Enseignement des mathématiques

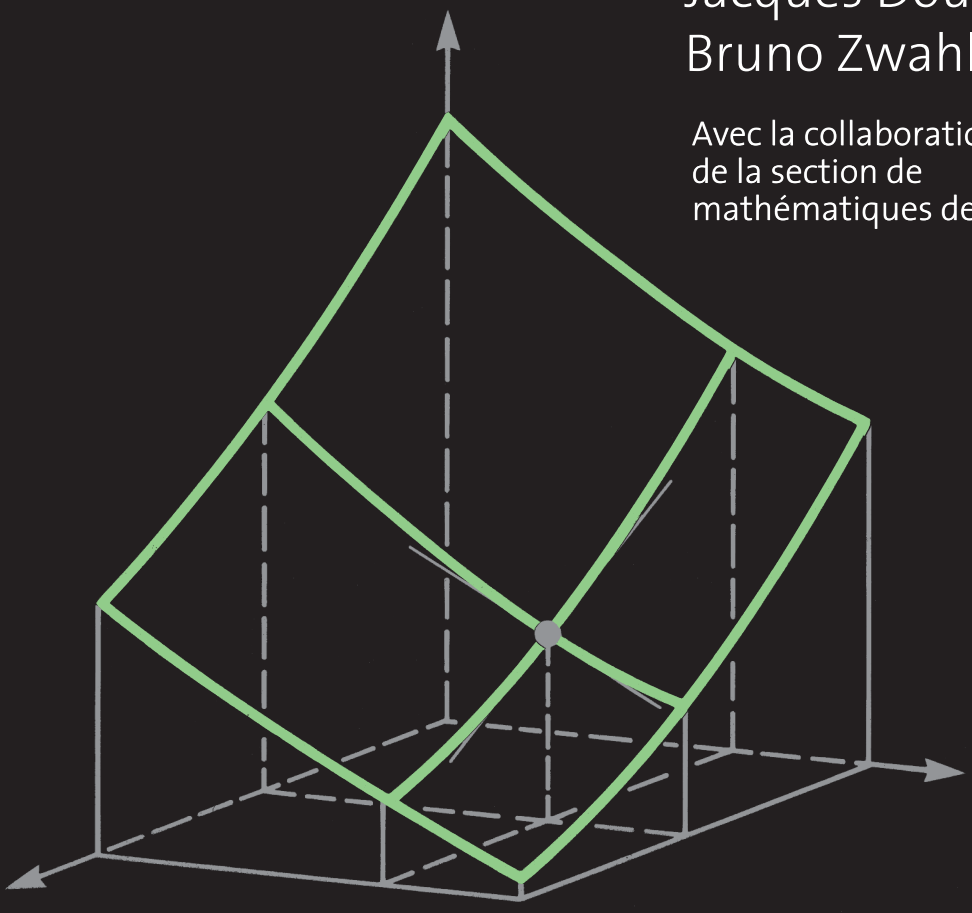
Calcul différentiel et intégral

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

4e édition

Jacques Douchet
Bruno Zwahlen

Avec la collaboration
de la section de
mathématiques de l'EPFL



EPFL PRESS

Enseignement des mathématiques

Calcul différentiel et intégral

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Cet ouvrage de base a pour but d'exposer aussi simplement que possible, mais néanmoins de manière rigoureuse, les principaux résultats du calcul différentiel et intégral qu'il est indispensable de connaître au sujet des fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles si l'on veut être capable d'entreprendre de façon constructive des études techniques ou scientifiques ■ Pour que le lecteur puisse, par lui-même et à tout moment, vérifier s'il a bien assimilé les principaux résultats démontrés dans cet ouvrage, de nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre ■ Dans cette nouvelle édition, les annexes ont été intégrées au texte et des notations inspirées des normes ISO ont été introduites.

Jacques Douchet est mathématicien diplômé et docteur ès sciences de l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Professeur honoraire, il a enseigné l'analyse dans différentes sections de l'EPFL.

Bruno Zwahlen est diplômé en physique et docteur ès sciences mathématiques de l'École polytechnique fédérale de Zurich. Nommé professeur de mathématiques dès 1969 à l'École polytechnique fédérale de Lausanne, il est professeur honoraire.

ISBN 978-2-88915-566-8

9 782889 155668 >

EPFL PRESS

Calcul différentiel et intégral

Enseignement des mathématiques

Calcul différentiel et intégral

Jacques Douchet
Bruno Zwahlen

Avec la collaboration de la section
de mathématiques de l'EPFL

EPFL PRESS

La collection «Enseignement des mathématiques» est publiée
sous la direction du professeur R. Dalang

La fondation des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) publie principalement les travaux d'enseignement et de recherche de l'École poytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), des universités et hautes écoles francophones.

PPUR, EPFL-Rolex Learning Center, Station 20, CH-1015 Lausanne,
info@epflpress.org, tél.: +41 21 693 21 30

www.epflpress.org

4e édition
Presses polytechniques et universitaires romandes et
section de mathématiques de l'EPFL, 2023
ISBN 978-2-88915-566-8, version imprimée
ISBN 978-2-8323-2340-3, version ebook (pdf), doi.org/10.55430/3101CDIJD

Ce livre est sous licence :

Le texte est sous licence Creative Commons : elle vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur, la source et l'éditeur original, sans modification du texte ou de l'extrait et sans utilisation commerciale.

Avant-propos

L'enseignement de l'analyse aux classes d'ingénieurs de l'EPFL a conduit ces dernières années à adapter le matériel du livre *Calcul différentiel et intégral* de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, tout en gardant dans la mesure du possible la rigueur et le style propres aux premières éditions.

Les annexes sont maintenant intégrées au texte : les raisonnements par récurrence et la formule du binôme sont expliqués au chapitre 1, celui sur les nombres complexes est devenu le chapitre 2, et les séries entières et de Taylor sont exposées au chapitre 8. Les notions de gradient, de dérivée directionnelle et de différentielle sont présentées dans le nouveau chapitre 16, qui contient aussi le matériel sur les courbes paramétrées. Le lecteur qui souhaiterait une discussion des résultats du chapitre 17 sur les intégrales multiples, avec des preuves complètes, la trouvera dans l'ouvrage de P. M. Fitzpatrick mentionné dans la bibliographie.

Des notations plus internationales ont été introduites, inspirées des normes ISO ; voir la nouvelle mouture du formulaire au chapitre 11, où les notations des éditions précédentes sont aussi mentionnées.

La grande majorité des exercices a été conservée. Le lecteur qui désire des exercices supplémentaires corrigés peut consulter avec profit l'ouvrage en deux volumes *Analyse vol. 1 et 2 – Recueil d'exercices et aide-mémoire* de Jacques Douchet.

Boris Buffoni
MER, EPFL

Conventions

Le volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre (chap. 5). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres séparés par un point (sect. 5.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres séparés par deux points (§ 5.3.5).

Un terme apparaît en italique la première fois qu'il est défini dans le texte. La fin d'un démonstration est signalée par un carré noir ■. Les figures sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres précédés de Fig., par exemple Fig. 5.12.

Table des matières

Avant-propos **v**

Table des matières **vii**

1 Corps des nombres réels **1**
1.1 Axiomes des nombres réels 1
1.2 Borne supérieure et borne inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ . . 7
1.3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ 10
1.4 Valeur absolue d'un nombre réel 13
1.5 Droite numérique achevée 14
1.6 Exercices 15

2 Nombres complexes **17**
2.1 Définitions et propriétés 17
2.2 Forme polaire 22
2.3 Fonction exponentielle complexe, formules d'Euler et de Moivre . 26
2.4 Racines des nombres complexes 28
2.5 Polynômes 32
2.6 Autres fonctions complexes 35

3 Suites de nombres réels **37**
3.1 Définitions 37
3.2 Limite d'une suite 39
3.3 Critères de convergence 41
3.4 Suites monotones 53
3.5 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée 56
3.6 Sous-suites 58
3.7 Suites de Cauchy 62
3.8 Exercices 65
3.9 Solutions des questions V/F 68

4 Séries numériques **71**
4.1 Généralités 71
4.2 Quelques critères de convergence 72
4.3 Exercices 78

5 Fonctions réelles d'une variable réelle **81**
5.1 Définitions 81
5.2 Limite d'une fonction 89
5.3 Fonctions continues 100
5.4 Suites de fonctions 116
5.5 Exercices 121

6 Calcul différentiel **127**
6.1 Fonctions différentiables d'une variable réelle 127
6.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis 136
6.3 Règle de Bernoulli-L'Hospital 144
6.4 Développements limités et formule de Taylor 148
6.5 Applications aux extrema locaux et points d'inflexions 157
6.6 Fonctions convexes 161
6.7 Étude des fonctions 167
6.8 Exercices 170

7 Fonction exponentielle et fonction logarithme **175**
7.1 Fonction exponentielle 175
7.2 Fonction logarithme 178
7.3 Fonction exponentielle de base $a > 0$ 181
7.4 Fonction puissance 184
7.5 Fonctions hyperboliques 188
7.6 Fonctions hyperboliques réciproques 191
7.7 Exercices 195

8 Séries entières et séries de Taylor **199**
8.1 Séries entières 199
8.2 Séries de Taylor 204
8.3 Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière . 209

9 Calcul intégral **213**
9.1 Intégrale d'une fonction continue et ses propriétés 213
9.2 Applications géométriques de l'intégrale 233
9.3 Intégration des fonctions rationnelles et ses applications 240
9.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux et ses propriétés 250
9.5 Primitive d'une fonction définie par une série entière : preuve du théorème 8.3.1 253
9.6 Exercices 255

10 Intégrales généralisées **261**
10.1 Convergence des intégrales généralisées définies sur un intervalle borné 261
10.2 Convergence des intégrales généralisées définies sur un intervalle non borné 276
10.3 Exercices 287

11 Formulaire **291**

12 Équations différentielles **297**
12.1 Introduction 297
12.2 Équations différentielles à variables séparées 299
12.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre 306
12.4 Équations différentielles linéaires du second ordre 310

12.5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . 321
12.6 Exercices . . . 326

13 Espace $\mathbb{R}^n$ 331
13.1 Norme euclidienne . . . 331
13.2 Suites dans $\mathbb{R}^n$ . . . 333
13.3 Topologie de $\mathbb{R}^n$ . . . 339
13.4 Exercices . . . 353

14 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles 357
14.1 Définitions . . . 357
14.2 Limites . . . 359
14.3 Fonctions continues . . . 365
14.4 Théorème de prolongement . . . 377
14.5 Exercices . . . 381

15 Dérivées partielles 385
15.1 Définitions et propriétés . . . 385
15.2 Dérivées partielles d'ordres supérieurs . . . 405
15.3 Formes différentielles . . . 412
15.4 Extrema d'une fonction de plusieurs variables . . . 419
15.5 Fonctions implicites — extrema liés . . . 429
15.6 Exercices . . . 442

16 Gradient, dérivées directionnelles, différentielle, courbes paramétrées 451
16.1 Introduction . . . 451
16.2 Dérivées partielles, gradient . . . 452
16.3 Dérivées directionnelles . . . 453
16.4 Fonction dérivable, différentielle . . . 454
16.5 Exemples . . . 460
16.6 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ . . . 463
16.7 Calcul vectoriel . . . 469
16.8 Courbes paramétrées . . . 471

17 Intégrales multiples 479
17.1 Intégrabilité d'une fonction bornée sur un rectangle fermé . . . 479
17.2 Intégrabilité d'une fonction bornée sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ . . . 488
17.3 Calcul des intégrales doubles . . . 495
17.4 Changement de variables dans une intégrale double . . . 501
17.5 Intégrale double d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ . . . 507
17.6 Intégrales multiples . . . 521
17.7 Exercices . . . 535

Bibliographie 539

Index 541

Chapitre 1

Corps des nombres réels

1.1 Axiomes des nombres réels

1.1.1 Rappels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels* $\{0, 1, 2, ...\}$, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des *entiers relatifs* $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des *nombres rationnels* $\{p/q \,:\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. On supposera que les principales propriétés de ces trois ensembles sont connues ; comme par exemple celle du *bon ordre* dans $\mathbb{N}$: tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

On note encore $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.1.2 Démonstration par récurrence (ou induction)

Rappelons la méthode de *démonstration par récurrence*.

Énoncé. Soit $P(n)$ une relation dépendant d'un entier naturel n, telle que $P(n_0)$ soit vraie et que, pour tout entier $n \geqslant n_0, P(n)$ implique $P(n+1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

DÉMONSTRATION. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant n_0, P(n)$ n'est pas vraie$\}$. Supposons que cet ensemble A ne soit pas vide, alors il contient un plus petit élément m qui est strictement plus grand que n_0. Ainsi, $m - 1 \geqslant n_0$ et $m - 1 \notin A$; ce qui implique que $P(m-1)$ est vraie. D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $P(m)$ est aussi vraie. Ce dernier résultat est en contradiction avec le fait que $m \in A$. On en conclut que l'ensemble A est vide ; ce qui entraîne que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la relation $P(n)$ est vraie. ■

Remarque

Ce résultat peut être mis en défaut si l'on ne vérifie pas que $P(n)$ est vraie pour n_0, même si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0, P(n)$ implique $P(n+1)$. Voir le paragraphe 3.1.4 pour une illustration.

Exemple

En utilisant le raisonnement par récurrence, démontrons que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Pour cela, considérons la relation $P(n)$ définie par

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6},$$

et supposons que $P(n)$ soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)}{6}(2n+3)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que pour tout entier $n \geqslant 1,\ P(n)$ implique $P(n+1)$. Comme de plus $P(1)$ est vraie, on en conclut que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a bien :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}.$$

1.1.3 La formule du binôme

À tout $n \in \mathbb{N}$ correspond un entier $n! \in \mathbb{N}$ appelé « n factoriel ». L'entier $n!$ se définit par récurrence comme suit :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \ \text{ et } \ 0! = 1.$$

Par exemple $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Le coefficient binomial $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \in \mathbb{N}$ est défini par

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ .$$

En particulier $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) = n$.

Si $2 \leqslant k \leqslant n-2$, on peut écrire plus simplement

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot \ldots \cdot k}\ .$$

Énoncé. Les coefficients binomiaux sont liés par la formule

$$\left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array} \right) \tag{1.1}$$

valable pour tous les entiers $1 \leqslant i \leqslant n$.

DÉMONSTRATION. Ceci découle directement de leur définition :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!\ i}{i!(n-(i-1))!} + \frac{n!\,(n+1-i)}{i!(n+1-i)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n+1-i)!}\,(i+(n+1-i)) = \frac{n!(n+1)}{i!(n+1-i)!} \\ &= \left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array} \right). \end{aligned}$$

■

Énoncé. La *formule du binôme* donne une formule pour toute puissance entière positive d'une somme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k y^{n-k}\ ,$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 1$.

L'expression 0^0 est une forme indéterminée. Dans le contexte des polynômes (comme ici), on utilise souvent la convention $x^0 = 1$ en $x = 0$. Dans le cadre des calculs de limites (voir par exemple les sections 3.2 et 5.2), cette convention n'est pas appliquée (la discussion se fait alors de cas en cas).

DÉMONSTRATION. Pour x et y fixés arbitrairement, la preuve est par récurrence sur $n \geqslant 1$. La formule du binôme est vraie pour $n = 1$ car

$$(x+y)^1 = y + x = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) x^0 y^1 + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) x^1 y^0\ .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, supposons que la formule est vraie pour n et vérifions-la pour $n+1$. Comme $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$, l'hypothèse de récurrence permet

d'écrire :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k y^{n-k+1} \\
&\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n \\ j-1 \end{array}\right) x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k y^{n+1-k}, \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array}\right) x^i y^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) x^i y^{n+1-i}, \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)\right\} x^i y^{n+1-i} \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) x^0 y^{n+1}
\end{aligned}
$$

(on applique la formule (1.1) encadrée ci-dessus)

$$
\begin{aligned}
&= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right) x^i y^{n+1-i} + y^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right) x^i y^{n+1-i}
\end{aligned}
$$

et donc elle est également vraie pour $n+1$. ■

1.1.4 Exemple d'une équation n'admettant aucune solution dans $\mathbb{Q}$

L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que cette équation possède une solution dans $\mathbb{Q}$. Quitte à changer son signe, on peut la supposer positive. Alors, il existe deux entiers $p > 0$ et $q > 0$ vérifiant la relation $(p/q)^2 - 2 = 0$ ou encore $p^2 = 2q^2$ et dont le plus grand commun diviseur est 1. Ainsi p^2 est un nombre pair, ce qui implique que p est pair. Par suite, il existe un entier $r > 0$ tel que $p = 2r$ et donc $q^2 = 2r^2$. Par un raisonnement analogue, on démontre que q est aussi un nombre pair. On obtient ainsi une contradiction avec le fait que les deux entiers p et q admettent 1 comme plus grand diviseur commun. D'où la conclusion. ■

1.1.5 Définition du corps des nombres réels

On est ainsi amené tout naturellement à définir un nouvel ensemble, appelé *corps des nombres réels*, qui aura la propriété de contenir l'ensemble des rationnels et dans lequel l'équation $x^2 - 2 = 0$ admettra au moins une solution.

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies : deux applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; une relation d'ordre

$x \leqslant y$ (écrite aussi $y \geqslant x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant les trois axiomes suivants :

PREMIER AXIOME

$\mathbb{R}$ est un *corps*, en d'autres termes :

- pour tout triplet de nombres réels x, y et z : $x+(y+z) = (x+y)+z$
- pour tout couple de nombres réels x et y : $x+y = y+x$
- il existe dans $\mathbb{R}$ un élément noté 0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0+x = x$
- pour chaque élément x de $\mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que $x+(-x) = 0$
- pour tout triplet de nombres réels x, y et z : $x(yz) = (xy)z$
- pour tout couple de nombres réels x et y : $xy = yx$
- il existe un élément $1 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 \cdot x = x$
- pour chaque élément $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (noté aussi $1/x$) tel que $x\,x^{-1} = 1$
- pour tout triplet de nombres réels x, y et z : $x(y+z) = xy+xz$.

DEUXIÈME AXIOME

$\mathbb{R}$ est un *corps ordonné*. Ce qui revient à dire que les assertions suivantes sont vérifiées :

- $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ impliquent $x \leqslant z$
- ($x \leqslant y$ et $y \leqslant x$) est équivalent à $x = y$
- pour tout couple de nombres réels x et y : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $x \geqslant y$
- $x \leqslant y$ implique que pour tout élément z de $\mathbb{R}$, on a : $x+z \leqslant y+z$
- $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$ impliquent $0 \leqslant xy$.

TROISIÈME AXIOME

L'*axiome de la borne inférieure* sera énoncé au paragraphe 1.2.4.

1.1.6 Remarques

Nous supposerons que les conséquences élémentaires qui résultent des deux premiers axiomes (théorie générale des corps ordonnés) sont connues. En particulier, les notations usuelles $x - y = x + (-y)$ et, pour $y \neq 0$, $x/y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ seront utilisées.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ vérifie les deux premiers axiomes et $\mathbb{Q}$ est donc un corps ordonné. Par contre il ne satisfait pas l'axiome de la borne inférieure. En effet, le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ se distingue de tous les autres corps ordonnés par le fait qu'il est le seul à vérifier cet axiome.

1.1.7 Intervalles bornés de $\mathbb{R}$

La relation $x \leqslant y$ et $x \neq y$ s'écrit $x < y$ ou encore $y > x$. Pour tout couple $a < b$ de nombres réels, l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$ est appelé l'*intervalle ouvert et borné d'origine a et d'extrémité b*, et s'écrit $]a, b[$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout nombre réel $\delta > 0$, on désigne par $B(a, \delta)$ l'intervalle ouvert et borné $]a - \delta, a + \delta[$. Par définition, $B(a, \delta)$ est appelé la *boule ouverte de centre a et de rayon δ*. L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé l'*intervalle fermé et borné d'origine a et d'extrémité b*, et s'écrit $[a, b]$. L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$ (resp. $a \leqslant x < b$) est appelé l'*intervalle semi-ouvert et borné d'origine a et d'extrémité b, ouvert en a (resp. b), fermé en b (resp. a)* et s'écrit $]a, b]$ (resp. $[a, b[$). Dans le cas où $a = b$, l'intervalle fermé et borné $[a, a]$ représente l'ensemble réduit au seul point a, tandis que l'intervalle ouvert et borné $]a, a[$ représente l'*ensemble vide*, que l'on note par ϕ. D'autre part, l'origine et l'extrémité d'un intervalle borné sont aussi appelées les *extrémités* de l'intervalle ou encore les *bornes* de l'intervalle.

On désigne par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des *nombres réels positifs* : $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et par $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des *nombres réels négatifs* : $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Par définition, on pose $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-^* \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$.

1.1.8 Inclusion de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Pour démontrer que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, résultat qui n'est pas garanti par les axiomes de $\mathbb{R}$, considérons l'application $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\omega(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \omega(0) = 0$$

(où 1 est l'élément neutre multiplicatif dans $\mathbb{R}$; puisque $(-1)^2 = 1$, on a bien que $1 \in \mathbb{R}_+^*$). Nous pouvons d'abord prolonger cette application à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\omega(-n) = -\omega(n)$; par suite, nous pouvons la prolonger au corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ en posant, pour tout nombre rationnel r : $\omega(r) = \omega(p)/\omega(q)$ où $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux.

On vérifie alors que l'application ω est compatible avec l'addition et la multiplication, dans le sens que $\omega(r + r') = \omega(r) + \omega(r')$ et $\omega(r \cdot r') = \omega(r) \cdot \omega(r')$. De plus ω conserve la relation d'ordre (c'est-à-dire que : $r \leqslant r'$ implique que $\omega(r) \leqslant \omega(r')$).

Il en découle que $\omega(\mathbb{Q})$ est un corps lorsqu'il est muni de l'addition et de la multiplication : $\omega(\mathbb{Q})$ est dit un *sous-corps* de $\mathbb{R}$.

On peut, grâce à l'application ω, identifier $\mathbb{Q}$ et $\omega(\mathbb{Q})$. Ainsi, dorénavant, nous considérons $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps de $\mathbb{R}$; ce qui entraîne que tout nombre rationnel est un nombre réel particulier. Par définition, un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dit *irrationnel*. Reste à démontrer qu'il existe de tels nombres. Pour cela, il suffit de prouver que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$, étant donné qu'elle n'en possède pas dans $\mathbb{Q}$; ce que nous ferons un peu plus tard.

1.2 Borne supérieure et borne inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

1.2.1 Définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) est un *majorant* (resp. *minorant*) de $\mathcal{S}$ si la relation $x \in \mathcal{S}$ implique $x \leqslant b$ (resp. $x \geqslant a$). Dans le cas où $\mathcal{S}$ admet un majorant (resp. minorant), on dit que $\mathcal{S}$ est *majoré* (resp. *minoré*). Lorsque $\mathcal{S}$ est à la fois majoré et minoré, on dit que $\mathcal{S}$ est *borné*.

Il sera toujours sous-entendu, lorsque l'on dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ est majoré, minoré ou borné, que celui-ci n'est pas vide.

1.2.2 Maximum, minimum

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$

Définitions. S'il existe $M \in \mathcal{S}$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in \mathcal{S}$, on dit que M est le *maximum* de $\mathcal{S}$.

S'il existe $m \in \mathcal{S}$ tel que $x \geqslant m$ pour tout $x \in \mathcal{S}$, on dit que m est le *minimum* de $\mathcal{S}$.

Remarque 1 (unicité). Si le maximum existe, il est unique. En effet, supposons que $M' \in \mathcal{S}$ satisfait aussi $x \leqslant M'$ pour tout $x \in \mathcal{S}$. Alors, en choisissant $x = M$, on obtient $M \leqslant M'$. En inversant les rôles, on a de même $M' \leqslant M$ et donc $M' = M$.

De même, si le minimum existe, il est unique.

Remarque 2. $M \in \mathbb{R}$ est le maximum de $\mathcal{S}$ si et seulement si M est un majorant de $\mathcal{S}$ qui appartient à $\mathcal{S}$.

De même, $m \in \mathbb{R}$ est le minimum de $\mathcal{S}$ si et seulement si m est un minorant de $\mathcal{S}$ qui appartient à $\mathcal{S}$.

Notations. S'il existe, le maximum de $\mathcal{S}$ est noté $\max \mathcal{S}$ et, s'il existe, le minimum de $\mathcal{S}$ est noté $\min \mathcal{S}$.

1.2.3 Définition de la borne supérieure et inférieure d'un ensemble

Définition. Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp. a) vérifiant les deux propriétés suivantes :

(I) pour tout élément x de $\mathcal{S}$: $x \leqslant b$ (resp. $x \geqslant a$),

(II) quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de $\mathcal{S}$ tel que $b - x_\epsilon \leqslant \epsilon$ (resp. $x_\epsilon - a \leqslant \epsilon$),

est appelé la *borne supérieure* (resp. *inférieure*) ou encore le *supremum* (resp. l'*infimum*) de $\mathcal{S}$.

Dans les figures 1.1 et 1.2, on a choisi pour $\mathcal{S}$ un intervalle, mais $\mathcal{S}$ peut être bien plus général.

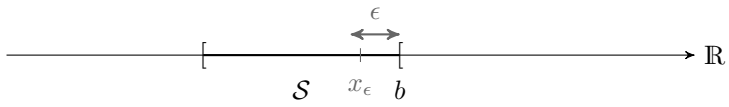


Fig. 1.1 La condition (II) pour un supremum.

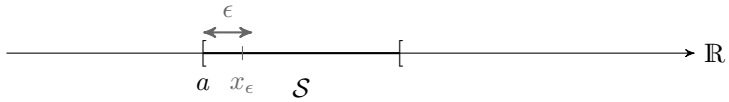


Fig. 1.2 La condition (II) pour un infimum.

Remarque 1. On ne demande pas dans cette définition que b (resp. a) appartienne à $\mathcal{S}$.

Remarque 2. La condition (I) signifie que b est un majorant de $\mathcal{S}$ (resp. a est un minorant de $\mathcal{S}$).

Remarque 3. La condition (II) est équivalente à la propriété que, pour tout nombre réel $z < b$, z n'est pas un majorant de $\mathcal{S}$ (resp. tout nombre réel $z > a$, z n'est pas un minorant de $\mathcal{S}$). Vérifions-le pour b.

Supposons d'abord que (II) est satisfait. Si le nombre réel z vérifie $z < b$, alors (II) appliqué à $\epsilon = (b-z)/2$ assure l'existence de $x_\epsilon \in \mathcal{S}$ tel que $b - x_\epsilon \leqslant \epsilon$. D'où

$$x_\epsilon \geqslant b - \epsilon = (2\epsilon + z) - \epsilon > z$$

et z n'est pas un majorant de $\mathcal{S}$.

Supposons ensuite que (II) n'est pas satisfait : il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout élément x de $\mathcal{S}$, $b - x > \epsilon$. Le nombre réel $z = b - \epsilon < b$ est un majorant de $\mathcal{S}$ car $z > x$ pour tout x dans $\mathcal{S}$.

Ainsi, en supposant que b (resp. a) satisfait la condition (I), la condition (II) signifie que b est le minimum de l'ensemble des majorants de $\mathcal{S}$ (resp. a est le maximum de l'ensemble des minorants de $\mathcal{S}$).

Remarque 4 (unicité). S'il existe, le supremum de $\mathcal{S}$ est unique car il est le minimum de l'ensemble des majorants de $\mathcal{S}$. De même, s'il existe, l'infimum de $\mathcal{S}$ est unique car il est le maximum de l'ensemble des minorants de $\mathcal{S}$.

En résumé, il découle de sa définition que, s'il existe, le supremum (resp. l'infimum) de $\mathcal{S}$ est le plus petit des majorants de $\mathcal{S}$ (resp. le plus grand des minorants de $\mathcal{S}$).

1.2.4 L'axiome de la borne inférieure

Nous sommes en mesure d'énoncer l'axiome de la borne inférieure.

Axiome de la borne inférieure

Tout sous-ensemble non vide $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure.

1.2.5 Existence de la borne supérieure et de la borne inférieure

Pour qu'un sous-ensemble non vide $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) il faut et il suffit que $\mathcal{S}$ soit majoré (resp. minoré).

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire, car si $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure b (resp. inférieure a), alors b (resp. a) est un majorant (resp. minorant) de $\mathcal{S}$. D'où $\mathcal{S}$ est majoré (resp. minoré).

Supposons que $\mathcal{S}$ soit minoré. Alors, si a est un minorant de $\mathcal{S}$, on obtient que $\mathcal{S}_1 = \{y - a + 1 : y \in \mathcal{S}\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, grâce au troisième axiome que vérifient les nombres réels, on sait que $\mathcal{S}_1$ possède une borne inférieure, que l'on désigne par a_1. Il s'ensuit, comme on peut le vérifier aisément, que le nombre réel $a_1 + a - 1$ est bien une borne inférieure du sous-ensemble $\mathcal{S}$.

Supposons à présent que $\mathcal{S}$ soit majoré et que b soit un majorant de $\mathcal{S}$. Alors le nombre réel $-b$ est un minorant du sous-ensemble $\mathcal{S}_2 = \{-y \,:\, y \in \mathcal{S}\}$ de $\mathbb{R}$; ce qui implique que $\mathcal{S}_2$ admet une borne inférieure a_2. On en déduit immédiatement que $b_2 = -a_2$ est une borne supérieure de $\mathcal{S}$.

On a ainsi démontré que la condition était nécessaire et suffisante. ■

1.2.6 Notations

Lorsque $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$, on note sa borne supérieure (resp. inférieure) par $\sup \mathcal{S}$ (resp. $\inf \mathcal{S}$).

1.2.7 Remarque

Il est très important de remarquer que si l'un ou l'autre des deux nombres réels $\sup\ \mathcal{S}$ ou $\inf\ \mathcal{S}$ existe, il n'appartient pas obligatoirement à $\mathcal{S}$. Par exemple, pour l'ensemble $\mathcal{S} = [1, 2\,[$: $\inf\ \mathcal{S} = 1 \in \mathcal{S}$, tandis que $\sup\ \mathcal{S} = 2 \notin \mathcal{S}$.

1.2.8 Théorème de Heine–Borel–Lebesgue

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et δ une application de A dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \delta(x)).$$

Alors, on peut extraire de l'ensemble A un sous-ensemble fini B de manière à avoir :

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in B} B(x, \delta(x)).$$

DÉMONSTRATION. Observons d'abord qu'il existe $x_a \in A$ tel que $a \in B(x_a, \delta(x_a))$. Désignons par F l'ensemble des nombres réels y appartenant à $[a, b]$ pour lesquels il existe un sous-ensemble fini $D(y)$ de l'ensemble A tel que

$$[a, y] \subset \bigcup_{x \in D(y)} B(x, \delta(x)).$$

L'ensemble F n'est pas vide puisqu'il contient le nombre réel a (on peut choisir $D(a) = \{x_a\}$). D'autre part il est majoré par b. Il possède donc une borne supérieure $M \in [a, b]$. Tout $z \in B(x_a, \delta(x_a)) \cap [a, b]$ appartient à F car on peut choisir dans ce cas $D(z) = \{x_a\}$. D'où $M > a$. Par hypothèse, il existe $x_M \in A$ tel que $M \in B(x_M, \delta(x_M))$. Comme $x_M - \delta(x_M) < M$, nous pouvons introduire $y \in F$ tel que $y > x_M - \delta(x_M)$. Tout $z \in B(x_M, \delta(x_M)) \cap [y, b]$ appartient à F car on peut choisir dans ce cas $D(z) = D(y) \cup \{x_M\}$. En particulier $M \in F$. Si $M < b$, on considérerait un nombre réel $z \in]M, b]$ tel que $z \in B(x_M, \delta(x_M))$. Nous obtiendrions la contradiction $z \in F$ et $M < z \leqslant \sup F = M$. Ainsi $b = M \in F$ et $F = [a, b]$. ■

1.2.9 Remarque

D'une manière générale, la conclusion du théorème de Heine-Borel-Lebesgue peut être mise en défaut pour des intervalles bornés mais non fermés. Par exemple, pour l'application $\delta : [0, 1[\to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\delta(x) = (1 - x)/2$, l'ensemble

$$\bigcup_{x \in [0,1[} B(x, \delta(x))$$

contient l'intervalle semi-ouvert et borné $[0, 1[$; mais par contre, il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble fini B de $[0, 1[$ de sorte que l'intervalle $[0, 1[$ soit contenu dans

$$\bigcup_{x \in B} B(x, \delta(x)).$$

1.3 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

1.3.1 Introduction

Nous allons démontrer dans cette section que l'équation $x^2 - 2 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Ce qui aura pour conséquence, de prouver que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

D'autre part, nous montrerons qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. Ce résultat très important se traduit dans le langage mathématique en écrivant que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$. Comme corollaire à ce résultat, nous verrons qu'entre deux nombres rationnels distincts, il y a toujours un nombre irrationnel.

Avant d'être en mesure de justifier ces résultats, nous devons démontrer que $\mathbb{R}$ est un *corps archimédien*, autrement dit que $\mathbb{R}$ satisfait l'axiome d'Archimède.

1.3.2 Axiome d'Archimède

Pour tout couple de nombres réels $x > 0$ et $y \geqslant 0$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $nx > y$.

Remarque 1. Dans cet exposé des nombres réels, l'« axiome » d'Archimède porte mal son nom. En effet, ce n'est pas un axiome dans cette présentation, mais une proposition qui s'obtient par la preuve suivante à partir des axiomes énoncés au paragraphe 1.1.5.

Remarque 2. Dans la preuve qui suit, la première étape consiste à montrer que $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$. Ainsi non seulement $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{N}$, mais il n'a pas non plus de majorant dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$ en supposant le contraire : $\mathbb{N}$ admet un majorant dans $\mathbb{R}$. Par la définition de $\sup \mathbb{N}$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $\sup \mathbb{N} - x \leqslant 1/2$. D'où $\sup \mathbb{N} \leqslant x + 1/2 < x + 1 \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que $\sup \mathbb{N}$ est un majorant de $\mathbb{N}$.

Soient maintenant des nombres réels $x > 0$ et $y \geqslant 0$. Comme y/x n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > y/x$ et donc $nx > y$. Clairement $n \neq 0$. ■

1.3.3 Partie entière d'un nombre réel

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier noté $[x]$ tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Cet entier $[x]$ est appelé la *partie entière* du nombre réel x.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord l'existence d'un tel entier. Pour cela, supposons d'abord que x soit un nombre réel positif ou nul. Du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que le sous-ensemble $\{n \in \mathbb{N} : n > x\}$ de $\mathbb{N}$ n'est pas vide ; la propriété du bon ordre de $\mathbb{N}$ implique qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que : $m - 1 \leqslant x < m$. Il suffit donc de prendre $[x] = m - 1$.

Supposons à présent que x soit un nombre réel négatif. Alors, comme nous venons de le voir, il existe un entier naturel k pour lequel, on a : $k \leqslant -x < k+1$, autrement dit, $-k \geqslant x > -k - 1$. Ainsi, en posant

$$[x] = \begin{cases} -k & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -k-1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

on obtient que : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

Supposons que $k_2 \leqslant k_1$ dans $\mathbb{Z}$ satisfont $k_1 \leqslant x < k_1 + 1$ et $k_2 \leqslant x < k_2 + 1$, et montrons que $k_1 = k_2$. On obtient que $k_1 \leqslant x < k_2 + 1$ et $k_1 - k_2 < 1$. Donc $0 \leqslant k_1 - k_2 < 1$ et ainsi $k_1 = k_2$.

■

1.3.4 Stricte inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On sait d'après les résultats que nous avons obtenus aux paragraphes 1.1.4 et 1.1.8 que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et que d'autre part, l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour démontrer que $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$, il nous suffit de prouver que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Considérons le sous-ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 2\}$ de $\mathbb{R}$. Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient le nombre réel 1 et, de plus, il est majoré par 2 car $x^2 > 4 > 2$ pour tout $x > 2$. On en déduit donc que le nombre réel $c = \sup \mathcal{S}$ existe et que $c \in [1, 2]$. Nous allons maintenant démontrer que $c^2 = 2$. Pour cela il nous suffit de prouver, étant donné que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné, que les deux autres cas possibles, à savoir $c^2 < 2$ et $c^2 > 2$, sont à exclure.

Supposons $c^2 < 2$. Alors, pour tout $x \in [c, c+1]$, on obtient $0 \leqslant x - c \leqslant 1$ et

$$\begin{aligned} x^2 &= (c + (x-c))^2 = c^2 + 2c(x-c) + (x-c)^2 \\ &\leqslant c^2 + 2c(x-c) + (x-c) = (2c+1)x - c^2 - c. \end{aligned}$$

Si de plus $x \leqslant (2 + c^2 + c)/(2c+1)$, on en déduit $x^2 \leqslant 2$. Un tel nombre réel x satisfait $x \in \mathcal{S}$. On peut choisir par exemple

$$x = \frac{\frac{c^2+2}{2} + c^2 + c}{2c+1} = c + \frac{2 - c^2}{4c+2} \in \,]c, c+1[\,.$$

Il en résulte, puisque $x \in \mathcal{S}$, la contradiction $c = \sup \mathcal{S} \geqslant x > c$.

Supposons à présent que $c^2 > 2$. Alors, pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} x^2 &= (c + (x-c))^2 = c^2 + 2c(x-c) + (x-c)^2 \\ &\geqslant c^2 + 2c(x-c) = 2cx - c^2. \end{aligned}$$

Si de plus $x > (2 + c^2)/(2c)$, on en déduit $x^2 > 2$. Un tel nombre réel x n'est donc pas dans $\mathcal{S}$. D'où $\mathcal{S}$ est majoré par $(2 + c^2)/(2c)$ et

$$c = \sup \mathcal{S} \leqslant (2 + c^2)/(2c),$$

c'est-à-dire, $c^2 \leqslant 2$, ce qui est une contradiction. ■

1.3.5 Généralisation

Soit $z \in \mathbb{R}$. On prouve de même que, si $z > 0$, alors il existe un nombre réel $c > 0$ tel que $c^2 = z$, que l'on notera $c = \sqrt{z}$ (la racine carrée *positive* de z). On notera aussi $\sqrt{0} = 0$. Ainsi $\sqrt{z} \geqslant 0$ pour tout nombre réel $z \geqslant 0$. En résumé, on obtient pour tout $z \in \mathbb{R}$ que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = z\} = \begin{cases} \{-\sqrt{z},\, \sqrt{z}\,\} & \text{si } z > 0, \\ \{0\} & \text{si } z = 0, \\ \emptyset \ \text{(ensemble vide)} & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Si $z > 0$, on appellera $-\sqrt{z}$ la *racine carrée négative* de z. Au paragraphe 1.3.4, on a prouvé que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3.6 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $x < y$ deux nombres réels. Alors, il existe un nombre rationnel r tel que $x < r < y$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on a que $y - x > 0$; ce qui implique, du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n(y-x) > 1$ ou encore $(y-x) > 1/n$. Ainsi, en posant :

$$r = \frac{[nx]+1}{n},$$

on obtient que

$$x < r = \frac{[nx]+1}{n} = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

■

1.3.7 Corollaire

Soit $p < q$ deux nombres rationnels. Alors, il existe un nombre irrationnel z tel que $p < z < q$.

DÉMONSTRATION. Étant donné que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe un nombre rationnel $r \neq 0$ tel que

$$\frac{p}{\sqrt{2}} < r < \frac{q}{\sqrt{2}}.$$

D'où $p < r\sqrt{2} < q$. Puisque $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, on en déduit immédiatement que $r\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel qui satisfait la conclusion de ce corollaire. ■

1.4 Valeur absolue d'un nombre réel

1.4.1 Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

À tout nombre réel x, on associe le nombre réel positif ou nul $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ce nombre réel $|x|$ est appelé la *valeur absolue* du nombre réel x.

1.4.2 Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

- $|x| = 0$ est équivalent à $x = 0$;
- pour tout couple de nombres réels x et y : $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- pour tout couple de nombres réels x et $y \neq 0$: $|x/y| = |x|/|y|$;
- pour tout nombre réel x : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;
- $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout nombre réel x .

1.4.3 Inégalité triangulaire

Pour tout couple de nombres réels x et y, on a : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

DÉMONSTRATION. Si $x + y \geqslant 0$, alors $|x+y| = x + y \leqslant |x| + |y|$; de même si $x + y \leqslant 0$, on a : $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leqslant |-x| + |-y| = |x| + |y|$.
■

1.4.4 Inégalité triangulaire inverse

Pour tout couple de nombres réels x et y, on a : $|x-y| \geqslant |\,|x|-|y|\,|$.

DÉMONSTRATION. On déduit de l'inégalité $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|$ que $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. De même, $|y| = |(y-x)+x| \leqslant |x-y|+|x|$ entraîne que $-|x-y| \leqslant |x|-|y|$. D'où $-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|$ ou encore $|x-y| \geqslant |\,|x|-|y|\,|$. ■

1.4.5 Caractérisation du nombre réel zéro

Le nombre réel zéro se distingue de tous les autres éléments de $\mathbb{R}$ par le fait qu'il est le seul à être en valeur absolue aussi petit que l'on veut. Autrement dit, un nombre réel x est égal à zéro si et seulement si pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, on a : $|x| \leqslant \epsilon$.

1.4.6 Caractérisation d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble non vide $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $x \in \mathcal{S}$ implique $|x| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{S}$ soit un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{S}$ admet un majorant $b \in \mathbb{R}$ et un minorant $a \in \mathbb{R}$, qui satisfont $a \leqslant x \leqslant b$ pour tout $x \in \mathcal{S}$. Par suite, en posant $M = \max\{|a|, |b|\}$, on obtient que pour tout $x \in \mathcal{S}$: $-M \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant M$; ce qui revient à dire que $|x| \leqslant M$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout élément x de $\mathcal{S}$: $|x| \leqslant M$. Alors, M est un majorant et $-M$ un minorant de l'ensemble $\mathcal{S}$, de sorte que $\mathcal{S}$ est borné. ■

1.5 Droite numérique achevée

1.5.1 Définition de la droite numérique achevée

On désigne par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble obtenu par l'adjonction à $\mathbb{R}$ de deux éléments, notés $-\infty$ et $+\infty$. Ainsi, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$-\infty < +\infty$$

et pour tout nombre réel x,

$$-\infty < x < +\infty.$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette relation d'ordre est appelé la *droite numérique achevée*. $\overline{\mathbb{R}}$ est donc un ensemble ordonné mais contrairement à $\mathbb{R}$ il admet un plus petit élément, à savoir $-\infty$ et un plus grand élément, à savoir $+\infty$.

1.5.2 Remarque

Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ n'est muni d'aucune loi de composition interne $(+, \cdot)$. Par exemple, des expressions telles que

$$(-\infty) + (+\infty)$$

ou

$$0 \cdot (+\infty)$$

n'ont aucun sens.

1.5.3 Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

Pour tout nombre réel a, l'ensemble des x tel que $x > a$ (resp. $x \geqslant a$) est appelé l'*intervalle ouvert (resp. fermé) et non borné commençant en* a, on le note $]a, +\infty[$ (resp. $[a, +\infty[$). De même, l'ensemble des $x < b$ (resp. $x \leqslant b$) est appelé l'*intervalle ouvert (resp. fermé) et non borné finissant en* b, on le note $]-\infty, b[$ (resp. $]-\infty, b]$). L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est tout naturellement désigné par l'intervalle non borné $]-\infty, +\infty[$.

1.6 Exercices

1.6.1 Soit $x < y$ deux nombres réels. Montrer que pour tout nombre $z > 0$: $xz < yz$.

1.6.2 Montrer que pour tout nombre réel $x \neq 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$: $x^2 + y^2 > 0$.

1.6.3 Soit x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$. Montrer que pour tout entier $n > 0$: $x^n < y^n$.

1.6.4 Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} < 2.$$

1.6.5 Trouver l'ensemble des nombres réels qui satisfont l'inégalité $(x+1)^2 - |x-2| \geqslant 0$.

1.6.6 Déterminer tous les nombres réels qui vérifient l'inégalité

$$\frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x}{3x+2}.$$

1.6.7 Soit x un nombre réel positif et soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique entier relatif q tel que $y = qx + r$ avec $0 \leqslant r < x$.

1.6.8 Démontrer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un nombre infini de rationnels et un nombre infini d'irrationnels.

1.6.9 Montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble fini B de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$]0, 1[\; = \bigcup_{n \in B}]1/n, \; 1[.$$

1.6.10 Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{|x| : x \in \mathcal{S}\}$ admet le nombre réel $\max\{|\sup \mathcal{S}|, |\inf \mathcal{S}|\}$ pour borne supérieure.

1.6.11 Montrer que le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le troisième axiome donné au paragraphe 1.1.5.

1.6.12 Soit A et B deux sous-ensembles disjoints non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est $\mathbb{R}$ tout entier, et supposons que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait : $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre réel c tel que les relations $a \in A$ et $b \in B$ impliquent $a \leqslant c \leqslant b$.

Chapitre 2

Nombres complexes

2.1 Définitions et propriétés

2.1.1 Définitions

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est constitué de $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes (addition et multiplication) :

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) \quad \text{et} \quad (x, y)(a, b) = (xa - yb, ya + xb).$$

On peut vérifier que $\mathbb{C}$ est un *corps* (voir les axiomes d'un corps au § 1.1.5).

Observez que l'addition est l'addition usuelle dans $\mathbb{R}^2$. Comme

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0)$$

et

$$(x, 0)(a, 0) = (xa - 0 \cdot 0\,,\ 0 \cdot a + x \cdot 0) = (xa, 0)$$

pour tous $x, a \in \mathbb{R}$, il est usuel d'identifier le nombre complexe $(x, 0)$ avec le nombre réel $x \in \mathbb{R}$. En particulier le nombre complexe $(0, 0)$ est identifié avec le nombre réel 0.

Le nombre complexe $(0, 1)$ est noté $\mathrm{i} = (0, 1)$ et il est parfois appelé *l'unité imaginaire* . Il satisfait

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1\,,\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

grâce à l'identification de $(-1, 0)$ avec $-1 \in \mathbb{R}$. De même $(-\mathrm{i})^2 = -1$, où $-\mathrm{i} = (0, -1)$.

Alors que l'équation $z^2 = -1$ n'a aucune solution z dans $\mathbb{R}$, elle admet ainsi i et $-\mathrm{i}$ comme solutions dans $\mathbb{C}$.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + (0 \cdot y - 1 \cdot 0\,,\ 1 \cdot y + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{x + \mathrm{i}y = (x, y).}$$

Ainsi, au lieu de la notation $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, on peut utiliser les notations plus usuelles $z = x + \mathrm{i}y$ ou $z = x + y\,\mathrm{i}$. L'expression $x + \mathrm{i}y$ ou $x + y\,\mathrm{i}$ est appelée la *forme cartésienne* de z.

Étant donné $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, nous dirons que :

- x est la *partie réelle* de z, notée $x = \mathrm{Re}\ z$,
- y est la *partie imaginaire* de z, notée $y = \mathrm{Im}\ z$.

En particulier, comme $x = (x, 0) = x + \mathrm{i} \cdot 0$, on obtient

$$\mathrm{Re}\ x = x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ x = 0,$$

et, comme $\mathrm{i} = (0, 1) = 0 + \mathrm{i} \cdot 1$, on obtient aussi

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{i} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ \mathrm{i} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $x = 0$ et $y \neq 0$, $z = \mathrm{i}y$ est appelé *nombre purement imaginaire.*

2.1.2 Propriétés de base

Somme de deux nombres complexes

Sous forme cartésienne, elle s'écrit $(x + \mathrm{i}y) + (a + \mathrm{i}b) = (x + a) + \mathrm{i}(y + b)$ ou encore

$$\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Re}\ w \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\ z + \mathrm{Im}\ w$$

avec $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + \mathrm{i}b$ et $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

Différence de deux nombres complexes

$$(x + \mathrm{i}y) - (a + \mathrm{i}b) = (x - a) + \mathrm{i}(y - b).$$

Multiplication

Sous forme cartésienne, au lieu d'utiliser la définition, on peut aussi utiliser les axiomes d'un corps et $\mathrm{i}^2 = -1$, ce qui donne

$$\begin{aligned}(x + \mathrm{i}y)(a + \mathrm{i}b) &= xa + \mathrm{i}ya + x\mathrm{i}b + \mathrm{i}y\mathrm{i}b = xa + \mathrm{i}^2yb + \mathrm{i}(ya + xb)\\ &= (xa - yb) + \mathrm{i}(ya + xb),\end{aligned}$$

et on retrouve bien la définition $(x, y)(a, b) = (xa - yb, ya + xb)$.

Division

Si de plus $a + ib \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a

$$\frac{x + \mathrm{i}y}{a + \mathrm{i}b} = \frac{x + \mathrm{i}y}{a + \mathrm{i}b}\,\frac{a - \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} = \frac{(x + \mathrm{i}y)(a - \mathrm{i}b)}{a^2 + \mathrm{i}ba - \mathrm{i}ab - \mathrm{i}^2b^2} = \frac{(x + \mathrm{i}y)(a - \mathrm{i}b)}{a^2 + b^2},$$

où on a multiplié par $\dfrac{a - \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b}$ et utilisé $\mathrm{i}^2 = -1$. D'où

$$\frac{x + \mathrm{i}y}{a + \mathrm{i}b} = \frac{xa - \mathrm{i}^2yb + \mathrm{i}(ya - xb)}{a^2 + b^2} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{ya - xb}{a^2 + b^2}.$$

Voici deux nouvelles définitions utiles :

Conjugaison

Le *conjugué* de $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ est par définition le nombre complexe $\overline{w} = a - \mathrm{i}b$.

Module

Le *module* de $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ est défini par $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$. Puisque $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 + b^2$, on a l'identité

$$\boxed{w\overline{w} = |w|^2 .}$$

Il en résulte $w\dfrac{\overline{w}}{|w|^2} = 1$ et

$$\boxed{w^{-1} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2} \quad \text{pour} \quad w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}^* \ (a, b \in \mathbb{R}).}$$

Remarque. Le corps $\mathbb{C}$ *n'est pas un corps ordonné* (voir la définition axiomatique au § 1.1.5). En effet, si le corps $\mathbb{C}$ pouvait être muni d'une inégalité $\leqslant$ satisfaisant aux axiomes d'un corps ordonné, nous obtiendrions une contradiction comme suit.

Pour tout élément z d'un corps ordonné, $0 \leqslant z \cdot z = z^2$ (voir le second exercice ci-dessous). De plus $-1 < 0$, c'est-à-dire, $-1 \leqslant 0$ et $-1 \neq 0$ (voir le second exercice ci-dessous). En choisissant $z = \mathrm{i}$, on obtiendrait $0 \leqslant \mathrm{i}^2 = -1$, en contradiction avec $-1 < 0$.

Exercice

Dans un corps, prouver à partir des axiomes que, pour tout élément z,

- $z \cdot 0 = 0$ en considérant l'expression $z \cdot (0 + 0)$,
- $(-1) \cdot z = -z$ en considérant l'expression $((-1) + 1) \cdot z$,
- $(-z)^2 = z^2$ en considérant l'expression $(-z) \cdot ((-z) + z)$.

Exercice

Dans un corps ordonné, prouver à partir des axiomes que :

- $0 \leqslant -z \Leftrightarrow z \leqslant 0$ pour tout élément z,
- $0 \leqslant z^2$ pour tout élément z,
- $0 \leqslant 1$ et $-1 \leqslant 0$.

2.1.3 Exemples

1) Pour $y \in]0, +\infty[$, $(-\mathrm{i}y)^2 = (\mathrm{i}y)^2 = \mathrm{i}^2 y^2 = -y^2$. Ainsi $-y^2 \in \ ]-\infty, 0[$ a deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}y$ et $-\mathrm{i}y$.
2) $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + (\mathrm{i}y)^2 + 2x\mathrm{i}y = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Il en résulte que, en 1), $\mathrm{i}y$ et $-\mathrm{i}y$ sont les seules racines carrées dans $\mathbb{C}$.

3) Pour $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z^n = (x+\mathrm{i}y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (\mathrm{i}y)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} i^{n-k} x^k y^{n-k}$$

où

$$\mathrm{i}^0 = 1,\ \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1,\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}, \ldots$$

4) $(2+\mathrm{i})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \mathrm{i} + 3 \cdot 2 \cdot \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12 \cdot \mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$.

2.1.4 Propriétés de la conjugaison

Proposition

1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, 2) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$, 3) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
4) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ si $w \neq 0$, 5) $|\overline{z}| = |z|$, 6) $\overline{\overline{z}} = z$,
7) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, 8) $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

DÉMONSTRATION. Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = a + \mathrm{i}b$.

1)

$$\begin{aligned} \overline{(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)} = \overline{(x+a)+\mathrm{i}(y+b)} &= (x+a) - \mathrm{i}(y+b) \\ &= (x-\mathrm{i}y) + (a-\mathrm{i}b) = \overline{x+\mathrm{i}y} + \overline{a+\mathrm{i}b}. \end{aligned}$$

Les preuves sont analogues pour 2), 3) et 4).

5) $|\,\overline{x+\mathrm{i}y}\,| = |x-\mathrm{i}y| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |x+\mathrm{i}y|$.

6) $\overline{\overline{x+\mathrm{i}y}} = \overline{x-\mathrm{i}y} = x+\mathrm{i}y$.

7) et 8) $z+\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y) = 2x$ et $z-\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y$. ■

2.1.5 Le plan complexe

Par définition de $\mathbb{C}$, les nombres complexes sont des couples de nombres réels. Pour cette raison, le plan euclidien est aussi appelé le *plan complexe* et les nombres complexes peuvent être représentés comme dans la figure 2.1. Le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est identifié au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Son conjugué $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ est identifié au point symétrique $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe horizontal. L'addition $(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)$ correspond à l'addition vectorielle usuelle (fig. 2.1).

Multiplié par i, le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ subit une rotation d'angle $\pi/2$ (en radians). En effet $\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{i}x + \mathrm{i}^2 y = -y + \mathrm{i}x$ (fig. 2.2).

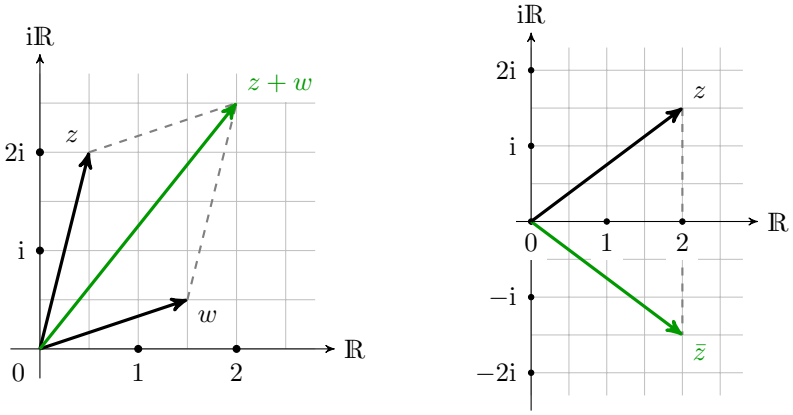


Fig. 2.1 Addition et conjugaison dans le plan complexe.

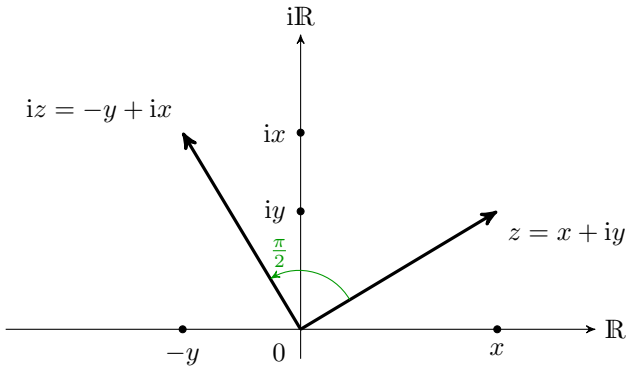


Fig. 2.2 Multiplication par i.

2.1.6 Un cercle représenté dans le plan complexe

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - \mathrm{i})| = 2\}$ représente un cercle de rayon 2 centré en $1 - \mathrm{i}$. Pour le voir, écrivons $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On obtient

$$4 = |z - (1 - \mathrm{i})|^2 = |(x - 1) + \mathrm{i}(y + 1)|^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \ ,$$

qui est l'équation cartésienne du cercle (fig. 2.3).

Plus généralement, pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

représente un cercle de rayon r centré en z_0 .

En effet, pour $z = x + \mathrm{i}y$ et $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ avec $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, le nombre réel $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ est la distance entre les points (x, y) et (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$.

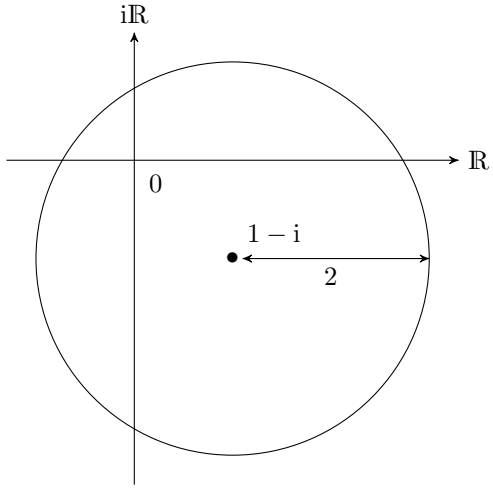


Fig. 2.3 Un cercle dans le plan complexe.

2.2 Forme polaire

2.2.1 Définition de la forme polaire

Nous supposerons une connaissance de base des fonctions trigonométriques sin, cos, tan et cot. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Écrivons $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi on a

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

où θ est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que si $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ vérifient ces égalités, alors on peut additionner ou soustraire à θ n'importe quel multiple entier de 2π tout en préservant les égalités (fig. 2.4).

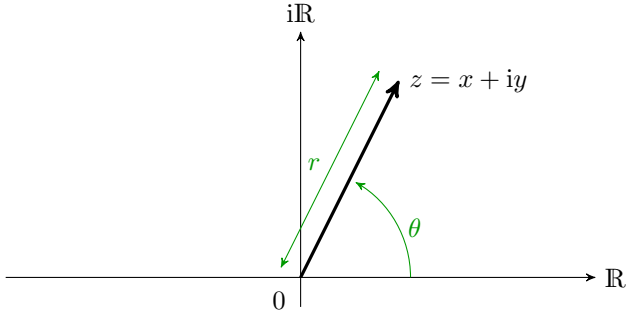


Fig. 2.4 Forme polaire.

Terminologie

- $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est la *forme polaire* de z.
- θ est *l'argument* (ou *phase*) de z, défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et noté par $\arg z$.
- $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ est le module de z (déjà introduit ci-dessus).

2.2.2 Exemples

Voir la figure 2.5.

1) $\mathrm{i} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2})$.

2) $-1 = -1 + \mathrm{i}\cdot 0 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)$.

3) $z = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{16} = 4$,

$$z = 4\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 4(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

et nous pouvons choisir $\theta = -\pi/3$ (à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$). Donc $z = 4\Big(\cos(-\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-\pi/3)\Big)$.

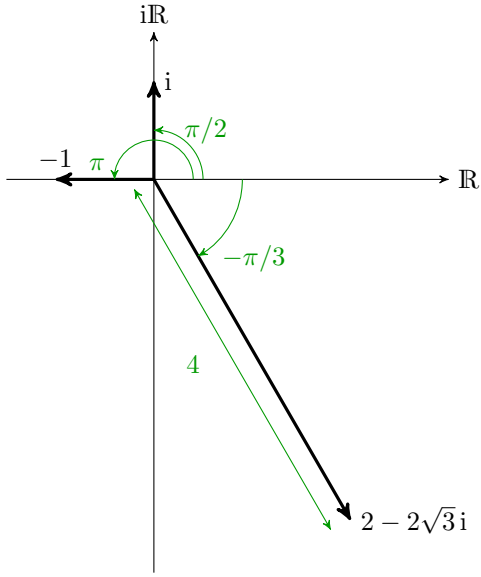


Fig. 2.5 Exemples.

2.2.3 Opérations sous forme polaire

La forme polaire est souvent utile pour le calcul des produits, quotients et puissances de nombres complexes, comme l'illustre la proposition suivante.

Proposition

1) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg \overline{z} = -\arg z$ (à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$) (fig. 2.1).
2) Pour tous θ, ϕ dans $\mathbb{R}$,

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi).$$

Voir la figure 2.6.

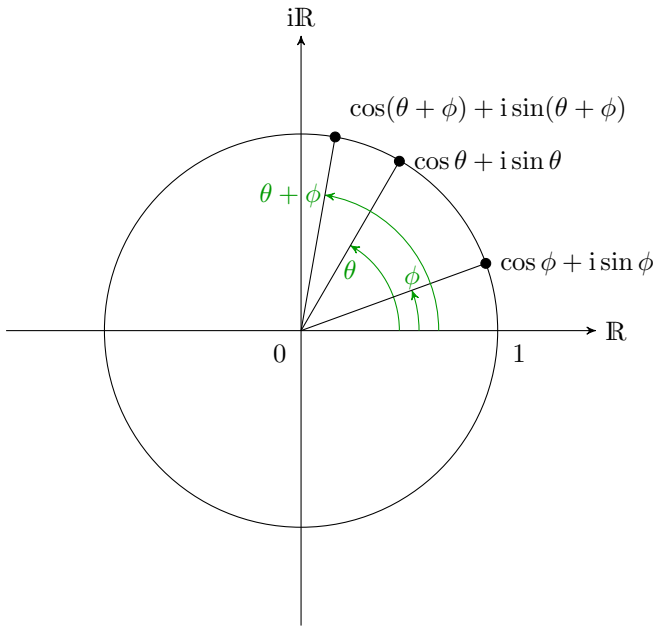


Fig. 2.6 Produit de deux nombres complexes sur le cercle unité.

3) Pour tout $z, w \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$|zw| = |z|\,|w| \quad \text{et} \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w \quad \text{à } 2k\pi \text{ près avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi

> le produit de deux nombres complexes non nuls a pour module le *produit des modules* et pour argument la *somme des arguments* (à $2k\pi$ près),

ou encore

$$|z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,|w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) = |z|\,|w|(\cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi))$$

avec $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $w = |w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$.

4) Pour tout $z, w \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$|z/w| = |z|/|w| \quad \text{et} \quad \arg(z/w) = \arg z - \arg w \quad \text{à } 2k\pi \text{ près avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5) Pour $w \in \mathbb{C}^*$,

$$|w^{-1}| = |w|^{-1} \quad \text{et} \quad \arg(w^{-1}) = -\arg w \quad \text{à } 2k\pi \text{ près avec } k \in \mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION

1) Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\overline{z} = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta))$$

et ainsi $|\overline{z}| = r$ et $\arg\overline{z} = -\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Nous avons

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)&(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)\\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi).\end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \quad \text{et} \quad \sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi,$$

nous déduisons que

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi).$$

3) Soit $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $w = |w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ avec $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Par la partie 2),

$$zw = |z|\,|w|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) = |z|\,|w|(\cos(\theta+\phi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\phi)).$$

Ainsi $|zw| = |z|\,|w|$ et $\arg(zw) = \theta + \phi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) Comme $z = (\frac{z}{w})\cdot w$, la partie 3) donne $|z| = |\frac{z}{w}|\,|w|$ et $\arg z = \arg(\frac{z}{w}) + \arg w$ à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) La dernière partie est un cas particulier de la partie 4).

