscillation incontrôlée de la structure mobile,
- possibilité de mouvement à haute dynamique (accélérations élevées)
- possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe,
- capacité de charge élevée.

Ces avantages sont d'un très grand intérêt pour la robotique de haute précision. Les inconvénients des robots parallèles sont :

- volume de travail limité,
- modèles géométriques parfois difficiles à déterminer,
- présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile,
- couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématiques.

La géométrie cinématique des guidages flexibles est généralement différente de celle des guidages idéaux les plus simples pour lesquels les trajectoires sont souvent de simples droites ou cercles. Ceci rajoute une difficulté supplémentaire dans la détermination des modèles géométriques. Au demeurant, les applications de robotique de haute précision utilisent souvent un système de mesure de position extéroceptif¹¹,

9. Cette solution a parfois été utilisée pour profiter d'une amplification du mouvement produit par des actionneurs piézoélectriques.

10. Un manipulateur parallèle est constitué d'un organe terminal à n DDL et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par n actionneurs simples (Merlet 1997).

11. Un système de mesure de position extéroceptif permet de connaître directement la position de l'organe terminal, sans se baser sur les positions individuelles des articulations de la structure

auquel cas les inexactitudes des modèles géométriques ont peu d'influence sur la précision des mouvements. Il est alors possible d'approximer les guidages flexibles par des guidages idéaux analogues lors de la détermination des modèles géométriques.

Dans le cas des robots de haute précision à structures flexibles, la faible course des guidages a pour conséquence de diminuer le risque de passer par les singularités de la cinématique. De plus, le couplage entre les chaînes cinématiques varie peu dans tout le volume de travail, et la diminution du volume de travail est moins importante, vu qu'il y a moins de risques d'interférences mécaniques entre les différentes chaînes cinématiques. Ainsi, les inconvénients des architectures parallèles sont moins pénalisants dans le cas des robots de haute précision à structures flexibles que dans le cas des robots industriels traditionnels.

En conclusion, les cinématiques parallèles sont tout particulièrement bien adaptées aux robots de haute précision à structures flexibles.

Fonctions des structures articulées à cinématique parallèle

Schématiquement, une structure parallèle typique (FIG. 10.5) est composée d'un bloc de base fixe, d'un bloc mobile à M DDL, et de M segments moteurs sur lesquels s'exercent les forces des actionneurs. Sans actionneurs, le bloc mobile peut se déplacer librement selon ses M DDL. Si les M segments moteurs sont bloqués, alors le bloc mobile est bloqué également (0 DDL). Le mouvement de chacun des segments moteurs commande le mouvement de chacun des DDL du bloc mobile.

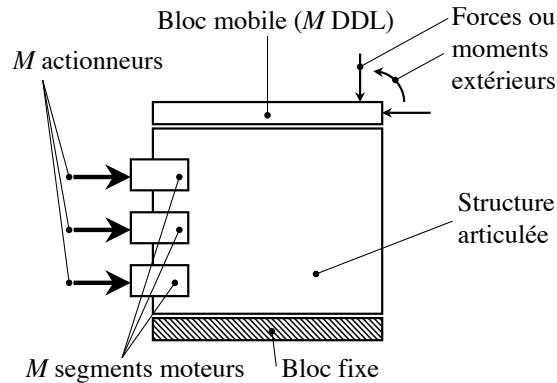


FIG. 10.5 – Schéma d'une structure parallèle.

Les fonctions essentielles des structures articulées sont donc :

- de bloquer le mouvement du bloc mobile selon les DDL transverses en résistant rigidement aux charges,
- d'imposer la position du bloc mobile selon ses DDL en transmettant la force des actionneurs au bloc mobile au travers de chaînes cinématiques rigides.

mécanique. L'observation de l'organe terminal au moyen d'un système de vision artificielle comme une caméra est un exemple courant.

Critères d'optimisation

Lors de la conception de structures articulées, l'on cherche à :

- minimiser l'influence des forces externes sur la position du bloc mobile ; ceci se fait en maximisant la rigidité de la structure selon ses DDL transverses pour résister aux forces et moments transverses et en maximisant la rigidité des chaînes cinématiques qui mènent des segments moteurs au bloc mobile pour résister aux forces et moments naturels ;
- maximiser les charges admissibles ;
- minimiser les forces de rappel résultant de la nature élastique des guidages flexibles ;
- maximiser le volume de travail et à minimiser l'encombrement ; ces deux contraintes sont antinomiques puisque les lois de similitudes montrent que les déplacements en translation augmentent proportionnellement avec les dimensions des structures¹² ; avec les structures flexibles, ce sont généralement les courses des guidages qui limitent le volume de travail et non les interférences mécaniques entre les segments, comme c'est généralement le cas avec les structures traditionnelles ; ainsi, il s'agit d'optimiser la disposition des chaînes cinématiques, pour minimiser les débattements des guidages les plus sollicités.

10.2 Choix des matériaux

Le choix des matériaux pour la réalisation de guidages flexibles, comme pour tout autre mécanisme, se fait selon un grand nombre de critères classiques tels que la densité, la résistance à la corrosion, l'usinabilité, le prix, etc., que nous n'aborderons pas.

La particularité des guidages flexibles est qu'ils nécessitent des matériaux tolérant de grands allongements relatifs ε sans déformation plastique. Or selon la loi de Hooke, l'allongement relatif est proportionnel à la contrainte dans le matériau : $\varepsilon = \sigma/E$. Choisir le matériau qui permet d'obtenir des guidages avec les plus grandes courses possibles, revient à choisir le matériau qui a le plus grand rapport

$$\sigma_{adm}/E.$$

Le tableau B.14 donné en annexe indique les propriétés de plusieurs alliages métalliques du commerce appropriés à la fabrication de structures flexibles.

10.3 Volume de travail

10.3.1 Synthèse théorie-technologie

L'élancement maximal des lames est de 60 (§ 7.3.1) et l'allongement relatif $\varepsilon_{adm} = \sigma_{adm}/E$ maximal admissible par les matériaux couramment utilisés pour

12. Remarque : les lois de similitudes montrent, par contre, que les courses angulaires sont indépendantes des dimensions des guidages.

réaliser des structures flexibles dépasse rarement 0.4% (sect. 10.2 et TAB. B.14). A partir de ces deux contraintes d'ordre technologique qui s'écrivent

$$\frac{l}{h} \leq 60 \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{adm}}{E} \leq \frac{0.4}{100} \quad (10.3)$$

et en utilisant les résultats de la partie *Théorie*, nous pouvons déterminer les limites actuelles des guidages les plus simples en termes de courses.

Courses maximales en rotation

- La course angulaire d'une lame en flexion simple (4.3) est limitée à $\pm 28^\circ$.
- La course angulaire du pivot lames croisées (6.3) est également limitée à $\pm 28^\circ$.
- La course angulaire du pivot à deux lames croisées non séparées (6.5) est limitée à $\pm 14^\circ$.
- La course angulaire du pivot RCC à deux lames croisées (sect. 6.3) avec $p = l/4$ est limitée à $\pm 5^\circ$. Si l'on fait tendre p vers 0 pour maximiser la course, cette dernière tend vers $\pm 7^\circ$.
- La course angulaire du pivot croisé à quatre cols (sect. 6.5) prismatiques est limitée à $\pm 46^\circ$.

Courses maximales en translation

- La course en translation de la table à deux lames parallèles (5.10) est limitée à $\pm l/12.5$.
- La course de la table à quatre cols prismatiques (5.71) avec $\xi = 0.2$ est limitée à $\pm l/2.6$. Si l'on fait tendre ξ vers 0 pour maximiser la course, cette dernière tend vers $\pm l/2$.

Commentaires

Ces valeurs sont des extrêmes obtenus en poussant à la fois le matériau et la technologie de fabrication à leur limite. Dans la pratique il n'est souvent pas possible, ou pas souhaitable, de les atteindre pour les raisons suivantes :

- Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3.6, la rigidité transverse en traction-compression des articulations diminue d'autant plus que ces dernières s'écartent de leur position nominale. Ainsi, il s'agit souvent de gérer un compromis entre la course admissible et la rigidité transverse dont l'issue dépend de l'application.
- Les conditions d'usinage d'une structure complexe ne permettent pas toujours d'atteindre les élanements maximaux, si l'épaisseur de la structure impose une grande distance entre les guides-fil par exemple.
- Selon les applications, il n'est pas toujours possible d'utiliser des matériaux aussi performants.

- Dans une cinématique complexe, qui plus est si elle est parallèle, les débattements des différents guidages sont généralement inégalement repartis. Donc seuls certains guidages sont utilisés à leurs limites, ce qui a pour conséquence que les courses d’une structure flexible complexe dépassent rarement *un dixième de son encombrement* et que ses débattements angulaires dépassent rarement *une quinzaine de degrés*.

Le calcul des courses maximales révèle encore une fois ¹³ l’avantage des structures à cols prismatiques de petites dimensions (pivots RCC et croisé à quatre cols, table à quatre cols) par rapport aux structures à lames (pivots à lames croisées, pivot RCC à lames, table à deux lames parallèles) : pour une technologie d’usinage donnée, permettant d’usiner des lames d’un élanement donné, les structures à cols ont une plus grande course admissible.

Notons au passage que les courses angulaires sont indépendantes des dimensions, alors que les courses en translation y sont proportionnelles : un pivot à lames croisées dont toutes les dimensions sont doublées a la même course angulaire que le pivot original, alors qu’une table à deux lames parallèles dont toutes les dimensions sont doublées possède une course en translation double de celle de la table originale.

10.3.2 Disposition sérielle de DDL redondants

La disposition sérielle de deux DDL identiques permet :

- de doubler la course admissible pour un encombrement pratiquement inchangé ;
- éventuellement de compenser les mouvements parasites des guidages (non-rectitude des guidages en translation et translation parasite des guidages en rotation).

En revanche, l’un des deux DDL redondants est un DDL interne à la structure pouvant être excité soit par des forces liées à l’accélération des masses lors de mouvements dynamiques soit par des charges transverses statiques. Ainsi, la présence de ce DDL interne peut-elle

- diminuer les rigidités transverses,
- rendre peu reproductible le mouvement du guidage,
- diminuer la course admissible,
- être le siège de vibrations.

Ces inconvénients peuvent être palliés si le DDL interne est couplé au DDL externe par une chaîne cinématique appropriée (ce qui revient à supprimer le DDL interne). Ceci est illustré par deux exemples de guidages redondants en translation et en rotation.

Guidage en translation redondant

Les exemples les plus courants sont la table compensée à quatre lames parallèles (FIG. 10.6) et la table compensée à huit cols (FIG. 10.7). Elles consistent en deux tables à deux lames parallèles (respectivement à quatre cols) mises en série de telle manière que leurs mouvements verticaux parasites f_p se compensent mutuellement.

13. Cet avantage a déjà été relevé au paragraphe 5.3.7.

Si les déformations des deux tables sont identiques alors la translation du bloc mobile est rectiligne et la course de la table compensée est le double de la course de chacune des deux tables qui la constitue.

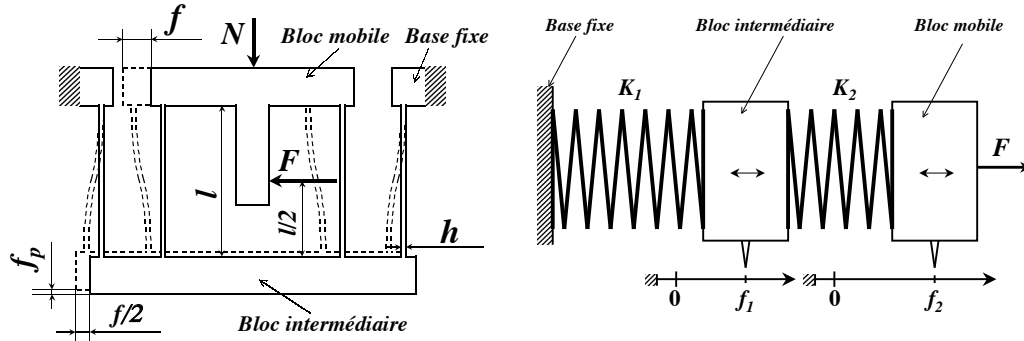


FIG. 10.6 – Table compensée à quatre lames parallèles et équilibre des rigidités.

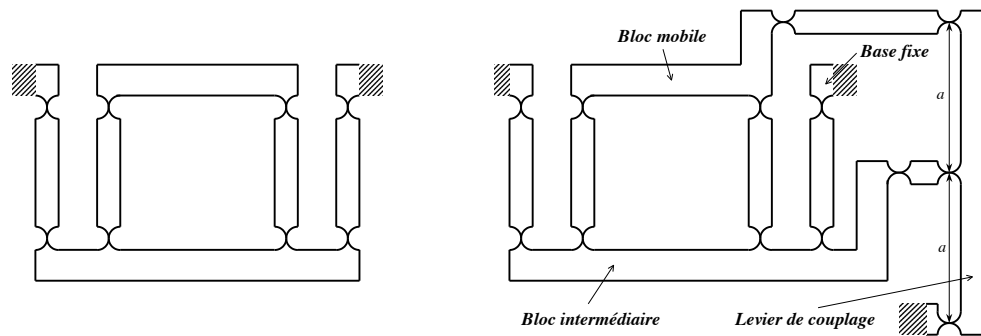


FIG. 10.7 – Table compensée à huit cols. Un levier de couplage supprime le degré de liberté interne.

Pour analyser cette structure, traduisons-la en une structure analogue à guidages idéaux (FIG. 10.8). Selon le critère (10.2), cette structure qui comporte 8 pivots et 2 boucles est dotée de 2 DDL. L'un de ces DDL est la translation horizontale du bloc mobile, il s'agit du DDL externe. Le second DDL peut être interprété soit comme étant la translation horizontale du bloc intermédiaire (FIG. 10.8 A) (DDL interne) soit comme étant la translation verticale du bloc mobile¹⁴ (FIG. 10.8 B) (second DDL externe).

Pour la suite de cette analyse, nous considérons ce second DDL comme un DDL interne (A) qui produit un mouvement parasite f_p du bloc mobile. Ce DDL interne peut être excité soit par des forces liées à l'accélération de sa masse lors de mouvements dynamiques (Genequand 1996) soit par des charges transverses statiques. Considérons par exemple la charge N de la figure 10.6. Comme nous l'avons vu (§ 5.1.6) la rigidité K_1 de la table constituée par les deux lames intérieures sollicitées en compression diminue sous l'effet de N et celle (K_2) de la table constituée par

14. La position nominale de cette structure correspond à une singularité cinématique pour laquelle le DDL en translation verticale disparaît. Toutefois, pour toute autre position le bloc mobile possède 2 DDL.

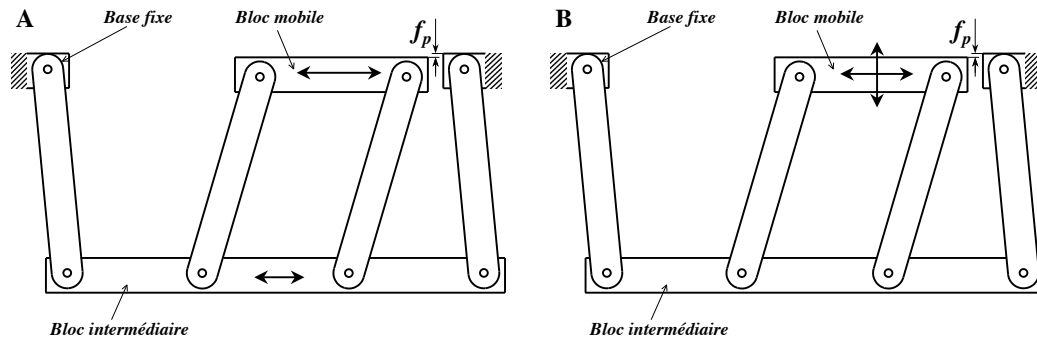


FIG. 10.8 – Traduction de la table compensée en une structure à guidages idéaux pour son analyse. Cette structure comporte 2 DDL.

les deux lames extérieures sollicitées en traction augmente. Or, en l'absence d'effets dynamiques, la position du bloc intermédiaire dépend de l'équilibre de ces deux rigidités. Si elles sont identiques ($K_1 = K_2$) alors $f_1 = f_2/2$ et la translation du bloc mobile est rectiligne. Si elles sont différentes ($K_1 \neq K_2$), ce qui est le cas sous l'effet de N , alors $f_1 \neq f_2/2$ et la translation du bloc mobile s'écarte d'une droite. En outre, la course admissible diminue vu que l'une des tables à lames parallèles est plus sollicitée que le seconde. Enfin, la rigidité transverse sous l'effet de N est faible puisqu'elle correspond à l'un des DDL de la structure.

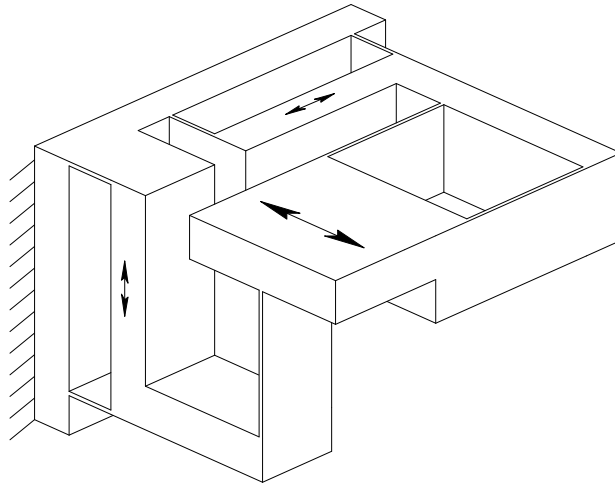


FIG. 10.9 – Guidage rectiligne à lames : deux guidages plans XY disposés perpendiculairement définissent une droite (intersection des deux plans) le long de laquelle se translate le bloc mobile.

En résumé, le DDL interne des tables compensées peut être excité soit statiquement sous l'effet de charges transverses soit dynamiquement sous l'effet des accélérations. Son mouvement est généralement néfaste puisqu'il résulte en une erreur de rectitude, une diminution de la rigidité transverse du guidage, une diminution de la course admissible et éventuellement des vibrations.

Pour pallier cet inconvénient, il s'agit de supprimer le DDL interne du bloc intermédiaire en couplant son mouvement à celui du bloc mobile de telle sorte que le mouvement du premier soit toujours la moitié de celui du second. La solution plus connue est celle présentée à la figure 10.7 qui utilise un levier avec un rapport 1/2. Le critère (10.2) appliqué à cette structure après sa traduction en une structure plane à guidages idéaux (cette structure comporte 13 pivots et 4 boucles) montre qu'elle possède un seul DDL : $M = 13 - 3 \times 4 = 1$ DDL.

REMARQUE : il existe d'autres guidages en translation rectiligne qui ne présentent pas l'inconvénient d'avoir un DDL interne. Un exemple est montré à la figure 10.9.

Guidage en rotation redondant

De l'empilement sériel de deux pivots RCC à quatre cols dont les centres de rotation sont confondus (point O FIG. 10.11 A) résulte une structure dont la course angulaire est le double de celle de chacun des pivots RCC qui la constitue. Le critère (10.2) indique que cette structure est dotée de 2 DDL. L'un correspond à la rotation du bloc mobile BM autour de O : il s'agit du DDL externe. L'autre correspond à la rotation du bloc intermédiaire BI autour de O : il s'agit d'un DDL interne. Tout comme celui de la table compensée, le DDL interne du pivot compensé peut être excité statiquement sous l'effet de charges transverses ou dynamiquement sous l'effet des accélérations. Son mouvement est généralement néfaste puisqu'il produit une mauvaise reproductibilité de la trajectoire du bloc mobile, une faible rigidité radiale, une diminution de la course admissible et éventuellement des vibrations.

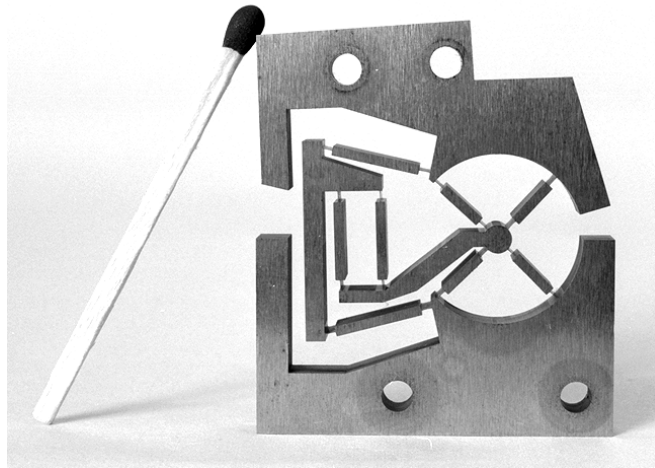


FIG. 10.10 – *Guidage en rotation redondant à grande course angulaire ($\pm 15^\circ$) et grande rigidité radiale avec couplage du bloc intermédiaire.*

Pour pallier cet inconvénient, il s'agit de supprimer le DDL interne du bloc intermédiaire en couplant son mouvement angulaire à celui du bloc mobile, de telle sorte que la rotation du premier soit toujours la moitié de celle du second. Nous avons inventé une cinématique réalisant cette fonction de couplage (FIG. 10.11 B).

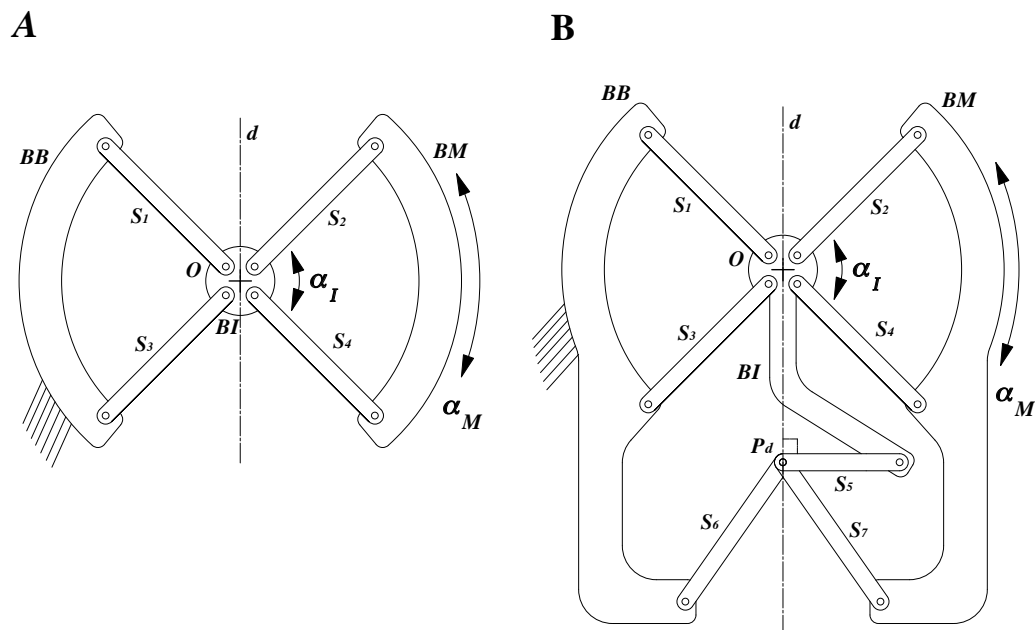


FIG. 10.11 – A : Pivots RCC en série. B : La cinématique de couplage supprime le DDL interne.

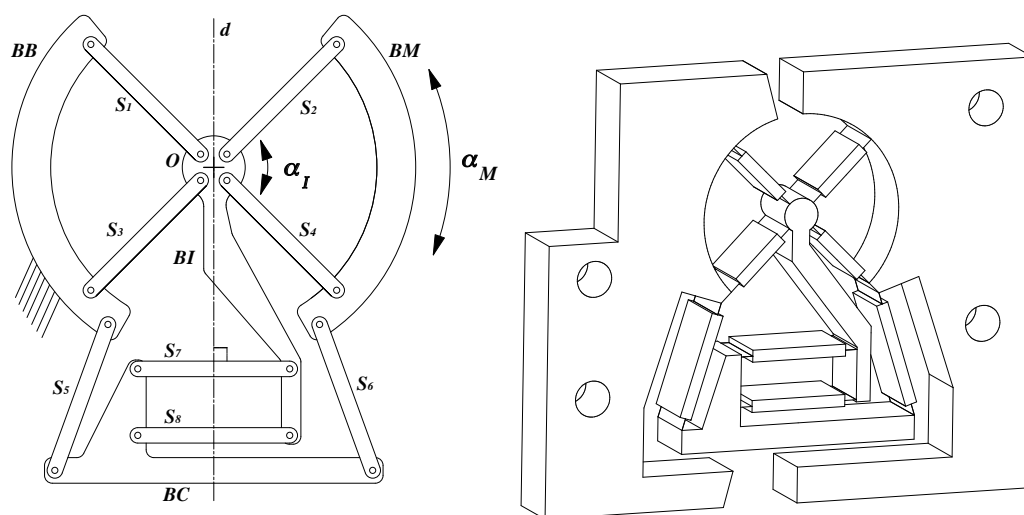


FIG. 10.12 – Cinématique de couplage pouvant être réalisée par découpage dans une plaque et prototype monolithique.

Les conditions nécessaires pour que cette cinématique constitue un couplage de rapport ¹⁵1/2 sont les suivantes :

- les segments S_6 et S_7 sont symétriques par rapport à la droite d qui passe par le centre de rotation O du pivot compensé et par le pivot double P_d ,
- le segment S_5 est perpendiculaire à d .

La cinématique de la figure 10.11 B comporte un pivot double P_d , ce qui ne permet pas de la réaliser de manière monolithique par découpage à l'électroérosion à fil dans une plaque. La cinématique de la figure 10.12 A remplit la même fonction et présente l'avantage de ne comporter que des pivots simples. Elle a donc pu être traduite en une structure à guidages flexibles usinable dans une seule plaque de matière (FIG. 10.12 B et 10.10) (Henein *et al.* 1998). Cette structure flexible à 1 DDL comporte 16 cols circulaires tronqués de $30\ \mu\text{m}$ d'épaisseur et de 6.5 mm de rayon dont la course angulaire est de $\pm 10^\circ$. La course angulaire du bloc mobile est de $\pm 15^\circ$. Des mesures de rigidité radiale ont montré que la rigidité du système sans la cinématique de couplage est de $0.6\ \text{N}/\mu\text{m}$ et de $5.3\ \text{N}/\mu\text{m}$ avec la chaîne de couplage. La suppression du DDL interne a ainsi augmenté la rigidité radiale d'un facteur 9 environ.

La disposition des deux pivots RCC de la figure 10.11 A a pour effet de cumuler les translations parasites. Ainsi, la translation parasite du bloc mobile est approximativement le double de celle des pivots RCC individuels. Dans d'autres dispositions, les translations parasites des pivots RCC peuvent partiellement se compenser mutuellement, diminuant ainsi la translation parasite du bloc mobile.

10.3.3 Butées mécaniques

Pour protéger les structures flexibles des surcharges et des dépassements de course, des butées mécaniques limitant les débattements sont généralement utilisées. Dans la mesure du possible ces butées sont intégrées à la structure monolithique, ce qui permet de les positionner très précisément. Dans le cas de guidages flexibles à 1 ou 2 DDL ces butées sont généralement simples à concevoir. Dans le cas de structures flexibles plus complexes, le choix de la position des butées peut être plus délicat. On distingue deux approches :

15. Une manière élégante de montrer qu'une telle cinématique impose au bloc intermédiaire une rotation qui est la moitié de celle du bloc mobile est d'effectuer un changement de référentiel en considérant le bloc intermédiaire BI comme fixe et les bloc de base BB et mobile BM comme libres. Dans ce référentiel, le couplage d'un rapport 1/2 se traduit par un mouvement symétrique de BB et BM par rapport à d . Ce mouvement symétrique résulte en une translation du pivot double P_d le long de d . Un guidage rectiligne de P_d le long de d garantit donc le couplage de rapport 1/2. Pour réaliser le guidage de P_d nous utilisons le segment S_5 qui impose à P_d de suivre un arc de cercle tangent à d . Pour de faibles angles de rotation, cet arc de cercle peut être confondu avec d et cette cinématique constitue un couplage de rapport très proche de 1/2. Pour de plus grands angles de rotation, le rapport de couplage s'écarte de 1/2, donc les deux pivots RCC constitutifs du pivot compensé ne tournent plus du même angle ce qui réduit la course admissible. En revanche, cette variation du rapport de couplage au cours de la rotation est parfaitement reproductible, donc la trajectoire suivie par le bloc mobile BM est répétable, le pivot est rigide radialement, et le mode de vibration correspondant à la rotation du bloc intermédiaire BI est moins susceptible d'être excité. Il est aisé de vérifier à l'aide du critère (10.2) que cette structure est dotée d'un seul DDL.

- Des butées limitant les débattements des segments moteurs (FIG. 10.13 A) protègent la structure contre d'éventuelles erreurs de consignes des actionneurs, elles sont donc très utiles dans la phase de mise au point du robot et de sa commande. En cas de surcharge sur le bloc mobile d'une structure dont les actionneurs sont réversibles¹⁶, ces butées empêchent de dépasser les courses admissibles mais ne protègent pas contre les surcharges.
- Des butées limitant les débattements du bloc mobile (FIG. 10.13 B) protègent la structure contre d'éventuelles surcharges si les actionneurs sont réversibles. Si les actionneurs sont irréversibles alors il est nécessaire d'utiliser des segments préchargés qui se déboîtent ou s'escamotent lorsque les charges dépassent un certain seuil, laissant le bloc mobile s'appuyer contre ses butées. En cas d'erreur de consigne sur les actionneurs, ces butées empêchent de dépasser les courses admissibles mais ne préservent pas la structure des efforts produits par le actionneurs.

Il n'est pas possible de combiner ces deux approches pour des raisons d'hyperstatisme.