■

Remarque. Par récurrence, il résulte de la troisième partie que

$$\{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta))$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Nous reviendrons sur cette remarque aux paragraphes 2.3.3 et 2.3.4.

2.3 Fonction exponentielle complexe, formules d'Euler et de Moivre

2.3.1 La fonction exponentielle complexe

Pour $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), nous définissons $e^z = \exp(z)$ par

$$e^z \equiv \exp(z) := e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = e^{\mathrm{Re}\ z}(\cos(\mathrm{Im}\ z) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}\ z)),$$

où $e^x \in \mathbb{R}$ est la fonction exponentielle réelle usuelle. Nous en donnerons une définition rigoureuse au chapitre 7.

Propriétés

1) $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\ z}$.
2) $\arg(e^z) = y = \mathrm{Im}\ z$ à $2\pi k$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.
3) si $z \in \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = x$), alors $e^z = e^x$, autrement dit, e^z est la fonction exponentielle réelle usuelle.
4)
$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$
pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$, car $z + 2k\pi i = x + \mathrm{i}(y + 2k\pi)$ et
$$e^{z+2k\pi\mathrm{i}} = e^x\{\cos(y + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(y + 2k\pi)\} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = e^z.$$
5)
$$e^{z+w} = e^z e^w$$
pour tout $z = x + \mathrm{i}y, w = a + \mathrm{i}b$ (avec $x, y, a, b \in \mathbb{R}$) car
$$\begin{aligned} e^{(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)} &= e^{(x+a)+\mathrm{i}(y+b)} = e^{x+a}\{\cos(y+b) + \mathrm{i}\sin(y+b)\} \\ &\overset{\S 2.2.3(2)}{=} e^{x+a}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\ &= e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = e^{x+\mathrm{i}y}e^{a+\mathrm{i}b}. \end{aligned}$$

2.3.2 Formule d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = \mathrm{i}\theta$, nous obtenons $\mathrm{Re}\ z = 0$, $\mathrm{Im}\ z = \theta$ et

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad \text{(Euler)}.$$

En particulier,

$$e^{2k\pi\mathrm{i}} = 1 \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad e^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

Notons que, pour $\theta, \phi \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = e^{i\phi} \;\Leftrightarrow\; \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \; \theta = \phi + 2k\pi.$$

Plus généralement, pour $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $|z| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\boxed{z = |z|e^{\mathrm{i}\theta},}$$

qui est une autre manière d'écrire z sous forme polaire.

2.3.3 Formule de Moivre

Proposition

Pour tout $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\Big(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\Big)^n = r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)).}$$

La formule de Moivre s'écrit aussi de la manière suivante :

$$\boxed{\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}.}$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence. Cette dernière formule est trivialement satisfaite pour $n = n_0 = 1$. Supposons-la vraie pour $n \geqslant n_0$ et montrons-la pour $n+1$:

$$\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1} = re^{\mathrm{i}\theta}\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \overset{\text{récurrence}}{=} re^{\mathrm{i}\theta}r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = r^{n+1}e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\ .$$

■

2.3.4 Application : calcul de z^n sous forme polaire

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, $z^n = |z|^n e^{\mathrm{i}n\theta}$.

Ainsi $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

Lorsqu'il est possible de déterminer explicitement $\arg z$ et n est grand, cette méthode est plus simple que celle vue à l'exemple 3 du paragraphe 2.1.3.

Exemple 1. Considérons $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $n = 7$, $z^n = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^7$.

Écrivons z sous forme polaire : $\sqrt{3} + \mathrm{i} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$,
$r = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{3+1} = 2$,
$z = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \theta = \pi/6$ à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ (fig. 2.7).

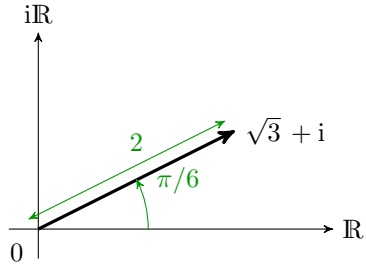


Fig. 2.7 Le nombre complexe $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme polaire.

Ainsi $z = 2e^{i\pi/6}$ et

$$\begin{aligned} z^7 &= 2^7 e^{\mathrm{i}7\pi/6} = 2^7 e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -2^7 e^{\mathrm{i}\pi/6} \\ &= -2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) \\ &= -2^6(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = -64(\sqrt{3}+\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^4 = \left(\frac{2e^{-\mathrm{i}\pi/6}}{2e^{\mathrm{i}\pi/6}}\right)^4 = \left(e^{-\mathrm{i}\pi/3}\right)^4 = e^{-\mathrm{i}4\pi/3} = e^{\mathrm{i}2\pi/3} = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 3.
À partir des formules trigonométriques

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \quad \text{et} \quad \sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

$(\theta, \phi \in \mathbb{R})$, on peut obtenir des formules pour $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, en choisissant $\theta = \phi$, on obtient

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Des formules pour $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ peuvent aussi être obtenues en associant la formule de Moivre avec l'exemple 3 du paragraphe 2.1.3. Par exemple, par le paragraphe 2.1.3,

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos^2\theta+\mathrm{i}^2\sin^2\theta+2\mathrm{i}\cos\theta\sin\theta = (\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathrm{i}(2\cos\theta\sin\theta).$$

D'autre part, par la formule de Moivre, $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos(2\theta)+\mathrm{i}\sin(2\theta)$.

D'où $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

2.4 Racines des nombres complexes

2.4.1 Formule pour les racines des nombres complexes

Les racines des nombres complexes, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = w$ pour $w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, peuvent être obtenues comme suit.

Proposition

Soit w sous forme polaire

$$w = se^{\mathrm{i}\phi} \quad \text{avec} \quad s > 0,\ \phi \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\boxed{\left\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\right\} = \left\{ \sqrt[n]{s}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\phi+2k\pi}{n}} \ : \ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\},}$$

où $\sqrt[n]{s}$ est la racine n-ième de s appartenant à $]0, +\infty[$.

Remarque. Le nombre complexe $w = 0$ n'a qu'une seule racine n-ième dans $\mathbb{C}$, 0 lui-même.

DÉMONSTRATION. Soit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre,

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = se^{\mathrm{i}\phi}\ .$$

Donc $r^n = s$ et $n\theta = \phi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $r = \sqrt[n]{s} > 0$ et $\theta = \frac{\phi+2k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Observons que le choix $k = n$ donne la même racine que le choix $k = 0$:

$$\sqrt[n]{s}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\phi+2n\pi}{n}} = \sqrt[n]{s}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\phi}{n}}\ .$$

■

Exemple. Trouvons toutes les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de 8i. Nous avons $8\mathrm{i} = 8e^{\mathrm{i}\pi/2}$ et donc

$$\left\{z \in \mathbb{C}^* : z^3 = 8i\right\} = \left\{2\exp\left(\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) : k = 0, 1, 2\right\}.$$

Nous obtenons ainsi trois racines cubiques z_1, z_2 et z_3 correspondant à $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$:

- $k = 0 : z_1 = 2e^{\mathrm{i}\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$,
- $k = 1 : z_2 = 2e^{\mathrm{i}5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$,
- $k = 2 : z_3 = 2e^{\mathrm{i}9\pi/6} = 2e^{\mathrm{i}3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\left(0 - \mathrm{i}\right) = -2\mathrm{i}$.

Voir la figure 2.8.

Interprétation géométrique. Plus généralement, les racines n-ièmes de $w = se^{\mathrm{i}\phi}$ (avec $s > 0, \phi \in \mathbb{R}$) sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{s} > 0$, aux sommets d'un polygone régulier à n côtés (fig. 2.9).

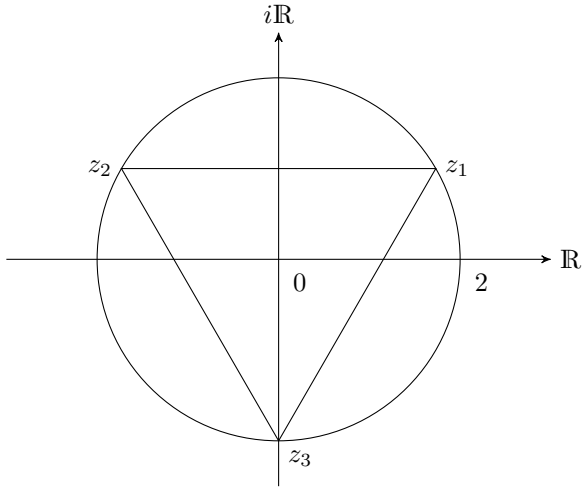


Fig. 2.8 Les racines cubiques de 8i sont sur un cercle de rayon 2, aux sommets d'un triangle équilatéral.

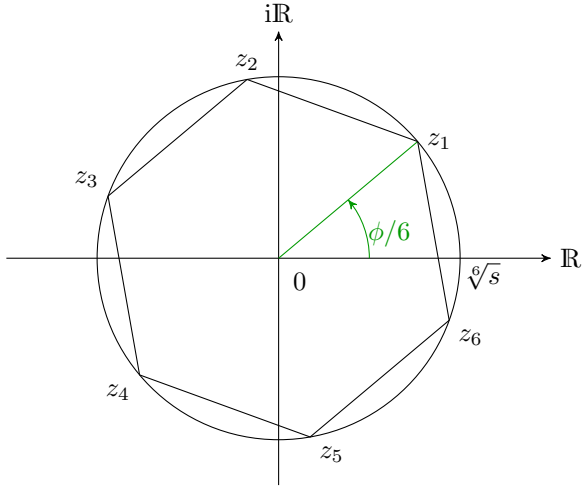


Fig. 2.9 Les racines 6-ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$ sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[6]{s} > 0$, aux sommets d'un hexagone régulier. Ici $\phi \in [0, 2\pi[$.

2.4.2 Racines n-ièmes complexes de 1

Dans le cas particulier $w = 1$, on obtient

$$\left\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\right\} = \left\{e^{\mathrm{i}2k\pi/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple. Pour $w = 1$, nous obtenons trois racines cubiques z_1, z_2 et z_3 correspondant à $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$:

- $k = 0 : z_1 = e^{\mathrm{i}\cdot 0} = \cos\frac{0}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{0}{3} = 1$,
- $k = 1 : z_2 = e^{\mathrm{i}2\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $k = 2 : z_3 = e^{\mathrm{i}4\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Voir la figure 2.10.

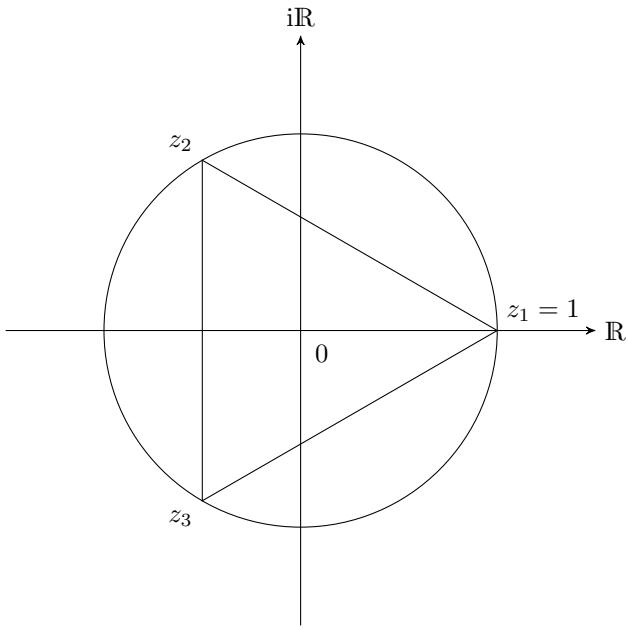


Fig. 2.10 Les racines cubiques de 1.

2.4.3 Racines carrées complexes

Dans le cas particulier $n = 2$, nous obtenons pour $w \in \mathbb{C}^*$

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^* : z^2 = w \right\} = \left\{ |w|^{1/2} e^{\mathrm{i}\phi/2} \,,\, -|w|^{1/2} e^{\mathrm{i}\phi/2} \right\},$$

où $|w|^{1/2}$ est dans $]0, +\infty[$ et $\phi = \arg w$. En effet

$$e^{\mathrm{i}\frac{\phi+2\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\phi/2} e^{\mathrm{i}\pi} = -e^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \ .$$

Ainsi $w \in \mathbb{C}^*$ a deux racines carrées z_1 et z_2 avec $z_2 = -z_1$.

Remarque. Parfois il est plus commode d'utiliser la forme cartésienne en posant $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = a + \mathrm{i}b$ $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$:

$$a + \mathrm{i}b = w = z^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy.$$

Nous sommes ainsi conduits à un système de deux équations à deux inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x^2 - y^2 & = a, \\ 2xy & = b. \end{array} \right.$$

Si $w \neq 0$, ceci donne deux solutions $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = -z_1$.

Une autre méthode consiste à observer que $x^2 + y^2 = |z|^2 = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0, +\infty[\,. \end{array} \right.$$

Cependant ce système a en général des solutions supplémentaires qui ne résolvent pas le problème initial.

2.5 Polynômes

2.5.1 Équation polynomiale de degré 2

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit encore $w \in \mathbb{C}$ vérifiant $w^2 = b^2 - 4ac$, que l'on note ici $w = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Si de plus $b^2 - 4ac \in]0, +\infty[$, on choisit comme d'habitude w tel que $w \in]0, +\infty[$. Alors

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : az^2 + bz + c = 0 \right\} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

Remarques

- Si $b^2 - 4ac \neq 0$, alors $\sqrt{b^2 - 4ac}$ et $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ sont les deux racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $b^2 - 4ac$.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, alors $\sqrt{b^2 - 4ac} = -\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ et
$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}\,.$$
- La formule pour les zéros d'un polynôme du second degré à coefficients réels reste ainsi valable lorsque les coefficients sont complexes, avec une preuve identique (voir plus bas). L'avantage dans le cas complexe est que les racines carrées
$$\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{et} \quad -\sqrt{b^2 - 4ac}$$
existent toujours dans $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} & az^2+bz+c=0 \;\Leftrightarrow\; 4a^2z^2+4abz+4ac=0 \\ & \Leftrightarrow\; (2az+b)^2-b^2+4ac=0 \;\Leftrightarrow\; 2az+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \\ & \Leftrightarrow\; z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,. \end{aligned}$$

■

2.5.2 Factorisation d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$

Le *théorème fondamental de l'algèbre* affirme que tout polynôme

$$P(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0 \tag{2.1}$$

avec des coefficients complexes $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ et de degré $n\geqslant 1$ (autrement dit, $a_n\neq 0$) a au moins une *racine* ou *zéro* dans $\mathbb{C}$. Voici une autre manière d'énoncer ce résultat :

Tout polynôme $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ avec $n\geqslant 1$, $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ et $a_n\neq 0$ peut s'écrire sous la forme

$$P(z)=a_n(z-z_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_p)^{m_p}=a_n\prod_{k=1}^{p}(z-z_k)^{m_k}$$

pour certains $p,m_1,\ldots,m_p\in\mathbb{N}^*$ tels que $m_1+\ldots+m_p=n$ et des nombres complexes distincts $z_1,\ldots,z_p\in\mathbb{C}$.

Ici $z_1,\ldots,z_p\in\mathbb{C}$ sont les racines de $P(z)$ de *multiplicités* respectives $m_1,\ldots,m_p$.

Exemple 1. $z^2-2z+1=(z-1)^2$.

Exemple 2. $z^2-1=(z+1)(z-1)$.

Exemple 3.

$$\begin{aligned} z^3-1 &= (z-1)(z^2+z+1) \\ &= (z-1)\left(z-\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

2.5.3 Factorisation d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$

Dans (2.1), si $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, alors $P(z)=0$ implique $P(\overline{z})=0$.

En effet

$$P(\overline{z})=\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{z}^k=\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_kz^k}=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz^k}=\overline{P(z)}=0.$$

Si $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P(z_0) = 0$ avec $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, observons que $P(\overline{z_0}) = 0$ et que

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (2\,\mathrm{Re}\ z_0)z + |z_0|^2$$

est un polynôme à coefficients réels, de degré 2, qui est irréductible sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes à coefficients réels et de degrés au moins 1. Il en résulte la conséquence suivante.

Tout polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ avec $n \geqslant 1$, coefficients réels $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} P(z) = a_n &(z - t_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - t_q)^{m_q} \\ &\times \left(z^2 - (2\,\mathrm{Re}\ z_1)z + |z_1|^2\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(z^2 - (2\,\mathrm{Re}\ z_p)z + |z_p|^2\right)^{k_p} \end{aligned}$$

pour certains $q, p, m_1, \ldots, m_q, k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que

$$m_1 + \ldots + m_q + 2k_1 + \ldots + 2k_p = n,$$

des nombres réels distincts $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}$ et

$$z_1, \ldots, z_p \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$$

distincts. De plus, $m_1, \ldots, m_q \geqslant 1$ si $q \geqslant 1$, et $k_1, \ldots, k_p \geqslant 1$ si $p \geqslant 1$.

Ici $t_1, \ldots, t_q$ sont les racines réelles de $P(z)$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_q$. Les racines dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sont $z_1, \ldots, z_p$ et $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}$ de multiplicités respectives $k_1, \ldots, k_p$. Si $q = 0$, alors $p \geqslant 1$ et

$$P(z) = a_n \left(z^2 - (2\,\mathrm{Re}\ z_1)z + |z_1|^2\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(z^2 - (2\,\mathrm{Re}\ z_p)z + |z_p|^2\right)^{k_p}.$$

Si $p = 0$, alors $q \geqslant 1$ et $P(z) = a_n(z - t_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - t_q)^{m_q}$. En bref,

tout polynôme non constant à coefficients réels peut être factorisé en polynômes à coefficients réels de degrés 1 et 2 irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Le polynôme $4z^3 + 2z^2 - z + 1$ s'annule en $z = -1$. En effectuant une division polynomiale par $z + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} 4z^3 + 2z^2 - z + 1 &= 4z^2(z + 1) - 2z^2 - z + 1 \\ &= 4z^2(z + 1) - 2z(z + 1) + z + 1 = (4z^2 - 2z + 1)(z + 1). \end{aligned}$$

Comme le polynôme du second degré à coefficients réels $4z^2 - 2z + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, il est bien irréductible sur $\mathbb{R}$.

2.6 Autres fonctions complexes

2.6.1 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ (formule d'Euler) et

$$e^{\mathrm{i}(-\theta)} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

D'où

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \ .$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, ceci conduit aux définitions

$$\cos z := \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z := \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \ .$$

Anticipons sur le chapitre 7. Nous y verrons les définitions des fonctions hyperboliques réelles (§7.5) :

$$\cosh x := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, les fonctions hyperboliques complexes sont définies de manière similaire aux fonctions hyperboliques réelles :

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \ ,$$

où e^{z} et e^{-z} sont les exponentielles complexes.

Pour $z \in \mathbb{C}$, il s'ensuit immédiatement que

$$\cos z = \cosh(\mathrm{i}z) \quad \text{et} \quad \sin z = \sinh(\mathrm{i}z)/\mathrm{i} = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z) \ .$$

2.6.2 Le logarithme complexe

La fonction exponentielle complexe a été définie par

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

pour $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Pour $w = |w|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & w = e^{z} \Leftrightarrow |w|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = e^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \\ \Leftrightarrow & \Big(|w| = e^{x} \ \text{ et } \ \exists k \in \mathbb{Z} \ \ y = \theta + 2k\pi\Big) \Leftrightarrow \Big(x = \ln(|w|) \ \text{ et } \ \exists k \in \mathbb{Z} \ \ y = \theta + 2k\pi\Big). \end{aligned}$$

Ici $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction réelle « logarithme népérien ». Pour une présentation plus détaillée dans le cadre réel, voir §7.2.

Ainsi l'équation $w = e^{z}$ a une infinité de solutions $z = x + \mathrm{i}y$ dans $\mathbb{C}$ (où $x, y \in \mathbb{R}$). Nous noterons celle satisfaisant $y \in \ ]-\pi, \pi]$ par $\ln w$. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante du *logarithme complexe* :

$$\ln w = \ln(|w|) + \mathrm{i}\arg w \quad \text{avec} \quad \arg w \in \ ]-\pi, \pi]$$

pour $w \in \mathbb{C}^*$, où $\ln(|w|) \in \mathbb{R}$ est le logarithme népérien de $|w|$. Pour $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$, nous obtenons l'identité

$$\ln w_1 + \ln w_2 = \ln(w_1 w_2) + 2k\pi\mathrm{i} \quad \text{pour un certain} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De même, pour $w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(w^n) = n \ln(w) + 2k\pi\mathrm{i} \quad \text{pour un certain} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par exemple

$$\ln(\mathrm{i}^3) = \ln(-\mathrm{i}) = \ln(1) + \mathrm{i}(-\pi/2) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2},$$

$$3 \ln \mathrm{i} = 3\left(\ln(1) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2},$$

où $0 = \ln(1)$ est le logarithme népérien de 1. D'où $\ln(\mathrm{i}^3) = 3 \ln \mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}$.

Le logarithme complexe permet de définir comme suit les puissances complexes.

Définition. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, z^α est défini par

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z}.$$

Par exemple, $\mathrm{i}^\mathrm{i} = e^{\mathrm{i} \ln \mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.

Remarque. Le choix de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ dans la définition de $\ln w$ n'est pas le seul possible. On pourrait par exemple choisir $[-\pi, \pi[$ ou $[0, 2\pi[$. Ces autres choix conduisent à des définitions différentes de $\ln w$ et de z^α.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Définitions

3.1.1 Définition d'une suite de nombres réels

Définition. Une *suite* de nombres réels fait correspondre à chaque entier naturel $0, 1, 2, 3, \ldots$ un nombre réel $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$

La suite elle-même est alors désignée par $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ou plus simplement par (x_n).

Par exemple, en un lieu donné, on peut mesurer la température moyenne de l'air à partir d'une certaine date. En énumérant les années à partir de l'entier $n = 0$, ceci définit la suite qui, à l'année n, fait correspondre la moyenne de cette année. Un des buts du chapitre est de développer des outils mathématiques pour explorer comment les suites évoluent sur de longues périodes.

Le nombre réel x_n est appelé le *n-ième terme* de la suite. D'autre part, le sous-ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des *éléments* de la suite. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans un ensemble E, on dit que (x_n) est une suite d'éléments de E.

Au lieu de (x_n), on peut utiliser d'autres notations comme (y_n), (u_n) ou (v_n), et il peut être commode d'utiliser les entiers positifs, ce que l'on note $(x_n)_{n\geqslant 1}$ par exemple.

Voici quelques concepts de base pour décrire des comportements possibles d'une suite.

Définitions. Une suite (x_n) est dite :

- *constante* s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $x_n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on écrit parfois $(x_n) \equiv C$) ;
- *minorée* (resp. *majorée*) s'il existe $m \in \mathbb{R}$ (resp. $M \in \mathbb{R}$) tel que $m \leqslant x_n$ (resp. $x_n \leqslant M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$; un tel nombre réel m (resp. M), s'il existe, est appelé un *minorant* (resp. *majorant*) de la suite ;
- *bornée* si elle est minorée et majorée ;
- *croissante* si $x_{n+1} \geqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- *décroissante* si $x_{n+1} \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si $x_{n+1} > x_n$ (resp. $x_{n+1} < x_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$;

- *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

La terminologie « majorée », « minorée » ou « bornée » employée pour les suites est la même que celle utilisée pour les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Ceci se justifie par le fait qu'une suite (x_n) est respectivement majorée, minorée ou bornée si et seulement si l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de ses éléments est un sous-ensemble respectivement majoré, minoré ou borné de $\mathbb{R}$.

3.1.2 Exercice VRAI/FAUX

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $n \in \mathbb{N}$ implique $|x_n| \leqslant M$.

☐ VRAI ☐ FAUX

3.1.3 Exemples

Une suite (x_n) est entièrement définie lorsque l'on connaît son terme général x_n, qui peut être donné de différentes façons :

- La suite $(x_n = \sqrt{n})$ fait correspondre à tout entier naturel n le nombre réel $\sqrt{n}$. L'ensemble des éléments de la suite est le sous-ensemble $\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, tandis que le nombre réel $\sqrt{n}$ en est le *n-ième* terme.
- Le n-ième terme est donné par $x_n = n^2$.
- Le terme x_n est le $(n+1)$-ième nombre premier.
- Le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$ peut tout aussi bien désigner l'ensemble des éléments de la suite (x_n) dont le terme général est $x_n = (-1)^n$, que celui de la suite (y_n) définie par : $y_0 = -1$ et $y_n = 1$ si $n \geqslant 1$.
- Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

Ainsi, cette suite est majorée par 1 et minorée par -1, elle est donc bornée. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien que $|x_n| \leqslant 1$.

3.1.4 Exemples de suites définies par récurrence

Exemple 1. Une suite peut être définie par récurrence, comme l'illustre la suite donnée par la formule récurrente $x_{n+1} = x_n^3 + 1$ et $x_0 = 1$.

Exemple 2. Considérons maintenant la suite (x_n) définie par récurrence comme suit :

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{3}{2}.$$

Pour illustrer que les démonstrations par récurrence (§1.1.2) sont souvent naturelles dans ce contexte, démontrons que cette suite est bornée. A priori, il n'est pas évident que l'on puisse trouver pour cette suite un minorant et un majorant. Par contre, en calculant les premiers termes de la suite, on s'aperçoit qu'ils admettent 1 comme minorant et 2 comme majorant. D'autre part, on remarque que pour tout entier naturel n, l'hypothèse $1 < x_n < 2$ implique $1 < x_{n+1} < 2$. Comme $1 < x_0 < 2$, on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 < x_n < 2$.

Exemple 3. Soit (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = 1,$$

et $P(n)$ la relation suivante : $1 < x_n < 2$. On vérifie facilement que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Mais par un simple calcul, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = 1$. Ici la méthode de démonstration par récurrence ne s'applique pas car $P(n_0)$ n'est pas vraie, où $n_0 = 0$.

Exemple 4. Considérons les deux suites (x_n) et (y_n) définies par récurrence par

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad \text{et} \quad 0 < x_0 < y_0,$$

où x_0, y_0 sont fixés. On veut démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation $P(n) : 0 < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}$ entre les éléments des deux suites est vraie. De l'hypothèse $0 < x_0 < y_0$ on déduit que

$$0 < x_0 < \sqrt{x_0\, y_0} = x_1 < \frac{x_0 + y_0}{2} = y_1 < y_0\,;$$

ce qui revient à dire que $P(1)$ est vraie. Supposons à présent que $P(n)$ soit vraie.

Alors de la même manière on obtient que

$$0 < x_n < \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} < y_n.$$

On a ainsi démontré que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Comme de plus $P(1)$ est vraie, on peut donc affirmer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}.$$

3.2 Limite d'une suite

3.2.1 Introduction

Soit (x_n) la suite définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+n}.$$

On s'aperçoit que plus n devient grand, moins les termes x_n de la suite s'écartent du nombre réel 1. On dit dans ce cas que la suite (x_n) converge vers 1 ou bien que le nombre réel 1 est la limite de la suite (x_n). Donnons à présent une définition précise de la limite d'une suite.

3.2.2 Définition de la limite d'une suite

On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels est *convergente* et admet pour *limite* le nombre réel x, ou tout simplement que la suite (x_n) *converge vers* x si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $|x_n - x| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ. Par exemple, dans la figure 3.1, x_n est dans l'intervalle $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ pour tout $n \geqslant 8$. Ainsi, pour cet $\epsilon > 0$, on peut choisir $n_0 = 8$ et obtenir $|x_n - x| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$.

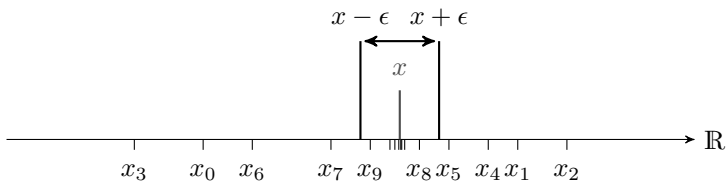


Fig. 3.1 Une suite convergente.

3.2.3 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*. Une classe importante de suites divergentes sera présentée au paragraphe 3.3.15.

3.2.4 Unicité de la limite d'une suite

Soit (x_n) une suite convergeant vers les nombres réels a et b. Alors, a et b sont égaux.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|x_n - a| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant m_0$: $|x_m - b| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $k = \max\{n_0, m_0\}$, on obtient en utilisant l'inégalité triangulaire que $|a-b| = |(a-x_k) + (x_k - b)| \leqslant |a - x_k| + |x_k - b| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. On en conclut, grâce au résultat obtenu au paragraphe 1.4.5, que $a = b$. ■

3.2.5 Exemple d'une suite convergente

Montrons que la suite (x_n) définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+n}$$

converge vers 1. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, en posant $n_0 = [1/\epsilon]$, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|x_n - 1| = \frac{1}{1+n} \leqslant \epsilon.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Remarque. Il ne faudrait pas déduire trop hâtivement de cet exemple qu'il est toujours facile de trouver la limite d'une suite, même lorsque celle-ci existe. Dans certains cas, comme nous le verrons plus tard, il est possible de démontrer qu'une suite de nombres réels est convergente sans avoir à calculer ou à connaître sa limite. D'autre part, il est souvent plus commode de prouver qu'une suite est convergente que de trouver sa limite.

3.2.6 Exemple d'une suite divergente

La suite (x_n) définie par

$$x_n = n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

diverge. Pour justifier cette affirmation, prenons $\epsilon = 1/2$ et supposons que la suite converge. Alors, il existe un nombre réel x et un entier $n_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$: $|x_n - x| \leqslant 1/2$. Par suite, en posant $p = 4n_0 + 1$ et $m = 4n_0 + 5$, on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$4 = |x_p - x_m| = |(x_p - x) + (x - x_m)| \leqslant |x_p - x| + |x - x_m| \leqslant 1/2 + 1/2 = 1.$$

Ce résultat étant impossible, on en conclut que la suite (x_n) est divergente.

3.3 Critères de convergence

3.3.1 Toute suite convergente est bornée

On constate que la suite convergente donnée au paragraphe 3.2.5 est bornée. Ceci est en fait un résultat général :

Énoncé. Toute suite convergente est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite qui converge vers x. Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $|x_n - x| \leqslant 1$. Ainsi on obtient que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |x_n| = |(x_n - x) + x| \leqslant 1 + |x|.$$

D'où, pour tout entier naturel n, on a : $|x_n| \leqslant \max\{|x_0|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$; ce qui revient à dire que la suite (x_n) est bornée. ■

Remarque. La suite du paragraphe 3.2.6 est non bornée. Ceci donne une autre manière de prouver qu'elle est divergente.

3.3.2 Exercice VRAI/FAUX

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Toute suite divergente est non bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

3.3.3 Opérations algébriques sur les suites

Considérons deux suites (x_n) et (y_n). On peut par addition, multiplication et division obtenir les nouvelles suites :

$$(z_n = x_n + y_n), \quad (u_n = x_n y_n) \quad \text{et} \quad \left(v_n = \frac{x_n}{y_n}\right).$$

Dans ce dernier cas, on suppose que pour tout entier naturel n, on a : $y_n \neq 0$. Supposons à présent que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y.

Énoncé

1) La suite $(x_n + y_n)$ admet pour limite $x + y$.
2) La suite $(x_n y_n)$ admet pour limite xy.
3) Si de plus $y \neq 0$, la suite (x_n/y_n) admet pour limite x/y.

DÉMONSTRATION

1) Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que la suite (x_n) converge vers x, il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|x_n - x| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant n_2$: $|y_m - y| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|(x_n+y_n)-(x+y)| \leqslant |x_n-x|+|y_n-y| \leqslant \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$.
2) Remarquons d'abord que la suite (x_n) est bornée, ce qui entraîne qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n : $|x_n| \leqslant M$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant m_0$:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2(1+|y|)} \quad \text{et} \quad |y_n - y| \leqslant \frac{\epsilon}{2M}.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant m_0$: $|(x_n y_n) - (xy)| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leqslant |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \leqslant M|y_n - y| + (1 + |y|)|x_n - x| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.
3) Étant donné que $\lim_{n\to+\infty} y_n = y \neq 0$, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $n \geqslant k_1$: $|y_n - y| \leqslant |y|/2$. Ainsi, on obtient que pour tout $n \geqslant k_1$: $|y_n| \geqslant |y|/2$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant k_2$:

$$|y_n - y| \leqslant \frac{\epsilon y^2}{2};$$

ce qui implique que pour tout $n \geqslant k_0 = \max\{k_1, k_2\}$:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y_n - y}{y_n y}\right| \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

D'où, en utilisant le résultat concernant le produit, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{y_n} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}.$$

■

3.3.4 Exercice VRAI/FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui convergent respectivement vers x et y. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$.

☐ VRAI ☐ FAUX

2) Si (x_n) admet une limite différente de zéro, alors il existe un entier naturel m tel que la relation $n \geqslant m$ implique $x_n \neq 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

3) Supposons que la suite somme $(z_n = x_n + y_n)$ converge. Alors (x_n) et (y_n) convergent.

☐ VRAI ☐ FAUX

4) Soit (x_n) et (y_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$. Alors, ou bien les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite, ou bien elles divergent toutes les deux.

☐ VRAI ☐ FAUX

5) Supposons que la suite somme $(z_n = x_n + y_n)$ converge. Alors, ou bien les deux suites (x_n) et (y_n) convergent, ou bien elles divergent toutes les deux.

☐ VRAI ☐ FAUX

6) Supposons que les deux suites $(u_n = x_n y_n)$ et (y_n) convergent et que de plus $\lim_{n\to+\infty} y_n \neq 0$. Alors la suite (x_n) converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

7) Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

8) Si la suite (x_n) converge vers un nombre réel $x \neq 0$ et la suite (y_n) diverge, alors la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ diverge.

☐ VRAI ☐ FAUX

9) Si la suite (x_n) converge vers 0 et la suite (y_n) diverge, alors la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ diverge.

☐ VRAI ☐ FAUX

3.3.5 Limite d'une suite dont le terme général est le quotient de deux polynômes

Commençons par donner deux exemples :

1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - n + 4}{4n^3 + 2n^2 - 1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(2 - n^{-2} + 4n^{-3}\right)}{n^3\left(4 + 2n^{-1} - n^{-3}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - n^{-2} + 4n^{-3}}{4 + 2n^{-1} - n^{-3}} \\ &= \frac{2 - \lim_{n\to+\infty} n^{-2} + 4\lim_{n\to+\infty} n^{-3}}{4 + 2\lim_{n\to+\infty} n^{-1} - \lim_{n\to+\infty} n^{-3}} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 2}{2n^3 + 3n + 1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1 - 2n^{-2}\right)}{n^3\left(2 + 3n^{-2} + n^{-3}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{-1} \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - 2n^{-2}}{2 + 3n^{-2} + n^{-3}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{-1} \frac{1 - 2\lim_{n\to+\infty} n^{-2}}{2 + 3\lim_{n\to+\infty} n^{-2} + \lim_{n\to+\infty} n^{-3}} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Le même raisonnement conduit à l'énoncé général suivant.

Énoncé. Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies respectivement par

$$x_n = a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

et

$$y_n = b_0 + b_1 n + \ldots + b_q n^q \quad \text{avec} \quad b_q \neq 0.$$

De plus, on suppose que pour tout entier naturel n, on a : $y_n \neq 0$. Alors,

- si $p < q$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$;
- si $p = q$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p}{b_q}$;

- si $p > q$, la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ diverge.

DÉMONSTRATION. Considérons les trois suites auxiliaires (u_n), (v_n) et (z_n) définies respectivement par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \ldots + a_p \quad \text{et} \quad u_0 = a_0 \\ v_n &= \frac{b_0}{n^q} + \frac{b_1}{n^{q-1}} + \ldots + b_q \quad \text{et} \quad v_0 = b_0 \\ z_n &= n^{p-q} \quad \text{et} \quad z_0 = 1. \end{aligned}$$

On obtient immédiatement que pour tout entier naturel n :

$$\frac{x_n}{y_n} = z_n \frac{u_n}{v_n}.$$

D'autre part,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0.$$

On est maintenant en mesure de démontrer les résultats de ce paragraphe.

- Si $p < q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ et l'on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0\,;$$

- si $p = q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$ et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q}\,;$$

- si $p > q$, la suite (z_n) diverge. Comme d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0,$$

on obtient que la suite $(x_n/y_n = z_n u_n/v_n)$ diverge.

■

3.3.6 Conservation des relations d'ordre

Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui convergent respectivement vers x et y et supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n \geqslant y_n$. Alors, $x \geqslant y$.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x < y$. Alors, le nombre réel $\epsilon = (y - x)/4$ est positif ; par conséquent, il existe un entier $k_0 \geqslant n_0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$|x_k - x| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad |y_k - y| \leqslant \epsilon.$$

Ceci implique

$$x_k \leqslant x + \epsilon \quad \text{et} \quad y_k \geqslant y - \epsilon$$

pour tout $k \geqslant k_0$. Par ailleurs $x + \epsilon < y - \epsilon$ et donc

$$x_k \leqslant x + \epsilon < y - \epsilon \leqslant y_k$$

pour tout $k \geqslant k_0$. Ce résultat est impossible puisque par hypothèse, on a : $x_k \geqslant y_k$. On en conclut que $x \geqslant y$. ■

Remarque. En considérant le cas particulier $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que si (y_n) converge vers y et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y_n \leqslant x$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $y \leqslant x$. De même si (x_n) converge vers x et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geqslant y$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $x \geqslant y$.

3.3.7 Exercice VRAI/FAUX

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui convergent respectivement vers x et y et supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n < y_n$. Alors $x < y$.

☐ VRAI ☐ FAUX

3.3.8 Exemples : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ si $a \in]-1, 1[$

1) Soit a un nombre réel positif. Alors, la suite (y_n) définie par

$$y_n = \sqrt[n]{a} \text{ et } y_0 \text{ quelconque,}$$

converge vers 1.

2) La suite (x_n) définie par

$$x_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

converge vers 1.

3) La suite (z_n) définie par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_n = a^n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

converge vers 0 si $-1 < a < 1$.

DÉMONSTRATION

1) Pour démontrer le résultat, nous allons considérer les trois cas suivants $a = 1$, $a > 1$ et $a < 1$.
Si $a = 1$, le résultat est évident.
Si $a > 1$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|1 - \sqrt[n]{a}| = \frac{|1 - a|}{1 + a^{1/n} + \ldots + a^{(n-1)/n}} \leqslant \frac{|1 - a|}{n}.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque, et posons

$$n_0 = [|1 - a|/\epsilon] + 1.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|1 - \sqrt[n]{a}| \leqslant \frac{|1-a|}{n} \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi démontré que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.

Supposons à présent que $a < 1$. Alors, en posant

$$b = \frac{1}{a}$$

et en considérant la suite auxiliaire (u_n) définie par

$$u_n = \sqrt[n]{b} \quad \text{et} \quad u_0 = 1,$$

on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Étant donné que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$y_n = \frac{1}{u_n},$$

on en conclut immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.

2) Vérifions d'abord que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 1$. Lorsque $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons obtenu ci-dessus

$$|1 - \sqrt[n]{a}| \leqslant \frac{|1-a|}{n}.$$

En choisissant $a = \sqrt{n}$, ceci donne

$$\left|1 - \sqrt[n]{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{|1-\sqrt{n}\,|}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} = 1/\sqrt{n}$$

pour $n \geqslant 1$. Étant donné $\epsilon > 0$, on obtient

$$\left|1 - \sqrt[n]{\sqrt{n}}\right| \leqslant 1/\sqrt{n} \leqslant \epsilon$$

pour tout entier $n \geqslant [\epsilon^{-2}] + 1$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{x_n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

3) Soit $n \geqslant 1$. En ne retenant que deux termes dans la formule du binôme (§ 1.1.3), on obtient

$$|a^{-1}|^n = \left((|a|^{-1} - 1) + 1\right)^n \geqslant 1 + n(|a|^{-1} - 1)$$

et donc

$$|a|^n \leqslant \left(1 + n(|a|^{-1} - 1)\right)^{-1}.$$

Étant donné $\epsilon > 0$, choisissons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n_0 \geqslant \frac{\epsilon^{-1} - 1}{|a|^{-1} - 1}$$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|a|^n \leqslant \big(1 + n(|a|^{-1} - 1)\big)^{-1} \leqslant \big(1 + n_0(|a|^{-1} - 1)\big)^{-1} \leqslant \epsilon,$$

comme voulu.

■

3.3.9 Exercice VRAI/FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Soit (x_n) une suite qui converge vers x. Alors, la suite $(y_n = |x_n|)$ converge vers $|x|$.

☐ VRAI ☐ FAUX

2) Soient une suite (x_n) et $x \in \mathbb{R}$. Si la suite $(y_n = |x_n|)$ converge vers $|x|$, alors (x_n) converge vers x.

☐ VRAI ☐ FAUX

3) Soit une suite (x_n) telle que la suite $(y_n = |x_n|)$ converge vers 0. Alors (x_n) converge vers 0.

☐ VRAI ☐ FAUX

3.3.10 Théorème des deux gendarmes pour les suites

Soit (x_n), (u_n) et (v_n) trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \in \mathbb{R}$;
- il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \geqslant k$: $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$.

Alors, la suite (x_n) converge vers a.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$, il existe un entier $n_0 \geqslant k$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $v_n - a \leqslant \epsilon$ et $u_n - a \geqslant -\epsilon$. Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$-\epsilon \leqslant u_n - a \leqslant x_n - a \leqslant v_n - a \leqslant \epsilon.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

■

3.3.11 Exemple

Montrons que la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{2^n}{n\,!} \quad (\text{par convention } 0\,! \;=\; 1),$$

admet le nombre réel zéro pour limite. Pour cela, considérons la suite auxiliaire (v_n) définie par

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{si} \quad n \;\geqslant\; 3 \quad \text{et} \quad v_n = 2 \;\; \text{si} \;\; n \in \{0, 1, 2\}.$$

En remarquant que pour tout entier $n \geqslant 3 \;:\; n\,! \geqslant 3^{n-2}$, on obtient que pour tout $n \geqslant 3$:

$$0 \leqslant x_n \leqslant 9v_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en conclut, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3.3.12 Corollaire

Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui converge vers zéro. Alors, la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ converge elle aussi vers zéro.

DÉMONSTRATION. Étant donné que la suite (x_n) est bornée, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout entier naturel $n \;:\; |x_n| \;\leqslant M$. Ainsi, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \;\; |u_n| = |x_n y_n| \;\leqslant M|y_n|.$$

On en déduit immédiatement, en utilisant le théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$; ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

3.3.13 Une méthode d'étude d'une suite définie par récurrence

Dans cet exemple, nous allons donner une méthode que l'on peut souvent utiliser pour trouver un candidat pour la limite d'une suite définie par récurrence et étudier sa convergence. Il s'agit d'abord de déterminer un nombre réel « candidat » comme limite (ou éventuellement plusieurs candidats) et d'étudier ensuite la convergence de la suite vers ce candidat (ou chacun des candidats).

Pour cela, considérons la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

Un simple raisonnement par récurrence démontre que pour tout entier naturel $n \;:\; x_n \geqslant 2$. Il nous faut à présent trouver un candidat qui puisse être la limite de cette suite, sans pour autant savoir si cette limite existe ou non. Pour cette

raison, supposons que la limite de cette suite existe et notons-la par x. Alors, x doit obligatoirement satisfaire les relations

$$x = 2 + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \geqslant 2.$$

On obtient ainsi comme unique candidat le nombre réel $x = 1 + \sqrt{2}$. Reste à démontrer que la suite converge bien vers ce nombre. Dans ce but, remarquons d'abord que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_n - x| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x_{n-1} - x|}{x_{n-1}x} \leqslant \frac{|x_{n-1} - x|}{4} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque, et posons $n_0 = [1/\epsilon] + 1$. Ainsi, en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$: $|x_n - x| \leqslant \epsilon$. Ce dernier résultat nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x = 1 + \sqrt{2}$.

Un exemple où la méthode ne s'applique pas. La méthode pour trouver un candidat comme limite d'une suite ne peut pas s'appliquer à toutes les suites dont le terme général est donné par une formule récurrente. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

Néanmoins, cette suite est convergente (§ 3.7.3).

Un exemple où la méthode montre qu'une suite diverge. Par contre, cette méthode peut, dans certains cas, être utilisée pour démontrer qu'une suite est divergente. Par exemple, la suite (x_n) définie par

$$x_n = x_{n-1}^2 + 1 \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

diverge, puisque l'équation $x = x^2 + 1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

3.3.14 Règle de d'Alembert pour les suites

Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle le nombre réel

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \text{ existe.}$$

Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers zéro, tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\rho < 1$. Alors, $0 < (1 + \rho)/2 < 1$; ce qui implique (§ 3.3.8)

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 + \rho}{2} \right)^n = 0.$$

Étant donné que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \rho,$$

il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant m$:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho\right| \leqslant \frac{1-\rho}{2}$$

et donc

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leqslant \rho + \frac{1-\rho}{2} = \frac{1+\rho}{2}\,.$$

D'où, pour tout $n \geqslant m$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |x_n| &= \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{x_{m+1}}{x_m}\right| \cdot |x_m| \\ &\leqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m|. \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant la suite auxiliaire (y_n) définie par

$$y_n = \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m| \ \text{ si } n \geqslant m \quad \text{et} \quad y_n = |x_n| \ \text{ si } n \in \{0, \ldots, m-1\},$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant |x_n| \leqslant y_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, on en déduit, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$; ce qui revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Supposons à présent que $\rho > 1$. De manière analogue, on démontre qu'il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \geqslant k$:

$$|x_n| \geqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-k} |x_k|.$$

Comme $|x_k| \neq 0$ et $(1+\rho) > 2$, la suite (x_n) n'est pas bornée ; ce qui implique qu'elle est divergente. ■

Remarque. Si (x_n) est une suite de nombres réels non nuls telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1,$$

on ne peut rien dire à priori sur sa convergence. Par exemple, la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{1}{1+n}$$

converge vers zéro, tandis que la suite non bornée $(z_n = (n+1)^2)$ diverge.

3.3.15 Limites infinies

Parmi toutes les suites divergentes, nous distinguerons une espèce importante :

Nous dirons qu'une suite (x_n) *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si à tout nombre réel $A > 0$, on peut associer un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n \geqslant A$ (resp. $x_n \leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel A.

3.3.16 Opérations algébriques sur les limites infinies

Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels.

Addition. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et la suite (y_n) est minorée (resp. majorée), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Produit. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $|y_n| \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant n_1$.
Si $x_n y_n > 0$ (resp. $x_n y_n < 0$) pour tout n suffisamment grand, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Division. Si la suite (x_n) est bornée, $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = 0$.

Division (bis). Supposons que $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $|x_n| \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant n_1$.
Si $x_n/y_n > 0$ (resp. $x_n/y_n < 0$) pour tout n suffisamment grand, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n/y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Gendarme. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y_n \geqslant x_n$ (resp. $y_n \leqslant x_n$) pour tout $n \geqslant k$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

D'Alembert. Si $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1}/x_n| = +\infty$, alors la suite (x_n) diverge.

3.3.17 Quelques formes indéterminées

Il y a des situations où on ne peut rien dire à priori sur la limite d'une suite (z_n) définie à partir de deux suites (x_n) et (y_n). Il faut alors étudier chaque cas séparément. Voici quelques-unes de ces situations.

Forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, $z_n = x_n + y_n$ pour $n \geqslant 0$.

Forme indéterminée $0 \cdot \infty$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (ou $-\infty$), $z_n = x_n y_n$ pour $n \geqslant 0$.

Forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (ou $-\infty$), $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (ou $-\infty$), $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n/y_n$ pour $n \geqslant 0$.

Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, $y_n \neq 0$ et $z_n = x_n/y_n$ pour $n \geqslant 0$.

Les exemples suivants illustrent la diversité des cas possibles.

Forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$

1) $(x_n = \sqrt{n})$, $(y_n = -\sqrt{1+n})$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{1+n}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{1+n}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{1+n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n - (1+n)}{\sqrt{n} + \sqrt{1+n}} = 0.\end{aligned}$$

2) $(u_n = n + n^2)$, $(v_n = -n^2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

3) $(x_n = n + n\sin^2(n\pi/4))$, $(y_n = -n - n\cos^2(n\pi/4))$, $(x_n + y_n = -n\cos(n\pi/2))$ n'admet aucune limite finie ou infinie.

Forme indéterminée $0 \cdot \infty$

1) $\left(x_n = \frac{1}{2n+1}\right)$, $(y_n = 2n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 1$.

2) $\left(x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)$, $(y_n = -n-1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$.

3) $\left(x_n = \frac{1+\cos(n\pi/3)}{1+n}\right)$, $(y_n = 1+n)$, $(x_n y_n = 1 + \cos(n\pi/3))$ n'admet aucune limite finie ou infinie.

3.4 Suites monotones

3.4.1 Convergence des suites monotones

- Toute suite (x_n) croissante (resp. décroissante) qui est majorée (resp. minorée) converge vers $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$).
- Toute suite croissante (resp. décroissante) qui n'est pas majorée (resp. minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite croissante et majorée, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, si $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, on sait qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $0 \leqslant x - x_{n_0} \leqslant \epsilon$; ce qui implique, du fait que la suite (x_n) est croissante, que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $0 \leqslant x - x_n \leqslant x - x_{n_0} \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que la suite (x_n) converge vers x.

Soit (y_n) une suite décroissante et minorée. On montre de même qu'elle converge vers $\inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Soit (u_n) une suite croissante qui ne soit pas majorée, et soit A un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un entier $m_0 > 0$ tel que $u_{m_0} \geqslant A$; ce qui implique que pour tout entier $n \geqslant m_0$: $u_n \geqslant A$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit (v_n) une suite décroissante qui ne soit pas minorée. Alors, la suite $(w_n = -v_n)$ est une suite croissante qui n'est pas majorée, elle tend donc vers $+\infty$; ce qui nous permet d'affirmer que la suite (v_n) tend vers $-\infty$. ■

3.4.2 Définition du nombre réel irrationnel e

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

Elle a l'interprétation suivante (« intérêts composés »). Un petit épargnant possède $x_0 = 1$ franc en début d'année. La banque divise l'année en n périodes et, à la fin de chaque période, verse un intérêt égal au n-ième de la somme totale en dépôt. À la fin de l'année, l'épargnant possède alors un avoir de x_n francs.

Par exemple, si $n = 2$, la banque verse $1/2$ franc après 6 mois, et le montant total s'élève alors à 1.5 franc. À la fin de l'année, la banque verse encore la moitié de 1.5 franc, ce qui fait un total de $x_2 = 1.5 + \frac{1}{2} \cdot 1.5 = (1.5)^2 = 2.25$ francs.

Que peut-on dire de la suite (x_n) lorsque n devient grand ? En particulier converge-t-elle ?

Montrons que cette suite est majorée et strictement croissante. Clairement $1 = x_0 < 2 = x_1 < 2.25 = x_2$. En utilisant le binôme de Newton (voir le paragraphe 1.1.3), on obtient que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)\cdot n}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n-k+1}{n} \frac{n-k+2}{n} \cdots \frac{n}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-k}{n}\right) \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{1\,!} + \ldots + \frac{1}{k\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!}.
\end{aligned}$$

En remarquant que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k\,!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

on en déduit que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 3 \ ;$$

ce qui entraîne que la suite (x_n) est majorée par 3. Reste à démontrer qu'elle est strictement croissante. En utilisant le calcul précédent, on obtient que pour

tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-k}{n}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-k}{n+1}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-k}{n+1}\right) = x_{n+1} ; \end{aligned}$$

ce qui implique que la suite (x_n) est strictement croissante. On a ainsi démontré que la suite (x_n) est à la fois croissante et majorée, elle est donc convergente. Sa limite jouant un rôle très important en analyse, on la désigne par la lettre e. Le nombre réel e est un nombre irrationnel dont la valeur approchée est 2.71828. . ..

3.4.3 Convergence de deux suites monotones dont la différence converge vers zéro

Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante telle que $\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$. Alors,

- pour tout entier naturel n : $x_0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant y_0$;
- les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

DÉMONSTRATION. Étant donné que pour tout entier naturel n : $x_{n+1} \geqslant x_n$, $y_{n+1} \leqslant y_n$ et

$$(y_{n+1} - x_{n+1}) - (y_n - x_n) = (y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n) \leqslant 0,$$

la suite $(z_n = y_n - x_n)$ est une suite décroissante dont la limite vaut zéro ; ce qui implique (§ 3.4.1) que pour tout entier $n \geqslant 0$: $z_n \geqslant 0$. Ainsi, la première assertion est vérifiée.

Étant croissante et majorée, la suite (x_n) converge (§ 3.4.1) et, étant décroissante et minorée, la suite (y_n) converge aussi. On obtient alors immédiatement que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite. ■

3.4.4 Autre définition possible du nombre e

Considérons la suite (y_n) définie par

$$y_n = 1 + \frac{1}{1\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} \quad \text{et} \quad y_0 = 1.$$

Nous allons démontrer que cette suite converge vers le nombre irrationnel e. Au paragraphe 3.4.2, nous avons obtenu

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-k}{n}\right) \leqslant e$$

pour tout entier $n \geqslant 2$, et le membre à gauche tend vers e lorsque n tend vers $+\infty$.

Il résulte de l'égalité que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant y_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

Montrons maintenant que $y_m \leqslant e$ pour tout entier $m \geqslant 2$. Fixons-nous arbitrairement un entier $m \geqslant 2$. La suite (ν_n) définie par

$$\nu_n = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-k}{n}\right)$$

pour $n \geqslant 1$ et $\nu_0 = 1$, converge vers y_m. En remarquant que pour tout $n \geqslant m$:

$$\nu_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-k}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e,$$

on obtient bien que $y_m = \lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n \leqslant e$.

Ainsi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant y_n \leqslant e$$

pour tout entier $n \geqslant 2$ et le théorème des deux gendarmes permet de conclure que (y_n) converge vers e.

3.5 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée

3.5.1 Définition de la limite supérieure d'une suite bornée

Soit (x_n) une suite bornée. À partir de cette suite, on définit une nouvelle suite (y_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$y_n = \sup\{x_k \,:\, k \geqslant n\}.$$

La suite (y_n) ainsi obtenue est une suite décroissante et bornée, elle est donc convergente. Par définition, le nombre réel $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ est appelé *limite supérieure* de la suite (x_n). On écrit alors, $y = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exemple. Considérons la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$, et observons que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est décroissante. Alors

$$y_n = \sup\{x_k \,:\, k \geqslant n\} = \sup\left\{(-1)^k + \frac{1}{k+1} \,:\, k \text{ pair}, k \geqslant n\right\}$$

vaut $y_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ si n est pair et $y_n = 1 + \frac{1}{n+2}$ si n est impair. D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 1.$$

Voir la figure 3.2.

3.5.2 Définition de la limite inférieure d'une suite bornée

Soit (x_n) une suite bornée. À partir de cette suite, on définit une nouvelle suite (z_n) en posant pour tout entier naturel n :

$$z_n = \inf \{x_k \,:\, k \geqslant n\}\,.$$

La suite (z_n) ainsi obtenue est une suite croissante et bornée, elle est donc convergente. Par définition, le nombre réel $z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ est appelé *limite inférieure* de la suite (x_n). On écrit alors, $z = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exemple. Considérons de nouveau la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$, et observons que la suite décroissante $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ converge vers 0. Alors

$$z_n = \inf \{x_k \,:\, k \geqslant n\} = \inf \left\{-1 + \frac{1}{k+1} \,:\, k \text{ impair}, k \geqslant n\right\} = -1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = -1.$$

Voir également la figure 3.2.

Fig. 3.2

3.5.3 Remarque

Si (x_n) est une suite bornée, la suite $(y_n = -x_n)$ satisfait les deux relations suivantes :

$$\limsup_{n\to+\infty} y_n = -\liminf_{n\to+\infty} x_n$$
$$\liminf_{n\to+\infty} y_n = -\limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

3.5.4 Caractérisation des suites convergentes

Une suite bornée (x_n) converge vers le nombre réel x si et seulement si $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite (x_n) converge vers x et soit (z_n) la suite définie par

$$z_n = \inf\{x_k \,:\, k \geqslant n\}.$$

Nous allons d'abord démontrer que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, on sait qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $k \geqslant n_0 : x_k \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on obtient ainsi

$$z_n = \inf\{x_k \,:\, k \geqslant n\} \in [x-\epsilon, x+\epsilon].$$

Ceci entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$, autrement dit, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. De manière analogue, on montre que $x = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Maintenant, supposons que $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. En posant pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$z_n = \inf\{x_k \,:\, k \geqslant n\} \quad \text{et} \quad y_n = \sup\{x_k \,:\, k \geqslant n\},$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N} \,:\, z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$. Comme d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$, on en conclut immédiatement, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. ■

3.6 Sous-suites

3.6.1 Définition d'une sous-suite

Rappelons qu'une suite $(x_n) = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels fait correspondre à chaque entier naturel $0, 1, 2, 3, \ldots$ un nombre réel $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$

Étant donné une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, il est parfois intéressant de ne considérer que les indices pairs, c'est-à-dire, considérer la suite qui fait correspondre à chaque entier naturel $0, 1, 2, 3, \ldots$ le nombre réel $x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots$ Cette nouvelle suite $(x_{2k})_{k\geqslant 0}$ s'appelle une *sous-suite* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

De même, il est possible de ne considérer que les indices impairs, c'est-à-dire, la suite qui fait correspondre à chaque entier naturel $0, 1, 2, 3, \ldots$ le nombre réel $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots$ Cette nouvelle suite $(x_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est un autre exemple de sous-suite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition. Une *sous-suite* d'une suite (x_n) est une suite (x_{n_k}) qui à chaque valeur $0, 1, 2, 3, \ldots$ de l'entier naturel k fait correspondre le nombre réel

$$x_{n_0},\ x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots$$

où (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels.

Une sous-suite d'une suite (x_n) est aussi appelée une *suite partielle* ou encore une *suite extraite*.

3.6.2 Convergence d'une sous-suite

Si (x_n) est une suite qui converge vers x, alors toute sous-suite (x_{n_k}) de la suite (x_n) converge vers x.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que la suite (x_n) converge vers x, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0 : |x_n - x| \leqslant \epsilon$. En remarquant que la relation $k \geqslant n_0$ implique $n_k \geqslant n_0$, on obtient que pour tout entier $k \geqslant n_0 : |x_{n_k} - x| \leqslant \epsilon$. ■

3.6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Énoncé. De toute suite bornée (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer le théorème, définissons une sous-suite (x_{n_k}) par récurrence comme suit. On pose $n_0 = 0$ et, si $k \geqslant 1$ et $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ est déjà défini, on choisit $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$x_{n_k} \geqslant \sup\{x_n : n > n_{k-1}\} - \frac{1}{k}\,.$$

Prouvons que la sous-suite (x_{n_k}) converge vers $y = \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

Soit $\epsilon > 0$ et choisissons $N \geqslant 1$ tel que

$$\frac{1}{N} \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \sup\{x_n : n \geqslant N\} \leqslant y + \epsilon.$$

Ceci est possible car la suite (y_j) définie par $y_j = \sup\{x_n : n \geqslant j\}$ pour $j \in \mathbb{N}$ est décroissante et converge vers y. Pour tout $k \geqslant N \geqslant 1$, on obtient

$$x_{n_k} \geqslant \sup\{x_n : n > n_{k-1}\} - \frac{1}{k} \geqslant y - \frac{1}{N} \geqslant y - \epsilon,$$

$n_k \geqslant N$ et

$$x_{n_k} \leqslant \sup\{x_n : n \geqslant N\} \leqslant y + \epsilon.$$

Ainsi $|x_{n_k} - y| \leqslant \epsilon$ pour tout $k \geqslant N$. ■

Donnons deux exemples.

1) Considérons la suite bornée et divergente $(x_n = (-1)^n)$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous-suite qui converge. On peut poser par exemple $n_k = 2k$ et obtenir la sous-suite (x_{2k}) qui converge vers 1 (en fait $x_{2k} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).
   En posant $n_k = 2k + 1$, on obtient la sous-suite (x_{2k+1}) qui converge vers -1 (en fait $x_{2k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).
   Par contre, en posant $n_k = 5k$, on obtient une sous-suite qui diverge.

2) Considérons la suite bornée (x_n) définie par

$$x_n = \cos(n\pi/3) + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous-suite qui converge. En posant par exemple $n_k = 6k$, on obtient la sous-suite

$$(x_{6k}) = \left(1 + \frac{1}{6k+1}\right)$$

qui converge vers 1.

En posant $n_k = 6k+1$, on obtient la sous-suite

$$(x_{6k+1}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6k+2}\right)$$

qui converge vers $1/2$.

Par contre, en posant $n_k = 3k$, on obtient la sous-suite $\left((-1)^k + \frac{1}{3k+1}\right)$ qui diverge.

3.6.4 Remarques

- Dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass, on a montré plus précisément qu'il existe une sous-suite qui converge vers $\limsup_{n\to+\infty} x_n$. De même, on peut montré qu'il existe une sous-suite qui converge vers $\liminf_{n\to+\infty} x_n$. Plus généralement, pour tout sous-suite (x_{n_k}), on a

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leqslant \liminf_{k\to+\infty} x_{n_k} \leqslant \limsup_{k\to+\infty} x_{n_k} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

comme on le voit à partir des définitions de la limite inférieure et de la limite supérieure.
- Le résultat du théorème de Bolzano-Weierstrass peut être mis en défaut si l'on ne suppose pas que la suite est bornée. Par exemple, la suite (x_n) définie par

$$x_n = (-1)^n n$$

n'admet aucune sous-suite convergente.
- Néanmoins, une suite non bornée peut très bien posséder une sous-suite convergente. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la suite non bornée (x_n) définie par

$$x_{2n} = n \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = 0.$$

Cette suite admet la suite (x_{2k+1}) comme sous-suite convergente.

3.6.5 Une classe particulière de suites

Énoncé. Soit une suite (x_n) de nombres réels ayant la propriété suivante. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et j suites strictement croissantes d'entiers naturels

$$(n_{1,k}),\ (n_{2,k}),\ \ldots,\ (n_{j,k})$$

telles que

- les j sous-suites $(x_{n_{1,k}}),\ (x_{n_{2,k}}),\ \ldots,\ (x_{n_{j,k}})$ convergent,
- $\mathbb{N} = \{n_{1,k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n_{2,k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \ \ldots \cup \{n_{j,k} : k \in \mathbb{N}\}$.

Alors la suite (x_n) est bornée et $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ (resp. $\liminf_{n\to+\infty} x_n$) vaut le maximum (resp. minimum) des j valeurs suivantes :

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_{1,k}}\,,\ \lim_{k\to+\infty} x_{n_{2,k}}\,,\ \ldots,\ \lim_{k\to+\infty} x_{n_{j,k}}\,.$$

Par exemple, si $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors (x_n) est de la forme ci-dessus avec $j = 2$, $(x_{n_{1,k}}) = (x_{2k})$ et $(x_{n_{2,k}}) = (x_{2k+1})$, ces deux sous-suites convergeant respectivement vers 1 et -1. D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n = -1.$$

DÉMONSTRATION. Les sous-suites $(x_{n_{1,k}}),\ (x_{n_{2,k}}),\ \ldots,\ (x_{n_{j,k}})$ étant convergentes, elles sont bornées. Comme

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_{n_{1,k}} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n_{2,k}} : k \in \mathbb{N}\} \cup \ \ldots \cup \{x_{n_{j,k}} : k \in \mathbb{N}\},$$

il en résulte que la suite (x_n) est aussi bornée.