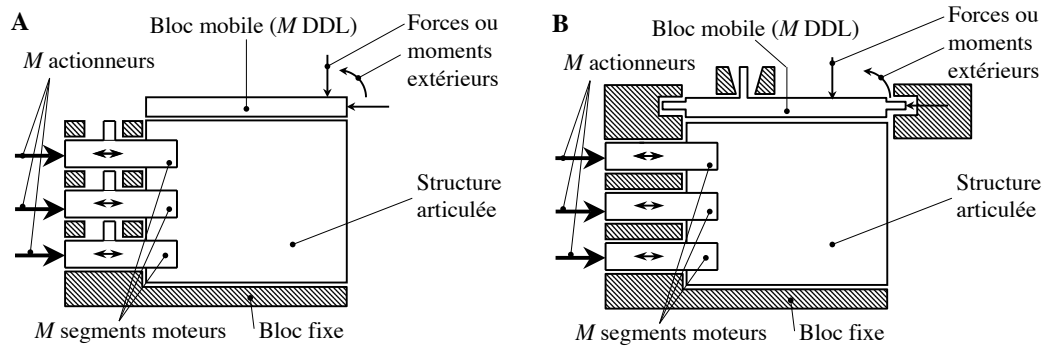


FIG. 10.13 – Butées mécaniques limitant les débattements des segments moteurs (A) ou du bloc mobile (B).

10.4 Rigidités

10.4.1 Minimisation des rigidités naturelles

Dans certains cas, la force de rappel propre aux guidages flexibles s'avère gênante. Dans le but de la diminuer, nous avons recherché des principes permettant de minimiser la rigidité naturelle des guidages. Nous montrons par exemple au paragraphe 5.3.6 que l'utilisation de tables à quatre cols, avec un paramètre ξ tendant vers 0, permet de minimiser la rigidité naturelle en translation. Il existe d'autres principes permettant de réduire davantage cette rigidité.

Nous montrons au paragraphe 5.1.5 et 5.1.6 que la rigidité naturelle de la table à deux lames parallèles dépend de la charge $\bar{N}$ qu'elle supporte. Il est possible d'exploiter cette propriété pour réaliser des guidages dont la rigidité naturelle réglable

16. Si les actionneurs sont irréversibles, ce type de butée n'a aucun effet dans le cas de surcharges appliquées sur le bloc mobile.

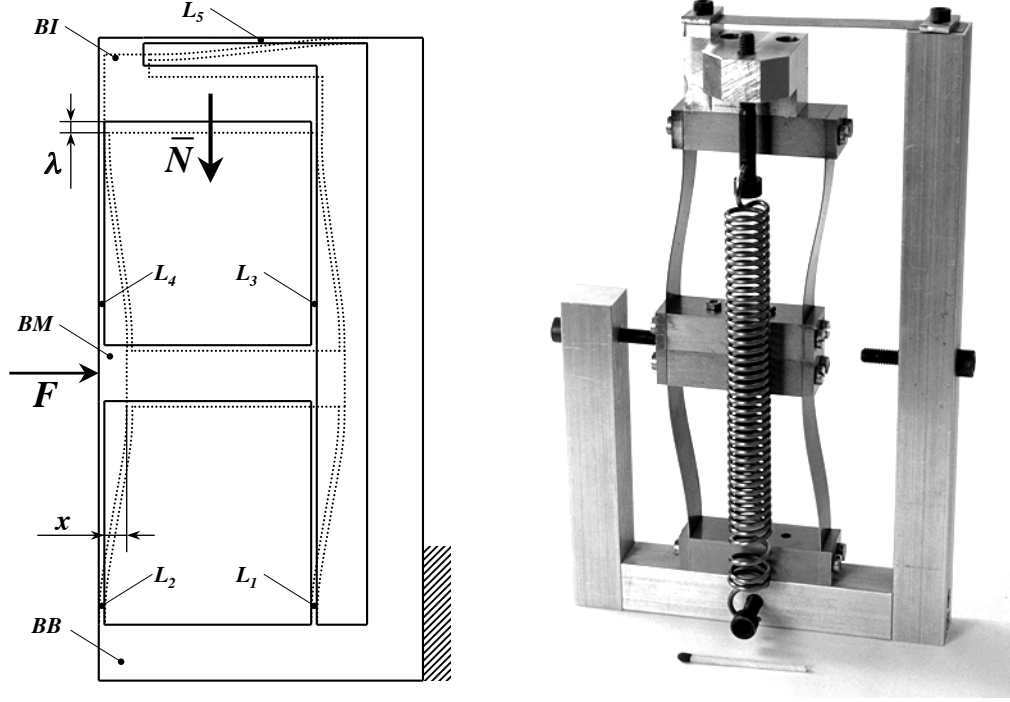


FIG. 10.14 – Principe du guidage en translation à rigidité réglable et démonstrateur.

peut être ramenée à zéro ou être rendue négative. Pour ce faire, il s'agit d'exercer sur le bloc mobile de la table à lames parallèles une force $\bar{N}$ voisine de la charge $\bar{N}_o$ (5.40) qui induit une rigidité naturelle nulle. Cette force doit rester constante en intensité et en direction durant le mouvement de la table.

Une manière simple de la produire est de placer, sur le bloc mobile de la table, une masse dont le poids est égal à $\bar{N}_o$. Cette solution présente les inconvénients importants d'avoir une masse mobile importante et de n'être utilisable que si les lames sont en position verticale.

Une autre manière de la produire est d'utiliser la structure de la figure 10.14 et d'exercer la force non plus sur le bloc mobile BM mais sur le bloc intermédiaire BI dont les mouvements sont d'une amplitude bien plus faible. Cette force peut, par exemple, être le poids d'une masse, la force de rappel d'un ressort, ou la force d'un actionneur électromécanique.

Considérons le cas où la force $\bar{N}$ est produite par un ressort de rigidité K_r comme sur la photographie (FIG. 10.14). Négligeons le déplacement horizontal de BI et considérons nulle la rigidité naturelle K_{cis} (sect. 4.1.2) de la lame L_5 . La direction de la force $\bar{N}$ reste constante durant le déplacement de BI mais le déplacement vertical λ de BI résulte en une diminution de la précharge du ressort lorsque BM s'écarte de sa position nominale. Ainsi la rigidité de cette structure n'est pas constante mais progressive. D'après (5.13), nous avons

$$\lambda(x) = \frac{6}{5l}x^2.$$

Notons λ_0 l'allongement du ressort de précharge en position nominale, nous avons alors

$$\bar{N}(x) = K_r(\lambda_0 - \lambda(x)).$$

Notons $\bar{K}_t$ la rigidité de l'ensemble des deux tables à lames parallèles (5.9) montées en parallèle

$$K_t = \frac{48EI}{l^3}$$

et $\bar{N}_0$ la charge qui induit une rigidité nulle (5.40). Selon (5.43), la rigidité sécante¹⁷ s'écrit

$$K_s(x) = K_t - \frac{K_t}{\bar{N}_0} \bar{N}(x).$$

Il s'agit d'un polynôme du deuxième degré. La force à produire pour déplacer BM d'une distance x est

$$F(x) = K_s x.$$

La caractéristique force-déformation est donc un polynôme du troisième degré passant par l'origine :

$$F(x) = \left(\bar{K}_t - \frac{K_t K_r \lambda_0}{\bar{N}_0} \right) x + \frac{6K_t K_r}{5l\bar{N}_0} x^3. \quad (10.4)$$

La rigidité tangente est la dérivée de la caractéristique force-déformation :

$$K(x) = \bar{K}_t - \frac{K_t K_r \lambda_0}{\bar{N}_0} + \frac{18K_t K_r}{5l\bar{N}_0} x^2. \quad (10.5)$$

Nous avons réalisé ce guidage à rigidité réglable de manière monolithique en utilisant la lame L_5 non seulement pour guider BI , mais également comme ressort de précharge (FIG. 10.15 et 10.16). Ce principe de compensation de la rigidité permet de diminuer considérablement la rigidité et d'obtenir des caractéristiques force-déformation tout à fait originales présentant par exemple des points où la rigidité tangente est nulle et la force non nulle (FIG. 10.17 et FIG. 10.18). La faible rigidité ainsi que le caractère progressif des caractéristiques font de cette structure un corps d'épreuve idéal pour réaliser un capteur de force de haute précision. Pour ce faire nous avons placé à l'intérieur de la structure un capteur de position optique d'une résolution de $1 \mu\text{m}$ qui mesure le déplacement du bloc mobile.

Cette même approche peut être utilisée pour réaliser des guidages en rotation à rigidité réglable, voire des structures à plusieurs DDL.

17. La rigidité *sécante* d'une structure dont la caractéristique force-déformation n'est pas linéaire est le rapport entre la force appliquée et la déformation résultante : $K_s = F/x$. Elle correspond à la rigidité d'un ressort dont la caractéristique force-déformation est linéaire (rigidité constante) qui pour une même force subirait la même déformation que ladite structure. La rigidité sécante ne doit pas être confondue avec la rigidité *tangente* qui est la pente de la caractéristique force-déformation $K = dF/dx$ (Spinnler 1997b).

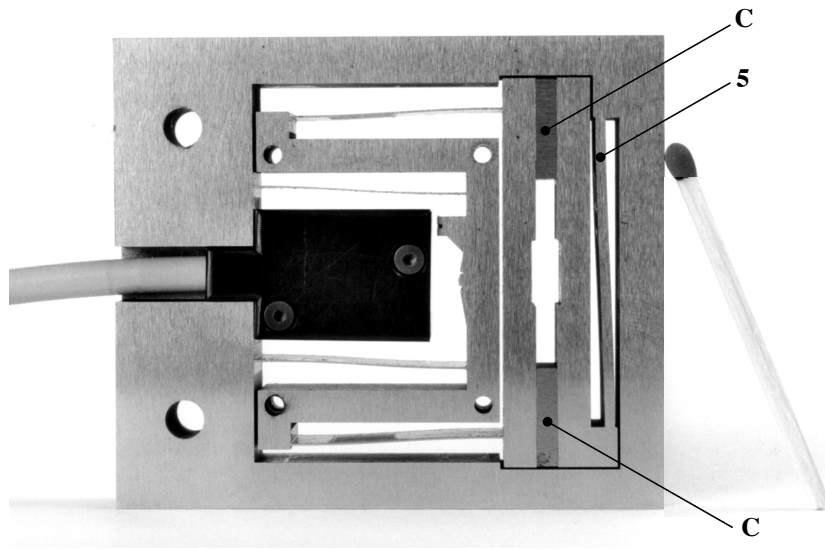


FIG. 10.15 – Photographie du guidage monolithique à rigidité réglable. Les cales *C* permettent de régler la force de précharge de la lame 5.

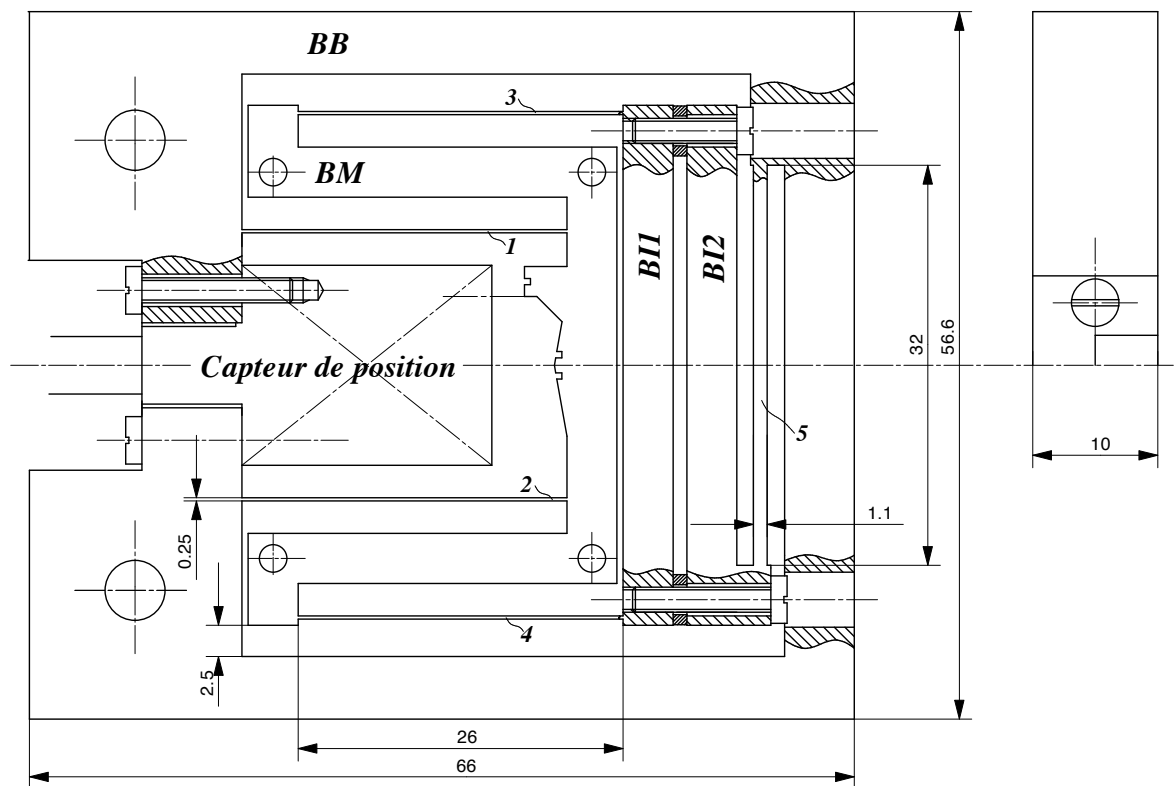


FIG. 10.16 – Guidage monolithique à rigidité réglable. Matière : acier X220CrVM013-4 trempé $E = 196 \text{ GPa}$.

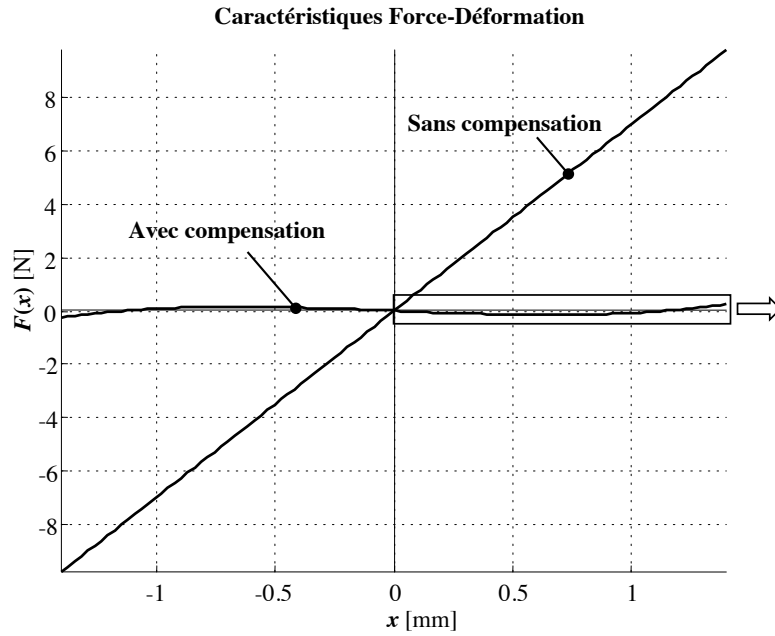


FIG. 10.17 – Caractéristique force-déformation théorique de la structure monolithique de la figure 10.16 préchargée de telle sorte que sa rigidité en position nominale soit légèrement négative ($\bar{N} = 1.05 \times \bar{N}_0$).

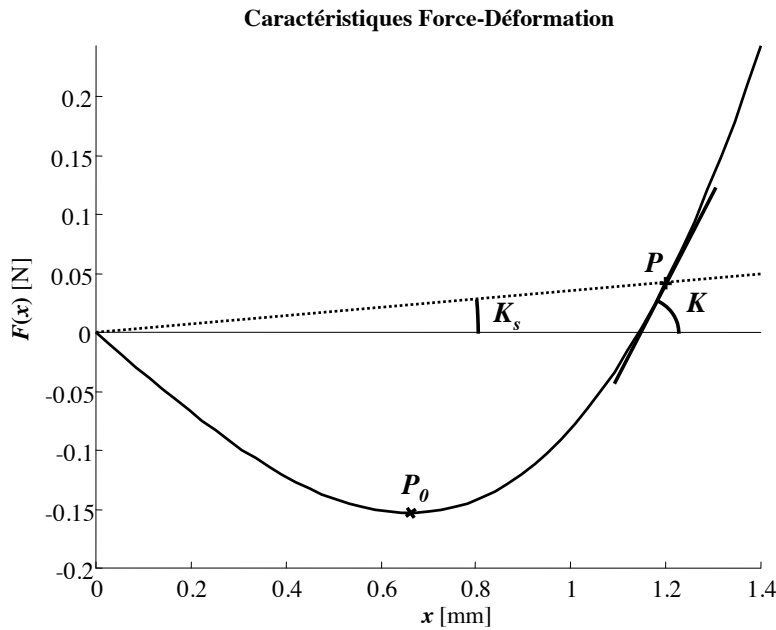


FIG. 10.18 – Agrandissement de la partie intéressante de la caractéristique (cadre de la figure 10.17) avec les rigidités sécante K_s et tangente K en l'un des ses points (P). Au point P_0 , la rigidité tangentielle est nulle et la force non nulle.

10.4.2 Maximisation des rigidités naturelles (stockage d'énergie)

Dans certains cas, il est nécessaire de maximiser les rigidités naturelles des guidages tout en conservant leur course admissible. Ceci peut être le cas lorsque la force de rappel des guidages est utilisée comme précharge ou lorsque le guidage est utilisé pour stocker de l'énergie mécanique. Ce problème se ramène à un cas classique de maximisation du *coefficient d'utilisation*¹⁸ des ressorts. Dans le cas de guidages utilisant, comme articulations élémentaires, des poutres en flexion, il s'agit d'utiliser des profils qui soient d'*égale résistance à la flexion*¹⁹. Dans les cas courants où le moment fléchissant varie linéairement le long de la poutre, les profils d'égale résistance à la flexion sont des profils paraboliques.

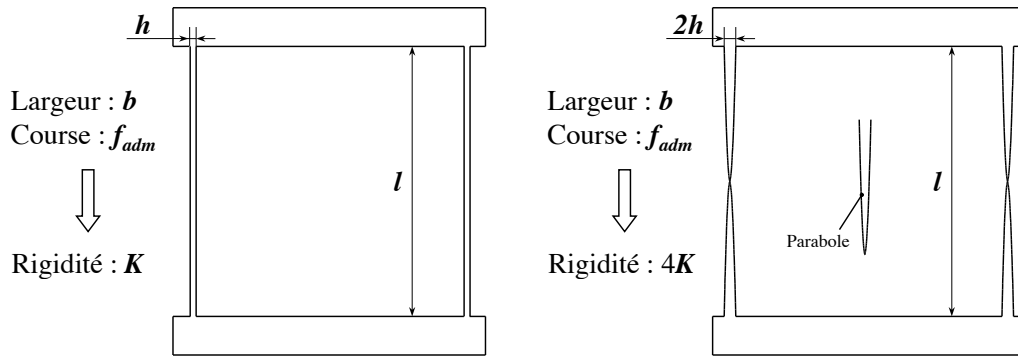


FIG. 10.19 – L'utilisation de lames d'égale résistance à la flexion (lames paraboliques dans ce cas) permet d'augmenter la rigidité naturelle sans diminuer la course admissible.

Prenons l'exemple de la table à deux lames parallèles. Si nous remplaçons les lames d'épaisseur h constante par des lames de profil parabolique d'épaisseur $2h$ aux extrémités (encastrement), alors la course admissible de la table reste inchangée et sa rigidité est multipliée par 4 (10.19). Le dimensionnement de la partie centrale de la lame doit être fait en considérant l'effort tranchant.

EXEMPLE : pour réaliser le corps d'épreuve d'un capteur de couple pour vélo monté entre l'axe de pédalier et les plateaux, nous avons conçu un guidage en rotation supportant le couple maximal pouvant être développé par le cycliste (100 Nm) sans dépassement de la contrainte admissible et produisant la plus grande rotation possible (FIG. 10.20) (Boillat 1997; Henein *et al.* 2000). Les cinq poutres de profil quasi parabolique ont été optimisées par des simulations par éléments finis (en particulier

18. Le *coefficient d'utilisation* d'un ressort est le rapport entre l'énergie emmagasinée dans ce ressort et l'énergie emmagasinée dans un ressort de traction de même volume, soumis à la même contrainte maximale (Duchemin 1984). La quantité d'énergie qui peut être stockée dans un élément élastique est proportionnelle au rapport σ_{adm}^2/E . Donc le critère de sélection du matériau est différent selon que l'on cherche à maximiser la course admissible (maximiser σ_{adm}/E (sect. 10.2)) ou l'énergie qui peut être stockée élastiquement (maximiser σ_{adm}^2/E).

19. Le profil d'une poutre est dit d'*égale résistance à la flexion* si le rapport My/I (3.2) est constant tout le long de la poutre (M moment fléchissant; y distance de la fibre la plus chargée à la fibre neutre; I moment d'inertie de la section de la poutre).

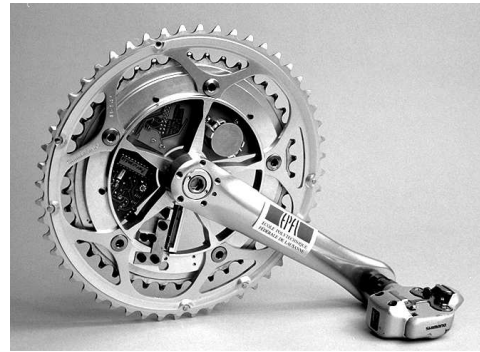
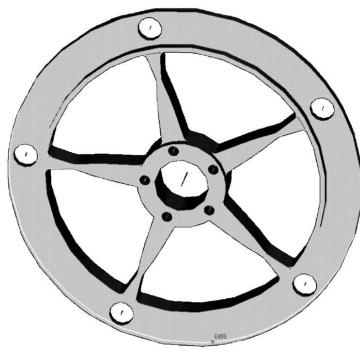


FIG. 10.20 – Guidage en rotation à lames quasi paraboliques d'égale résistance à la flexion utilisé comme corps d'épreuve pour un capteur de couple pour vélo.

Figure tirée de (Genoud 2000), photographie de l'auteur.

la “taille de guêpe” centrale et les congés de raccordement au niveau des encastrements).

Une autre solution permettant d'augmenter la rigidité des guidages sans diminuer leur course est de mettre plusieurs articulation flexibles en parallèle. La figure 10.21 montre un pivot hyperguidé à 21 lames. Cette approche présente l'inconvénient de produire de nombreux hyperstatismes qui peuvent rendre le comportement peu prédictible.

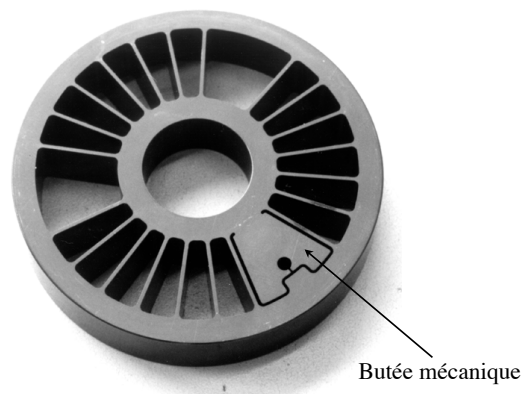


FIG. 10.21 – Pivot hyperguidé à 21 lames.

Chapitre 11

Démonstrateurs

Ce chapitre a pour but d'illustrer de plusieurs exemples la mise en application de la méthode de conception. Il présente plusieurs structures flexibles originales dotées de 2 à 6 DDL. Pour chacune des structures, la cinématique de la structure analogue à guidages idéaux est décrite pour montrer de quelle manière la traduction synthétique a été effectuée.

11.1 Modules en translation $X Y$

11.1.1 Module $X Y$ pour la micro-électroérosion

Pour la micro-électroérosion¹ nous avons conçu et réalisé une structure à 2 DDL en translation (FIG. 11.1 et 11.2). La structure mécanique est composée de deux tables à quatre cols imbriquées perpendiculairement. Elle est usinée de manière monolithique. La structure est entraînée par deux actionneurs électrodynamiques à bobine mobile qui agissent directement sur le bloc mobile². Un capteur optique à 2 DDL, robuste vis-à-vis des perturbations électromagnétiques générées par l'étincelage, mesure la position du bloc mobile. L'organe terminal est l'électrode montée sur le bloc mobile. Les principales caractéristiques du module sont résumées dans le tableau 11.1.

1. La micro-électroérosion est décrite en détail à la section 11.4.

2. L'utilisation d'actionneurs électromécaniques (dont les actionneurs électrodynamiques font partie) permet d'éviter tout contact entre le bloc mobile ("rotor") et le bâti ("stator"). Il n'y a donc pas de frottement introduit par l'entraînement. Ce type d'entraînement conduit à des robots dont les précisions statiques sont essentiellement limitées par les capteurs utilisés pour mesurer la position (mises à part les éventuelles dilatations thermiques). En fonctionnement dynamique les vibrations mécaniques de la structure peuvent elles aussi limiter la précision.

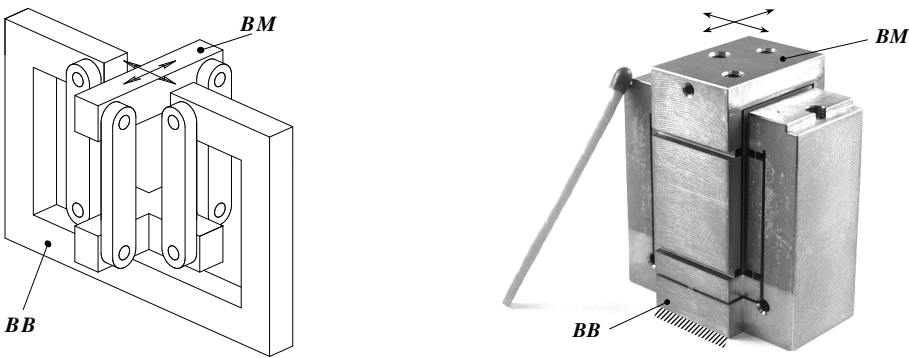


FIG. 11.1 – Guidage *XY* monolithique. *BB* bloc de base ; *BM* bloc mobile.

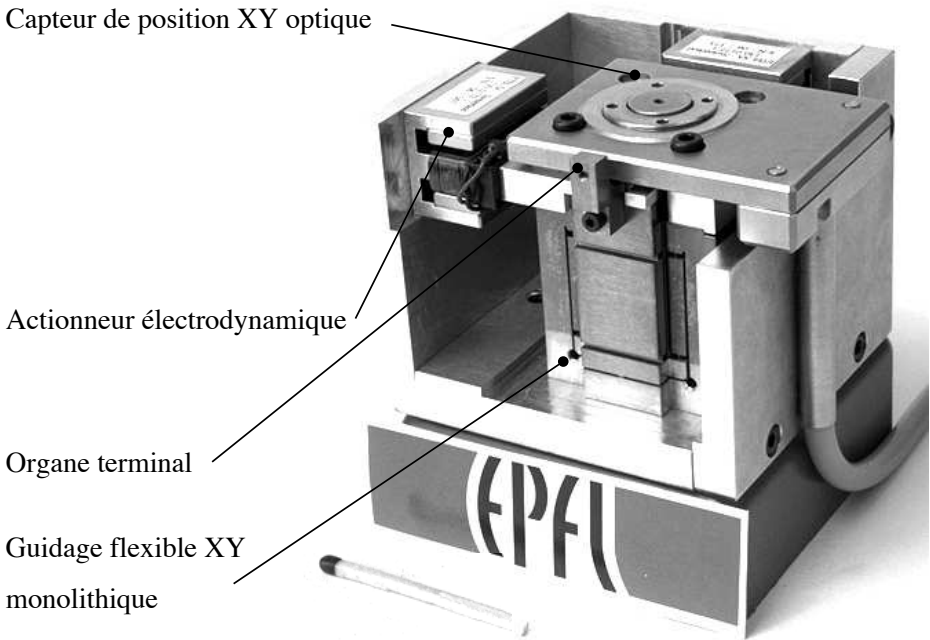


FIG. 11.2 – Guidage *XY* monolithique intégré avec deux actionneurs électrodynamiques et un capteur optique.

Degrés de liberté :	2DDL : <i>XY</i>
Encombrement :	$60 \times 60 \times 60 \text{ mm}^3$
Courses <i>XY</i> :	$\pm 1 \text{ mm}$
Matériau :	alliage de titane TiAl6V4
Epaisseur des cols :	$60 \mu\text{m}$
Actionneurs :	électrodynamiques à bobine mobile (Etel SA)
Force max. continu/impulsions :	3 N / 10 N
Capteurs :	Optiques <i>XY</i> (Agie SA)
Précision :	$0.4 \mu\text{m}$

TABEAU 11.1 – Caractéristiques du module *XY* pour la micro-électroérosion.

11.1.2 Micromanipulateur embarqué

Ce micromanipulateur à 2 DDL (XY) (Hodac *et al.* 1997)(Hodac & Siegwart 1999)(Hodac 1999) est dédié à l'assemblage de circuits intégrés en silicium sur des supports en cuivre. Il a été conçu selon un cahier des charges établi par l'entreprise Esec SA³. Il est embarqué sur un bras robotisé de grandes dimensions très rapide (course 330 mm, temps de cycle 0.22 s) et a pour rôle de corriger les erreurs de position et les vibrations de ce dernier au moment du collage des puces. Il présente la particularité d'être entraîné par des actionneurs électrodynamiques placés tous deux dans le même axe (A_Y et A_X , FIG. 11.3⁴) ce qui permet de fixer les aimants permanents à la base de la machine et de n'embarquer, sur le bras robotisé, que la structure mécanique et les bobines mobiles. Ceci diminue la masse embarquée mais a pour conséquence que le micromanipulateur ne peut être actionné que lorsque le bras est en fin de course. Un capteur optique à 2 DDL mesure la position de l'organe terminal du micromanipulateur par rapport au bâti fixe du bras robotisé. Comme le montre le tableau 11.2, le micromanipulateur permet d'augmenter de plus d'un ordre de grandeur la précision et la reproductibilité du mouvement du bras robotisé en fin de course.

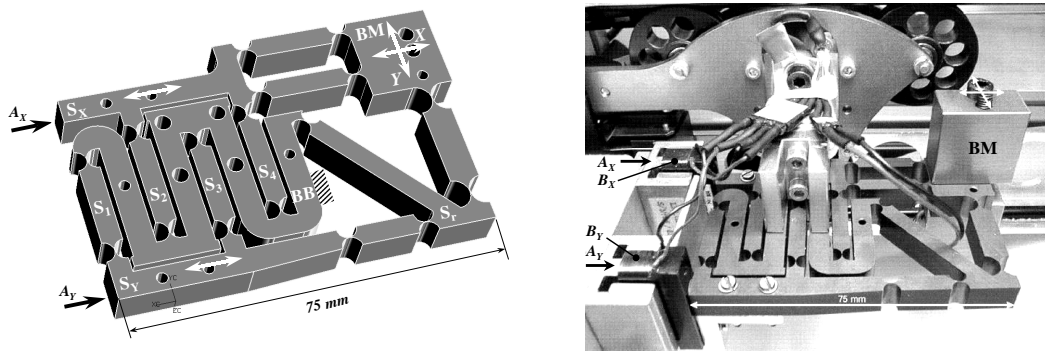


FIG. 11.3 – Micromanipulateur XY monté sur le bras robotisé. La structure est constituée d'un bloc de base BB fixé à l'extrémité du bras robotisé, de deux segments moteurs S_X et S_Y qui sont liés à BB chacun par une table à quatre cols (segments S_1S_3 et S_2S_4). Un segment de renvoi S_r transforme le mouvement de S_Y pour qu'il déplace le bloc mobile BM selon l'axe Y . Les bobines mobiles B_X et B_Y sont embarquées sur la structure. Les aimants permanents restent fixés au bâti du bras robotisé. (Hodac 1999)

11.1.3 Autres guidages XY

Les figures 11.4, 11.5 et 11.6 montrent d'autres guidages XY originaux.

3. Esec SA, CH-6330 Cham.

4. Leijenhorst (van) & Suringh (1987) décrivent une structure à articulations flexibles similaire sans le segment de renvoi S_r .

Caractéristiques	bras robotisé seul	bras robotisé avec micromanip.	micromanip. seul
Degrés de liberté :	1DDL : X	3DDL : $X\ X\ Y$	2DDL : $X\ Y$
Temps de cycle :	0.24 s	0.22 s	
Course :	330 mm (X)		1 mm ($X\ Y$)
Précision :	$30\ \mu\text{m}$	$1\ \mu\text{m}$	
Reproductibilité :	$10.5\ \mu\text{m}$	$< 1\ \mu\text{m}$	
Amplitude des vibrations :	$\pm 20\ \mu\text{m}$	$< \pm 1\ \mu\text{m}$	
Fréquence des vibrations :	120 Hz	120 Hz	
Dimensions [mm^3] :			$88 \times 55 \times 8$
Masse mobile :			20 g
Masse totale :			155 g
Force max. $X\ Y$:			5 N
Stabilisation $X\ Y$:			15 ms
Précision $X\ Y$:			$1\ \mu\text{m}$

TABLEAU 11.2 – Caractéristiques du bras robotisé et du micromanipulateur embarqué.

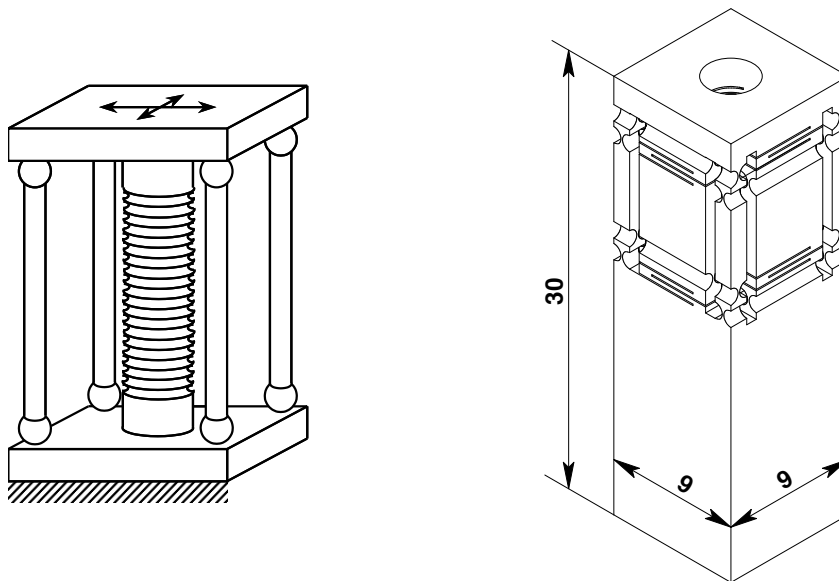


FIG. 11.4 – Table XY : la cinématique de cette structure comporte 4 bras et 8 rotules reliant le bloc de base au bloc mobile. Un soufflet bloque la rotation du bloc mobile autour d'un axe vertical. Chacune des rotules est traduite en une paire de cols circulaires disposés orthogonalement. L'ensemble de la structure, y compris le soufflet, est réalisé de manière monolithique, dans de l'acier trempé (X155CrVMo). La course selon chaque axe est de $\pm 0.25\ \text{mm}$. L'épaisseur des cols est de $25\ \mu\text{m}$. Une goupille rapportée à l'intérieur de la structure sert de butée mécanique.

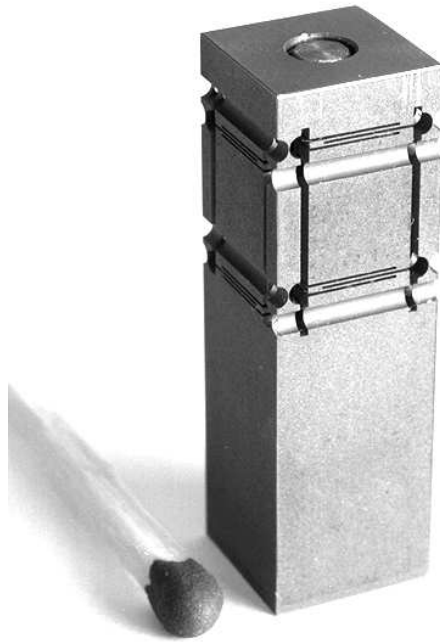


FIG. 11.5 – Photographie de la table XY de la figure 11.4.

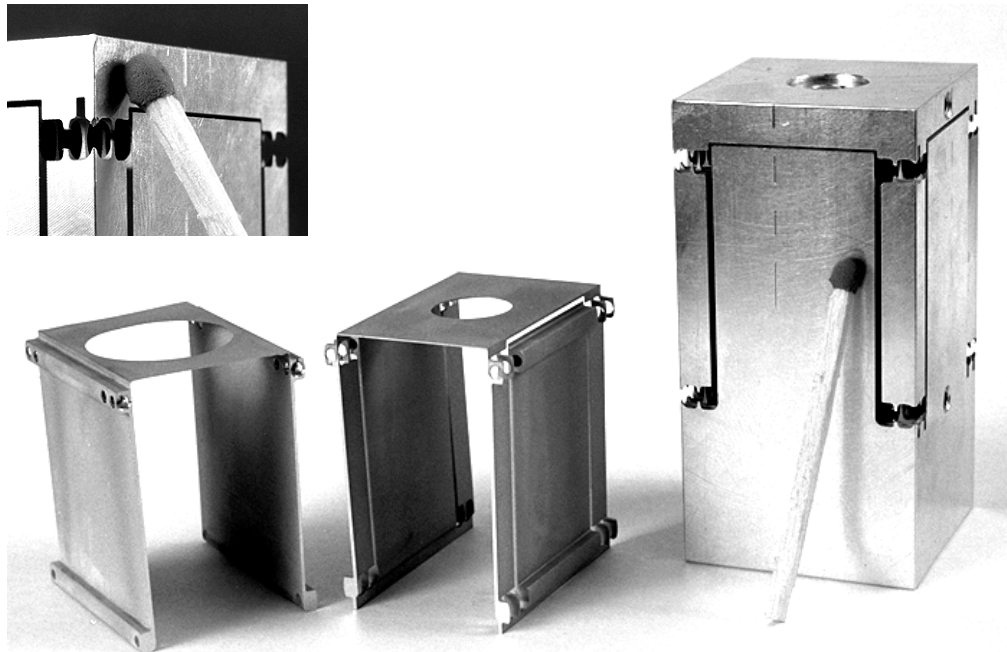


FIG. 11.6 – Table X Y θ Z : structure flexible analogue à celle de la figure 11.4 sans le soufflet. Les deux éléments de gauche sont les parties de métal qui ont été retirées après l'usinage par électroérosion. Le détail en haut à gauche montre l'une des rotules flexibles réalisées par des articulations élémentaires de type fil (section carrée de $200\ \mu\text{m}$ de côté). Cette structure monolithique a été découpée dans un alliage d'aluminium AlZnMgCu1.5.

11.2 Robot Double Tilt

Le robot Double Tilt (FIG. 11.7) est dédié à des applications de micro-assemblage qui nécessitent l'alignement précis de composants microtechniques. Il est doté de 2 DDL en rotation $\theta_X \theta_Y$. Ce robot utilisé en "main gauche" permet d'incliner l'une des pièces à assembler afin de corriger les erreurs d'alignement d'un robot industriel ("main droite") qui déplace l'autre pièce. Ce robot a été conçu selon un cahier des charges de l'entreprise Sysmelec SA⁵. Un cardan, constitué d'une lame L sollicitée en flexion et en torsion, ainsi que d'un plier P normal au plan de la lame, lie le bloc de base BB au bloc mobile BM . Ce dernier est entraîné par deux vérins verticaux constitués chacun d'un guidage en translation et de deux rotules.

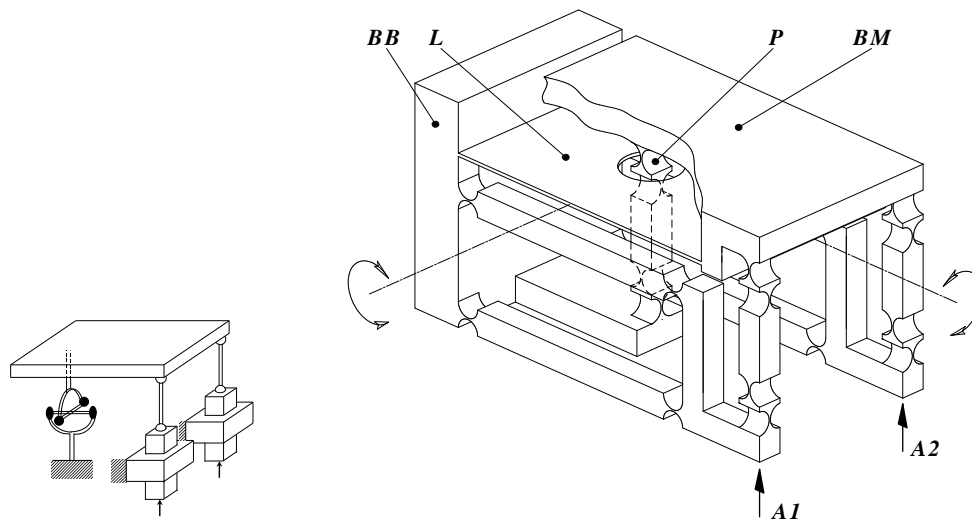


FIG. 11.7 – Robot double tilt (ce robot n'a pas été réalisé). BB bloc de base; BM bloc mobile; L lame de guidage; P pilier central; $A1$ et $A2$ actionneurs.

11.3 Robot Orion

Tout comme le robot Double Tilt, le robot Orion (Besson 1996; Esposito 1998; Henein *et al.* 1998) est dédié à l'assemblage et à la manipulation de composants microtechniques. Il est doté de 3 DDL $\theta_X \theta_Y \theta_Z$. Le robot est basé sur une cinématique parallèle dotée de trois chaînes identiques composées chacune d'un guidage en translation, d'un guidage en rotation et d'une rotule⁶. Cette structure a été traduite en une structure flexible en utilisant un guidage à deux lames parallèles pour le guidage en translation, un pivot à lame simple pour le guidage en rotation et deux fils croisés pour la rotule. Excepté les rotules, chacun des bras est monolithique (usinage par électroérosion à fil). Le tableau 11.3 résume les principales caractéristiques du robot.

5. Sysmelec SA, Rue du Puits-Godet 22, CH-2002 Neuchâtel.

6. La cinématique du robot Orion est décrite dans (Lee & Shah 1988; Lee & Arjunan 1989; Lee & Arjunan 1991).

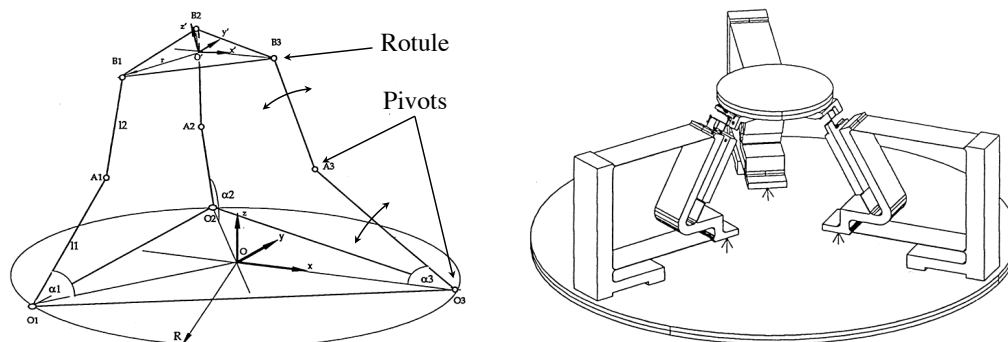


FIG. 11.8 – Cinématique du robot Orion et structure flexible analogue. Les trois pivots liés à la base ont été traduits en des guidages en translation (tables à deux lames parallèles).

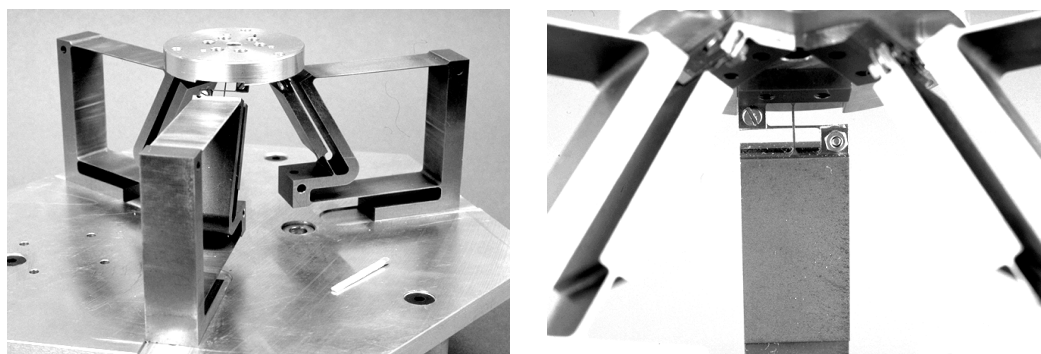


FIG. 11.9 – Structure mécanique du robot Orion et détail de l'une de ses trois rotules flexibles rapportées. Un ressort de compression monté au centre de la structure précharge les rotules en traction, ce qui évite tout risque de flambage.

Degrés de liberté :	3DDL : $\theta X \theta Y Z$
Encombrement :	$250 \times 250 \times 100 \text{ mm}^3$
Courses linéaire et angulaires $X Y$:	$\pm 5 \text{ mm}$ et $\pm 3.5^\circ$
Matériau :	acier 42CrMo4
Epaisseur des lames :	0.4 mm
Résolutions linéaire et angulaire :	$0.8 \mu\text{m}$ et 0.0015°
Précision absolue de chaque axe :	$4 \mu\text{m}$

TABLEAU 11.3 – Caractéristiques du robot Orion.

11.4 Robot Delta Cube

Peu de temps après la naissance de l'électroérosion⁷ on parle déjà des possibilités qu'offre ce nouveau procédé pour l'usinage direct de petites pièces très précises (Osenbruggen 1969). Depuis, la précision, la vitesse et l'état de surface des usinages n'ont cessé de s'améliorer et on parle à présent de *micro-électroérosion*⁸. Aujourd'hui la précision et la dynamique des mouvements de l'électrode sont des facteurs limitants de la micro-électroérosion. En effet les machines d'électroérosion étaient initialement conçues pour l'usinage d'outils (moules, poinçons, matrices, etc.) de relativement grandes dimensions. Elles sont par conséquent peu adaptées à l'usinage direct de pièces de petites dimensions et très précises : la machine-outil⁹ a des masses mobiles importantes qui affectent la précision (déformation sous l'effet du poids propre et mouvement saccadé lié au frottement) et la dynamique des mouvements¹⁰ (forces importantes nécessaires pour la mise en mouvement, et fréquence propres basses).

Selon un cahier des charges établi par l'entreprise Agie S.A.¹¹, nous avons conçu une nouvelle machine-outil dédiée à la micro-électroérosion. Vu les précisions et les dimensions de la machine réalisée, cette dernière peut soit être utilisée seule pour usiner des pièces de très petites dimensions (inférieures au millimètre), soit être montée à l'extrémité d'une machine d'électroérosion par enfonçage classique et servir de porte-électrode actif. Ceci permet de combiner les macro-mouvements de la machine d'origine avec les micro-mouvements de haute précision et haute dynamique du porte-électrode. Nous utilisons la cinématique parallèle du robot Delta (Clavel 1985) pour réaliser ce démonstrateur. Cette cinématique possède les 3 DDL en translation requis, et le fait qu'elle soit parallèle présente l'avantage de pouvoir être actionnée par trois moteurs fixes, montés sur la base. La cinématique Delta est constituée de trois chaînes cinématiques identiques qui relient l'organe terminal à la base. Chacune de ces chaînes bloque l'un des DDL en rotation de la plate-forme¹². Nous avons traduit cette cinématique en une structure flexible (FIG. 11.10). Le tableau 11.4 résume les caractéristiques du robot Delta Cube.

7. Bianchi et Rigal (1987) situent la naissance de l'électroérosion en 1943.

8. Mentionnons à ce sujet la collaboration entre l'Institut für Mikrotechnik Mainz GmbH et l'entreprise AGIE S.A. CH-6616 Losone qui a donné lieu à des publications citant de nombreuses références d'articles traitant de micro-électroérosion et montrant de nombreux exemples de pièces réalisées par cette approche (Ehrfeld *et al.* 1996; Richter *et al.* 1997; Wolf *et al.* 1997; Wolf *et al.* 1998). Lire également (Masaka *et al.* 1999).

9. La *machine-outil* est la partie de la machine à électroérosion responsable du mouvement relatif entre l'électrode et la pièce. Les autres composantes de la machines sont le *générateur*, le *groupe de filtration du diélectrique* et la *commande de positionnement* (Richter *et al.* 1997).

10. Le réglage fin du processus d'étincelage requiert de pouvoir contrôler en continu le "gap" (distance séparant l'électrode de la pièce). Des recherches récentes (Imai *et al.* 1996; Wolf *et al.* 1998) semblent montrer que des mouvements très rapides de l'électrode (vibrations de quelques microns d'amplitude et d'une fréquence de quelques centaines de Hertz) améliorent significativement l'évacuation des particules érodées par un effet d'arrosage par brassage. Ceci permet d'augmenter les vitesses d'usinage et d'améliorer l'état des surfaces usinées. Le porte-électrode actif que nous avons réalisé permet de produire à la fois des mouvements ultra-précis de quelques dixièmes de millimètres et des vibrations telles que celles que nous venons de mentionner.

11. Agie SA, CH-6616 Losone.

12. Davies (1999) décrit une structure flexible de cinématique voisine utilisée pour l'alignement de composants optiques (FIG. 2.8). Elle comporte des articulations élémentaires de type fil.

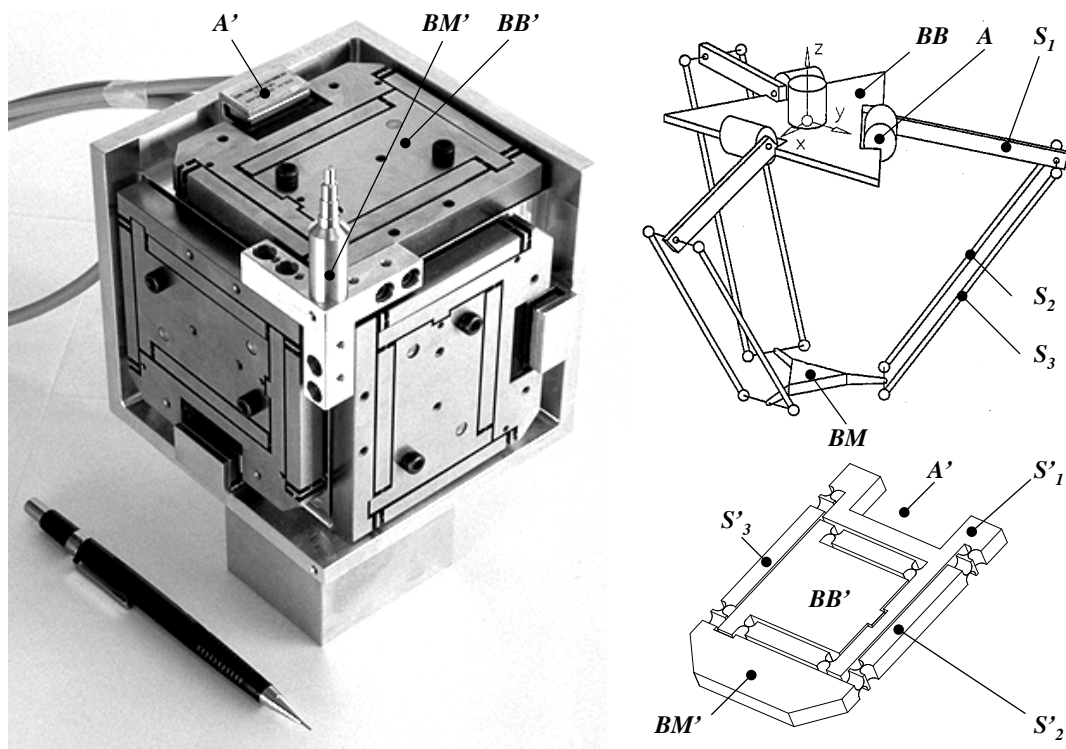


FIG. 11.10 – Cinématique du robot Delta et structure flexible analogue : bloc de base $BB \rightarrow BB'$; bloc mobile (ou organe terminal) $BM \rightarrow BM'$; segments $S_i \rightarrow S'_i$; actionneurs $A \rightarrow A'$.

Degrés de liberté :	3DDL : $X Y Z$
Encombrement :	$110 \times 110 \times 110 \text{ mm}^3$
Courses $X Y Z$:	$\pm 1 \text{ mm}$
Matériau :	acier X220CrVMo13-4
Épaisseur des cols :	$100 \mu\text{m}$
Actionneurs :	électrodynamiques à bobine mobile (Etel SA)
Force max. continu/impulsion :	3 N / 10 N
Capteurs de position :	règles optiques Heidenhain SA
Résolution :	50 nm

TABLEAU 11.4 – Caractéristiques du robot Delta Cube.

11.5 Robot Tribias

Le robot Tribias (Pernette 1998) est dédié au couplage de fibres optiques mono-modes avec des guides d'onde. Le robot déplace la fibre en face du guide selon 6 DDL. La mesure de l'intensité d'un signal lumineux transitant de la fibre au guide permet de connaître la qualité de l'alignement (mesure extéroceptive). Le robot est basé sur une cinématique parallèle dotée de trois chaînes identiques constituées chacune d'un guidage plan XY , d'une rotule et d'un pivot (FIG. 11.11) (TAB. 11.5). Les pivots sont des guidages en rotation redondants à grande course angulaire (FIG. 10.10), les guidages XY sont constitués de tables à deux lames parallèles montées comme sur la figure (FIG. 11.13), les rotules, quant à elles, sont des guidages lisses formés d'une bille glissant sur trois autres billes fixes en contact (3 points de contact).

Le positionnement s'effectue en deux phases :

- Phase I (grande course & faible résolution) : les trois guidages flexibles sont bloqués et ce sont les guidages roulants (G_{XY}) qui se déplacent.
- Phase II (faible course & haute résolution) : les trois guidages roulants sont bloqués et ce sont les guidages flexibles qui se déforment. Le levier de démultiplication donne la haute résolution.

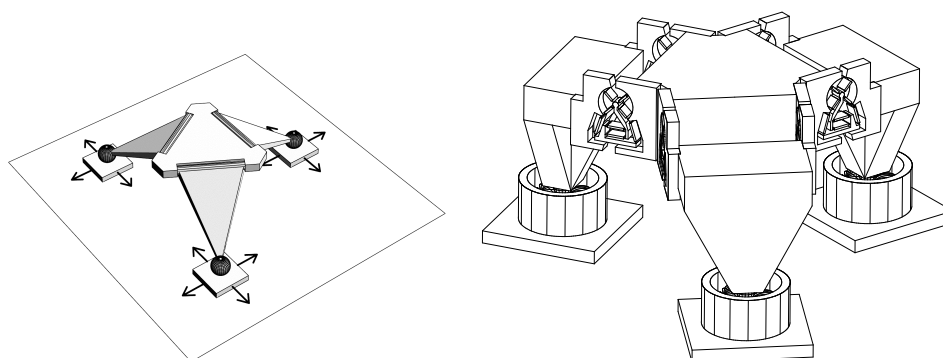


FIG. 11.11 – Cinématique du robot Tribias et version réalisée avec des pivots flexibles.

Degrés de liberté :	6DDL
Encombrement :	$800 \times 800 \times 300 \text{ mm}^3$
Volume de travail* :	1 cm^3
Débattements angulaires** :	$\pm 7^\circ$
Matériau des pivots flexibles :	acier X220CrVMo13-4
Epaisseur des cols des pivots :	$30 \mu\text{m}$
Actionneurs :	moteurs à courant continu
Entraînement :	vis à rouleaux satellites
Résolutions linéaire et angulaire :	$0.1 \mu\text{m}$ et 0.0005°
Capteurs de position :	encodeurs montés sur les moteurs

TABLEAU 11.5 – Caractéristiques du robot Tribias. *Ce volume de travail est obtenu grâce à 3 guidages roulants XY sur lesquels sont montés les tables flexibles XY (ce sont ces guidages roulants qui limitent la course en X et en Y). **Au centre du volume de travail.

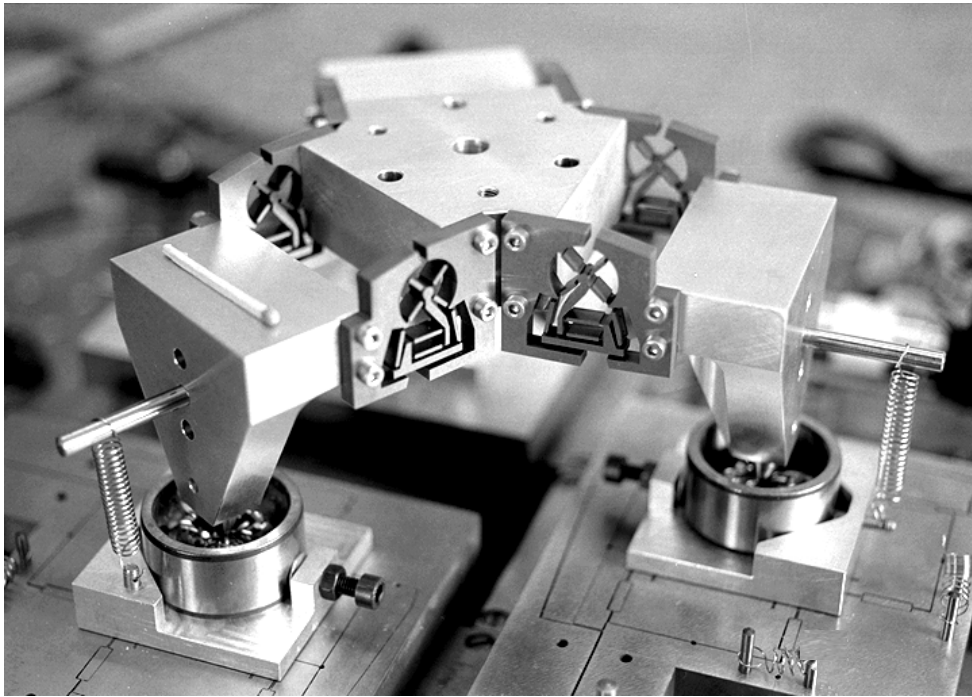


FIG. 11.12 – Robot Tribias avec pivots flexibles et actionneurs plans XY flexibles.