Notons par $\ell_1\,,\ \ldots,\ \ell_j$ les limites des j sous-suites et soit $\epsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$|x_{n_{1,k}} - \ell_1| \leqslant \epsilon,\ |x_{n_{2,k}} - \ell_2| \leqslant \epsilon,\ \ldots,\ |x_{n_{j,k}} - \ell_j| \leqslant \epsilon.$$

De plus il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{x_p : p \geqslant n_0\} \subset \{x_{n_{1,k}} : k \geqslant k_0\} \cup \{x_{n_{2,k}} : k \geqslant k_0\} \cup \ \ldots \cup \{x_{n_{j,k}} : k \geqslant k_0\}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sup\{x_p : p \geqslant n\} \leqslant \max\{\ell_1 + \epsilon,\ \ldots,\ \ell_j + \epsilon\}.$$

Comme, pour tout $n \geqslant n_0$, il existe $k \geqslant k_0$ satisfaisant

$$n_{1,k} \geqslant n,\ n_{2,k} \geqslant n,\ \ldots,\ n_{j,k} \geqslant n,$$

on a aussi

$$\sup\{x_p : p \geqslant n\} \geqslant \max\{x_{n_{1,k}}\,,\ \ldots,\ x_{n_{j,k}}\} \geqslant \max\{\ell_1 - \epsilon,\ \ldots,\ \ell_j - \epsilon\}.$$

Ceci montre que $\lim_{n\to+\infty} \sup\{x_p : p \geqslant n\} = \max\{\ell_1\,,\ \ldots,\ \ell_j\}$, c'est-à-dire $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \max\{\ell_1\,,\ \ldots,\ \ell_j\}$.

La preuve pour la limite inférieure est similaire. ■

3.7 Suites de Cauchy

3.7.1 Introduction

Dans la définition de convergence du paragraphe 3.2.2, la limite intervient, ce qui peut créer des difficultés lorsqu'il s'agit d'étudier la convergence d'une suite sans que l'on ait d'idée de ce que pourrait être la limite. Ceci peut être le cas lorsque, par exemple, la suite est définie récursivement et qu'aucune des méthodes vues jusqu'à présent ne permet de montrer sa convergence et de calculer sa limite.

La définition de *suite de Cauchy* que nous introduisons ci-dessous n'utilise que les termes de la suite elle-même. Un résultat important que nous verrons au paragraphe 3.7.4 affirme que les suites de nombres réels convergentes sont exactement les suites de Cauchy. Une approche possible pour étudier la convergence d'une suite consiste ainsi à vérifier qu'elle satisfait à la définition d'une suite de Cauchy.

3.7.2 Définition d'une suite de Cauchy

Définition. On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels est une *suite de Cauchy* si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que les relations $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$ impliquent $|x_n - x_m| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ.

Remarque. Soient $\epsilon > 0$ et n_0 comme précédemment. Alors $\{x_n : n \geqslant n_0\} \subset [x_{n_0} - \epsilon, x_{n_0} + \epsilon]$ et l'intervalle $[a, b]$ défini par

$$a = \inf\{x_n : n \geqslant n_0\} \quad \text{et} \quad b = \sup\{x_n : n \geqslant n_0\}$$

est de longueur $\leqslant \epsilon$. De plus $[a, b]$ contient x_n pour chaque $n \geqslant n_0$.

Ainsi la définition de suite de Cauchy peut être reformulée comme suit. On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels est une suite de Cauchy si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 et un intervalle fermé borné $I \neq \emptyset$ de longueur $\leqslant \epsilon$ tels que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n \in I$.

Dans la figure 3.3, pour la valeur de ϵ représentée, on peut choisir l'intervalle I indiqué et $n_0 = 9$.

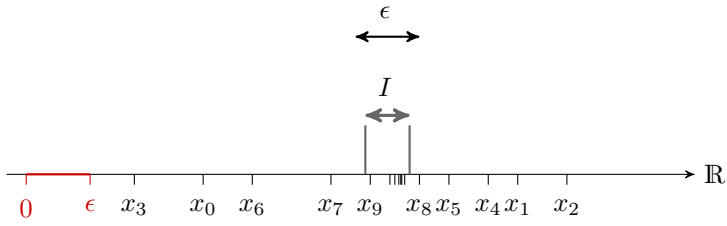


Fig. 3.3

3.7.3 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par la formule récurrente

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

Montrons que cette suite est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers $2/3$. En premier lieu, on constate par un simple raisonnement par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$x_n - x_{n-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}.$$

Il en résulte immédiatement que pour tout couple d'entiers p et q vérifiant $p > q \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &\leqslant |x_p - x_{p-1}| + |x_{p-1} - x_{p-2}| + \ldots + |x_{q+1} - x_q| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2^q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-q-1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{q-1}} \leqslant \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et posons

$$n_0 = [1/\epsilon] + 1.$$

Par suite, on obtient que pour tout couple d'entiers $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$:

$$|x_p - x_q| \leqslant \max\{1/q,\ 1/p\} \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi établi que la suite (x_n) est une suite de Cauchy. Reste à démontrer que sa limite vaut $2/3$. En écrivant le terme général de la suite (x_n) de la manière suivante

$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right), \end{aligned}$$

on obtient immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2/3$.

Cet exemple n'est pas un cas particulier, comme nous allons le démontrer maintenant.

3.7.4 Caractérisation d'une suite de Cauchy

Une suite (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Supposons que (x_n) soit une suite de Cauchy. Alors, il existe un entier naturel r tel que pour tout $n \geqslant r$: $|x_n - x_r| \leqslant 1$; ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 0$: $|x_n| \leqslant \max\{1 + |x_r|, |x_0|, \ldots, |x_{r-1}|\}$. Autrement dit, la suite (x_n) est bornée.

Montrons que (x_n) converge vers $y = \limsup_{n\to+\infty} x_n$. Rappelons que $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$, où $y_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$.

Soit $\epsilon > 0$. Considérons l'entier naturel n_0 donné par la définition de suite de Cauchy et posons

$$a = \inf\{x_k : k \geqslant n_0\} \quad \text{et} \quad b = \sup\{x_k : k \geqslant n_0\}.$$

Alors $b - a \leqslant \epsilon$ et $x_k \in [a, b]$ pour tout $k \geqslant n_0$.

Pour $n \geqslant n_0$, b est un majorant de $\{x_k : k \geqslant n\}$ et donc $y_n \leqslant b$. De plus $x_k \geqslant a$ pour tout $k \geqslant n$ et donc $y_n \geqslant a$. Comme $a \leqslant y_n \leqslant b$ pour tout $n \geqslant n_0$, on a aussi $a \leqslant y \leqslant b$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $x_n \in [a, b]$, $y \in [a, b]$ et ainsi $|x_n - y| \leqslant \epsilon$. On a montré que (x_n) converge vers $y = \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

Supposons à présent que la suite (x_n) converge vers le nombre réel x. Alors, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2} ;$$

ce qui implique que pour tout couple d'entiers $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$,

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Autrement dit, la suite (x_n) est une suite de Cauchy. ■

3.7.5 Remarques

Le fait qu'une suite de Cauchy soit convergente, nous fournit un critère pour démontrer qu'une suite converge sans avoir à trouver sa limite.

Soit (x_n) une suite vérifiant la propriété suivante : pour tout entier naturel k fixé : $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+k} - x_n) = 0$. Peut-on en conclure que cette suite est une suite de Cauchy ?

La réponse à cette question est non. Pour la justifier, il nous suffit de considérer la suite (x_n) définie par : $x_n = \sqrt{n}$. Cette suite vérifie bien la propriété ci-dessus ; mais n'étant pas bornée, elle diverge. Elle ne peut donc être une suite de Cauchy.

3.8 Exercices

3.8.1 En utilisant la définition de la limite d'une suite (§ 3.2.2), montrer que

1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{3n^2+1} = 0$ 2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+1}{7n^2+5} = \dfrac{2}{7}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^2+3)}{\sqrt{n+1}} = 0$ 4) $\lim_{n\to+\infty} \left(n \cdot \sin \dfrac{1}{n^2}\right) = 0.$

3.8.2 Calculer la limite des suites définies par

1) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}{2}$ 2) $x_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$ et $x_0 = 0$

3) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $x_0 = 0$ 4) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ et $x_0 = 1.$

3.8.3 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4 : 2^n \geqslant n^3/24$. En déduire la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = n^2/2^n$.

3.8.4 Soit (x_n) une suite convergeant vers l. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

converge elle aussi vers l. En donnant un contre-exemple, démontrer que la réciproque est fausse.

3.8.5 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{1}{n\,!}\sum_{k=0}^{n} k\,!\,.$$

3.8.6 Étudier la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

3.8.7 Soit (x_n) une suite convergeant vers l. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k \quad \text{et} \quad y_0 = 1$$

converge elle aussi vers l.

3.8.8 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 1/(2\sqrt{n})$. En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

est convergente.

3.8.9 Pour la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}, \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1,$$

montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $x_n = 2^n - 1$. En déduire que (x_n) diverge.

3.8.10 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1}, \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

3.8.11 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_n = (2^n + a^n)^{1/n}$ et $x_0 = 1$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

3.8.12 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ et $x_0 = a$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

3.8.13 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2x_n + 3} \quad \text{et} \quad x_0 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

3.8.14 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (x_n+4)/3$ et $x_0 = 0$ converge. Calculer sa limite.

3.8.15 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n^2/2$ et $x_0 = a$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

3.8.16 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (x_n^2 + 2)/(2\sqrt{2})$ et $x_0 = 0$ est convergente. Calculer sa limite.

3.8.17 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_0 > 0$$

converge. Calculer sa limite.

3.8.18 Soit (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad x_0 > 0 \quad \text{et} \quad y_0 > 0.$$

Montrer qu'elles convergent toutes les deux vers $\sqrt{x_0 y_0}$.

3.8.19 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ et $x_0 = \sqrt{2}$ converge. Calculer sa limite.

3.8.20 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (2 + \sqrt{x_n})^{1/2}$ et $x_0 = \sqrt{2}$ converge.

3.8.21 Soit a un nombre réel positif et (x_n) la suite définie par

$$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad \text{et} \quad x_0 = a.$$

1) Montrer que si $a > 1$, la suite (x_n) converge.
2) En déduire qu'elle converge pour $a > 0$.
3) En posant $l(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, montrer que pour tout couple de nombres réels positifs a et b : $l(ab) = l(a) + l(b)$.

3.8.22 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}/x_n) = l$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

3.8.23 En utilisant l'exercice précédent, calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n\,!}} \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

3.8.24 Soit (x_n) une suite bornée. Montrer que pour tout nombre réel $\lambda > 0$: $\limsup\limits_{n\to+\infty}(\lambda x_n) = \lambda \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3.8.25 Soit (x_n) et (y_n) deux suites bornées. Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$.

3.8.26 Soit (x_n) une suite bornée.
1) Montrer que $L = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leqslant 1$.
2) Si $L < 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
3) Que peut-on dire si $L = 1$?

3.8.27 Soit (x_n) une suite de nombres réels non nuls pour laquelle le nombre

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \text{ existe.}$$

Si $\rho < 1$, montrer que
1) La suite (x_n) est bornée.
2) $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$.

3.8.28 Montrer que de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone.

3.8.29 Soit (x_n) une suite dont toutes les sous-suites convergent. Montrer que (x_n) converge.

3.8.30 Montrer que si les deux sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (x_n) converge vers l.

3.8.31 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$ et $x_0 = 2/3$ est convergente. Calculer sa limite.

3.8.32 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (\cos x_n + 1)/2$ et $x_0 = 0$ est une suite de Cauchy.

3.9 Solutions des questions V/F

Solution du § 3.1.2

VRAI. Supposons en effet que pour tout $n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant M$. Alors, M est un majorant et $-M$ un minorant de la suite (x_n). Autrement dit, la suite (x_n) est bornée.

Réciproquement, supposons que la suite (x_n) soit bornée. Alors, si a est un minorant et b un majorant de la suite (x_n), on obtient, en posant $M = \max\{|a|, |b|\}$, que pour tout entier $n \geqslant 0 : |x_n| \leqslant M$.

Solution du § 3.3.2

FAUX. Par exemple la suite divergente $(x_n = (-1)^n)$ est bornée.

Solution du § 3.3.4

1) VRAI. Ce résultat nous montre que l'application qui, à toute suite convergente fait correspondre sa limite, est une application linéaire.
2) VRAI.
3) FAUX. Par exemple les deux suites $(x_n = 1 + n)$ et $(y_n = -n + (1/n))$ divergent, tandis que la suite $(z_n = x_n + y_n)$ converge vers 1.
4) VRAI. Deux cas seulement peuvent se présenter, ou bien les deux suites divergent, ou bien au moins une des deux suites converge. Supposons que l'on soit dans ce second cas et que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, la suite $(y_n = x_n - (x_n - y_n))$ converge et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = x.$$

5) VRAI.

6) VRAI.

7) FAUX. Par exemple les deux suites

$$(x_n = (-1)^n) \quad \text{et} \quad (y_n = (-1)^n + 1/(n+1))$$

divergent tandis que la suite $(u_n = x_n y_n)$ converge vers 1.

8) VRAI.

9) FAUX. Par exemple, pour les deux suites

$$(x_n = 1/(n+1)) \quad \text{et} \quad (y_n = 2n),$$

la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ converge vers 2.

Solution du § 3.3.7

FAUX. Par exemple les suites $(x_n = 0)$ et $(y_n = 1/(n+1))$ satisfont $x_n < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais elles convergent vers la même limite $x = y = 0$.

Solution du § 3.3.9

1) VRAI. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout entier naturel n :

$$||x_n| - |x|| \leqslant |x_n - x|.$$

2) FAUX. Par exemple, la suite $(x_n = (-1)^n)$ diverge tandis que la suite $(y_n = |x_n| = 1)$ converge vers 1.

3) VRAI.

Chapitre 4

Séries numériques

4.1 Généralités

4.1.1 Définition d'une série de terme général x_n

On appelle *série de terme général* x_n le couple constitué d'une suite (x_n) de nombres réels et de la suite (S_n) où, pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + ... + x_n.$$

Le nombre réel x_n est appelé le *n-ième terme* et S_n la *n-ième somme partielle* de la série de terme général x_n.

4.1.2 Convergence d'une série

La série de terme général x_n est dite *convergente* si la suite (S_n) des sommes partielles est convergente ; la limite de cette suite s'appelle la *somme* de la série de terme général x_n, et se note $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général x_n est *divergente*. Dans le cas particulier où la suite des sommes partielles (S_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on écrit $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = +\infty$ (resp. $-\infty$).

4.1.3 Série absolument convergente

Définition. Une série de terme général x_n est dite *absolument convergente* si la série de terme général $|x_n|$ est convergente.

Énoncé. Une série absolument convergente est convergente.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que la série de terme général $|x_n|$ est convergente, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout couple d'entiers $m > n \geqslant n_0$: $\sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \leqslant \epsilon$; ce qui implique que la suite (S_n) des sommes partielles est une suite de Cauchy. Autrement dit, la suite (S_n) converge (§ 3.7.4). ■

4.1.4 Condition nécessaire pour qu'une série converge

Si la série de terme général x_n est convergente, alors la suite (x_n) converge vers zéro.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La suite (S_n) des sommes partielles étant une suite de Cauchy, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|S_n - S_{n-1}| = |x_n| \leqslant \epsilon$. D'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. ■

4.1.5 Divergence de la série harmonique

La série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

est appelé *série harmonique*. Cette série est divergente.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que la série harmonique est divergente, il suffit de remarquer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ;$$

ce qui revient à dire que la suite (S_n) des sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy. Ce qui implique qu'elle diverge. ■

4.1.6 Remarque

Le fait qu'une suite (x_n) de nombres réels converge vers zéro n'implique pas que la série de terme général x_n est convergente. C'est le cas de la série harmonique.

4.2 Quelques critères de convergence

4.2.1 Critère de Cauchy

Une série de terme général x_n est convergente si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que les relations $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$ impliquent $|x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leqslant \epsilon$.

DÉMONSTRATION. Ce critère est équivalent à la proposition suivante : la suite des sommes partielles (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est une suite de Cauchy ; proposition que nous savons être vraie. ■

4.2.2 Critère de comparaison

Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels et k un entier naturel tel que pour tout entier $n \geqslant k : 0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ (resp. $x_n \geqslant y_n \geqslant 0$). Alors, si la série de terme général y_n est convergente (resp. divergente), la série de terme général x_n est aussi convergente (resp. divergente).

DÉMONSTRATION. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$ et $\bar{S}_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$. En premier lieu, supposons que pour tout entier $n \geqslant k : 0 \leqslant x_n \leqslant y_n$, et que la suite $(\bar{S}_n)$ converge. Alors, pour tout couple d'entiers $n \geqslant k$ et $p \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} \leqslant y_n + y_{n+1} + \ldots + y_{n+p}.$$

Étant donné que la suite $(\bar{S}_n)$ est une suite de Cauchy, on en déduit, grâce au critère de Cauchy, que la suite (S_n) converge.

Supposons à présent que pour tout entier $n \geqslant k : x_n \geqslant y_n \geqslant 0$, et que la suite $(\bar{S}_n)$ diverge. Alors, la suite (S_n) est non bornée ; ce qui implique que la série de terme général x_n est divergente. ■

4.2.3 Critère des séries alternées

Soit (x_n) une suite de nombres réels vérifiant les deux propriétés qui suivent :
- il existe un entier naturel p tel que pour tout entier $n \geqslant p : |x_{n+1}| \leqslant |x_n|$ et $x_n x_{n+1} \leqslant 0$;
- $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Alors, la série de terme général x_n est convergente.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que si $x_n = 0$ pour un certain $n \geqslant p$, alors $x_m = 0$ pour tout $m \geqslant n$ et ainsi la série converge clairement. Supposons donc que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant p$.

Pour $n \geqslant p$, on obtient que $x_n + x_{n+1}$ a le même signe que x_n, car $|x_{n+1}| \leqslant |x_n|$ (autrement dit, $x_n + x_{n+1}$ et x_n sont les deux $\geqslant 0$ ou les deux $\leqslant 0$). De plus x_{n+2l} a aussi le même signe que x_n pour tout $l \in \mathbb{N}^*$.

Si $k \in \mathbb{N}$ est impair, on en déduit que

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = (x_n + x_{n+1}) + \ldots + (x_{n+k-1} + x_{n+k})$$

a le même signe que x_n et, si $k \geqslant 2$ est pair,

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = (x_n + x_{n+1}) + \ldots + (x_{n+k-2} + x_{n+k-1}) + x_{n+k}$$

a aussi le même signe que x_n.

On en déduit que, pour tout couple d'entiers $n \geqslant p$ et $k \geqslant 1$,

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}$$

a le même signe que x_n et, de même,

$$x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}$$

est de même signe que x_{n+1} et que $-x_n$. Ceci implique que $|x_n + \ldots + x_{n+k}| \leqslant |x_n|$.

Étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, on en déduit que la suite (S_n) des sommes partielles est une suite de Cauchy. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0 \geqslant p$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $|x_n| \leqslant \epsilon$. D'où, pour tous $m > n \geqslant n_0$,

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \leqslant |x_{n+1}| \leqslant |x_n| \leqslant \epsilon.$$

Le critère de Cauchy (§ 3.7.4) assure que (S_n) converge. ■

4.2.4 Convergence de la série harmonique alternée

La série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

est appelée *série harmonique alternée*. D'après le critère des séries alternées, cette série est convergente.

4.2.5 Série dont le terme général x_n garde un signe constant

Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls). Alors, si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k)$ est bornée, la série de terme général x_n est convergente ; sinon elle tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$).

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la suite (S_n) est croissante (resp. décroissante) et d'appliquer le résultat obtenu au paragraphe 3.4.1. ■

4.2.6 Exemple

Soit un entier naturel $p > 1$. Montrons que la série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{1}{n^p} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

converge.

En effet, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n \leqslant S_{2n+1} = 1 + \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^p} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l+1)^p}$$

$$\leqslant 1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^p} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(2l)^p} = 1 + 2\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2^p l^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} S_n.$$

D'où $S_n \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (S_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Remarque. Le résultat reste valable, avec la même preuve, pour tout nombre réel $p > 1$ (voir le paragraphe 7.4.1 pour la définition des puissances non entières).

4.2.7 Critère de la limite supérieure

Soit une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels.

Si la suite $(\sqrt[n]{|x_n|})_{n\geqslant 1}$ est bornée et telle que

$$L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1,$$

alors la série de terme général x_n est absolument convergente.

Si la suite $(\sqrt[n]{|x_n|})_{n\geqslant 1}$ est bornée et telle que

$$L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1,$$

ou si la suite $(\sqrt[n]{|x_n|})_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée, alors la série de terme général x_n est divergente.

DÉMONSTRATION. Dans le premier cas, comme $L < 1$, il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $k \geqslant m$:

$$\sqrt[k]{|x_k|} \leqslant \frac{1+L}{2} < 1.$$

Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant m$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |x_k| &= \sum_{k=0}^{m-1} |x_k| + \sum_{k=m}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |x_k| + \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1+L}{2}\right)^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |x_k| + \frac{2}{1-L}\,;\end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 4.2.5, que la série de terme général x_n est absolument convergente.

Supposons maintenant la suite $(\sqrt[n]{|x_n|})_{n\geqslant 1}$ bornée et $L > 1$. Alors, pour tout entier $m > 0$, il existe $k \geqslant m$ tel que

$$\sqrt[k]{|x_k|} \geqslant \frac{1+L}{2} > 1.$$

D'où $|x_k| \geqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^k$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, et donc la série est divergente (§ 4.1.4).

Si la suite $(\sqrt[n]{|x_n|})_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée, alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ non plus, et donc la série est divergente. ■

4.2.8 Exemple

Montrons que pour la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + nx_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

la série de terme général x_n est convergente. Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 2^n$. Il en résulte, de nouveau par récurrence, que

$$0 \leqslant x_n \leqslant 1 \ .$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(1 + n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{n}{2^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la série de terme général $n2^{-n}$ converge, par le critère de la limite supérieure :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n}} = 1 \cdot \frac{1}{2}$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n2^{-n}|} < 1.$$

Le critère de comparaison assure que la série de terme général x_n converge.

4.2.9 Critère de d'Alembert

Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle le nombre réel

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \text{ existe.}$$

Alors, si $\rho < 1$ la série de terme général x_n est absolument convergente, tandis que si $\rho > 1$ elle est divergente.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\rho < 1$. Alors, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant m$:

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \leqslant \frac{1+\rho}{2} < 1,$$

et donc, pour tout $n \geqslant m$:

$$|x_n| = \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{x_{m+2}}{x_{m+1}}\right| \cdot \left|\frac{x_{m+1}}{x_m}\right| \cdot |x_m| \leqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m|.$$

Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant m$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}|x_k| &= \sum_{k=0}^{m-1}|x_k| + \sum_{k=m}^{n}|x_k| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|x_k| + \sum_{k=m}^{n}\left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{k-m}|x_m| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|x_k| + \frac{2|x_m|}{1-\rho}\,;\end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 4.2.5, que la série de terme général x_n est absolument convergente.

Supposons à présent que $\rho > 1$. Alors, il existe un entier naturel p tel que pour tout $n \geqslant p$: $|x_n| \geqslant |x_p| \neq 0$; ce qui implique que la suite (x_n) n'admet pas zéro pour limite. Il en résulte (§ 4.1.4) que la série de terme général x_n est divergente. ■

4.2.10 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{n+1}{2^n}.$$

Étant donné que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{2},$$

on peut affirmer, grâce au critère de d'Alembert, que la série de terme général x_n est absolument convergente.

4.2.11 Remarques

En désignant par (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_n = (-1)^n,\ y_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = y_0 = 0,$$

nous constatons que

$$L = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|y_n|} = 1$$

et

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| = 1.$$

En effet (§ 3.3.8)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|y_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1/n} = (\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n})^{-1} = 1.$$

Étant donné que la série de terme général x_n est divergente, tandis que celle de terme général y_n est convergente, ces deux exemples nous montrent que dans le cas où $L = 1$ et $\rho = 1$, on ne peut rien dire à priori concernant la convergence de la série étudiée.

Soit (x_n) une suite de nombres réels non nuls telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = +\infty.$$

Alors, la série de terme général x_n est divergente.

4.3 Exercices

4.3.1 Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général x_n est défini par

1) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ 2) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\sqrt{n+4}}$

3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 4) $x_n = \dfrac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$

5) $x_n = \dfrac{n^3}{4^n}$ 6) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2+1}$

7) $x_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}}$ 8) $x_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n+1)}{(n+1)!}$.

4.3.2 Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^k}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$ avec $a>0$

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2k+3}{k(k-1)(k+2)}$ 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

4.3.3 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$. Montrer que la série de terme général $x_n = a_n/(1+a_n)$ diverge, tandis que la série de terme général $x_n = a_n/(1+n^2a_n)$ converge.

4.3.4 Montrer, en les calculant, qu'il existe trois constantes a, b et c telles que pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-3)!}.$$

En utilisant ce résultat trouver la somme de la série de terme général $x_n = n^3/n!$.

4.3.5 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel a et de l'entier relatif p, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $x_n = a^n/(n+1)^p$.

4.3.6 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que la série de terme général $x_n = a_n$ converge. Montrer que la série de terme général $x_n = \sqrt{a_n}/(n+1)$ est convergente.

4.3.7 Soit $0 < a < 1$, et posons pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}.$$

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer : $aS_n - S_n$.
2) En déduire que la série de terme général $x_n = na^{n-1}$ converge.
3) Calculer sa limite.

4.3.8 Discuter, selon les valeurs du nombre réel θ, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $x_n = (\sin\theta)^n/n + 1$.

4.3.9 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{x_k} < +\infty$. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{y_n^2 + x_n}) \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

est convergente.

4.3.10 Pour quelles valeurs du nombre réel $a \neq \pm 1$, la série de terme général $x_n = a^n/(a^{2n} - 1)$ converge-t-elle ?

4.3.11 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la série de terme général $x_n = a_n^p$ converge.

4.3.12 Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que la série de terme général $x_n = a_n - a_{n+1}$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

4.3.13 Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels positifs, et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

1) Montrer que si la série de terme général y_n converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.
2) Montrer que si $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = +\infty$ alors $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k = +\infty$.

4.3.14 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs pour laquelle le nombre

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \text{ existe.}$$

1) Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que si $\alpha < 1$ la série de terme général x_n diverge.
2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)} = +\infty.$$

4.3.15 Soit (x_n) une suite décroissante de nombres réels telle que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* : x_n \geqslant 1/n\}$ possède une infinité d'éléments.
1) Montrer que la série de terme général x_n diverge.
2) Que devient ce résultat si la suite (x_n) n'est pas supposée décroissante ?

Chapitre 5

Fonctions réelles d'une variable réelle

5.1 Définitions

5.1.1 Définition d'une fonction réelle d'une variable réelle

Soit E et F deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et G une partie du produit cartésien $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E, il existe un élément y et un seul de F tel que le couple (x, y) appartienne à G. Alors, le triplet

$$f = (G, E, F)$$

s'appelle *fonction définie sur E à valeurs dans F*, ou encore *application de E dans F*. Ici, les mots « application » et « fonction » seront toujours considérés comme synonymes. On dit que G est le *graphe* de f et on le note par $G(f)$, que E est l'*ensemble de départ* ou le *domaine de définition* de f et on le désigne généralement par $D(f)$ et que F est l'*ensemble d'arrivée* de f. L'unique élément y de F correspondant à l'élément x de E par f s'appelle l'*image de x par f* et se note $f(x)$, tandis que x est appelé la *variable indépendante*. Le sous-ensemble

$$\{f(x) : x \in E\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in E \text{ tel que } f(x) = y\} \subset F$$

est appelé l'*image de E par f* et est noté $\mathrm{Im} f$. La notation $f = (G, E, F)$ n'est pas utilisée en pratique, on lui préfère les notations suivantes :

$$f : E \to F \quad et \quad E \xrightarrow{f} F.$$

Pour montrer que $f(x)$ est l'élément de F associé à x, on emploie la notation

$$x \mapsto f(x).$$

5.1.2 Graphique d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et considérons le plan euclidien rapporté à deux axes de coordonnées $0x$ et $0y$ définis par deux vecteurs e_1 et e_2. Alors, à tout élément x de E on fait correspondre le point P du plan dont les coordonnées relativement aux deux axes $0x$ et $0y$ sont x et $y = f(x)$. L'ensemble de ces points est appelé le *graphique* de la fonction f relativement aux deux axes $0x$ et $0y$ (fig. 5.1 et 5.2).

En général l'axe $0x$ (resp. $0y$) est appelé l'*axe des abscisses* (resp. *ordonnées*), tandis que l'intersection 0 de ces deux axes est appelée l'*origine*. Lorsque nous parlerons de représentation graphique d'une fonction, sans autre précision, nous supposerons toujours que les deux axes $0x$ et $0y$ sont perpendiculaires et que les vecteurs e_1 et e_2 sont de la même longueur. Ce choix est arbitraire, et dans la pratique, il est souvent recommandé de choisir une unité de longueur différente sur chacun des axes.

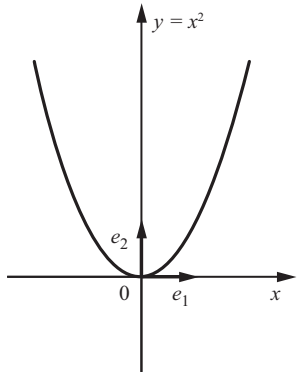


Fig. 5.1

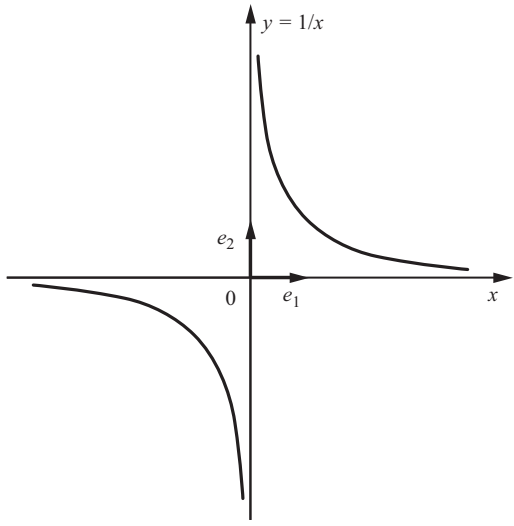


Fig. 5.2

5.1.3 Relations d'ordre pour les fonctions

Étant donné qu'il existe une relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$ (§ 1.1.5), cela nous permet de définir, pour les fonctions ayant le même domaine de définition et le même ensemble d'arrivée, les relations d'ordre suivantes :

- deux fonctions f et g de E dans F sont dites *égales* et on écrit $f = g$ si pour tout $x \in E$: $f(x) = g(x)$;
- pour deux fonctions f et g de E dans F, on écrit que $f \leqslant g$ (resp. $f \geqslant g$) si pour tout $x \in E$: $f(x) \leqslant g(x)$ (resp. $f(x) \geqslant g(x)$).

5.1.4 Remarque

Les relations d'ordre que nous venons de définir entre des fonctions ayant le même domaine de définition et le même ensemble d'arrivée sont des relations

d'ordre partiel ; autrement dit, il n'est pas toujours possible de les comparer entre elles. Par exemple, les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ ne sont pas comparables entre elles, puisque $f(-1) > g(-1)$ et $f(2) < g(2)$.

5.1.5 Définition d'une fonction surjective

Soit f une application de E dans F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, l'application est alors dite *surjective.* On dit encore que c'est une *surjection* de E dans F.

Il découle de cette définition, qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Im} f$.

5.1.6 Définition d'une fonction injective

On sait d'après la définition d'une fonction qu'à tout élément x de E correspond un unique élément y de F ; par contre y peut être l'image par f de plusieurs éléments de E. Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si tout élément y de F est l'image par f d'au plus un seul élément de E, l'application f est dite *injective.* On dit encore que f est une *injection* de E dans F.

Il résulte de cette définition, qu'une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si les relations $x_1, x_2 \in E$ et $f(x_1) = f(x_2)$ impliquent $x_1 = x_2$.

5.1.7 Définition d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque

Si une application f de E dans F est à la fois surjective et injective, elle est dite *bijective* ; on dit aussi que c'est une *bijection* de E dans F.

Dans ce cas, on a que pour tout élément y de F l'équation $f(x) = y$ admet dans E une unique solution x. On est ainsi tout naturellement amené à définir une nouvelle application de F dans E, appelé *application réciproque* de f et notée f^{-1}, qui, à tout élément y de F, fait correspondre l'élément x de E solution unique de l'équation $f(x) = y$. Autrement dit, $x = f^{-1}(y)$.

Le graphique d'une fonction bijective et celui de son application réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5.1.8 Opérations algébriques sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$. À partir de ces deux fonctions, on peut définir les nouvelles fonctions suivantes :

- si α et β sont deux nombres réels, on désigne par $\alpha f + \beta g$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Dans le cas particulier où $\alpha = \beta = 1$ (resp. $\alpha = 1$ et $\beta = -1$), la fonction $f + g$ (resp. $f - g$) est appelée la *somme* (resp. *différence*) des deux fonctions f et g ;
- la fonction, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel $f(x) \cdot g(x)$, est appelée le *produit* des deux fonctions f et g et se note fg ;
- si pour tout élément x de $E : g(x) \neq 0$, alors la fonction, qui, à tout $x \in E$, fait correspondre le nombre réel $f(x)/g(x)$, est appelée le *quotient* de la fonction f par la fonction g et se note f/g.

5.1.9 Image et image réciproque d'un sous-ensemble

Si A est un sous-ensemble non vide de E, l'ensemble des éléments y de F qui sont l'image par la fonction $f : E \to F$ d'au moins un élément x de A, s'appelle l'*image de A par f* et se note $f(A)$. Autrement dit,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F : \exists\, x \in A \,\text{tel que}\, f(x) = y\}.$$

Soit B un sous-ensemble non vide de F. On appelle *image réciproque de B par f*, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in B$. On note cet ensemble $\overset{-1}{f}(B)$. Ainsi, $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$.

5.1.10 Remarque

Il est très important de ne pas confondre pour une fonction $f : E \to F$ donnée, les deux notations $\overset{-1}{f}(\{y\})$ et $f^{-1}(y)$ avec $y \in F$. La première ayant toujours un sens, tandis que la seconde peut très bien ne pas en avoir. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \sin x$, la notation $f^{-1}(0)$ n'a pas de sens car f n'est pas bijective ; par contre $\overset{-1}{f}(\{0\}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

5.1.11 Application identique

L'application de E dans lui-même, qui, à tout élément x de E, fait correspondre ce même élément, s'appelle l'*application identique* de E. On la note I_E. Son graphe est la diagonale de $E \times E$.

5.1.12 Composition de deux fonctions

Considérons deux fonctions $f : E \to F$ et $g : G \to H$ et supposons, de plus, que $f(E) \subset G$. Alors, on peut définir une nouvelle fonction : la *fonction composée*, qui, à tout élément x de E, fait correspondre l'élément $g(f(x))$ de H. On note cette fonction $g \circ f$.

Dans le cas particulier où f est une bijection de E dans F, la fonction composée $f^{-1} \circ f$ n'est autre que l'application I_E, tandis que la fonction composée $f \circ f^{-1} = I_F$. Cet exemple nous montre qu'en général $g \circ f \neq f \circ g$.

5.1.13 Valeur absolue d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F. On appelle *valeur absolue* de la fonction f et on la désigne par $|f|$, la fonction de E dans $\mathbb{R}_+$, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel positif ou nul $|f(x)|$.

5.1.14 Fonction bornée

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f : E \to F$ est dite *majorée* (resp. *minorée*) sur A si l'ensemble $f(A)$ est un sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$. Une fonction qui est à la fois majorée et minorée sur A est dite *bornée* sur A.

5.1.15 Caractérisation d'une fonction bornée

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f : E \to F$ est bornée sur A si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $x \in A$ implique $|f(x)| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que f est bornée sur A si et seulement si le sous-ensemble $\{f(x) : x \in A\}$ de $\mathbb{R}$ est borné, et d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 1.4.6. ■

5.1.16 Borne inférieure et borne supérieure d'une fonction

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Si $f : E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, le nombre réel $\sup\{f(x) : x \in A\}$ (resp. $\inf\{f(x) : x \in A\}$) est appelé la *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) ou encore le *supremum* (resp. l'*infimum*) de la fonction f sur A et on le note $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in A} f(x)$).

5.1.17 Caractérisation des bornes supérieure et inférieure d'une fonction

Soit A un sous-ensemble non vide de E et $f : E \to F$ une fonction majorée (resp. minorée) sur A. Alors, le nombre réel M (resp. m) est égal au supremum (resp. infimum) de la fonction f sur A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout élément x de A : $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$) ;
- quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de A tel que $M - f(x_\epsilon) \leqslant \epsilon$ (resp. $f(x_\epsilon) - m \leqslant \epsilon$).

DÉMONSTRATION. Cette caractérisation est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 1.2.3. ■

5.1.18 Quelques résultats

- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée sur A, alors la fonction $-f$ est minorée sur A et l'on a :

$$\sup_{x\in A} f(x) = -\inf_{x\in A}(-f(x))\,;$$

- si $f : E \to F$ est une fonction majorée sur A, alors pour tout couple de nombres réels c et λ avec $\lambda \geqslant 0$, la fonction $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x) = \lambda f(x) + c$ est aussi majorée sur A et, de plus, on a :

$$\sup_{x\in A} \tilde{f}(x) = c + \lambda \sup_{x\in A} f(x)\,;$$

- si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions majorées sur A, alors la fonction $h = f + g$ est majorée sur A et

$$\sup_{x\in A} h(x) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\,;$$

- si B est un sous-ensemble non vide de A et si $f : E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, alors f est majorée (resp. minorée) sur B et, de plus, on a :

$$\sup_{x\in B} f(x) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) \quad (\text{resp. } \inf_{x\in B} f(x) \geqslant \inf_{x\in A} f(x)).$$

Remarque. Si $f : E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, le nombre réel $\sup_{x\in A} f(x)$ (resp. $\inf_{x\in A} f(x)$) n'appartient pas obligatoirement à l'ensemble $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Par exemple, la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ admet 1 comme borne inférieure et 2 comme borne supérieure sur $]0,1[$, mais aucun de ces deux nombres n'appartient à $\{f(x) : x \in]0,1[\} =]1,2[$.

5.1.19 Maximum et minimum local d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et x_0 un élément de E. On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* au point x_0 s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $|x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

D'autre part, nous dirons qu'une fonction admet un *extremum local* au point x_0 si cette fonction admet un maximum ou un minimum local en ce point.

5.1.20 Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et M (resp. m) un nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout élément x de E : $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$) ;
- M (resp. m) appartient à l'ensemble $\mathrm{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$.

Alors, le nombre réel M (resp. m) est appelé le *maximum* (resp. le *minimum*) de la fonction f sur E et on le note $\max\limits_{x\in E} f(x)$ (resp. $\min\limits_{x\in E} f(x)$).

D'autre part, si pour $x_0 \in E$: $f(x_0) = \max\limits_{x\in E} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x\in E} f(x)$), nous dirons que la fonction f *atteint son maximum* (resp. *minimum*) au point x_0.

Remarque. À l'aide des notions de maximum et minimum d'un ensemble non vide (§ 1.2.2), on obtient la proposition suivante : $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) est le maximum (resp. minimum) de f sur E si et seulement si M est le maximum (resp. m est le minimum) de l'ensemble $\mathrm{Im}\, f$.

Exemple. Considérons la fonction $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(1 - x)$. Cette fonction atteint son maximum pour $x = -1$ et son minimum pour $x = 2$. Elle admet aussi un maximum local aux points -1 et $2/3$, ainsi qu'un minimum local aux points 0 et 2 (fig. 5.3).

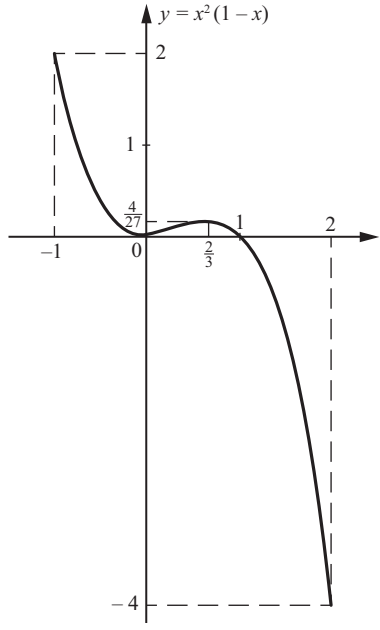


Fig. 5.3

5.1.21 Remarques

Supposons que pour une fonction $f : E \to F$, le nombre réel $\max\limits_{x\in E} f(x)$ (resp. $\min\limits_{x\in E} f(x)$) existe. Alors, cette fonction est majorée (resp. minorée) sur E et, de plus, on a :

$$\max_{x\in E} f(x) = \sup_{x\in E} f(x) \quad (\text{resp. } \min_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in E} f(x)).$$

Par contre, une fonction $f : E \to F$ peut très bien être majorée (resp. minorée) sur E, sans pour autant que le maximum (resp. minimum) de cette fonction sur E existe. Pour s'en rendre compte, considérons la fonction $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $[0, 1[$, fait correspondre le nombre réel x^3. Le supremum de cette fonction sur $[0, 1[$ est 1, mais comme ce nombre n'appartient pas à l'ensemble $\mathrm{Im} f = \{f(x) = x^3 : x \in [0, 1[\}$, on en déduit que le maximum de la fonction f sur $[0, 1[$ n'existe pas.

Une fonction $f : E \to F$ peut atteindre son maximum (resp. minimum) en plusieurs points de E. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ atteint son maximum aux points $\{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et son minimum aux points $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

5.1.22 Fonction monotone

Étant donné une fonction $f : E \to F$ et A un sous-ensemble non vide de E, on dit que la fonction f est *croissante* (resp. *strictement croissante*) sur A si pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de A, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). De même, elle est dite *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) sur A si pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de A, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$). Elle est dite *constante* sur A, s'il existe un nombre réel c tel que pour tout élément x de $A : f(x) = c$.

Pour f et A comme ci-dessus, f est dite *monotone* sur A si elle est croissante ou décroissante sur A. Elle est dite *strictement monotone* sur A si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur A.

5.1.23 Fonction paire, fonction impaire

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant zéro pour *centre de symétrie*, c'est-à-dire tel que $x \in E$ implique $-x \in E$. Une fonction $f : E \to F$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si pour tout élément x de $E : f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe $0y$, tandis que celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0.

5.1.24 Fonction périodique

Le nombre réel P est appelé ***une*** *période* de la fonction $f : E \to F$ si pour tout $x \in E$:

$$x - P \in E, \quad x + P \in E \quad \text{et} \quad f(x + P) = f(x).$$

D'autre part, une fonction $f : E \to F$ est dite *périodique* si elle admet une période $P \neq 0$.

Si P est une période de f, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre réel nP est aussi une période de cette fonction.

Si, pour un certain nombre réel $T > 0$, $\{nT : n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des périodes de la fonction périodique $f : E \to F$, alors un tel $T > 0$, s'il existe, est appelé ***la*** *période* de f.

Exemple. L'ensemble des périodes de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est autre que l'ensemble $\mathbb{Q}$.

5.1.25 Partie positive, négative d'une fonction

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. La fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}$ définie par $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ est appelée la *partie positive* de la fonction f. De même, la fonction $f^- : E \to \mathbb{R}$ définie par $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ est appelée la *partie négative* de la fonction f.

On vérifie facilement que pour tout élément x de E :

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{et} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

5.1.26 Prolongement et restriction d'une fonction

Si $f : E \to F$ et $g : A \to F$ sont des fonctions vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $A \subset E$;
- pour tout élément x de A : $f(x) = g(x)$,

la fonction f est appelée un *prolongement* de la fonction g à E, tandis que g est appelée la *restriction* de f à A.

Étant donné $f : E \to F$, on utilise souvent la notation $g = f|_A$ pour la restriction de f à A ou encore simplement $f : A \to F$.

D'une manière générale, le prolongement d'une fonction à un domaine de définition plus grand n'est pas unique. Par contre, la restriction d'une fonction à un ensemble de définition plus petit l'est.

5.2 Limite d'une fonction

5.2.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est *définie au voisinage de* x_0, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E \cup \{x_0\}.$$

Remarque. Il est très important de remarquer que dans cette définition une fonction peut très bien être définie au voisinage d'un point x_0 sans pour autant l'être en ce point. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

est définie au voisinage de zéro, mais ne l'est pas en ce point, où $\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ fait correspondre x^3.

5.2.2 Définition de la limite d'une fonction

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour *limite* le nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ (fig. 5.4). On écrit alors, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

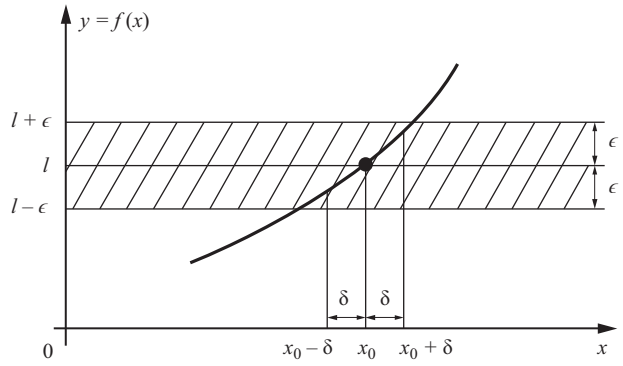


Fig. 5.4

5.2.3 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers l.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et que la suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ converge vers x_0. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$: $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$.

D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ avec $x_0 \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, il existe aussi un entier $m_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant m_0 : 0 < |a_n - x_0| \leqslant \delta$. Finalement, on obtient que pour tout $n \geqslant m_0 : |f(a_n) - l| \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers l. Il nous faut à présent démontrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que le nombre réel l ne soit pas la limite de la fonction f lorsque x tend vers x_0 ; ce qui signifie qu'il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel n, l'ensemble $\{x \in E : x \neq x_0, x \in B(x_0, 1/(n+1))\}$ contient un élément b_n pour lequel $|f(b_n) - l| > \epsilon$. On a ainsi construit une suite (b_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0 et dont la suite des images $(f(b_n))$ ne converge pas vers l. Ce dernier résultat étant en contradiction avec l'hypothèse, on en déduit que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. ■

Remarque. Cette caractérisation permet souvent de ramener les preuves des propriétés des limites de fonctions aux propriétés déjà prouvées des limites de suites.

5.2.4 Corollaire

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de x_0 et supposons que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge. Alors, la fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui convergent vers x_0. Nous allons montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que ce dernier résultat ne soit pas vrai. Alors, en posant

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on obtient que (c_n) est une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, mais dont la suite des images $(f(c_n))$ diverge. D'où contradiction. On a ainsi démontré que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, le nombre réel $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ ne dépend pas de la suite (a_n) choisie. Ainsi, en utilisant le résultat obtenu au paragraphe 5.2.3, la conclusion de ce corollaire devient immédiate. ■

5.2.5 Unicité de la limite d'une fonction

Si l_1 et l_2 sont deux limites de la fonction $f : E \to F$ lorsque x tend vers x_0, alors $l_1 = l_2$.

DÉMONSTRATION. Ramenons-nous à l'unicité de la limite pour les suites prouvée au paragraphe 3.2.4. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0. Il découle du résultat obtenu au paragraphe 5.2.3, que $l_1 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ et $l_2 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$; ce qui implique que $l_1 = l_2$ (voir § 3.2.4). ■

5.2.6 Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Calculons sa limite lorsque x tend vers 2. Il nous faut d'abord trouver un candidat qui puisse être la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2, sans savoir si cette limite existe ou non. Pour cette raison, supposons qu'elle existe et notons-la par l. Alors, en considérant la suite (a_n) définie par

$$a_n = 2 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad a_0 = 2,$$

on obtient que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 4$. Reste à démontrer que ce nombre est bien la limite de la fonction f lorsque x tend vers 2. Pour cela, il suffit de constater qu'en associant à tout nombre réel $\epsilon > 0$ le nombre

$$\delta = \min\{1, \epsilon/5\},$$

la relation $0 < |x-2| \leqslant \delta$ implique $\left|x^2 - 4\right| = |x-2|\,|x+2| \leqslant 5\,|x-2| \leqslant \epsilon$.

Autre méthode. On peut aussi utiliser la caractérisation du paragraphe 5.2.3 comme suit. Pour toute suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ qui converge vers 2, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n^2 \overset{\S 3.3.3}{=} (\lim_{n\to+\infty} a_n)^2 = 2^2 = 4,$$

montrant ainsi que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

5.2.7 Remarque

La définition que nous avons donnée au paragraphe 5.2.2 nous permet de dire si un nombre réel l, qui est supposé connu à priori, est la limite d'une fonction f lorsque x tend vers x_0 ; mais, malheureusement, elle ne nous permet pas de trouver cette limite. Or, contrairement à ce que pourrait suggérer l'exemple donné au paragraphe 5.2.6, il est souvent peu commode de trouver la limite d'une fonction f même lorsque celle-ci existe. Par contre, comme dans le cas des suites réelles, il est possible de démontrer qu'une fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0 sans pour autant connaître à priori la valeur de cette limite. Dans ce but, nous démontrerons par la suite quelques résultats très utiles ; par exemple, le critère de Cauchy ou le théorème des deux gendarmes.

5.2.8 Critère de Cauchy pour les fonctions

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet une limite lorsque x tend vers x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait : $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$. D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que le nombre réel $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et notons-le par l, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant

$0 < |x - x_0| \leqslant \delta : |f(x) - l| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, on obtient que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Réciproquement, supposons qu'à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on puisse associer un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait :$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$. Alors, si (a_n) est une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Ainsi, grâce au corollaire 5.2.4, on sait que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0. ■

5.2.9 Opérations algébriques sur les limites

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la limite de la fonction $\alpha f + \beta g$ lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à $\alpha l_1 + \beta l_2$;
- la limite de la fonction fg lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à $l_1 l_2$;
- si $l_2 \neq 0$ et g ne s'annule pas sur E, la limite de la fonction f/g lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à l_1/l_2.

DÉMONSTRATION. Pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, les trois suites $(\alpha f(a_n) + \beta g(a_n))$, $(f(a_n)\, g(a_n))$ et $(f(a_n)/g(a_n))$ convergent respectivement vers $\alpha l_1 + \beta l_2, l_1 l_2$ et l_1/l_2. Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 5.2.3. ■

5.2.10 Conservation des relations d'ordre

Soit f et g deux fonctions de E dans F vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$;
- il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ satisfaisant $0 < |x - x_0| \leqslant \alpha$, on a $f(x) \geqslant g(x)$.

Alors, $l_1 \geqslant l_2$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \alpha\}$ qui converge vers x_0. Ainsi, en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 3.3.6 et 5.2.3, on obtient que

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geqslant \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = l_2.$$

■

Remarque. Si dans l'énoncé ci-dessus on remplace $f(x) \geqslant g(x)$ par $f(x) > g(x)$, cela ne nous permet pas de conclure que $l_1 > l_2$. Par exemple, la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ ne prend que des valeurs positives sur son domaine de définition, mais par contre sa limite lorsque x tend vers zéro est nulle. (Ici, la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction identiquement nulle sur $]0, +\infty[$.)

5.2.11 Limite de la valeur absolue d'une fonction

Soit $f : E \to F$ une fonction qui admet l pour limite lorsque x tend vers x_0. Alors, $\lim\limits_{x\to x_0} |f|(x) = |l|$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout $x \in E : \big|\,|f(x)| - |l|\,\big| \leqslant |f(x) - l|$. ■

Remarques. La réciproque de ce résultat est généralement fausse. Comme contre-exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Posons

$$a_n = \frac{1}{n+1} \neq 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \neq 0 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors que les suites (a_n) et (b_n) convergent les deux vers 0, les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers des limites différentes : 1 et -1. On en conclut que la fonction f n'admet aucune limite lorsque x tend vers zéro. Par contre, $\lim\limits_{x\to 0} |f|(x) = 1$.

Néanmoins, si la valeur absolue d'une fonction $f : E \to F$ admet zéro pour limite lorsque x tend vers x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

5.2.12 Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

Soit f, g et h trois fonctions de E dans F vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$;
- il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ satisfaisant $0 < |x - x_0| \leqslant \alpha$, on a $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$.

Alors, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) une suite arbitraire d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0. On déduit immédiatement de la deuxième propriété qu'il existe un entier naturel m tel que pour tout entier $n \geqslant m$: $f(a_n) \leqslant h(a_n) \leqslant g(a_n)$. D'autre part, grâce à la première propriété et au résultat obtenu au paragraphe 5.2.3, on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) = l$. D'où, en appliquant aux suites $(f(a_n)), (g(a_n))$ et $(h(a_n))$ le théorème des deux gendarmes pour les suites (§ 3.3.10), on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} h(a_n) = l$. Ainsi, le résultat obtenu au paragraphe 5.2.3 nous permet de conclure que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$. ■

5.2.13 Exemple

Montrons que la limite de la fonction $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

vaut 1 lorsque x tend vers zéro. D'une part (faire un dessin)

$$\boxed{0 < \sin x < x < \tan x \ \text{ pour tout } x \in]0, \pi/2[}$$

et donc

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \ \text{ pour tout } x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[.$$

D'autre part, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|1 - \cos x| = 2\left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^2}{2},$$

on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5.2.14 Limite de la composée de deux fonctions

Soit une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $g : G \to H$ définie au voisinage de $y_0 \in \mathbb{R}$, telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = l.$$

Supposons de plus que

$$f(E) \subset G \quad \text{et} \quad f(E\backslash\{x_0\}) \subset G\backslash\{y_0\}.$$

Alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = l.$$

Remarques. Comme $E\backslash\{x_0\} = \{x \in E : x \neq x_0\}$, on a $E\backslash\{x_0\} = E$ si $x_0 \notin E$ et, de même, $G\backslash\{y_0\} = G$ si $y_0 \notin G$. L'hypothèse $f(E) \subset G$ assure que $g \circ f$ est bien définie sur E et l'hypothèse $f(E\backslash\{x_0\}) \subset G\backslash\{y_0\}$ est utilisée dans la preuve.

DÉMONSTRATION. Soit une suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0 et vérifions que la suite $((g \circ f)(a_n))$ converge vers l. Comme (a_n) converge vers x_0, $(f(a_n))$ converge vers y_0, car l'on suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Comme $a_n \in E\backslash\{x_0\}$, on a $f(a_n) \in G\backslash\{y_0\}$, ceci pour tout entier n. C'est ici que l'on utilise $f(E\backslash\{x_0\}) \subset G\backslash\{y_0\}$. Comme $(f(a_n))$ converge vers y_0, on a bien que $(g(f(a_n)))$ converge vers l, car l'on suppose que $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$. ■

5.2.15 Exemple

Calculons la limite lorsque x tend vers zéro de la fonction $h :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{\sin(\sqrt{1+x} - 1)}{x}.$$

Pour cela, considérons les deux fonctions auxiliaires $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ et $g : \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{\sin y}{y(y+2)}.$$

On constate immédiatement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, que $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \frac{1}{2}$ et que $h = g \circ f$. Ainsi, en utilisant le résultat du paragraphe 5.2.14, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}$.

5.2.16 Remarque

Si dans l'énoncé du résultat donné au paragraphe 5.2.14, on omet de faire l'hypothèse $f(E\backslash\{x_0\}) \subset G\backslash\{y_0\}$, alors, on ne peut pas affirmer, sans autre, que $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = l$. Par exemple, considérons les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, mais la fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'admet aucune limite lorsque x tend vers zéro. En effet, les deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de $\mathbb{R}^*$ définies par

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2n\pi + (\pi/2)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

convergent vers 0, alors que les suites $((g \circ f)(a_n))$ et $((g \circ f)(b_n))$ convergent vers 0 et 1 respectivement. Observons que $a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, mais que $f(a_n) = 0$ pour tout n.

5.2.17 Fonction définie au voisinage de l'infini

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est *définie au voisinage de* $+\infty$ (resp. $-\infty$), s'il existe un nombre réel a tel que $]a, +\infty[\subset E$ (resp. $]-\infty, a[\subset E$).

5.2.18 Limites à l'infini, limites infinies

Supposons que $x_0 \in \mathbb{R}$ ou que x_0 représente le symbole $+\infty$ ou encore que x_0 représente le symbole $-\infty$.

Supposons aussi que $l \in \mathbb{R}$ ou que l représente le symbole $+\infty$ ou encore que l représente le symbole $-\infty$.

Pour une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0, on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si pour toute suite (a_n) d'éléments de $E \backslash \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

Remarques

- Si $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ ou x_0 est un nombre réel n'appartenant pas à E, alors $E \backslash \{x_0\} = E$.
- Cette définition est formulée à l'aide de suites, mais des formulations dans l'esprit du paragraphe 5.2.2 sont aussi possibles. D'ailleurs, lorsque $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, cette notation a déjà été introduite au paragraphe 5.2.2. Voir aussi le paragraphe 5.2.3.
- Tous les résultats que nous avons obtenus sur les limites lorsque x tend vers un nombre réel x_0 restent valables lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. En particulier le théorème des deux gendarmes pour les fonctions (§ 5.2.12) reste valable.

5.2.19 Limite d'une fonction monotone lorsque x tend vers $+\infty$

Soit $f : E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie au voisinage de $+\infty$. Alors, si f est majorée (resp. minorée) sur E :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \in E} f(x) \quad (\text{resp. } \inf_{x \in E} f(x)),$$

sinon

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad (\text{resp. } -\infty).$$

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, faisons l'hypothèse que f est croissante sur E (l'autre cas se traitant de façon analogue) et considérons une suite arbitraire (a_n) d'éléments de E qui tend vers $+\infty$. Supposons d'abord que f ne soit pas majorée sur E, et soit A un nombre réel positif choisi arbitrairement. Alors, il existe un nombre $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) \geqslant A$. Par suite, étant donné que la fonction f est croissante sur E, les relations $x \in E$ et $x \geqslant \alpha$ impliquent $f(x) \geqslant A$. Puisque la suite (a_n) tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $a_n \geqslant \alpha$ et ainsi $f(a_n) \geqslant A$. Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = +\infty$.

Supposons à présent que f soit majorée sur E ; ce qui entraîne que le nombre réel $l = \sup_{x \in E} f(x)$ existe. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Il résulte de la définition de l qu'il existe un nombre $\alpha \in E$ tel que $0 \leqslant l - f(\alpha) \leqslant \epsilon$. Par suite, du fait que la fonction f est croissante sur E, les relations $x \in E$ et $x \geqslant \alpha$ impliquent $0 \leqslant l - f(x) \leqslant \epsilon$. Puisque la suite (a_n) tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $a_n \geqslant \alpha$ et ainsi $0 \leqslant l - f(a_n) \leqslant \epsilon$. Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$. ■

5.2.20 Opérations algébriques sur les limites infinies

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Addition. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et la fonction g est minorée (resp. majorée) sur E, alors $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Produit. Supposons que $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|g(x)| \geqslant \alpha$ pour tout $x \in E$.
Si $f(x)g(x) > 0$ (resp. $f(x)g(x) < 0$) pour tout $x \in E$, alors $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Division. Si la fonction f est bornée sur E, $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$ et $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Division (bis). Supposons que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$, que $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(x)| \geqslant \alpha$ pour tout $x \in E$.
Si $f(x)/g(x) > 0$ (resp. $f(x)/g(x) < 0$) pour tout $x \in E$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Gendarme. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $g(x) \geqslant f(x)$ (resp. $g(x) \leqslant f(x)$) pour tout $x \in E$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Une preuve possible consiste à utiliser les résultats analogues pour les suites donnés au paragraphe 3.3.16.

5.2.21 Formes indéterminées

Nous rencontrons des cas où actuellement nous ne sommes pas toujours en mesure de conclure. Nous dirons alors que nous nous trouvons en présence d'une *forme indéterminée*. Enumérons quelques formes indéterminées. Pour cela, soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction h est définie à partir de fonctions f et g et la limite $\lim_{x\to x_0} h(x)$ donne lieu à une forme indéterminée. Voir le paragraphe 3.3.17 pour des résultats analogues pour les suites.

Forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ **:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, $h = f + g$.

Forme indéterminée $0 \cdot \infty$ **:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), $h = fg$.

Forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$ **:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$, $h = f/g$.

Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ **:** $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$, $h = f/g$.

Par la suite, nous donnerons des méthodes qui nous permettent dans certains cas de lever l'indétermination. En particulier, nous démontrerons la règle de Bernoulli-l'Hospital (§ 6.3.2).

5.2.22 Remarques

Les résultats obtenus au paragraphe 5.2.20 restent valables lorsque x tend vers $\pm\infty$.

De manière analogue, la notion de formes indéterminées donnée au paragraphe 5.2.21, lorsque x tend vers le nombre réel x_0, s'étend, sans autre, au cas où x tend vers $\pm\infty$.

5.2.23 Fonction définie à droite ou à gauche d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est *définie à droite* (resp. *à gauche*) de x_0, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]\, x_0, x_0 + \alpha\, [$ (resp. $]\, x_0 - \alpha, x_0[$) soit inclus dans E.

5.2.24 Limite à droite, limite à gauche

Supposons que $l \in \mathbb{R}$ ou que l représente le symbole $+\infty$ ou encore que l représente le symbole $-\infty$.

Pour une fonction $f : E \to F$ définie à droite (resp. à gauche) de x_0, on note $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l$) si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E;\, x > x_0\}$ (resp. $\{x \in E;\, x < x_0\}$) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

Remarque. Ces définitions utilisant des suites admettent des formulations équivalentes dans l'esprit de la définition 5.2.2. Par exemple, supposons que $f : E \to F$ est définie à droite de x_0 et que $l \in \mathbb{R}$. On peut prouver en suivant les idées du paragraphe 5.2.3 que la propriété $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l$ définie ci-dessus est équivalente à la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E \cap\,]x_0, x_0 + \delta]$, l'inégalité $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ est satisfaite.

5.2.25 Relation entre les différentes limites

Supposons que $l \in \mathbb{R}$ ou que l représente le symbole $+\infty$ ou encore que l représente le symbole $-\infty$. Soit f une fonction de E dans F définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = l \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

5.2.26 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus sur les limites restent valables pour les limites à droite (resp. à gauche).

5.2.27 Limite d'une fonction monotone

Dans le même esprit qu'au paragraphe 5.2.19, on obtient le résultat suivant.

Si $f : E \to F$ est définie au voisinage de $-\infty$ (resp. à droite de $x_0 \in \mathbb{R}$, à gauche de $x_0 \in \mathbb{R}$) et monotone sur $A = E$ (resp. $A =]x_0, +\infty[\cap E$, $A =$

$]-\infty, x_0[\cap E)$, alors la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (resp. $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$) existe dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Si f est de plus bornée sur A, la limite existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\sup_{x\in A} f(x)$ ou $\inf_{x\in A} f(x)$.

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle donnée au paragraphe 5.2.19. ■

5.2.28 Corollaire

Soit $f : E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie au voisinage de x_0. Alors la fonction f admet une limite à droite dans $\mathbb{R}$ et une limite à gauche dans $\mathbb{R}$ au point x_0 et, de plus, on a :

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0+} f(x) \quad (\text{resp. } \lim_{x\to x_0-} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0+} f(x)).$$

5.3 Fonctions continues

5.3.1 Définition d'une fonction continue en un point

Une fonction $f : E \to F$ est dite *continue en un point* x_0 de son domaine de définition si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

5.3.2 Première définition équivalente

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $|x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$.

Cette équivalence découle de la définition de la limite d'une fonction (§ 5.2.2). D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

5.3.3 Deuxième définition équivalente

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Cette équivalence découle de l'équivalence du paragraphe 5.2.3.

5.3.4 Critère de Cauchy pour les fonctions continues en un point

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait : $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

5.3.5 Exemple d'une fonction continue

Montrons que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout point de son domaine de définition. Pour cela, fixons-nous arbitrairement un nombre réel $x_0 > 0$. Ainsi, en remarquant que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

on obtient que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, la relation $|x - x_0| \leqslant \epsilon\sqrt{x_0}$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$. Autrement dit, la fonction f est continue en x_0. Ce résultat étant valable pour tout $x_0 > 0$, on en conclut que la fonction f est continue en tout point de son domaine de définition.

5.3.6 Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en x_0. Des résultats obtenus sur les limites (sect. 5.2), on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0 ;
- de même, les fonctions fg et $|f|$ sont continues en x_0 ;
- si g ne s'annule pas sur E, la fonction f/g est continue en x_0 ;
- les deux fonctions $h_1,\ h_2 : E \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ et $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ sont également continues en x_0. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout élément x de E :

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

et

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \ ;$$

- une des conséquences directes du précédent résultat est que les fonctions f^+ et f^- sont aussi continues en x_0.

5.3.7 Définition d'une fonction discontinue en un point

Si une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est *discontinue* en ce point. On dit aussi que x_0 est un *point de discontinuité* de la fonction f.

Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant 1 en tout $x \in \mathbb{R}^*$ et 0 en $x = 0$ est discontinue en $x_0 = 0$. En effet $0 = f(0) \neq 1 = \lim_{x \to 0} f(x)$.

5.3.8 Exemple d'une fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. Pour cela, soit x_0 un nombre réel arbitrairement choisi. Alors, à chaque entier naturel n, on est capable d'associer un nombre rationnel a_n et un nombre irrationnel b_n appartenant tous les deux à l'intervalle ouvert et borné $]x_0 - 1/(n+1),\, x_0 + 1/(n+1)[$. Les suites (a_n) et (b_n) ainsi obtenues convergent toutes les deux vers x_0, mais par contre $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n)$; ce qui entraîne que la fonction f est discontinue en x_0. Ce résultat étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en conclut que la fonction f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

5.3.9 Continuité de la composée de deux fonctions continues

Soit $f : E \to F$ une fonction continue en x_0 et $g : G \to H$ une fonction continue en $f(x_0) \in G$. Supposons de plus que $f(E) \subset G$. Alors, la fonction composée $g \circ f : E \to H$ est continue en x_0.

Il s'agit en effet de vérifier que, pour toute suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0, la suite $(g(f(a_n)))$ converge vers $g(f(x_0))$. Puisque f est continue en x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(x_0)$. Puisque g est continue en $f(x_0)$, la suite $(g(f(a_n)))$ converge donc bien vers $g(f(x_0))$.

Contrairement à ce qu'on a fait au paragraphe 5.2.14, il n'est pas nécessaire de supposer que $f(E \backslash \{x_0\}) \subset G \backslash \{y_0\}$, car ici $y_0 = f(x_0) \in G$ et $l = g(y_0)$.

5.3.10 Remarque

Si la fonction composée $g \circ f : E \to H$ est continue en x_0, on ne peut pas en conclure à priori que la fonction f est continue en x_0 ou que la fonction g est continue en $f(x_0)$. Par exemple, considérons les deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(x^2+1)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad y > 1. \end{cases}$$

Par construction, les deux fonctions f et g sont respectivement discontinues en $x_0 = 0$ et $y_0 = f(0) = 1$. Par contre, la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 0$, car elle est identiquement nulle sur tout $\mathbb{R}$.

5.3.11 Prolongement par continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et c un nombre réel n'appartenant pas à E tels que la limite de la fonction f, lorsque x tend vers c, existe. Alors, la fonction $\hat{f}_c : E \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in E \\ \lim\limits_{y \to c} f(y) & \text{si} \quad x = c, \end{cases}$$

est appelée le *prolongement par continuité* de la fonction f au point c.

Un tel prolongement, s'il existe, est unique. D'autre part, on déduit immédiatement de sa définition que $\hat{f}_c$ est une fonction continue en c.

5.3.12 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}.$$

Alors, la fonction $\hat{f}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f au point $c = 0$.

5.3.13 Continuité à droite, continuité à gauche

Une fonction $f : E \to F$ est dite *continue à droite* (resp. *à gauche*) en un point x_0 de son domaine de définition si $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$).

5.3.14 Relation entre les différentes continuités

Une fonction $f : E \to F$ est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

5.3.15 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions continues restent valables pour les fonctions continues à droite (resp. à gauche).

5.3.16 Fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ni vide ni réduit à un seul élément. Posons

$$a = \begin{cases} \inf I & \text{si } I \text{ est minoré,} \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \sup I & \text{si } I \text{ est majoré,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fonction $f : I \to F$ est dite *continue sur* I, ou tout simplement qu'elle est continue, si

- f est continue en tout point x tel que $a < x < b$,
- f est continue à droite en a lorsque $a > -\infty$ et $a \in I$,
- f est continue à gauche en b lorsque $b < +\infty$ et $b \in I$.

Si $I = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$, nous conviendrons que toute fonction $f : I \to F$ est continue. On désigne par $C(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans F, ou plus simplement par $C(I)$ lorsque $F = \mathbb{R}$.

5.3.17 Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$g(x) = \sqrt{1 - x}$$

est continue sur $[0, 1]$.

5.3.18 Définition de la continuité uniforme d'une fonction

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est dite *uniformément continue* sur I si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x, y de I vérifiant la relation $|x - y| \leqslant \delta$, on ait : $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend du nombre ϵ.

5.3.19 Remarques

Dans la définition de la continuité uniforme, le nombre réel δ ne dépend que de ϵ, alors que dans la définition de la continuité (§ 5.3.2) il dépend aussi, en général, du point considéré x_0.

Une fonction $f : I \to F$ uniformément continue sur I est continue sur I (§ 5.3.16). La réciproque n'est pas forcément vraie. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout nombre $\alpha > 0$ donné, la différence $(x + \alpha)^2 - x^2 = \alpha(2x + \alpha)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

5.3.20 Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout couple de nombres réels x et y :

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \sin\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

ou encore

$$|\cos x - \cos y| \leqslant 2 \left|\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)\right| \leqslant |x - y|.$$

Ainsi, il suffit de poser dans la définition de la continuité uniforme $\delta = \epsilon$.

5.3.21 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue. Alors,
- les deux nombres réels $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ existent,
- la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons l'existence du nombre réel $\min_{x\in[a,b]} f(x)$. Si f est minorée sur A, on note par m l'infimum de la fonction f sur $[a, b]$, sinon on convient que m désigne le symbole $-\infty$. On sait qu'il existe une suite (c_n) d'éléments de $[a, b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(c_n) = m$. Ainsi, en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass (§ 3.6.3), on peut extraire de la suite (c_n) une sous-suite (c_{n_j}) qui converge vers un élément c, et la conservation de l'ordre par passage à des limites donne $c \in [a, b]$ (voir la remarque du §3.3.6 ; cette étape de la preuve ne serait plus valable si $[a, b]$ était remplacé par $]a, b[$ par exemple). Ceci implique, par la continuité de f sur $[a, b]$, que

$$m = \lim_{n\to+\infty} f(c_n) = \lim_{j\to+\infty} f(c_{n_j}) = f(c) \neq -\infty.$$

D'où f est minorée sur $[a, b]$ et, par définition (§ 5.1.20),

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

L'existence du nombre réel $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ se montre d'une manière analogue.

Montrons à présent que f est uniformément continue sur $[a, b]$ en raisonnant par l'absurde : supposons qu'il existe $\epsilon \in]0, +\infty[$ tel que, pour tout $\delta \in]0, +\infty[$, il existe x et y dans $[a, b]$ vérifiant

$$|x - y| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et le choix $\delta = 1/(n + 1)$, notons les valeurs correspondantes de x et y par $x_n \in [a, b]$ et $y_n \in [a, b]$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ainsi défini deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $[a, b]$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - y_n| \leqslant 1/(n + 1) \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (§ 3.6.3), (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}$. L'intervalle $[a, b]$ étant fermé, $x \in [a, b]$. De $|x_{n_k} - y_{n_k}| \leqslant 1/(n_k + 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on déduit que la sous-suite (y_{n_k}) converge aussi vers x.

On obtient alors la contradiction

$$0 < \epsilon \leqslant \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x) - f(x)| = 0$$

car f est supposée continue sur $[a, b]$. On a ainsi démontré que la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.

■

5.3.22 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction *continue*.

- Si $f(a) < f(b)$ et $y_0 \in]f(a), f(b)[$, alors il existe $z \in]a, b[$ tel que $f(z) = y_0$.
- Si $f(b) < f(a)$ et $y_0 \in]f(b), f(a)[$, alors il existe $z \in]a, b[$ tel que $f(z) = y_0$.
- La fonction f atteint sa borne supérieure, sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ces deux bornes. Autrement dit,

$$\mathrm{Im} f = f([a, b]) = \left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x) \right].$$

Le théorème de la valeur intermédiaire implique, entre autres, que la fonction f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

DÉMONSTRATION.

- Supposons que $f(a) < f(b)$ et considérons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in [a, b] \,:\, f(x) \leqslant y_0\},$$

qui contient a et qui est majoré par b. Soit $z = \sup \mathcal{S} \in [a, b]$ et montrons que $f(z) = y_0$.

Il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers z. La continuité de f en z assure que

$$f(z) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leqslant y_0,$$

car $f(x_n) \leqslant y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $f(z) \leqslant y_0$ et $z \in [a, b[$ (puisque $f(b) > y_0$).

D'autre part, la continuité de f en z assure que

$$f(z) = \lim_{n \to +\infty} f\left(z + \frac{b - z}{n + 1}\right) \geqslant y_0,$$

car $f(z + (b - z)/(n + 1)) > y_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons donc montré que $f(z) = y_0$.

- Le même argument s'adapte au cas $f(b) < f(a)$.
- Vérifions le troisième point de l'énoncé. Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est évident ; supposons donc que f n'est pas constante.

Grâce aux résultats obtenus au paragraphe 5.3.21, nous savons qu'il existe deux nombres réels distincts c et d appartenant à $[a,b]$ tels que

$$f(c) = \min_{x \in [a,b]} f(x) < f(d) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Soit y_0 un élément quelconque de $]f(c), f(d)[$. Si $c < d$, le premier point de l'énoncé assure qu'il existe $z \in]c, d[$ tel que $f(z) = y_0$. De même, si $d < c$, il existe $z \in]d, c[$ tel que $f(z) = y_0$.

Ainsi s'achève la démonstration du théorème de la valeur intermédiaire. ■

5.3.23 Corollaire

Soit une fonction $f : I \to F$ continue sur l'intervalle I. Alors, pour tout intervalle $J \subset I$, $f(J)$ est un intervalle.

De plus, soit $a < b$ dans I. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons que $f(J)$ est un intervalle. Considérons deux éléments arbitraires distincts y_1 et y_2 dans $f(J)$ (si de tels y_1 et y_2 n'existent pas, alors $f(J)$ est clairement un intervalle). Par suite, il existe deux éléments x_1 et x_2 de J tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Quitte à permuter leurs rôles, on peut encore supposer que $x_1 < x_2$. Étant donné que f est une fonction continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, on obtient, en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire, que $f([x_1, x_2])$ contient non seulement y_1 et y_2, mais aussi toutes les valeurs intermédiaires. D'où $f(J)$ contient aussi toutes ces valeurs intermédiaires. Puisque ceci est valable pout tous y_1 et y_2 distincts dans $f(J)$, on a montré que $f(J)$ est un intervalle.

Le reste du corollaire est immédiat. ■

5.3.24 Critère pour qu'une fonction continue ait un point fixe

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors, l'équation $x - f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Une telle solution est appelée un *point fixe* de f.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$ pour laquelle on vérifie facilement que $g(a)g(b) \leqslant 0$. Ainsi, grâce au corollaire 5.3.23, on sait qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$. D'où le résultat. ■

5.3.25 Image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement monotone

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction continue strictement monotone sur I. Alors, $f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Le paragraphe 5.3.23 assure que $f(I)$ est un intervalle. Vérifions qu'il est ouvert. Soit $y \in f(I)$ arbitraire et choisissons $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Comme I est un intervalle ouvert, $[x - \alpha, x + \alpha] \subset I$ pour un certain $\alpha > 0$.

Puisque f est strictement monotone, soit $f(x-\alpha) < f(x) < f(x+\alpha)$, auquel cas $]f(x - \alpha), f(x + \alpha)[\subset f(I)$, soit $f(x + \alpha) < f(x) < f(x - \alpha)$, auquel cas $]f(x + \alpha), f(x - \alpha)[\subset f(I)$.

Ainsi, pour tout $y \in f(I)$, il existe $c < d$ dans $f(I)$ tels que $y \in]c, d[\subset f(I)$, prouvant que $f(I)$ est un intervalle ouvert. ■

5.3.26 Remarque

D'une manière générale, l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas obligatoirement un intervalle ouvert. Par exemple, pour la fonction

continue mais pas strictement monotone $f :]-1,2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]1,2[, \end{cases}$$

on obtient que $f(]-1,2[) = [0,1]$.

5.3.27 Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Soit I et F des intervalles non vides quelconques de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction surjective strictement monotone sur I. Alors f est continue sur I. De plus f admet une fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ qui est continue strictement monotone sur F.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, nous supposons que f est strictement croissante (l'autre cas se traitant de la même façon). En premier lieu, montrons que la fonction f est continue sur I. Pour cela, soit x_0 un élément arbitraire de I. Si f est définie à droite de x_0, puisque f est strictement croissante sur $]x_0, +\infty[\cap I$ et $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0, +\infty[\cap I$, on peut considérer

$$\ell = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in]x_0, +\infty[\cap I\} \in [f(x_0), +\infty[.$$

Vérifions que cette limite vaut $f(x_0)$ en raisonnant par l'absurde : supposons que $\ell > f(x_0)$. Soit $x_1 \in]x_0, +\infty[\cap I$, qui satisfait $f(x_1) \geqslant \ell$. Puisque F est un intervalle, il contient l'intervalle $]f(x_0), f(x_1)]$, qui lui-même contient ℓ et $(f(x_0) + \ell)/2$. Par la surjectivité de f, il existe donc $z \in]x_0, x_1]$ tel que $f(z) = (f(x_0) + \ell)/2 < \ell$. D'où la contradiction

$$\ell = \inf\{f(x) : x \in]x_0, +\infty[\cap I\} \leqslant f(z) < \ell.$$

En résumé, $f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$. Si f est définie à gauche de x_0, on montre de même que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$. Ceci prouve aussi que f est continue en x_0 si x est définie au voisinage de x_0.

La fonction f, étant surjective strictement monotone sur I, est donc bijective. Autrement dit, la fonction $f : I \to F$ admet une fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$. D'autre part, on sait, grâce au au paragraphe 5.3.23, que F est un intervalle de $\mathbb{R}$ et, de plus, on vérifie facilement que f^{-1} est strictement monotone sur F. Ainsi, $f^{-1} : F \to I$ est une fonction surjective strictement monotone sur un intervalle F ; ce qui implique, d'après ce que nous venons de démontrer, que la fonction f^{-1} est continue sur F. ■

5.3.28 Monotonicité des fonctions continues et injectives

Soit $f : I \to F$ une fonction injective continue sur l'*intervalle* I. Alors, f est strictement monotone sur I.

DÉMONSTRATION.
Première partie. Montrons que, pour tous $a < x < b$ dans I,

$$\min\{f(a), f(b)\} < f(x) < \max\{f(a), f(b)\}.$$

En raisonnant par l'absurde, supposons que $f(x) > \max\{f(a), f(b)\}$. Si $f(a) < f(b) < f(x)$, le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à la fonction continue $f : [a, x] \to F$ assure qu'il existe $c \in]a, x[$ tel que $f(c) = f(b)$. Ceci contredit l'injectivité de f. Si $f(b) < f(a) < f(x)$, le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à la fonction continue $f : [x, b] \to F$ assure qu'il existe $c \in]x, b[$ tel que $f(c) = f(a)$. Ceci contredit aussi l'injectivité de f.

On montre de même que $\min\{f(a), f(b)\} < f(x)$.

Deuxième partie. Pour tous $c < d$ dans I, montrons que f est strictement monotone sur $[c, d]$. Supposons d'abord que $f(c) < f(d)$ et soit $c \leqslant x_1 < x_2 \leqslant d$. La première partie appliquée à $c \leqslant x_1 < d$ assure que $f(c) \leqslant f(x_1) < f(d)$ et, appliquée ensuite à $x_1 < x_2 \leqslant d$, que $f(x_1) < f(x_2) \leqslant f(d)$. Ceci prouve que f est strictement croissante sur $[c, d]$. De même, f est strictement décroissante sur $[c, d]$ si $f(c) > f(d)$.

Troisième partie. Vérifions que f est strictement monotone sur I en supposant le contraire : il existe $x_1 < x_2$ dans I et $x_3 < x_4$ dans I tels que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et $f(x_3) \geqslant f(x_4)$. Mais alors f ne serait pas strictement monotone sur $[c, d]$, où

$$c = \min\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{et} \quad d = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

en contradiction avec la deuxième partie. ■

5.3.29 Corollaire

Toute fonction $f : I \to F$ bijective continue sur l'*intervalle* I admet une fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ qui est continue strictement monotone sur F.

5.3.30 Fonction arc sinus

La fonction $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, définie par $f(x) = \sin x$, étant surjective strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (fig. 5.5), elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, appelée fonction *arc sinus* et notée arcsin (fig. 5.6). Ainsi, par définition, la relation $y = \arcsin x$ est équivalente à : $x = \sin y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

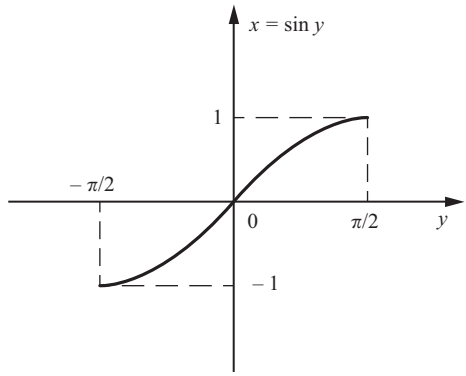


Fig. 5.5

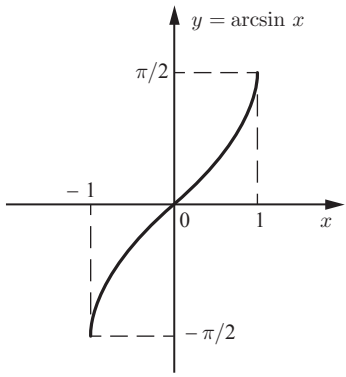


Fig. 5.6

La fonction arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue strictement croissante sur $[-1, 1]$.

5.3.31 Fonction arc cosinus

La fonction $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, définie par $f(x) = \cos x$, étant surjective strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (fig. 5.7), elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, appelée fonction *arc cosinus* et notée arccos (fig. 5.8). Ainsi, par définition, la relation $y = \arccos x$ est équivalente à : $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$.

La fonction arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

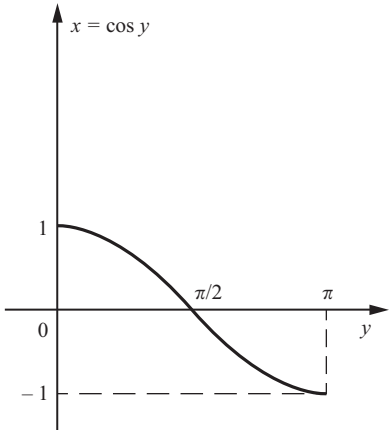


Fig. 5.7

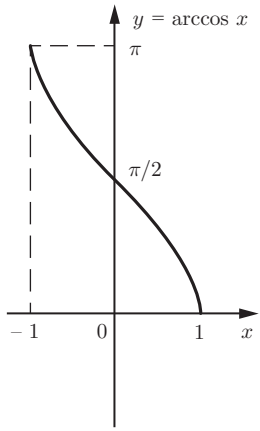


Fig. 5.8

5.3.32 Fonction arc tangente

La fonction $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \tan x$, est surjective strictement croissante sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$ (fig. 5.9).

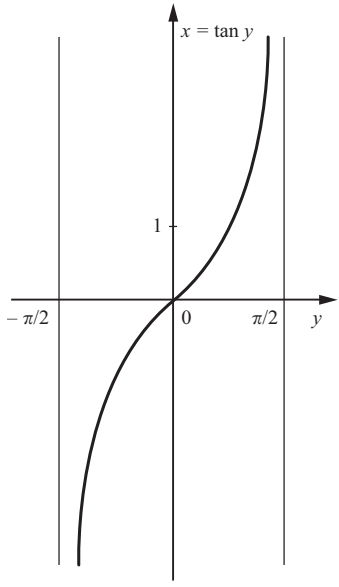


Fig. 5.9

Elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\pi/2,\ \pi/2[$, appelée fonction *arc tangente* et notée arctan (fig. 5.10). Ainsi, par définition, la relation $y = \arctan x$ est équivalente à : $x = \tan y$ et $y \in]-\pi/2,\ \pi/2[$.

La fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2,\ \pi/2[$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

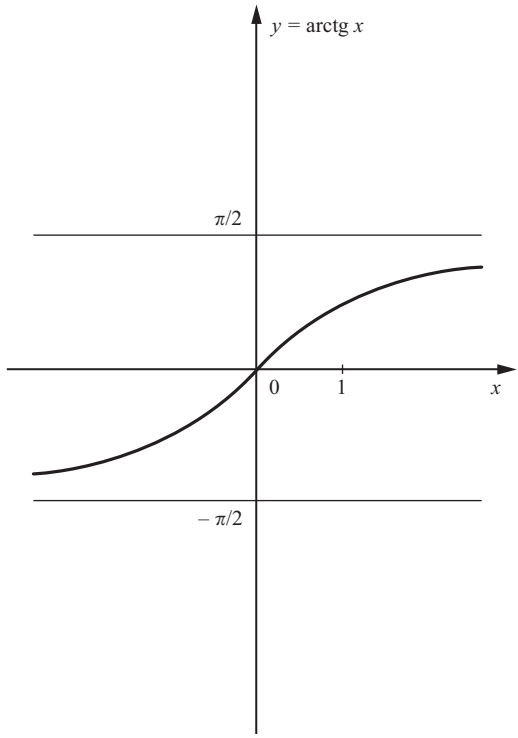


Fig. 5.10

5.3.33 Fonction arc cotangente

La fonction $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \cot x$, est surjective strictement décroissante sur $]0, \pi[$ (fig. 5.11).

Elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$, appelée fonction *arc cotangente* et notée arccot (fig. 5.12). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{arccot} x$ est équivalente à : $x = \cot y$ et $y \in]0, \pi[$.

La fonction $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$ est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5.3.34 Fonction continue et périodique

Supposons que $f : E \to F$ soit une fonction périodique définie au voisinage de tout point de E, non constante et continue. Alors il existe un nombre réel $T > 0$ tel que les périodes de f sont les multiples entiers de T.

DÉMONSTRATION. Pour alléger les notations, supposons que $0 \in E$. Observons d'abord qu'étant donné une période $P \in]0, +\infty[$ de f et $x \in E$, on a

$$x \in [nP, (n+1)P[\quad \text{avec} \quad n = [x/P]$$

(la partie entière de x/P). Il en résulte $f(x) = f(x - nP)$ avec $x - nP \in [0, P[$. D'où $f(E) = f([0, P[\cap E)$.

D'autre part, si P_1 et P_2 sont deux périodes de f et $n \in \mathbb{Z}$, alors $P_1 + P_2$ et nP_1 sont aussi des périodes de f.

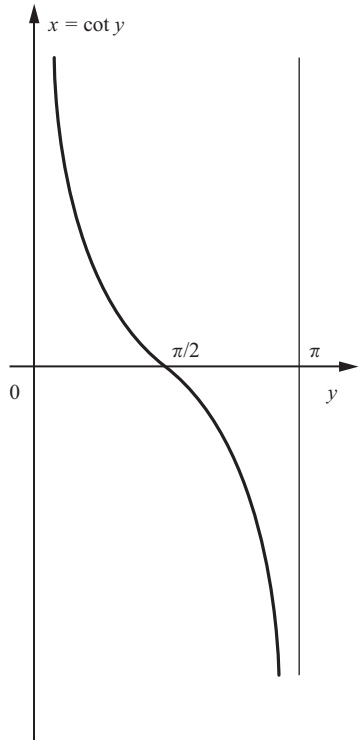


Fig. 5.11

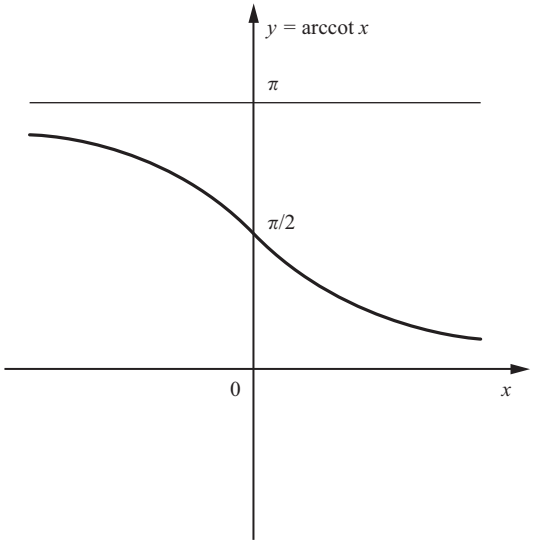


Fig. 5.12

Désignons par B l'ensemble des périodes positives de la fonction f. Étant donné que f est périodique, l'ensemble B n'est pas vide ; ce qui implique que le nombre réel $T = \inf B$ existe. Il découle immédiatement de cette définition que $T \geqslant 0$ et qu'il existe une suite (T_n) d'éléments de B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$.

Montrons que f est constante si $T = 0$. La continuité de f en 0 assure que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f([-\delta, \delta] \cap E) \subset [f(0) - \epsilon, f(0) + \epsilon]$. En choisissant $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \in]0, \delta]$, on obtient

$$f(E) = f([0, T_n[\cap E) \subset f([-\delta, \delta] \cap E) \subset [f(0) - \epsilon, f(0) + \epsilon] .$$

Comme $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, f est constante.

Or f est supposée ne pas être constante et donc $T > 0$. De plus, pour tout $x \in E$:

$$f(x + T) = \lim_{n\to+\infty} f(x + T_n) = f(x) ;$$

on en conclut que T est la plus petite période positive de f.

Par ailleurs, on sait que tout multiple entier de T est une période de f. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela, soit $P \neq 0$ une période de f. Alors $P \in [nT, (n + 1)T[$ avec $n = [P/T]$, et $P - nT$ est une période de f appartenant à l'intervalle $[0, T[$. D'où $P - nT = 0$ et $P = nT$. ■

5.3.35 Définition de la période d'une fonction continue

Si $f : E \to F$ est une fonction périodique définie au voisinage de tout $x \in E$, non constante et continue, la plus petite période positive T de f est appelée *la période* de la fonction f.

5.3.36 Fonction lipschitzienne

Soit k un nombre réel positif. Une fonction $f : E \to F$ est dite *lipschitzienne dans le rapport* k, ou encore *k-lipschitzienne* si pour tout couple d'éléments x, y de E : $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

5.3.37 Fonction contractante

Une fonction k-lipschitzienne, où $k \in]0, 1[$, est dite *contractante dans le rapport k,* ou encore *k-contractante.*

5.3.38 Théorème du point fixe de Banach

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-contractante. Alors l'équation $x - f(x) = 0$ admet une et une seule solution $c \in \mathbb{R}$ (appelée un *point fixe* de f).

De plus, pour tout choix de $a \in \mathbb{R}$, la suite définie récursivement par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

converge vers c.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite (x_n) de nombres réels définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a \quad (a \text{ arbitrairement choisi dans } \mathbb{R}).$$

En premier lieu, on remarque que pour tout $n \geqslant 1$:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant k|x_n - x_{n-1}| \ ;$$

ce qui implique que pour tout entier naturel n :

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n |f(a) - a|.$$

Ainsi, on obtient que pour tout couple d'entiers naturels $m > n$:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leqslant k^{m-1}|f(a) - a| + \ldots + k^n |f(a) - a| \\ &\leqslant k^n |(1 + \ldots + k^{m-n-1})|f(a) - a| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}|f(a) - a|. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de cette inégalité que la suite (x_n) est une suite de Cauchy ; ce qui implique qu'elle converge. Comme d'autre part f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$c = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c).$$

Reste à démontrer l'unicité du point fixe c. Pour cela, supposons que pour les deux nombres réels c_1 et c_2 : $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$. Alors,

$$|c_1 - c_2| \ = \ |f(c_1) - f(c_2)| \leqslant k|c_1 - c_2|.$$

Étant donné que $0 < k < 1$, ce dernier résultat n'est possible que si $c_1 = c_2$. ■

5.3.39 Remarques

- Soit $k \in]0, 1[$. On montre de même que toute fonction k-contractante $f : I \to I$ admet un unique point fixe dans I si I est un intervalle *fermé* de la forme $I = [a, b]$ avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $I =]-\infty, a]$ $(a \in \mathbb{R})$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction k-lipschitzienne avec $k \geqslant 1$, on ne peut rien dire à priori sur l'existence ou l'unicité de ses points fixes. Par exemple, l'application identique de $\mathbb{R}$ admet une infinité de points fixes, tandis que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

  $$g(x) = x + 1$$

  n'en admet aucun.

5.4 Suites de fonctions

5.4.1 Définition d'une suite de fonctions

On désigne par $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans F. Une *suite* d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ est une application de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathscr{F}(E, F)$. On note par f_n la *fonction image* de l'entier naturel n par cette application ; la suite elle-même étant alors notée (f_n).

Nous allons étudier dans cette section, comme nous l'avons déjà fait pour les suites de nombres réels, la convergence des suites de fonctions. Principalement, nous étudierons deux sortes de convergence : la convergence simple qui est une convergence ponctuelle et la convergence uniforme qui est une convergence globale. Nous montrerons que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, mais que la réciproque n'est pas vraie. D'autre part, nous verrons que l'intérêt de la convergence uniforme réside dans le fait qu'elle conserve certaines propriétés par passage à la limite, alors que ces propriétés ne sont pas nécessairement conservées dans le cas de la convergence simple ; par exemple, la propriété de continuité.

5.4.2 Définition de la convergence simple

On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ *converge simplement* vers la fonction $f : E \to F$ si pour tout élément x de E, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Une telle fonction f étant unique, on dit que f est la *limite simple* de la suite (f_n).

5.4.3 Exemple

À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 1 - x^n$. On vérifie facilement que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 si $x \in [0, 1[$ et zéro si $x = 1$.

Il découle immédiatement de cet exemple que la limite simple d'une suite de fonctions continues en un point n'est pas nécessairement continue en ce point. Nous verrons par la suite, qu'un tel résultat ne peut pas se produire lorsque la suite (f_n) converge uniformément vers f.

5.4.4 Définition de la convergence uniforme

On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ *converge uniformément* vers la fonction $f : E \to F$ si, à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$ (fig. 5.13).

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ. Étant donné qu'une telle fonction f est unique, on dit que f est la *limite uniforme* de la suite (f_n). D'autre part, on vérifie facilement que si f est la limite uniforme d'une suite (f_n), elle en est aussi la limite simple. Autrement dit, si la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f, alors elle converge aussi simplement vers cette fonction.

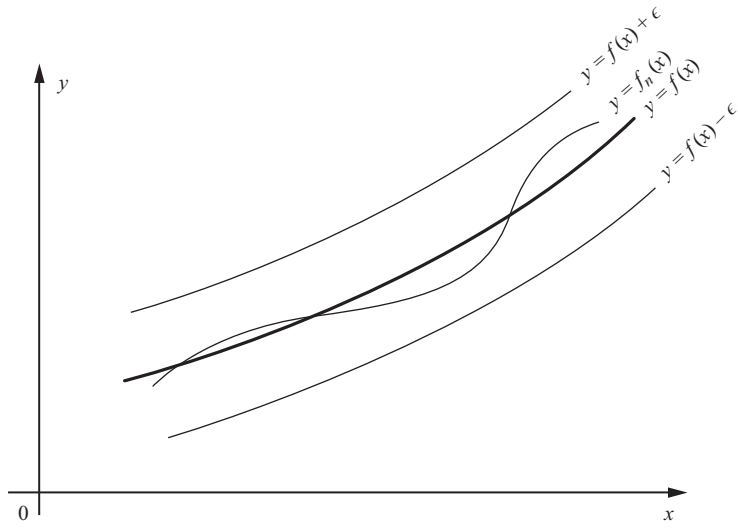


Fig. 5.13

5.4.5 Exemple

Associons à chaque entier naturel n, la fonction $f_n :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{x}.$$

La suite (f_n) ainsi obtenue converge uniformément vers la fonction $f :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $]0, \frac{1}{2}[$, fait correspondre le nombre réel $1/x$. Ce résultat devient évident, lorsque l'on constate que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[$ et tout entier $n \geqslant 2$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

5.4.6 Linéarité de la convergence uniforme

Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'éléments de $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ qui convergent respectivement uniformément vers les fonctions f et g. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers la fonction $\alpha f + \beta g$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E} |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| &\leqslant |\alpha| \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \\ &+ |\beta| \sup_{x \in E} |g_n(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

■

5.4.7 Continuité de la limite uniforme

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}(E,F)$ convergeant uniformément vers la fonction f. On suppose, de plus, que toutes les fonctions f_n sont continues en x_0. Alors, la fonction f est continue en x_0.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Le fait que f soit la limite uniforme de la suite (f_n) implique qu'il existe un entier naturel p pour lequel

$$\sup_{y\in E}|f_p(y)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}\ ;$$

ce qui entraîne que pour tout élément y de E :

$$|f_p(y)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, il résulte de la continuité de la fonction f_p en x_0 qu'il existe un nombre réel $\delta>0$ tel que pour tout $x\in E$ vérifiant $|x-x_0|\leqslant\delta$:

$$|f_p(x)-f_p(x_0)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, on obtient que pour tout élément x de E vérifiant $|x-x_0|\leqslant\delta$:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|\leqslant&|f(x)-f_p(x)|+|f_p(x)-f_p(x_0)|\\&+|f_p(x_0)-f(x_0)|\leqslant\epsilon.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

5.4.8 Remarques

À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}(n+1)^2x & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{n+1}\right]\\ -(n+1)^2x+2(n+1) & \text{si } x\in\left]\dfrac{1}{n+1},\dfrac{2}{n+1}\right]\\ 0 & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\dfrac{2}{n+1},+\infty\right[.\end{cases}$$

Les fonctions f_n (fig. 5.14) sont continues sur $\mathbb{R}$ et, de plus, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vaut zéro sur tout $\mathbb{R}$. Par contre, la convergence n'est pas uniforme puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=n+1.$$

Cet exemple nous montre que même pour une suite (f_n) de fonctions continues dont la limite simple f est continue, la convergence simple n'entraîne pas obligatoirement la convergence uniforme. Néanmoins, il existe des cas où cela se produit, comme nous allons le voir dans notre prochain paragraphe avec le théorème de Dini.

Une fonction $f:E\to F$ continue en x_0 peut très bien être la limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions qui sont toutes discontinues en x_0. Par exemple, la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vaut zéro sur $\mathbb{R}$ est la limite uniforme de la suite (f_n) définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1} & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}^*.\end{cases}$$

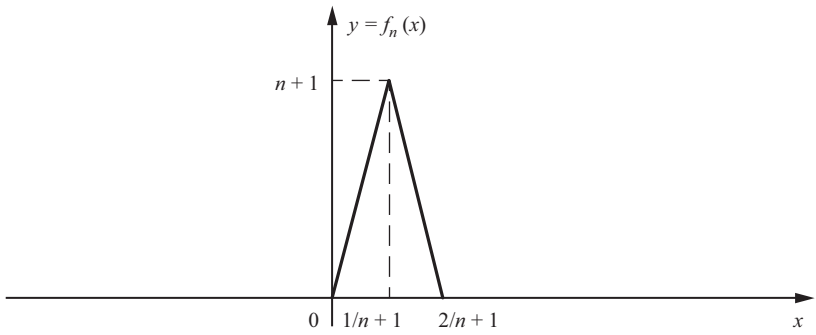


Fig. 5.14

5.4.9 Théorème de Dini

Soit $a < b$ deux nombres réels. Toute suite croissante (resp. décroissante) (f_n) d'éléments de $C([a,b],F)$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [a,b] \to F$, converge uniformément vers f.

On rappelle que $C([a,b],F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans F. D'autre part, une suite de fonctions (f_n) est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si pour tout entier $n \geqslant 0 : f_{n+1} \geqslant f_n$ (resp. $f_{n+1} \leqslant f_n$).

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, faisons l'hypothèse que la suite (f_n) est croissante (l'autre cas se traitant de manière analogue).

Raisonnons par l'absurde en supposant que la convergence n'est pas uniforme. Il existe ainsi $\epsilon \in]0,+\infty[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel $n_k \geqslant k$ vérifiant

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_{n_k}(x) - f(x)| > \epsilon.$$

De plus, pour $k \geqslant 1$, on peut encore demander que $n_k > n_{k-1}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe donc $x_k \in [a,b]$ tel que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \epsilon.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (§ 3.6.3), (x_k) admet une sous-suite (x_{k_j}) qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}$. L'intervalle $[a,b]$ étant fermé, $x \in [a,b]$. Pour simplifier, posons pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$g_j = f_{n_{k_j}} \quad \text{et} \quad z_j = x_{k_j}\,.$$

Pour cet $\epsilon \in]0,+\infty[$ et ce $x \in [a,b]$, étant donné que la suite croissante $(g_j(x))$ converge vers $f(x)$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leqslant f(x) - g_p(x) \leqslant \frac{\epsilon}{3}\ ;$$

par suite, il résulte de la continuité des fonctions f et g_p qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément y de $[a,b]$ vérifiant $|y - x| \leqslant \delta$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad |g_p(y) - g_p(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

En choisissant $j \in \mathbb{N}$ satisfaisant les deux conditions $j \geqslant p$ et $|z_j - x| \leqslant \delta$, on obtient

$$0 \leqslant f(z_j) - g_j(z_j) \leqslant f(z_j) - g_p(z_j)$$

et la contradiction

$$\begin{aligned}\epsilon < |f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| = |g_j(z_j) - f(z_j)| \leqslant |g_p(z_j) - f(z_j)| \\ \leqslant |g_p(z_j) - g_p(x)| + |g_p(x) - f(x)| + |f(x) - f(z_j)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

■

5.4.10 Exemple

Considérons la suite de polynômes (P_n) définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \quad \text{et} \quad P_0(x) = 0.$$

En remarquant que pour tout entier naturel n et tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))),\end{aligned}$$

on obtient, par un simple raisonnement par récurrence, que $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$; ce qui entraîne que la suite (P_n) est croissante. Ainsi, pour tout élément x de $[0,1]$, la suite $(P_n(x))$ de nombres réels est croissante et bornée ; ceci implique qu'elle converge vers un nombre réel $f(x)$ satisfaisant la relation

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - f^2(x)).$$

Puisque $f(x) \geqslant 0$, on déduit de cette égalité que $f(x) = \sqrt{x}$. Finalement, le théorème de Dini nous permet d'affirmer que dans l'intervalle $[0,1]$, la suite croissante de polynômes (P_n) converge uniformément vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

5.4.11 Permutation des limites

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers une fonction f. De plus on suppose que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n admet une limite lorsque x tend vers x_0. Alors, si la suite $(h_n(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$ est convergente, on obtient que la limite $\lim\limits_{x \to x_0}(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x))$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n \to +\infty}(\lim_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0}(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)).$$

DÉMONSTRATION. Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x_0) = h(x_0)$, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un entier naturel m_0 tel que pour tout entier $n \geqslant m_0$:

$$|h_n(x_0) - h(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, étant donné que la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout entier $n \geqslant k_0$:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, en posant $n_0 = \max\{m_0, k_0\}$, on obtient que pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)| + |h_{n_0}(x_0) - h(x_0)| \\ &\leqslant \frac{2\epsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)|. \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = h_{n_0}(x_0)$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$:

$$|f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalement, on obtient que les relations $x \in E$ et $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - h(x_0)| \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = h(x_0)$; ce qui revient à dire que

$$\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)).$$

■

5.4.12 Remarque

À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et, de plus, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut un si $x = 0$ et zéro si $x \in \mathbb{R}^*$. Étant donné que la fonction f est discontinue en $x = 0$, la convergence ne peut pas être uniforme. Par contre, on vérifie facilement que pour tout entier naturel n et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f_n admet une limite lorsque x tend vers x_0 et que la suite $(h_n(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$ est convergente. Néanmoins,

$$\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to 0} f_n(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to 1} f_n(x)) = \lim_{x\to 1}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = 0.$$

Cet exemple nous montre que lorsque la convergence n'est pas uniforme, on ne peut rien dire à priori sur la légitimité de permuter les limites.

5.5 Exercices

5.5.1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1+\cos^2 x}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x\,\tan 2x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sqrt{1+x}-1)}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos\pi x}{\tan^2 \pi x}$

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\tan(\pi x/2)}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

13) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}-1\right)$.

5.5.2 En utilisant la définition, montrer que

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{x+1}=+\infty$.

5.5.3 Pour les deux fonctions $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geqslant 0\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases} \quad\text{et}\quad g(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x\geqslant 1\\ 1-x & \text{si } x<1,\end{cases}$$

calculer $g\circ f$ et $f\circ g$.

5.5.4 Soit f, $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions monotones. Montrer que la fonction composée $g\circ f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est aussi monotone.

5.5.5 Soit $f :]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x}.$$

1) Déterminer Im f.
2) Discuter la surjectivité et l'injectivité de la fonction f.

5.5.6 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, son application réciproque f^{-1} est aussi impaire.

5.5.7 Soit $f :]-1, 0[\to]0, 1[$ la fonction définie par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

1) Montrer que f est bijective.
2) Calculer f^{-1}.

5.5.8 Soit $f : E\to F$ et $g : F\to E$ deux fonctions telles que pour tout $x\in E$ et tout $y\in F$, on ait $f\circ g(y)=y$ et $g\circ f(x)=x$. Montrer que f est bijective et que $g=f^{-1}$.

5.5.9 Soit f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies respectivement par

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2 \quad \text{et} \quad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

1) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2) En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

5.5.10 Trouver la période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arcsin(\cos^2 x).$$

5.5.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = l$.

5.5.12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi une fonction périodique.
2) La réciproque est-elle vraie ?

5.5.13 Montrer que toute fonction continue périodique est bornée.

5.5.14 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x.$$

5.5.15 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0.$$

5.5.16 Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$: $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$.

5.5.17 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

5.5.18 Étudier la fonction $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1 - x^2) \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1}.$$

Faire sa représentation graphique.

5.5.19 Étudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - [1/x].$$

Faire sa représentation graphique.

5.5.20 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - x| + |x|$.

5.5.21 Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} + [x].$$

Peut-on la prolonger par continuité au point $x = 0$?

5.5.22 Déterminer l'ensemble des points où la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x[1/x] & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

5.5.23 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

est continue au point $x = 1/2$ et discontinue ailleurs.

5.5.24 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + |\sin \frac{1}{x}|}}{|x| + 1}.$$

Montrer qu'il n'est pas possible de la prolonger par continuité au point $x = 0$.

5.5.25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple de nombres réels t et $x : f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est continue.

5.5.26 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

5.5.27 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout couple de nombres réels x et $y : f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer qu'il existe une constante a telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = ax$.

5.5.28 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $]-\infty, 0\,[$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et continue au point $x = 0$. Montrer que $f(0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

5.5.29 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, 1[$ une fonction continue et (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1) Montrer que la suite (x_n) converge.
2) Calculer sa limite.
3) Calculer la somme suivante : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (x_k(1 - f(x_k)))$.

5.5.30 Soit f, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f > g$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $f(x) < g(x) + \lambda$.

5.5.31 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x) = l$.

5.5.32 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0,+\infty[$. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout élément x de $[0,+\infty[$, on ait : $|f(x)| \leqslant \alpha x + \beta$.

5.5.33 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $]a,b[$. Montrer que la fonction f admet une limite à droite au point $x = a$ et une limite à gauche au point $x = b$.

5.5.34 Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f([0,1]) \subset g([0,1])$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[0,1]$ pour lequel on ait : $f(c) = g(c)$.

5.5.35 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'à tout couple de nombres réels positifs α et β, on peut associer un élément c de $[a,b]$ de sorte que $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$.

5.5.36 Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[0,\pi]$ pour lequel on ait : $f(c) = f(c+\pi)$.

5.5.37 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

5.5.38 Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to a+} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = +\infty.$$

Montrer que pour tout nombre réel $\alpha > l$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède au moins une solution dans $]a,b[$.

5.5.39 Pour quelles valeurs des nombres réels α et β, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha^2 x^3 + x + \beta$ s'annule-t-elle exactement une fois dans l'intervalle [0,1] ?

5.5.40 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. De plus, on suppose que pour tout couple d'éléments x, y de $[0,1]$: $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1) Montrer que pour tout $a \in [0,1]$, la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a$$

converge.

2) En déduire que pour tout $x \in [0,1] : f(x) = x$.

5.5.41 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout nombre réel $x > 0$, on ait : $|f(x)| < x$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.
2) Montrer qu'à tout couple de nombres réels $0 < a < b$, on peut associer un nombre $\rho \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in]a,b[: |f(x)| < \rho x$.
3) Que devient ce résultat si $a = 0$?

5.5.42 À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + \sin\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

1) Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.
2) Calculer sa limite uniforme.

5.5.43 À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

1) Calculer la limite simple de la suite (f_n).
2) La convergence est-elle uniforme ?

5.5.44 À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x(1 + \sqrt[n]{nx}) \quad \text{et} \quad f_0(x) = 0.$$

1) En utilisant le théorème de Dini (§ 5.4.9), montrer que la suite (f_n) converge uniformément.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lim\limits_{x\to 2} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to 2} (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

5.5.45 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(x^2+1)^{n+1} - x^{2n+2}} \right).$$

Peut-on intervertir les deux limites ?

Chapitre 6

Calcul différentiel

6.1 Fonctions différentiables d'une variable réelle

6.1.1 Définition de la dérivée d'une fonction en un point

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable* en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée de la fonction f au point x_0* et on la note $f'(x_0)$.

6.1.2 Exemples

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors, pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2) = 3x_0^2.$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sin x$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\dfrac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\dfrac{x - x_0}{2}\right)} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0.$$

Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $h(x) = \cos x$, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-\sin\left(\dfrac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\dfrac{x - x_0}{2}\right)} \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = -\sin x_0.$$

6.1.3 Fonction différentiable en un point

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *différentiable en* x_0 s'il existe un nombre réel a et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes : S

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{x - x_0} = 0$;
- pour tout élément x de E : $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$.

6.1.4 Relation entre la dérivabilité et la différentiabilité d'une fonction

Une fonction $f : E \to F$ est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que f soit différentiable en x_0. Alors, il existe un nombre réel a et une fonction $r : E \to F$ tels que pour tout élément x de E :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Par suite, on obtient que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a;$$

ce qui implique que la fonction f est dérivable en x_0 et que sa dérivée $f'(x_0) = a$.

Réciproquement, supposons que la fonction f soit dérivable en x_0. Alors, pour tout élément x de E, on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)).$$

Étant donné que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

on en conclut que f est différentiable en x_0. ■

6.1.5 Remarques

Par la suite, les mots dérivable et différentiable seront toujours considérés comme synonymes.

Il est très important de remarquer que le nombre réel a défini au paragraphe 6.1.3 n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction f au point x_0, soit $f'(x_0)$; ce qui implique, entre autres, que la fonction $r : E \to F$ est unique.

6.1.6 Fonction dérivée

Soit $D(f')$ l'ensemble des éléments de E où la fonction $f : E \to F$ est différentiable. Si cet ensemble n'est pas vide, l'application de $D(f')$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément de $D(f')$, fait correspondre le nombre réel $f'(x)$, est appelée la *fonction dérivée* de f, ou tout simplement *la dérivée* de f et se note f'.

6.1.7 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en x_0 et C le graphique de cette fonction relativement à deux axes de coordonnées orthonormés $0x$ et $0y$. On désigne par P_0 le point de C ayant pour coordonnées $(x_0, y_0 = f(x_0))$ et par $P_1 \neq P_0$ le point de C ayant pour coordonnées $(x_1, y_1 = f(x_1))$ (fig. 6.1). Ainsi, la droite $d(P_1)$ passant par le point fixe P_0 et par le point P_1 a pour équation :

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

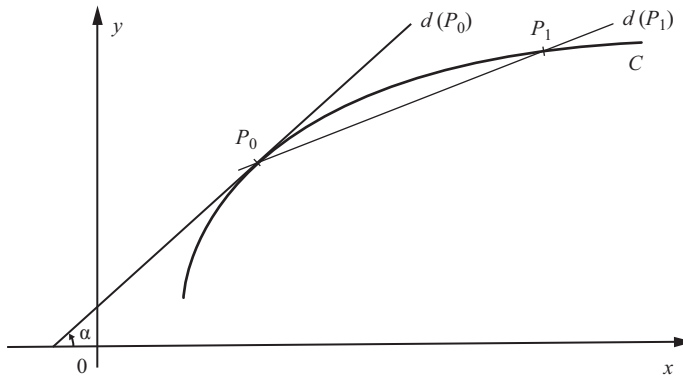


Fig. 6.1

En faisant tendre P_1 vers P_0, tout en restant sur la courbe C, on constate que la droite $d(P_1)$ tend vers une position limite définie par la droite $d(P_0)$ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Par définition, la droite $d(P_0)$ est appelée la *tangente* à la courbe C au point P_0. La dérivée est donc la *pente* de cette tangente ; par conséquent $f'(x_0) = \tan \alpha$, où α est l'angle entre l'axe $0x$ et la tangente.

6.1.8 Extension de la notion de dérivée

Si la fonction $f : E \to F$ est continue en x_0 et si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, on convient de dire que la fonction f admet une *dérivée infinie* au point x_0, bien que f ne soit alors pas dérivable en

x_0. Dans ce cas, le graphique C de la fonction f admet, au point d'abscisse x_0, une *tangente verticale* (parallèle à l'axe 0y). Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

admet une dérivée infinie au point $x_0 = 0$ (fig. 6.2).

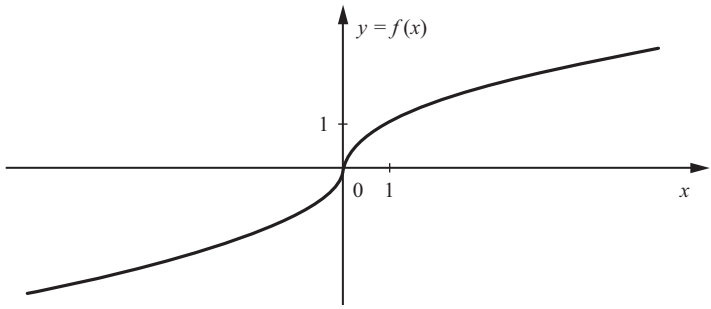


Fig. 6.2

6.1.9 Continuité d'une fonction différentiable

Une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 est continue en ce point.

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $x \neq x_0$ de E, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Étant donné que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

on obtient que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; ce qui revient à dire que la fonction f est continue au point x_0. ■

6.1.10 Remarque

Une fonction peut très bien être continue en x_0 sans pour autant être différentiable en ce point. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est continue en $x_0 = 0$, mais n'est pas différentiable en ce point.

6.1.11 Opérations algébriques sur les fonctions différentiables

Soit $f, g : E \to F$ deux fonctions différentiables en x_0. Alors,

1) pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est différentiable en x_0 et
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$
2) la fonction fg est différentiable en x_0 et
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3) Si pour tout élément x de E : $g(x) \neq 0$; alors la fonction f/g est différentiable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

DÉMONSTRATION.

2) Pour tout élément $x \neq x_0$ de E, on peut écrire

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction g étant différentiable en x_0, elle est continue en x_0 ; ce qui revient à dire que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Ainsi, on obtient que

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3) En remarquant que pour tout élément $x \neq x_0$ de E :

$$\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

et que la fonction g est continue en x_0, on obtient que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

■

6.1.12 Exemples

Soit n un entier positif et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n$. Alors pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$, la fonction f_n est différentiable et

$$f_n'(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

En effet,

$$f_n'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x\, x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

Soit p un entier positif et $g_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_p(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Alors, pour tout nombre réel $x_0 \neq 0$, la fonction g_p est différentiable et

$$g_p'(x_0) = \frac{-p}{x_0^{p+1}}.$$

Pour vérifier ce résultat, considérons les deux fonctions auxiliaires h, $f_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $h(x) = 1$ et $f_p(x) = x^p$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g_p(x) = \frac{h(x)}{f_p(x)},$$

on obtient que

$$g_p'(x_0) = \left(\frac{h}{f_p}\right)'(x_0) = \frac{-p\, x_0^{p-1}}{(x_0^p)^2} = \frac{-p}{x_0^{p+1}}.$$

Soit $f : E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan x$, et soit x_0 un élément quelconque de E. Alors, en considérant les deux fonctions auxiliaires g, $h : E \to F$ définies respectivement par $g(x) = \sin x$ et $h(x) = \cos x$, on obtient que

$$f'(x_0) = \left(\frac{g}{h}\right)'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0.$$

6.1.13 Fonction réciproque d'une fonction différentiable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction continue, surjective, strictement monotone, différentiable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors, F est un intervalle ouvert et f admet une fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ qui est différentiable au point $y_0 = f(x_0)$. De plus, on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que I soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ implique que F est aussi un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (§ 5.3.25). D'autre part, f est bijective et sa fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ est continue sur F (§ 5.3.27). D'où

$$x_0 = f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y).$$

Ainsi, en remarquant que pour tout élément $y \neq y_0$ de F

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}},$$

on obtient que

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

Remarque. Au lieu de supposer "$f : I \to F$ une fonction continue, surjective, strictement monotone", on peut supposer "$f : I \to F$ une fonction bijective continue". En effet, toute fonction injective et continue sur un intervalle est stritement monotone (§ 5.3.28).

6.1.14 Exemples

- Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ définie par $f(y) = \arctan y$. Par définition, on sait que f est la fonction réciproque de la fonction continue $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \tan x$. D'autre part, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[: g'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$. Ainsi, pour tout nombre réel y_0, la fonction f est différentiable en y_0. Par suite, en posant $x_0 = f(y_0)$, on obtient que

$$f'(y_0) = (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

- Soit n un entier positif, $I = \mathbb{R}$ si n est impair et $I = [0, +\infty[$ si n est pair. On note par $\sqrt[n]{\ } : I \to I$ la fonction réciproque de la fonction continue $x \to x^n \in I$ avec $x \in I$. Soit $f : I \to I$ et $g : I \to I$ définies par $f(y) = \sqrt[n]{y}$ et $g(x) = x^n$. Étant donné que pour tout $x \in I\backslash\{0\}$ $: g'(x) = nx^{n-1} \neq 0$; on en déduit que pour tout nombre réel $y_0 \in I\backslash\{0\}$, la fonction f est différentiable en y_0. Par suite, en posant $x_0 = f(y_0)$, on obtient que

$$f'(y_0) = (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y_0})^{n-1}}.$$

6.1.15 Différentiabilité de la composée de deux fonctions différentiables

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en x_0 et $g : G \to H$ une fonction différentiable en $f(x_0)$. Supposons de plus que $f(E) \subset G$. Alors, la fonction composée $g \circ f : E \to H$ est différentiable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et que pour tout élément $x \neq x_0$ de E :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} 0 = g'(f(x_0)) \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) = f(x_0) \\ \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) \neq f(x_0), \end{cases}$$

on obtient que

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

■

6.1.16 Exemple

Soit p et q deux entiers positifs et $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $h(x) = \sqrt[q]{x^p}$. Par suite, en considérant les deux fonctions auxiliaires $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définies respectivement par $f(x) = x^p$ et $g(y) = \sqrt[q]{y}$, on obtient que $h = g \circ f$. Ainsi, pour tout nombre réel $x_0 > 0$, la fonction h est différentiable en x_0 et

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = \frac{p}{q} \sqrt[q]{x_0^{p-q}}.$$

6.1.17 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Une fonction $f : E \to F$ définie à droite (resp. à gauche) d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet dans $\mathbb{R}$ une limite à droite (resp. à gauche) au point x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) de la fonction f au point x_0 et on la note $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

6.1.18 Relation entre les différentes dérivées

Une fonction $f : E \to F$ admet une dérivée au point x_0 si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche au point x_0 existent et sont égales.

6.1.19 Dérivée à droite infinie, dérivée à gauche infinie

Si la fonction $f : E \to F$ est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \left(\text{resp.} \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \right),$$

on convient de dire que la fonction f admet au point x_0 une *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) *infinie*.

6.1.20 Fonction différentiable sur un ensemble

Soit G un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f : E \to F$ est dite *différentiable sur* G si elle est différentiable en tout point de G.

Remarque. Si $G = E$, ceci implique que f est définie au voisinage de tout point de E et donc que E est ouvert.

6.1.21 Fonction n fois différentiable

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable sur E. Si la fonction $f' : E \to \mathbb{R}$ est elle-même différentiable sur E, on note f'' sa fonction dérivée et elle est appelée la *dérivée seconde* de f. Plus généralement, les dérivées successives de f, si elles existent, seront notées $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. La fonction $f^{(p)}$ étant alors appelée la *dérivée d'ordre* p, ou encore la *p-ième dérivée* de f.

Nous dirons que la fonction $f : E \to F$ est *n fois différentiable* sur E si elle admet une dérivée d'ordre n. D'autre part, lorsque f est p fois différentiable sur E pour tout entier naturel p, on dit que f est *indéfiniment différentiable* sur E.

6.1.22 Fonction n fois continûment différentiable

Une fonction $f : E \to F$ est dite *n fois continûment différentiable* sur E si elle admet une dérivée d'ordre n continue en tout point de E.

6.1.23 Notations

On désigne par $C^n(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F qui sont n fois continûment différentiables sur E. D'autre part, on désigne par $C^\infty(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F qui sont indéfiniment différentiables sur E.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$C^\infty(E, F) \subset C^{n+1}(E, F) \subset C^n(E, F) \subset C^1(E, F).$$

6.1.24 Remarque

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Observons d'abord que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x},$$

on obtient que f est différentiable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est discontinue au point $x = 0$. En effet la limite $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Cet exemple nous montre qu'une fonction $f : E \to F$ peut être différentiable sur E sans pour autant être continûment différentiable sur E.

6.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

6.2.1 Introduction

En donnant dans la section précédente les principales définitions et règles de calcul concernant les dérivées, nous sommes maintenant en mesure d'établir les propriétés les plus importantes que possèdent les fonctions différentiables. En particulier, nous allons démontrer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis qui sont sans doute les deux théorèmes les plus utiles et les plus employés en calcul différentiel ; nous pourrons le constater à de nombreuses occasions.

6.2.2 Condition nécessaire pour qu'une fonction ait un extremum local en un point

Si une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la fonction f possède un maximum (resp. minimum) local au point x_0. Pour $x \in]x_0, +\infty[$ suffisamment proche de x_0, on a $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ (resp. $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$) et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \quad (\text{resp. } \geqslant 0).$$

D'où

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ (resp. } \geqslant 0).$$

De même

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ (resp. } \leqslant 0),$$

ce qui implique que $f'(x_0) = 0$. ■

6.2.3 Remarque

Il faut remarquer que la dérivée d'une fonction f peut très bien s'annuler en un point x_0, sans pour autant que f possède un extremum local en ce point. Par exemple, la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ s'annule en zéro ; mais par contre, cette fonction n'admet aucun extremum en ce point.

Au paragraphe 6.5.1, nous étudierons plus en détail cette question. Entre autres, nous verrons que si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction admet un extremum local au point x_0.

6.2.4 Point stationnaire

Si $f : E \to F$ est une fonction différentiable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un *point stationnaire* de la fonction f.

6.2.5 Recherche des points où une fonction continue atteint ses extrema

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue. Grâce au résultat obtenu au paragraphe 5.3.21, nous savons que les deux ensembles

$$A = \{y \in [a, b] : f(y) = \max_{x \in [a,b]} f(x)\}$$

et

$$B = \{z \in [a, b] : f(z) = \min_{x \in [a,b]} f(x)\}$$

ne sont pas vides. D'autre part, on déduit de la condition nécessaire démontrée au paragraphe 6.2.2 que les éléments de A et de B se trouvent forcément parmi les points suivants :

- les bornes de l'intervalle $[a, b]$, à savoir a et b ;
- les points stationnaires de la fonction f ;
- les points de $]a, b[$ n'appartenant pas à $D(f')$.

6.2.6 Exemple

On se propose de trouver les points où la fonction $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ atteint ses extrema. Pour cela, calculons sa dérivée

$$f'(x) = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Il résulte de ce calcul que $D(f') =]-1, 0[\cup]0, 2[$ et que l'unique point stationnaire de f est $x = 4/5$. La fonction f étant continue sur $[-1, 2]$, on sait (§ 6.2.5) que tous les points où f atteint son maximum ou son minimum sur $[-1, 2]$ se trouvent obligatoirement parmi les points suivants : -1, 0, $4/5$ et 2. Par suite, en constatant que

$$f(-1) = -3, \quad f(0) = f(2) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}},$$

on obtient que la fonction f atteint son minimum au point $x = -1$ et son maximum aux points $x = 0$ et $x = 2$ (fig. 6.3).