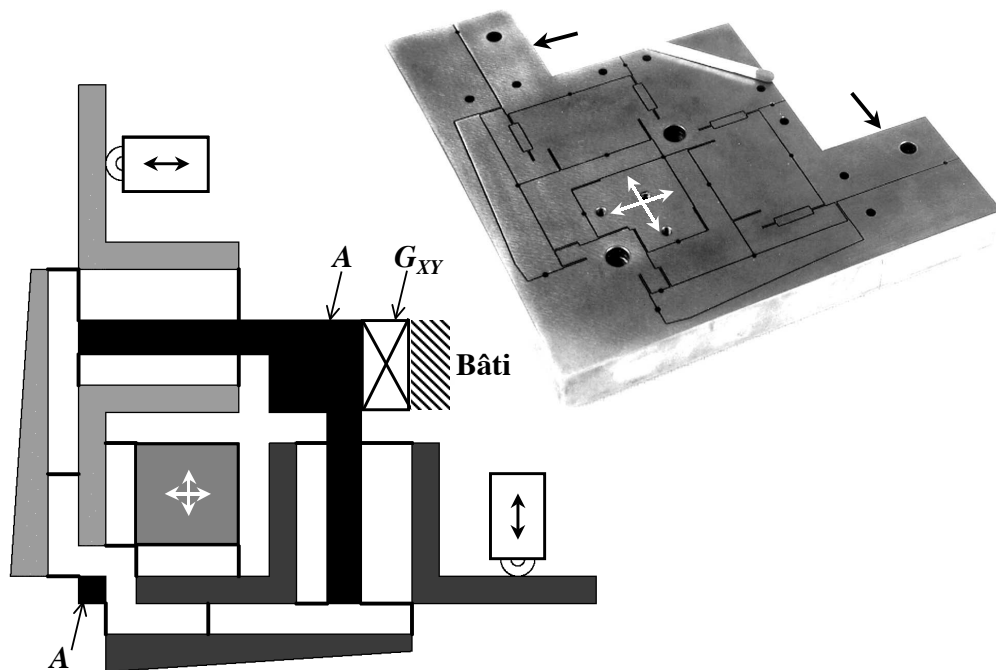


FIG. 11.13 – Guidage flexible à 2 DDL XY avec leviers de démultiplication (robot Tribias). Les blocs A sont liés rigidement. Ils sont fixés sur un guidage roulant XY (G_{XY}) lié au bâti.
(Pernette 1998)

Rotules flexibles

Seules les rotules du robot Tribias n'ont pas encore été traduites en guidages flexibles. La figure 11.14 montre deux rotules flexibles originales. La première est constituée de trois fils orthogonaux reliant le bloc mobile à la base. La seconde utilise les trois types d'articulations élémentaires décrits au chapitre 4, à savoir : une lame en flexion, un barre de torsion et un fil. Ce guidage utilise une barre de torsion en U qui a son axe de torsion déporté (§ 4.4.2).

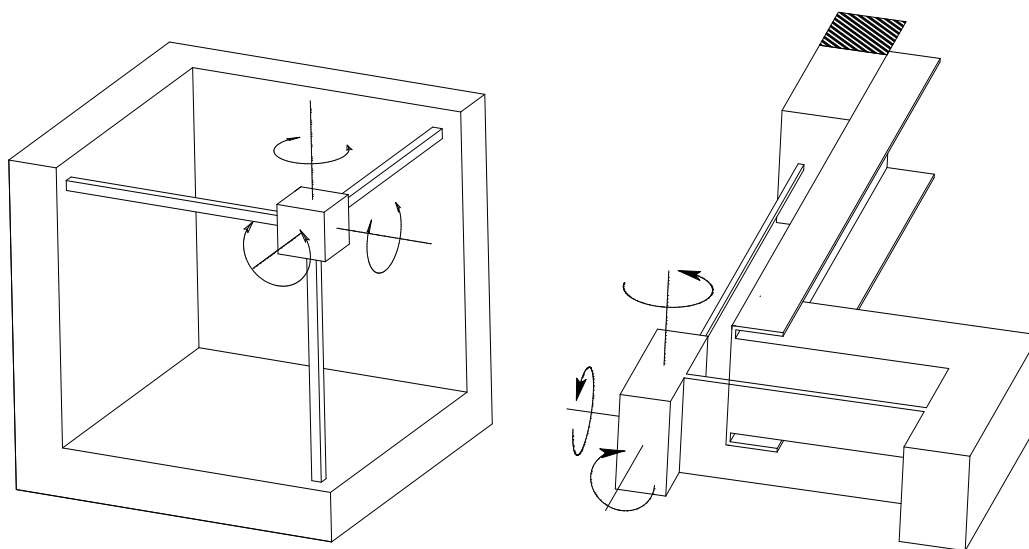


FIG. 11.14 – Rotules flexibles à axes de rotation concourants (la lame est représentée transparente pour montrer ce qui se trouve derrière).

11.6 Conclusion

Ces exemples originaux illustrent la mise en application de la méthode de conception. La synthèse de structures flexibles s'effectue en concevant une structure articulée à guidages cinématiques idéaux qui satisfait le cahier des charges, puis en la traduisant en une structure à guidages flexibles analogue. Dans certains cas la traduction est relativement directe (module XY pour la micro-électroérosion, § 11.1.1 par exemple), alors que dans d'autres elle nécessite une plus grande capacité d'interprétation et d'expérience (traduction du cardan du robot double tilt sect. 11.2 par exemple). Parfois la première traduction synthétique ne donne pas de résultat satisfaisant. Il faut alors retraduire la structure flexible en une structure à guidage idéaux pour l'analyser et la modifier. C'est par exemple ce qui a été fait avec le robot Delta Cube (sect. 11.4) dont la disposition cinématique diffère de la disposition de la structure à guidages idéaux dont elle est la traduction. C'est ainsi que la méthode de conception consiste en l'exercice itératif de traductions synthétiques et analytiques.

Chapitre 12

Conclusion générale

12.1 Rappel des résultats

Au travers de l'étude approfondie de l'état de l'art, nous observons que bien que les guidages flexibles soient connus et utilisés depuis plusieurs dizaines d'années, les méthodes de conception qui sont proposées sont fragmentaires. Pour combler cette lacune, nous nous sommes donnés pour but d'établir les bases d'une méthode générale de conception des structures flexibles. Ainsi, cet ouvrage ne se fonde pas sur les travaux de l'art, mais étudie les guidages flexibles à partir de la théorie classique de la mécanique des structures dans le but de constituer une base solide en la matière.

La première partie du livre commence par le rappel des fondements théoriques de la théorie de la mécanique des structures et l'interprétation en ses termes des notions de rigidité, de course et de charge admissible. Cette théorie est ensuite appliquée aux articulations flexibles élémentaires (lames, fils, barres de torsion, col circulaire) pour calculer les paramètres essentiels à la conception des guidages. Cette étude montre notamment quel rôle cinématique peuvent jouer ces articulations en déterminant le nombre et la nature des degrés de liberté de chacune d'elles. La théorie est ensuite appliquée aux guidages flexibles à 1 DDL en translation et en rotation les plus courants. Ceci est réalisé de manière à aboutir à des formules simplifiées qui soient d'utilisation et d'interprétation aisée. Les lois de similitude sont également décrites et des abaques sont tracés. Au cours de cette étude, nous démontrons que l'utilisation de cols de section très fine reliant de longs segments rigides permet de maximiser les rapports de rigidité des guidages pour un élanement donné, ainsi que leurs courses.

La seconde partie du livre commence par explorer les limites technologiques de l'électroérosion à fil, qui est le procédé d'usinage le mieux adapté à la fabrication de structures flexibles. Des essais expérimentaux nous ont permis de trouver les limites de ce procédé en termes de géométries usinables (élanement des profils et des sections, fentes, rayons), d'état de surface (rugosité, profondeur de la zone modifiée), de vitesse et de coût. Nous avons ensuite sélectionné un sujet d'expérience pour tester les formules théoriques. Il s'agit du col circulaire que nous avons considéré comme étant l'articulation élémentaire la plus représentative de l'ensemble des autres articulations. Nous avons alors réalisé des mesures de rigidité (mesures réalisées sur 25 tables à quatre cols circulaires) ainsi que des essais de fatigue (essais réalisés sur 217 cols circulaires). La conclusion de ces mesures est que si la rugosité des surfaces

électroérodées est faible ($R_a \leq 0.2 \mu\text{m}$) alors les modèles théoriques sont corroborés par nos expériences. Si la rugosité est plus importante, alors il faut apporter des corrections aux formules utilisées. Ces corrections étant corrélées avec les paramètres d'usinage, elles peuvent donc être déterminées expérimentalement pour une technologie d'usinage donnée.

La troisième partie décrit la méthode de conception qui consiste en l'exercice itératif de traductions analytiques et synthétiques entre les structures à guidages flexibles et celles analogues à guidages idéaux. Ensuite les limites technologiques établies dans la seconde partie sont prises en considération dans le modèle théorique pour montrer les limites actuelles des guidages flexibles en termes de courses. Enfin, plusieurs démonstrateurs originaux réalisés selon des cahiers des charges établis par les partenaires industriels du projet illustrent la mise en application de la méthode et montrent à la fois son efficacité et son grand potentiel créatif.

12.2 Contributions nouvelles

Ce livre traite d'aspects du sujet d'étude qui n'ont que peu été étudiés par le passé.

- Il étudie les structures flexibles en vue de leur application dans le domaine de la *robotique de très haute précision*. Les principales particularités de ce domaine sont le *grand nombre de degrés de liberté* des cinématiques des structures articulées, le recours fréquent à des *cinématiques parallèles* et les *volumes de travail relativement grands*¹.
- En outre, il traite des structures flexibles usinées par électroérosion à fil. Ce procédé d'usinage étant relativement récent, une grande partie des études antérieures traitent de guidages à lames réalisés par l'assemblage d'éléments discrets. Ce livre montre que l'usinage par électroérosion à fil permet de réaliser de manière monolithique des structures dont les caractéristiques sont souvent supérieures à celles des guidages à lames. Ceci nous conduit à l'*exploration des limites de l'usinage par électroérosion de structures flexibles*.

En traitant ce sujet selon une démarche méthodique, cet ouvrage aboutit sur de nouveaux principes généraux de conception et des règles de dimensionnement originales. En outre, le travail expérimental a nécessité la mise en œuvre de protocoles de mesures inédits. Ainsi, les principales contributions nouvelles de ce travail sont les suivantes :

Conception : la méthode de conception se base sur les concepts nouveaux d'*analogie cinématique*, de *traduction synthétique* et de *traduction analytique*. En outre elle présente des principes généraux de conception relatifs aux volumes de travail (sect. 10.3) et aux rigidités (sect. 10.4) des structures flexibles. Cette méthode a donné lieu à l'invention de structures flexibles inédites : pivot redondant à grande course angulaire (Henein *et al.* 1998, brevet)(§ 10.3.2), guidage en translation à rigidité réglable

1. Bon nombre des structures articulées de l'état de l'art sont entraînées par des actionneurs piézoélectriques dont les courses dépassent rarement une centaine de microns. Comparativement à ces structures dédiées à des applications de micro-positionnement, les structures étudiées dans cet ouvrage ont un grand volume de travail.

(§ 10.4.1), robot Double Tilt (sect. 11.2), robot Delta Cube (Bottinelli *et al.* 1999, brevet) (sect. 11.4), tables $X Y$ sérielles et hybrides (sect. 11.1), rotule flexible (sect. 11.5).

Dimensionnement : les développements théoriques aboutissent à des modèles et des formules de dimensionnement originaux :

- Formules simplifiées, abaques et lois de similitude pour le calcul des rigidités du col circulaire (4.23, 4.25, 4.26, 4.27).
- Modèle simplifié pour le calcul de la rigidité en translation de la table à deux lames parallèles sous charge de traction-compression (5.43) et calcul de la course admissible (5.51, 5.52, 5.58).
- Calcul de la course admissible de la table hyperguidée à quatre lames parallèles (5.66) et tracé d'un abaque de dimensionnement A.4.
- Démonstration formelle de l'avantage de la table à quatre cols prismatiques par rapport à la table à deux lames parallèles en termes de rapports de rigidités et de facilité de fabrication (sect. 5.3.6).
- Comparaison entre le déplacement parasite et le déplacement du centre instantané de rotation du pivot à lames croisées, du pivot RCC et du pivot croisé à quatre cols (sect. 6.6). Méthode énergétique pour l'évaluation qualitative de l'influence des charges radiales sur la rigidité angulaire de ces pivots (sect. 6.7).

Expérimentation : la réalisation d'essais expérimentaux a nécessité la mise en place de protocoles et de bancs de mesure originaux :

- Banc de mesure de rigidité et formulation de l'hypothèse de l'existence de la couche neutre sous les surfaces électroérochées avec vérification expérimentale (chap. 8).
- Conception d'une éprouvette spéciale pour réaliser des essais de fatigue en flexion alternée sur des cols (chap. 9) et réalisation du banc de mesure.

12.3 Portée et limites

12.3.1 Généralité et impact de la méthode

La généralité de la méthode lui donne une très grande portée. En effet, bien qu'elle ait été élaborée principalement pour la conception de structures articulées de robots de haute précision, cette méthode est également utilisable dans d'autres domaines d'application tels que les appareils de mesure et autres mécanismes de précision, les mécanismes aérospatiaux, les microsystèmes (MEMS) ou les machines-outils².

En choisissant de délimiter le domaine d'étude au comportement statique et au domaine linéaire des petites déformations des guidages flexibles, nous avons pu établir des formules simples, d'utilisation aisée. C'est en privilégiant de la sorte la simplicité des modèles plutôt que leur exactitude que nous avons pu aboutir

2. Par exemple, nous sommes actuellement en train d'utiliser cette méthode pour concevoir un cardan flexible pour une machine-outil à structure parallèle. Le recours aux guidages flexibles est nécessaire en raison de problèmes de fretting-corrosion des roulements à rouleaux coniques utilisés actuellement.

à une méthode de conception des structures flexibles complexes dotées de 3 à 6 DDL. Ainsi, cet ouvrage recourt à des modèles simplifiés, donc approximatifs, qui ont le mérite d'être utilisables efficacement aussi bien avec des guidages simples qu'avec des structures flexibles complexes. En comparaison, la plupart des travaux de la littérature visent à établir des modèles aussi rigoureux que possible, valables pour la simulation de guidages simples. Ces modèles présentent l'inconvénient d'être trop lourds pour être utilisés lors des premières phases de conception des structures flexibles dotées de 3 à 6 DDL.

Les contacts fréquents avec les partenaires industriels du projet "Minast 6.01 Artist" dont ce travail fait partie ont donné un caractère concret à cette recherche. Les excellents résultats obtenus avec les démonstrateurs originaux que nous avons conçus démontrent l'efficacité pratique de notre méthode. Deux projets de recherche avec partenariat industriel basés en grande partie sur cette étude ont démarré en avril 2000.

Enfin, les inventions présentées (guidage à rigidité réglable, pivot redondant avec couplage, robot Delta Cube, etc.) laissent présager du très grand potentiel encore inexploité des structures flexibles. Potentiel dont, nous l'espérons, les ingénieurs et chercheurs pourront profiter grâce à notre méthode de conception qui constitue une aide à la créativité.

12.3.2 Validation expérimentale

Les expériences visant à éprouver la validité des modèles théoriques que nous avons établis étant de mise en œuvre longue et coûteuse, nous n'avons pu tester, dans la partie expérimentale, qu'une seule articulation élémentaire, à savoir le col circulaire, et nous n'avons contrôlé que les deux formules définissant la rigidité et la course angulaires. Nous n'avons donc pas de validation expérimentale des autres formules établies. Il s'agit là d'une limitation importante de ce travail.

Cependant, si nous avons choisi le col circulaire comme sujet de nos expériences, c'est que nous l'avons estimé être l'une des articulations flexibles élémentaires les plus représentatives de l'ensemble de celles utilisées pour la réalisation de guidages flexibles. De même, course et rigidité sont les paramètres que nous avons jugés comme étant ceux qu'il est le plus important de pouvoir prédire avec précision lors de la conception de structures flexibles. De plus, bien que notre validation expérimentale ne soit que ponctuelle, il nous semble raisonnable d'affirmer que son extrapolation aux autres résultats théoriques exposés est également valable. Le degré de confiance avec lequel nous effectuons cette extrapolation est haut dans le cas d'articulations élémentaires dont le mode de sollicitation est proche de celui des cols testés (flexion). En revanche, il est moindre dans le cas d'articulations élémentaires dont le mode de sollicitation est différent (torsion). Ainsi, la validation expérimentale serait à poursuivre en premier lieu dans le but de vérifier les résultats théoriques concernant les rigidités en torsion de la lame, du fil, des barres de torsion et du col circulaire. En deuxième lieu, les résultats théoriques concernant le cisaillement transverse de la lame et du col circulaire pour lesquels l'effet de l'effort tranchant est non négligeable seraient à tester expérimentalement. Ce n'est qu'en troisième lieu, qu'il s'agirait de tester les autres résultats théoriques concernant les sollicitations en traction-compression et en flexion naturelle des articulations élémentaires.

A part l'approche expérimentale, il existe une autre approche permettant d'évaluer la confiance à accorder aux formules théoriques établies : il s'agit de la simulation numérique par éléments finis. Si les résultats de telles simulations corroborent les résultats analytiques que nous avons établis, alors nous pouvons augmenter notre degré de confiance dans ces résultats. Si des divergences importantes sont observées, il faut alors recourir à l'expérience pour départager les résultats. Ainsi, au lieu de poursuivre la validation expérimentale selon la séquence présentée au paragraphe précédent, il serait également possible de commencer par réaliser des simulations par éléments finis, puis d'effectuer la vérification expérimentale des résultats analytiques qui ne sont pas corroborés par ces simulations, et enfin d'effectuer celle des résultats corroborés.

Mentionnons à ce sujet que nous avons déjà réalisé des simulations par éléments finis du col circulaire sollicité en flexion simple. Les valeurs de contrainte dans la zone centrale du col et d'angle de rotation obtenus lors de ces simulations correspondent aux résultats analytiques avec un écart inférieur à 1.2%. Ceci montre la fiabilité de ces résultats.

12.4 Perspectives

Le travail présenté dans ce livre peut être poursuivi en élargissant le champ d'étude dans chacune des directions selon lesquelles nous avons délimité le domaine à la section 1.5 :

12.4.1 Modélisation

La modélisation pourrait être poursuivie en effectuant des *simulations numériques par éléments finis* (sect. 12.3.2) pour corroborer les résultats analytiques établis dans la partie *Théorie* et en abordant l'étude des structures flexibles dans le cas des *grandes déformations*, pour établir les limites résultant de l'hypothèse des petites déformations à laquelle nous avons eu recours. L'étude du *comportement dynamique* de ces structures est la suite logique de ce travail. L'étape suivante concerne l'établissement, à partir du modèle dynamique, d'un *modèle de réglage automatique* qui puisse être implanté dans les commandes pilotant ces structures, pour tirer le plus grand profit des propriétés exceptionnelles des structures flexibles.

12.4.2 Matériaux

Plusieurs matériaux autres que les alliages métalliques courants peuvent être très intéressants pour la réalisation de structures flexibles :

- Les *alliages à mémoire de forme* présentent la propriété dite de super-élasticité qui permet d'atteindre des allongements relatifs réversibles de l'ordre de 2%³ sur un très grand nombre de cycles. Cette propriété permet d'augmenter la course des guidages ou d'utiliser des articulations dont les sections sont de

3. Rappelons que l'allongement relatif admissible des alliages métalliques présentés (TAB. B.14) dépasse rarement 0.4%.

plus grande épaisseur (donc plus faciles à usiner et moins sensibles aux tolérances d'usinage) pour une même course et un même encombrement. Ce phénomène de super-élasticité s'accompagne d'une déformation à contrainte quasi constante qui peut être utilisée pour réaliser des guidages à faible rigidité naturelle (Yamahata 2000). Selon la température et selon leur composition, ces matériaux peuvent avoir un coefficient d'amortissement très élevé permettant d'absorber les vibrations indésirées des structures flexibles excitées dynamiquement. Enfin, ces alliages peuvent être utilisés comme actionneurs⁴, ce qui permet d'utiliser la structure flexible à la fois comme porteur et comme élément moteur pour réaliser des micro-mécanismes (Bellouard *et al.* 1999; Bellouard 2000) ou des micro-robots.

- D'autres *matériaux actifs* peuvent être utilisés pour la réalisation de structures flexibles. Par exemple, les céramiques piézoélectriques PZT⁵ peuvent être usinées par découpage laser ou frittées avec la forme voulue pour obtenir, en un seul bloc, structure mécanique, actionneurs et capteurs (Breguet 1998).
- Les propriétés mécaniques du *silicium* ainsi que le très grand nombre de procédés de fabrication mis au point pour la fabrication des circuits intégrés en font un matériau intéressant pour la réalisation de très petites structures flexibles (§ 12.4.3).
- Les *polymères et les matériaux composites* peuvent être utilisés avantageusement pour la réalisation de structures flexibles à bas prix, bien qu'il aient une faible stabilité dimensionnelle (fluage, absorption d'humidité). Genequand (1997) présente par exemple un pivot à lames croisées réalisé par injection plastique renforcée par des fibre de haute résistance.

12.4.3 Procédés de fabrication

- L'*électroérosion chimique*⁶ permet d'usiner des matériaux non conducteurs par un procédé similaire à l'électroérosion classique. Ce procédé peut être intéressant soit pour usiner des structures flexibles dans des matériaux non conducteurs, soit pour améliorer l'état des surfaces électroérodées par le procédé classique (Xiaowei *et al.* 1997).
- Les *technologies de micro-usinage de surface du silicium* initialement développées pour la fabrication collective de circuits intégrés permettent également la fabrication de "micromachines" (Minotti & Ferreira 1998). Ces procédés limitent généralement les structures à deux dimensions, mais récemment des structures flexibles tridimensionnelles ont également été réalisées (Akiyama & Shono 1993; Akiyama *et al.* 1997).
- L'*injection plastique* peut être utilisée pour la production en grande série de structures flexibles à faible coût.

4. Les actionneurs à alliages à mémoire de forme ont un rapport force/poids très élevé. En revanche, ils sont relativement lents.

5. Les céramiques PZT obtenues par frittage de composés de plomb, de titane et de zirconium ont des modules piézoélectriques élevés.

6. L'électroérosion chimique est souvent appelée Electro-Chemical Discharge Machining (ECDM) (Kurafuji & Suda 1968; Basak & Ghosh 1996; Langen *et al.* 1998; Wüthrich *et al.* 1999).

- Le *découpage laser* peut avantageusement remplacer l'électroérosion à fil, lorsque l'élancement des sections⁷ des articulations flexibles est inférieur à 15 environ. La vitesse d'usinage par découpage laser est typiquement de 100 à 600 mm/min. Elle est donc plusieurs centaines de fois plus rapide que dans l'électroérosion à fil.

12.4.4 Types d'articulations élémentaires

Les *membranes* et les *soufflets* constituent des articulations élémentaires très intéressantes qu'il s'agirait d'étudier plus en détail par des approches numériques ou expérimentales, vu la complexité de leur étude analytique.

12.5 Note finale

Faut-il s'étonner qu'il ait fallu attendre l'orée du XXI^e siècle pour que soit tenté l'établissement d'une méthode générale de conception des structures flexibles, alors que la problématique des guidages existe depuis que l'homme invente des techniques et que les outils théoriques de mécanique des structures nécessaires à leur étude sont à un niveau suffisamment avancé depuis le XIX^e siècle, comme le décrit [Timoshenko \(1953\)](#) ? Certainement pas, car pour que l'invention prenne une forme achevée il faut que l'époque permette de la rendre à la fois possible et utile, comme l'explique [Daumas \(1968\)](#) :

Dans l'histoire des techniques, l'invention n'est en effet que très rarement réduite à la dimension d'un seul événement dû à un seul personnage. C'est une opération complexe qui, avant de déboucher sur des innovations industrielles, bénéficie d'une expérience parfois longue de plusieurs siècles, accumulée de génération en génération, à laquelle prennent part des individus séparés presque toujours par le temps et l'espace. Elle ne prend une forme achevée que lorsque l'époque le permet. Il faut pour cela qu'un certain nombre de facteurs concourent à la rendre à la fois possible et utile, que le milieu dans lequel elle doit apparaître ait atteint le niveau de maturité indispensable. A mesure que nous nous rapprochons des époques contemporaines, nous pouvons observer que ce processus devient de plus en plus rapide.

Ainsi, c'est l'électroérosion qui rend possible la réalisation de structures flexibles performantes et c'est la robotique de haute précision qui les rend utiles. L'invention des structures flexibles n'a aujourd'hui encore montré qu'une partie des ses potentialités et nous espérons avoir contribué à son développement en posant les bases d'une méthode générale de conception.

Cette méthode se veut être non seulement un outil de conception, mais également un tremplin pour la créativité des ingénieurs et chercheurs qui y feront appel.

7. L'élancement des sections est défini au paragraphe [7.3.1](#).

Annexe A

Abaques et courbes de Wöhler

A.1 Unités

Les unités utilisées pour toutes les grandeurs physiques sont celles du Système International. Le tableau A.1 rappelle quelles sont les unités utilisées pour les grandeurs qui nous concernent.

Grandeurs	Unités
Longueurs	m
Angles	rad
Forces	N
Moments	Nm
Modules de Young E	Pa (N/m ²)
Modules de glissement G	Pa (N/m ²)
Contraintes	Pa (N/m ²)
Rigidités en translation	N/m
Rigidités angulaires	Nm/rad

TABLEAU A.1 – *Unités.*

A.2 Abaques

A.2.1 Lecture des abaques

Le rôle de ces abaques est de fournir de manière directe, sans recourir à des calculs fastidieux, des valeurs approchées des rigidités et des courses de certains guidages flexibles. Ainsi, ils sont particulièrement utiles lors des premiers dimensionnements de structures à articulations flexibles car ils permettent de fixer rapidement les ordres de grandeur des différents éléments.

Il faut toutefois souligner que pour représenter sur des graphes à deux dimensions des fonctions possédant de multiples variables il a parfois été nécessaire de recourir à des formules simplifiées. Ainsi, indépendamment des erreurs de lecture graphique des abaques, il ne faut pas oublier que les courbes sont elles-mêmes des approximations de courbes théoriques “exactes”, ces dernières ne représentant qu’un modèle approximatif de la réalité. L’utilisation d’échelles logarithmiques permet de

maintenir l'erreur de lecture en dessous de 10% sur tout l'espace des solutions avec la méthode de lecture fine décrite à la section suivante. L'écart entre les courbes des abaques et les courbes théoriques exactes peut ajouter quelques pour cent d'erreur. Enfin, vu le grand nombre d'hypothèses simplificatrices, on peut s'attendre à ce que le modèle théorique exact s'écarte légèrement de la réalité. Nous pouvons estimer cet écart à 10% environ. Le cumul de ces erreurs fait qu'il peut se produire, entre les valeurs lues sur les abaques et la réalité, *des écarts allant jusqu'à 25%*.

Echelles logarithmiques

Tous les abaques couvrent une plage d'épaisseurs e allant de $1\ \mu\text{m}$ à $1\ \text{mm}$ et une plage de rayons r allant de $0.1\ \text{mm}$ à $1\ \text{m}$. Cette très vaste couverture de plusieurs ordres de grandeur est rendue possible par l'utilisation d'échelles logarithmiques. Ces échelles permettent d'avoir une précision de lecture graphique uniforme sur tout l'espace des solutions. Par contre, elles ont l'inconvénient d'être délicates à lire sans une certaine habitude. L'abaque de la figure A.1 permet de voir le détail de la lecture des axes.

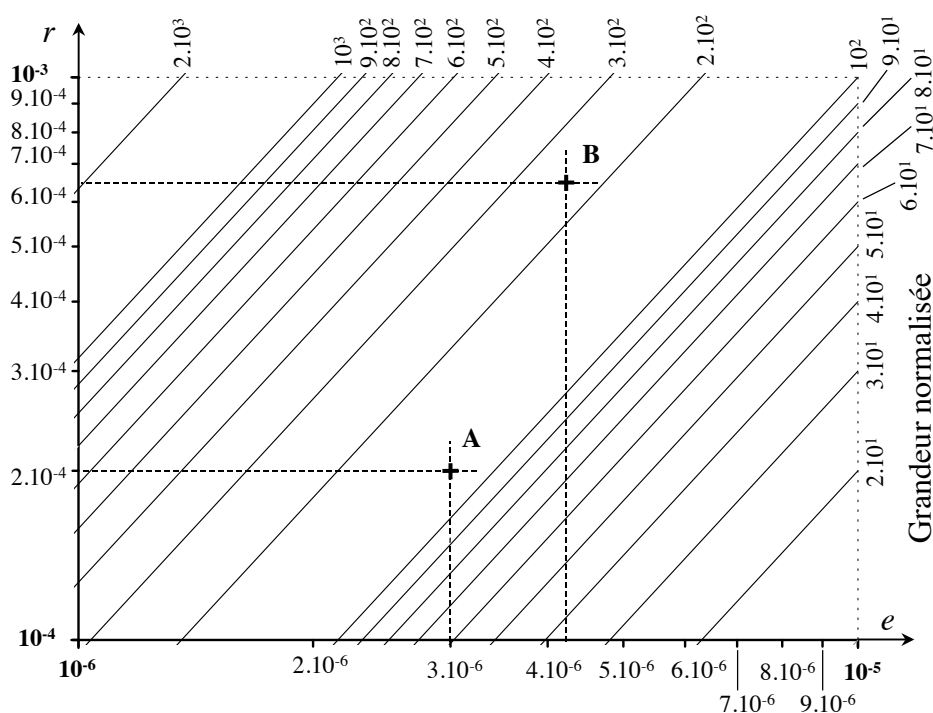


FIG. A.1 – *Lecture des abaques à échelles logarithmiques : cet abaque fictif couvre une plage d'épaisseurs e allant de $1\ \mu\text{m}$ à $10\ \mu\text{m}$ et une plage de rayons r allant de $0.1\ \text{mm}$ à $1\ \text{mm}$. Cette plage réduite permet d'indiquer les valeurs intermédiaires aux puissances de 10 sur les axes.*

EXEMPLE A : cherchons sur l'abaque de la figure A.1 la valeur de la grandeur normalisée pour $e = 3\ \mu\text{m}$ et $r = 0.2\ \text{mm}$. Sachant que l'unité utilisée pour e et r est le mètre, nous traçons le point A en $(3 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 10^{-4})$. Ce point tombe entre les lignes de niveau de $1 \cdot 10^2$ et $2 \cdot 10^2$. Une observation plus détaillée montre qu'il est

situé environ à $1/4$ de la distance séparant ces deux courbes. Le tableau A.2 permet de trouver pour $1\frac{1}{4}$ la valeur de la grandeur normalisée : $1.19 \cdot 10^2$.