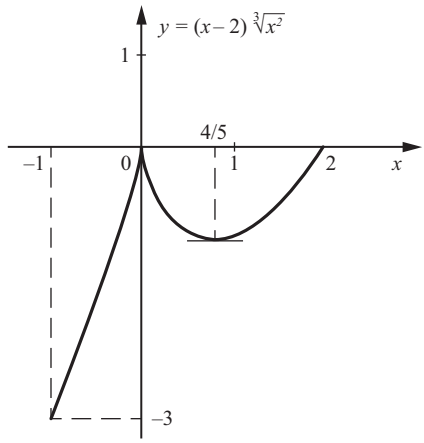


Fig. 6.3

6.2.7 Théorème de la valeur intermédiaire pour la dérivée

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction différentiable sur $]a, b[$. De plus, on suppose que les deux nombres réels $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ existent et que $f'_d(a) < f'_g(b)$ (resp. $f'_d(a) > f'_g(b)$). Alors, à tout nombre réel α vérifiant $f'_d(a) < \alpha < f'_g(b)$ (resp. $f'_g(b) < \alpha < f'_d(a)$), on peut associer un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \alpha$.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, supposons que $f'_d(a) < \alpha < f'_g(b)$ (l'autre cas se traitant de manière analogue) et soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $h(x) = f(x) - \alpha x$. Cette fonction étant continue sur $[a, b]$,

elle atteint son minimum en un point c de son domaine de définition. Étant donné que $h'_d(a) < 0$, il existe un élément x_1 de $[a, b]$ tel que $h(x_1) < h(a)$; ce qui implique que $c \neq a$. De même, puisque $h'_g(b) > 0$, il existe un élément x_2 de $[a, b]$ tel que $h(x_2) < h(b)$; ce qui entraîne que $c \neq b$. D'où $c \in]a, b[$. Par suite, en utilisant le résultat donné au paragraphe 6.2.2, on obtient que $h'(c) = 0$; ce qui revient à dire que $f'(c) = \alpha$. ■

6.2.8 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction dont la dérivée est monotone sur I. Alors, f' est continue sur I.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce corollaire, faisons l'hypothèse que f' est croissante sur I (l'autre cas se traitant de manière analogue), et supposons que f' ne soit pas continue en un point x_0. Alors,

$$\alpha_1 = \sup\{f'(x) : x \in I, x < x_0\} < \inf\{f'(x) : x \in I, x > x_0\} = \alpha_2.$$

Ce résultat implique que pour tout élément $\alpha \neq f'(x_0)$ de $]\alpha_1, \alpha_2[$, il n'existe aucun point c de I tel que $f'(c) = \alpha$; ce qui est en contradiction avec le théorème 6.2.7. D'où le résultat. ■

6.2.9 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. Si la fonction f est constante sur $[a, b]$, le résultat est évident ; puisque pour tout $x \in]a, b[$, on a $f'(x) = 0$. Supposons à présent que f ne soit pas constante sur $[a, b]$; ce qui implique, par la continuité de f sur $[a, b]$, qu'il existe deux éléments c_1 et c_2 de $[a, b]$ tels que

$$f(c_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \neq \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(c_2).$$

Par suite, étant donné que $f(a) = f(b)$, on obtient que l'un au moins des deux nombres réels c_1 ou c_2 est strictement compris entre a et b ; ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 6.2.2, que l'un au moins des deux nombres $f'(c_1)$ ou $f'(c_2)$ est nul. ■

6.2.10 Remarques

Soit C le graphique de la fonction $f : [a, b] \to F$. Alors le théorème de Rolle exprime qu'il existe au moins un point de C, distinct des extrémités, où la tangente à la courbe C en ce point est parallèle à l'axe $0x$ (fig. 6.4).

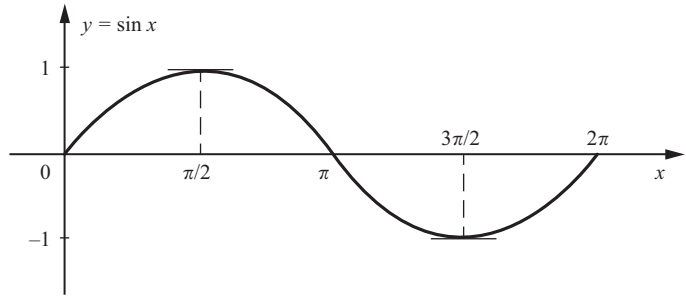


Fig. 6.4

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ (fig. 6.5)

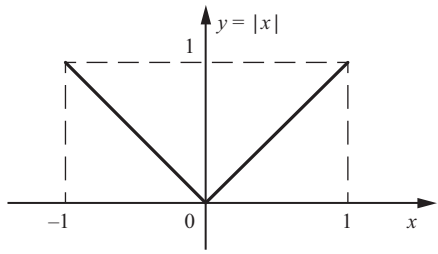


Fig. 6.5

Sa dérivée ne s'annule en aucun point de $]-1, 0[\cup]0, 1[$. Cette fonction satisfait toutes les hypothèses du théorème de Rolle, sauf la différentiabilité au point $x = 0$.

6.2.11 Extension du théorème de Rolle

Soit $f :]a, b[\to F$ une fonction différentiable sur $]a.b[$ telle que $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$). Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in]a, b[$. Étant donné que $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < x_0 < \beta < b$ et

$$f(x_0) < f(\alpha), \quad f(x_0) < f(\beta) \quad (\text{resp. } f(x_0) > f(\alpha), \quad f(x_0) > f(\beta)\,).$$

Puisque f est continue sur $[\alpha, \beta]$, il existe un élément c de $[\alpha, \beta]$ tel que

$$f(c) = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \quad (\text{resp. } f(c) = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)).$$

Comme plus précisément $c \in]\alpha, \beta[$ et f est différentiable en c, on obtient que $f'(c) = 0$. ■

6.2.12 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Il découle des hypothèses faites sur f que la fonction g est continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Comme de plus $g(a) = g(b)$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. En constatant que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on obtient que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■

6.2.13 Interprétation géométrique du théorème des accroissements finis

Soit C le graphique de la fonction $f : [a, b] \to F$. Alors, le théorème des accroissements finis exprime qu'il existe au moins un point de C, distinct des extrémités, où la tangente à la courbe C en ce point est parallèle à la corde joignant $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (fig. 6.6).

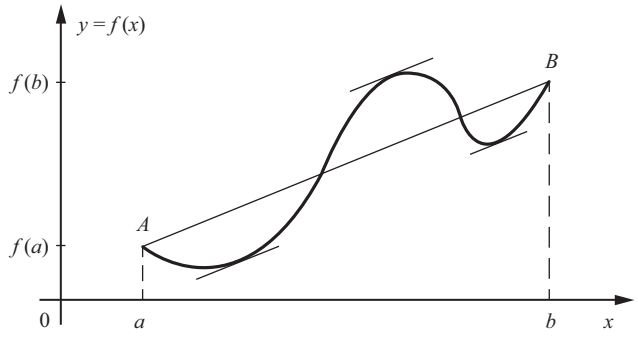


Fig. 6.6

6.2.14 Fonctions dont les dérivées sont égales

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to F$ deux fonctions continues ayant des dérivées égales en tout point de $]a, b[$. Alors, il existe une constante c telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) = g(x) + c$.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Il résulte des hypothèses faites sur f et g que h est une fonction continue sur $[a, b]$ dont la dérivée est nulle en tout point de $]a, b[$. Par suite, en fixant $x \in]a, b]$ et en utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[a, x]$, on obtient l'existence de $c_x \in]a, x[$ tel que

$$h(x) - h(a) = h'(c_x)(x - a) = 0.$$

D'ou le résultat. ■

6.2.15 Remarque

Si, dans l'énoncé du paragraphe 6.2.14, on ne suppose pas que le domaine de définition des fonctions f et g est un intervalle I, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai, même si les autres hypothèses sont vérifiées. Par exemple, les deux fonctions f, $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ont des dérivées égales en tout point de $\mathbb{R}^*$; mais par contre, ces deux fonctions ne sont pas égales à une constante près.

6.2.16 Fonction différentiable et monotone

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors,

1) f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in]a, b[$;
2) si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION.

1) Si f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$, alors

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geqslant 0 \quad (\text{resp. } \leqslant 0)$$

pour tous $z \neq x$ dans $]a, b[$. D'où

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geqslant 0 \quad (\text{resp. } \leqslant 0).$$

Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur $]a, b[$, choisissons $x_1 < x_2$ dans $[a, b]$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$ et donc $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ (resp. $f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0$).

2) Cette fois-ci, ce dernier argument donne $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (resp. $f(x_2) - f(x_1) < 0$).

■

6.2.17 Corollaire

Soit $a < c < b$ trois nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, c[\cup]c, b[$ et telle que pour tout élément $x \neq c$ de $]a, b[$, on ait : $(x - c)f'(x) \leqslant 0$ (resp. $(x - c)f'(x) \geqslant 0$). Alors,

$$f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad (\text{resp. } f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)).$$

6.2.18 Remarques

Une fonction peut très bien être strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$ sans pour autant avoir une dérivée positive (resp. négative) en tout point de $]a, b[$. Par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et $f'(0) = 0$.

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^2 & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que f est différentiable sur $]-1, 1[$ et que $f(0) = \min\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$.

Par exemple, f est dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin^2(1/x) = 0$$

(et ainsi $f'(0) = 0$). Par contre, il n'existe aucun nombre réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que la fonction f soit décroissante sur $]-\alpha, 0[$ et croissante sur $]0, \alpha[$.

Si dans l'énoncé du paragraphe 6.2.16, on ne suppose pas que le domaine de définition de la fonction f est un intervalle, alors le résultat peut cesser d'être vrai. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ admet en tout point de $\mathbb{R}^*$ une dérivée négative, mais il est facile de vérifier que cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par contre, elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

6.2.19 Critère assurant l'existence de la dérivée à droite ou à gauche

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, b[$ et telle que $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x\to b-} f'(x) = l \in \mathbb{R}$). Alors,

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a+} f'(x) \quad (\text{resp.} f'_g(b) = \lim_{x\to b-} f'(x)).$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = l$. Comme d'autre part on sait, d'après le théorème des accroissements finis, qu'à chaque élément x de $]a, b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$a < c(x) < x \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x)),$$

on obtient que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+} f'(c(x)) = \lim_{x\to a+} f'(x) = l.$$

Si $\lim_{x\to b-} f'(x) = l$, on démontre de façon analogue que

$$f'_g(b) = \lim_{x\to b-} f'(x) = l.$$

■

6.2.20 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point x_0 et $f : I \to F$ une fonction continue sur I, différentiable sur $\{x \in I : x \neq x_0\}$, telle que $\lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, f est différentiable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

6.2.21 Remarques

Si dans les hypothèses faites au paragraphe 6.2.19 on remplace l par $\pm\infty$ alors, la fonction f admet au point a (resp. b) une dérivée à droite (resp. à gauche) infinie.

De même, si dans l'énoncé du corollaire 6.2.20 on remplace l par $\pm\infty$ alors, la fonction f admet une dérivée infinie au point x_0.

D'autre part, considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]\,0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En remarquant que pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

on constate que $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par contre $f'_d(0) = 0$. Cet exemple nous montre que pour une fonction $f : [a,b] \to F$ continue sur $[a,b]$, différentiable sur $]a,b[$, le nombre réel $f'_d(a)$ peut très bien exister, même lorsque $\lim_{x\to a+} f'(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.

6.3 Règle de Bernoulli-L'Hospital

6.3.1 Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, différentiables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors, si g' ne s'annule

en aucun point de $]a,b[$, il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DÉMONSTRATION. L'hypothèse g' qui ne s'annule en aucun point de $]a,b[$ entraîne que $g(a) \neq g(b)$ (§ 6.2.9). Considérons à présent la fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Cette fonction satisfait les hypothèses du théorème de Rolle, ce qui entraîne l'existence d'un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Par suite, en constatant que

$$h'(c) = f'(c) - g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

on obtient que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

6.3.2 Règle de Bernoulli-L'Hospital

Soit $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $]a,b[$ telles que g et g' ne s'annulent en aucun point de $]a,b[$ et supposons de plus que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \alpha \qquad \text{avec } \alpha = 0 \text{ ou } \pm\infty$$

et

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \qquad \text{avec } \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\alpha = 0$ et que $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis généralisé, on sait qu'à chaque élément x de $]a,b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$a < c\,(x) < x \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\,;$$

ce qui implique que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu.$$

Supposons maintenant que $\alpha = \pm\infty$ et que $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. Il existe $\tilde{b} \in]a, b[$ tel que $|f| \geqslant 2$ et $|g| \geqslant 2$ sur $]a, \tilde{b}]$. Soit une suite arbitraire (x_n) d'éléments de $]a, \tilde{b}[$ qui converge vers a. On a

$$f(x_n)^2 + g(x_n)^2 > \min\{|f(x_n)|, |g(x_n)|\}$$

car $f(x_n)^2 > |f(x_n)|$ et $g(x_n)^2 > |g(x_n)|$, et, pour tout n suffisamment grand,

$$f(\tilde{b})^2 + g(\tilde{b})^2 < \min\{|f(x_n)|, |g(x_n)|\}.$$

Pour un tel n, le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à la fonction continue $f^2 + g^2$ assure l'existence de $u_n \in]x_n, \tilde{b}[$ tel que

$$f(u_n)^2 + g(u_n)^2 = \min\{|f(x_n)|, |g(x_n)|\}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} (f(u_n)^2 + g(u_n)^2) = +\infty,$$

ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ (grâce à la continuité de $f^2 + g^2$ sur $]a, \tilde{b}]$). De plus

$$0 \leqslant \frac{f(u_n)^2}{f(x_n)^2} \leqslant \frac{|f(x_n)|}{f(x_n)^2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{g(u_n)^2}{g(x_n)^2} \leqslant \frac{|g(x_n)|}{g(x_n)^2},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)^2}{f(x_n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(u_n)^2}{g(x_n)^2} = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le théorème des accroissements finis généralisés assure l'existence d'un $c_n \in]x_n, u_n[$ tel que

$$\frac{f(u_n) - f(x_n)}{g(u_n) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{g(u_n)}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(u_n)}{f(x_n)}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(u_n)}{g(x_n) - g(u_n)} \\ &= 1 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \mu \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$. La règle de Bernoulli-L'Hospital est ainsi entièrement démontrée.

■

6.3.3 Remarques

Si dans l'énoncé de la règle de Bernoulli-L'Hospital, on remplace $a+$ par $b-$, ou $a+$ par $-\infty$, ou encore ou $a+$ par $+\infty$, le résultat reste valable.

En considérant les deux fonctions $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ et $g(x) = x$, on s'aperçoit facilement que

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,;$$

mais que, par contre, la fonction $f'/g' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ n'admet pas de limite à droite au point $x_0 = 0$. Cet exemple nous montre que, en général, la non-existence de la limite à droite en un point de la fonction f'/g', n'entraîne pas obligatoirement la non-existence de la limite à droite en ce point de la fonction f/g. Cette remarque reste valable si l'on considère la limite à gauche ou la limite lorsque x tend vers l'infini.

6.3.4 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point x_0 et soit $f, g : I_0 = \{x \in I : x \neq x_0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur I_0 telles que g et g' ne s'annulent en aucun point de I_0.

De plus, supposons que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha \quad \text{avec } \alpha = 0 \text{ ou } \pm\infty$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \qquad \text{avec } \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

6.3.5 Exemple

Soit $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$. Ainsi, en utilisant le corollaire 6.3.4, on obtient immédiatement que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

6.4 Développements limités et formule de Taylor

6.4.1 Définition du développement limité

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de a. S'il existe $n+1$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles que, pour tout élément $x \neq a$ de E, on puisse écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x) \tag{6.1}$$

où ϵ est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$, on dit que l'égalité (6.1) est un *développement limité d'ordre n* de la fonction f autour de a (ou au point a).

Remarque. D'une manière générale, la fonction ϵ dépend aussi du nombre réel a. Lorsque $a \in E$, la valeur de la fonction ϵ en a ne joue aucun rôle dans la définition du développement limité ; *c'est pourquoi, nous supposerons toujours que $\epsilon(a) = 0$ si $a \in E$.*

Terminologie. La fonction polynômiale $a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n$ est appelée la *partie principale* du développement limité, tandis que le terme $(x-a)^n\epsilon(x)$ est appelé le *reste* du développement limité.

6.4.2 Unicité du développement limité

Si une fonction $f : E \to F$ admet un développement limité d'ordre n autour d'un point a, alors celui-ci est unique.

DÉMONSTRATION. Soit

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$$

deux développements limités d'ordre n de la fonction f autour de a. Nous allons d'abord démontrer que $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit k le plus petit entier naturel tel que $a_k \neq b_k$. Alors, pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire que

$$\begin{aligned}(a_k - b_k) \quad &+ \quad (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \ldots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-k} \\ &+ \quad (x-a)^{n-k}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0.\end{aligned}$$

Par suite, en calculant la limite de cette expression lorsque x tend vers a, on obtient que

$$a_k = b_k\,;$$

ce qui est absurde. On a ainsi démontré que $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$. Il découle immédiatement de ce résultat que pour tout élément $x \neq a$ de E :

$$\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x).$$

D'où l'unicité du développement limité. ■

6.4.3 Remarques

Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$ soit le développement limité d'ordre n de la fonction $f : E \to F$ autour de a. Alors, pour tout entier naturel $p < n$, la fonction f admet un développement limité d'ordre p autour de a dont la partie principale est $a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_p(x-a)^p$.

Dans la définition du développement limité, la fonction f n'est pas supposée définie au point a, par contre $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a_0$. Si on suppose que $f(a) = a_0$ et $n \geqslant 1$, alors la fonction f est différentiable en a et, de plus, on a : $f'(a) = a_1$.

6.4.4 Condition suffisante pour qu'une fonction possède un développement limité

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de a. Alors, s'il existe $n+1$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0,$$

la fonction f admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale est $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$.

Remarque. Cette condition est aussi nécessaire.

6.4.5 Développement limité d'une fonction paire ou impaire

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant zéro pour centre de symétrie (§ 5.1.23) et $f : E \to F$ une fonction admettant $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$ comme développement limité d'ordre n autour de zéro. Alors,

- si f est une fonction paire ($f(x) = f(-x)$), les coefficients $a_1, a_3, \ldots$ dont l'indice est impair sont tous nuls ;
- si f est une fonction impaire ($f(x) = -f(-x)$), les coefficients $a_0, a_2, \ldots$ dont l'indice est pair sont tous nuls.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, supposons que f soit une fonction paire (l'autre cas se traitant de manière analogue) ; ce qui implique que pour tout élément $x \neq 0$ de E :

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + x^n((-1)^n\epsilon(-x)).$$

Par suite, en constatant que $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^n\epsilon(-x) = 0$, on obtient, grâce à l'unicité du développement limité, que les coefficients $a_1, a_3, \ldots$ dont l'indice est impair sont tous nuls. ■

6.4.6 Formule de Taylor

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction $n+1$ fois différentiable sur I. Alors, à tout élément x de I, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ dépendant à la fois de a et de x tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots \\ &+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Cette relation est appelée la *formule de Taylor*. D'autre part, lorsque $0 \in I$, il est d'usage d'appeler *formule de MacLaurin* la formule obtenue en remplaçant a par 0 dans celle de Taylor.

DÉMONSTRATION. Soit $P_n : I \to \mathbb{R}$ la fonction polynômiale définie par

$$P_n(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(z-a)^n}{n!},$$

et soit $x > a$ un élément de I. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(z) = f(z) - P_n(z) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(z-a)^{n+1}.$$

On constate immédiatement que cette fonction est $n+1$ fois différentiable sur I et que

$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = g(x) = 0.$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : il existe un nombre réel x_1 de $]a, x[$ tel que $g'(x_1) = 0$. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Rolle à la fonction g' : il existe un élément x_2 de $]a, x_1[$ donc de $]a, x[$, tel que $g'(x_2) = 0$. En continuant ainsi jusqu'à la dérivée d'ordre n, nous obtenons que la fonction $g^{(n)}$ s'annule en un point x_n de $]a, x[$. Par suite, en appliquant une dernière fois le théorème de Rolle à $g^{(n)}$, nous pouvons affirmer qu'il existe un nombre réel θ_x appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que

$$g^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)) = f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)! = 0\,;$$

ce qui entraîne que

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_x(x-a)).$$

Cette égalité n'est autre que la formule de Taylor.

Si $x = a$, le résultat est évident. Si $x \in I$ et $x < a$, la formule de Taylor s'obtient par une démonstration en tout point identique à celle donnée ci-dessus. ■

Remarque. Lorsque $n = 0$ et $x > a$, la formule de Taylor peut se prouver directement à partir du théorème des accroissements finis (§6.2.12).

Terminologie. La fonction de la variable x

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

est appelée le *polynôme de Taylor* d'ordre n de f autour de a (ou au point a). Lorsque $0 \in I$ et $a = 0$, on dit aussi *polynôme de MacLaurin*.

6.4.7 Développement limité d'une fonction admettant n dérivées en un point

Soit un entier $n \geqslant 1$ et un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant le point a. Soit encore $f : I \to F$ une fonction $n-1$ fois différentiable sur I telle que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, la dérivée étant notée $f^{(n)}(a)$. Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale est donnée par

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

DÉMONSTRATION. Posons $\epsilon(a) = 0$ et, pour $x \in I\backslash\{a\}$,

$$\epsilon(x) = \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right)}{(x-a)^n}.$$

Clairement

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\epsilon(x)$$

pour tout $x \in I$. Si $n = 1$, on a de plus

$$\lim_{x\to a}\epsilon(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

Si $n \geqslant 2$, vérifions que $\lim\limits_{x\to a}\epsilon(x) = 0$ en appliquant plusieurs fois le théorème de Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to a}\epsilon(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right)}{(x-a)^n}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - \left(f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{n(x-a)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f''(x) - \Big(f''(a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}\Big)}{(n-1)n(x-a)^{n-2}}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - \big(f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a)\big)}{2\cdots(n-1)n(x-a)}.$$

Cette dernière limite existe bien et vaut

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{2\cdots(n-1)n(x-a)} - \frac{f^{(n)}(a)}{2\cdots(n-1)n} = 0.$$

■

Remarque. Soit f comme dans la formule de Taylor ; en particulier f est $n+1$ fois différentiable sur I. Par le présent paragraphe, f admet un développement limité d'ordre $n+1$, donc aussi d'ordre n, autour de a. La partie principale de celui d'ordre n est le polynôme de Taylor d'ordre n autour de a. La formule de Taylor permet souvent, dans la pratique, d'estimer plus précisément la différence entre f et son polynôme de Taylor d'ordre n. Par exemple, si $f^{(n+1)}$ est bornée sur l'intervalle I, alors, pour tout élément x de I,

$$\left| f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\Big)\right|$$

$$\leqslant \sup\{|f^{(n+1)}(z)| : z \in I\}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

6.4.8 Exemples

En utilisant le paragraphe 6.4.7, on obtient les développements limités suivants :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} x^n + x^n\epsilon(x).$$

6.4.9 Remarques

- Une fonction $f : I \to F$ peut très bien admettre un développement limité d'ordre n autour d'un point, sans pour autant que la formule de Taylor lui soit applicable. Par exemple, considérons les deux fonctions $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

et par $f(x) = 1 + x^2 + x^3 g(x)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre deux autour de zéro, mais la formule de MacLaurin ne lui est pas applicable, car la fonction f n'est pas différentiable pour $x \neq 0$.

- En utilisant les résultats des paragraphes 6.4.5 et 6.4.7, on obtient l'assertion suivante : soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ admettant zéro pour centre de symétrie et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I. Alors, si f est paire, toutes ses dérivées $f^{(1)}, f^{(3)}, \ldots$ d'ordre impair jusqu'à n s'annulent au point $x = 0$. De même, si f est impaire, toutes ses dérivées $f^{(2)}, f^{(4)}, \ldots$ d'ordre pair jusqu'à n s'annulent au point $x = 0$.

6.4.10 Opérations algébriques sur les développements limités

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant respectivement

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$$

comme développement limité d'ordre n autour de a. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale est

$$(\alpha a_0 + \beta b_0) + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n \ ;$$

- la fonction fg admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale s'obtient en effectuant le produit

$$(a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n)(b_0 + \ldots + b_n(x-a)^n)$$

  et en ne conservant que les termes de la forme $c_k(x-a)^k$ de degrés inférieurs ou égaux à $n : k \leqslant n$;
- si $b_0 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \neq a$ dans E, la fonction f/g admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de

$$a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n \quad \text{par} \quad b_0 + \ldots + b_n(x-a)^n \, .$$

6.4.11 Exemple

Soit $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$j(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}.$$

On se propose de calculer la partie principale de son développement limité d'ordre 4 autour de zéro. Pour cela, considérons les trois fonctions auxiliaires f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = 1 + x^3, \quad g(x) = 1 + x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les fonctions f et g sont déjà sous la forme d'un développement limité d'ordre 4 autour de zéro dont la partie principale est respectivement $1 + x^3$ et $1 + x^2$. De

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\epsilon_1(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0,$$

on déduit, en remplaçant x par x^2, que

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\epsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Par suite, en constatant que

$$j = fh = f/g,$$

il résulte du paragraphe 6.4.10 que la fonction j admet un développement limité d'ordre 4 autour de zéro dont la partie principale peut être calculée :

- soit en effectuant le produit $(1+x^3)(1-x^2+x^4)$ et en ne conservant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 4 ; ce qui donne

$$1 - x^2 + x^3 + x^4 \ ;$$

- soit en utilisant le paragraphe 6.4.7 en dérivant 4 fois la fonction j :

$$j(0) + j'(0)x + j''(0)\frac{x^2}{2!} + j^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + j^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} \ ;$$

l'avantage de la méthode précédente est d'éviter le calcul de ces dérivées ;

- soit en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 de $(1+x^3)$ par $(1+x^2)$; ce qui donne

$$\begin{array}{l|l}
1 + \quad x^3 & 1 + x^2 \\
\underline{1 + x^2 \qquad\quad} & \overline{1 - x^2 + x^3 + x^4} \\
-x^2 + x^3 & \\
\underline{-x^2 \qquad - x^4} & \\
\qquad x^3 + x^4 & \\
\qquad \underline{x^3 \qquad + x^5} & \\
\qquad\quad x^4 - x^5 & \\
\qquad\quad \underline{x^4 \qquad + x^6} & \\
\qquad\qquad -x^5 - x^6 &
\end{array}$$

- soit en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. Pour cela, désignons par $j(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\epsilon(x)$ le développement limité d'ordre 4 de la fonction j autour de zéro. En remarquant que $f = jg$, on peut écrire, grâce à l'unicité du développement limité, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + x^3 = a_0 + a_1x + (a_0 + a_2)x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + (a_2 + a_4)x^4 \ ;$$

ce qui implique que

$$a_0 = a_1 + a_3 = 1 \ \text{ et } \ a_1 = a_0 + a_2 = a_2 + a_4 = 0.$$

Par suite, en résolvant ce système, on obtient que

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1 \ \text{ et } \ a_4 = 1.$$

6.4.12 Développement limité d'une fonction composée

Soit

$$f(x) = a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$$

le développement limité d'ordre n de la fonction $f : E \to F$ autour de a. D'autre part, soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant zéro et

$$g(y) = g(0) + b_1 y + \ldots + b_n y^n + y^n\epsilon_2(y)$$

le développement limité d'ordre n de la fonction $g : G \to H$ autour de zéro. Observons que cette dernière égalité est valable aussi pour $y = 0$ et que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Alors, si $f(E) \subset G$, la fonction composée $g \circ f : E \to H$ admet un développement limité d'odre n autour de a dont la partie principale est

$$\begin{array}{rcl} g(0) & + & a_1b_1(x-a) + (a_2b_1 + a_1^2b_2)(x-a)^2 + (a_3b_1 + 2a_1a_2b_2 \\ & + & a_1^3b_3)(x-a)^3 + \ldots + (a_nb_1 + \ldots + a_1^nb_n)(x-a)^n. \end{array}$$

Comme nous allons pouvoir le constater dans la démonstration, la partie principale du développement limité de $g \circ f$ s'obtient en substituant, dans la partie principale du développement limité de g, y par la partie principale du développement de f et en ne conservant que les termes de la forme $c_k(x-a)^k$ de degrés inférieurs ou égaux à $n : k \leqslant n$.

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire

$$g(f(x)) = g(0) + b_1 f(x) + \ldots + b_n(f(x))^n + (f(x))^n\epsilon_2(f(x))$$

ou encore

$$\begin{array}{rcl} g(f(x)) & = & g(0) + b_1\Big(a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)\Big) + \ldots \\ & + & b_n\Big(a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)\Big)^n \\ & + & \Big(a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)\Big)^n\epsilon_2(f(x)); \end{array}$$

ce qui donne en développant

$$\begin{array}{rcl} g(f(x)) & = & g(0) + a_1b_1(x-a) + (a_2b_1 + a_1^2b_2)(x-a)^2 + \ldots \\ & + & (a_nb_1 + \ldots + a_1^nb_n)(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_3(x). \end{array}$$

Par suite, on vérifie facilement que $\lim_{x\to a} \epsilon_3(x) = 0$ grâce à la continuité de ϵ_2 en $0 : \lim_{y\to 0} \epsilon_2(y) = 0 = \epsilon_2(0)$. D'où le résultat. ■

6.4.13 Utilisation du développement limité pour résoudre les formes indéterminées

En utilisant les développements limités, on se propose de calculer la limite, lorsque x tend vers zéro, de la fonction $f :]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)}.$$

Pour cela, considérons les deux développements limités d'ordre 4 autour de zéro qui suivent :

$$\sin^2 x - x^2 \cos x = \frac{1}{6}x^4 + x^4\epsilon_1(x)$$

et

$$x^2(1 - \cos x) = \frac{1}{2}x^4 + x^4\epsilon_2(x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + x^4\epsilon_1(x)}{\frac{1}{2}x^4 + x^4\epsilon_2(x)} = \frac{1}{3}.$$

Cet exemple nous montre que pour certaines formes indéterminées, l'utilisation du développement limité peut nous mener très rapidement à la solution. Ici, l'emploi de la règle de Bernoulli-L'Hospital nous aurait obligés à dériver quatre fois le numérateur et le dénominateur, ce qui nous aurait conduits à faire de longs calculs.

6.4.14 Détermination du développement limité d'une fonction à partir de celui de sa dérivée

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I, où $n \geqslant 1$. On sait, d'après le paragraphe 6.4.7, que la fonction f admet un développement limité d'ordre n autour de a et que la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ admet, quant à elle, un développement limité d'ordre $n-1$ autour de a. Supposons à présent que

$$f'(x) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\epsilon_1(x)$$

soit le développement limité d'ordre $n-1$ de la fonction f' autour de a. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & f(a) + b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{b_{p-1}}{p}(x-a)^p + ... \\ & + \frac{b_{n-1}}{n}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x) \end{aligned}$$

est le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

6.4.15 Exemple

De

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + ... + (-1)^n x^n + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0,$$

on déduit, en remplaçant x par x^2, que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Comme d'autre part, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

est la dérivée de la fonction arctan, on obtient que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

est le développement limité d'ordre $2n+1$ de la fonction arctan autour de zéro.

6.5 Applications aux extrema locaux et points d'inflexions

6.5.1 Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local en un point

Nous avons vu au paragraphe 6.2.2 que si une fonction différentiable f admet un extremum local en un point a, alors $f'(a) = 0$; mais nous savons que la réciproque n'est pas exacte. Par contre, lorsqu'une fonction est n fois différentiable, il est possible, grâce à la formule de Taylor, de préciser cette question de la façon suivante :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, n un entier naturel *pair* différent de zéro et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I. De plus, on suppose que $f^{(n)}$ est continue en a, que $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors,

- si $f^{(n)}(a) > 0$, la fonction f admet un minimum local au point a ;
- si $f^{(n)}(a) < 0$, la fonction f admet un maximum local au point a.

DÉMONSTRATION. Supposons pour la démonstration que $f^{(n)}(a) > 0$ (l'autre cas se traitant de manière analogue) ; ce qui entraîne, puisque $f^{(n)}$ est continue en a, l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y - a| \leqslant \alpha$ impliquent $f^{(n)}(y) > 0$. D'autre part, compte tenu des hypothèses faites sur f, la formule de Taylor nous permet d'écrire que pour tout élément x de I :

$$f(x) - f(a) = f^{(n)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!} \quad \text{avec } 0 < \theta_x < 1.$$

Ainsi, pour tout point x de I vérifiant $|x-a| \leqslant \alpha$, on obtient que $f(x) - f(a) \geqslant 0$. D'où la conclusion. ■

6.5.2 Exemple

Soit α un nombre réel positif et soit $f :]a-\alpha, a+\alpha[\to F$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ telle que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Alors, la fonction f admet un minimum (resp. maximum) local au point a. Cet exemple confirme le résultat obtenu au corollaire 6.2.17.

6.5.3 Définition d'un point d'inflexion

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en a. En désignant par C le graphique de cette fonction relativement à deux axes orthonormés $0x$ et $0y$, on constate qu'il est possible, en étudiant le signe de la fonction $\psi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$, de connaître localement la position de la courbe C par rapport à sa tangente au point d'abscisse a.

Nous dirons que le point $P = (a, f(a))$ est un *point d'inflexion* du graphique C de la fonction f, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une constante $c \neq 0$ tels que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha$: $c\,\psi\,(x)(x - a) > 0$.

Voir les figures 6.7 et 6.8.

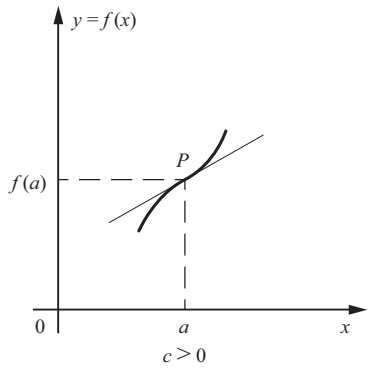


Fig. 6.7

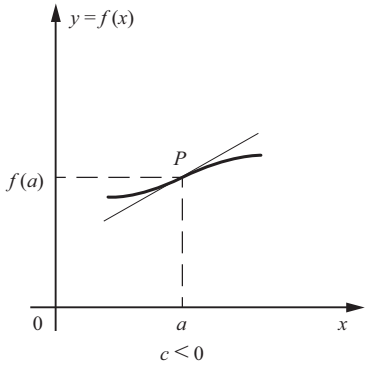


Fig. 6.8

6.5.4 Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, n un entier naturel *impair* strictement supérieur à 1 et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I. De plus, on suppose que $f^{(n)}$ est continue en a, que $f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors, le point $P = (a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. Supposons pour la démonstration que $f^{(n)}(a) > 0$ (l'autre cas se traitant de manière analogue) ; ce qui entraîne, du fait que $f^{(n)}$ est continue en a, l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y - a| \leqslant \alpha$ impliquent $f^{(n)}(y) > 0$. D'autre part, compte tenu des hypothèses faites sur f, la formule de Taylor nous permet d'écrire que pour tout élément x de I :

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f^{(n)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^n}{n!}$$

avec $0 < \theta_x < 1$. Ainsi, pour tout point x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha$, on obtient que $\psi(x)(x-a) > 0$. D'où le résultat. ■

6.5.5 Autre condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction deux fois différentiable sur I. D'autre part, on suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une constante $c \neq 0$ tels que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha : cf''(x)(x-a) > 0$. Alors, le point $P = (a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. On sait, grâce à la formule de Taylor, qu'à tout élément x de I, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ tel que

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f''(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^2}{2} ;$$

ce qui implique, compte tenu des hypothèses faites sur f'', que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha : c\psi(x)(x-a) > 0$. D'où le résultat. ■

6.5.6 Exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Cette fonction est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$ et, de plus, $xf''(x) = 6x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'où le point (0,0) est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f (fig. 6.9).

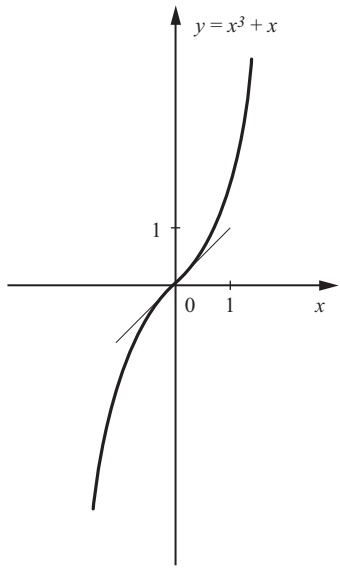


Fig. 6.9

6.5.7 Condition suffisante pour qu'un point ne soit pas un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction deux fois différentiable sur I. De plus, on suppose qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \beta : f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) \leqslant 0$). Alors, le point $P = (a, f(a))$ n'est pas un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, il existe un nombre réel $0 < \alpha < \beta$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$. Par suite, étant donné qu'à tout élément x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha$, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ tel que

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = f''(a + \theta_x(x - a))\frac{(x - a)^2}{2},$$

on obtient, compte tenu des hypothèses faites sur f'', que la fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ est $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur $[a - \alpha, a[\cup]a, a + \alpha]$. D'où le résultat. ■

6.6 Fonctions convexes

6.6.1 Définition d'une fonction convexe

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est dite *convexe* si pour tout couple d'éléments a, b de I et tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda a + 1(1 - \lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

D'autre part, si on désigne par C le graphique de la fonction f relativement à deux axes de coordonnées perpendiculaires $0x$ et $0y$, la définition analytique de la convexité donnée ci-dessus peut s'énoncer géométriquement de la façon suivante : une fonction $f : I \to F$ est convexe si pour tout couple de points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ du graphique de f, tout point P de C dont l'abscisse x_0 est comprise entre a et b, est situé au-dessous de la corde AB (fig. 6.10).

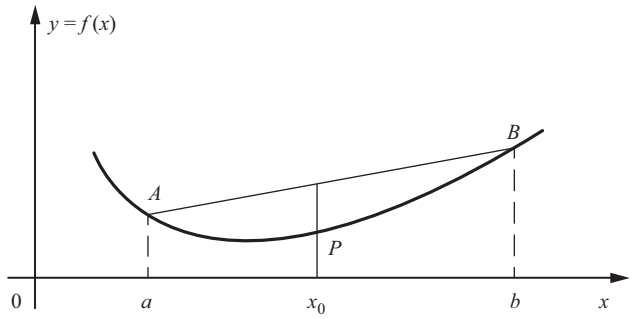


Fig. 6.10

6.6.2 Exemples

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est convexe. En effet, pour tout couple de nombres réels a, b et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} &f(\lambda a + (1 - \lambda)b) - (\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)) \\ &= \lambda^2 a^2 + (1 - \lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab - \lambda a^2 - (1 - \lambda)b^2 \\ &= -\lambda(1 - \lambda)a^2 - \lambda(1 - \lambda)b^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab \\ &= -\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est convexe. En effet, pour tout couple de nombres réels a, b et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$|\lambda a + (1 - \lambda)b| \leqslant |\lambda a| + |(1 - \lambda)b| = \lambda|a| + (1 - \lambda)|b|.$$

- Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle non vide I est convexe et si $C, D \in \mathbb{R}$, alors la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) + Cx + D$$

est aussi convexe. En effet, pour tout couple de nombres réels a, b dans I et tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) + C(\lambda a + (1-\lambda)b) + D \\ &\leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) + C(\lambda a + (1-\lambda)b) + D(\lambda + (1-\lambda)) \\ &= \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b). \end{aligned}$$

6.6.3 Caractérisation d'une fonction différentiable et convexe

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction différentiable sur I. Alors, la fonction f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante sur I.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que f' soit croissante sur I et soit $a < b$ deux éléments de I et λ un nombre réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. En posant

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b,$$

on obtient $\lambda = (b-x)/(b-a)$ et $1-\lambda = (x-a)/(b-a)$. Considérons la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a), \quad t \in I.$$

Alors

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad t \in I,$$

et donc g' est aussi croissante sur I. De plus $g(a) = g(b) = 0$.

Si $g'(x) \geqslant 0$, alors $g'(t) \geqslant g'(x) \geqslant 0$ pour tout $t \in [x, b]$ et donc g est croissante sur $[x, b]$. Il en résulte $g(x) \leqslant g(b) = 0$.

Si d'autre part $g'(x) < 0$, alors $g'(t) \leqslant g'(x) < 0$ pour tout $t \in [a, x]$ et donc g est décroissante sur $[a, x]$. Il en résulte $g(x) \leqslant g(a) = 0$.

En tous les cas,

$$0 \geqslant g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

et donc

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

On a ainsi démontré que f est convexe.

Supposons ensuite que f soit convexe et soit $a < b$ deux éléments de I. Considérons de nouveau la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ ci-dessus. Puisque f est supposée convexe et dérivable sur I, g l'est aussi (voir le troisième exemple du § 6.6.2). Comme $g(a) = g(b) = 0$, la convexité de g assure que $g(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in]a, b[$. D'où

$$g'(a) = \lim_{t \to a} \frac{g(t)-g(a)}{t-a} = \lim_{t \to a+} \frac{g(t)-g(a)}{t-a} = \lim_{t \to a+} \frac{g(t)}{t-a} \leqslant 0.$$

De même

$$g'(b) = \lim_{t\to b} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} = \lim_{t\to b-} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} = \lim_{t\to b-} \frac{g(t)}{t-b} \geqslant 0.$$

D'où

$$f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g'(a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g'(b) \geqslant 0,$$

ce qui implique $f'(a) \leqslant f'(b)$. On a ainsi démontré que f' est croissante sur I. ■

6.6.4 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction deux fois différentiable sur I. Alors, la fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que f' est une fonction croissante sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et d'utiliser le résultat du paragraphe 6.6.3. ■

6.6.5 Fonction concave

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est dite *concave* si pour tout couple d'éléments a, b de I et tout nombre réel $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f(\lambda a + 1(1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Il résulte de cette définition que $f : I \to F$ est concave si et seulement si $-f : I \to \mathbb{R}$ est convexe. En appliquant les paragraphes 6.6.3 et 6.6.4 à la fonction $-f$, on obtient les résultats suivants :

Lorsque I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ est une fonction différentiable sur I, la fonction f est concave si et seulement si f' est une fonction *décroissante* sur I.

Lorsque I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ est une fonction deux fois différentiable sur I, la fonction f est concave si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

6.6.6 Caractérisation d'une fonction convexe

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est convexe si et seulement si pour tout n-tuple $x_1, ..., x_n$ d'éléments de I et tout n-tuple $\lambda_1, ..., \lambda_n$ d'éléments de [0,1] vérifiant $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_1 = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que f soit convexe. Il est évident que la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$. Supposons à présent qu'elle le soit pour $(n-1)$ et démontrons-la pour n. Pour cela, soit $x_1, ..., x_n$ un n-tuple d'éléments de I et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ un n-tuple d'éléments de $[0, 1]$ vérifiant $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et posons $\gamma = \Sigma_{i=1}^{n-1} \lambda_i$. Si $\gamma = 0$, le résultat est évident. Supposons donc que $\gamma \neq 0$ et posons

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\gamma}.$$

Alors, on obtient que $\Sigma_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1$ et que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \gamma \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i\right) + \lambda_n x_n \quad \text{avec } \gamma + \lambda_n = 1 \ ;$$

ce qui implique

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \gamma f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i\right) + \lambda_n f(x_n).$$

Par suite, il résulte de l'hypothèse de récurrence que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f(x_i).$$

D'où

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

La propriété est donc vérifiée pour n. On a ainsi démontré, par induction sur n, que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre $n = 2$ et de poser $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. ■

6.6.7 Critère de convexité pour une fonction continue

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction continue sur I telle que pour tout couple d'éléments x, y de I, on ait :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Alors, la fonction f est convexe.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas convexe. Alors, il existe deux éléments $a < b$ de I et un nombre réel $\alpha \in]0, 1[$ tels que

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \quad > \quad \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

Par suite, en posant

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda \in [0, \alpha[: f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$$

et

$$\lambda_2 = \inf\{\lambda \in]\alpha, 1] \ : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$$

on obtient, par la continuité de la fonction f sur $[a, b]$, que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < \lambda_2, \\ &f(\lambda_1 a + (1-\lambda_1)b) = \lambda_1 f(a) + (1-\lambda_1)f(b), \\ &f(\lambda_2 a + (1-\lambda_2)b) = \lambda_2 f(a) + (1-\lambda_2)f(b) \end{aligned}$$

et que pour tout $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Mais, en posant

$$x_1 = \lambda_1 a + (1-\lambda_1)b, \quad x_2 = \lambda_2 a + (1-\lambda_2)b \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

on obtient que

$$\beta f(a) + (1-\beta)f(b) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(\beta a + (1-\beta)b).$$

On aboutit donc à une contradiction ; ce qui nous permet de conclure que la fonction f est convexe. ■

6.6.8 Lemme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, pour tout triplet d'éléments $x < y < z$ de I, on a :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(t) - f(x) - \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(t - x), \quad t \in I.$$

Alors g est aussi convexe et $g(x) = g(z) = 0$. Il en résulte que $g(y) \leqslant 0$. D'où

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \frac{g(y)}{y - x} \leqslant 0 = \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \leqslant \frac{-g(y)}{z - y} = \frac{g(z) - g(y)}{z - y}.$$

En substituant g par sa définition en termes de f dans

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leqslant \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \leqslant \frac{g(z) - g(y)}{z - y},$$

on obtient les inégalités

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - C \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - C \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y} - C \quad \text{où} \quad C = \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

et donc aussi les inégalités désirées. ■

6.6.9 Dérivabilité et continuité des fonctions convexes

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, f est continue sur I et admet en tout point de cet intervalle une dérivée à droite et une dérivée à gauche. De plus, pour tout couple d'éléments $x_1 < x_2$ de I, on a :

$$f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in I$. Alors, d'après le lemme 6.6.8, on obtient que pour tout couple d'éléments $x \leqslant y$ de $\{x \in I : x \neq x_0\}$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

D'où, en utilisant le corollaire 5.2.28, on peut affirmer que les deux nombres réels $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et que $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Par suite, en remarquant que tout $x \neq x_0$ de I :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

il résulte de l'existence des nombres $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ que

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0);$$

ce qui entraîne que la fonction f est continue au point x_0.

À présent, supposons que $x_1 < x_2$ soient deux éléments de I. Alors, en utilisant de nouveau le lemme 6.6.8, on obtient que pour tout couple d'éléments x, y de I vérifiant $x_1 < x < y < x_2$:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2};$$

ce qui implique, du fait de l'existence des deux nombres $f'_d(x_1)$ et $f'_g(x_2)$, que $f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2)$. ■

6.6.10 Proposition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe, différentiable sur I. Alors, la fonction f' est continue sur I.

DÉMONSTRATION. La fonction f étant convexe et différentiable sur I, sa dérivée est croissante sur I (§ 6.6.3) ; ce qui implique, d'après le corollaire 6.2.8, que f' est une fonction continue sur I. ■

6.7 Étude des fonctions

6.7.1 Asymptotes

Soit f une fonction de E dans F et C le graphique de cette fonction relativement à deux axes de coordonnées perpendiculaires $0x$ et $0y$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to c-} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x \to c+} f(x) = \pm\infty$, nous dirons que la droite d'équation $x = c$ est une *asymptote verticale* de C.

Voir la figure 6.11.

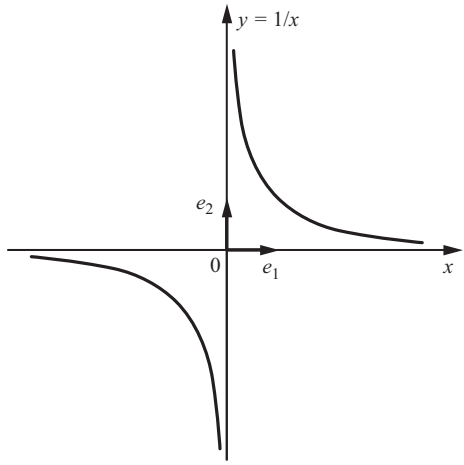


Fig. 6.11

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$), nous dirons que la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de C lorsque $x \to +\infty$ (resp. lorsque $x \to -\infty$).

Voir la figure 6.12.

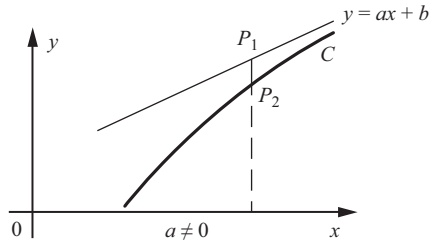


Fig. 6.12

Dans le cas particulier où $a = 0$, nous dirons que la droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* de C lorsque $x \to +\infty$ (resp. lorsque $x \to -\infty$).

Voir la figure 6.13.

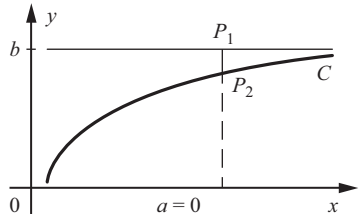


Fig. 6.13

D'autre part, par un simple calcul, on obtient que

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax),$$

(respectivement

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \quad).$$

Géométriquement, dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de C lorsque $x \to +\infty$ (resp. lorsque $x \to -\infty$) signifie que la distance du point $P_1 = (x, ax + b)$ au point $P_2 = (x, f(x))$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Pour $a \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x\to+\infty} (f(x)/x) = a$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/x) = a$), nous dirons que C admet la droite d'équation $y = ax$ pour *direction asymptotique* lorsque $x \to +\infty$ (resp. lorsque $x \to -\infty$).

Pour $a \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to +\infty} (f(x)/x) = a$ et si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, nous dirons que C possède une *branche parabolique* de direction asymptotique $y = ax$ lorsque $x \to +\infty$. De même, si $\lim_{x \to -\infty} (f(x)/x) = a$ et si $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, nous dirons que C possède une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$ lorsque $x \to -\infty$.

6.7.2 Remarque

Le graphique C de la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$. Étant donné que C coupe l'axe $0x$ aux points d'abscisse $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, cet exemple nous montre qu'une courbe C peut très bien couper son asymptote un nombre infini de fois.

6.7.3 Schéma général de l'étude des fonctions

L'étude des fonctions se ramène généralement à déterminer :

- si la fonction f est paire, impaire ou périodique ;
- les points de discontinuité de la fonction f ;
- la limite de f aux points frontières de son domaine de définition ainsi qu'en ses points de discontinuité ;
- la dérivée de f ;
- le domaine de définition $D(f')$ de f' ;
- le signe de f' ;
- les points stationnaires de f ;
- les points de discontinuité de f' ;
- la limite de f' aux points frontières de $D(f')$ ainsi qu'en ses points de discontinuité ;
- les points d'inflexion du graphique de f ;
- les asymptotes du graphique de f ;
- le tableau de variations de f.

Cette étude permet de tracer le graphique C de la fonction f.

6.7.4 Exemple

En suivant le schéma donné au paragraphe 6.7.3, nous allons étudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}.$$

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire et ni périodique. Par contre, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}\,; \quad D(f') = R^*$$
$$\text{Si } x \in]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[: f'(x) > 0$$
$$\text{Si } x \in]0, \sqrt[3]{2}[: f'(x) < 0.$$

L'unique point stationnaire de f est $x = \sqrt[3]{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = +\infty, \ \lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty.$$

Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0,$$

le graphique C de la fonction f ne possède aucun point d'inflexion (§ 6.5.7). La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de C. La droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de C lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to -\infty$.

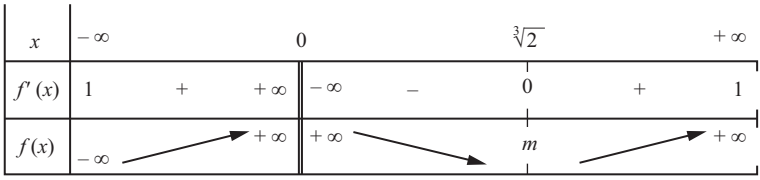


Fig. 6.14

La fonction f admet un minimum local au point $x = \sqrt[3]{2}$ et

$$m = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Voir la figure 6.15.

6.8 Exercices

6.8.1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 5x} - \dfrac{1}{5}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x - \sin x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1})$.

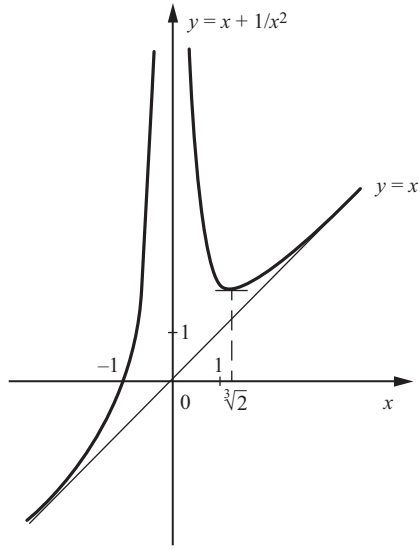


Fig. 6.15

6.8.2 Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \arctan(\sqrt{x^2+1})$ au point d'abscisse $x = 0$.

6.8.3 Pour quelles valeurs de l'entier relatif p, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet-elle une dérivée au point $x = 0$?

6.8.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(0)$.

6.8.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable au point $x = 0$ et qu'elle est discontinue en tout autre point.

6.8.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $x = 0$.

1) Montrer que $f'(0) = \lim_{n\to+\infty} n(f(1/n) - f(0))$.
2) En donnant un contre-exemple, montrer que l'existence de cette limite n'implique pas nécessairement l'existence de $f'(0)$.

6.8.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
1) f paire implique f' impaire.
2) f impaire entraîne f' paire.
3) f périodique implique f' périodique.

6.8.8 Soit n un entier positif et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois différentiables sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(Cette égalité est appelée la *formule de Leibniz*).
2) En prenant $f(x) = g(x) = x^n$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

6.8.9 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$$

possède exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

6.8.10 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

6.8.11 Calculer le maximum et le minimum de la fonction $f : [\pi/2,\ 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\ \sin(1/x)$.

6.8.12 À chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1 - x)$. Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.

6.8.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple de nombres réels x et y : $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$. Montrer que la fonction f est constante.

6.8.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$.
1) Montrer que la fonction f possède un unique point fixe.
2) Que devient ce résultat si $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$?

6.8.15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M < +\infty$. En utilisant l'exercice précédent et le théorème du point fixe de Banach (§ 5.3.38), montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{M} f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

6.8.16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Montrer que la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]\,0, 1\,[$.

6.8.17 Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ n nombres réels et soit $c_1, \ldots, c_p$ les racines réelles (toutes distinctes) du polynôme $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Montrer que $p \leqslant n$.

6.8.18 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et bornée sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = l$. Montrer que $l = 0$.

6.8.19 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6.8.20 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0, +\infty[$.

1) En supposant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)/x) = 0$.
2) En déduire que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = l$ avec $l > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)/x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6.8.21 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]-1, 1[$ telle que $f(0) = 0$. De plus, on suppose que pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[: f'(x) \neq 0$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)/f'(x)) = l$, alors $l = 0$.

6.8.22 Soit $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $]-2, 2[$ telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

6.8.23 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $]-1, 1[$ telle que $f''(0) \neq 0$, et soit $\theta :]-1, 1[\to]0, 1[$ une fonction pour laquelle, pour tout $x \in]-1, 1[$, on puisse écrire l'égalité suivante : $f(x) = f(0) + x\, f'(x\,\theta(x))$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = 1/2$.

6.8.24 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x + \arccos(x^2)$. Trouver son développement limité d'ordre 10 autour de zéro.

6.8.25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Trouver son développement limité d'ordre n autour de zéro.

6.8.26 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1] : 1 - \dfrac{x^2}{2!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$.

6.8.27 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2] : x - \dfrac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{3!} \cos x$.

6.8.28 Montrer que pour tout $x \geqslant 0 : 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1 + x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

6.8.29 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois continûment différentiable sur $]-1, 1[$ telle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son développement limité d'ordre 3 autour de zéro.

6.8.30 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

1) Montrer que la fonction $f + g$ est convexe.
2) Obtient-on le même résultat pour la fonction fg ?

6.8.31 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $g \circ f$ est convexe.

6.8.32 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6.8.33 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)/x) = l$ avec $l \leqslant 0$. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

6.8.34 Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^4(x - 1))^{1/5}$. Faire sa représentation graphique.

6.8.35 Étudier la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$. Faire sa représentation graphique.

Chapitre 7

Fonction exponentielle et fonction logarithme

7.1 Fonction exponentielle

Au chapitre 2 sur les nombres complexes, nous avons utilisé la fonction exponentielle en la supposant déjà connue et en admettant ses propriétés. Dans ce chapitre, nous commençons par donner une définition précise de la fonction exponentielle, basée sur une série, et nous en déduirons ses propriétés.

7.1.1 Définition du nombre réel e^x

En utilisant le critère de d'Alembert (§ 4.2.9) on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $x^n/n!$ est absolument convergente ; ce qui nous autorise à définir le nombre réel e^x en posant

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

où $0\,! = 1$ et en convenant ici que $0^0 = 1$ (par contre, dans le calcul des limites, 0^0 est une forme indéterminée). Il découle immédiatement de cette définition et des résultats obtenus aux paragraphes 3.4.2 et 3.4.4, que

$$e^1 = e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots\ .$$

7.1.2 Propriétés du nombre réel e^x

- Pour tout couple de nombres réels x et y : $e^{x+y} = e^x\, e^y$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $e^x > 0$.

DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord démontrer que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Dans ce but, considérons pour tout $z \in \mathbb{R}$ la suite auxiliaire $(\beta_n(z))$ définie par

$$\beta_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Ainsi, en regroupant les termes, on obtient que

$$\beta_n(x)\,\beta_n(y) = \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!} \right).$$

Par conséquent, comme

$$\sum_{\substack{k+p=m \\ k,p \geqslant 0}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!} = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{k+p=m \\ k,p \geqslant 0}} \frac{m!}{k!p!} x^k y^p = \frac{1}{m!}(x+y)^m,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \beta_n(x)\,\beta_n(y) &= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ k,p \geqslant 0}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right) + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right) \\ &= \beta_n(x+y) + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right). \end{aligned}$$

De nouveau, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$\left| \sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right| \leqslant \sum_{\substack{k+p=m \\ k,p \geqslant 0}} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^p}{p!} = \frac{1}{m!}(|x|+|y|)^m\,;$$

ce qui implique que

$$\left| \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right) \right| \leqslant \beta_{2n}(|x|+|y|) - \beta_n(|x|+|y|)\,.$$

Finalement, comme la suite $(\beta_n(|x|+|y|))$ converge, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^p}{p!} \right) = 0\,;$$

ceci nous permet de conclure que

$$e^x e^y = \lim_{n \to +\infty} (\beta_n(x)\,\beta_n(y)) = \lim_{n \to +\infty} \beta_n(x+y) = e^{x+y}.$$

La première propriété est ainsi démontrée. Pour établir la seconde, il suffit de constater que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x}$$

et

$$e^x = e^{(x/2+x/2)} = \left(e^{x/2}\right)^2.$$

■

7.1.3 Définition de la fonction exponentielle

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, notée exp, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel positif e^x, est appelée fonction *exponentielle* (fig. 7.1).

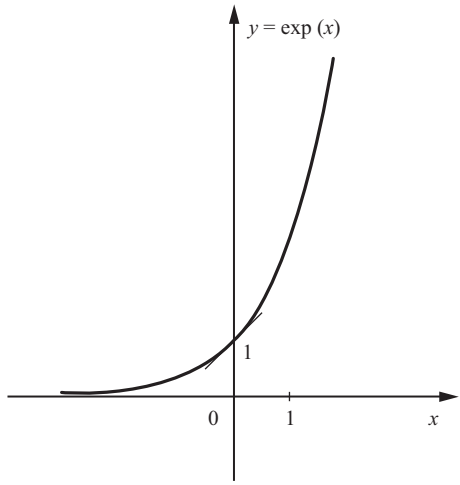


Fig. 7.1

7.1.4 Continuité et dérivabilité de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est différentiable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(\exp)'(x) = \exp(x).}$$

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |x - x_0| < 1$, on obtient :

$$\left|\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} - 1\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|x-x_0|^{k-1}}{k\,!} \leqslant e \cdot |x-x_0|\,;$$

ce qui implique que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1.$$

D'où

$$(\exp)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

■

7.1.5 Corollaire

La fonction exponentielle est un élément de l'ensemble $C^\infty\left(\mathbb{R},\ \mathbb{R}_+^*\right)$.

7.1.6 Propriétés de la fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$;
- la fonction exponentielle est convexe strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier $p > 0$:

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k\,!}\right) \geqslant \frac{x^p}{p\,!},$$

on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$; ce qui implique que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

D'autre part, puisque pout tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp)'(x) = (\exp)''(x) = e^x > 0$, la fonction exponentielle est convexe strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (§ 6.2.16 et § 6.6.4) ; ce qui entraîne, du fait de sa continuité sur tout $\mathbb{R}$, qu'elle est injective et que $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+^*$ (§ 5.3.25). Comme, de plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, on peut affirmer que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$; ce qui revient à dire que la fonction exponentielle est surjective. D'où le résultat. ■

7.2 Fonction logarithme

7.2.1 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *logarithme népérien* et notée ln (fig. 7.2). Ainsi, par définition, la relation $y = \ln x$ est équivalente à : $x = e^y$.

En utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 5.3.27 et 6.1.13, on peut affirmer que la fonction ln est différentiable strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x = e^{\ln x},$$

on obtient que

$$\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.}$$

Il est facile de déduire de cette égalité, que la fonction ln est un élément de l'ensemble $C^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

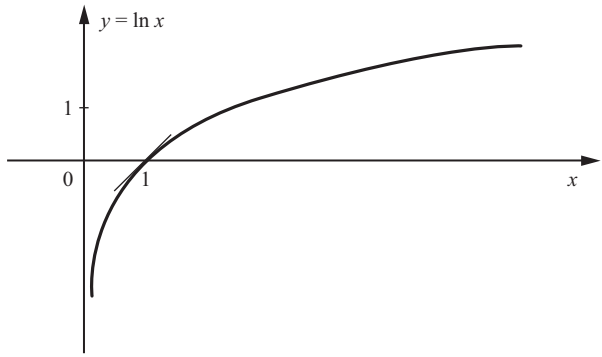


Fig. 7.2

7.2.2 Propriétés de la fonction ln

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$;
- pour tout couple x, y de nombres réels positifs :

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \ ;$$

- $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

DÉMONSTRATION. Posons $a = \ln 1$ et $b = \ln e$. Alors, $e^a = 1$ et $e^b = e$; ce qui entraîne que $a = 0$ et $b = 1$.

Soit x, y deux nombres réels positifs quelconques et posons $c = \ln x + \ln y$. Alors,

$$e^c = e^{(\ln x + \ln y)} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = xy \ ;$$

ce qui implique que $c = \ln(xy)$. D'autre part, en remarquant que

$$0 = \ln 1 = \ln\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln y + \ln\frac{1}{y},$$

on obtient que

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y.$$

D'où

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

Pour démontrer que $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, il suffit de constater que la fonction ln n'est ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes 5.2.19 et 5.2.27. ■

7.2.3 Fonction logarithme de base $a > 0,\ a \neq 1$.

Pour tout nombre réel positif $a \neq 1$, la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, notée $\log_a$, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, fait correspondre le nombre réel

$$\frac{\ln x}{\ln a},$$

est appelée fonction *logarithme de base a* (fig. 7.3 et 7.4).

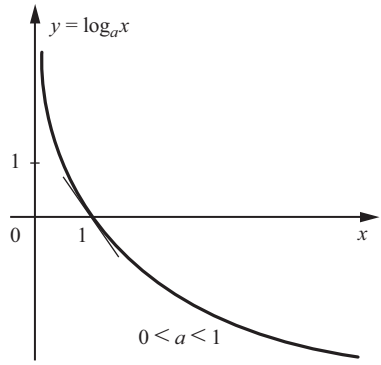


Fig. 7.3

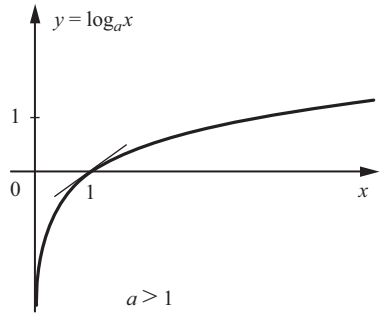


Fig. 7.4

Il découle immédiatement de cette définition que la fonction $\log_a$ est un élément de l'ensemble $C^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a} ;$$

ce qui implique que si $0 < a < 1$ (resp. $a > 1$), la fonction $\log_a$, est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, les propriétés de la fonction $\log_a$, sont identiques à celles de la fonction ln, à savoir :

- $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$;
- pour tout couple x, y de nombres réels positifs :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y ;$$

- si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$;
- si $a > 1$: $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

7.2.4 Remarque

La fonction logarithme de base e n'est autre que la fonction logarithme népérien.