EXEMPLE B : cherchons la valeur de la grandeur normalisée pour $e = 4.2 \mu\text{m}$ et $r = 0.65 \text{ mm}$. Traçons le point B en $(4.2 \cdot 10^{-6}; 6.5 \cdot 10^{-4})$. Le tableau A.2 nous indique que son abscisse est environ à $1/4$ de la distance séparant les valeurs $4 \cdot 10^{-6}$ et $5 \cdot 10^{-6}$ et son ordonnée environ à équidistance des valeurs $6 \cdot 10^{-4}$ et $7 \cdot 10^{-4}$. Vu que le point B tombe environ à équidistance des courbes de niveau de $2 \cdot 10^2$ et $3 \cdot 10^2$ ($2\frac{1}{2}$ sur de tableau A.2), la valeur de la grandeur normalisée est environ $2.45 \cdot 10^2$.

$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
1.19	1.41	1.68	2.21	2.45	2.71	3.22	3.46	3.72

$4\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$
4.23	4.47	4.73	5.23	5.48	5.73	6.24	6.48	6.74

$7\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$9\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$
7.24	7.48	7.73	8.24	8.49	8.74	9.24	9.49	9.74

TABLEAU A.2 – *Tableau d'aide à la lecture entre les graduations des échelles logarithmiques. La ligne supérieure indique la position du point lu entre deux graduations consécutives de l'échelle logarithmique. La ligne inférieure indique les décimales de la valeur lue. Exemple : si le point lu se trouve à $1/4$ de la distance séparant les graduations $5 \cdot 10^3$ et $6 \cdot 10^3$, on lit pour $5\frac{1}{4}$ la valeur $5.23 \cdot 10^3$.*

REMARQUE : sur les abaques les puissances de 10 sont notées différemment selon qu'elles sont sur les axe (10^x) ou sur les lignes des niveau ($1ex$).

A.3 Exemples

A.3.1 Col circulaire

Soit un col circulaire dont les paramètres géométriques sont les suivants : $e = 100 \mu\text{m}$; $r = 4 \text{ mm}$; $b = 10 \text{ mm}$. Il est usiné dans un acier avec : $E = 210 \text{ GPa}$; $G = 82 \text{ GPa}$; $\sigma_{\text{adm}} = 800 \text{ MPa}$.

Rigidité angulaire

Selon la formule simplifiée (4.20) la rigidité angulaire de ce col est :

$$K_{\alpha M} \simeq 0.235 \text{ Nm/rad.}$$

Sur l'abaque de la figure A.2, le point $(1 \cdot 10^{-4} ; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à $1/4$ de la distance séparant les lignes de niveau $1 \cdot 10^{-10}$ et $2 \cdot 10^{-10}$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la rigidité angulaire normalisée : $K_{\alpha Mn} \simeq 1.19 \cdot 10^{-10}$. La rigidité angulaire est donc :

$$K_{\alpha M} = K_{\alpha Mn} E b \simeq 0.25 \text{ Nm/rad.}$$

La valeur théorique exacte est : $K_{\alpha M} = 0.236 \text{ Nm/rad}$.

Rigidité en translation

Selon la formule simplifiée (4.23) la rigidité linéaire de ce col est :

$$K_{cis} \simeq 1.81 \cdot 10^6 \text{ N/m.}$$

Sur l'abaque A.4, le point $(1 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à équidistance des lignes de niveau $8 \cdot 10^{-4}$ et $9 \cdot 10^{-4}$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la rigidité linéaire normalisée : $K_{cisn} \simeq 8.49 \cdot 10^{-4}$. La rigidité linéaire est donc :

$$K_{cis} = K_{cisn}Eb \simeq 1.78 \cdot 10^6 \text{ N/m.}$$

La valeur théorique exacte est : $K_{cis} = 1.75 \cdot 10^6 \text{ N/m.}$

Rigidité en torsion

Selon la formule simplifiée (4.25) la rigidité angulaire en torsion de ce col est :

$$K_{tors} \simeq 0.368 \text{ Nm/rad.}$$

Sur l'abaque A.5, le point $(1 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à équidistance des lignes de niveau $4 \cdot 10^{-10}$ et $5 \cdot 10^{-10}$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la rigidité en torsion normalisée : $K_{torsn} \simeq 4.47 \cdot 10^{-11}$. La rigidité en torsion est donc :

$$K_{tors} = K_{torsn}Gb \simeq 0.366 \text{ Nm/rad.}$$

La valeur théorique exacte est : $K_{tors} = 0.368 \text{ Nm/rad.}$

Rigidité angulaire transverse

Selon la formule simplifiée (4.26) la rigidité angulaire de ce col est :

$$K_{\alpha M}^t \simeq 980 \text{ Nm/rad.}$$

Sur l'abaque A.6, le point $(1 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à 3/4 de la distance séparant les lignes de niveau $4 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la rigidité angulaire normalisée : $K_{\alpha Mn}^t \simeq 4.73 \cdot 10^{-3}$. La rigidité angulaire est donc :

$$K_{\alpha M}^t = K_{\alpha Mn}^tEb^3 \simeq 993 \text{ Nm/rad.}$$

La valeur théorique exacte est : $K_{\alpha M}^t = 1001 \text{ Nm/rad.}$

A.3.2 Table à quatre cols circulaires

Soit une table à quatre cols circulaires constituée à partir de 4 cols identiques à ceux décrits à la section précédente. La longueur des bras de la table de col à col est $l = 50 \text{ mm.}$

Rigidité linéaire

Selon la formule simplifiée (5.105) la rigidité linéaire de la table est :
 $K \simeq 376 \text{ N/m}$.

Sur l'abaque A.8, le point $(1 \cdot 10^{-4} ; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à équidistance des lignes de niveau $4 \cdot 10^{-10}$ et $5 \cdot 10^{-10}$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la rigidité linéaire normalisée : $K_n \simeq 4.47 \cdot 10^{-10}$. La rigidité linéaire est donc :

$$K = K_n Eb / l^2 \simeq 375 \text{ Nm/rad}.$$

La valeur théorique exacte est : $K = 377 \text{ Nm/rad}$.

Course linéaire

Selon la formule simplifiée (5.107) la course linéaire de la table est :

$$f \simeq 2.84 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Sur l'abaque A.9, le point $(1 \cdot 10^{-4} ; 4 \cdot 10^{-3})$ tombe à équidistance des lignes de niveau $1 \cdot 10^1$ et $2 \cdot 10^1$. A l'aide du tableau A.2 on détermine la valeur de la course normalisée : $f_n \simeq 1.41 \cdot 10^1$. La course linéaire est donc :

$$f = f_n \sigma_{\text{adm}} l / E \simeq 2.68 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

La valeur théorique exacte est : $f = 2.83 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Lois de similitude : Imaginons que, pour augmenter la course de la table, l'on décide de diminuer de moitié l'épaisseur e . La loi de similitude $f^* \simeq 1/\sqrt{e^*}$ nous indique que la course va être multipliée par un facteur $\sqrt{2}$, devenant ainsi :

$$f' \simeq \sqrt{2} f = \sqrt{2} \times 2.84 \cdot 10^{-3} = 4.02 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

La valeur théorique exacte est : $f' = 4.01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

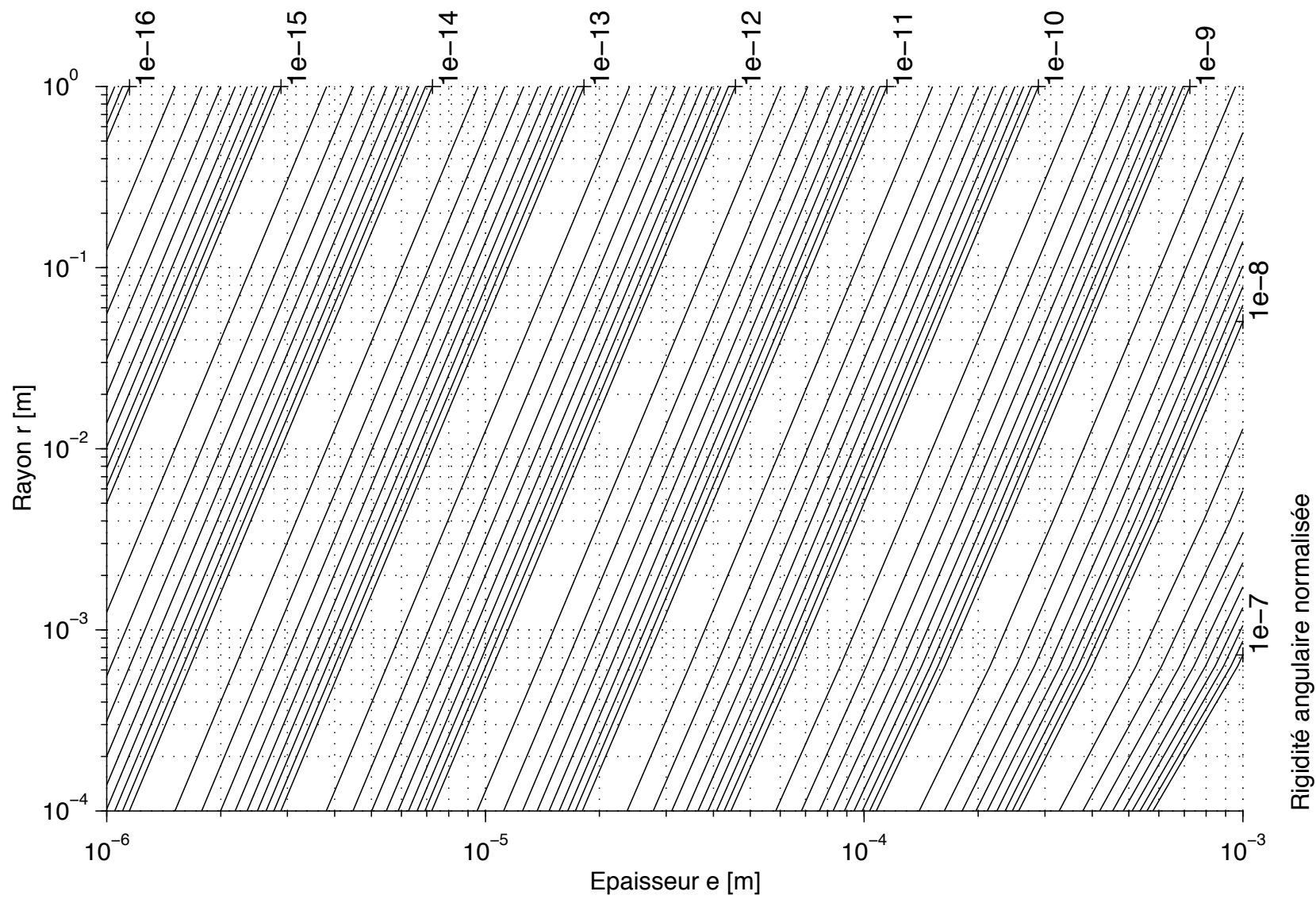


FIG. A.2 – *Rigidité angulaire normalisée du col circulaire : $K_{\alpha M n} = K_{\alpha M} / (Eb)$.*

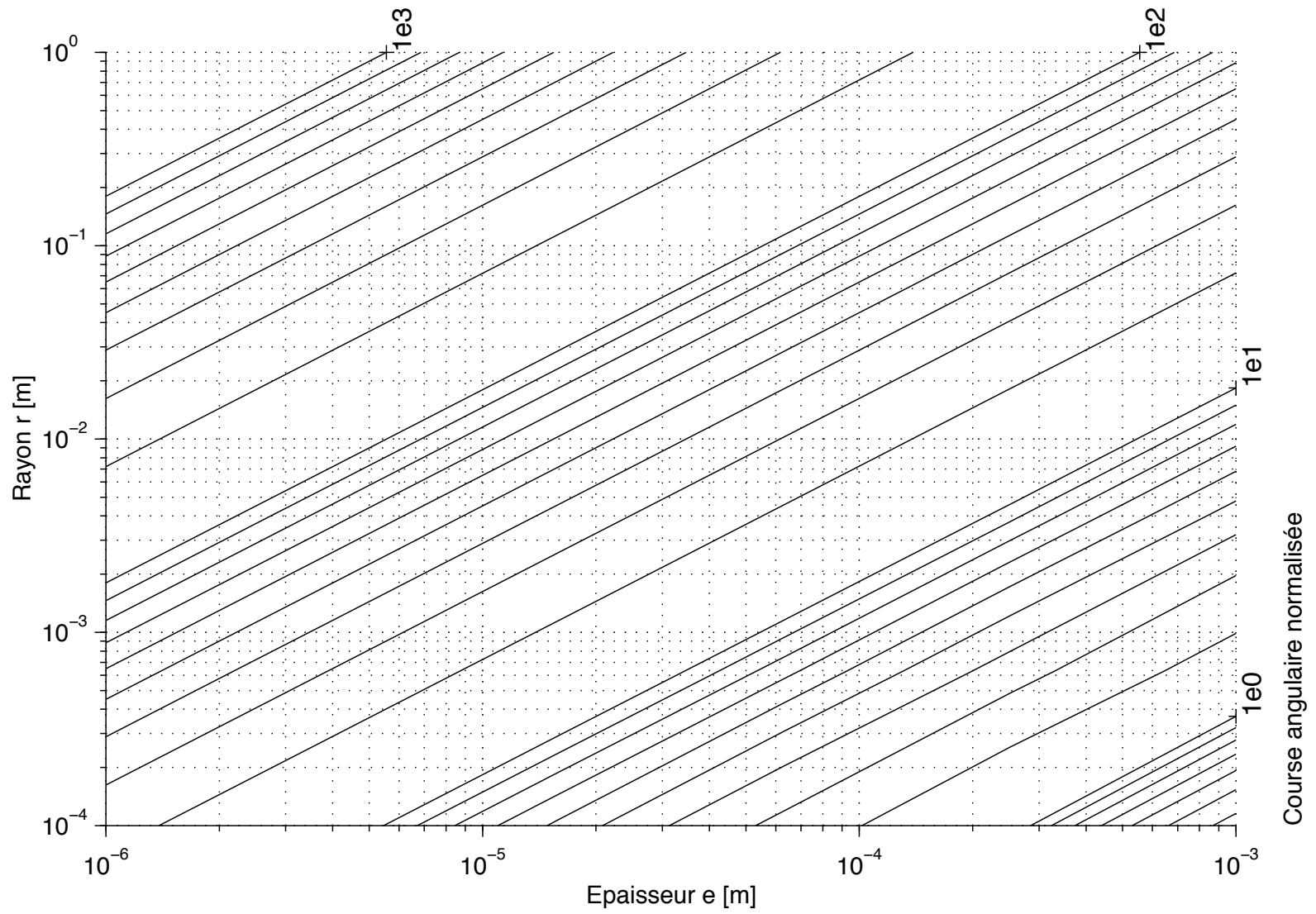


FIG. A.3 – Course angulaire normalisée du col circulaire : $\alpha_{Mn} = \alpha_M E / \sigma_{adm}$.

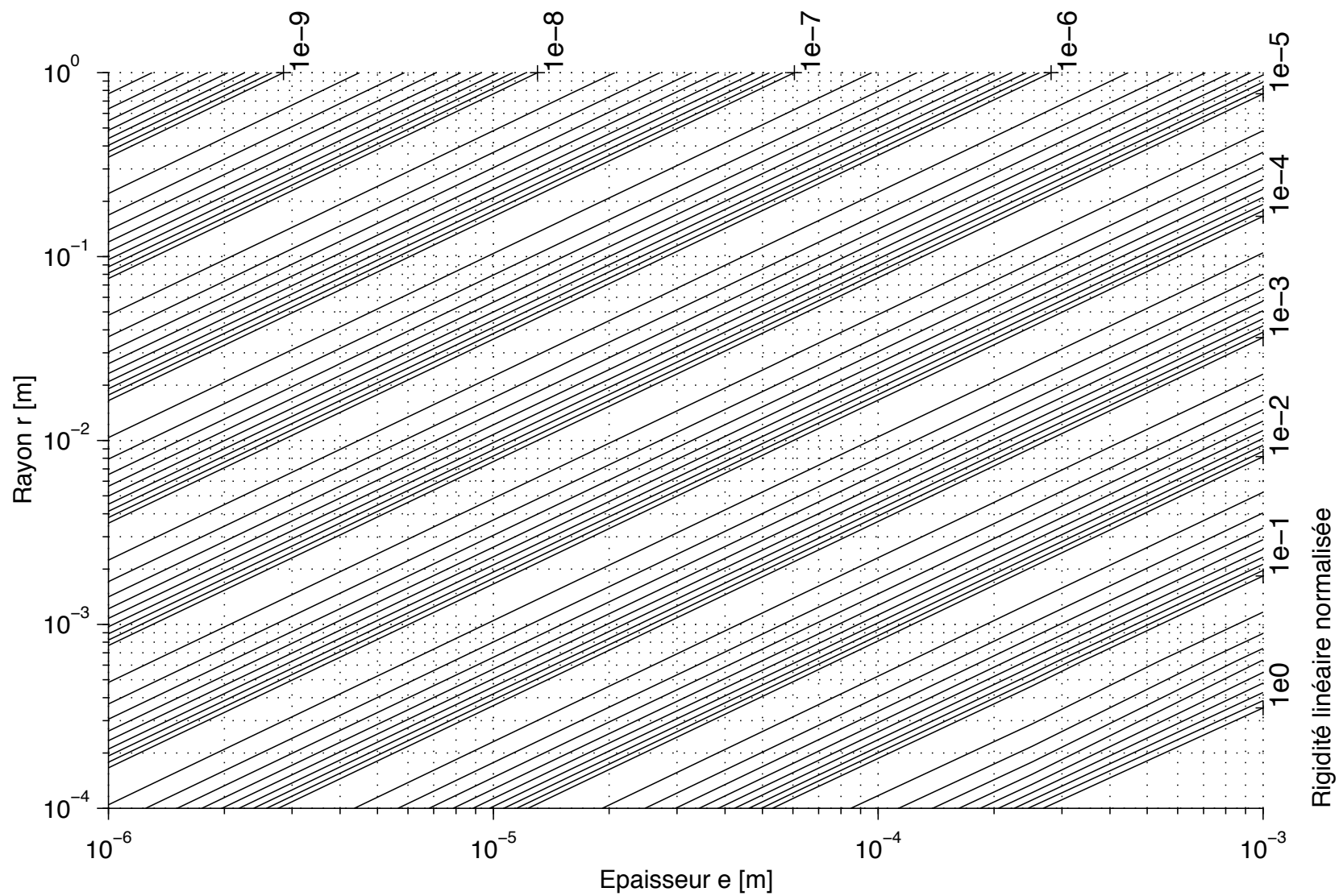


FIG. A.4 – *Rigidité en translation normalisée du col circulaire : $K_n = K/(Eb)$.*

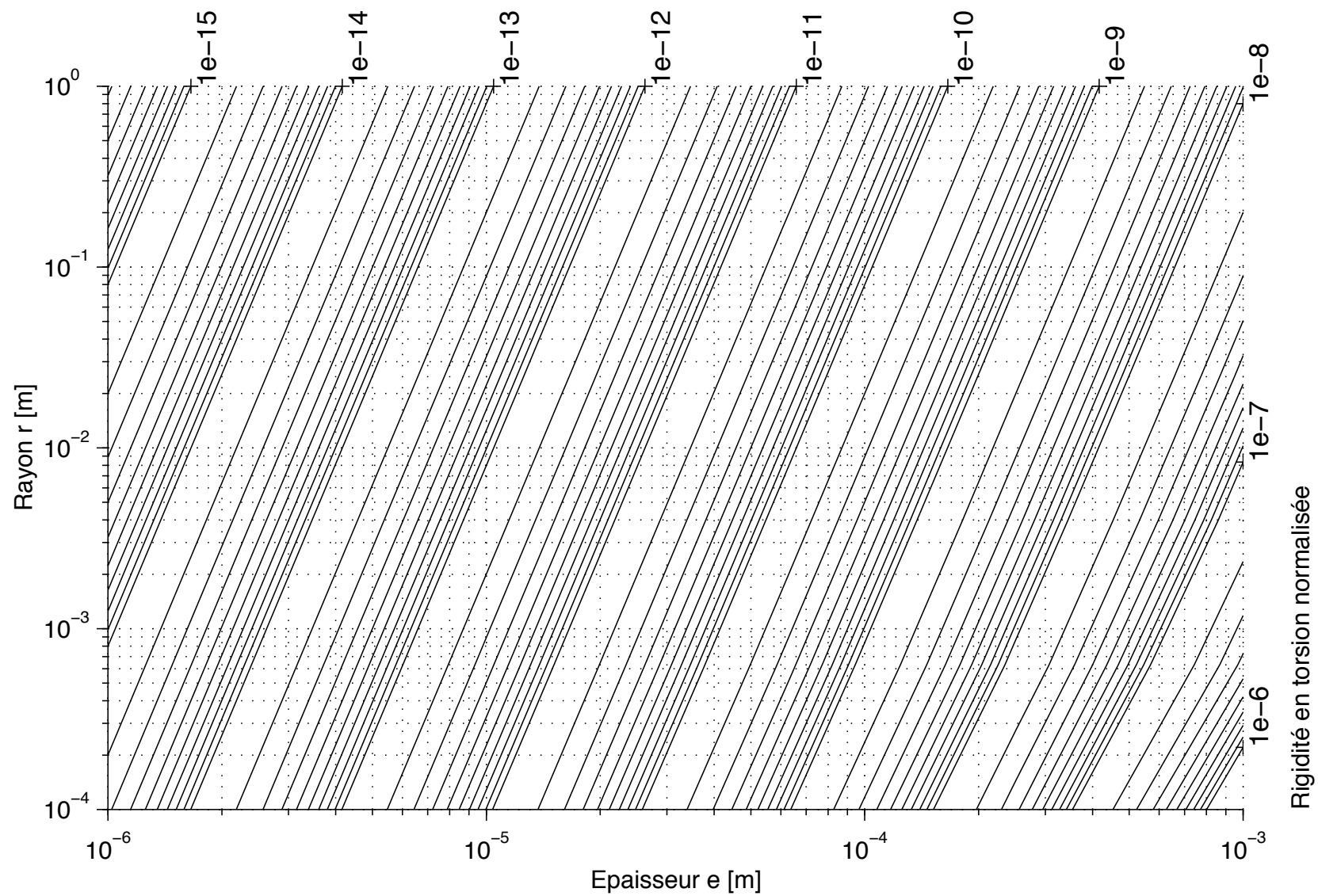


FIG. A.5 – *Rigidité en torsion normalisée du col circulaire : $K_{tors\ n} = K_{tors}/(Gb)$.*

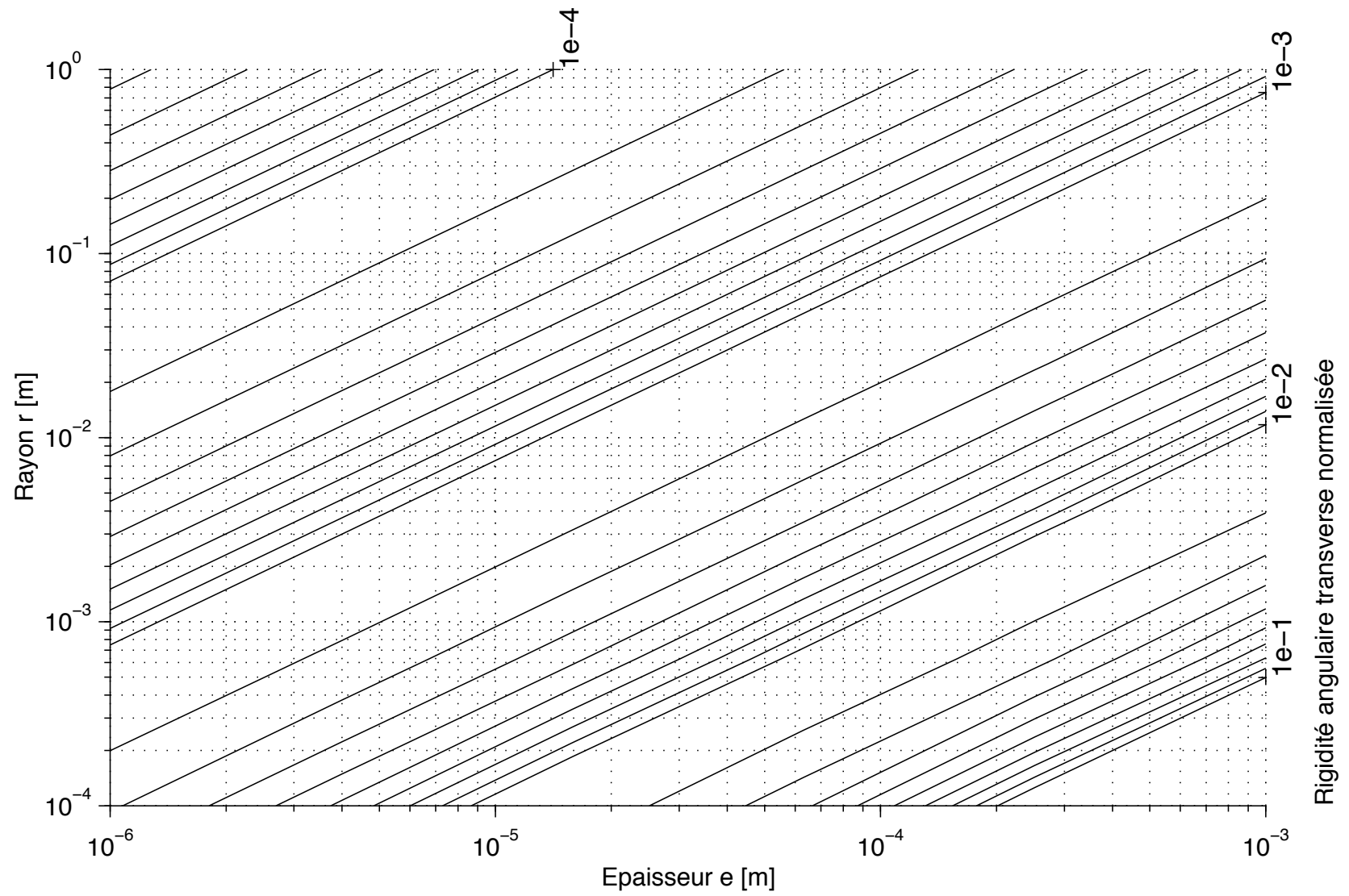


FIG. A.6 – *Rigidité angulaire transverse normalisée du col circulaire : $K_{\alpha M n}^t = K_{\alpha M}^t / (Eb^3)$.*

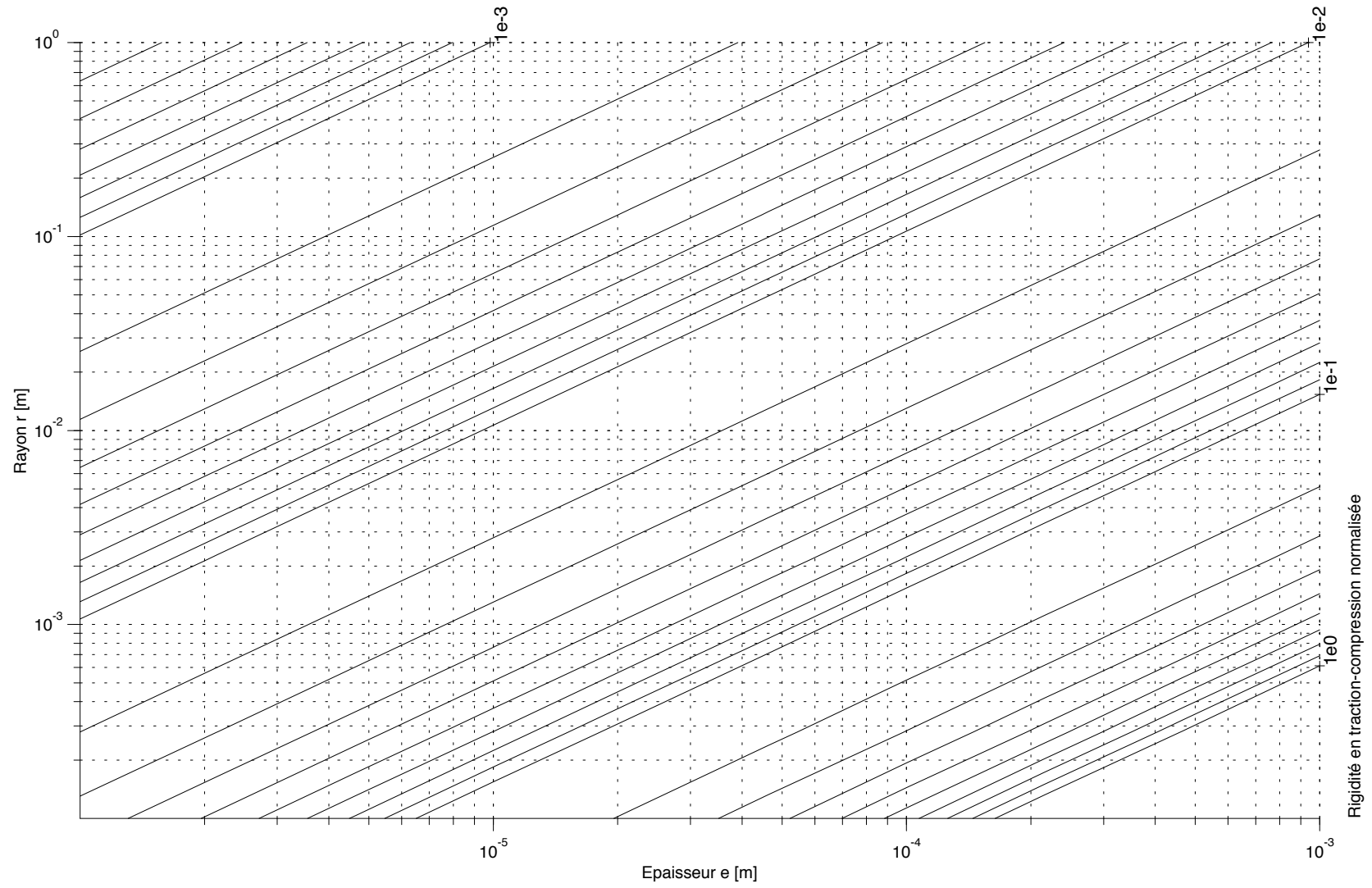


FIG. A.7 – *Rigidité en traction-compression normalisée du col circulaire : $K_{trac\ n} = K_{trac}/(Eb)$.*

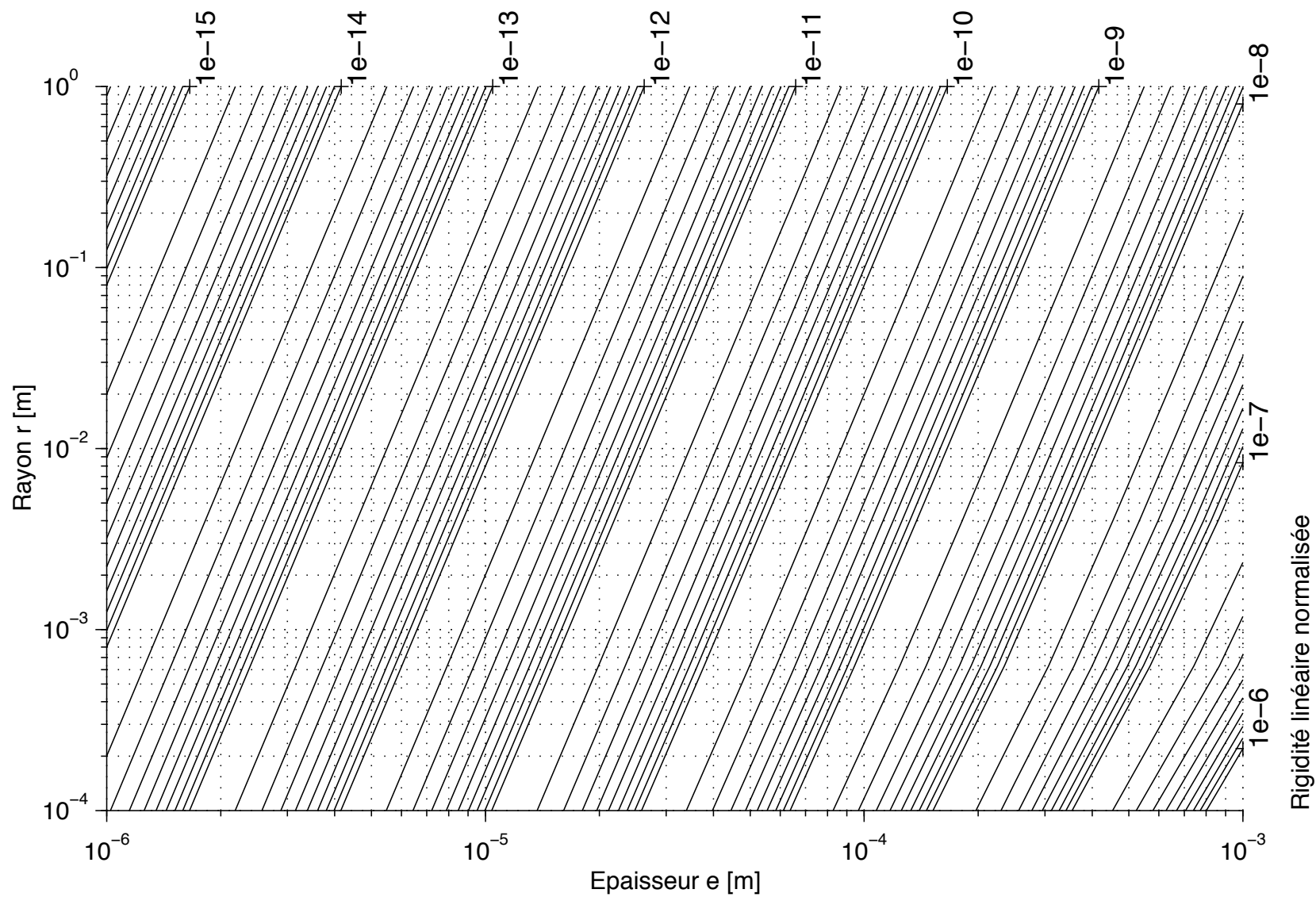


FIG. A.8 – *Rigidité en translation de la table à quatre cols circulaires : $K_n = Kl^2/(Eb)$.*

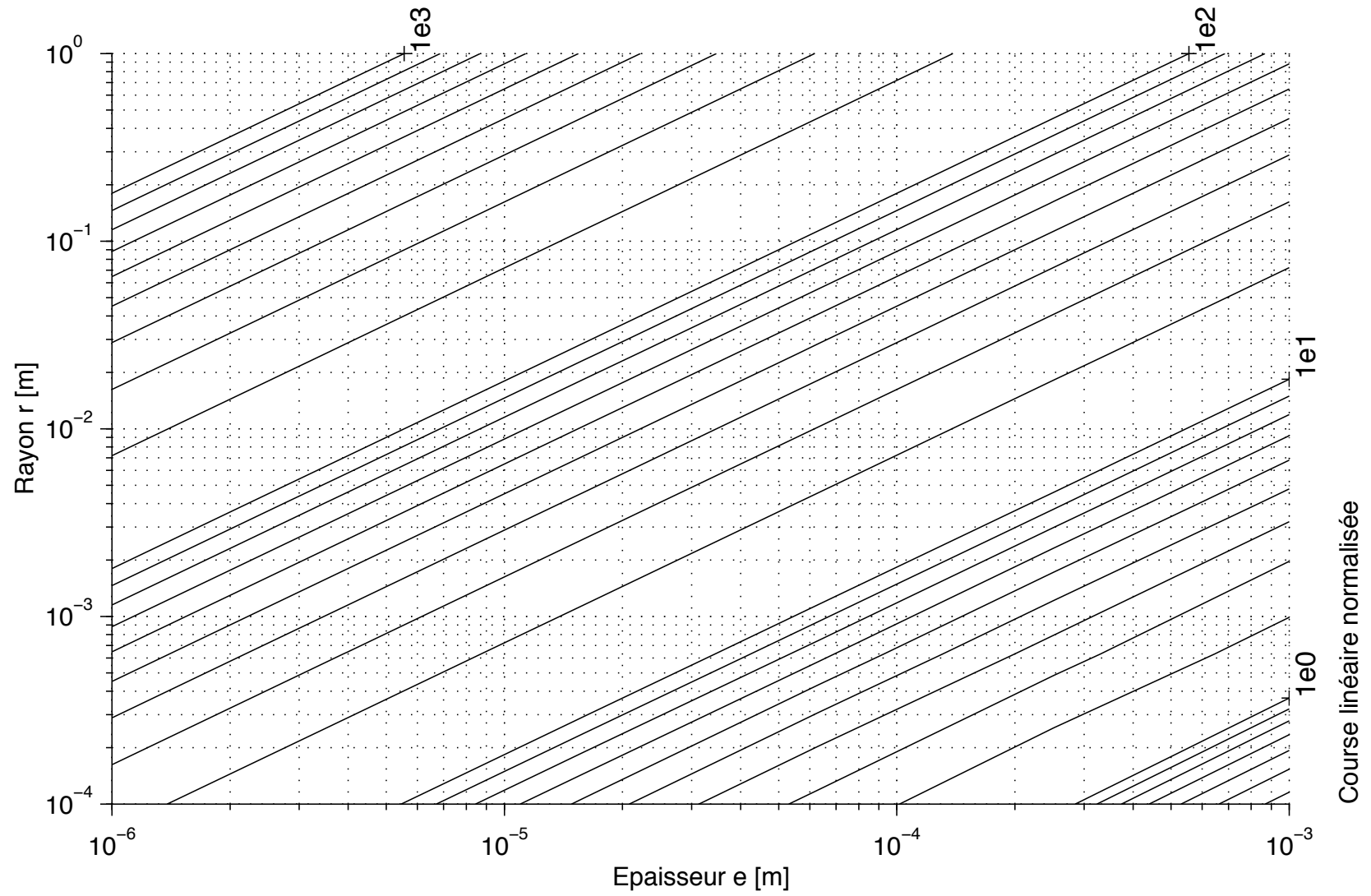


FIG. A.9 – Course linéaire de la table à quatre cols circulaires : $f_n = fE/(l\sigma_{adm})$.

A.4 Table hyperguidée à quatre lames parallèles

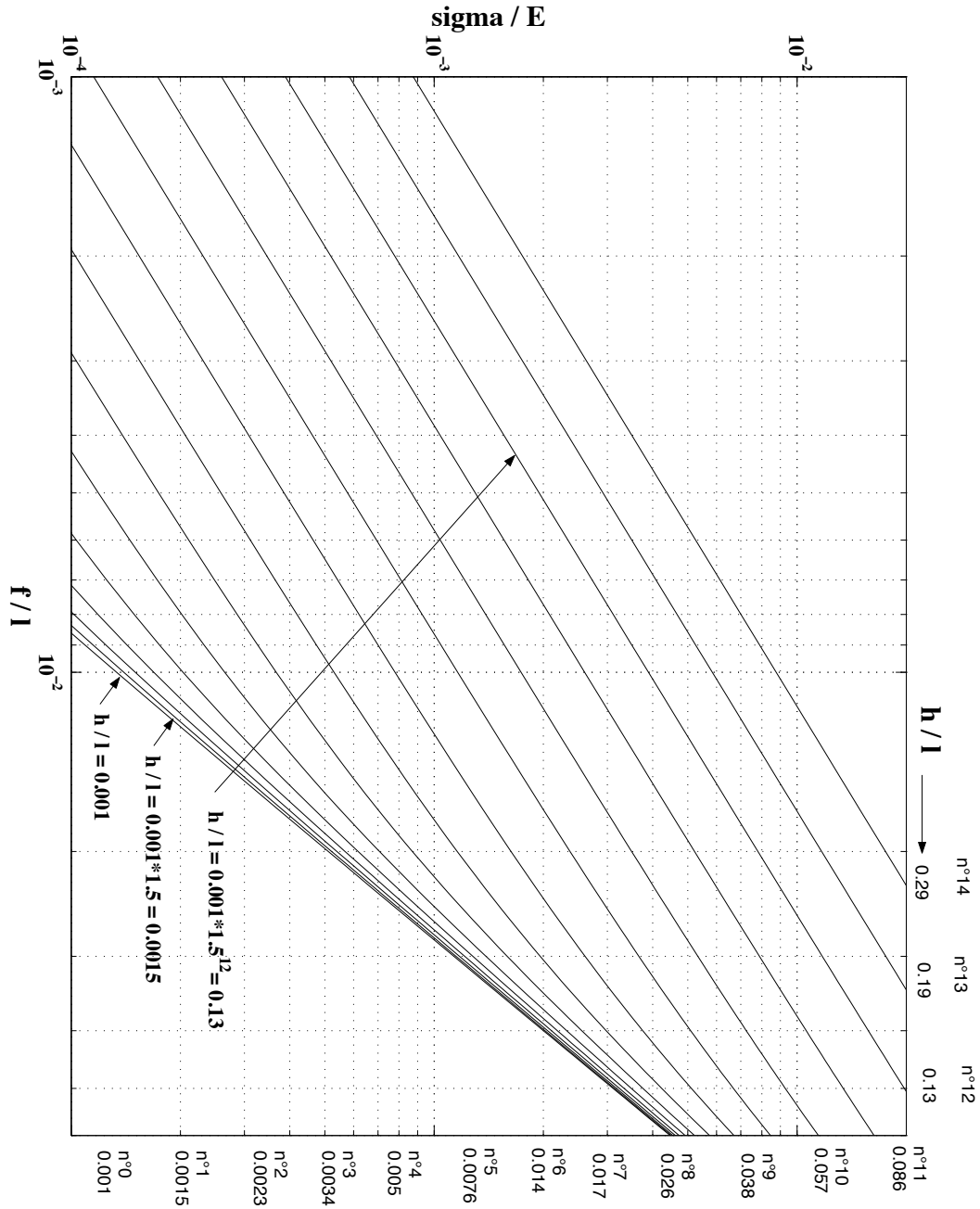
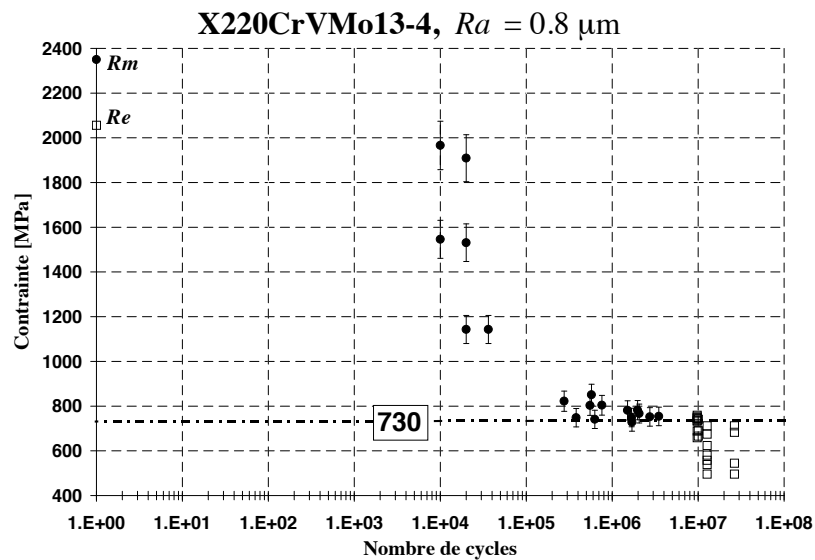
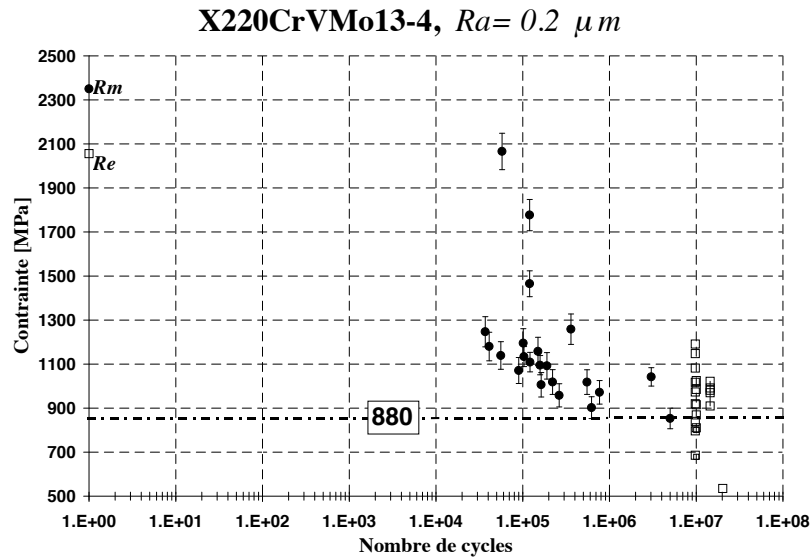
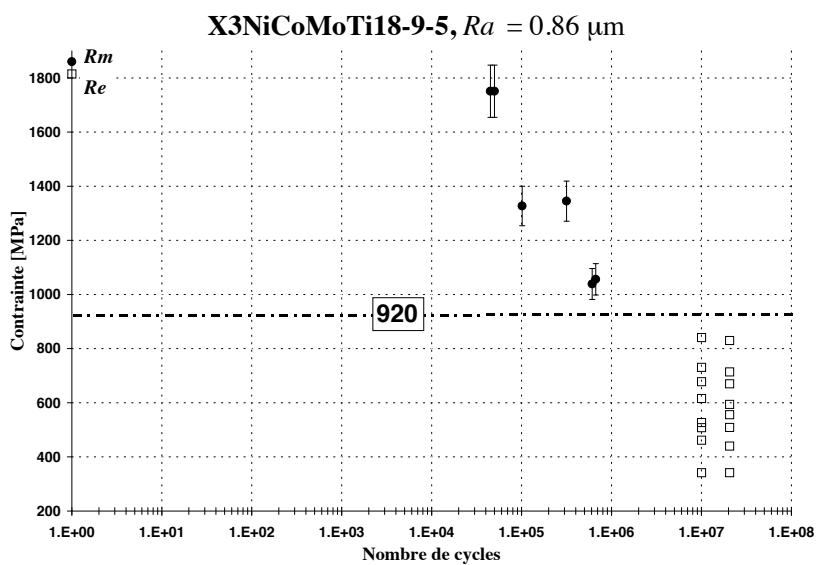
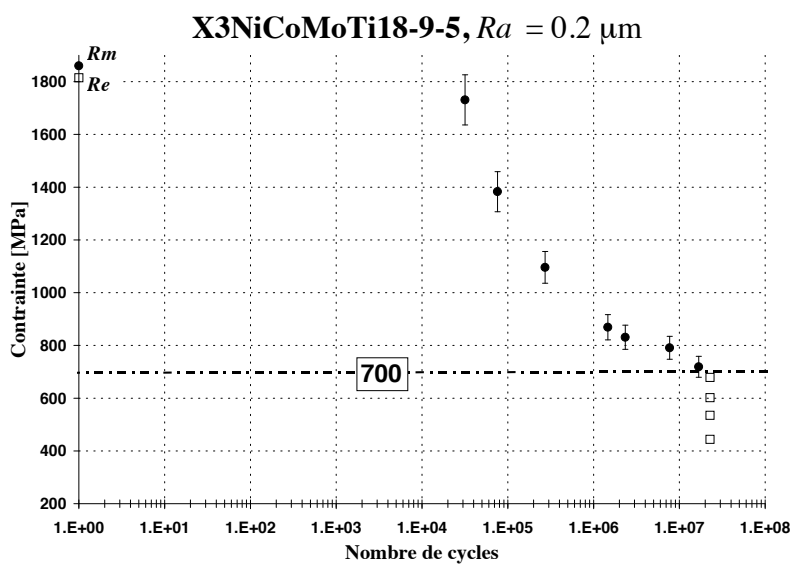
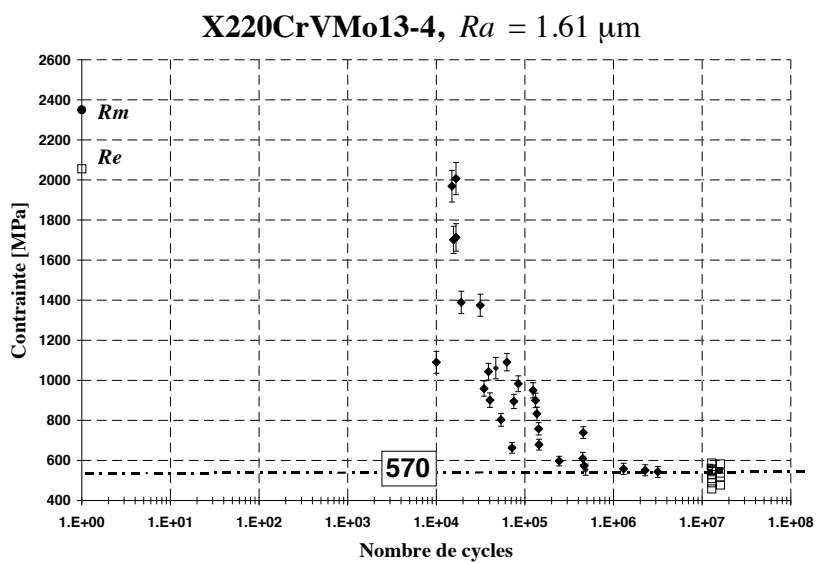


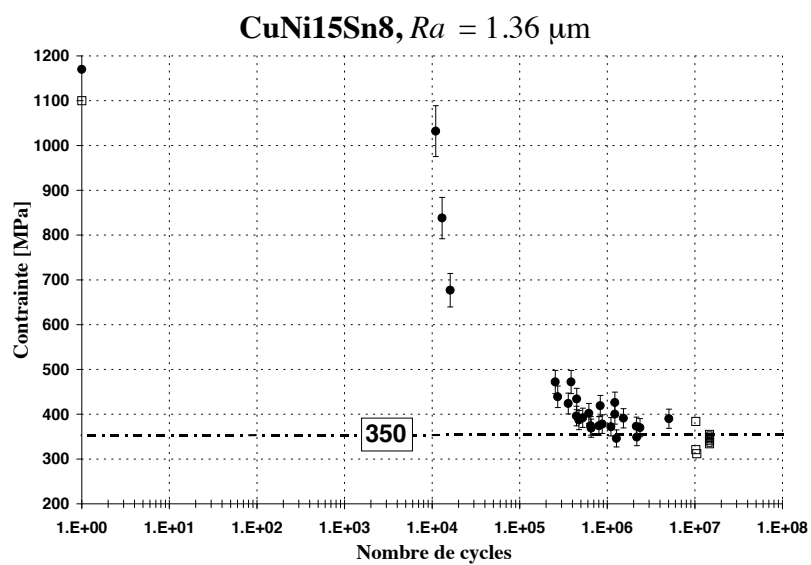
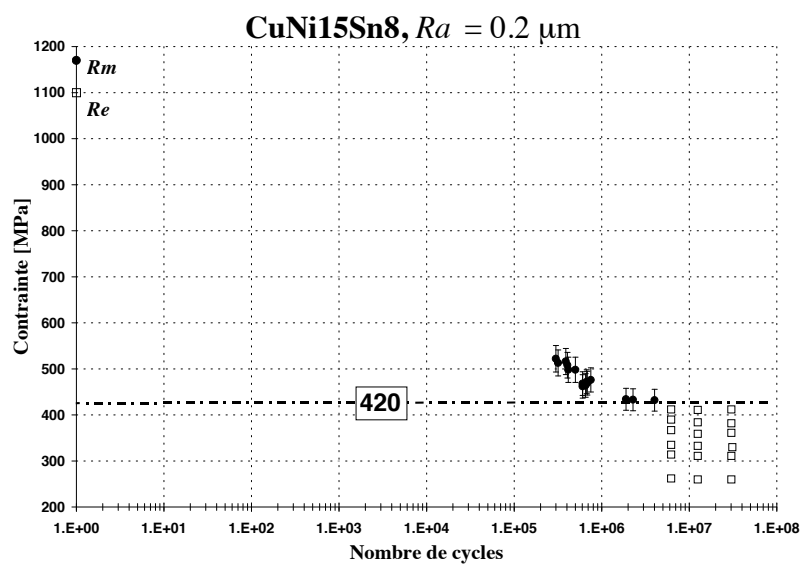
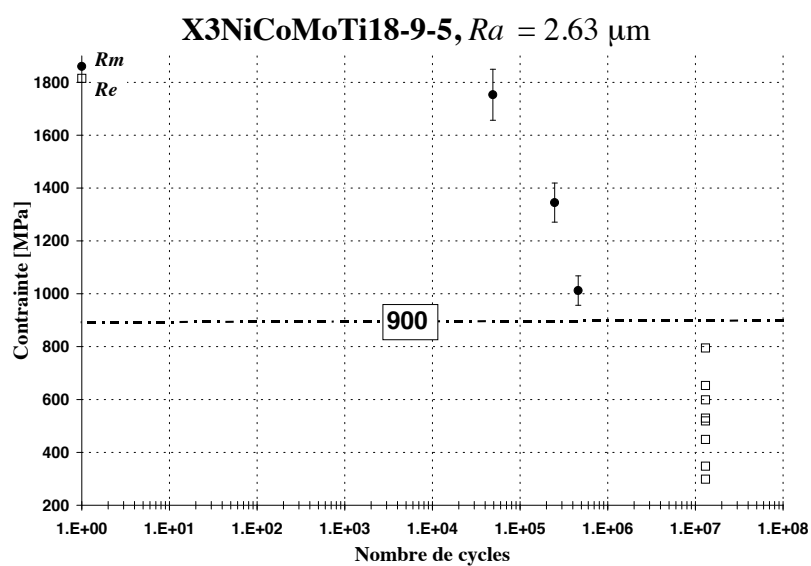
FIG. A.10 – Abaque pour le calcul de la course admissible de la table hyperguidée à quatre lames parallèles. La courbe n°0 correspond à une épaisseur normalisée $h/l = 0.001$. La courbe n°1 correspond à $h/l = 0.001 \times 1.5$, la courbe n°i correspond à $h/l = 0.001 \times 1.5^i$. Connaissant la contrainte admissible σ_{adm} et E , calculer la contrainte normalisée σ_{adm}/E . Tracer sur l'abaque la droite horizontale correspondante. L'intersection de cette droite avec la courbe correspondant à l'épaisseur normalisée h/l de la table donne la course admissible normalisée f/l . La section 5.2 contient les informations théoriques qui ont permis de tracer cet abaque.

A.5 Courbes de Wöhler

Cette section montre les courbes de Wöhler obtenues lors des essais de fatigue réalisés sur les cols circulaires électroérodés de $50\text{ }\mu\text{m}$ de section (chap. 9). Les points ronds correspondent aux cols qui sont rompus. Les carrés correspondent à ceux qui ne sont pas rompus. La ligne horizontale en traits discontinus correspond à la valeur de la limite de fatigue corrigée $\sigma'_D(10^7)$ que nous déduisons des courbes de Wöhler.







Annexe B

Formulaire

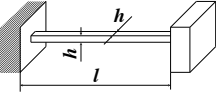
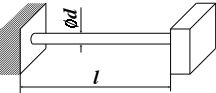
	MOMENTS D'INERTIE	RIGIDITÉS	COURSES
	$I_x = I_y = \frac{h^4}{12}$ $I_p = \frac{h^4}{6}$	$K_{tors}^{\diamond} = 0.141 \frac{h^4 G}{l}$	$\alpha_{tors}^{\diamond} = \frac{1.48 \tau_{adm} l}{G h}$ où $\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$K_{tors}^{\circ} = \frac{G I_p}{l}$	$\alpha_M^{\circ} = \alpha_M^{t^{\circ}} = \frac{2 \sigma_{adm} l}{E d}$ $\alpha_{tors}^{\circ} = \frac{2 \tau_{adm} l}{G d}$ où $\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$. $f_{cis}^{\circ} = \frac{\sigma_{adm} l^2}{3 E d}$ $f_{cis}^{t^{\circ}} = \frac{\sigma_{adm} l^2}{3 E d}$ $f_{trac}^{\circ} = \frac{\sigma_{adm} l}{E}$

TABLEAU B.1 – Fil (sect. 4.3). Les formules des courses de la lame (Tab. B.2) sont également valables pour le fil de section carrée avec $b = h$.

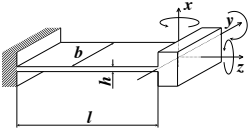
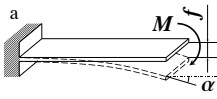
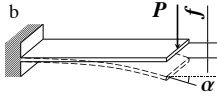
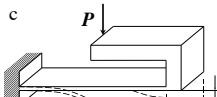
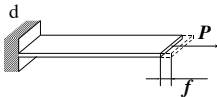
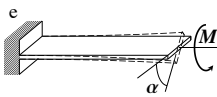
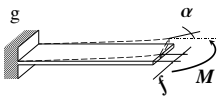
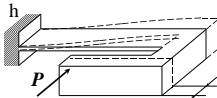
	$I_x = \frac{hb^3}{12}$	$I_y = \frac{bh^3}{12}$
CAS DE CHARGE	RIGIDITÉS	COURSES
 $K_{\alpha M} = M / \alpha$; $K_{fM} = M / f$	$K_{\alpha M} = \frac{EI_y}{l}$ $K_{fM} = \frac{2EI_y}{l^2}$	$\alpha_M = \frac{2\sigma_{adm}l}{Eh}$ Limite : $-28^\circ < \alpha_M < 28^\circ$
 $K_{\alpha P} = P / \alpha$; $K_{fP} = P / f$	$K_{\alpha P} = \frac{2EI_y}{l^2}$ $K_{fP} = \frac{3EI_y}{l^3}$	$\alpha_M = \frac{\sigma_{adm}l}{Eh}$ $f = \frac{2\sigma_{adm}l^2}{3Eh}$
 $K_{cis} = P / f$	$K_{cis} = \frac{12EI_y}{l^3}$	$f_{cis} = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Eh}$
 $K_{trac} = P / f$	$K_{trac} = \frac{bhE}{l}$	$f_{trac} = \frac{\sigma_{adm}l}{E}$
 $K_{tors} = M / \alpha$	$K_{tors} = \frac{bh^3G}{3l}$	$\alpha_{tors} = \frac{\tau_{adm}l}{hG}$ où $\tau_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{\sqrt{3}}$
 $K'_{\alpha M} = M / \alpha$; $K'_{fM} = M / f$	$K'_{\alpha M} = \frac{EI_x}{l}$ $K'_{fM} = \frac{2EI_x}{l^2}$	$\alpha_M^t = \frac{2\sigma_{adm}l}{Eb}$
 $K'_{cis} = P / f$	$K'_{cis} = \frac{12EI_x}{l^3}$	$f_{cis}^t = \frac{\sigma_{adm}l^2}{3Eb}$

TABLEAU B.2 – *Lame* (sect. 4.2).