7.3 Fonction exponentielle de base $a > 0$

7.3.1 Définition du nombre réel a^x

Soit a un nombre réel positif. En remarquant que pour tout nombre rationnel r :

$$a^r = e^{r \ln a},$$

on est amené tout naturellement à prolonger la notion de puissance à exposant rationnel à celle de puissance à exposant réel x, en posant par définition :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

7.3.2 Propriétés du nombre réel a^x

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x > 0$ et $\ln a^x = x \ln a$;
- pour tout couple de nombres réels x et y :

$$a^{x+y} = a^x a^y \text{ et } (a^x)^y = a^{xy} ;$$

- si $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(ab)^x = a^x b^x \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

DÉMONSTRATION. Soit x, y deux nombres réels quelconques. Alors,

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{(x\ln a + y \ln a)} = e^{x \ln a}\, e^{y \ln a} = a^x a^y.$$

D'autre part, en remarquant que

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x \ln a}\right) = x \ln a,$$

on obtient que

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{(xy)\ln a} = a^{xy}.$$

Supposons à présent que $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{(x \ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} \cdot e^{x \ln b} = a^x\, b^x$$

et

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x \ln(a/b)} = e^{x(\ln a - \ln b)} = e^{x \ln a} \frac{1}{e^{x \ln b}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

■

7.3.3 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Pour tout nombre réel $a > 0$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, notée $\exp_a$, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel positif a^x, est appelée fonction *exponentielle de base a* (fig. 7.5 et 7.6).

Il découle immédiatement de cette définition, que la fonction $\exp_a$ est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

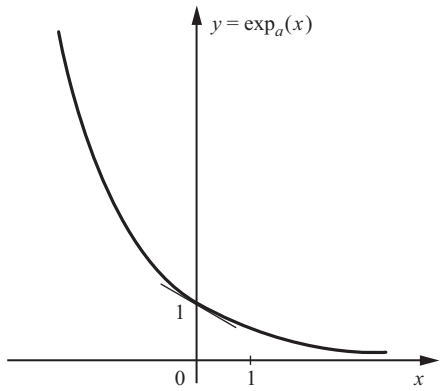
$$(\exp_a)'(x) = a^x \ln a ;$$

ce qui implique que, si $0 < a < 1$ (resp. $a > 1$), la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, si $a \neq 1$, on constate que la relation $a^x = y$ est équivalente à : $x = \ln_a y$; ce qui revient à dire que $\exp_a$ n'est rien d'autre que la fonction réciproque de $\ln_a$.

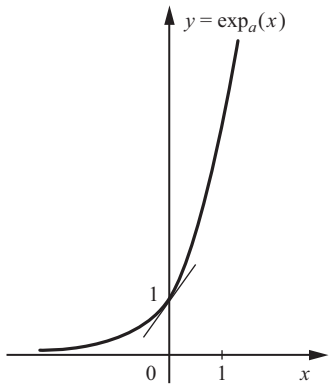
Les propriétés de la fonction $\exp_a$ sont identiques à celles de la fonction exp, à savoir :

- la fonction $\exp_a$ est convexe ;
- si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$;
- si $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$.



$0 < a < 1$

Fig. 7.5



$a > 1$

Fig. 7.6

7.3.4 Autre expression du nombre réel e^x

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

DÉMONSTRATION. Soit x un nombre réel donné et considérons la fonction auxiliaire $f_x :]\,|x| + 1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_x(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^{t \ln(1+x/t)}.$$

En utilisant la règle de Bernoulli-L'Hospital, on obtient que

$$\lim_{t \to +\infty} t \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1 + x/t)}{(1/t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{x}{1 + x/t} = x.$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} f_x(n) = \lim_{t \to +\infty} f_x(t) = e^x.$$

■

7.4 Fonction puissance

7.4.1 Fonction puissance

Soit α un nombre réel donné. Alors, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, fait correspondre le nombre réel $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, est appelé fonction *puissance* (fig. 7.7).

Il découle immédiatement de cette définition que la fonction puissance est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1};$$

ce qui implique que si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), la fonction puissance est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction puissance est en fait définie sur tout $\mathbb{R}$ et, pour $\alpha \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, la fonction puissance est en fait définie sur tout $\mathbb{R}^*$.

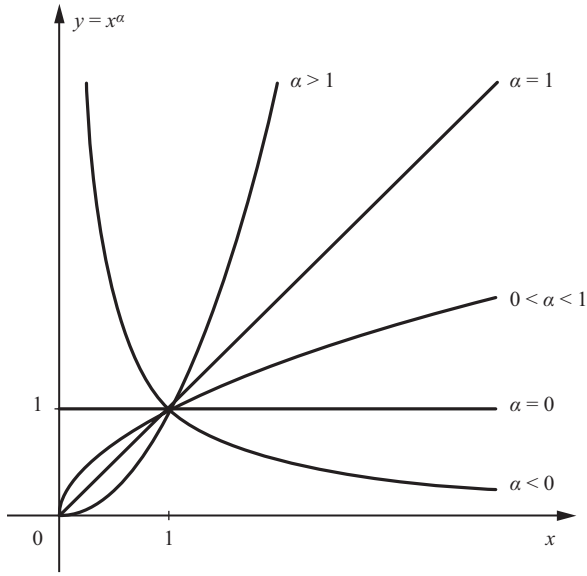


Fig. 7.7

7.4.2 Propriétés de la fonction puissance

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha > 0$ et $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$;
- pour tout couple de nombres réels α et β :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \text{ et } (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta};$$

- si $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

De plus,

- si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha \geqslant 1$, la fonction puissance est convexe ;
- si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$;
- si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

7.4.3 Croissance comparée des fonctions exponentielle, logarithme et puissance

Soit $\gamma \in]0, +\infty[$. Alors,

- si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\gamma} = +\infty$;
- si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\gamma a^x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\gamma} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0+} x^\gamma \log_a x = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $a > 1$. Le corps des nombres réels étant archimédien, on sait qu'il existe un entier naturel n tel que $n > \gamma$; ce qui implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-\gamma} = +\infty$. Par suite, en remarquant que pour tout $x > 1$:

$$\frac{a^x}{x^\gamma} = \frac{1}{x^\gamma} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k\,!} \geqslant \frac{(\ln a)^n}{n\,!} \frac{x^n}{x^\gamma} = \frac{(\ln a)^n}{n\,!} x^{n-\gamma},$$

on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\gamma} = +\infty.$$

Supposons à présent que $0 < a < 1$. Alors, en posant $b = 1/a > 1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\gamma a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\gamma}{b^x} = 0.$$

Les deux premiers résultats sont ainsi démontrés. Pour établir les deux suivants, nous allons utiliser la règle de Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\gamma} = \frac{1}{\gamma \ln a} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\gamma} = 0$$

et

$$\lim_{x\to0+} x^\gamma \log_a x = \lim_{x\to0+} \frac{\log_a x}{(1/x^\gamma)} = \frac{-1}{\gamma \ln a} \lim_{x\to0+} x^\gamma = 0.$$

■

7.4.4 Inégalité de Hölder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $2n$ nombres réels positifs $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$. Alors, pour tout couple p, q de nombres réels positifs vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Hölder*. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Étant donné que $p > 1$, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^p$ est convexe. Ainsi, en posant dans la formule donnée au paragraphe 6.6.6 :

$$x_i = a_i\, b_i{}^{-q/p} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q},$$

et en tenant compte que $1/p + 1/q = 1$, on obtient que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i\, b_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q}\right)^p &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q}\right) a_i\, b_i^{-q/p}\right)^p \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q}\right)\left(a_i\, b_i^{-q/p}\right)^p = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

■

7.4.5 Inégalité de Minkowski

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $2n$ nombres réels positifs $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$. Alors, pour tout nombre réel $p > 1$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Minkowski*.

DÉMONSTRATION. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$, on obtient les deux inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p};$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n} a_i\,(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Par suite, en divisant les deux membres de cette dernière inégalité par $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$, on obtient l'inégalité de Minkowski. ■

7.5 Fonctions hyperboliques

7.5.1 Définitions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

- $\sinh x \quad = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x \quad = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x \quad = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\coth x \quad = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ si $x \neq 0$.

Il résulte immédiatement de ces définitions que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x \geqslant 1, \quad |\tanh x| < 1 \text{ et } |\coth x| > 1.$$

7.5.2 Fonction sinus hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée sinh, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\sinh x$, est appelée fonction *sinus hyperbolique* (fig. 7.8).

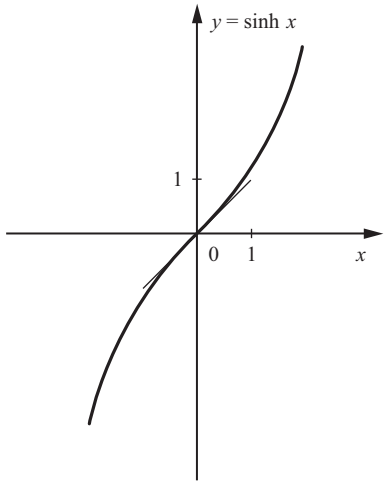


Fig. 7.8

Il découle immédiatement de la définition que

- sinh est une fonction impaire ;
- $\sinh \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\sinh)'(x) = \cosh x$.

De cette dernière propriété et de l'inégalité $\cosh x \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que la fonction sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme, de plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty,$$

on peut affirmer que la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'autre part, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$.

7.5.3 Fonction cosinus hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$, notée cosh, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\cosh x$, est appelée fonction *cosinus hyperbolique* (fig. 7.9).

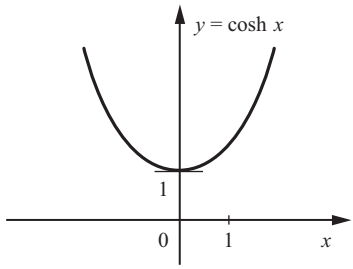


Fig. 7.9

Il résulte immédiatement de la définition que

- cosh est une fonction paire ;
- $\cosh \in C^\infty(\mathbb{R}, [1, +\infty[)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\cosh)'(x) = \sinh x$;
- $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$.

Ainsi, grâce à la troisième propriété, la fonction cosinus hyperbolique est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; ce qui implique qu'elle atteint son minimum au point $x = 0$.

7.5.4 Fonction tangente hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, notée tanh, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\tanh x$, est appelée fonction *tangente hyperbolique* (fig. 7.10).

Il découle immédiatement de la définition que

- tanh est une fonction impaire ;
- $\tanh \in C^\infty(\mathbb{R},]-1, 1[)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

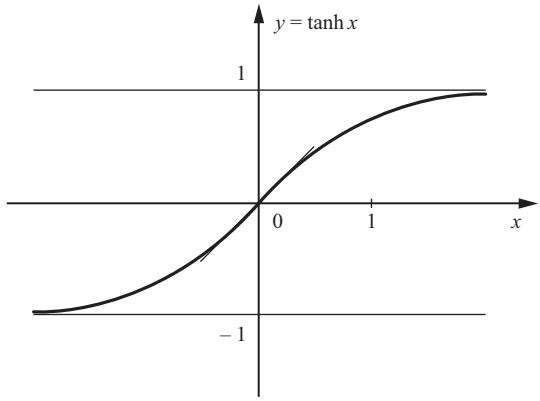


Fig. 7.10

De cette dernière propriété, on déduit que la fonction tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme, de plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1,$$

on peut affirmer que la fonction tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. D'autre part, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$.

7.5.5 Fonction cotangente hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $F =]-\infty, -1\,[\cup]\,1, +\infty[$, notée coth, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\coth x$, est appelée fonction *cotangente hyperbolique* (fig. 7.11).

Il résulte immédiatement de la définition que

- coth est une fonction impaire ;
- $\coth \in C^\infty(\mathbb{R}^*, F)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $(\coth)'(x) = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$.

De cette dernière propriété, on déduit que la fonction coth est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0\,[$ et $]\,0, +\infty[$. Comme, de plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \coth x = -1, \quad \lim_{x\to0-} \coth x = -\infty, \quad \lim_{x\to0+} \coth x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \coth x = 1,$$

on peut affirmer que la fonction contangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans F.

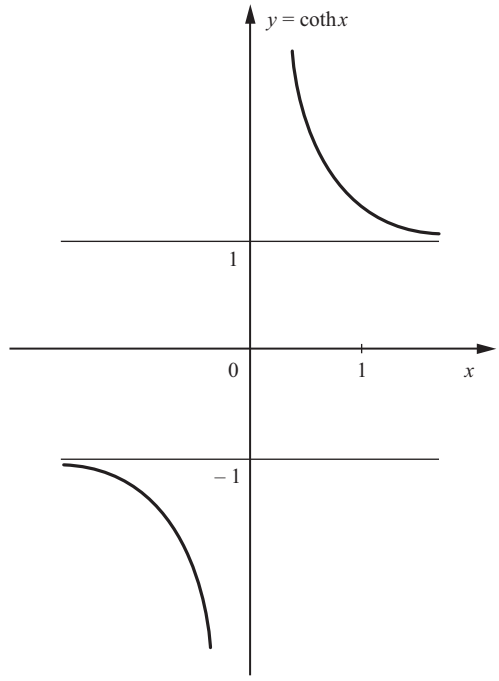


Fig. 7.11

7.6 Fonctions hyperboliques réciproques

7.6.1 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinh, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument sinus hyperbolique* et notée arsinh (fig. 7.12).

Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{arsinh} x$ est équivalente à : $x = \sinh y$;

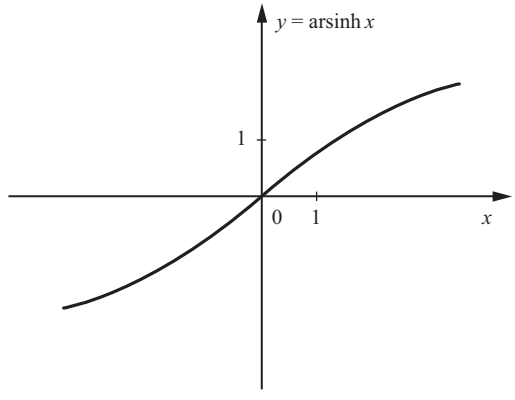


Fig. 7.12

ce qui entraîne que la fonction arsinh est impaire. En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 6.1.13, on obtient que la fonction arsinh est différentiable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ avec } y = \operatorname{arsinh} x.$$

Il est facile de déduire de cette égalité que la fonction arsinh est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ce qui implique (§ 5.2.19 et § 5.2.27) que

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arsinh} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arsinh} x = +\infty.$$

De plus, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$ (§ 6.5.5).

7.6.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = \cosh x$, étant surjective strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, admet une fonction réciproque $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, appelée fonction *argument cosinus hyperbolique* et notée arcosh (fig. 7.13). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{arcosh} x$ est equivalente à : $x = \cosh y$ et $y \geqslant 0$.

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 6.1.13, on obtient que la fonction arcosh est différentiable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$(\operatorname{arcosh})'(x) = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{avec} \quad y = \operatorname{arcosh} x.$$

On déduit immédiatement de cette égalité que la fonction argument cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $[1, +\infty[$; ce qui implique (§ 5.2.19) que $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcosh} x = +\infty$.

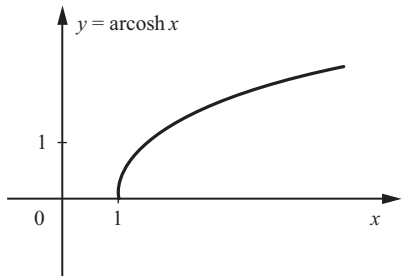


Fig. 7.13

7.6.3 Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tanh, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument tangente hyperbolique* et notée artanh

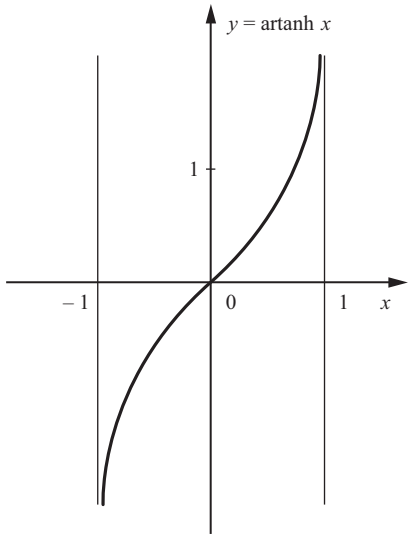


Fig. 7.14

(fig. 7.14). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{artanh} x$ est équivalente à : $x = \tanh y$; ce qui entraîne que la fonction artanh est impaire.

En utilisant le résultat du paragraphe 6.1.13, on obtient que la fonction artanh est différentiable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\operatorname{artanh})'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{avec } y = \operatorname{artanh} x.$$

Il est facile de déduire de cette égalité que la fonction artanh est un élément de l'ensemble $C^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})$ et qu'elle est strictement croissante sur $]-1,1[$; ce qui implique (§ 5.2.27)

$$\lim_{x\to -1+} \operatorname{artanh} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1-} \operatorname{artanh} x = +\infty.$$

De plus, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$ (§ 6.5.5).

7.6.4 Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction coth, étant une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $F =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument cotangente hyperbolique* et notée arcoth (fig. 7.15). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{arcoth} x$ est équivalente à : $x = \coth y$; ce qui entraîne que la fonction arcoth est impaire.

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 6.1.13, on obtient que la fonction arcoth est différentiable sur F et que pour tout $x \in F$:

$$(\operatorname{arcoth})'(x) = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{avec} \quad y = \operatorname{arcoth} x.$$

On déduit facilement de cette égalité que la fonction arcoth est un élément de l'ensemble $C^\infty(F, \mathbb{R}^*)$ et qu'elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcoth} x = 0, \quad \lim_{x\to-1-} \operatorname{arcoth} x = -\infty, \quad \lim_{x\to1+} \operatorname{arcoth} x = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcoth} x = 0.$$

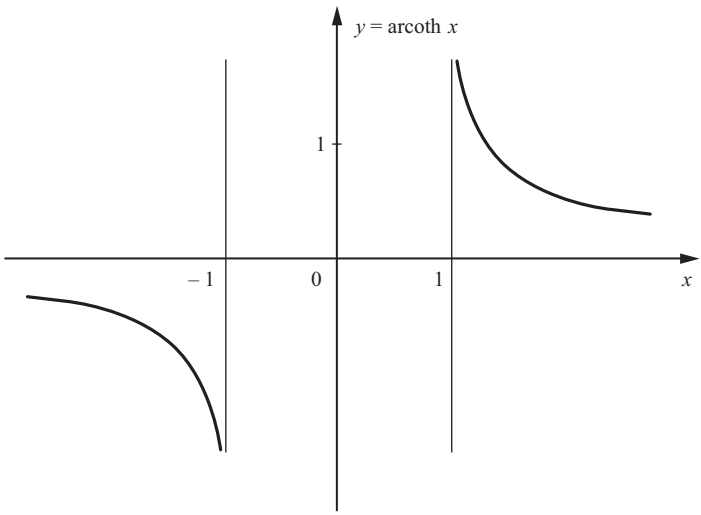


Fig. 7.15

7.6.5 Autre expression des fonctions hyperboliques réciproques

- pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- pour tout nombre réel $x \geqslant 1$:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

- pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

- pour tout nombre réel vérifiant $|x| > 1$:

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons d'établir la première de ces égalités, les trois autres s'obtenant de manière analogue.

Étant donné que la relation $y = \operatorname{arsinh} x$ est équivalente à

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2\,e^y},$$

on obtient, en multipliant les deux membres de cette égalité par $2e^y$, que e^y est la solution positive de l'équation $t^2 - 2xt - 1 = 0$. D'où

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}\,;$$

ce qui entraîne que

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

■

7.7 Exercices

7.7.1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + 2^x)^{1/x}$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{artanh} x - \arctan x}{\sinh x - x}$

3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1 + \sin x) - x + x^2/2}{\tan x - \sin x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(2/\sqrt{x})}{\ln(\sqrt{x} - 1) - \ln\sqrt{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2^{1/x} + 3^{1/x} + 4^{1/x}}{3}\right)^x$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, e^{-\sqrt{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to0+} x^{\sin x}$

8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arctan(x^2 - x^2\cos x)}{(1 - \sqrt{\cos x})\ln(\sin x/x)}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})^x$.

7.7.2 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0.$$

7.7.3 Pour quelles valeurs du nombre réel a, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2e^x + a$ s'annule-t-elle dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$?

7.7.4 Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6. \end{cases}$$

7.7.5 Résoudre le système

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2. \end{cases}$$

7.7.6 Soit a un élément de $]1, e[$. Montrer que l'équation $a\ln x = x\ln a$ admet une et une seule solution dans l'intervalle ouvert $]e, +\infty[$.

7.7.7 Montrer que pour tout $x \in]0,1]$: $|\ln x| \leqslant 2/\sqrt{x}$.

7.7.8 Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $\ln x \leqslant 2\sqrt{x}$.

7.7.9 Montrer que pour tout couple de nombres réels x et y, on a :

1) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ 2) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

7.7.10 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

7.7.11 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

soit continue au point $x = 0$?

7.7.12 Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^x}$$

est bijective. Calculer f^{-1}.

7.7.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Trouver son développement limité d'ordre n autour de zéro.

7.7.14 Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\cos x)^{1+\sin x}$. Trouver son développement limité d'ordre 4 autour de zéro.

7.7.15 Étudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^x$. Faire sa représentation graphique.

7.7.16 Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (e^{|x|} - 2)^3$. Faire sa représentation graphique.

7.7.17 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = l$ avec $l > 0$, et soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^x f(x)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. 2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

7.7.18 Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$.

1) Montrer que f est convexe.
2) En déduire que pour tout couple d'éléments x, y de $]1, +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \cdot \ln y}.$$

7.7.19 Soit l'équation $2^x + 3^x = n^x$.

1) Montrer que pour tout entier $n > 3$, cette équation admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
2) En désignant par x_n cette solution, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

7.7.20 Soit $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x+2) - x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, et que $-2 < \alpha < 0 < \beta$.
2) En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \ln(2 + x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge vers β.

7.7.21 Montrer que pour tout entier $n > 0 : 1/(n+1) < \ln(n+1) - \ln n < 1/n$. En déduire que la série harmonique (§ 4.1.5) est divergente.

7.7.22 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge.

7.7.23 Déterminer l'ensemble des nombres réels α pour lesquels on ait :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+k}{3+5+7+\ldots+(2k+1)} \cdot k^{\alpha} < +\infty.$$

7.7.24 Montrer que pour tout entier $k > 0 : (1+1/k)^k < e < (1+1/k)^{k+1}$.

7.7.25 En utilisant l'exercice précédent, montrer que pour tout entier $n > 1$:

1) $n^{n-1}/(n-1)\,! < e^{n-1} < n^n/(n-1)\,!$.
2) $n^n e^{1-n} < n\,! < n^{n+1}\, e^{1-n}$.

Chapitre 8

Séries entières et séries de Taylor

8.1 Séries entières

Au chapitre 7, nous avons défini à l'aide d'une série le nomre réel e^x pour chaque $x \in \mathbb{R}$, et ainsi la fonction exponentielle. Le présent chapitre a pour but de généraliser cette manière de définir des fonctions à l'aide de séries.

8.1.1 Définitions

Soit une suite numérique (a_k) et $x_0 \in \mathbb{R}$.

L'expression $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$ est dite *série*, *série entière* ou encore *série de puissances (entières)*. On définit le *domaine de convergence* de la série entière par

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ converge} \right\}$$

et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \text{pour} \quad x \in D.$$

La fonction f est dite *définie par la série entière*.

En $x = x_0$, la série entière devient $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot 0$, qui converge vers a_0 . Ainsi $x_0 \in D$ et $f(x_0) = a_0$.

8.1.2 Exemples

1) Choisissons $a \in]0, +\infty[$, $a_k = a^k$ pour $k \geqslant 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k(x - x_0)^k$$

converge si, et seulement si, $|x-x_0| < a^{-1}$. Ainsi le domaine de convergence est $D =]x_0 - a^{-1}, x_0 + a^{-1}[$ et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par cette série entière est donnée par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k = \frac{1}{1 - a(x - x_0)} \quad \text{pour } x \in D. \tag{8.1}$$

DÉMONSTRATION. Lorsque $x - x_0 = a^{-1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a^k a^{-k} = n + 1$$

et la divergence est évidente dans ce cas. Considérons le cas $x - x_0 \neq a^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \{a(x - x_0)\}^k = \frac{1 - \{a(x - x_0)\}^{n+1}}{1 - a(x - x_0)},$$

et la suite

$$\left(\frac{1 - \{a(x - x_0)\}^{n+1}}{1 - a(x - x_0)} \right)$$

converge exactement lorsque $|a(x - x_0)| < 1$, sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ valant dans ce cas (8.1). ■

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k (x - x_0)^k$ est dite une *série géométrique*.

2) Choisissons $a_0 = 0$, $a_k = k^k$ pour $k \geqslant 1$ et $x_0 = 0$. La série entière correspondante

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$$

diverge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Pour le voir, fixons $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $|kx|^k \geqslant |kx|$ si $k \geqslant |x|^{-1}$, on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} |k^k x^k| = \lim_{k \to +\infty} |kx|^k \geqslant \lim_{k \to +\infty} |kx| = +\infty \quad \text{si } x \neq 0.$$

Puisque $\lim_{k \to +\infty} k^k x^k \neq 0$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$ diverge (§ 4.1.4).

Ainsi le domaine de convergence est $D = \{x_0\} = \{0\}$ et la fonction définie par cette série entière est donnée par $f(x_0) = f(0) = a_0 = 0$.

8.1.3 Théorème sur le domaine de convergence

Énoncé. Soit la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$. Il existe r avec $0 \leqslant r \leqslant +\infty$ tel que

- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge absolument pour tous les nombres réels x tels que $|x-x_0| < r$,
- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ diverge pour tous les nombres réels x tels que $|x-x_0| > r$.

On appelle r le *rayon de convergence* de la série entière.

Remarques

- Il résulte de ce théorème que le domaine de convergence D est un intervalle et D est appelé aussi l'*intervalle de convergence* de la série entière.
- Cas $r = +\infty$: la série entière converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Cas $r = 0$: la série entière ne converge que pour $x = x_0$.
- Cas $0 < r < +\infty$: l'intervalle de convergence contient au moins l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ et ne contient aucun x réel tel que $|x - x_0| > r$; il vaut donc

$$]x_0 - r, x_0 + r[\,,\ ]x_0 - r, x_0 + r],\ [x_0 - r, x_0 + r[\text{ ou } [x_0 - r, x_0 + r].$$

- Dans le premier exemple ci-dessus, le rayon de convergence vaut a^{-1} et l'intervalle de convergence est $]x_0 - a^{-1}, x_0 + a^{-1}[$.
- Dans le second exemple, le rayon de convergence vaut 0 et l'intervalle de convergence est $\{x_0\} = \{0\}$.
- La terminologie *rayon* de convergence provient de la théorie des séries entières *complexes* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$, où les a_k, x_0 et x sont dans $\mathbb{C}$. En effet, lorsque $0 < r < +\infty$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\}$ représente un disque de rayon r.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la preuve du théorème, supposons que $x_0 = 0$. Si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ne converge pour aucun $x \in \mathbb{R}^*$, alors le choix $r = 0$ satisfait l'énoncé du théorème.

Supposons donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ converge pour un certain $z \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |z|$, on a

$$0 \leqslant |a_k x^k| = |a_k z^k| \left|\frac{x}{z}\right|^k .$$

Or il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k z^k| \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant k_0$, car $\lim_{k\to+\infty} a_k z^k = 0$ (ceci découle de la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, voir le paragraphe 4.1.4). D'où

$$\forall k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant |a_k x^k| \leqslant \left|\frac{x}{z}\right|^k .$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{z}\right|^k$ converge (car $|x/z| < 1$), le critère de comparaison assure que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge absolument (§ 4.2.2).

En résumé, si $z \in \mathbb{R}^*$ est dans le domaine de convergence D de la série entière, alors $]-|z|, |z|[\subset D$ et la série converge absolument en tout $x \in]-|z|, |z|[$. Par conséquent $D = \mathbb{R}$, $D = \{0\}$ ou D est un intervalle de la forme

$$]-r, r[\,, \quad]-r, r], \quad [-r, r[\quad \text{ou} \quad [-r, r]$$

pour un certain $r \in]0, +\infty[$, qui satisfait alors l'énoncé du théorème. Les choix $r = 0$ et $r = +\infty$ satisfont l'énoncé du théorème lorsque $D = \{0\}$ et $D = \mathbb{R}$ respectivement. ■

8.1.4 Un critère de convergence pour les séries numériques

Voici une variante utile du critère de la limite supérieure (voir § 4.2.7).

Proposition. Soit une série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho$ avec $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$.

Si $0 \leqslant \rho < 1$, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ converge absolument.

Si $1 < \rho \leqslant +\infty$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ diverge.

DÉMONSTRATION. En fait c'est une conséquence directe du critère de la limite supérieure.

Voici une preuve qui utilise la notion de limite (inspirée de la preuve du § 4.2.7). Considérons d'abord le cas $0 \leqslant \rho < 1$. Comme

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho < 1,$$

il existe un entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\sqrt[k]{|c_k|} \leqslant (\rho + 1)/2 < 1.$$

D'où

$$\forall k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant |c_k| \leqslant \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^k$$

avec

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} |c_k| + \sum_{k=k_0}^{+\infty} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^k < +\infty$$

car $\rho < 1$. Par le critère de comparaison (§ 4.2.2), la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ converge absolument.

Considérons ensuite $1 < \rho < +\infty$. Comme

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho > 1,$$

il existe un entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\sqrt[k]{|c_k|} \geqslant (\rho + 1)/2 > 1.$$

D'où

$$\forall k \geqslant k_0 \quad |c_k| \geqslant \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^k$$

et la suite (c_k) ne converge pas vers 0 (puisque $\rho > 1$). Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ diverge (§ 4.1.4).

Finalement, supposons $\rho = +\infty$. Comme $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \rho = +\infty$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0 \quad \sqrt[k]{|c_k|} \geqslant 2.$$

D'où $|c_k| \geqslant 2^k$ et (c_k) ne tend pas vers 0. Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ diverge.

■

8.1.5 Formules pour le rayon de convergence

Proposition. Soit une série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$ de rayon de convergence r.

1) Supposons $a_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Si $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$ avec $0 \leqslant \ell \leqslant +\infty$, alors $r = 1/\ell$
   (avec $r = 0$ si $\ell = +\infty$ et $r = +\infty$ si $\ell = 0$).
   Ceci s'écrit aussi $r = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ avec $0 \leqslant r \leqslant +\infty$.
2) Si $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$ avec $0 \leqslant L \leqslant +\infty$, alors $r = 1/L$.

DÉMONSTRATION

1) Pour $x \neq x_0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k}\right| = |x - x_0| \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x - x_0|\ell.$$

D'après le critère de d'Alembert (§ 4.2.9), la série converge absolument si $|x - x_0|\ell < 1$ et diverge si $|x - x_0|\ell > 1$. Le rayon de convergence vaut donc $1/\ell$.

2) Pour $x \neq x_0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = |x - x_0| \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x - x_0|L.$$

D'après le paragraphe 8.1.4, la série converge absolument si $|x - x_0|L < 1$ et diverge si $|x - x_0|L > 1$. Le rayon de convergence vaut donc $1/L$. ■

8.1.6 Remarque

La seconde formule ci-dessus admet la généralisation suivante :
si $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\sup|a_k|} = L$ avec $0 \leqslant L \leqslant +\infty$, alors $r = 1/L$.

Par convention, la limite supérieure d'une suite non majorée vaut $+\infty$. L'avantage de cette généralisation est que, pour toute suite (a_k) de nombres réels, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\sup|a_k|}$ est toujours bien défini grâce à cette convention.

8.1.7 Exemples

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k+1} = 0$,
le rayon de convergence vaut $r = +\infty$ et l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$. En fait, au chapitre 7, le nombre réel e^x a été défini comme $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{(-1)^{k+2}/(k+1)}{(-1)^{k+1}/k}\right| = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{k+1} = 1$,
le rayon de convergence vaut $r = 1/1 = 1$.

En $x = 2$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots$ converge (cf série harmonique alternée au § 4.2.4).

En $x = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^k = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge (cf série harmonique au § 4.1.5).

L'intervalle de convergence est donc $]0, 2]$.

Remarque. Bien que cette série commence avec le terme correspondant à $k = 1$, la théorie reste évidemment valable.

8.2 Séries de Taylor

8.2.1 Rappels sur la formule de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$, un intervalle ouvert I, $x_0 \in I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui est $(n+1)$ fois dérivable sur I. Posons

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in I.$$

Si $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_x(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Le nombre θ_x dépend aussi de n, x_0 et f, et il n'est pas unique en général. Pour $x = x_0$, on peut choisir pour θ_{x_0} n'importe quelle valeur dans $]0, 1[$.

On appelle P_n le *polynôme de Taylor* d'ordre n de f au point x_0 et R_n le *reste* d'ordre n au point x_0.

Voir le paragraphe 6.4.6.

8.2.2 Série de Taylor

Soit un intervalle ouvert I, $x_0 \in I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable sur I.

La série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

est appelée *série de Taylor* de f au point x_0 . Lorsque $0 \in I$ et $x_0 = 0$, cette série entière s'appelle aussi *série de MacLaurin* de f.

Étudier la convergence d'une série de Taylor consiste en :

1) déterminer le rayon de convergence r et l'intervalle de convergence,
2) comparer $f(x)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ pour tout x appartenant à la fois à I et à l'intervalle de convergence.

Grâce à la formule de Taylor, on voit que, dans 2),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

où R_n est le reste d'ordre n au point x_0. Dans le cas particulier $x = x_0$, $f(x)$ est égal à $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0 - x_0)^k = f(x_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0 - x_0)^k = f(x_0) + 0 = f(x_0).$$

8.2.3 Exemple : e^x

Comme vu aux paragraphes 7.1.1 et 8.1.7, la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers e^x. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. À titre d'illustration, prouvons que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ceci à l'aide de la formule de

Taylor qui vient d'être rappelée (§ 8.2.1). Ainsi f sera nécessairement la fonction exponentielle.

Par récurrence, on montre que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f^{(k)}(0) = f(0) = 1.$$

La série de Taylor de f au point $x_0 = 0$ vaut donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, son rayon de convergence étant $+\infty$ et son intervalle de convergence $\mathbb{R}$. Vérifions que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta_{n,x} \in]0,1[$ tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x}x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f(\theta_{n,x}x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dans la notation $\theta_{n,x}$, nous insistons non seulement sur la dépendance en x, mais aussi sur la dépendance en n qui joue un rôle important dans ce qui suit.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\max\{|f(t)| : |t| \leqslant |x|\}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ converge, $\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = 0$ (§ 4.1.4). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\max\{|f(t)| : |t| \leqslant |x|\}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0.$$

D'où $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8.2.4 Exemple : $\ln(x)$

Soient $I =]0,+\infty[$, $x_0 = 1$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \ln(x)$. On obtient $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f''''(x) = \frac{-2\cdot 3}{x^4}$, $\ldots$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}$ pour $k \geqslant 1$.

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k &= 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - + \ldots\end{aligned}$$

Cette série entière a été étudiée à l'exemple 2) du paragraphe 8.1.7, où il a été montré que son intervalle de convergence est $]0,2]$.

Vérifions que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in [1/2, 2]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in [1/2, 2]$, il existe $\theta_{n,x} \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_{n,x}(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+2} n!(1 + \theta_{n,x}(x-1))^{-(n+1)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n (1 + \theta_{n,x}(x-1))^{-(n+1)}}{n+1}(x-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $x \in [1/2, 2]$ fixé, on obtient

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(\min\{x, 1\})^{-(n+1)}}{n+1}|x-1|^{n+1}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\min\{x,1\})^{-(n+1)}}{n+1}|x-1|^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x-1|}{\min\{x,1\}}\right)^{n+1} = 0$$

car $\dfrac{|x-1|}{\min\{x,1\}} \leqslant 1$ lorsque $x \in [1/2, 2]$. D'où $\ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ pour tout $x \in [1/2, 2]$. En particulier

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots \tag{8.2}$$

Nous verrons au paragraphe 8.3.3 que ce résultat est en fait valable pour tout $x \in]0, 2]$:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \quad \text{pour tout } x \in]0, 2].$$

Remarque. La série dans (8.2) converge très lentement. Voici une meilleure manière de calculer $\ln(2)$:

$$\ln(2) = -\ln(1/2) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1/2)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(1/2)^k.$$

8.2.5 Autres exemples

Par le même genre de techniques, on obtient :

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour tout $x \in]-1,1[$
  (voir aussi l'exemple 1 du § 8.1.2 avec $a = 1$ et $x_0 = 0$),
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ pour tout $x \in]-1,1]$,
- $\sinh(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$
  car $\sinh^{(k)}(0) = 0$ si k est pair et $\sinh^{(k)}(0) = 1$ si k est impair,
- $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$ pour $x \in \mathbb{R}$
  car $\cosh^{(k)}(0) = 1$ si k est pair et $\cosh^{(k)}(0) = 0$ si k est impair,
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

8.2.6 Contre-exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet f est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que composée sur ces intervalles de fonctions indéfiniment dérivables.

D'autre part $f'(0)$ existe et vaut 0 car

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0\pm} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \pm \lim_{x\to 0\pm} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|} = \pm \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-1/2}} \\ &= \pm \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{2t}} \right)^{1/2} = \pm \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2e^{2t}} \right)^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

grâce à la règle de Bernoulli-L'Hospital (§ 6.3.2 et 6.3.3).

En raisonnant de même sur la fonction $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} 2x^{-3} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on obtient que $f''(0)$ existe et vaut 0, et ainsi de suite par récurrence.

La série de Taylor de f au point $x_0 = 0$ vaut donc $\sum_{k=0}^{+\infty} 0 \cdot x^k$, qui converge en tout $x \in \mathbb{R}$ vers la valeur 0. Ainsi $f(x)$ n'est égale à la série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} 0 \cdot x^k$ qu'en $x = 0$.

8.3 Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière

8.3.1 Théorème (primitive)

Énoncé. Soit une suite (b_k) dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Les deux séries entières

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x - x_0)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

ont le même rayon de convergence r avec $0 \leqslant r \leqslant +\infty$.

2) Si $r > 0$, alors la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x - x_0)^k$$

que l'on définit ici pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ est continue.

3) Si $r > 0$, alors la fonction

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

que l'on définit ici pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ est *une primitive* de f sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. Ceci signifie que F est dérivable en chaque $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et que sa dérivée vaut $f(x)$. La notion de primitive sera définie plus généralement au paragraphe 9.1.12.

Nous donnerons la preuve au paragraphe 9.5.

Remarques. On dit parfois que la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

s'obtient en « intégrant terme par terme » la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x - x_0)^k \,.$$

Observons que F est la primitive de f sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ telle que $F(x_0) = 0$ (F est alors uniquement déterminée comme on le voit par le §6.2.14).

8.3.2 Corollaire (dérivée)

Énoncé. Soit une suite (a_k) dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Les deux séries entières

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

ont le même rayon de convergence r avec $0 \leqslant r \leqslant +\infty$.

2) Si $r > 0$, alors la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ que l'on définit ici pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ est continûment dérivable et

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Remarques. On dit parfois que la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ s'obtient en « dérivant terme par terme » $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$. Par ce corollaire, $f'(x_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x_0 - x_0)^{k-1} = a_1$. Il résulte du corollaire appliqué itérativement que f est même indéfiniment dérivable sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et que $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION. On applique le théorème précédent aux séries entières

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Notons que la seconde s'obtient bien en « intégrant terme par terme » la première. Le théorème affirme que les deux séries entières ont le même rayon de convergence r et, si $r > 0$, la première série entière définit une fonction continue sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et la seconde définit une primitive sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Autrement dit, la fonction

$$f(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

est continûment dérivable sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, sa dérivée étant donnée par la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. ■

8.3.3 Exemples

1) Comme vu au paragraphe 8.1.7, la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Posons $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, ce qui définit une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf le corollaire ci-dessus). On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$$

et donc $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Au paragraphe 7.1.1, le nombre réel e^x est défini par $e^x = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et nous avons donc montré que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour une autre démonstration, voir le paragraphe 7.1.4.

2) Comme vu aux paragraphes 8.1.2 et 8.2.4,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \quad \text{pour tout} \quad z \in]-1, 1[$$

et

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad \text{pour tout} \quad x \in [1/2, 2],$$

la série dans le membre de droite étant convergente pour tout $x \in]0, 2]$ (§ 8.1.7). En posant $1 - z = x$, on obtient

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad \text{pour tout} \quad x \in]0, 2[\,.$$

Sur l'intervalle $]0, 2[$, la fonction $\ln(x)$ est la primitive qui s'annule en $x = 1$ de la fonction $1/x$, et la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ s'obtient en intégrant terme par terme la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x-1)^k$. Il résulte du paragraphe 8.3.1 que $\ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ pour tout $x \in]0, 2[$. À l'aide du paragraphe 8.2.4,

on en déduit $\ln(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ pour tout $x \in]0,2]$. Observons que les intervalles de convergence $]0,2]$ et $]0,2[$ des séries entières

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(x-1)^k$$

sont différents !

Chapitre 9

Calcul intégral

9.1 Intégrale d'une fonction continue et ses propriétés

9.1.1 Définition d'une subdivision

Soit $a < b$ deux nombres réels. Le sous-ensemble fini et ordonné $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ est appelé une *subdivision* de $[a, b]$ si

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

En particulier,

$$\left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, b\right\}$$

est appelée la *subdivision régulière d'ordre* n de $[a, b]$.

D'autre part, si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisons de $[a, b]$, on note par $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ la nouvelle subdivision de $[a, b]$ obtenue par la réunion des deux subdivisions σ_1 et σ_2.

9.1.2 Pas d'une subdivision

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors, le nombre réel positif

$$\mathcal{P}(\sigma) = \max\{x_j - x_{j-1} : j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

est appelé le *pas* de la subdivision σ.

9.1.3 Fonction définie et continue sur $[a, b]$

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *définie et continue* sur $[a, b]$ si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $[a, b] \subset E$;
- f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a, continue à gauche en b.

9.1.4 Sommes de Darboux

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et f une fonction définie et *bornée* sur $[a, b]$. Alors, le nombre réel

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{avec} \quad M_j = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$$

est appelé la *somme de Darboux supérieure* de la fonction f relativement à la subdivision σ, tandis que le nombre réel

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{avec } m_j = \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$$

est appelé la *somme de Darboux inférieure* de la fonction f relativement à la subdivision σ.

Étant donné que pour toute subdivision σ de $[a, b]$:

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f) \leqslant M(b-a)$$

où m (resp. M) est l'infimum (resp. supremum) de la fonction f sur $[a, b]$, on peut affirmer que les deux nombres réels

$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}_\sigma(f) : \sigma \,\text{subdivision de}\, [a, b]\}$$

et

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}_\sigma(f)\} : \sigma \,\text{subdivision de}\, [a, b]\}$$

existent.

Remarques

- Pour deux subdivisions σ_1 et σ_2, la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ vérifie

  $$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f), \quad \overline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma_1}(f) \quad \text{et} \quad \underline{S}_\sigma(f) \geqslant \underline{S}_{\sigma_2}(f).$$

  D'où

  $$\underline{S}_{\sigma_2}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

  pour toutes subdivisions σ_1 et σ_2. Il en résulte que

  $$\boxed{\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f).}$$

- Si f est définie et continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$ (§ 5.3.21). De plus, dans les définitions des sommes de Darboux, on a

  $$M_j = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \quad \text{et} \quad m_j = \min_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x).$$

  Toujours pour une fonction f définie et continue sur $[a, b]$, démontrons à présent que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

9.1.5 Lemme

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et *continue* sur $[a, b]$. Alors, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La fonction f étant uniformément continue sur $[a, b]$ (§ 5.3.21), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\sigma) \leqslant \delta$, on ait :

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon.$$

Comme

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f),$$

on en déduit

$$0 \leqslant \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon.$$

Puisque ceci est valable pout tout $\epsilon > 0$, il en découle que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$. ■

9.1.6 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et *continue* sur $[a, b]$. Par définition, le nombre réel $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ (lemme 9.1.5) est appelé l'*intégrale* de la fonction f sur $[a, b]$. Ceci se généralise comme suit :

Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, une fonction f définie et *bornée* sur $[a, b]$ est dite *intégrable (au sens de Riemann)* sur $[a, b]$ si l'égalité $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ a lieu, auquel cas le nombre réel $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ est appelé l'*intégrale (de Riemann)* de la fonction f sur $[a, b]$ et on écrit

$$\overline{S}(f) = \underline{S}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi toute fonction définie et continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Le nombre réel a est alors appelé la *borne inférieure* de l'intégrale, tandis que b est appelé la *borne supérieure* de l'intégrale. D'autre part, l'intervalle fermé et borné $[a, b]$ est appelé l'*intervalle d'intégration* et x la *variable d'intégration*.

Lorsque nous avons défini la notion d'intégrale, nous avons supposé que $a < b$. Dans le cas contraire où $b < a$, on posera, par définition, que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

si la fonction f est intégrable sur $[b,a]$. Enfin, si $a=b$, on posera, par définition, que

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

9.1.7 Remarques

- Il est bon de noter que l'intégrale d'une fonction intégrable ne dépend pas de la variable d'intégration choisie. Il nous est donc possible, sans changer la valeur de l'intégrale, de remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre. Par exemple,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots = \int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée et intégrable sur $[a,b]$ et si la valeur de f est modifiée en un nombre fini de valeurs de $x \in [a,b]$, alors la nouvelle fonction ainsi obtenue est aussi intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale vaut $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour le voir, notons par g cette nouvelle fonction et par $m \in \mathbb{N}^*$ le nombre des valeurs de x en lesquelles f est modifiée. Considérons encore $K \in]0,+\infty[$ tel que $|f(x)| \leqslant K$ et $|g(x)| \leqslant K$ pour tout $x \in [a,b]$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,b]$ telles que

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma_2}(f) - \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leqslant \epsilon/3.$$

Soit $n = 1 + [6mK(b-a)/\epsilon]$ et la subdivision régulière σ_3 d'ordre n de $[a,b]$.

Posons $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$, qui satisfait

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma}(f) - \underline{S}_{\sigma}(f) \leqslant \epsilon/3.$$

De plus, pour tout couple d'éléments consécutifs $z_1 < z_2$ de la subdivision σ,

$$z_2 - z_1 \leqslant (b-a)/n \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[z_1,z_2]} |f-g| \leqslant 2K,$$

le nombre des intervalles du type $[z_1,z_2]$ pour lesquels $\sup_{x\in[z_1,z_2]} |f-g| > 0$ étant majoré par m. D'où

$$\overline{S}_{\sigma}(g) \leqslant \overline{S}_{\sigma}(f) + m \cdot 2K \cdot (b-a)/n \leqslant \overline{S}_{\sigma}(f) + \epsilon/3.$$

De même

$$\underline{S}_{\sigma}(g) \geqslant \underline{S}_{\sigma}(f) - \epsilon/3.$$

D'où

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma}(g) - \underline{S}_{\sigma}(g) \leqslant \epsilon.$$

Comme ceci est valable pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte que g est intégrable sur $[a,b]$. De plus

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - 2\epsilon/3 &\leqslant \overline{S}_\sigma(g) - 2\epsilon/3 \leqslant \overline{S}_\sigma(f) - \epsilon/3 \\ &\leqslant \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_\sigma(f) \\ &\leqslant \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon/3 \leqslant \underline{S}_\sigma(g) + 2\epsilon/3 \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + 2\epsilon/3.\end{aligned}$$

Le nombre réel $\epsilon > 0$ pouvant être choisi arbitrairement petit, on obtient $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

9.1.8 Calcul de l'intégrale à partir des suites

Soit (σ_n) une suite de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$ et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La fonction f étant uniformément continue sur $[a,b]$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a,b]$ vérifiant $\mathcal{P}(\sigma) \leqslant \delta$, on ait :

$$0 \leqslant \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon.$$

En raisonnant comme dans la preuve du Lemme 9.1.5, on obtient alors

$$\underline{S}_\sigma(f) \leqslant \underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leqslant \overline{\mathrm{S}}_\sigma(\mathrm{f}).$$

Comme d'autre part $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $\mathcal{P}(\sigma_n) \leqslant \delta$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}(f) - \underline{S}_{\sigma_n}(f) \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \underline{S}_{\sigma_n}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}(f)\,;$$

ce qui implique que

$$\left|\overline{S}_{\sigma_n}(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \left|\underline{S}_{\sigma_n}(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

9.1.9 Exemple

Considérons la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Si σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$, on peut écrire

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n}e^a\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k = \frac{b-a}{n}e^a\,\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\,.$$

Par suite, en constatant que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{b-a}{n}}}{\frac{b-a}{n}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1-e^x}{x} = -1,$$

on obtient (§ 9.1.8) que

$$\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\underline{S}_{\sigma_n}(f) = e^b - e^a.$$

9.1.10 Propriété relative à l'intervalle d'intégration

Soit $a < b$ deux nombres réels, f une fonction définie et *bornée* sur $[a,b]$, et $c \in [a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est intégrable à la fois sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Si $c = a$ ou b, le résultat est évident. Pour cette raison, nous supposerons que $c \neq a$ ou b.

Supposons d'abord que f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et considérons $\epsilon > 0$. Il existe des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,c]$, et σ_3 et σ_4 de $[c,b]$, telles que

$$\overline{S}_{\sigma_1}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leqslant \epsilon/2 \quad \text{et} \quad \overline{S}_{\sigma_3}(f) - \underline{S}_{\sigma_4}(f) \leqslant \epsilon/2.$$

Les subdivisions $\sigma_5 = \sigma_1 \cup \sigma_3$ et $\sigma_6 = \sigma_2 \cup \sigma_4$ de $[a,b]$ satisfont

$$\overline{S}_{\sigma_5}(f) = \overline{S}_{\sigma_1}(f) + \overline{S}_{\sigma_3}(f), \quad \underline{S}_{\sigma_6}(f) = \underline{S}_{\sigma_2}(f) + \underline{S}_{\sigma_4}(f)$$

et donc

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma_5}(f) - \underline{S}_{\sigma_6}(f) \leqslant \epsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte que f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. De plus, de nouveau pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x - \epsilon \leqslant \overline{S}_{\sigma_1}(f) + \overline{S}_{\sigma_3}(f) - \epsilon \leqslant \underline{S}_{\sigma_2}(f) + \underline{S}_{\sigma_4}(f)$$

$$= \underline{S}_{\sigma_6}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_{\sigma_5}(f) = \overline{S}_{\sigma_1}(f) + \overline{S}_{\sigma_3}(f)$$

$$\leqslant \underline{S}_{\sigma_2}(f) + \underline{S}_{\sigma_4}(f) + \epsilon \leqslant \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \epsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Réciproquement, supposons f intégrable sur $[a,b]$, et soit $\epsilon > 0$. Il existe des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,b]$ telles que

$$\overline{S}_{\sigma_1}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leqslant \epsilon.$$

Considérons la subdivision σ de $[a,b]$ définie par $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \{c\}$. Alors

$$\overline{S}_{\sigma}(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma_1}(f) \quad \text{et} \quad \underline{S}_{\sigma}(f) \geqslant \underline{S}_{\sigma_2}(f),$$

et donc

$$\overline{S}_{\sigma}(f) - \underline{S}_{\sigma}(f) \leqslant \epsilon.$$

D'où

$$\overline{S}_{\sigma\cap[a,c]}(f) + \overline{S}_{\sigma\cap[c,b]}(f) - \underline{S}_{\sigma\cap[a,c]}(f) - \underline{S}_{\sigma\cap[c,b]}(f) \leqslant \epsilon,$$

et ainsi

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma\cap[a,c]}(f) - \underline{S}_{\sigma\cap[a,c]}(f) \leqslant \epsilon$$

et

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma\cap[c,b]}(f) - \underline{S}_{\sigma\cap[c,b]}(f) \leqslant \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. ■

9.1.11 Théorème de la moyenne

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et *continue* sur $[a,b]$. Alors, il existe un élément c de $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

DÉMONSTRATION. En posant

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad et \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

il résulte de la définition de l'intégrale que

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M.$$

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle prend toute valeur comprise entre m et M (§ 5.3.22) ; ce qui revient à dire qu'il existe un nombre réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}.$$

D'où le résultat. ■

Remarque. Nous verrons dans une remarque à la fin du paragraphe 9.1.13 qu'en fait il est possible de trouver un tel c dans l'intervalle *ouvert* $]a, b[$.

9.1.12 Définition d'une primitive

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors nous dirons qu'une fonction continue $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de la fonction f sur $[a, b]$ si pour tout $x \in]a, b[$:

$$G'(x) = f(x).$$

De même, soit I un intervalle ouvert non vide et f une fonction définie et continue sur I. Alors nous dirons qu'une fonction continue $G : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de la fonction f sur I si pour tout $x \in I$:

$$G'(x) = f(x).$$

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 6.2.14, on peut énoncer la proposition suivante :

Si G et H sont deux primitives de la fonction f sur $[a, b]$, alors les deux fonctions G et H sont égales à une constante additive près ; ceci revient à dire qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

$$G(x) = H(x) + c.$$

Ce résultat reste valable si $[a, b]$ est remplacé par un intervalle ouvert non vide I.

Remarque. Si G est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$, alors $G'_d(a)$ et $G'_g(b)$ (§ 6.1.17) existent et valent $f(a)$ et $f(b)$. Pour la dérivée à droite en a, remarquons en effet que, pour tout $x \in]a, b]$, $G(x) - G(a) = f(c_x)(x - a)$ pour un certain $c_x \in]a, x[$ (grâce au théorème des accroissements finis, § 6.2.12). D'où

$$\lim_{x \to a+} \frac{G(x) - G(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} f(c_x) = f(a).$$

9.1.13 Théorème fondamental du calcul intégral : première partie

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons que pour tout $x \in]\,a, b\,[$: $F'(x) = f(x)$. Pour cela, fixons-nous arbitrairement un élément x_0 de $]a, b[$. Alors, à chaque élément $x \neq x_0$ de $]a, b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ compris entre x et x_0 (§ 9.1.11) tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(c(x))\,;$$

ce qui implique, par la continuité de la fonction f au point x_0, que

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0).$$

Montrons à présent que F est continue à droite au point a. En effet, étant donné qu'à chaque élément x de $]\,a, b\,]$, on peut associer un nombre réel $d(x) \in [\,a, x\,]$ tel que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(d(x))(x - a)\,;$$

on obtient, du fait que la fonction f est bornée sur $[a, b]$, que

$$\lim_{x \to a+} F(x) = 0 = F(a).$$

Reste à démontrer que la fonction F est continue à gauche au point b. Puisqu'à chaque élément $x \in [\,a, b\,[$, on peut associer un élément $r(x) \in [\,x, b\,]$ tel que

$$F(x) = F(b) - \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - f(r(x))(b - x),$$

on peut donc affirmer, compte tenu que la fonction f est bornée sur $[a, b]$, que

$$\lim_{x \to b-} F(x) = F(b).$$

Ainsi s'achève la démonstration de ce théorème. ■

Remarque. La preuve s'appuie sur le théorème de la moyenne du paragraphe 9.1.11. À son tour, le présent résultat permet d'améliorer la conclusion du théorème de la moyenne, comme suit. Le théorème des accroissements finis (§ 6.2.12) donne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a),$$

et donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)(b - a).$$

Ainsi il est possible de trouver un tel c dans l'intervalle *ouvert* $]a, b[$.

9.1.14 Intégrale fonction de ses bornes

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[\,a, b\,]$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g, h : I \to [\,a, b\,]$ deux fonctions différentiables sur I. Alors, la fonction $K : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est différentiable sur I. De plus, pour tout $x \in I$, on a :

$$K'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

DÉMONSTRATION. Considérons les deux fonctions auxiliaires $\tilde{f}, F : [\,a - 1, b + 1\,] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si } t \in [\,a - 1, a\,] \\ f(t) & \text{si } t \in [\,a, b\,] \\ f(b) & \text{si } t \in [\,b, b + 1\,] \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{a-1}^{x} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

En constatant que

$$K = F \circ g - F \circ h,$$

on obtient (voir § 6.1.15 et 9.1.13) que la fonction K est différentiable sur I, et que pour tout élément x de I :

$$\begin{aligned} K'(x) &= \tilde{f}(g(x)) \cdot g'(x) - \tilde{f}(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x). \end{aligned}$$

■

9.1.15 Théorème fondamental du calcul intégral : seconde partie

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, si la fonction $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

DÉMONSTRATION. Étant donné que la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$ (§ 9.1.13), on sait (§ 9.1.12) qu'il existe une constante c telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

$$F(x) = G(x) + c.$$

D'où

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

9.1.16 Notation

Nous utiliserons très souvent la notation suivante :

$$f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b.$$

9.1.17 Exemple

On se propose de calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ainsi, en remarquant que cette fonction est décroissante sur [0,1], on obtient que pour tout entier $n > 0$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (k/n)^2} = \underline{S}_{\sigma_n}(f)$$

où σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de [0,1] ; ce qui entraîne (§ 9.1.8) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Finalement, étant donné que la fonction $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \arctan x$ est une primitive de la fonction f sur $[0,1]$, on obtient (§ 9.1.15) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \arctan x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

9.1.18 Linéarité de l'intégrale

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction continue $K : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t - \alpha \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \beta \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En la dérivant, on obtient que pour tout $x \in]a,b[$:

$$K'(x) = 0\,;$$

ceci implique, du fait que $K(a) = 0$, que pour tout $x \in [a,b]$ (§ 6.2.14) :

$$K(x) = 0.$$

D'où, en posant $x = b$, on obtient bien

$$\int_a^b (af + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = a \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

9.1.19 Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive ou nulle

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ telle que pour tout élément x de $[a,b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$. Alors,

- pour tout $c \in [a,b]$: $0 \leqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉMONSTRATION. Considérons la primitive $F : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x \in]\,a, b\,[$:

$$F'(x) = f(x) \geqslant 0\,;$$

ce qui implique que la fonction F est croissante sur $[\,a, b\,]$ (§ 6.2.16). Donc, pour tout $c \in [\,a, b\,]$:

$$0 = F(a) \leqslant F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Supposons à présent que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$:

$$F(x) = 0\,;$$

ce qui entraîne que pour tout $x \in]\,a, b\,[$:

$$F'(x) = f(x) = 0.$$

Étant donné que la fonction est continue sur $[a, b]$, on obtient finalement que $f(x) = 0$ sur tout $[\,a, b\,]$. La réciproque est évidente. ■

9.1.20 Corollaire

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout élément x de $[\,a, b\,]$, on ait : $f(x) \leqslant g(x)$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En considérant la fonction auxiliaire $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(x) - f(x)$, on obtient que pour tout $x \in [a,b] : h(x) \geqslant 0$. Ainsi, en utilisant les résultats des paragraphes 9.1.18 et 9.1.19, on peut écrire

$$0 \leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

ce qui implique

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

9.1.21 Intégrale de la valeur absolue d'une fonction

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b (f^+ - f^-)(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x \right|$$
$$\leqslant \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f^+ + f^-)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(les fonctions f^+ et f^- ont été définies au paragraphe 5.1.25). ■

9.1.22 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que la fonction f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, car sinon le résultat devient évident.

Alors, pour tout nombre réel λ, on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g)^2(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

et

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad (\S\ 7.1.19).$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le discriminant de cette équation du second degré en λ est négatif ou nul ; ce qui revient à dire que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 0$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

■

9.1.23 Théorème de la convergence uniforme

Soit $a < b$ deux nombres réels et (f_n) une suite d'éléments de $C([\,a,b\,],\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers la fonction f. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, on constate que la fonction f est continue sur $[\,a,b\,]$ (§ 5.4.7) ; ce qui implique que le nombre réel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien défini, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Du fait que la convergence est uniforme, on sait qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\sup_{x\in[a,b\,]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on obtient (§ 9.1.20 et 9.1.21) que

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

9.1.24 Remarque

Si dans l'énoncé du résultat donné au paragraphe 9.1.23, on ne suppose pas que la convergence est uniforme, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, la suite (f_n) définie, pour chaque entier naturel n, par

$$f_n : [\,0,2\,] \to \mathbb{R}$$

et

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \\ -(n+1)^2 x + 2(n+1) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n+1}, 2\right], \end{cases}$$

converge simplement (§ 5.4.8) vers la fonction $f : [\,0,2\,] \to \mathbb{R}$ qui vaut zéro sur tout [0,2] et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x \;=\; 1 \;\neq\; 0 \;=\; \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Néanmoins, on peut très bien avoir l'égalité sans pour autant que la convergence soit uniforme. C'est le cas de la suite (f_n) définie, pour chaque entier naturel n, par

$$f_n \;:\; [\,0,2\,] \to \mathbb{R}$$

et

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^3 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{(n+1)^2}\right] \\ -(n+1)^3 x + 2(n+1) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{2}{(n+1)^2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{(n+1)^2}, 2\right]. \end{cases}$$

9.1.25 Théorème de la convergence monotone

Soit $a < b$ deux nombres réels et (f_n) une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de $C([\,a,b\,],\mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème de Dini (§ 5.4.9), nous savons que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f. Il nous suffit donc d'appliquer le résultat obtenu au paragraphe 9.1.23. ■

9.1.26 Formule du changement de variable

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[\,a,b\,]$. D'autre part, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ deux éléments de I et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur I telle que

$\varphi([\,\alpha,\beta\,]) \subset [\,a,b\,]$. Alors,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par définition, la transformation

$$x = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad t \in I$$

est appelée un *changement de variable*.

DÉMONSTRATION. Considérons les deux fonctions continues $G, g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$G(x) = \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Ainsi, en constatant que pour tout $x \in]\,\alpha,\beta\,[$ (§ 9.1.14) :

$$G'(x) = g(x),$$

on obtient que G est une primitive de la fonction g sur $[\alpha,\beta]$; ce qui nous permet d'écrire (§ 9.1.15) que

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

Remarque. Il découle de la formule que $\displaystyle\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

9.1.27 Exemple

Calculons l'intégrale

$$J \;=\; \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour cela, considérons le changement de variable suivant :

$$x = \varphi(t) = \tan t \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

D'où, en utilisant la formule démontrée au paragraphe 9.1.26, on obtient que

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)\sqrt{1+\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9.1.28 Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Si le nombre $T > 0$ est une période de la fonction f, alors pour tout couple de nombres réels $a < b$, on obtient que

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION. Considérons le changement de variable suivant :

$$x = t + T \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, en utilisant la formule démontrée au paragraphe 9.1.26, on peut écrire

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

9.1.29 Formule d'intégration par parties

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment différentiables sur I. Alors,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x),$$

on obtient, en intégrant, que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

9.1.30 Exemple

Soit x un nombre réel quelconque et n un entier positif. On va établir une formule récurrente nous permettant de calculer l'intégrale suivante :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

Dans ce but, considérons les deux fonctions auxiliaires $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n} \qquad \text{et} \qquad h(t) = t.$$

Ainsi, en remarquant que

$$I_n(x) = \int_0^x f(t)h'(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient, en utilisant la formule d'intégration par parties, que

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{t}{(t^2+1)^n}\bigg|_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} - 2n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}\,; \end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$2n\, I_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n(x).$$

Sachant que

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \ = \arctan x,$$

cette formule récurrente nous permet de calculer, de proche en proche, les intégrales $I_n(x)$. En particulier,

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right).$$

9.1.31 Formule de Taylor avec le reste sous la forme d'une intégrale

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable sur I. Alors, pour tout élément x de I, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots \\ &+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit x un élément quelconque de I. D'une part, en intégrant par parties, on obtient que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{-1}{k}(x-t)^k f^{(k)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k} + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait, d'après le théorème fondamental du calcul intégral (§ 9.1.15), que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, en utilisant ces deux résultats, on peut écrire successivement que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2\,!} + \frac{1}{2!}\int_a^x (x-a)^2 f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\;\;\vdots \\ &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p\,!} + \ldots \\ &\quad + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n\,!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

■

9.2 Applications géométriques de l'intégrale

9.2.1 Aire d'une surface plane

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$ et soit C le graphique de cette fonction.