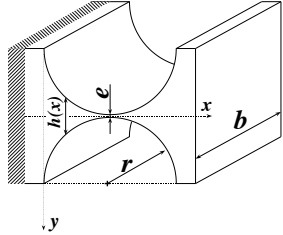
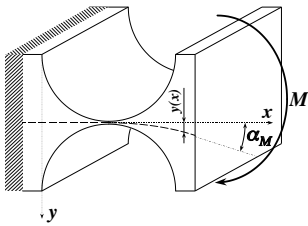
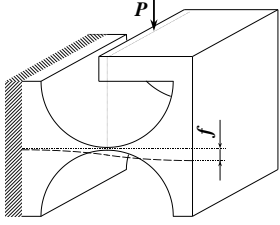
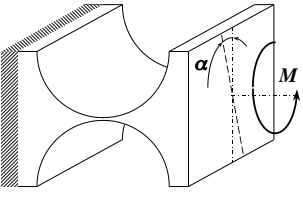
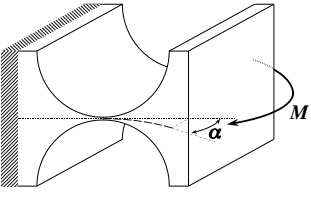
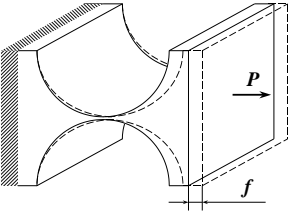
 	Rigidité angulaire : $K_{\alpha M} \simeq \frac{2Ebe^{2.5}}{9\pi\sqrt{r}}$ Lois de similitude : $K_{\alpha M}^* = b^* E^*$; $K_{\alpha M}^* \simeq e^{*2.5}$; $K_{\alpha M}^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.2 Course angulaire : $\alpha_M \simeq \frac{3\pi\sigma_{adm}\sqrt{r}}{4E\sqrt{e}}$ Lois de similitude : $\alpha_M^* = \sigma_{adm}^*/E^*$; $\alpha_M^* \simeq \sqrt{1/e^*}$; $\alpha_M^* \simeq \sqrt{r^*}$; $\alpha_M^* = b^{*0}$ Abaque : FIG. A.3
	Rigidité en translation : $K_{cis} \simeq 0.218 \frac{Ebe^{1.5}}{r^{1.5}}$ Lois de similitude : $K_{cis}^* = E^*$; $K_{cis}^* \simeq b^*$; $K_{cis}^* \simeq e^{*1.5}$; $K_{cis}^* \simeq r^{*-1.5}$ Abaque : FIG. A.4
	Rigidité en torsion : $K_{tors} \simeq 0.284 \frac{Gbe^{2.5}}{\sqrt{r}}$ Lois de similitude : $K_{tors}^* = G^*$; $K_{tors}^* \simeq b^*$; $K_{tors}^* \simeq e^{*2.5}$; $K_{tors}^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.5
	Rigidité angulaire transverse : $K_{\alpha M}^t \simeq 0.0295 \frac{Eb^3\sqrt{e}}{\sqrt{r}}$ Lois de similitude : $K_{\alpha M}^{t*} = E^*$; $K_{\alpha M}^{t*} = b^{*3}$; $K_{\alpha M}^{t*} \simeq \sqrt{e^*}$; $K_{\alpha M}^{t*} \simeq \sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.6
	Rigidité traction-compression. : $K_{trac} \simeq 0.353 \frac{Eb\sqrt{e}}{\sqrt{r}}$ Lois de similitude : $K_{trac}^* = E^*$; $K_{trac}^* = b^*$; $K_{trac}^* \simeq \sqrt{e^*}$; $K_{trac}^* \simeq \sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.7

TABLEAU B.3 – Col circulaire (sect. 4.5).

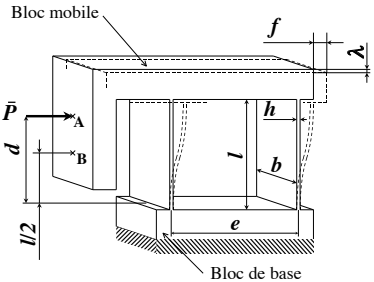
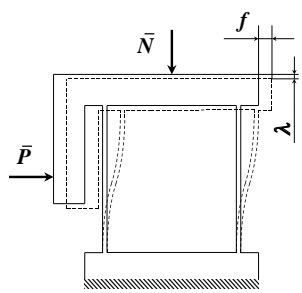
	Rigidité naturelle : $\bar{K}_o = \frac{24EI}{l^3}$ Course admissible : $f_{adm_o} = \frac{\sigma_{adm} l^2}{3Eh}$ Déplacement vertical parasite : $\lambda \simeq \frac{3f^2}{5l}$
	Charge critique : $\bar{N}_c = \frac{8\pi^2 EI}{l^2}$ Rigidité naturelle : $\bar{K} \simeq \bar{K}_o - \frac{\bar{K}_o}{\bar{N}_o} \bar{N} \quad \text{avec} \quad \bar{K}_o = \frac{24EI}{l^3} \quad \text{et} \quad \bar{N}_o = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$ Course admissible pour $N < 0$: $f_{adm} = \frac{hl^2 \pi^2 (N + bh\sigma_{adm})}{3bEh^3 \pi^2 + 3l^2 N (\pi^2 - 12)}$ Course admissible pour $0 \leq N < N_o$: $f_{adm} = \frac{hl^2 \pi^2 (-N + bh\sigma_{adm})}{3bEh^3 \pi^2 + 3l^2 N (\pi^2 - 12)}$ Course admissible pour $N = N_c$: $f_{adm} = \frac{l^2 \sigma_{adm}}{Eh\pi} - \frac{h\pi}{3}$

TABLEAU B.4 – Table à deux lames parallèles (sect. 5.1).

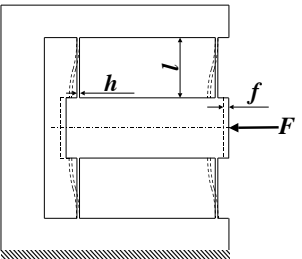
	Caractéristique force-déplacement : $F \simeq \frac{6bhEf^4}{3fl^3 - \sqrt{6}hl^3 \text{th} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}f}{h}}$ Contrainte en fonction du déplacement : $\sigma = \frac{3Ef^3}{l^2 \left(\sqrt{6} f \coth \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}f}{h} - 2h \right)} + \frac{Ef^2}{2l^2}$
---	---

TABLEAU B.5 – Table hyperguidée à quatre lames parallèles (sect. 5.2)

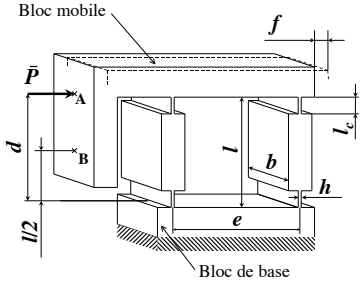
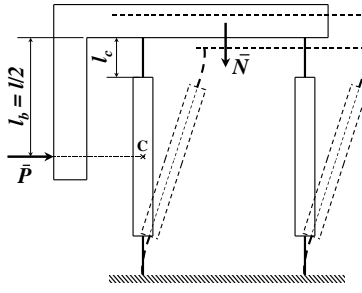
	Paramétrisation : $\xi = \frac{2l_c}{l} \quad \text{avec} \quad 0 < \xi \leq 1$ Rigidité en translation : $\bar{K}_o = \frac{2bh^3 E}{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^3}$ Course admissible : $f_{adm} = \frac{\xi(3 - 3\xi + \xi^2)l^2 \sigma_{adm}}{3Eh}$
	Charge critique : $\bar{N}_c = \frac{8\pi^2 EI}{\xi^2 l^2}$ Rigidité sous charge : $\bar{K}_{tot} \simeq \bar{K}_o - \frac{\bar{N}}{l}$ Charge qui résulte en une rigidité nulle : $\bar{N}_o \simeq l\bar{K}_o$

TABLEAU B.6 – Table à quatre cols prismatiques (sect. 5.3)

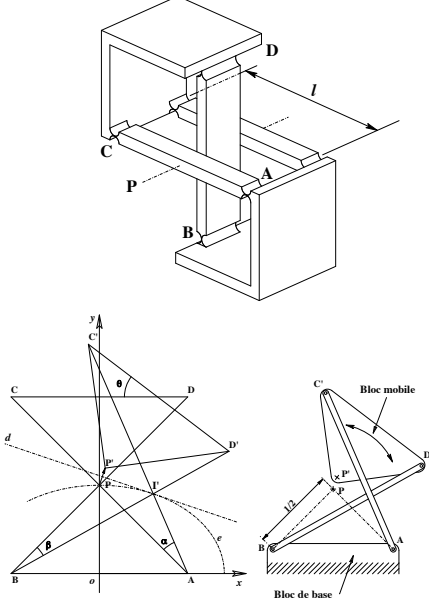
	Rigidité angulaire (pour de faibles angles) : $K_{\theta}^{\text{croisé}} \simeq K_{\alpha M} \quad \text{avec} \quad K_{\alpha M} = \frac{2Ebe^{2.5}}{9\pi\sqrt{r}}$ Course angulaire (pour de faibles angles) : $\theta_{adm} \simeq 2\alpha_M \quad \text{avec} \quad \alpha_M \simeq \frac{3\pi\sigma_{adm}\sqrt{r}}{4E\sqrt{e}}$ Translation parasite : $\frac{PP'}{l} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{1-4S^2}}{-1+2S^2}} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\tan(\theta/2)}{\sqrt{2+4(\tan(\theta/2))^2}}$ Modèle géométrique : $\alpha + \beta = \theta \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi}{4} - \text{arc cotg} \frac{1+2\sqrt{2}S}{\sqrt{1-4S^2}}$ Pour de faibles angles $\alpha \simeq \beta \simeq \frac{\theta}{2}$
---	--

TABLEAU B.7 – Pivot croisé à quatre cols (sect. 6.5).

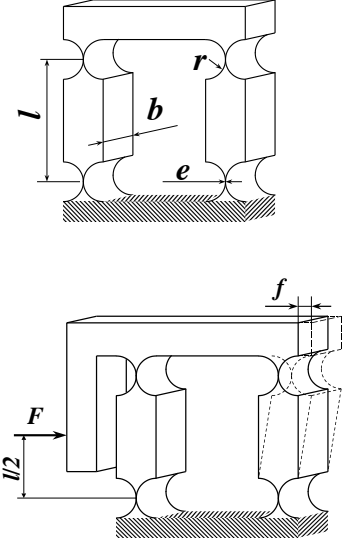
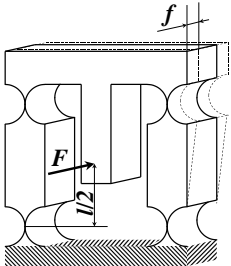
	Rigidité naturelle en translation : $K \simeq \frac{8Ebe^{2.5}}{9\pi l^2 \sqrt{r}}$ Lois de similitude : $K^* = E^*, K^* = b^*, K^* \simeq 1/l^{*2}, K^* \simeq e^{*2.5}, K^* \simeq 1/\sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.8 Course admissible en translation : $f \simeq \frac{3\pi l \sigma_{adm} r^{0.5}}{4Ee^{0.5}}$ Lois de similitude : $f^* = \sigma_{adm}^*; f^* = 1/E^*; f^* \simeq l^*; f^* \simeq 1/\sqrt{e^*}; f^* \simeq \sqrt{r^*}$ Abaque : FIG. A.9 Déplacement vertical parasite : $f_v = l - \sqrt{l^2 - f^2} = l(1 - \cos \theta) \simeq \frac{l\theta^2}{2}$
	Rigidité transverse en translation : $K^t \simeq \frac{4K_{\alpha M}^t}{l^2} \quad \text{avec} \quad K_{\alpha M}^t \simeq 0.0295 \frac{Eb^3 \sqrt{e}}{\sqrt{r}}$

TABLEAU B.8 – Table à quatre cols circulaires (sect. 5.4)

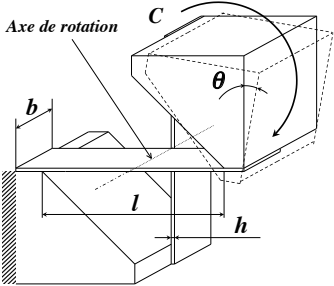
	Rigidité angulaire : $K_\theta = \frac{2EI}{l} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}$ Course angulaire admissible : $\theta_{adm} = \frac{2\sigma_{adm} l}{Eh}$ Translation parasite : $PP' = \frac{\sqrt{2}}{12} l\theta^2 \simeq 0.118 l\theta^2$
---	--

TABLEAU B.9 – Pivot à deux lames croisées séparées (sect. 6.1)

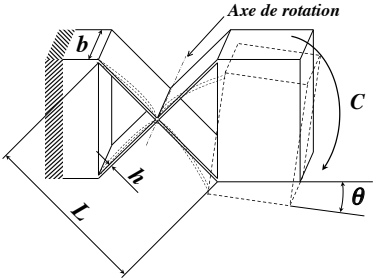
	Rigidité angulaire : $K_{\theta} = \frac{8EI}{L} \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12}$ Course angulaire : $\theta_{adm} = \frac{\sigma_{adm}L}{2Eh}$
---	---

TABLEAU B.10 – *Pivot à deux lames croisées non séparées (sect. 6.2).*

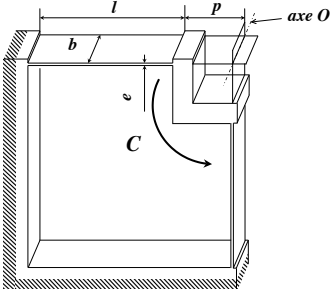
	Rigidité : $K_{\theta} = \frac{8EI(l^2 + 3pl + 3p^2)}{l^3} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12}$ Course angulaire : $\theta_{adm} = \frac{\sigma_{adm}l^2}{E(2hl + 3hp)}$
---	--

TABLEAU B.11 – *Pivot RCC à deux lames (sect. 6.3).*

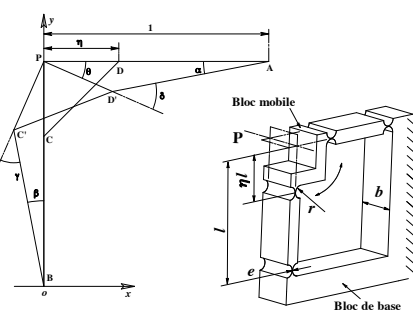
	Rigidité angulaire : $K_{\theta}^{RCC} = K_{\alpha M} \left(4 \frac{\eta^2}{(1-\eta)^2} + 4 \frac{\eta}{(1-\eta)} + 2 \right)$ avec $K_{\alpha M} \simeq \frac{2Ebe^{2.5}}{9\pi\sqrt{r}}$ Course angulaire : $\theta_{adm} = \frac{\alpha_M}{\frac{\eta}{1-\eta} + 1} \quad \text{avec} \quad \alpha_M \simeq \frac{3\pi\sigma_{adm}\sqrt{r}}{4E\sqrt{e}}$ Modèle géométrique simplifié : $\alpha = \frac{\eta}{1-\eta} \theta \quad \text{et} \quad \delta = \left(1 + \frac{\eta}{1-\eta} \right) \theta$
---	--

TABLEAU B.12 – *Pivot RCC à quatre cols (sect. 6.4).*

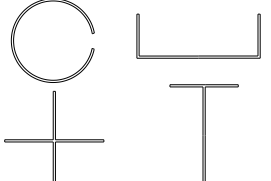
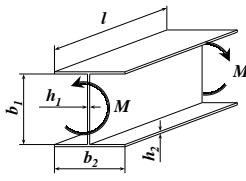
		Rigidité angulaire : $K_{tors} \simeq \frac{G}{3l} \sum_{i=1}^n h_i^3 b_i$ avec $b_i > 10h_i$
---	---	---

TABLEAU B.13 – *Barres de torsion de section ouverte à parois minces (sect. 4.4).*

Alliage	DIN	E [GPa]	G [GPa]	R_m [MPa]	$R_{0.2}$ [MPa]	$\sigma_D(10^7)$ [MPa]		σ_D/E [%]	α° [10^{-6}]	ρ [Kg/dm ³]
Acier Böhler K190	X220CrVMo13-4	196	80	2350	2050	800*	trac. rep.	0.41	12.2	7.6
Acier Maraging W720	X3NiCoMoTi18-9-5	193	72	2000	1815	735	flex. alt.	0.38	10.2	
Alu. Perunal-215 (7075)	AlZnMgCu1.5	72	27	530	480	110	flex. alt.	0.15	23.6	2.81
Alu. Anticorodal 110-112	AlMgSi1	69	26	310	250	80	flex. alt.	0.12	23.4	2.7
Alu Avional 660-662	AlCuSiMn	73	28	450	380	100	flex. alt.	0.14	23	2.79
Alu Contal	EN AW-7010	72		590	520	120	flex. alt.	0.16	23.6	2.81
Titane 6Al-4V	Ti Al6 V4	114	41	900	830	500		0.44	8.9	4.45
Bronze Pfinodal CN8TM04	Cu Ni 15 Sn 8	127	44	1300	1100	225	flex. alt.	0.14	16	8.94

TABLEAU B.14 – Quelques matériaux appropriés à la réalisation de structures flexibles. E module de Young; G module de glissement; R_m limite de rupture; $R_{0.2}$ limite apparente d'élasticité; $\sigma_D(10^7)$ limite d'endurance pour 10 millions de cycles; "trac. rep." sollicitation en tractions répétées; "flex. alt." sollicitation en flexions alternées; σ_D/E allongement relatif pour 10 millions de cycles (la course des guidages flexibles et proportionnelle à σ_{adm}/E); α° coefficient de dilatation thermique; ρ densité. Toutes ces données proviennent des catalogues des fabricants de ces matériaux. Pour les aciers : Böhler Frères et Cie SA, Rue de Veyrier 7, CH-1227 Carouge; pour les Aluminiums : Alusuisse, CH-3960 Sierre; pour le titane : Bibus Metals AG, CH-8304 Wallisellen; pour le bronze : UMS Usines Métallurgiques Suisses SA, Usine Boillat, CH-2732 Reconvilier. * Cette valeur a été obtenue par des essais de fatigue que nous avons réalisés au département des Matériaux, EPFL.

REMARQUES : L'acier X220CrVMo13-4 est dénommé K190 Isomatrix PM par notre fournisseur. Cet alliage est élaboré par la métallurgie des poudres¹. Il a subi une trempe après avoir été maintenu 30 minutes entre 1070° et 1090°, puis deux revenus de 2 heures à 515° et 535°. Le fournisseur ne disposant pas de données sur la fatigue de cet alliage nous avons effectué des essais de fatigue au département des matériaux de l'EPFL sur des éprouvettes standardisées.

L'acier X3NiCoMoTi18-9-5 est dénommé W720 par notre fournisseur qui nous a fourni les données sur son comportement en fatigue. Il a subi un recuit de 3 heures à 480°.

L'alliage CuNi15Sn8 élaboré par la métallurgie des poudres est dénommé Pfinodal CN8 TM04 par notre fournisseur. Il a subi une trempe à partir d'une température de 800° à 880°, puis un revenu à 370° environ. Les données sur la fatigue sont tirées de la notice technique (Robert Laminage 1997) qui nous a été donnée par le fournisseur.

1. Les matériaux élaborés par la métallurgie des poudres sont également appelés matériaux *frittés*. Leur mise en œuvre se fait par un procédé qui ne passe pas par la phase liquide, mais par le chauffage de poudres à températures élevées, avec ou sans application de pression.

Références

- Abu Zeid, O. A. (1997). On the effect of electrodischarge machining parameters on the fatigue life of aisi d6 tool steel. *Journal of Materials Processing Technology* (68), 27–32.
- Agie (1995). Manuel d'utilisation agiecut hss, agiecut sprint.
- Akiyama, T., C. D., & H. Fujita (1997). Scratch drive actuator with mechanical links for self-assembly of three dimensional mems. *Journal of Microelectromechanical Systems* 6(1), 10–17.
- Akiyama, T. & K. Shono (1993). Controlled stepwise motion in polysilicon microstructures. *Journal of Microelectromechanical Systems* 2(3), 106–110.
- Ananthasuresh, G. K. & S. Kota (1995, November). Designing compliant mechanisms. *Mechanical Engineering*, 93–96.
- André, P., J.-M. Kauffmann, F. Lhote, & J.-P. Taillard (1983). *Les robots*, Volume 4. France : Hermes Publishing.
- Arai, T., J. M. Hervé, & T. Tanikawa (1996, November). Development of a 3 dof micro-finger. In *Proceedings of IROS : International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE*, Volume 2, Osaka, Japan, pp. 981–987.
- Artobolevski, I. (1975). *Les mécanismes dans la technique moderne*, Volume 1. Edition MIR, Moscou.
- Ashwell, D. G. (1950, November). The anticlastic curvature of rectangular beams and plates. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 708–715.
- Backus, R. O., D. J. Salerno, R. R. Rhymestine, & S. C. Gupta (1991). Multi-piece flexural pivot. *United States Patent 4,997,123*.
- Bahiman, H. (1983). Unidirectional flexural pivot. *United States Patent 4,405,184*.
- Barillot, F., R. Le Letty, F. Claeysen, N. Lhermet, & M. Yorck (1999, June). Design and functional tests of a xy piezoelectric stage for rosetta/midas. In *Proceedings of 8th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, ESA SP-438*, Toulouse, France, pp. 121–126.
- Basak, I. & A. Ghosh (1996). Mechanism of spark generation during electrochemical discharge machining : a theoretical model and experimental verification. *Journal of Material Processing Technology* 62, 46–53.
- Bassière, M. & E. Gaignebet (1966). *Métrologie Générale. Théorie de la mesure. Les instruments et leur emploi*. Paris : Dunod.
- Battles, A. E., B. M. Linder, & A. H. Slocum (1993, May). A precision bilaminar resonating transducer assembly tool. In *Proceedings of the 7th International Precision Engineering Seminar*, Kobe, Japan, pp. 302–313.

- Beams, J. W., J. W. Young, & J. W. Moore (1946). The production of high centrifugal fields. *Journal of Applied Physics* 17, 886–890.
- Bellouard, Y. (2000). *Conception de dispositifs en alliage à mémoire de forme en microtechnique*. Thèse N°2308, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Bellouard, Y., T. Lehnert, T. Sidler, R. Gotthardt, & R. Clavel (1999, December). Monolithic shape memory alloy actuators : a new concept for developing smart micro-devices. In *Symposium on Smart Materials, MRS Fall meeting conference*, Boston, USA.
- Besson, F. (1996). Orion : un microrobot à 3 degrés de liberté. *Travail pratique de diplôme, ISR-DMT-EPFL*.
- Bianchi, L. & E. Rigal (1987). Usinage par électro-érosion. *Techniques de l'Ingénieur B7*, B7310–1–B7310–23.
- Billig, V. (1960). Flexures. *Selected papers on Optomechanical Design, SPIE Milestone Series 770*, 324–329.
- Bleuler, H. (1984). *Decentralized Control of Magnetic Rotor Bearing Systems*. Ph D. Thesis, ETHZ : Swiss Federal Institute of Technology Zürich.
- Boillat, P. (1997). Compteur d'énergie pour vélo. *Travail pratique de diplôme, IPM-DMT-EPFL*.
- Boresi, A. P., R. J. Schmidt, & O. M. Sidebottom (1993). *Advanced Mechanics of Materials* (Fifth ed.). USA : John Wiley and Sons, Inc.
- Bottinelli, S., C. Aymon, S. Henein, & R. Clavel (1999). Bewegungsübertragungsvorrichtung (fine positioning device). *Deutsches Patentamt A0108273DEP00*. Anmelder : Agie S.A. CH-6616 Losone.
- Bradley, D. J. (1962). Parallel movement for high finesse interferometric scanning. *Journal of Scientific Instruments* 39, 41–45.
- Brand, A. (1984). Fatigue des alliages ferreux : approche classique. *Techniques de l'Ingénieur B5 I*, B5050.
- Breguet, J.-M. (1998). *Actionneurs stick and slip pour micro-manipulateurs*. Thèse N°1756, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Breguet, J.-M. & R. Clavel (1998, June). New design for long range, high resolution, multi-degrees-of-freedom piezoelectric actuators. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 198–201.
- Breguet, J.-M., S. Henein, & R. Mericio (1997). Monolithic piezoceramic flexible structures for micromanipulation. In *Proceedings of 9th International Precision Engineering Seminar and 4th International Conference on Ultraprecision in Manufacturing Engineering*, Volume 2, Braunschweig, Germany, pp. 397–400.
- Brooks, J. J. (1989a). Bi-flex pivot. *United States Patent 4,802,784*.
- Brooks, J. J. (1989b). Torsional structural pivot. *United States Patent 4,812,072*.
- Brooks, J. J. (1991). Torflex pivot. *United States Patent 5,061,107*.
- Brown, D. G. (1983). On axis-flex web gimbal. *United States Patent 4,382,709*.
- Burns, R. H. & F. R. E. Crossley (1966). Structural permutations of flexible link mechanisms. *ASME Paper N°66-MECH-5*, 1–4.
- Burns, R. H. & F. R. E. Crossley (1968). Kinetostatic synthesis of flexible link mechanisms. *ASME Paper N°68-MECH-36*.

- Chen, H. T. H., W. Ng, & R. L. Engelstad (1992, January). Finite element analysis of a scanning x-ray microscope micropositioning stage. *Review of Scientific Instruments* 63(1), 591–594.
- Clavel, R. (1985). Dispositif pour le déplacement et le positionnement d'un élément dans l'espace. *Brevet Suisse N° 672089 A5*.
- Clavel, R. (1994). Robots parallèles. *Techniques de l'Ingénieur R7710*, 1–8.
- Clay, S. (1937, March). The mechanical development of the microscope : a new fine-adjustment. *Journal of the Royal Microscopical Society, Transactions of the society PI. I.*, 1–7.
- Coiffet, P. (1992). *La robotique* (3rd ed.). Paris : Hermes.
- Collins, J. A. (1993). *Failure of materials in mechanical design* (2nd ed.). New York : John Wiley and Sons.
- Craig, R. J. C. & C. T. Council (1978). Flexure hinge assembly. *United States Patent 4,114,402*.
- Craig, R. J. G. (1981). Universal joint flexure hinge suspension, and method to manufacturing this system. *United States Patent 4,286,370*.
- Craig, R. J. G., C. T. Council, & J. F. Jansen (1979). Method of manufacturing a flexure hinge assembly. *United States Patent 4,143,451*.
- Crookall, J. R. & B. C. Khor (1975). Electro-discharge machined surfaces. In *Proceedings of 15th International Conference on Machine Tool Design and Research*, Birmingham, Macmillian, London, pp. 373–384.
- Daumas, M. (1968). *Histoire générale des techniques, Tome III : L'expansion du machinisme*, pp. VII–XXIV. Presses universitaires de France.
- Davies, P. A. (1999). Positioning mechanism. *European Patent EP 0 937 961 A2*.
- De Bona, F., M. G. Munteanu, & S. Zelenika (1993, May). Non-linear analysis of parallel spring systems. In *Proceedings of the 2nd National Conference on Boundary and Finite Element*, Sibiu, Romania, pp. 8–17.
- De Bona, F., A. Strozzi, & S. Zelenika (1999). High precision mechanism based on cross-spring pivots. *Advanced Manufacturing Systems and Technology*. E. Kuljanic (Ed.), CISM Courses and Lectures Nr 406, Springer Verlag, Wien New York.
- De Bona, F. & S. Zelenika (1992, Settembre). Movimenti parassiti di una guida lineare a lamina : analisi teorica e verifica sperimentale. In *XXI Convegno dell'Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni*, Genova, Italia, pp. 519–526.
- De Bona, F. & S. Zelenika (1993, May). Characterization of high precision parallel spring transltors. In *Proceedings of the 7th International Precision Engineering Seminar*, Kobe, Japan, pp. 761–772.
- De Bona, F. & S. Zelenika (1994a, September). Mechanical characterization of high precision manipulators based on flexible elements. In *Proceedings of the 1st congress of croatian society of mechanics*, Pula, Croatia.
- De Bona, F. & S. Zelenika (1994b, November). Precision positioning devices based on elastic elements : mathematical modeling and interferometric characterization. In *Seminar on Handling and Assembly of Microparts*, Vienna.

- De Bona, F. & S. Zelenika (1997). A generalized elastics-type approach to the analysis of large displacement of spring-strips. In *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Volume 211 Part C.
- Del Pedro, M. (1985). *Cours de résistance de matériaux*, Volume 1 and 2. Département de mécanique, Laboratoire de mécanique appliquée : Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Del Pedro, M. & T. Gmür (2001). *Eléments de mécanique des structures*. Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Del Pedro, M. & P. Pahud (1989). *Mécanique vibratoire*. International Series on Materials Science and Technology. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Deslattes, R. D. (1969). Optical and x-ray interferometry of a silicon lattice spacing. *Applied Physics Letters* 15(11), 386–388.
- Dettmer, A., V. Jäger, & U. Kuetgens (1995, May). Machining of a monolithic silicon x-ray interferometer - a challenge for manufacturing. In *Proceedings of 8th International Precision Engineering Seminar*, Compiègne, France.
- Domininghaus, H. (1993). *Plastics for Engineers*. Hanser Publishers.
- Dowson, D. (1998). *History of tribology* (2nd ed.). London and Bury St Edmunds, UK : Professional Engineering Publishing Limited.
- Duchemin, M. (1984). Ressorts : considérations générales. *Techniques de l'Ingénieur B5 II*, B5430.1–B5430.18.
- Duchemin, M. (1985). Ressorts : barres de torsion et stabilisateurs. *Techniques de l'Ingénieur B5 II*, B5434.1–B5434.14.
- Duncan, D. H. (1981). Flexure assembly for a dynamically tuned gyroscope. *United States Patent 4,269,072*.
- Duprat, D. (1997). Fatigue et mécanique de la rupture des pièces en alliage léger. *Techniques de l'Ingénieur B5 I*, B5052.
- Dörrer, P. (1998, June). Design of high precision mechanisms for generation of rotary motion using piezoelectric actuators. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 223–227.
- Eastman, F. S. (1937, June 30). The design of flexure pivots. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 16–21.
- Eastman, F. S. (1960). The unique properties of flexure pivots. *The trend in engineering* 12(1), 5–11.
- Ehrfeld, W., H. Lehr, F. Michel, A. Wolf, H. Gruber, & A. Bertholds (1996). Micro electro discharge machining as a technology in micromachining. *Proceedings of SPIE Symposium on Micromachining and Microfabrication, Conference on Micromachining and Microfabrication Process Technology II* 2879, 332–337.
- Erdman, A. G. (Ed.) (1993). *Modern Kinematics. Developments in the last forty years*. John Wiley and Sons, Inc.
- Esposito, C. (1998). Orion : robot de haute précision à 3 degrés de liberté. *Travail pratique de diplôme, ISR-DMT-EPFL*.
- Flaherty, R. (1987). Flexural pivot device and method for assembling same. *United States Patent 4,655,629*.

- Flückiger, L. (1998). *Interface pour le pilotage et l'analyse des robots basée sur un générateur de cinématiques*. Thèse N°1897, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Frecker, M. I., G. K. Ananthasuresh, S. Nishiwaki, N. Kikuchi, & S. Kota (1997, June). Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization. *Journal of Mechanical Design* 119, 238–245. Transaction of the ASME.
- Fukuzawa, Y., Y. Kojima, T. Tani, E. Sekiguti, & Mohri (1995). Fabrication of surface modification layer on stainless steel by electrical discharge machining. *Materials and manufacturing processes* 10(2), 195–203.
- Genequand, P. & P. Schwab (1985). Micro-aligneur pour composants d'optique guidée monomode. In *Proceedings SSC-ASMT-85, 59^e congrès*, Interlaken, Switzerland, pp. 79–82.
- Genequand, P. M. (1983). Procédé pour positionner une fibre optique par rapport à un autre composant optique, et dispositif pour la mise en œuvre de ce procédé. *Demande de Brevet d'Invention FR 2 553 200 A1*.
- Genequand, P.-M. (1996). Dispositif de liaison unidirectionnelle entre deux objets. *Demande de Brevet Européen EP 0 770 813 A1*.
- Genequand, P.-M. (1997). Pivot flexible planaire à modules unitaires monolithiques. *Demande de Brevet Européen EP 0 840 023 A1*.
- Genequand, P. M. (1998). Dispositif de guidage en translation rectiligne d'un objet mobile par rapport à un objet fixe. *Demande de Brevet Européen EP 0 857 891 A1*.
- Genoud, D. (2000). Capteur de puissance pour vélo. *Travail pratique de diplôme, IPM-DMT-EPFL*.
- Gere, J. M. & S. P. Timoshenko (1990). *Mechanics of Materials* (3rd ed.). Boston : PWS-KENT.
- Girard, L. D. (1865). Hydraulique appliquée : note sur le chemin de fer glissant. (*Gauthier-Villars, Paris*) (8p).
- Goldfarb, M. & J. Speich (1997, April). Design of a minimum surface-effect three degree-of-freedom micromanipulator. In *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, USA, pp. 1466–1471.
- Goto, H. (1989). Xy stage capable of positioning in submicron order. *Journal of Robotics and Mechatronics* 1, 333–337.
- Grübler (1917). *Getriebelehre*. Berlin : Springer.
- Haberland, R. (1977). Some design criteria of elastic universal joints for dry tuned gyroscopes. In *Symposium uber Kreiselschnik*, Volume 5, Dusseldorf, pp. 13.1–13.11.
- Haberland, R. (1978, September). Technical advances through a novel gyro hinge design. In *Symposium on Gyro technology*, Volume 13, Dusseldorf, pp. 5.1–5.16.
- Haberland, R. (1981). Flexure joint, particularly for connecting a gyroscope to its driving shaft. *United States Patent* 4,261,211.
- Hara, A. & K. Sugimoto (1990). Micromanipulator with multi-degrees of freedom. In *Proceedings of 20th International Symposium on Industrial Robots (ISIR)*, pp. 505–512.

- Hara, Y., S. Motonishi, & K. Yoshida (1990). A new micro-cutting device with high stiffness and resolution. In *Annals of the CIRP*, Volume 39/1, pp. 375–378.
- Haringx, J. A. (1949). The cross-spring pivot as a constructional element. *Applied Science Research A1*, 313–332.
- Henein, S., P. Boillat, & J. Jacot (2000). Power sensing device. *Demande de brevet EP 00109196.6*. Titulaire : Sensile Technologies SA.
- Henein, S., S. Bottinelli, & C. Aymon (1998). Pivot flexible à grande course angulaire et à rigidité élevée. *Brevet Europe No. 98123953.6*. Titulaire : Sysmelec S.A. CH-2002 Neuchâtel.
- Henein, S., S. Bottinelli, C. Aymon, & R. Clavel (1998). Orion : robot de haute précision à articulations flexibles. In *9^e Journées Jeunes Chercheurs en Robotique*, Clermont-Ferrand, LASMEA-UMR du CNRS, pp. 30–34.
- Henein, S., S. Bottinelli, & R. Clavel (1997). Parallel spring stages with flexures of micrometric cross-sections. In *Proc. of SPIE : Microrobotics and Microsystem Fabrication*, Volume 3202, Pittsburg, PA USA, pp. 209–220.
- Her, I. & J. C. Chang (1994, September). A linear scheme for the displacement analysis of micropositioning stages with flexure hinges. *Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME 116*, 770–776.
- Hervé, J. M. (1993). Group mathematics and parallel link mechanisms. *Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, 57–61. T. Takamori and K. Tsuchiya (Editors), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), IMACS.
- Hirn, G. (1854). Sur les principaux phénomènes qui présentent les frottements médiats. *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse 26*, 188–277.
- Hladky-Hennion, A. C., A. Dogan, & R. E. Newnham (1998, June). Finite element modeling of transduction materials with application to cymbal actuators and sensors. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 292–295.
- Hodac, A. (1999). *A macro/micro-manipulator for high speed and accurate pick and place operations*. Ph D. Thesis Nr 13148, ETHZ, Swiss Federal Institute of Technology Zürich.
- Hodac, A. & R. Siegwart (1999). Decoupled macro/micro-manipulator for fast and precise assembly operations : design and experiments. In *Proc. of SPIE : Microrobotics and Microassembly*, Boston, Massachusetts USA, pp. 122–130.
- Hodac, A., W. Zesch, R. Siegwart, S. Henein, S. and Bottinelli, & R. Clavel (1997). Design and control of a fast and precise macro-micro manipulator. In *Proc. of Int. conf. on Micromechatronics for Information and Precision Equipment*, Tokyo, Japan, pp. 231–237.
- Howell, L. L. & A. Midha (1994). Evaluation of equivalent spring stiffness for use in a pseudo-rigid-body model of large-deflection compliant mechanisms. *Mechanism Synthesis and Analysis, ASME DE-70*, 405–412.
- Howell, L. L. & A. Midha (1995, March). Parametric deflection approximations for end-loaded, large-deflection beams in compliant mechanisms. *Journal of Mechanical Design 117*, 156–165. Transaction of the ASME.

- Howell, L. L., A. Midha, & T. W. Norton (1996, March). Evaluation of equivalent spring stiffness for use in a pseudo-rigid-body model of large deflection compliant mechanisms. *Journal of Mechanical Design* 118, 126–131. Transaction of the ASME.
- Hull, D., M., & T. W. Clyne (1996). *An introduction to composite materials* (2 ed.). Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press.
- Hungerbühler, E. & H. R. Burkhard (1994). Device for reducing the force in a force-measuring apparatus, in particular in a scale. *United States Patent* 5,340,951.
- Hunt, K. H. (1978). *Kinematic geometry of mechanisms*. Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP.
- Hymans, F. (1946, September). Flat spring with large deflections. *Journal of Applied Mechanics* 68, A-223–A-230.
- Imai, Y., A. Satake, A. Taneda, & K. Kobayashi (1996). Improvement of edm machining speed by using high frequency response actuator. *International Journal of Electrical Machining* (1), 21–26.
- Jeelani, S. & M. R. Collins (1988). Effect of electric discharge machining on the fatigue life of iconel 718. *International Journal of Fatigue* (10(2)), 121–125.
- Jones, R. (1951). Parallel and rectilinear spring movements. *Journal of Scientific Instruments* 28, 38–41.
- Jones, R. (1962). Some use of elasticity in instrument design. *Journal of Scientific Instruments* 39, 193–203.
- Jones, R. & I. R. Young (1956). Some parasitic deflexions in parallel spring movements. *Journal of Scientific Instruments* 33, 11–15.
- Jones, R. V. (1952, November). An optical slit mechanism. *Journal of Scientific Instruments* 29, 345–351.
- Jones, R. V. (1955, September). Angle-spring hinges. *Journal of Scientific Instruments* 32, 336–338.
- Jones, R. V. (1956a, May). A large optical slit mechanism employing spring movements. *Journal of Scientific Instruments* 33, 169–173.
- Jones, R. V. (1956b, July). A parallel-spring cross-movement for an optical bench. *Journal of Scientific Instruments* 33, 279–280.
- Jänker, P., F. Hermle, T. Lorkowski, S. Strom, & M. Wettemann (1998, June). Developpment of high-performing piezoelectric actuators for transport systems. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 181–185.
- Kato, T., N. Tsuda, & M. Sawabe (1984). One piece compound parallel spring with reduction flexure levers. *Bulletin of Japan Society of Precision Engineering* 18(4), 329–334.
- Kempas, H. (1986). Dynamically tuned gimbal suspension with flexural pivots for a two-degree-of-freedom gyro. *United States Patent* 4,592,242.
- Kempas, H. (1987). Method of making dynamically tuned gimbal suspension. *United States Patent* 4,665,605.

- Kemper, H. (1937). Overhead suspension railway with wheelless vehicles employing magnetic suspension from iron rails. *Germ. Pat. Nr 643316 and 644302*.
- King, T. & W. Xu (1996). The design and characteristics of piezomotors using flexure-hinged displacement amplifiers. *Robotics and Autonomous Systems* 19, 189–197.
- Koster, M. (1998). *Constructieprincipes voor het nauwkeurig bewegen en positioneren*. Twente University Press.
- Kota, A., Z. Li, & L. Saggere (1999, December). Tailoring unconventional actuators using compliant transmissions : design methods and applications. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 4(4), 396–408.
- Kota, S. (1997, September). Synthesis of distributed compliant mechanisms for adaptative structures application : an elasto-kinematic approach. In *Proceedings of DETC'97, 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sacramento, California, pp. 1–12.
- Kota, S. (1999, June). Design of compliant mechanisms with applications to mems and smart structures. In *Proceedings Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Volume 7, Oulu, Finland, pp. 2722–2728.
- Krivec, B. (1996). Press fitted flexural pivot joint. *United States Patent 5,498,095*.
- Kuetgens, U., P. Becker, G. Bertolotto Binac, V. Jäger, J. Stümpel, & G. Zosi (1994, May). Fem study of a monolithic silicon translation mechanisms for a 10 microns scanning x-ray interferometer. In *Proceedings of 3rd International Conference on Ultraprecision Manufacturing in Engineering*, Aachen, Germany.
- Kurafuji, H. & K. Suda (1968). Electrical discharge drilling of glass 1. *Annals of CIRP* 16, 415.
- Kutash, R. A. (1974). Method of making a universal flexural assembly. *United States Patent 3,844,022*.
- Kutzbach, K. (1929). Mechanische leitungsverzweigung. *Maschinenbau, Der Betrieb* 8, 710–716.
- Kyusojin, A. & D. Sagawa (1988). Development of linear and rotary movement mechanism by using flexible strips. *Bulletin of Japan Society of Precision Engineering*. 22(4), 309–314.
- Langen, H., J.-M. Breguet, H. Bleuler, P. Renaud, & T. Masuzawa (1998). Micro electrochemical discharge machining of glass. *International Journal of Electrical Machining* 3, 65–69.
- Lee, K.-M. & S. Arjunan (1989). A three degrees of freedom micro-motion in-parallel actuated manipulator. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1698–1703.
- Lee, K.-M. & S. Arjunan (1991, October). A three-degrees-of-freedom micromotion in-parallel actuated manipulator. *IEEE transactions on robotics and automation* 7(5), 634–641.
- Lee, K.-M. & D. Shah (1988, June). Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4(3), 354–360.

- Lee, L. C., L. C. Lim, Y. S. Wong, & H. H. Lu (1990). Towards a better understanding of the surface features of electrodischarge machined tool steels. *Journal of Materials Processing and Technology* (24), 513–523.
- Leijenhorst (van), H. M. & J. F. Suringh (1987). Fine-adjusting device for accurate positioning an adjusting element. *United States Patent 4,691,586*.
- Lender, T., R. Delavault, & A. Moigne (1992). *Dictionnaire de biologie* (2nd ed.). Presses Universitaires de France.
- Letonje, J. & I. Janezic (1999, June). Determination of the equation of bending stiffness of a hyperbolic notch with finite element analysis. In *Tenth world congress of the theory of machine and mechanisms*, Volume 2, Oulu, Finland, pp. 610–615.
- Lim, L. C., L. C. Lee, Y. S. Wong, & H. H. Lu (1991). Solidification microstructures of electrodischarge machined surfaces of tool steels. *Materials Science and Technology* (10), 239–248.
- Lu, J. & H.-P. Lieurade (1998). Concentration de contraintes. *Techniques de l'Ingénieur B5 I*, BM 5040–1–BM 5040–24.
- Lucas Aerospace (1991). Free-flex pivot : frictionless bearing. Prospectus.
- Masaka, T., K. Kawata, & T. Masuzawa (1999). Micro electro-discharge machining and its applications. *IEEE* (CH2832-4), 21–26.
- Massonnet, C. & S. Cescotto (1994). *Mécanique des matériaux*. Bruxelles : De Boeck Université.
- Matsushima, K. & K. Nishi (1984). Micro-robot with integrated parallel links. In *Proceedings of ROMANSY 10*, pp. 289–294.
- Mattiasson, K. (1981). Numerical results from large deflection beam end frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal on Numerical Methods Engineering* 16, 145–153.
- Meizel, E. (1999, September). Celtic pivots. In *Proceedings of 8th European Space Mechanisms and Tribology Symposium. ESA SP-438*, pp. 321–322.
- Merdan, M. & R. Arnell (1989). The surface integrity of a die steel after electrodischarge machining 1 : structure, composition and hardness. *Surface Engineering* (5(2)), 158–164.
- Merdan, M. & R. Arnell (1991). The surface integrity of a die steel after electrodischarge machining : 2. residual stress distribution. *Surface Engineering* (7(2)), 154–158.
- Merlet, J.-P. (1997). *Les robots parallèles* (2nd ed.). Paris : Hermes.
- Mesnager, A. (1903). *C.R. Acad. Sci., Paris* (137), 908.
- Midha, A., I. Her, & B. A. Salamon (1992). A methodology for compliant mechanisms design : Part 1 - introduction and large deflection analysis. *Advances in Design Automation* 2, 29–38. DE-Vol.44-2, ASME.
- Midha, A., T. W. Norton, & L. L. Howell (1994, March). On the nomenclature, classification, and abstractions of compliant mechanisms. *Journal of Mechanical Design* 116, 270–279. Transaction of the ASME.
- Minotti, P. & A. Ferreira (1998). *Les micromachines*. Paris : Editions Hermes.
- Moore, D. F. (1975). *Principles and applications of tribology*, Volume 14 of *International Series on Materials Science and Technology*. Pergamon Press.

- Munteanu, M. G., F. De Bona, & S. Zelenika (1996, September). An accurate non-linear analysis of very large displacements of beam systems. In *Proceedings of International Conference on Material Engineering*, pp. 59–66.
- Muranaka, Y., M. Inaba, T. Asano, & E. Furukawa (1991). Parasitic rotations in parallel spring movements. *International Journal of Japan Society of Precision Engineering* 25(3), 208–213.
- Nakazawa, H. (1994). *Principles of precision engineering*. USA : Oxford University Press.
- Nave, W. E. (1982). Flexural pivot member. *United States Patent* 4,311,303.
- Neugebauer, G. H. (1980, August). Designing springs for parallel motion. *Machine Design*, 119–120.
- Newell, W. H. (1978). Two axis flexure. *United States Patent* 4,128,352.
- Nickols, L. W. (1955, April). An adjustable strut for use in measuring instruments. *Journal of Scientific Instruments* 32, 149–150.
- Nickols, W. E. (1951, October). The design characteristics of cross-spring pivots. *Machinery* 79.
- Notes on Applied Science (1956). Application of spring strips to instrument design. (15), 1–25. National Physical Laboratory. Her Majesty's Stationery Office, London.
- Odiet, M. (1999). Capteur de force numérique à cellule de mesure déformable élastiquement et procédé de mesure directe de l'application d'une force. *Demande de Brevet Européen EP 0 916 934 A1*.
- Olson, J. M. (1970, May 11-14). The evaluation of the flexural pivot meet critical performance and life requirements. *ASME publication. Design Engineering Conference and show, Chicago, III.*, 1–8.
- Osenbruggen, C. v. (1969). High-precision spark machining. *Philips technical review* 30(6/7), 195–209.
- Paros, J. M. & L. Weisbord (1965, November). How to design flexure hinges. *Machine design* 25, 151–156.
- Paulsen, D. R. (1989). Flexural pivot. *United States Patent* 4,802,720.
- Payne, D. A. (1997). Rotary mount integral flexural pivot with blades which are integrally interconnected at the blade intersection. *United States Patent* 5,620,169.
- Pernette, E. (1998). *Robot de haute précision à 6 degrés de liberté pour l'assemblage des microsystemes*. Thèse N°1909, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Département de Microtechnique.
- Perry, J. (1890, June). Twisted strips. *Proceedings of the Physical Society of London* X(XLIV), 343–347.
- Pertsch, P., B. Höfer, G. Bochhardt, E. Wehrsdorfer, & W. Karthe (1998, June). Displacement amplification mechanism for dynamic use. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 278–280.
- Plainevaux, J. E. (1953). Guidage par suspension sur lames élastiques. *Il Nuovo Cimento* 10, 1451–1460.

- Plainevaux, J. E. (1954a). Guidage rectiligne sur lames élastiques : comparaison de divers types connus et nouveaux. *Il Nuovo Cimento* 12(1), 37–47.
- Plainevaux, J. E. (1954b). Mouvement parasite vertical d'une suspension élastique symétrique à compensation et asservissement. *Il Nuovo Cimento* XI(6), 626–637.
- Pomey, G. & H.-P. Lieurade (1982). Essais de fatigue. *Techniques de l'Ingénieur M1 II*, M130.
- Previte, P. L. (1978). Flexure suspension assembly. *United States Patent 4,100,813*.
- Previte, P. L. (1980). Method of manufacturing a flexure suspension assembly. *United States Patent 4,207,668*.
- Rajurkar, K. P. (1985). Surface damage and shock waves in edm. In *Proc. 13th NAMRC*, pp. 379–385.
- Reuleaux, F. (1875). Theoretische kinematik : Grundzüge einer theorie des maschinenwesens. *Vieweg, Braunschweig*.
- Richter, T., W. Ehrfeld, A. Wolf, H. Gruber, & O. Wörz (1997). Fabrication of microreactor components by electro discharge machining. *Institut für Mikrotechnik Mainz GmbH, DECHEMA.DOC*, 1–11.
- Robert Laminage, S. (1997). Notice technique pfinodal cuni15sn8 et am388 cuni8sn5. La Jaluse 15, Case postale 70, CH-2400 Le Locle. Métaux et aciers laminés pour toutes industries.
- Rouston, G. S. (1987). Circumferentially oriented flexure suspension. *United States Patent 4,694,703*.
- Rundle, W. J. (1989). Design and performance of an optical mount using cross-flexure pivots. In *Proceedings of SPIE : Precision Engineering and Optomechanics*, Volume 1167, San Diego, California, pp. 306–312.
- Ryu, J. W. & D.-G. Gweon (1997). Error analysis of flexure hinge mechanism induced by machining imperfection. *Precision Engineering* 21(2/3), 83–89.
- Ryu, J. W., D.-G. Gweon, & K. S. Moon (1997). Optimal design of a flexure hinge based x y theta z wafer stage. *Precision Engineering* 21, 18–28.
- Ryu, J. W., S.-Q. Lee, D.-G. Gweon, & K. S. Moon (1999). Inverse kinematic modeling of a coupled flexure hinge mechanism. *Mechatronics* 9, 657–674.
- Sabnis, A. V., J. B. Dendy, & S. F. M. (1975, July). A magnetically suspended large momentum wheel. *Journal on Spacecraft* 12(7), 420–427.
- Salim, R. & H. Wurmus (1998, June). Multi gearing compliant mechanisms for piezoelectric actuated microgrippers. In *Proceedings of Actuators 98, 6th International Conference on New Actuators*, Bremen, Germany, pp. 186–188.
- Sato, K., A. Shimokohbe, Y. Chida, & S.-I. Wada (1991, June). An active parallel leaf spring mechanism. *International Journal of Japan Society of Precision Engineering* 25(2), 154–155.
- Sato, K., A. Shimokohbe, Y. Chida, & S.-I. Wada (1993, May). An active parallel leaf spring mechanism with a long working range and a high positioning resolution. In *Proceedings of the 7th International Precision Engineering Seminar*, Kobe, Japan, pp. 530–541.

- Schaller, R. & W. Benoit (1979). Effets du frottement intérieur sur le facteur de qualité des résonateurs mécaniques. In *Proceedings of the 10th International Congress of Chronometry*, Genève, pp. 377–383. Edited by the Swiss Society of Chronometry.
- Schoenflies, A. & M. Grübler (1908). Kinematik. *Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften 4, Mechanik* (eds. Klein, F. and Müller, C.), Leipzig, Teubner, 190–278.
- Schwab, P., T. Edye, & P. Genequand (1988). 0.01 micron resolution fibre optic positioning stage. In *Proceedings of SPIE Micro-Optics*, Volume 1014, pp. 66–72.
- Schwab, P. & P. M. Genequand (1985). Dispositif de micropositionnement. *Demande de Brevet d'Invention FR 2 586 853 A1*.
- Schweitzer, G., H. Bleuler, & A. Traxler (1994). *Active magnetic bearings*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich.
- Scire, F. E. & E. C. Teague (1978, December). Piezodriven 50 micron range stage with subnanometer resolution. *Review of Scientific Instruments* 49(12), 1735–1740.
- Seeling, F. A. (1970, May). Effectively using flexural pivots. *ASME publication. Design Engineering Conference and Show, Chicago, III.*, 1–8.
- Sendler, F.-J. (1996, January). Extending die life with planetary edm. *AGIE experience of the best 9, AGIE, CH-6616 Losone*, 13–15.
- Shoup, T. E. & C. W. McLarnan (1971). A survey of flexible link mechanisms having lower pairs. *Journal of Mechanisms* 6, 97–105. Pergamon Press.
- Siddall, G. J. (1970). The design and performance of flexure pivots for instruments. Master's thesis, University of Aberdeen, Department of Natural Philosophy.
- Slocum, A. H. (1992). *Precision Machine Design*. Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, Michigan.
- Slocum, A. H., L. Muller, & D. Braunstein (1997). Flexural mount kinematic couplings and method. *United States Patent 5,678,944*.
- Smith, S., D. Chetwynd, & D. Bowen (1987). Design and assessment of high precision monolithic translation mechanisms. *Journal of Physics E : Scientific Instruments* 20, 977–983.
- Smith, S. T. & D. G. Chetwynd (1992). *Foundations of Ultraprecision Mechanism Design*, Volume 2. Series Editor : D. Keith Bowen, University of Warwick, UK : Gordon and Beach Science Publishers.
- Spanoudakis, P., L. Zago, O. Chételat, R. Gentsch, & F. Mato Mira (2000). Extremely high resolution tip-tilt-piston mirror mechanism for the vlt-naos field selector. In *Proceedings of SPIE Symposium of Astronomical Telescopes and Instrumentation*, Volume 4007(48), Germany.
- Spinnler, G. (1997a). *Conception des machines. Principes et application. Dimensionnement.*, Volume 3. Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Spinnler, G. (1997b). *Conception des machines. Principes et applications. Statique.*, Volume 1. Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

- Stewart, D. (1965). A platform with six degrees of freedom. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 180(1), 371–378.
- Stone, S. W. (1988). Instrument design case study : flexure thermal sensitivity and wafer stepper baseline drift. In *Proceedings of SPIE : Precision Instrument Design*, Volume 1036, Santa Clara, California, USA, pp. 20–24.
- Sydenham, P. H. (1981, May). Mechanical desing of instruments. *Measurement and control* 14, 179–185.
- Sydenham, P. H. (1984). Elastic desing of fine mechanism in instruments. *Journal of Physics E :Scientific Instruments* 17, 922–930.
- Tanaka, M. (1983, January). The dynamic properties of a monolithic mechanism with notch flexure hinges for precision control of orientation and position. *Japanese Journal of Applied Physics* 22(1), 193–200.
- Tanaka, M. & K. Nakayama (1982). Monolithic goniometer for pure rotation and fine orientation control. *Japanese Journal of Applied Physics* 21(6), 955–956.
- Tanaka, M. & K. Nakayama (1983, July). Precision goniometer for fine adjustment in the nanoradian range. *Bulletin of NRLM*, 41–43.
- Tanikawa, T. & T. Arai (1999, February). Developpment of a micro-manipulation system having a two-fingered micro-hand. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* 15(1), 152–162.
- Thorp, A. G. (1953, February). Flexure pivots - design. *Product Engineering XXIV*, 192–200.
- Thurston, R. H. (1885). *A treatise on friction and lost work on machinery and millwork* (7th ed.). New York : Wiley. 1903.
- Timoshenko, S. P. (1953). *History of strengh of materials*. York, PA. : McGraw-Hill Book Company.
- Toyoda, K. & Y. Tanimura (1988). Micro-scanning table realizing smooth motion to a few nanometer. *Bulletin of Japan Society of Precision Engineering* 22(1), 64–65.
- Troeger (1974a). Method for making a flexural pivot. *United States Patent 3,807,029*.
- Troeger (1974b). Method for making an eccentric flexural pivot. *United States Patent 3,825,992*.
- Troeger, H. (1962, November). Considerations in the application of flexural pivots. *Automatic Control* 17, 41–46.
- Trylinski (1971). *Fine mechanisms and precision instruments. Principles of Design*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa : Pergamon Press.
- VSM (1991). *Extrait de normes pour écoles techniques* (6 ed.). Bureau des normes de la société suisse des constructeurs de machines.
- Waldron, K. J. & G. L. Kinzel (1999). *Kinematics, dynamics and design of machinery*. The Ohio State University : John Wiley and Sons, Inc.
- Weinstein, W. D. (1965a, June). Flexure-pivot bearings - part 1. *Machine Design* 37, 150–157.
- Weinstein, W. D. (1965b, July). Flexure-pivot bearings - part 2. *Machine Design* 38, 136–145.

- Weisbord, L. & W. J. Krupick (1974). Gyroscope universal flexure suspension assembly. *United States Patent 3,856,366*.
- Wilkey, W. P. (1989). Monolithic suspension assembly using cross flexure pivots. *United States Patent 4,825,713*.
- Willis, R. R. (1828). On the pressure produced on a flat surface when opposed to a stream of air issuing from an orifice in a plane surface. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 3(1), 121–140.
- Wittrick, W. H. (1948). The theory of symmetrical crossed flexure pivots. *Australian Journal of Physics Ser. A*, 121–134. Published by the commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Melbourne.
- Wittrick, W. H. (1951). The properties of crossed flexure pivots, and the influence of the point at which the strips cross. *The Aeronautical Quarterly* II(4), 272–292.
- Wolf, A., W. Ehrfeld, H. Lehr, M. F., & Nienhaus (1997). Combining liga and electro discharge machining for the generation of complex micro structures in hard materials. *Proc. 9th Int. Precision Engineering Seminar and the 4th Int. Conf. on Ultraprecision in Manufacturing Engineering, Braunschweig, Germany* 2, 657–660.
- Wolf, A., W. Ehrfeld, F. Michel, O. Koch, S. Preuss, H. Soultan, & H. Gruber (1998). Application of new actuator and vision control systems for micro electro discharge machining. *Proc. of SPIE's Int. Symp. on Intelligent Systems and Advanced Manufacturing : Intelligent Systems in Design and Manufacturing* 3517.
- Wyse, S. F. (1976). Multigimbal flexure universal joint. *United States Patent 3,943,778*.
- Wyse, S. F. (1977). Dual-gimbal gyroscope flexure suspension. *United States Patent 4,062,600*.
- Wüthrich, R., V. Fascio, D. Viquerat, & H. Langen (1999). In situ measurement and micromachining of glass. In *International Symposium on Micromechanics and Human Science (MHS 99)*.
- Xiaowei, L., J. Zhixin, Z. Jiaqi, & L. Jinchun (1997). A combined electrical machining process for the production of a flexure hinge. *Journal of Materials Processing Technology* (71), 373–376.
- Xu, W. & T. King (1996, July). Flexure hinges for piezoactuator displacement amplifiers : flexibility, accuracy, and stress considerations. *Precision Engineering* 19(1), 4–10.
- Yamahata, C. (2000). Guidage linéaire à articulations flexibles en alliage à mémoire de forme. *Travail pratique de diplôme, ISR-DMT-EPFL*.
- Yang, R. & M. Jouaneh (1992). Design and analysis of a low profile micro-positioning stage. In *Proceedings Precision Machining : Technology and Machine Development and Improvement. ASME*, Volume 58, pp. 131–142.
- Yang, R., M. Jouaneh, & R. Schweizer (1996, January). Design and characterization of a low-profile micropositioning stage. *Precision Engineering* 18(1), 20–29.
- Yoder, P. R. (1986). *Opto-mechanical systems design*. 270 Madison Avenue, New York, USA : Marcel Dekker, Inc.

- Yoshimura, Y., K. Amada, & T. Akasaka (1990, March). Displacement characteristics of one-piece parallel spring movement for balance (1st report). *Bulletin of Japan Society of Precision Engineering* 24(1), 33–38.
- Young, W. E. (1944). An investigation of the crossed-spring pivot. *Journal of applied mechanics* 11, A–113–A–120. Transaction of the ASME, New York.
- Zago, L., P. Genequand, & I. Kjelberg (1997, May). Advanced flexure structures in active high-accuracy and large bandwidth mechanisms. In *Proceedings SMACS 2 : Space Microdynamics and Accurate Control Symposium*, Toulouse.
- Zago, L., P. Genequand, & I. Kjelberg (1998, March). Resistor-damped electro-mechanical lever blocks. In *Proceeding of SPIE International Symposium on Smart Structures and Materials*, San Diego, USA.
- Zhao, X., G. Wilkening, & K. Horn (1993, May). High precision three dimensional tip position measurement in scanning tunneling microscopes. In *Proceeding of the 7th International Precision Engineering Seminar*, Kobe, Japan, pp. 937–940.
- Ziegler, P. (1995, May). Necessary conditions for programmable edm results. *AGIE experience of the best 7, AGIE, CH-6616 Losone*, 8–12.