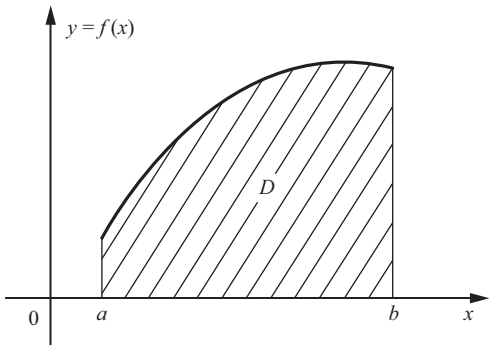


Fig. 9.1

D'autre part, désignons par D le domaine du plan délimité par la courbe C, l'axe $0x$ et par les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$ (fig. 9.1). Alors, si σ_1 et σ_2 sont des subdivisions de $[a, b]$, on obtient que $\overline{S}_{\sigma_1}(f)$ mesure l'aire d'un domaine formé d'une somme de rectangles circonscrit à D, tandis que $\underline{S}_{\sigma_2}(f)$ mesure l'aire d'un domaine formé lui aussi d'une somme de rectangles mais inscrit dans D. Si un nombre réel A est tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a, b]$ telles que

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma_1} - \underline{S}_{\sigma_2} \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \underline{S}_{\sigma_2} \leqslant A \leqslant \overline{S}_{\sigma_1},$$

alors A sera appelé, par définition, l'*aire du domaine* D ; ce qui revient à dire que l'intégrale

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

est, par définition, l'aire du domaine D. Cette définition correspond bien à la notion usuelle d'aire plane que l'on apprend dans les cours de géométrie élémentaire. De plus, grâce aux propriétés de l'intégrale, elle en possède toutes les caractéristiques.

Supposons à présent que la fonction f change un nombre fini de fois de signe sur $[a, b]$ (fig. 9.2).

Pour obtenir *l'aire totale* A *du domaine* D au sens traditionnel de la géométrie élémentaire, il nous suffit d'additionner l'aire A_1 de la partie du domaine D qui se trouve au-dessus de l'axe $0x$ et l'aire A_2 de la partie du domaine D qui se trouve au-dessous de l'axe $0x$. Autrement dit,

$$A \quad = A_1 + A_2.$$

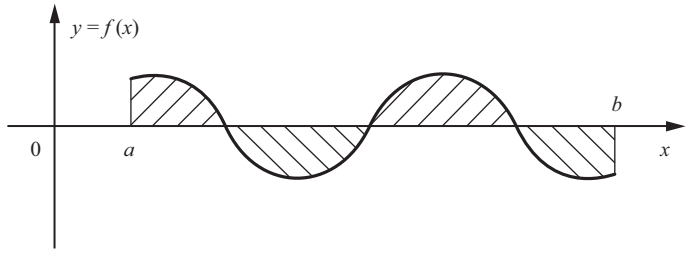


Fig. 9.2

Or,

$$A_1 = \int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x$$

et, par symétrie par rapport à $0x$:

$$A_2 = \int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\ ;$$

ce qui entraîne que l'aire totale du domaine D est égale à

$$\begin{aligned} A = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(f^+ + f^-\right)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

9.2.2 Exemple

Calculons l'aire A du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ |y| \leqslant |\sin x|,\ y\sin x \geqslant 0\}.$$

Par définition,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x\big|_0^{\pi} + \cos x\,\big|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

9.2.3 Aire enfermée dans une boucle

Soit $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a,b]$, on ait : $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ (fig. 9.3). Alors, l'aire A du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

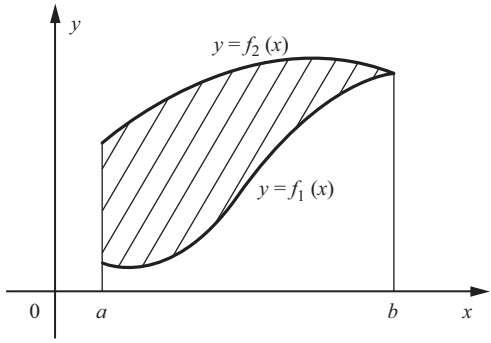


Fig. 9.3

est égale à

$$A = \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x.$$

9.2.4 Longueur d'un arc de courbe

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I et soit C la partie du graphique de cette fonction compris entre les points d'abscisse $x = a$ et $x = b$ (fig. 9.4).

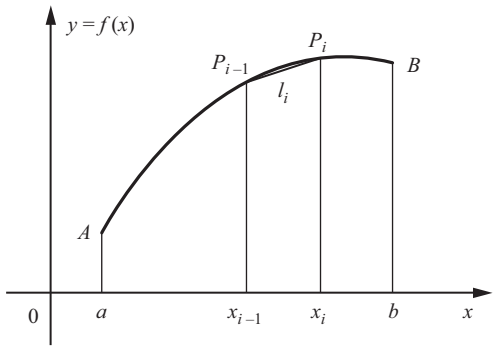


Fig. 9.4

Alors, si $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on désigne par P_i le point de C dont l'abscisse est x_i et par l_i la longueur de la corde $P_{i-1}P_i$. On obtient ainsi une ligne polygonale $AP_1 \ldots P_{n-1}B$ inscrite dans l'arc AB et dont la longueur est

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis (§ 6.2.12), on sait qu'à tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ on peut associer un nombre réel $\beta_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\beta_i)\,(x_i - x_{i-1})\ ;$$

ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} l_i^2 &= (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= (1 + (f'(\beta_i))^2)\,(x_i - x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(\beta_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Par conséquent

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{1 + (f'(\beta_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \right).$$

Par suite, en constatant que pour tout entier $n > 0$:

$$\underline{S}_{\sigma_n} \left(\sqrt{1 + (f')^2} \right) \leqslant L_n \leqslant \overline{S}_{\sigma_n} \left(\sqrt{1 + (f')^2} \right),$$

on obtient (§ 3.3.10 et 9.1.8) que

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Par définition, cette limite est appelée la *longueur de l'arc AB*.

9.2.5 Lemme

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I. D'autre part, soit $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$ et $y_1, \ldots y_n, z_1, \ldots, z_n$ $(2n)$ éléments de $[a, b]$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$a = x_0 \leqslant y_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant y_n \leqslant x_n = b$$

et

$$a = x_0 \leqslant z_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{i-1} \leqslant z_i \leqslant x_i \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant z_n \leqslant x_n = b.$$

Alors, en posant pour tout entier $n > 0$:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(y_i)\sqrt{1 + (f'(z_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \right),$$

on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, posons

$$M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} \sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Pour les besoins de la démonstration, faisons l'hypothèse supplémentaire que $M_1 \neq 0$, car, dans le cas contraire, le résultat est évident. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Les fonctions f et $\sqrt{1+(f')^2}$ étant uniformément continues sur $[a,b]$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x, y \in [a,b]$ et $|x-y| \leqslant \delta$ impliquent

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{2M_2(b-a)}$$

et

$$\left|\sqrt{1+(f'(x))^2} - \sqrt{1+(f'(y))^2}\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2M_1(b-a)}.$$

D'autre part, on sait (§ 5.3.21) qu'à tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on peut associer un élément

$$f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \left(f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\right).$$

D'où, en posant

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1,$$

on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}
&\left|B_n - \bar{S}_{\sigma_n}\left(f\cdot\sqrt{1+(f')^2}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(f(y_i)\sqrt{1+(f'(z_i))^2}(x_i-x_{i-1})\right.\right.\\
&\left.\left.-f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i-x_{i-1})\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(|f(y_i)|\left|\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\right.\right.\\
&\left.\left.-\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\right|\,|x_i-x_{i-1}|\right) + \sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(\xi_i)|\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}|x_i-x_{i-1}|\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_1\left(\frac{\epsilon}{2M_1(b-a)}\cdot\frac{(b-a)}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\epsilon}{2M_2(b-a)}\cdot M_2\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(B_n - \bar{S}_{\sigma_n}(f\sqrt{1+(f')^2})\right) = 0.$$

Finalement, puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\bar{S}_{\sigma_n}\left(f\cdot\sqrt{1+(f')^2}\right) = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x,$$

on peut affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

■

9.2.6 Aire d'une surface de révolution

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$, et soit C la partie du graphique de cette fonction comprise entre les points d'abscisse $x = a$ et $x = b$. D'autre part, on désigne par Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe C autour de l'axe $0x$ (fig. 9.5 et 9.6).

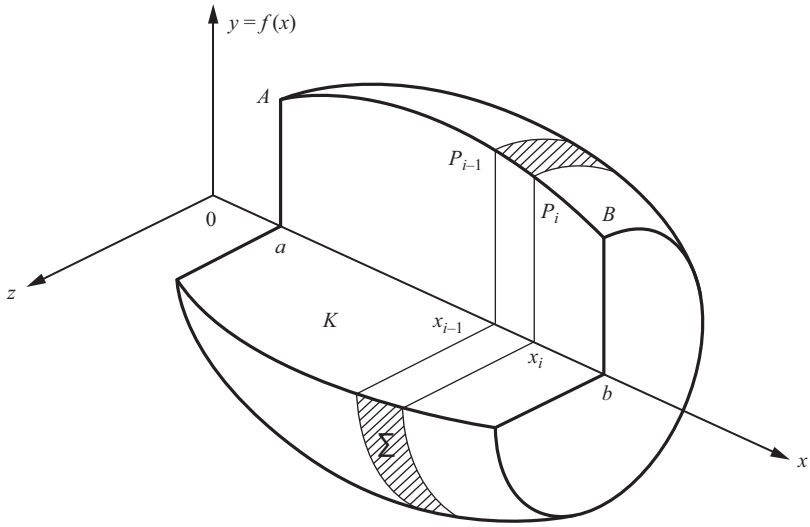


Fig. 9.5

Alors, si $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on désigne par P_i le point de C dont l'abscisse est x_i et par l_i la longueur de la corde $P_{i-1}P_i$. Dans sa rotation autour de l'axe $0x$, cette corde engendre un tronc de cône dont l'aire latérale est égale à

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} l_i.$$

Par suite, en utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe un élément z_i de $]x_{i-1}, x_i[$ tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1}) \ ;$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} l_i^2 &= (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= (1 + (f'(z_i))^2)(x_i - x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(z_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Par conséquent

$$A_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(z_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Ainsi, l'aire de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la ligne polygonale $AP_1 \dots P_{n-1}B$ autour de l'axe Ox est égale à

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \pi \sum_{i=1}^{n} \left((f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(z_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \right) ;$$

et l'on a (lemme 9.2.5) que

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Par définition, cette limite est appelée l'*aire de la surface de révolution* Σ.

9.2.7 Volume d'un corps de révolution

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$, et soit C le graphique de cette fonction. D'autre part, on désigne par K le corps de révolution obtenu en faisant tourner la courbe C autour de l'axe $0x$ (fig. 9.5 et 9.6).

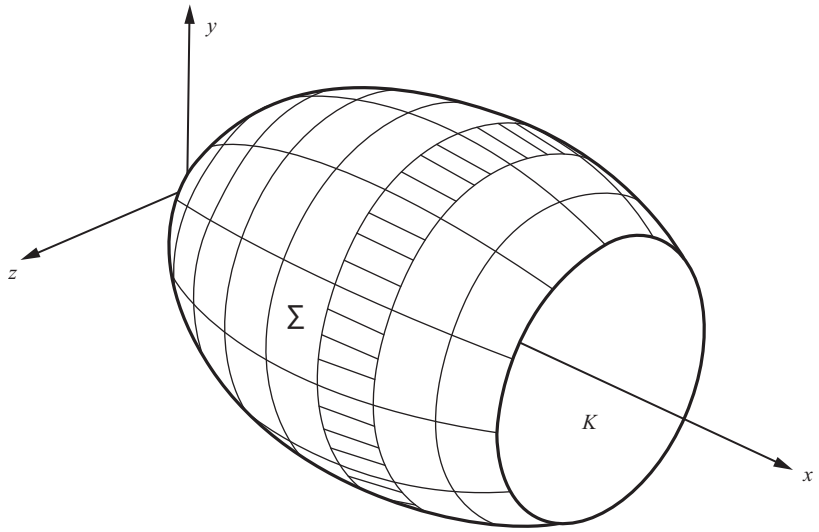


Fig. 9.6

Alors, si σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on obtient que $\pi \underline{S}_{\sigma_n}(f^2)$ mesure le volume d'un corps de révolution formé d'une somme de cylindres et inscrit dans K, tandis que $\pi \overline{S}_{\sigma_n}(f^2)$ mesure le volume d'un corps de révolution formé lui aussi d'une somme de cylindres mais circonscrit à K. La limite commune de ces deux volumes, lorsque n tend vers l'infini, sera appelée, par définition, le *volume du corps de révolution* K ; ce qui revient à dire que l'intégrale

$$\pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

est, par définition, le volume du corps de révolution K.

9.3 Intégration des fonctions rationnelles et ses applications

9.3.1 Méthode générale pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle

Soit $a < b$ deux nombres réels et soit $P(x), Q(x)$ deux polynômes ayant les propriétés suivantes :

- $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucun diviseur commun ;
- $Q(x)$ est un polynôme unitaire ; ce qui revient à dire que le coefficient du monôme du plus haut degré est égal à 1 ;
- pour tout $x \in [a, b]$: $Q(x) \neq 0$.

Ainsi, la fonction *rationnelle* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)/Q(x)$ est continue, donc intégrable. Nous allons à présent montrer que l'intégrale

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

peut se calculer à l'aide de fonctions élémentaires, en utilisant, pour cela, la décomposition en *éléments simples* du quotient $P(x)/Q(x)$.

Soit $a_1, \ldots, a_n$ l'ensemble des racines réelles (toutes distinctes) du polynôme $Q(x)$, et soit $(x^2 + 2b_1x + c_1), \ldots, (x^2 + 2b_mx + c_m)$ l'ensemble des diviseurs irréductibles (tous distincts avec $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ tels que $b_i^2 < c_i$) du second degré de $Q(x)$. Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe $(n+m)$ entiers positifs

$$k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m$$

tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_n)^{k_n} (x^2 + 2b_1x + c_1)^{l_1} \ldots (x^2 + 2b_mx + c_m)^{l_m}.$$

Par suite, le théorème de la décomposition en éléments simples du quotient $P(x)/Q(x)$, nous permet d'écrire que pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) &+ \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1j}}{(x - a_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\alpha_{nj}}{(x - a_n)^j} \\ &+ \sum_{j=1}^{l_1} \frac{\beta_{1j}x + \gamma_{1j}}{(x^2 + 2b_1x + c_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{l_m} \frac{\beta_{mj}x + \gamma_{mj}}{(x^2 + 2b_mx + c_m)^j}\end{aligned}$$

où les a_{ij}, β_{ij} et γ_{ij} sont des constantes réelles et où $R(x)$ est un polynôme, quotient dans la division suivant les puissances décroissantes de $P(x)$ par $Q(x)$

(si deg $P(x) <$ deg $Q(x)$ alors $R(x) = 0$) ; ce qui entraîne que

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k_1}\left(\int_a^b \frac{\alpha_{1j}}{(x-a_1)^j}\,\mathrm{d}x\right) + \ldots + \sum_{j=1}^{k_n}\left(\int_a^b \frac{\alpha_{nj}}{(x-a_n)^j}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_1}\left(\int_a^b \frac{\beta_{1j}x+\gamma_{1j}}{(x^2+2b_1x+c_1)^j}\,\mathrm{d}x\right) + \ldots + \sum_{j=1}^{l_m}\left(\int_a^b \frac{\beta_{mj}x+\gamma_{mj}}{(x^2+2b_mx+c_m)^j}\,\mathrm{d}x\right).$$

Ce résultat n'a de sens que si l'on sait calculer les intégrales des éléments simples. Comme nous allons le voir dans les deux paragraphes qui suivent, leurs calculs ne posent pas trop de difficultés. D'autre part, étant donné que $R(x)$ est un polynôme, le calcul de la première intégrale ne présente, lui aussi, aucun problème.

9.3.2 Intégration des éléments simples du premier degré

Soit d un nombre réel n'appartenant pas à l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)} = \ln|x-d|\Big|_a^b.$$

D'autre part, pour tout entier $p > 1$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)^p} = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(x-d)^{p-1}}\Big|_a^b.$$

9.3.3 Intégration des éléments simples du second degré

Soit r, s deux nombres réels vérifiant l'inégalité $s - r^2 > 0$. Alors,

$$\int_a^b \frac{\beta x+\gamma}{x^2+2rx+s}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2}\cdot\ln|x^2+2rx+s|\Big|_a^b + \frac{\gamma-r\beta}{\sqrt{s-r^2}}\arctan\left(\frac{x+r}{\sqrt{s-r^2}}\right)\Big|_a^b.$$

D'autre part, pour tout entier $p > 1$:

$$\int_a^b \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2(1-p)}\cdot\frac{1}{(x^2+2rx+s)^{p-1}}\Big|_a^b$$
$$+ \frac{\gamma-r\beta}{(s-r^2)^{p-(1/2)}}\int_{\frac{a+r}{\sqrt{s-r^2}}}^{\frac{b+r}{\sqrt{s-r^2}}}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, il nous suffit d'utiliser le résultat de l'exemple 9.1.30, à savoir : pour tout entier $n > 0$:

$$2nI_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2(n-1)I_n(x)$$

où

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

D'autre part, l'inégalité $s - r^2 > 0$ nous assure que le polynôme du second degré $x^2 + 2rx + s$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. En constatant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\beta x + \gamma = \frac{\beta}{2}(2x + 2r) + (\gamma - r\beta),$$

on peut écrire, grâce à la linéarité de l'intégrale, que

$$\int_a^b \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2}\int_a^b \frac{2x+2r}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x + (\gamma - r\beta)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p}.$$

Calculons d'abord la première intégrale :

$$\int_a^b \frac{2x+2r}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x^2+2rx+s|\Big|_a^b & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{1}{(1-p)} \cdot \dfrac{1}{(x^2+2rx+s)^{p-1}}\Big|_a^b & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Calculons à présent la seconde intégrale :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p} = \frac{1}{(s-r^2)^p}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left((x+r)/\sqrt{s-r^2}\right)^2+1\right)^p}.$$

Ainsi, en faisant le changement de variable

$$x = t \cdot \sqrt{s-r^2} - r \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on obtient que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p} = \frac{\sqrt{s-r^2}}{(s-r^2)^p}\int_{\frac{a+r}{\sqrt{s-r^2}}}^{\frac{b+r}{\sqrt{s-r^2}}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}.$$

D'où le résultat. ■

9.3.4 Exemple

Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient que pour tout nombre réel $x \neq -1$:

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\ ;$$

ce qui implique, en réduisant au même dénominateur, que

$$\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x(x^3+1)+a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{x^3+1}$$

ou encore que

$$\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x^4+(a+b)x^2+(1-a+b+c)x+(a+c)}{x^3+1}.$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu, pour tout nombre réel $x \neq 1$, que si le système d'équations

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 1-a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$$

est vérifié ; ce qui est le cas lorsque $a=-b=-c=1/3$.

Ainsi, pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Finalement, en intégrant, on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\ln 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,,
\end{aligned}$$

car

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\ln|x^2-x+1|\Big|_0^1 + \frac{3/2}{\sqrt{1-1/4}}\,\arctan\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{1-1/4}}\right)\Bigg|_0^1.$$

9.3.5 Définition

Soit $P(x_1,\dots,x_n), Q(x_1,\dots,x_n)$ deux polynômes à n variables réelles. Pour tout n-tuple $(x_1,\dots,x_n)$ de nombres réels tels que $Q(x_1,\dots,x_n)\neq 0$, on pose

$$R(x_1,\dots,x_n)=\frac{P(x_1,\dots,x_n)}{Q(x_1,\dots,x_n)}.$$

Alors, si $u_1,\dots,u_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ sont n fonctions continues telles que pour tout $x\in[a,b]$, on ait :

$$Q(u_1(x),\dots,u_n(x))\neq 0 \quad (\text{ici } x_k=u_k(x)),$$

la fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $[a,b]$, fait correspondre le nombre réel $R(u_1(x),\dots,u_n(x))$ est continue, donc est intégrable sur $[a,b]$.

Nous allons, à présent, montrer qu'il est possible, pour des fonctions particulières $u_1,\dots,u_n$, de transformer l'intégrale

$$\int_a^b R(u_1(x),\dots,u_n(x))\,\mathrm{d}x$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle.

9.3.6 Intégration d'une fonction du type $R(e^x,\sinh x,\cosh x)$

En posant $u_1(x)=e^x$, $u_2(x)=\sinh x$ et $u_3(x)=\cosh x$ et en faisant le changement de variable

$$x=\ln t \quad \text{avec} \quad t>0,$$

on obtient que

$$\begin{aligned}\int_a^b R(e^x,\ \sinh x,\ \cosh x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b R\left(e^x,\ \frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{e^a}^{e^b} R\left(t,\frac{t-t^{-1}}{2},\frac{t+t^{-1}}{2}\right)\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ ;\end{aligned}$$

ce qui nous ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}.$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} &= \int_1^e \frac{2}{t+t^{-1}} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\arctan t\Big|_1^e \\ &= 2\,\arctan e - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

9.3.7 Intégration d'une fonction du type $R(x, x^{1/k_1}, \ldots, x^{1/k_n})$

Soit k le plus petit commun multiple des n entiers positifs $k_1, \ldots, k_n$. Alors, en faisant le changement de variable

$$x = t^k \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}}\right)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt[k]{a}}^{\sqrt[k]{b}} R\left(t^k, t^{\frac{k}{k_1}}, \ldots, t^{\frac{k}{k_n}}\right) k\,t^{k-1}\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Si k est pair, on suppose encore que $a, b \geqslant 0$.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $x = t^6$, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,6\,t^5\,\mathrm{d}t = 6\int_0^1 \frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int_0^1 (t^6 - t^4 + t^2 - 1)\,\mathrm{d}t + 6\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_0^1 + 6\,\arctan t|_0^1 \\ &= -\frac{152}{35} + \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

9.3.8 Intégration d'une fonction du type $R(x,\ \sqrt[m]{(\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)})$

Soit α, β, γ et δ quatre nombres réels vérifiant la relation $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ et soit m un entier positif. En effectuant le changement de variable

$$x=\frac{-\delta t^m+\beta}{\gamma t^m-\alpha}\left(\text{ce qui donne que } t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right),$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x=\int_{\sqrt[m]{\frac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta}}}^{\sqrt[m]{\frac{\alpha b+\beta}{\gamma b+\delta}}} R\left(\frac{-\delta t^m+\beta}{\gamma t^m-\alpha},t\right)\frac{mt^{m-1}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\gamma t^m-\alpha)^2}\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer, pourvu que toutes les expressions soient bien définies.

Par exemple, calculons l'intégrale suivante

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ici, $\alpha=\beta=\delta=1$, $\gamma=0$ et $m=2$. D'où, en utilisant la formule ci-dessus, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x &= \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\,2t\,\mathrm{d}t=2\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_2^3\mathrm{d}t+\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=2t\Big|_2^3+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3\\ &= 2+\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

9.3.9 Intégration d'une fonction du type $R(\sin x,\cos x)$

Soit $-\pi<a<b<\pi$ deux nombres réels. En effectuant le changement de variable

$$x=2\arctan t\quad\text{avec}\quad t\in\mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Calculons l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, utilisons la transformation ci-dessus ; ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2-\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^1 \frac{1-t+t^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t}{3+t^2}\,\mathrm{d}t + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} \\
&= \ln\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}\right)\Big|_0^1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\arctan\,\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 \\
&= \ln\frac{2}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

9.3.10 Intégration d'une fonction du type $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$

Soit $-\pi/2 < a < b < \pi/2$ deux nombres réels. En utilisant le changement de variable

$$x = \arctan t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tan a}^{\tan b} R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}.$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} &= \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&= -\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{3}/3}^1 = -1+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

9.3.11 Intégration d'une fonction du type $R(x, \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2})$

Soit α, β deux nombres réels positifs. En effectuant le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sinh t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(x, \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2})\, \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta a}{\alpha})}^{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta b}{\alpha})} R\left(\frac{\alpha}{\beta} \sinh t, \alpha \cosh t\right) \frac{\alpha}{\beta} \cosh t \, \mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 9.3.6).

Par exemple, calculons l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2}\, \mathrm{d}x.$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta}{\alpha})} \alpha \cosh t \, \frac{\alpha}{\beta} \cosh t \, \mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_0^{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta}{\alpha})} \cosh^2 t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta} \int_0^{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta}{\alpha})} \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)\, \mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{2\beta} \left(\sinh t \, \cosh t + t\right)\Big|_0^{\operatorname{arsinh}(\frac{\beta}{\alpha})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2\beta} \operatorname{arsinh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

9.3.12 Intégration d'une fonction du type $R(x, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2})$

Soit α, β deux nombres réels positifs et $a < b$ deux éléments de $[-\alpha/\beta, \alpha/\beta]$. Alors, en faisant le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sin t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(x, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2})\, \mathrm{d}x = \int_{\arcsin(\frac{\beta a}{\alpha})}^{\arcsin(\frac{\beta b}{\alpha})} R\left(\frac{\alpha}{\beta} \sin t, \alpha \cos t\right) \frac{\alpha}{\beta} \cos t \, \mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 9.3.9).

Calculons l'intégrale

$$J = \int_{-\alpha/\beta}^{\alpha/\beta} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Pour cela, utilisons la transformation ci-dessus ; ce qui donne

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha \cos t \frac{\alpha}{\beta} \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\alpha^2}{2\beta}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\alpha^2\pi}{2\beta}.$$

9.3.13 Intégration d'une fonction du type $R(x, \sqrt{\beta^2x^2 - \alpha^2})$

Soit α, β deux nombres réels positifs. Alors, si $b > a \geqslant \alpha/\beta$, le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\cosh t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(x, \sqrt{\beta^2x^2 - \alpha^2})\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{arcosh}(\frac{\beta a}{\alpha})}^{\operatorname{arcosh}(\frac{\beta b}{\alpha})} R\left(\frac{\alpha}{\beta}\cosh t, \alpha \sinh t\right)\frac{\alpha}{\beta}\sinh t \, \mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 9.3.6). Tandis que, si $a < b \leqslant -\alpha/\beta$, c'est le changement de variable

$$x = -\frac{\alpha}{\beta}\cosh t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

qui transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(x, \sqrt{\beta^2x^2 - \alpha^2})\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{arcosh}(\frac{-\beta a}{\alpha})}^{\operatorname{arcosh}(\frac{-\beta b}{\alpha})} R\left(\frac{-\alpha}{\beta}\cosh t, \alpha\sinh t\right)\frac{-\alpha}{\beta}\sinh t \, \mathrm{d}t$$

en une intégrale connue (§ 9.3.6).

Par exemple, calculons l'intégrale suivante

$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ici, $\alpha = \beta = 1$ et $b = 2 > a = 1 \geqslant \alpha/\beta = 1$. D'où, en utilisant la première formule, on peut écrire que

$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\operatorname{arcosh} 2} \sinh^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{arcosh} 2} \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sinh t \cosh t - t\right)\Big|_0^{\operatorname{arcosh} 2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} 2.$$

9.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux et ses propriétés

9.4.1 Définition d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe $n + 1$ éléments de $[a, b]$

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$, on ait : $f_i(x) = f(x)$ (fig. 9.7).

D'une manière générale, le choix de la subdivision $\{a_0 = a, a_1, \ldots a_n = b\}$ de $[a, b]$ n'est pas unique ; mais néanmoins, lorsque ce choix a été fait, les fonctions continues f_i sont univoquement déterminées. D'autre part, une fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est, par définition, continue par morceaux, car il suffit de prendre $a_0 = a$, $a_1 = b$ et $g_1 = g$.

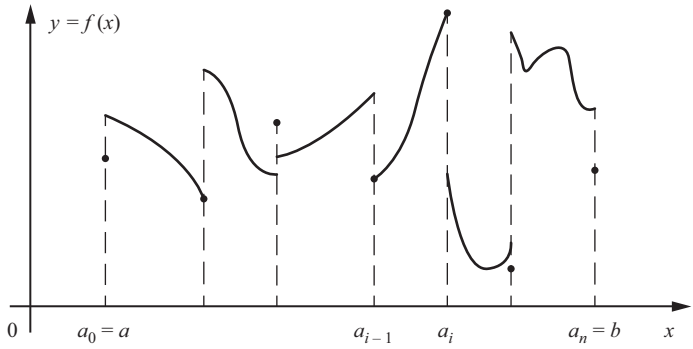


Fig. 9.7

9.4.2 Propriétés élémentaires des fonctions continues par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux ;
- de même, les fonctions fg et $|f|$ sont continues par morceaux.

9.4.3 Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, il existe une subdivision $\{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ de $[a, b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$ on ait : $f_i(x) = f(x)$. On constate, grâce aux résultats obtenus aux paragraphes 9.1.6, 9.1.7 et 9.1.10, que f est bornée et intégrable sur $[a, b]$ et que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

En particulier, la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

est indépendante du choix de la subdivision $\{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ considérée.

9.4.4 Principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

- pour tout élément c de $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  De plus, si pour tout $x \in [a, b] : f(x) \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

- si pour tout $x \in [a, b] : f(x) \leqslant g(x)$, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

- finalement $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

9.4.5 Remarque

En regardant les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux données au paragraphe 9.4.4, il ne faudrait pas en conclure, trop hâtivement, que toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue restent valables lorsque cette fonction n'est que continue par morceaux. Pour nous en convaincre, considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 9 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux ; mais, par contre, il n'existe aucun élément c de $[-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 = f(c).$$

Cet exemple nous montre que, en général, le théorème de la moyenne (§ 9.1.11) n'est pas valable pour une fonction qui est seulement continue par morceaux. Néamoins, certains résultats obtenus dans la section 9.1 restent en partie valables ; nous pourrons le constater en comparant les résultats du paragraphe 9.1.13 avec ceux de la proposition 9.4.6.

9.4.6 Proposition

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue. D'autre part, F est différentiable en tout point x_0 de $]a, b[$ *où la fonction f est continue* et, de plus, on a : $F'(x_0) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION. Puisque pour tout couple $x < y$ d'éléments de $[a, b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant M(y - x)$$

où $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, on a bien que la fonction F est continue sur $[a,b]$.

D'autre part, étant donné que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on sait qu'il existe une subdivision $\{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ de $[a,b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1,\ldots,n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$, on ait : $f_i(x) = f(x)$. Ainsi, en faisant l'hypothèse supplémentaire que $x_0 \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, on peut affirmer qu'il existe un entier $p \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $x_0 \in]a_{p-1}, a_p[$. Par suite, en remarquant que pour tout élément x de $]a_{p-1}, a_p[$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) + \int_{a_{p-1}}^{x} f_p(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient (§ 9.1.13) que

$$F'(x_0) = f_p(x_0) = f(x_0).$$

Supposons à présent que $x_0 \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Alors, les deux assertions : $x_0 \in]a,b[$ et f continue en x_0, impliquent qu'il existe un entier $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $x_0 = a_k$ et $f_k(x_0) = f_{k+1}(x_0) = f(x_0)$; ce qui a pour conséquence que la fonction $g : [a_{k-1}, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \in [a_{k-1}, a_k] \\ f_{k+1}(x) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

est continue. Finalement, en constatant que pour tout $x \in]\,a_{k-1}, a_{k+1}[$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) + \int_{a_{k-1}}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient immédiatement que

$$F'(x_0) = g(x_0) = f(x_0).$$

■

9.5 Primitive d'une fonction définie par une série entière : preuve du théorème 8.3.1

Nous donnons ici la preuve du théorème 8.3.1.

DÉMONSTRATION. Soit les rayons de convergence r_1 et r_2 des deux séries entières

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x-x_0)^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}.$$

- Si $r_1 > 0$, définissons f sur $]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x-x_0)^k$.
- Si $r_2 > 0$, définissons F sur $]x_0 - r_2, x_0 + r_2[$ par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$.

Pour démontrer 1)-3) de l'énoncé du §8.3.1, il suffit de prouver que :

a) $r_1 \geqslant r_2$,

b) f est continue sur $]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$ si $r_1 > 0$,

c) $r_2 \geqslant r_1$ si $r_1 > 0$,

d) F est une primitive de f sur $]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$ si $r_1 > 0$.

Pour simplifier, supposons que $x_0 = 0$.

Preuve de a). Si $r_2 = 0$, il est évident que $r_1 \geqslant r_2$. Supposons donc que $r_2 > 0$ et choisissons $z \in]0, r_2[$. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} z^{k+1}$ converge,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{b_k}{k+1} z^{k+1} = 0$$

(§ 4.1.4). Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\left| \frac{b_k}{k+1} z^{k+1} \right| \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant k_0$. Pour $x \in]-z, z[$, on obtient pour tout $k \geqslant k_0$

$$0 \leqslant |b_k x^k| = \frac{k+1}{z} \left| \frac{b_k}{k+1} z^{k+1} \right| |x/z|^k \leqslant \frac{k+1}{z} |x/z|^k \, .$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{z} |x/z|^k$ converge (car $|x/z| < 1$). Par le critère de comparaison, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ converge absolument. D'où $r_1 \geqslant |x|$. Comme x peut être choisi arbitrairement proche de z, $r_1 \geqslant z$. Comme z peut être ensuite choisi arbitrairement proche de r_2, il en résulte que $r_1 \geqslant r_2$.

Preuve de b), c) et d). Supposons que $r_1 > 0$ et choisissons $z \in]0, r_1[$. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$ converge, $\lim_{k \to +\infty} b_k z^k = 0$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|b_k z^k| \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant k_0$. Choisissons encore $w \in]0, z[$. Pour $x \in]-w, w[$ et $n \geqslant k_0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - f(x) \right| &= \left| - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k x^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k| \, |x|^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k z^k| \, |x/w|^k (w/z)^k \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w/z)^k = (w/z)^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} (w/z)^j = (w/z)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} \end{aligned}$$

et donc

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - f(x) \right| : x \in]-w, w[\right\} \leqslant (w/z)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} \, . \qquad (9.1)$$

Comme $0 < w/z < 1$,

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - f(x) \right| : x \in]-w, w[\right\}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la suite de fonctions continues $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)$ converge uniformément vers la fonction f sur $]-w,w[$. La fonction f est donc continue sur $]-w,w[$ (§ 5.4.4 et 5.4.7).

De plus, pour tout $x \in]-w,w[$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1} - \int_0^x f(t)dt\right| = \left|\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k - f(t)\right) dt\right| \overset{(9.1)}{\leqslant} |x|(w/z)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{w}{z}},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'où $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} x^k\right)$ converge vers $\int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \in]-w,w[$.

Ceci montre aussi que $r_2 \geqslant w$ et que F est une primitive de f sur $]-w,w[$. Comme w peut être choisi arbitrairement proche de z et z arbitrairement proche de r_1, il en résulte que $r_2 \geqslant r_1$, f est continue sur $]-r_1,r_1[$ et F est une primitive de f sur $]-r_1,r_1[$. ■

9.6 Exercices

9.6.1 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

2) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}\mathrm{d}x$

3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x$

4) $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$

6) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^3}$

7) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

9) $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$

10) $\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x}}$

11) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

12) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

13) $\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$

14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x$

15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$

16) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

17) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 \ln x}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}x$

18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh x + \sinh x + 1}$

19) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

20) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}$.

9.6.2 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}.$$

9.6.3 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \int_0^n \frac{t}{(\sinh t + \cosh t)^n}\,\mathrm{d}t.$$

9.6.4 Soit (x_n) la suite définie par

$$x_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \mathrm{d}t.$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
3) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$: $x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-2}$.
4) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} = 1$.

9.6.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ et soit (α_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = l > 0$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(n\alpha_n t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

9.6.6 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to]0,+\infty[$ une fonction continue.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \mathrm{d}t\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

9.6.7 Calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+tx}}}{t}.$$

9.6.8 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{x+\pi/2} (1 + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

9.6.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x} \int_0^{x^2} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Calculer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.
2) La fonction f admet-elle un extremum local au point $x = 0$?

9.6.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Trouver son développement limité d'ordre 5 autour de zéro.

9.6.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. En désignant par le nombre T une période de la fonction f, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9.6.12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et continûment différentiable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout couple de nombres réels $a < b$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = (bf(b) - af(a)) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9.6.13 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

si et seulement si les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes.

9.6.14 Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to]0,+\infty[$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \geqslant 1.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

9.6.15 Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues croissantes sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

9.6.16 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. En supposant que $g([a,b]) \subset [\,0,+\infty[$, montrer qu'il existe au moins un élément c de $[a,b]$ pour lequel on ait :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

9.6.17 Calculer

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

9.6.18 Calculer la longueur de l'arc de la chaînette d'équation $y = \cosh x$ compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

9.6.19 Déterminer l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = 2x^2$ et une de ses cordes.

9.6.20 Soit T le tore engendré par la rotation du cercle d'équation $x^2+(y-2)^2 = 1$ autour de l'axe $0x$.

1) Calculer l'aire de la surface de T.
2) Calculer le volume de T.

9.6.21 Calculer les intégrales suivantes (§ 1.3.3) :

1) $\displaystyle\int_0^2 x[x^2]\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{1/7}^1 [1/x]\,\mathrm{d}x.$

9.6.22 À chaque entier $n \geqslant 1$, associons la fonction $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]\,1/n,\ 1]. \end{cases}$$

En supposant que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t) g_n(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

Chapitre 10

Intégrales généralisées

10.1 Convergence des intégrales généralisées définies sur un intervalle borné

10.1.1 Définition d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (resp. $f :]a, b] \to \mathbb{R}$) est dite *continue* si elle est continue en tout point de $]a, b[$ et continue à droite en a (resp. à gauche en b).

10.1.2 Définition d'une intégrale généralisée convergente

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la fonction F admet une limite dans $\mathbb{R}$ à gauche au point b, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et l'on pose, par définition, que

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b-} F(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque F ne possède pas de limite dans $\mathbb{R}$ à gauche au point b, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

diverge.

10.1.3 Exemple

Soit $\alpha \neq 1$ un nombre réel. Alors, en remarquant que pour tout $a \leqslant x < b$:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = -\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^x,$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$. Elle diverge aussi si $\alpha = 1$:

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{b-t} = \lim_{x\to b-} -\ln|b-t|\,\Big|_a^x = +\infty.$$

De plus, pour tout $\alpha < 1$:

$$\int_a^{b-} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Grâce à cet exemple, on voit qu'une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ n'a pas besoin d'être bornée pour que son intégrale généralisée converge (fig. 10.1).

En résumé, pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha < 1$.

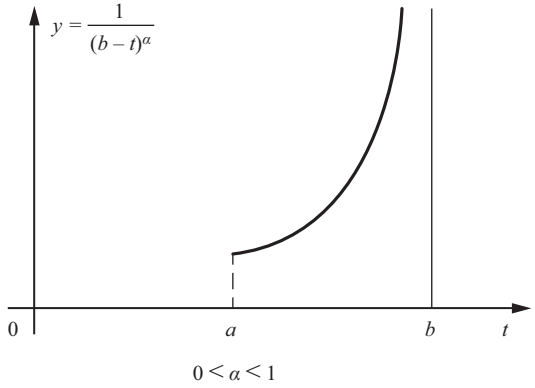


Fig. 10.1

10.1.4 Critère de comparaison

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et supposons qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,

- l'hypothèse que $\int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge entraîne que $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ;
- l'hypothèse que $\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge entraîne que $\int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} g(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et utilisons les assertions données au paragraphe 5.2.27. La fonction $G(x) = \int_c^x g(t)\mathrm{d}t$ est croissante en $x \in [c, b[$ (car $g \geqslant 0$ sur $[c, b[$) et

$$\lim_{x \to b-} G(x) = \lim_{x \to b-} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\mathrm{d}t = \int_a^{b-} g(t)\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$G(x) \leqslant \int_a^{b-} g(t)\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in [c, b[$. De plus la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante en $x \in [c, b[$ (car $f \geqslant 0$ sur $[c, b[$) et bornée sur $[c, b[$:

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + G(x)\\ &\leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{b-} g(t)\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

pour tout $x \in [c, b[$. Il en résulte que $\lim_{x\to b-} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Supposons à présent que l'intégrale généralisée

$$J = \int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

diverge. Comme F est croissante sur $[c, b[$, $J = +\infty$. Par suite, étant donné que pour tout $x \in [c, b[$:

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

on peut affirmer que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} g(t)\,\mathrm{d}t$$

diverge. ■

Remarque. Plusieurs idées simples à la base de cette preuve seront explicitées et généralisées aux paragraphes 10.1.10, 10.1.11 et 10.1.12.

10.1.5 Exemple

Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Comme, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leqslant f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

et comme $\int_0^{1-} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge, le critère de comparaison assure que l'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$ converge.

10.1.6 Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

10.1.7 Relation entre les différentes convergences

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, alors elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout $x \in [a, b[$:

$$0 \leqslant f^+(x) \leqslant |f(x)|$$

et

$$0 \leqslant f^-(x) \leqslant |f(x)|.$$

Ainsi, en utilisant le critère de comparaison donné au paragraphe 10.1.4, on obtient que la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

entraîne celle des deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f^+(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme, d'autre part, pour tout $x \in [a, b[$:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

on obtient que la limite

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} \int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t + \lim_{x\to b-} \int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$$

existe dans $\mathbb{R}$ et qu'ainsi l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente. ■

Remarque. La dernière étape de cette preuve est généralisée au paragraphe 10.1.9.

10.1.8 Relation entre les différentes intégrales

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite à gauche au point b. Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \hat{f}_b(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\hat{f}_b : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par

$$\hat{f}_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ \lim\limits_{x\to b-} f(x) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Ce résultat nous montre que si une fonction continue sur $[a, b[$ peut être prolongée par continuité au point b, la notion d'intégrale généralisée et la notion d'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ (§ 9.1.6) se confondent.

10.1.9 Linéarité de l'intégrale généralisée

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_a^{b-} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la linéarité de la limite d'une fonction (§ 5.2.9). ■

10.1.10 Propriété relative à l'intervalle d'intégration

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge. Alors, pour tout élément c de $[a, b[$, l'intégrale généralisée

$$\int_c^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_c^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient, en passant à la limite, que

$$\int_c^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

10.1.11 Conservation des relations d'ordre

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a, b[$, on ait : $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, si les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on peut écrire que

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient, en passant à la limite, que

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad \int_a^{b-} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

10.1.12 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in [a, b[$, on ait : $f(t) \geqslant 0$. Alors, s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, b[$:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M,$$

l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, sinon

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Étant donné que $f \geqslant 0$, la fonction continue $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est croissante. D'où, en utilisant les assertions données au paragraphe 5.2.27, on obtient immédiatement les résultats énoncés ci-dessus. ■

10.1.13 Critère de convergence

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'autre part, supposons qu'il existe un élément α de $\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to b-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}^* .$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce critère, faisons l'hypothèse que $l > 0$ (l'autre cas s'obtenant en remplaçant f par $-f$). Ainsi, le fait que

$$\lim_{x \to b-} (b - x)^\alpha f(x) = l > 0,$$

implique qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait :

$$\frac{1}{2}\, l \leqslant (b - x)^\alpha f(x) \leqslant 2\, l$$

ou encore

$$\frac{1}{2(b - x)^\alpha} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2\, l}{(b - x)^\alpha}.$$

D'où, en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 10.1.3 et 10.1.4, on peut affirmer que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$. ■

10.1.14 Exemple

Retournons à l'exemple du paragraphe 10.1.5. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

Le fait que

$$\lim_{x \to 1-} \sqrt{1 - x}\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

implique (§ 10.1.13) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^3}}$$

est convergente.

10.1.15 Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction continue et bornée

Soit $a < b$ deux nombres réels. Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, alors son intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente.

DÉMONSTRATION. En posant $M = \sup_{x\in[a,b[} |f(x)|$, on obtient que pour tout élément x de $[a, b[$:

$$\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a);$$

ce qui implique (§ 10.1.12) que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

converge. D'où le résultat. ■

10.1.16 Exemple

Montrons que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\ \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

converge. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Cette fonction étant continue et bornée sur $[0, 1[$, son intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)\ \mathrm{d}x$$

converge et, de plus,

$$\lim_{x\to 1-} (1-x)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0.$$

D'autre part, en remarquant que pour tout élément x de $]-\infty,1[$:

$$f'(x)=\frac{-1}{(1-x)^2}\ \sin\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

on obtient, en intégrant par parties, que pour tout $t\in[0,1[$:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\ \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=-(1-x)\ \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_0^t-\int_0^t \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\,;$$

ce qui implique, le second membre de cette égalité possédant une limite à gauche lorsque t tend vers 1, que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\ \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

converge.

10.1.17 Exemple

Montrons que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x}\ \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

n'est pas absolument convergente. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, il existe un nombre réel $M\geqslant 0$ tel que

$$M=\lim_{x\to 1-}\int_0^x \frac{1}{1-t}\ \left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right|\mathrm{d}t.$$

D'autre part, en posant pour tout entier $k\geqslant 0$:

$$a_k=1-\frac{3}{(6k+1)\pi}\quad\text{et}\quad b_k=1-\frac{3}{(6k+2)\pi},$$

on obtient que pour tout $t\in[a_k,b_k]$:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right|\geqslant\frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n\geqslant 1$, on peut écrire que

$$\begin{aligned}M&\geqslant\int_0^{b_n}\frac{1}{1-t}\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right|\mathrm{d}t\geqslant\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k}\frac{1}{1-t}\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right|\mathrm{d}t\right)\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k-a_k}{1-a_k}\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6k+2}\geqslant\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+(1/3)}\geqslant\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Étant donné (§ 4.1.5 et 4.2.5) que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty,$$

ce résultat est impossible. D'où contradiction. On a ainsi démontré que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-t} \left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \mathrm{d}t$$

diverge.

10.1.18 Remarque

Les exemples 10.1.16 et 10.1.17 nous montrent qu'une intégrale généralisée peut très bien être convergente sans pour autant être absolument convergente.

10.1.19 Intégrale généralisée par rapport à sa borne inférieure

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $G :]a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Si la fonction G admet une limite dans $\mathbb{R}$ à droite au point a, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$$

converge et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to a+} G(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque la fonction G ne possède pas de limite dans $\mathbb{R}$ à droite au point a, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$ *diverge*.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

10.1.20 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus concernant une intégrale généralisée du type

$$\int_{a}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

restent valables pour une intégrale généralisée du type

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.1.21 Exemple

Pour tout $x \in]0,1]$:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \ln x \geqslant 0$$

car cette relation est vraie en $x = 1$ et le membre de gauche à une dérivée négative sur $]0,1[$. D'où, pour tout $x \in]0,1]$,

$$|\ln x| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$

On obtient grâce au critère de comparaison que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, donc convergente.

10.1.22 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle ouvert et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$ et c un élément de $]a, b[$. Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad et \quad \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on dit que *l'intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas contraire, lorsque l'une ou l'autre des deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou } \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Il faut, par souci de cohérence, vérifier que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du choix du nombre réel c. Pour cela, considérons un autre élément d de $]a,b[$. Ainsi, en constatant que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

converge si et seulement si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{d}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

converge et que, lorsqu'il y a convergence,

$$\begin{aligned}\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{c}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x;\end{aligned}$$

on peut affirmer que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du nombre réel c choisi.

10.1.23 Exemple

Soit r, s deux nombres réels. En remarquant que, pour tout $x \in]0, 1/2]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x^r \cdot \max\{(1/2)^s, 1\}} \leqslant \frac{1}{x^r(1-x)^s} \leqslant \frac{1}{x^r \cdot \min\{(1/2)^s, 1\}}$$

et, pour tout $x \in [1/2, 1[$,

$$0 \leqslant \frac{1}{\max\{(1/2)^r, 1\} \cdot (1-x)^s} \leqslant \frac{1}{x^r(1-x)^s} \leqslant \frac{1}{\min\{(1/2)^r, 1\} \cdot (1-x)^s},$$

et en utilisant le critère de comparaison (§ 10.1.4), on obtient que les intégrales généralisées

$$\int_{0+}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s} \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1-} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s}$$

convergent si $r < 1$ et $s < 1$ et que l'une au moins diverge si $r \geqslant 1$ ou $s \geqslant 1$; ceci implique que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1-} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s}$$

ne converge que lorsque r et s vérifient à la fois :

$$r < 1 \quad \text{et} \quad s < 1.$$

10.2 Convergence des intégrales généralisées définies sur un intervalle non borné

10.2.1 Définition d'une fonction continue sur un intervalle fermé non borné

Soit a, b deux nombres réels. Une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ (resp. $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$) est dite *continue* si elle est continue en tout point de $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$) et continue à droite en a (resp. à gauche en b).

10.2.2 Définition d'une intégrale généralisée convergente

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la fonction F admet une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et l'on pose, par définition :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque F ne possède pas de limite dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

diverge.

10.2.3 Exemple

Soit $\beta \neq 1$ un nombre réel. Alors, en remarquant que pour tout $x \geqslant a > 0$:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta} = \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}\Bigg|_a^x,$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$$

converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$. Elle diverge aussi si $\beta = 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\to+\infty} \ln|t|\,\Big|_a^x = \lim_{x\to+\infty} \ln(t)\,\Big|_a^x = +\infty.$$

De plus, pour tout $\beta > 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)a^{\beta-1}}.$$

En résumé, pour $a \in]0, +\infty[$ et $\beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

Remarquons que ce critère sur β est différent du critère sur α du paragraphe 10.1.3 !

10.2.4 Critère de comparaison

Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et supposons qu'il existe un élément c de $[a, +\infty[$ tel que pour tout $x \geqslant c$, on ait :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,

- l'hypothèse que $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge entraîne que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ;
- l'hypothèse que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge entraîne que $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle donnée au paragraphe 10.1.4 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$. ■

10.2.5 Exemple

Pour tout $z \geqslant 0$, on a $\arctan z - z \leqslant 0$ car le membre de gauche s'annule en 0 et sa dérivée est négative sur $]0, +\infty[$. Il en résulte que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant \arctan(1/x^2) \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$

Le critère de comparaison assure que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge.

10.2.6 Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.

10.2.7 Propriétés des intégrales généralisées absolument convergentes

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, alors elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Il suffit de réécrire la démonstration donnée au paragraphe 10.1.7 en remplaçant $b-$ par $+\infty$. ■

10.2.8 Remarque

Vérifions que l'intégrale généralisée

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente, mais pas absolument convergente.

Une intégration par parties donne, pour $x > \pi$,

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\pi^x \frac{(-\cos t)'}{t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-\cos t}{t}\right|_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme $|t^{-2}\cos t| \leqslant t^{-2}$ sur $[\pi, +\infty[$ et l'intégrale généralisée

$$\int_\pi^{+\infty} t^{-2}\mathrm{d}t$$

converge, il en résulte par comparaison que l'intégrale généralisée

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

est absolument convergente, et donc convergente. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

existe dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, on obtient aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \, .\end{aligned}$$

La série harmonique étant divergente et l'intégrale $\int_{\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ étant une fonction croissante en $x \in [\pi, +\infty[$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$$

et ainsi que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

10.2.9 Propriétés des intégrales généralisées convergentes

Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{a}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x$$

convergent. Alors :

- pour tout couple de nombres réels α et β, l'intégrale généralisée

$$\int_{a}^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(x) \, \mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_{a}^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(x) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_{a}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int_{a}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x \, ;$$

- pour tout nombre réel $c > a$, l'intégrale généralisée

$$\int_{c}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \, ;$$

- si pour tout $x \in [a, +\infty[$: $f(x) \leqslant g(x)$, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de réécrire les démonstrations données aux paragraphes 10.1.9, 10.1.10 et 10.1.11 en remplaçant $b-$ par $+\infty$. ■

10.2.10 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \geqslant a$, on ait : $f(t) \geqslant 0$. Alors, s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M,$$

l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge,}$$

sinon

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Même démonstration que celle donnée au paragraphe 10.1.12 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$ et d'utiliser les résultats du paragraphe 5.2.19 en lieu et place de ceux du paragraphe 5.2.27. ■

10.2.11 Proposition

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

- l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Alors, $l = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que $l = 0$, il nous suffit de prouver que les deux autres cas possibles, à savoir $l < 0$ et $l > 0$, sont à exclure.

Supposons que $l > 0$. Alors, il existe un élément c de $[a, +\infty[$ tel que pour tout $x \geqslant c$ on ait :

$$0 < \frac{l}{2} \leqslant f(x);$$

ce qui implique, grâce au critère de comparaison (§ 10.2.4), que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

diverge. Ce cas est donc à exclure.

Supposons à présent que $l < 0$. En remplaçant f par $-f$, on démontre de la même manière que ce cas est aussi à exclure. D'où le résultat. ■

10.2.12 Remarque

Contrairement à ce que pourrait faire croire la proposition 10.2.11, une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ dont l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, n'est pas obligatoirement bornée. Dans le but de donner un exemple d'une telle fonction, considérons la suite (f_n) d'éléments de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ définie, pour chaque entier $n > 1$, par

$$f_n(t) = \begin{cases} n^4\left(t - \left(n - \dfrac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n - \dfrac{1}{n^3}, n\right] \\ -n^4\left(t - \left(n + \dfrac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n, n + \dfrac{1}{n^3}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left\{x \in \mathbb{R}_+ : x < n - \dfrac{1}{n^3} \text{ ou } x > n + \dfrac{1}{n^3}\right\} \end{cases}$$

et

$$f_0(t) = f_1(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geqslant 0 \text{ (fig. 10.2).}$$

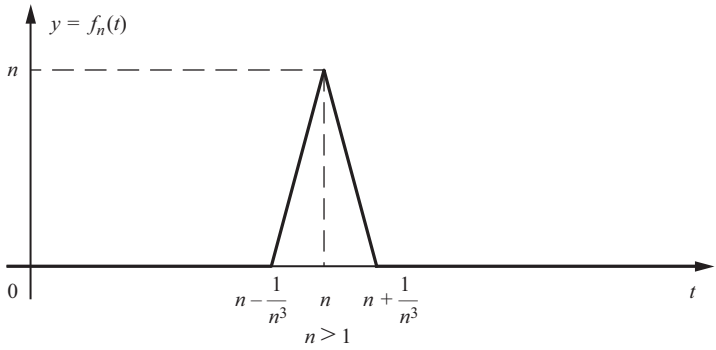


Fig. 10.2

Ainsi, la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{[t]+1} f_n(t)$$

n'est pas bornée ; mais, par contre, en remarquant que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{[x]+1} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{[x]+1} \frac{1}{k^2} \leqslant M = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

on obtient (§ 10.2.10) que son intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

10.2.13 Critère de convergence

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons qu'il existe un nombre réel β tel que

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x) = l \in \mathbb{R}^* .$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Même démonstration que celle donnée au paragraphe 10.1.13 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$ et d'utiliser les résultats des paragraphes 10.2.3 et 10.2.4 en lieu et place de ceux des paragraphes 10.1.3 et 10.1.4. ■

10.2.14 Exemple

Retournons à l'exemple du paragraphe 10.2.5. En remarquant, grâce à la règle de Bernoulli-l'Hospital, que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \arctan\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan 1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1,$$

on peut affirmer (§ 10.2.13) que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge.

10.2.15 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle ouvert non borné

Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et c un élément de $]a, +\infty[$.

Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas contraire, lorsque l'une ou l'autre des deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverge*.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

On vérifie facilement que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du nombre réel c choisi (§ 10.1.22).

10.2.16 Exemple

D'une part, en remarquant que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x},$$

on obtient par comparaison avec l'intégrale généralisée convergente $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$$

converge. D'autre part, on sait (exemple 10.1.21) que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge. Ainsi, par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. De plus, en effectuant le changement de variable

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad t > 0,$$

on obtient que

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to 0+} \int_z^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\lim_{z\to 0+} \int_1^{1/z} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0+}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

10.2.17 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle non borné inférieurement

Par analogie, toutes les définitions et tous les résultats de cette section concernant une intégrale généralisée du type

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{a+}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

s'appliquent, sans autre, à une intégrale généralisée du type

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{-\infty}^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

D'autre part, si la fonction $h :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, toutes les définitions données au paragraphe 10.2.15, à condition de remplacer $a+$ par $-\infty$, sont applicables à l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.2.18 Exemple

Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}\,.$$

Comme (§ 9.3.3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_{-1/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} &= \lim_{x\to+\infty} \int_{-1/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2+3/4} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-1/2}^{x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{-1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2+3/4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{x}^{-1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$$

converge et vaut $2\pi/\sqrt{3}$.

10.3 Exercices

10.3.1 Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

10.3.2 Calculer les intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln x\;\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{3x-x^2}}$ 4) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\sin x\;\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2-} \ln(\tan x)\;\mathrm{d}x.$

10.3.3 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $\alpha \geqslant 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{x^\alpha}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}}\,\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^\alpha(2+\sin\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^\alpha(\sqrt{x}+\cosh^2 x)}\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^\alpha}.$

10.3.4 Discuter, en fonction des valeurs des deux nombres réels $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+\alpha e^{-x}}{1+\beta e^{x}}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{x^\alpha}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^\beta}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x^3+1)^\alpha(x^2-4)^\beta}\,\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^\alpha+(\tanh x)^\beta}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{e^{\beta x}(x-1)}\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_{0+}^{1/2} x^\alpha\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\beta \mathrm{d}x.$

10.3.5 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x\cos(x^4)$.

1) Montrer que f n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.
2) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

10.3.6 Calculer

$$\lim_{x\to 1+}\left(\int_{1+}^{x-}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}\right).$$

10.3.7 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \int_1^n \frac{\sin(nt)}{nt}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

10.3.8 Soit a un nombre réel positif ou nul et $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante sur $[a, +\infty[$. Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (resp. diverge), alors la série de terme général $x_n = f(n)$ converge (resp. diverge).

10.3.9 Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln k}{k^\alpha} < +\infty.$$

10.3.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

10.3.11 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur l'intervalle fermé [0, 1].
2) Pour quelles valeurs du nombre réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1}\frac{x^\alpha}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

est-elle convergente ?

3) Calculer

$$\lim_{\alpha\to 0+}\left(\alpha\cdot\int_{0+}^{1}\frac{x^\alpha}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

10.3.12 Soit n un entier positif.

1) Montrer que pour tout $x \in]0,\, \pi]$:

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx.$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

10.3.13 Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$.

2) Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin\,(n+\frac{1}{2})\,x\,\mathrm{d}x = 0.$$

3) En utilisant l'exercice 10.3.12, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

4) En déduire que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

10.3.14 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer, en calculant $g'(x)$, que la fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) + g'(x) = 0$.

3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + g(x) = \pi/4$.

4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Chapitre 11

Formulaire

Tableau 11.1 Notations.

Notations de ce livre	Autres notations	Remarques
$\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ pair		$x \geqslant 0$
$\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ impair		$x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$
$e^x = \exp(x) = \exp_e(x)$		exponentielle (de base e)
$a^x = \exp_a(x)$		exponentielle de base a
$\ln(x) = \log_e(x)$	$\mathrm{Log}(x)$, $\mathrm{Log}_e(x)$, $\log(x)$, $\mathrm{Ln}(x)$	logarithme (de base e), logarithme naturel, logarithme népérien
$\log_a(x)$	$\mathrm{Log}_a(x)$	logarithme de base a
x^n, $n \in \mathbb{N}$		$x \in \mathbb{R}$ (lorsque $n = 0$, la forme indéterminée 0^0 est *ici et dans le cas particulier des polynômes* choisie égale à 1)
x^n, $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$		$x \in \mathbb{R}^*$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$		définie par $x^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log}(x)}$ pour $x \in]0, +\infty[$
$\lim\limits_{n\to+\infty}$	$\lim\limits_{n\to\infty}$	
sup, inf	Sup, Inf	
$\limsup\limits_{n\to+\infty}$	$\limsup\limits_{n\to\infty}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup$	
$\liminf\limits_{n\to+\infty}$	$\liminf\limits_{n\to\infty}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf$	
tan	tg	
cot	cotg, cotan, ctg	

Suite page suivante

Tableau 11.1 Notations (*suite et fin*).

Notations de ce livre	Autres notations	Remarques
arcsin	Arcsin, $\sin^{-1}$	la notation $\sin^{-1}$ est ambigüe
arccos	Arccos, $\cos^{-1}$	même remarque que ci-dessus ici et plus bas
arctan	Arctg, arctg, tg^{-1}, $\tan^{-1}$	
arccot	Arccotg, arccotg, arccotan, $\cot^{-1}$, cotg^{-1}, cotan^{-1}	
sinh	sh	
cosh	ch	
tanh	th	
coth	cotanh	
arsinh	Argsh, argsh, arcsinh, argsinh, sh^{-1}, $\sinh^{-1}$	
arcosh	Argch, argch, arccosh, argcosh, ch^{-1}, $\cosh^{-1}$	
artanh	Argth, argth, arctanh, argtanh, th^{-1}, $\tanh^{-1}$	
arcoth	Argcoth, argcoth, arccotanh, argcotanh, coth^{-1}, cotanh^{-1}	

Tableau 11.2 Dérivées - Primitives.

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
a	0	ax	
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1,\ x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{-2x}{(a^2+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x\ \ln a$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x(\ln x - 1)$	$x > 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ \ln a}$	$x(\log_a x - \log_a e)$	$a > 0,\ a \neq 0,\ x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Suite page suivante

Tableau 11.2 Dérivées - Primitives (*suite et fin*).

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \operatorname{arccot} x + \ln\sqrt{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\ln\cosh x$	
$\coth x$	$1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$	$x \neq 0$
$\operatorname{arsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{artanh} x + \ln\sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{arcoth} x + \ln\sqrt{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Tableau 11.3 Développements limités.

$f(x)$	Partie principale du développement limité de f autour de zéro
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$\sin\, x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos\, x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\operatorname{arsinh} x$	$x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\operatorname{artanh} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2x + 3x^2 + \ldots + (-1)^n (n+1) x^n$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$

Chapitre 12

Équations différentielles

12.1 Introduction

Soit un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction continue $p : I \to \mathbb{R}$. Nous souhaitons déterminer toutes les fonctions continûment différentiables $u : J \to \mathbb{R}$ telles que J est un intervalle ouvert (non vide) inclus dans I et u satisfait l'*équation différentielle* $u' + pu = 0$ sur J, autrement dit,

$$\forall t \in J \quad u'(t) + p(t)u(t) = 0.$$

Une telle fonction $u : J \to \mathbb{R}$ sera dite une *solution (sur J)* de l'équation différentielle.

Pour résoudre ce problème, analysons-le comme suit. Supposons que $u : J \to \mathbb{R}$ soit une solution et choisissons $t_0 \in J$. Supposons de plus que u ne s'annule en aucun point de J. Alors, pour tout $t \in J$,

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -p(t), \quad \Big(\ln|u(t)|\Big)' = -p(t) \quad \text{et} \quad \ln|u(t)| = -\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s + a,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante. Ainsi il est nécessaire que $|u(t)| = e^a e^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}$ et finalement que $u : J \to \mathbb{R}$ soit de la forme

$$u(t) = ce^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}, \quad t \in J, \tag{12.1}$$

où $c \in \mathbb{R}^*$ est une constante. Réciproquement, il est facile de vérifier que, pour toute constante $c \in \mathbb{R}^*$, tout intervalle ouvert $J \subset I$ et tout $t_0 \in J$, la fonction $u : J \to \mathbb{R}$ définie par (12.1) est une solution sur J. En effet

$$u'(t) = ce^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} \left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right)' = ce^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}\,(-p(t)) = -p(t)u(t).$$

De plus, lorsque $c = 0$, la fonction u donnée par (12.1) s'annule sur tout J et u est donc aussi solution.

Cette méthode de résolution n'exclut pas la possibilité d'une solution $u : J \to \mathbb{R}$ qui s'annulerait en au moins un point sans s'annuler sur tout J.

Pour compléter la discussion, supposons de nouveau que $u : J \to \mathbb{R}$ soit une solution et choisissons $t_0 \in J$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} u'(t) + e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} p(t)u(t) = 0,$$

$$\left(e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} u(t)\right)' = 0 \tag{12.2}$$

et il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} u(t) = c$. Ainsi nécessairement $u : J \to \mathbb{R}$ est de la forme (12.1). Cette seconde méthode de résolution fournit une discussion complète. La notion de solution de (12.2) est la même que précédemment : il s'agit d'une fonction $u : J \to \mathbb{R}$ continûment dérivable sur l'intervalle ouvert (non vide) $J \subset I$ telle que (12.2) est satisfaite pour tout $t \in J$.

L'équation différentielle (12.2) est en fait *équivalente* à $u' + pu = 0$, dans le sens que toute solution $u : J \to \mathbb{R}$ de l'une est solution de l'autre.

Une solution $u : J \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u' + pu = 0$ est dite *maximale* s'il n'existe pas de solution $\tilde{u} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ telle que $J \subset \tilde{J}$, $J \neq \tilde{J}$ et u est la restriction de $\tilde{u}$ à J. Dans ce cas, J est dit être un *intervalle maximal*. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, l'intervalle ouvert J maximal que l'on peut choisir est ici $J = I$. Ainsi dans cet exemple, l'intervalle maximal ne dépend pas du choix de c et vaut le domaine de définition de p.

Puisque toute solution maximale est de la forme

$$u(t) = ce^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}, \quad t \in I, \quad c \text{ constante réelle}, \tag{12.3}$$

nous dirons que (12.3) est la *solution générale*.

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si l'on considère l'équation différentielle $u' + pu = 0$ sur l'intervalle ouvert $J \subset I$ *pour la condition initiale* $u(t_0) = x_0$ (avec $t_0 \in J$), alors (12.1) donne une solution dite *particulière* $u : J \to \mathbb{R}$ pourvu que l'on choisisse $c = x_0$:

$$u(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}, \quad t \in J.$$

La relation entre c et x_0 est ici très simple et elle détermine entièrement c. Lorsque $J = I$, cette solution particulière uniquement déterminée est appelée *la solution maximale* ou simplement *la solution* pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

Dans la première méthode de résolution, on résoud l'équation différentielle dite *à variables séparées*

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -p(t),$$

dont on verra la théorie générale aux prochains paragraphes.

Dans la seconde méthode de résolution, le membre de gauche de l'équation différentielle $u' + pu = 0$ est multiplié par la fonction $e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}$, qui s'appelle un *facteur intégrant*. L'équation $u' + pu = 0$ est dite *équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre* (le membre de droite est nul). Nous verrons aussi comment traiter cette équation avec second membre.

12.2 Équations différentielles à variables séparées

12.2.1 Définition

On appelle *équation différentielle à variables séparées* une équation de la forme

$$f(u(t))u'(t) = g(t) \tag{12.4}$$

où $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_1 et $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2.

Une fonction $v : J \to I_1$, continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $J \subset I_2$, est dite *solution* de l'équation différentielle (12.4) si pour tout $t \in J$:

$$f(v(t))v'(t) = g(t).$$

12.2.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle à variables séparées suivante :

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} = 1.$$

Ici on peut choisir $I_1 =]0, +\infty[$ ou $I_1 =]-\infty, 0[$, $f : I_1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

et $g : I_2 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = 1.$$

Si $u : J \to I_1$ en est une solution sur un intervalle ouvert $J \subset I_2$, alors

$$\left(-\frac{1}{u(t)}\right)' = 1, \quad -\frac{1}{u(t)} = t + c \neq 0 \quad \text{et} \quad u(t) = -\frac{1}{c+t}$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.

Supposons que $0 \in J$ et soit $x_0 \in I_1$. Pour la condition initiale $u(0) = x_0$, on obtient $x_0 = u(0) = -1/c$, $c = -1/x_0$ et ainsi nécessairement

$$u(t) = -\frac{1}{-x_0^{-1} + t} = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad t \in J. \tag{12.5}$$

Réciproquement, si $x_0^{-1} \notin J$, alors il est facile de vérifier que (12.5) est effectivement solution de l'équation différentielle à variables séparées.

Pour cette condition initiale, il existe une unique solution maximale $\hat{v} : \hat{J} \to I_1$ (voir le § 12.2.6 pour la définition), donnée par

$$\hat{v}(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \quad \text{et} \quad \hat{J} = \begin{cases}]-\infty, 1/x_0[& \text{si} \quad x_0 > 0 \quad \text{et} \quad I_1 =]0, +\infty[\\ ]1/x_0\,, +\infty[& \text{si} \quad x_0 < 0 \quad \text{et} \quad I_1 =]-\infty, 0[\end{cases}$$

Elle est souvent appelée « la solution » pour cette condition initiale (fig. 12.1 et 12.2). Cet exemple nous montre, qu'en général, $\hat{J} \neq I_2$.

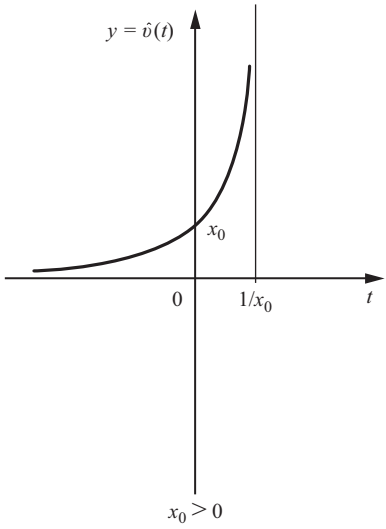


Fig. 12.1

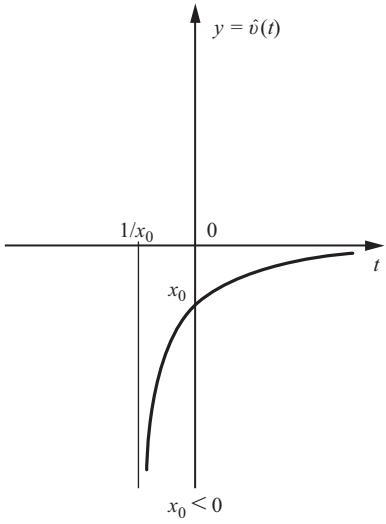


Fig. 12.2

12.2.3 Généralisation de l'exemple

Soit n un entier strictement supérieur à 1, $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (§ 1.5.1), $t_0 \in]a, b[$ et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{u'(t)}{u^n(t)} = g(t)$$

pour la condition initiale $u(t_0) = x_0 > 0$. Ici on peut choisir $f : I_1 =]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

et $I_2 =]a, b[$. Si $u : J \to I_1$ en est une solution sur un intervalle ouvert $J \subset I_2 =]a, b[$ et $t_0 \in J$, alors

$$\left(\frac{u^{-n+1}(t)}{-n+1}\right)' = g(t), \quad \frac{u^{-n+1}(t)}{-n+1} = \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s + c$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$. Comme $u(t) \in I_1 =]0, +\infty[$ et $-n+1 < 0$, on a $\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s + c < 0$. D'où

$$u(t) = \left((1-n)\left(c + \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s\right)\right)^{1/(1-n)}.$$

Pour la condition initiale $u(t_0) = x_0 > 0$, on obtient ainsi nécessairement

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(x_0^{1-n} + (1-n)\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s\right)^{1/(1-n)} \\ &= x_0\left(1 + (1-n)x_0^{n-1}\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s\right)^{1/(1-n)} \end{aligned} \tag{12.6}$$

avec $x_0^{1-n} + (1-n)\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s > 0$ pour tout $t \in J$. Réciproquement, sous les restrictions rencontrées, (12.6) est effectivement solution de l'équation différentielle à variables séparées. En fait, sous ces restrictions, la méthode de résolution consiste en une suite d'équations équivalentes.

L'unique solution maximale (« la solution ») $u : J \to I_1$ est donc

$$u(t) = x_0 \cdot \left(1 + (1-n)x_0^{n-1}\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/(1-n)}.$$

avec $J =]t_1, t_2[$ et $t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leqslant t_1 < t_0 < t_2 \leqslant b$,

$$\forall t \in]t_1, t_2[\;\; 1 + (1-n)x_0^{n-1}\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s > 0,$$

$$1 + (1-n)x_0^{n-1}\int_{t_0}^{t_1} g(s)\,\mathrm{d}s = 0 \;\text{ si }\; t_1 \neq a$$

et

$$1 + (1-n)x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t_2} g(s)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \text{si} \quad t_2 \neq b.$$

Par suite, on vérifie facilement que si $t_1 \neq a$ (resp. $t_2 \neq b$) :

$$\lim_{t \to t_1+} u(t) = +\infty \qquad (\text{resp. } \lim_{t \to t_2-} u(t) = +\infty).$$

Remarque. Le cas $x_0 < 0$ se traite de manière analogue en choisissant $I_1 =]-\infty, 0[$.

12.2.4 Pas de solution, plusieurs solutions

L'équation différentielle

$$u(t)u'(t) = 1$$

n'admet aucune solution vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$. Si une telle fonction $u : J \to \mathbb{R}$ existait sur un certain intervalle ouvert J contenant $t = 0$, on obtiendrait la contradiction $0 = 0 \cdot u'(0) = u(0)u'(0) = 1$. En particulier, bien que $u(t) = \sqrt{2t}$ satisfait l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$, $t = 0$ n'est pas dans le domaine de définition de u'. D'autre part, pour cette même condition initiale, les fonctions $u(t) = t$ et $u(t) = -t$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ sont deux solutions de l'équation différentielle

$$u(t)\,u'(t) = t.$$

12.2.5 Théorème d'existence et d'unicité locale

Soit $f : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert I_1 et soit $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2. Alors, pour tout couple de nombres $x_0 \in I_1$ et $t_0 \in I_2$, l'équation à variables séparées (12.4) admet une solution $v : J \to I_1$ vérifiant la *condition initiale* $v(t_0) = x_0$. De plus, si $v_1 : J_1 \to I_1$ et $v_2 : J_2 \to I_1$ sont deux solutions de l'équation différentielle (12.4) telles que $v_1(t_0) = v_2(t_0) = x_0$, alors $v_1(t) = v_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

Remarque. Si dans l'énoncé du théorème, on omet de faire l'hypothèse que la fonction f ne s'annule pas sur I_1, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Voir le paragraphe 12.2.4.

DÉMONSTRATION. Soit $F : I_1 \to \operatorname{Im} F$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Étant donné que la fonction f est continue et ne s'annule pas sur I_1, on sait, d'après le théorème de la valeur intermédiaire (§ 5.3.22), que la fonction f garde un signe constant sur I_1 ; ceci implique que F est une fonction strictement monotone sur I_1. De ce résultat, on déduit que F est bijective et que Im F est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine (§ 5.3.25) ; ce qui a pour conséquence, entre autres, qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset \operatorname{Im} F$. Par suite, la continuité de la fonction $G : I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

entraîne l'existence d'un nombre réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in J =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[: -\alpha < G(t) < \alpha.$$

Considérons à présent la fonction $\upsilon : J \to I_1$ définie par

$$\upsilon(t) = F^{-1}(G(t)).$$

Ainsi, pour tout $t \in J$, on peut écrire que

$$F(\upsilon(t)) = G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

ou encore, en dérivant les deux membres de cette dernière égalité par rapport à t,

$$\upsilon'(t) f(\upsilon(t)) = g(t).$$

Finalement, comme $F(x_0) = 0$, la fonction $\upsilon : J \to I_1$ est une solution de l'équation differentielle (12.4) vérifiant la condition initiale $\upsilon(t_0) = x_0$.

Supposons maintenant que $\upsilon_1 : J_1 \to I_1$ et $\upsilon_2 : J_2 \to I_1$ soient deux solutions de l'équation différentielle (12.4) telles que $\upsilon_1(t_0) = \upsilon_2(t_0) = x_0$. Alors, en intégrant, on obtient que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$:

$$F(\upsilon_1(t)) = \int_{\upsilon_1(t_0)}^{\upsilon_1(t)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(\upsilon_1(s))\upsilon_1'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

et

$$F(\upsilon_2(t)) = \int_{\upsilon_2(t_0)}^{\upsilon_2(t)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(\upsilon_2(s))\upsilon_2'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, pour tout $t \in J_1 \cap J_2$:

$$\upsilon_1(t) = \upsilon_2(t) = F^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

D'où l'unicité locale. ■

12.2.6 Existence et unicité d'une solution maximale

Soit $f : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert I_1 et soit $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2. Alors, pour tout couple de nombres $x_0 \in I_1$ et $t_0 \in I_2$, il existe une unique solution $\hat{v} : \hat{J} \to I_1$ de l'équation différentielle (12.4) satisfaisant

- $\hat{v}(t_0) = x_0$,
- $J = \hat{J}$ pour toute solution $v : J \to I_1$ de l'équation différentielle (12.4) vérifiant
$$\hat{J} \subset J \quad \text{et} \quad \forall t \in \hat{J} \quad v(t) = \hat{v}(t).$$

Cette solution $\hat{v} : \hat{J} \to I_1$ est appelée la *solution maximale* de l'équation différentielle (12.4) pour la *condition initiale* $u(t_0) = x_0$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de poser $\hat{J}$ comme étant la réunion de tous les intervalles ouverts J inclus dans I_2 pour lesquels il existe une solution $v : J \to I_1$ de l'équation différentielle (12.4) vérifiant $v(t_0) = x_0$ et d'utiliser le théorème 12.2.5. ■

Remarque. Il résulte de cette démonstration que, pour toute solution $v : J \to I_1$ de l'équation différentielle (12.4) vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x_0$ (J contenant t_0), on a $J \subset \hat{J}$ et la restriction de $\hat{v}$ à J est v.

12.2.7 Équation de Bernoulli

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et n un entier strictement supérieur à 1. On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$u'(t) + p(t)u(t) = f(t)u^n(t) \tag{12.7}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Soit $t_0 \in I$ et multiplions les membres de gauche et de droite par $e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s}$, ce qui donne l'équation différentielle équivalente

$$\left(e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} u(t)\right)' = e^{\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s} f(t)u^n(t).$$

Ceci conduit à poser

$$u(t) = \tilde{u}(t)w(t) \quad \text{avec} \quad w(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)\,\mathrm{d}s},$$

transformant l'équation de Bernouilli (12.7) (à condition que $u(t) \neq 0$) en l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{\tilde{u}'(t)}{\tilde{u}^n(t)} = f(t)w^{n-1}(t)$$

qui a été étudiée au paragraphe 12.2.3.

Remarque. L'expression $e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}$ est un facteur intégrant pour l'équation différentielle $u' + pu = 0$ (voir sect. 12.1).

12.2.8 Exemple

Soit l'équation de Bernoulli

$$u'(t) + 2t\,u\,(t) = e^{t^2}u^2(t)$$

pour la condition initiale $u(0) = 2$. Multiplions les deux membres de l'équation par

$$e^{\int_{t_0}^{t} 2s\mathrm{d}s} = e^{\int_{0}^{t} 2s\mathrm{d}s} = e^{t^2}\,,$$

ce qui donne l'équation différentielle équivalente

$$\left(e^{t^2}u(t)\right)' = e^{t^2}e^{t^2}u^2(t).$$

En posant

$$\tilde{u}(t) = e^{t^2}u(t),$$

on obtient l'équation différentielle suivante pour $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}'(t) = \tilde{u}^2(t)$$

pour la condition initiale $\tilde{u}(0) = e^{0^2}u(0) = 2$.

Au paragraphe 12.2.2, nous avons obtenu la solution maximale

$$\tilde{u}(t) = \frac{2}{1-2t}$$

définie sur $J =]-\infty, 1/2[$. Ainsi

$$u(t) = \frac{2e^{-t^2}}{1-2t}$$

définie sur $J =]-\infty, 1/2[$ est la solution maximale de l'équation de Bernoulli pour la condition initiale $u(0) = 2$.

Remarque. Pour la condition initiale $u(0) = 0$, la solution maximale est donnée par $u(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

12.2.9 Équation différentielle homogène

On appelle *équation différentielle homogène* une équation de la forme

$$u'(t) = h\left(\frac{u(t)}{t}\right) \tag{12.8}$$

où $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I.

En posant

$$u(t) = t\tilde{u}(t),$$

les solutions de l'équation différentielle homogène (12.8) se déduisent des solutions de l'équation à variables séparées

$$\frac{1}{h(\tilde{u}(t)) - \tilde{u}(t)}\tilde{u}'(t) = \frac{1}{t}$$

pourvu que, pour tout $x \in I, h(x) \neq x$.

12.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

12.3.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$u'(t) + p(t)u(t) = f(t) \tag{12.9}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (12.9) si pour tout $t \in I$:

$$v'(t) + p(t)v(t) = f(t).$$

12.3.2 Solution générale de l'équation différentielle sans second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (dite *sans second membre*)

$$u'(t) + p(t)u(t) = 0 \tag{12.10}$$

est de la forme

$$\boxed{v(t) = ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}.} \tag{12.11}$$

Par définition, l'expression (12.11) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (12.10).

DÉMONSTRATION. Ceci a été vu dans l'introduction du chapitre. Pour rappel, choisissons $t_0 \in I$ et multiplions les deux membres de l'équations différentielle par le facteur intégrant $e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}$, ce qui donne l'équation différentielle équivalente

$$\left(e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} u(t)\right)' = 0.$$

Ainsi $v : I \to \mathbb{R}$ est solution si, et seulement si,

$$e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} v(t) = c$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$. ■

12.3.3 Solution particulière en présence d'un second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Considérons une solution $w : I \to \mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle sans second membre, par exemple

$$w(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}$$

pour un certain $t_0 \in I$. Alors, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, la fonction cw est aussi une solution de l'équation différentielle sans second membre.

On se propose de trouver une *fonction* $c : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{v_0(t) = c(t)w(t)}$$

soit une solution de l'équation différentielle (12.9) avec second membre. Cette méthode de résolution est appelée *méthode de la variation de la constante*.

Pour cela, il faut et il suffit que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} v_0'(t) + p(t)v_0(t) &= c'(t)w(t) + c(t)w'(t) + p(t)c(t)w(t) \\ &= c'(t)w(t) + c(t)(w'(t) + p(t)w(t)) \\ &= c'(t)w(t) = f(t), \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant, que

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s + c_0.$$

Par conséquent, en posant $c_0 = 0$, on obtient que la fonction $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = w(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{w(s)} \, \mathrm{d}s \tag{12.12}$$

est une *solution particulière* de l'équation différentielle (12.9).

Remarque. Pour $s \in I$ fixé, la fonction $t \to w(t)/w(s)$ qui intervient dans la formule

$$v_0(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{w(t)}{w(s)} f(s) \, \mathrm{d}s$$

est une solution de l'équation différentielle sans second membre qui vérifie la condition initiale $w(t)/w(s) = 1$ en $t = s$.

12.3.4 Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f_1, f_2 et $p : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues et $\overline{v} : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{v} : I \to \mathbb{R}$) une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)u(t) = f_1(t) \quad (\text{resp. } f_2(t)).$$

Alors, la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \overline{v}(t) + \tilde{v}(t)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)u(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

12.3.5 Solution générale en présence d'un second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. De plus, supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (12.9). Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)u(t) = f(t)$$

est de la forme

$$v(t) = v_0(t) + ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s) \, \mathrm{d}s} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{12.13}$$

Par définition, l'expression (12.13) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (12.9).

DÉMONSTRATION. Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (12.9), et considérons la fonction auxiliaire $\overline{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\overline{v}(t) = v(t) - v_0(t).$$

Par construction, $\overline{v} : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (12.10) ; ce qui entraîne (§ 12.3.2) l'existence d'une constante c telle que pour tout $t \in I$:

$$\overline{v}(t) = ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Donc pour tout élément t de I :

$$v(t) = v_0(t) + \overline{v}(t) = v_0(t) + ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

La réciproque est évidente. ■

12.3.6 Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

Commençons pas traiter l'équation différentielle sans second membre :

$$u'(t) + \cos t\ u(t) = 0.$$

Un facteur intégrant est (en choisissant $t_0 = 0$)

$$e^{\int_0^t \cos s\ \mathrm{d}s} = e^{\sin t}$$

et l'équation différentielle sans second membre est équivalente à

$$\left(e^{\sin t} u(t)\right)' = 0,$$

dont la solution générale est

$$u(t) = ce^{-\sin t},$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, notons que la fonction

$$t \to e^{-\sin t}/e^{-\sin s} = e^{\sin s - \sin t}$$

est une solution de l'équation différentielle sans second membre qui vaut 1 en $t = s$.

Recherchons maintenant des solutions particulières $\overline{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tilde{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des équations différentielles

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t$$

et

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \cos t$$

respectivement. Par la formule (12.12),

$$\overline{v}(t) = e^{-\sin t} \int_0^t e^{\sin s} \sin 2s \, \mathrm{d}s$$

et

$$\tilde{v}(t) = e^{-\sin t} \int_0^t e^{\sin s} \cos s \, \mathrm{d}s.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{v}(t) &= e^{-\sin t} \int_0^t e^{\sin s} \, 2 \sin s \cos s \, \mathrm{d}s \\
&= e^{-\sin t} \int_0^{\sin t} 2e^z z \mathrm{d}z = 2e^{-\sin t} \left(e^z z \Big|_0^{\sin t} - \int_0^{\sin t} e^z \mathrm{d}z \right) \\
&= 2e^{-\sin t} \left(e^{\sin t} \sin t - e^{\sin t} + 1 \right) = 2(\sin t - 1) + 2e^{-\sin t}
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{v}(t) = e^{-\sin t} \int_0^t \left(e^{\sin s} \right)' \mathrm{d}s = e^{-\sin t} \left(e^{\sin t} - 1 \right) = 1 - e^{-\sin t}.$$

Par conséquent (§ 12.3.4 et 12.3.5), la fonction $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = \overline{v}(t) + \tilde{v}(t) - e^{-\sin t} = 2 \sin t - 1$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t \, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

Finalement, on obtient, en utilisant la formule (12.13), que

$$v(t) = (2 \sin t - 1) + ce^{-\sin t}$$

est la solution générale de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t \, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

12.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

12.4.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation de la forme

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t) \tag{12.14}$$

où p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues.

Une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (12.14) si pour tout $t \in I$:

$$v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = f(t).$$

De même, une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (12.14) *sans second membre* si pour tout $t \in I$:

$$v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = 0.$$

12.4.2 Théorème d'existence et d'unicité

Soit $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Alors, pour tout élément t_0 de I et tout couple de nombres réels α et β, l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{12.15}$$

admet une et une seule solution $v : I \to \mathbb{R}$ telle que $v(t_0) = \alpha$ et $v'(t_0) = \beta$.

DÉMONSTRATION. Il n'est pas possible, dans le cadre de ce livre, de donner une démonstration de ce théorème. ■

12.4.3 Fonctions linéairement indépendantes

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Deux fonctions $u_1 : I \to \mathbb{R}$ et $u_2 : I \to \mathbb{R}$ sont dites *linéairement dépendantes* s'il existe une constante c telle que

$$\forall t \in I \quad u_1(t) = c\, u_2(t)$$

ou

$$\forall t \in I \quad u_2(t) = c\, u_1(t).$$

Si une telle constante n'existe pas, les deux fonctions u_1 et u_2 sont dites *linéairement indépendantes*.

Remarque. Si $u_1 = 0$ sur I, alors

$$\forall t \in I \quad u_1(t) = 0 \cdot u_2(t)$$

et donc u_1 et u_2 sont linéairement dépendantes. De même, si $u_2 = 0$ sur I, alors

$$\forall t \in I \quad u_2(t) = 0 \cdot u_1(t)$$

et donc u_1 et u_2 sont linéairement dépendantes.

12.4.4 Cas des coefficients constants en l'absence du second membre

Considérons l'équation différentielle

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0, \tag{12.16}$$

où a, b sont deux constantes réelles. Pour cette équation différentielle, il est possible de donner explicitement deux solutions linéairement indépendantes. Pour ce faire, soit l'*équation caractéristique*

$$z^2 + az + b = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Il y a trois cas :

Premier cas. L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes, ce qui est le cas exactement lorsque $a^2 - 4b > 0$. On les notera $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\boxed{v_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R},}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes. Vérifions par exemple que v_1 est une solution :

$$v_1''(t) + av_1'(t) + bv_1(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t}\Big(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\Big) = 0.$$

Deuxième cas. L'équation caractéristique n'a qu'une solution, qui est alors réelle et vaut $z = -a/2$. Ceci est le cas exactement lorsque $a^2 - 4b = 0$. Alors $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\boxed{v_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}, \quad v_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}, \quad t \in \mathbb{R},}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes. La vérification que v_1 est une solution est la même que ci-dessus. Vérifions que v_2 est aussi une solution (avec la notation $-a/2 = z$) :

$$v_2'(t) = e^{zt} + tze^{zt}, \quad v_2''(t) = \big(e^{zt} + tze^{zt}\big)' = 2ze^{zt} + tz^2 e^{zt}$$

et

$$\begin{aligned} v_2''(t) + av_2'(t) + bv_2(t) &= 2ze^{zt} + tz^2 e^{zt} + a\Big(e^{zt} + tze^{zt}\Big) + bte^{zt} \\ &= te^{zt}\Big(z^2 + az + b\Big) + e^{zt}\Big(2z + a\Big) = 0. \end{aligned}$$

Troisième cas. L'équation caractéristique a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, ce qui est le cas exactement lorsque $a^2 - 4b < 0$. On les notera

$$z_1 = (-a + i\sqrt{4b - a^2})/2$$

et

$$z_2 = (-a - i\sqrt{4b - a^2})/2,$$

où $\sqrt{4b-a^2} \in]0,+\infty[$. Introduisons encore les notations

$$\lambda = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} = \text{Im } z_1 \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{a}{2} = \text{Re } z_1\,.$$

Alors $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\boxed{v_1(t) = e^{\mu t}\cos(\lambda t), \quad v_2(t) = e^{\mu t}\sin(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R},}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes. Vérifions par exemple que v_1 est une solution :

$$\begin{aligned} &v_1''(t) + a v_1'(t) + b v_1(t) \\ &\quad = \mu^2 e^{\mu t}\cos(\lambda t) - 2\mu e^{\mu t}\lambda \sin(\lambda t) - e^{\mu t}\lambda^2\cos(\lambda t) \\ &\qquad + a\Big(\mu e^{\mu t}\cos(\lambda t) - e^{\mu t}\lambda\sin(\lambda t)\Big) + b e^{\mu t}\cos(\lambda t) \\ &\quad = e^{\mu t}\cos(\lambda t)\Big(\mu^2 - \lambda^2 + a\mu + b\Big) + e^{\mu t}\sin(\lambda t)\Big(-2\mu\lambda - a\lambda\Big) \\ &\quad = e^{\mu t}\cos(\lambda t)\Big(\frac{a^2}{4} - \frac{4b-a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\Big) + e^{\mu t}\sin(\lambda t)\Big(a\lambda - a\lambda\Big) = 0. \end{aligned}$$

Remarque sur le troisième cas. Comme $z_1 = \mu + i\lambda$, on a

$$\boxed{v_1(t) = \text{Re }\big(e^{z_1 t}\big) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \text{Im }\big(e^{z_1 t}\big)\,.}$$

En effet (§ 2.3.1)

$$e^{z_1 t} = e^{\mu t + i\lambda t} = e^{\mu t}\Big(\cos(\lambda t) + i\sin(\lambda t)\Big).$$

12.4.5 Recherche de deux solutions linéairement indépendantes en l'absence du second membre

Une des conséquences immédiates du théorème 12.4.2 est que l'équation différentielle (12.15) possède au moins deux solutions linéairement indépendantes, même lorsque les fonctions p et q ne sont pas constantes. Malheureusement, il n'existe pas, en général, de formule permettant de les calculer explicitement.

Par contre, si on connaît une solution $v_1 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (12.15) qui ne s'annule en aucun point de I, il est toujours possible de trouver une fonction non constante $c : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $v_2 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{v_2(t) = c(t)\, v_1(t)}$$

soit une seconde solution de l'équation différentielle (12.15). C'est de nouveau la *méthode de la variation de la constante* (comparer avec le § 12.3.3).

En effet, il suffit que pour tout $t \in I$:

$$c'(t) \neq 0$$

et

$$\begin{aligned}
&\upsilon_2''(t) + p(t)\upsilon_2'(t) + q(t)\upsilon_2(t) \\
&\quad = c''(t)\upsilon_1(t) + c'(t)\Big(2\upsilon_1'(t) + p(t)\upsilon_1(t)\Big) + c(t)\Big(\upsilon_1''(t) + p(t)\upsilon_1'(t) + q(t)\upsilon_1(t)\Big) \\
&\quad = c''(t)\upsilon_1(t) + c'(t)\Big(2\upsilon_1'(t) + p(t)\upsilon_1(t)\Big) = 0,
\end{aligned}$$

ou encore, en intégrant, que

$$c(t) = c_1 \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p(r)\mathrm{d}r}}{\upsilon_1^2(s)}\ \mathrm{d}s + c_2 \quad \text{et} \quad c_1 \neq 0$$

(t_0 étant un élément quelconque de I). Comme dans le présent paragraphe nous ne souhaitons obtenir qu'une solution *particulière* linéairement indépendante de υ_1, nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$ pour simplifier. On peut ainsi affirmer que la fonction $\upsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\upsilon_2(t) = \upsilon_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p(r)\mathrm{d}r}}{\upsilon_1^2(s)}\ \mathrm{d}s \tag{12.17}$$

est une solution de l'équation différentielle (12.15), et que les fonctions υ_1 et υ_2 sont linéairement indépendantes.

Remarque. Plus généralement, si υ_1 ne s'annule pas sur l'ouvert $J \subset I$ et $t_0 \in J$, cette méthode donne une seconde solution linéairement indépendante $\upsilon_2 : J \to \mathbb{R}$. Par le paragraphe 12.4.2, υ_2 s'étend d'une manière unique en une solution définie sur tout I.

12.4.6 Définition du wronskien de deux fonctions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables sur I, la fonction $W[u_1, u_2] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$W[u_1, u_2](t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)$$

est appelée le *wronskien* de u_1 et u_2.

12.4.7 Caractérisation de deux solutions linéairement indépendantes en l'absence du second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\upsilon_1, \upsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

Alors, les deux fonctions υ_1 et υ_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien ne s'annule en aucun point de I.

DÉMONSTRATION. Soit υ_1 , $\upsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle (12.15).

Première partie. Supposons d'abord qu'il existe un élément t_0 de I pour lequel $W[\upsilon_1, \upsilon_2](t_0) = 0$ et prouvons que ces solutions sont linéairement dépendantes.

Puisque $W[\upsilon_1, \upsilon_2](t_0) = 0$, il existe deux constantes c_1 et c_2, non toutes les deux nulles, telles que

$$\begin{cases} c_1\upsilon_1(t_0) + c_2\upsilon_2(t_0) = 0 \\ c_1\upsilon_1'(t_0) + c_2\upsilon_2'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction auxiliaire $\upsilon : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\upsilon(t) = c_1\upsilon_1(t) + c_2\upsilon_2(t).$$

Par construction, on a que pour tout $t \in I$:

$$\upsilon''(t) + p(t)\,\upsilon'(t) + q(t)\upsilon(t) = 0.$$

Comme d'autre part $\upsilon(t_0) = \upsilon'(t_0) = 0$, on obtient, d'après le théorème 12.4.2, que pour tout $t \in I : \upsilon(t) = 0$. De ce résultat, on déduit que les deux fonctions υ_1 et υ_2 sont linéairement dépendantes.

Seconde partie. Supposons ensuite qu'il existe une constante c telle que $\upsilon_1 = c\upsilon_2$. Alors, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} W[\upsilon_1, \upsilon_2](t) &= \upsilon_1(t)\,\upsilon_2'(t) - \upsilon_1'(t)\upsilon_2(t) \\ &= c\upsilon_2(t)\upsilon_2'(t) - c\upsilon_2'(t)\upsilon_2(t) = 0. \end{aligned}$$

De même, si $\upsilon_2 = c\upsilon_1$, alors $W[\upsilon_1, \upsilon_2](t) = 0$ pour tout $t \in I$. ■

12.4.8 Solution générale de l'équation différentielle sans second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\upsilon_1, \upsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (12.15). Toute solution $\upsilon : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0$$

est de la forme

$$\boxed{\upsilon(t) = c_1\upsilon_1(t) + c_2\upsilon_2(t) \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.} \tag{12.18}$$

Par définition, l'expression (12.18) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (12.15).

DÉMONSTRATION. Soit $\upsilon : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle (12.15) et t_0 un élément quelconque de I. Comme $W[\upsilon_1, \upsilon_2](t_0) \neq 0$ (§ 12.4.7), on sait qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\begin{cases} c_1\upsilon_1(t_0) + c_2\upsilon_2(t_0) = \upsilon(t_0) \\ c_1\upsilon_1'(t_0) + c_2\upsilon_2'(t_0) = \upsilon'(t_0). \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $\bar{\upsilon} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{\upsilon}(t) = c_1\upsilon_1(t) + c_2\upsilon_2(t)$$

est une solution de l'équation différentielle (12.15) satisfaisant les deux conditions initiales :

$$\bar{\upsilon}(t_0) = \upsilon(t_0) \quad \text{et} \quad \bar{\upsilon}'(t_0) = \upsilon'(t_0).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 12.4.2, on peut affirmer que pour tout $t \in I$:

$$\upsilon(t) = \bar{\upsilon}(t) = c_1\upsilon_1(t) + c_2\upsilon_2(t).$$

La réciproque est évidente. ■

12.4.9 Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. De plus, supposons que $\upsilon_1, \upsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ soient deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (12.15).

Il est possible de trouver deux fonctions $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $\upsilon_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\upsilon_0(t) = c_1(t)\upsilon_1(t) + c_2(t)\upsilon_2(t)$$

soit une solution de l'équation différentielle (12.14). Cette méthode de résolution s'appelle *méthode de la variation des constantes* (comparer avec les paragraphes 12.3.3 et 12.4.5).

Observons que

$$\upsilon_0'(t) = c_1'(t)\upsilon_1(t) + c_2'(t)\upsilon_2(t) + c_1(t)\upsilon_1'(t) + c_2(t)\upsilon_2'(t)$$

et posons pour tout $t \in I$:

$$c_1'(t)\upsilon_1(t) + c_2'(t)\upsilon_2(t) = 0.$$

Alors on obtient

$$v_0'(t) = c_1(t)v_1'(t) + c_2(t)v_2'(t)$$

et donc

$$v_0''(t) = c_1'(t)v_1'(t) + c_2'(t)v_2'(t) + c_1(t)v_1''(t) + c_2(t)v_2''(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} &v_0''(t) + p(t)v_0'(t) + q(t)v_0(t) \\ &\quad = c_1'(t)v_1'(t) + c_2'(t)v_2'(t) + c_1(t)\Big(v_1''(t) + p(t)v_1'(t) + q(t)v_1(t)\Big) \\ &\qquad + c_2(t)\Big(v_2''(t) + p(t)v_2'(t) + q(t)v_2(t)\Big) \\ &\quad = c_1'(t)v_1'(t) + c_2'(t)v_2'(t) = f(t). \end{aligned}$$

Ainsi, en résolvant le système

$$\begin{cases} c_1'(t)v_1(t) + c_2'(t)v_2(t) = 0, \\ c_1'(t)v_1'(t) + c_2'(t)v_2'(t) = f(t), \end{cases}$$

on obtient que pour tout élement t de I :

$$c_1'(t) = -\frac{f(t)v_2(t)}{W\left[v_1, v_2\right](t)} \quad \text{et} \quad c_2'(t) = \frac{f(t)v_1(t)}{W\left[v_1, v_2\right](t)},$$

ou encore, en intégrant, que

$$c_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)v_2(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)}\,\mathrm{d}s + c_1$$

et

$$c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)v_1(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)}\,\mathrm{d}s + c_2.$$

Puisque, dans ce paragraphe, nous ne recherchons qu'une solution particulière, nous pouvons poser $c_1 = c_2 = 0$ pour simplifier.

Ainsi on peut affirmer que la fonction $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = -v_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)v_2(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)}\,\mathrm{d}s + v_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)v_1(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)}\,\mathrm{d}s \qquad (12.19)$$

est une *solution particulière* de l'équation différentielle (12.14).

Remarque. Pour $s \in I$ fixé, la fonction

$$t \to \frac{-v_1(t)v_2(s) + v_2(t)v_1(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)}$$

qui intervient dans la formule

$$v_0(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-v_1(t)v_2(s) + v_2(t)v_1(s)}{W\left[v_1, v_2\right](s)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

est une solution de l'équation différentielle sans second membre qui s'annule en $t = s$ et dont la dérivée vaut 1 en $t = s$.

12.4.10 Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, p, q, f_1 et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions continues et $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{v} : I \to \mathbb{R}$) une solution particulière de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f_1(t) \ \text{ (resp. } f_2(t)).$$

Alors, la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \bar{v}(t) + \tilde{v}(t)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

12.4.11 Solution générale de l'équation différentielle (12.14)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

De plus, supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (12.14). Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t)$$

est de la forme

$$v(t) = v_0(t) + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12.20}$$

Par définition, l'expression (12.20) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (12.14).

DÉMONSTRATION. Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (12.14), et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = v(t) - v_0(t).$$

Par construction, $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (12.15) ; ce qui entraîne (§ 12.4.8) l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $t \in I$:

$$\bar{v}(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t).$$

Ainsi, pour tout élément t de I :

$$v(t) = v_0(t) + \bar{v}(t) = v_0(t) + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t).$$

La réciproque est évidente. ■

12.4.12 Exemple

Pour $t > 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) - \frac{1}{t^2}u(t) = \ln(t) \tag{12.21}$$

sachant que la fonction $v_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_1(t) = t$$

est une solution de cette équation différentielle sans second membre.

Recherchons une solution particulière $\tilde{v}_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation sans second membre linéairement indépendante de v_1. Recherchons-la sous la forme

$$\tilde{v}_2(t) = c(t)v_1(t)$$

(méthode de la variation de la constante). On a

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{v}_2''(t) + \frac{1}{t}\tilde{v}_2'(t) - \frac{1}{t^2}\tilde{v}_2(t) \\
&= c''(t)v_1(t) + 2c'(t)v_1'(t) + c(t)v_1''(t) + \frac{1}{t}\Big(c'(t)v_1(t) + c(t)v_1'(t)\Big) - \frac{1}{t^2}c(t)v_1(t) \\
&= c''(t)v_1(t) + 2c'(t)v_1'(t) + \frac{1}{t}c'(t)v_1(t) \\
&= c''(t)t + 2c'(t) + c'(t).
\end{aligned}$$

Il suffit de trouver une solution particulière $c :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\frac{c''(t)}{c'(t)} = -\frac{3}{t}$$

sur $]0, +\infty[$ telle que $c'(t)$ ne s'annule pas. On obtient

$$\ln|c'(t)| = -3\ln(t) + c_0 = -3\ln(t)$$

en choisissant $c_0 = 0$, et donc $|c'(t)| = t^{-3}$. Il suffit ainsi de choisir $c(t) = -(1/2)t^{-2}$, ce qui donne $\tilde{v}_2(t) = -(1/2)t^{-1}$. Il en résulte que $v_2 = -2\tilde{v}_2 = 1/t$

est aussi une solution particulière de l'équation différentielle sans second membre linéairement indépendante de v_1.

On peut aussi appliquer la formule (12.17) : on sait que la fonction $\bar{v}_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}_2(t) = t \int_1^t \frac{e^{-\int_1^s (1/r)dr}}{s^2} \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}$$

est une seconde solution de l'équation différentielle (12.21) sans second membre, linéairement indépendante de v_1 . Par suite, il en est de même de la fonction $v_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_2(t) = -2\bar{v}_2(t) + v_1(t) = \frac{1}{t}$$

(voir § 12.4.8).

Observons que

$$W[v_1, v_2](t) = v_1(t)v_2'(t) - v_1'(t)v_2(t) = -t^{-1} - t^{-1} = -2/t$$

sur $]0, +\infty[$ et appliquons la formule (12.19). Alternativement, observons que, pour $s \in]0, +\infty[$ fixé, la fonction

$$t \to \frac{1}{2}(t - s^2 t^{-1}), \quad t > 0,$$

est une solution de l'équation différentielle sans second membre qui s'annule en $t = s$ et dont la dérivée vaut 1 en $t = s$, et appliquons la remarque qui suit la formule (12.19). On sait alors que la fonction $v_0 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
v_0(t) &= \frac{t}{2} \int_1^t \ln s \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2t} \int_1^t s^2 \, \ln s \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{t}{2} \int_1^t s' \ln s \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2t} \int_1^t (s^3/3)' \ln s \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{t}{2} t \, \ln t - \frac{1}{2t}(t^3/3) \ln t - \frac{t}{2} \int_1^t \mathrm{d}s + \frac{1}{2t} \int_1^t (s^2/3) \mathrm{d}s \\
&= \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2 \ln t}{6} - \frac{t(t-1)}{2} + \frac{1}{18t} \left(t^3 - 1\right) \\
&= \frac{t^2}{9} \left(3 \ln t - 4\right) + \frac{t}{2} - \frac{1}{18t}
\end{aligned}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (12.21). Finalement, on obtient, en utilisant la formule (12.20), que pour $t > 0$:

$$v(t) = \frac{t^2}{9}(3 \ln t - 4) + c_1 t + \frac{c_2}{t}$$

est la solution générale de l'équation différentielle (12.21).

12.5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

12.5.1 Définitions

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* une équation de la forme

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = f(t) \tag{12.22}$$

où a, b sont deux constantes réelles et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ est dite *solution* de l'équation différentielle (12.22) si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$v''(t) + av'(t) + bv(t) = f(t).$$

12.5.2 Remarque

L'équation différentielle (12.22) n'étant qu'un cas particulier de l'équation différentielle (12.14), tous les résultats que nous avons obtenus dans la section 12.4 lui sont applicables. Au paragraphe 12.4.4, nous avons donner explicitement deux solutions linéairement indépendantes v_1 et v_2 de cette équation différentielle sans second membre (c'est-à-dire, lorsque f est nulle sur $\mathbb{R}$).

12.5.3 Solution générale de l'équation différentielle (12.22)

L'objectif de ce paragraphe est de donner explicitement la solution générale de l'équation différentielle (12.22).

Premier cas. Supposons que $a^2 - 4b > 0$. Alors, en posant

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

on a vérifié au paragraphe 12.4.4 que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0. \tag{12.23}$$

Observons que, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$t \to \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

est la solution de (12.23) qui s'annule en $t = s$ et dont la dérivée vaut 1 en $t = s$.

Par suite, en utilisant les formules (12.19) et (12.20), on obtient que

$$v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \int_0^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)\mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (12.22).

Deuxième cas. Supposons à présent que $a^2 - 4b = 0$. Alors on a vérifié au paragraphe 12.4.4 que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (12.23).

Observons que, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$t \to (t-s)e^{-\frac{a}{2}(t-s)}$$

est la solution de (12.23) qui s'annule en $t = s$ et dont la dérivée vaut 1 en $t = s$.

D'où, en utilisant les formules (12.19) et (12.20), on obtient que

$$v(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\,(c_1 + c_2 t) + \int_0^t (t-s)e^{-\frac{a}{2}(t-s)} f(s)\mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (12.22).

Troisième cas. Pour finir, supposons que $a^2 - 4b < 0$. Alors, en posant

$$\lambda = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2},$$

on a vérifié au paragraphe 12.4.4 que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\cos\lambda t \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\sin\lambda t$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation differentielle (12.23).

Observons que, pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$t \to \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{a}{2}(t-s)} \sin\big(\lambda(t-s)\big)$$

est la solution de (12.23) qui s'annule en $t = s$ et dont la dérivée vaut 1 en $t = s$.

Par conséquent, en utilisant les formules (12.19) et (12.20), on obtient que

$$v(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{a}{2}(t-s)} \sin(\lambda(t-s)) f(s)\, \mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (12.22).

12.5.4 Méthode des coefficients indéterminés

Cette méthode s'applique lorsque f est de la forme particulière

$$f(t) = e^{\theta t}\Big(\cos(\phi t) P_n(t) + \sin(\phi t) Q_n(t)\Big)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, où

- $\theta \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, +\infty[$,
- P_n, Q_n sont deux polynômes à coefficients réels tels que le maximum du degré de P_n et de celui de Q_n vaut un certain entier $n \geqslant 0$.

Ici nous conviendrons que le degré du polynôme nul vaut $-\infty$. De plus nous poserons $Q_n = 0$ si $\phi = 0$. Soit encore le plus petit entier $r \geqslant 0$ tel que la fonction $t^r e^{\theta t} \cos(\phi t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ n'est pas solution de l'équation différentielle (12.22) sans second membre.

Il existe alors deux polynômes uniques T_n et S_n à coefficients réels tels que

- le maximum des degrés de T_n et S_n vaut n ;
- la fonction

$$v_0(t) = e^{\theta t}\Big(\cos(\phi t) t^r T_n(t) + \sin(\phi t) t^r S_n(t)\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

est solution de l'équation différentielle (12.22) (avec le second membre).

Les coefficients de T_n et S_n sont à déterminer par substitution de v_0 dans (12.22). Lorsque $\phi = 0$, on pose $S_n = 0$.

Remarques

- Si $r = 0$, alors la fonction $e^{\theta t} \cos(\phi t)$, $t \in \mathbb{R}$, n'est pas solution de l'équation différentielle sans second membre et, si de plus $\phi \neq 0$, la fonction $e^{\theta t} \sin(\phi t)$, $t \in \mathbb{R}$, non plus. Ainsi

$$(\theta + i\phi)^2 + a(\theta + i\phi) + b \neq 0,$$

c'est-à-dire, $\theta + i\phi$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (§ 12.4.4).
- Si $r = 1$, alors $\theta + i\phi$ est solution de l'équation caractéristique :

$$(\theta + i\phi)^2 + a(\theta + i\phi) + b = 0.$$

Si de plus $\phi = 0$, alors $2\theta + a \neq 0$ (car la dérivée du polynôme $z^2 + az + b$ ne s'annule pas en $z = \theta$, puisque $r = 1$).

- Si $r = 2$, alors le deuxième cas du paragraphe 12.4.4 a lieu. Ainsi $\phi = 0$, θ est solution de l'équation caractéristique et $\theta = -a/2$. De plus, la fin de la preuve qui suit assure que $t^2 T_n(t)$ est tel que $(t^2 T_n(t))'' = P_n(t)$ sur $\mathbb{R}$ (et $S_n = 0$).
- Le cas $r \geqslant 3$ n'a jamais lieu.
- En général, $P_n = 0$ n'implique pas que $T_n = 0$, et $Q_n = 0$ n'implique pas que $S_n = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit

$$w_1(t) = e^{\theta t}\cos(\phi t), \quad w_2(t) = e^{\theta t}\sin(\phi t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En substituant v_0 de la forme ci-dessus dans (12.22), nous obtenons

$$v_0'(t) = t^r T_n(t) w_1'(t) + t^r S_n(t) w_2'(t) + (t^r T_n(t))' w_1(t) + (t^r S_n(t))' w_2(t),$$

$$\begin{aligned} v_0''(t) = {} & t^r T_n(t) w_1''(t) + t^r S_n(t) w_2''(t) + 2(t^r T_n(t))' w_1'(t) + 2(t^r S_n(t))' w_2'(t) \\ & + (t^r T_n(t))'' w_1(t) + (t^r S_n(t))'' w_2(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & v_0''(t) + a v_0'(t) + b v_0(t) \\ & \quad = t^r T_n(t)\Big(w_1''(t) + a w_1'(t) + b w_1(t)\Big) + t^r S_n(t)\Big(w_2''(t) + a w_2'(t) + b w_2(t)\Big) \\ & \quad + (t^r T_n(t))'\Big(2w_1'(t) + a w_1(t)\Big) + (t^r S_n(t))'\Big(2w_2'(t) + a w_2(t)\Big) \\ & \quad + (t^r T_n(t))'' w_1(t) + (t^r S_n(t))'' w_2(t) \\ & \quad = f(t) = P_n(t) w_1(t) + Q_n(t) w_2(t). \end{aligned}$$

Cas $r = 0$, $\phi = 0$. Dans ce cas, w_1 n'est pas solution de l'équation différentielle sans second membre, $Q_n = S_n = 0$ et P_n est de degré n. Plus précisément

$$w_1'' + a w_1' + b w_1 = (\theta^2 + a\theta + b) w_1$$

avec $\theta^2 + a\theta + b \neq 0$. Nous obtenons l'équation pour T_n (polynôme de degré $\leqslant n$)

$$T_n(t)(\theta^2 + a\theta + b) = P_n(t) - T_n'(t)(2\theta + a) - T_n''(t)$$

affirmant que $(\theta^2 + a\theta + b)T_n$ est la somme de P_n et du polynôme (inconnu) $-(2\theta+a)T_n' - T_n''$ de degré au plus $n-1$. Si un tel T_n existe, il est donc forcément de degré n. Notons $T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, où $c_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. Nous obtenons alors un système de $n+1$ équations linéaires pour les $n+1$ inconnues $c_0, \ldots, c_n$.

L'existence et l'unicité de T_n découlent donc de l'unicité de la solution $T_n = 0$ dans le cas particulier $P_n = 0$. Supposons donc que $P_n = 0$ et vérifions que nécessairement $T_n = 0$ en raisonnant par l'absurde : soit $k \in \{0, \ldots, n\}$ le degré de $T_n \neq 0$. Alors $(\theta^2 + a\theta + b)T_n$ est la somme de $P_n = 0$ et d'un polynôme de degré au plus $k - 1$. Ceci est contradictoire.

Cas $r = 0$, $\phi > 0$. Dans ce cas, ni w_1 ni w_2 ne sont solutions de l'équation différentielle sans second membre, et w_2 n'est pas un multiple de w_1. De plus

$$w_1'' + a w_1' + b w_1 = (\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b) w_1 - (2\theta\phi + a\phi) w_2$$

et

$$w_2'' + aw_2' + bw_2 = (2\theta\phi + a\phi)w_1 + (\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)w_2,$$

où

$$(\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)^2 + (2\theta\phi + a\phi)^2 > 0 \tag{12.24}$$

(si cette constante était nulle, alors $(\theta+i\phi)^2+a(\theta+i\phi)+b = 0$, ce qui contredirait $r = 0$). Nous obtenons deux équations pour T_n et S_n (polynômes de degrés $\leqslant n$) affirmant que

- $(\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)T_n + (2\theta\phi + a\phi)S_n$ est la somme de P_n et d'un certain polynôme de degré au plus $n-1$,
- $-(2\theta\phi + a\phi)T_n + (\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)S_n$ est la somme de Q_n et d'un certain polynôme de degré au plus $n-1$.

Si les polynômes T_n et S_n existent, le maximum de leurs degrés vaut n. Notons $T_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ et $S_n(t) = \sum_{k=0}^n d_k t^k$, où $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Nous obtenons alors un système de $2(n+1)$ équations linéaires pour les $2(n+1)$ inconnues $c_0, \dots, c_n, d_0, \dots, d_n$.

L'existence et l'unicité de T_n et S_n découlent donc de l'unicité de la solution $T_n = S_n = 0$ dans le cas particulier $P_n = Q_n = 0$. Supposons donc que $P_n = Q_n = 0$ et vérifions que nécessairement $S_n = T_n = 0$ en raisonnant par l'absurde : soit $k \in \{0, \dots, n\}$ le maximum des degrés de T_n et S_n avec $T_n \neq 0$ ou $S_n \neq 0$. Les deux équations pour T_n et S_n affirment maintenant que

- $(\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)T_n + (2\theta\phi + a\phi)S_n$ est la somme de $P_n = 0$ et d'un certain polynôme de degré au plus $k-1$,
- $-(2\theta\phi + a\phi)T_n + (\theta^2 - \phi^2 + a\theta + b)S_n$ est la somme de $Q_n = 0$ et d'un certain polynôme de degré au plus $k-1$.

Grâce à (12.24), on obtient que les degrés de T_n et Q_n sont au plus $k-1$, ce qui est contradictoire.

Cas $r = 1$, $\phi = 0$. Dans ce cas w_1 est solution de l'équation différentielle sans second membre, $2\theta + a \neq 0$, $Q_n = S_n = 0$, P_n est de degré n et l'équation discutée s'écrit

$$(tT_n(t))'\Big(2w_1'(t) + aw_1(t)\Big) + (tT_n(t))''w_1(t) = P_n(t)w_1(t)$$

sur $\mathbb{R}$ ou encore

$$(2\theta + a)(tT_n(t))' + (tT_n(t))'' = P_n(t)$$

sur $\mathbb{R}$. Comme $2\theta + a \neq 0$ et $(tT_n(t))''$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, il est possible de trouver un unique polynôme T_n de degré n. Le raisonnement est le même que dans les cas précédents.

Cas $r = 1$, $\phi > 0$. Dans ce cas, w_1 et w_2 sont solutions de l'équation différentielle sans second membre, et w_2 n'est pas un multiple de w_1. L'équation discutée s'écrit sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(tT_n(t))'\Big(2w_1'(t) + aw_1(t)\Big) + (tS_n(t))'\Big(2w_2'(t) + aw_2(t)\Big)\\ + (tT_n(t))''w_1(t) + (tS_n(t))''w_2(t) = P_n(t)w_1(t) + Q_n(t)w_2(t),\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(tT_n(t))'\Big(2\theta w_1(t) - 2\phi w_2(t) + aw_1(t)\Big) + (tS_n(t))'\Big(2\theta w_2(t) + 2\phi w_1(t) + aw_2(t)\Big)\\ + (tT_n(t))''w_1(t) + (tS_n(t))''w_2(t) = P_n(t)w_1(t) + S_n(t)w_2(t).\end{aligned}$$

Ceci est équivalent au système suivant de deux équations sur $\mathbb{R}$:

$$(2\theta + a)\,(tT_n(t))' + 2\phi(tS_n(t))' + (tT_n(t))'' = P_n(t)$$

et

$$-2\phi(tT_n(t))' + (2\theta + a)\,(tS_n(t))' + (tS_n(t))'' = Q_n(t).$$

Comme $(2\theta+a)^2+4\phi^2 > 0$, et comme $(tT_n(t))''$ et $(tS_n(t))''$ sont des ploynômes de degrés au plus $n-1$, il est possible de trouver des polynômes uniquement déterminés T_n et S_n dont le maximum des degrés vaut n. Le raisonnement est le même que dans les cas précédents.

Cas $r = 2$. Dans ce cas $\phi = 0$, w_1 est solution de l'équation différentielle sans second membre, $\theta = -a/2$ et donc $2w_1' + aw_1 = 0$. De plus P_n est de degré n et $Q_n = S_n = 0$. Il s'agit donc de trouver un polynôme T_n de degré n tel que $(t^2T_n(t))'' = P_n(t)$ sur $\mathbb{R}$, ce qui est possible et d'une manière unique. ■

12.6 Exercices

12.6.1 Pour chacune des équations différentielles à variables séparées ci-dessous, trouver la solution (maximale) pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t)\cos u(t) = t$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 0$
2) $u'(t) = \sin u(t)$	$t_0 = 0,$	$x_0 = \pi/2$
3) $u(t)u'(t) + tu^2(t) + t = 0$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 1$
4) $t^2u'(t) - u^2(t) = 1$	$t_0 = 4/\pi,$	$x_0 = -1$
5) $u'(t) = u(t) - 2u^2(t)$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 1$
6) $u'(t) = tu^3(t)$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 2$
7) $u'(t) = (t^3 - t)e^{-u(t)}$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 0$
8) $\dfrac{u'(t)}{\sqrt{1-u^2(t)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 1/2.$

12.6.2 Pour chacune des équations de Bernoulli ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t) + u(t) = u^3(t)$	$t_0 = 0,$	$x_0 = 1$
2) $u'(t) - \dfrac{1}{t}u(t) + t^3u^4(t) = 0$	$t_0 = 1,$	$x_0 = 1$
3) $u(t)u'(t) - u^2(t) = t^2u^3(t)$	$t_0 = 0,$	$x_0 = -\dfrac{1}{2}$
4) $u'(t) + \dfrac{1}{t}u(t) = \ln(t)u^2(t)$	$t_0 = 1,$	$x_0 = 1.$

12.6.3 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. Montrer que les solutions de l'*équation de Riccati*

$$u'(t) = p(t)u^2(t) + q(t)u(t) + f(t) \tag{12.25}$$

se déduisent des solutions de l'équation de Bernoulli

$$\tilde{u}'(t) - (2p(t)\upsilon_0(t) + q(t))\tilde{u}(t) = p(t)\tilde{u}^2(t)$$

en posant $u(t) = \tilde{u}(t) + v_0(t), v_0 : I \to \mathbb{R}$ étant une solution particulière de l'équation différentielle (12.25).

12.6.4 En utilisant l'exercice précédent, trouver la solution de l'équation de Riccati

$$u'(t) = u^2(t) + \frac{1}{t}u(t) - \frac{3}{t^2}$$

qui vérifie la condition initiale $u(1) = 2$.

12.6.5 Pour chacune des équations différentielles homogènes ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t) = 2 + \dfrac{u(t)}{t}$	$t_0 = 1,$	$x_0 = 0$
2) $u^2(t)u'(t) = t^2$	$t_0 = 1,$	$x_0 = -1$
3) $u(t) + u'(t)(t - u(t)) = 0$	$t_0 = 1,$	$x_0 = \dfrac{1}{2}$
4) $tu'(t) = te^{-u(t)/t} + u(t)$	$t_0 = 1,$	$x_0 = 0$
5) $tu'(t) = u(t) + \sqrt{t^2 + u^2(t)}$	$t_0 = 1,$	$x_0 = 0$
6) $tu'(t) = u(t) + t\tan\left(\dfrac{u(t)}{t}\right)$	$t_0 = 1,$	$x_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

12.6.6 Soit l'équation différentielle

$$u'(t) = \frac{a_1 t + b_1 u(t) + c_1}{a_2 t + b_2 u(t) + c_2} \tag{12.26}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des constantes.

1) En supposant que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, montrer qu'il existe deux nombres réels $\tilde{t}$ et $\tilde{u}$ de sorte que la substitution

$$t = T + \tilde{t}, \quad u(t) = U(t) + \tilde{u}$$

transforme l'équation différentielle (12.26) en une équation différentielle homogène.

2) Etudier l'équation différentielle (12.26) lorsque $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

12.6.7 En utilisant l'exercice précédent, trouver la solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = -\frac{2t + u(t) + 1}{t + u(t) + 2}$$

qui vérifie la condition initiale $u(2) = -3$.

12.6.8 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que si une fonction $v \in C^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'*équation de Clairaut*

$$u(t) = tu'(t) + f(u'(t)) \tag{12.27}$$

alors, pour tout $t \in I$, on a : $v''(t)(t + f'(v'(t))) = 0$.

12.6.9 En utilisant l'exercice précédent, trouver toutes les fonctions $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont solutions de l'équation de Clairaut

$$u(t) = tu'(t) + (u'(t))^2.$$

12.6.10 Trouver une fonction $v :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \frac{4u(t)}{t} + t\sqrt{u(t)}$$

et qui vérifie la condition initiale $v(1) = 1$.

12.6.11 Trouver une fonction $v :]\,0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t) + \sin t} - \cos t$$

et telle que $\lim\limits_{t \to 0+} v(t) = 0$.

12.6.12 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

1) $u'(t) + u(t) = e^{2t} + e^t + 3\sin t$, $\quad t \in \mathbb{R}$
2) $tu'(t) - (1+t)u(t) + e^t(1+t^2) = 0$, $\quad t > 0$
3) $(t\cos t)u'(t) + (\cos t + t\sin t)u(t) = 1$, $\quad t \in]0, \pi/2[$
4) $(1-t^2)u'(t) - 2t\,u(t) = t^2$, $\quad t \in]-1, 1[$.

12.6.13 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

1) $u''(t) - 4\,u'(t) + 3u(t) = t^2e^t + te^{2t}\cos t$, $\quad t \in \mathbb{R}$
2) $u''(t) - 2\,u'(t) + u(t) = t\,e^t$, $\quad t \in \mathbb{R}$
3) $u''(t) - 4\,u'(t) + 5u(t) = t^2 + e^{2t}\sin t$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

12.6.14 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

1) $(t^2+1)u''(t) - 2t\,u'(t) + 2u(t) = 6(t^2+1)^2$, $\quad t \in \mathbb{R}$
2) $tu''(t) - (1+t)\,u'(t) + u(t) = \left(\dfrac{3}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right)e^t$, $\quad t > 0$
3) $t^2u''(t) - 3t\,u'(t) - 5u(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $\quad t > 0$
4) $(t^2u''(t) + 4t\,u'(t) + 2u(t)) - t^2\,u(t) = t + 1$, $\quad t > 0$.

12.6.15 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

Montrer que pour tout $t \in I$:

$$W[v_1, v_2](t) = W[v_1, v_2](t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}$$

où t_0 est un élément quelconque de I.

12.6.16 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

1) Montrer que pour tout $t \in I : v_1^2(t) + v_2^2(t) \neq 0$.
2) En supposant que $t_1 < t_2$ soient deux éléments de I pour lesquels la fonction v_1 s'annule, montrer que la fonction v_2 s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]t_1, t_2[$.
3) Dans le cas où $E = \{x \in I : v_1(x) = 0\} \neq \emptyset$, montrer qu'a chaque élément x de E, on peut associer un nombre réel $\delta(x) > 0$ de sorte que

$$]x - \delta(x), x + \delta(x)[\cap E = \{x\}.$$

Chapitre 13

Espace $\mathbb{R}^n$

13.1 Norme euclidienne

13.1.1 Définition de $\mathbb{R}^n$

On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble constitué de tous les n-tuples ordonnés $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Par la suite, les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront notés indifféremment $\boldsymbol{x}$ ou $(x_1, \ldots, x_n)$. Parfois les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront aussi notés à l'aide de majuscules : P, A, B, C, etc.

On munit $\mathbb{R}^n$ des deux opérations suivantes : pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Avec ces deux opérations on vérifie immédiatement que $\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ de dimension n (fig. 13.1 et 13.2).

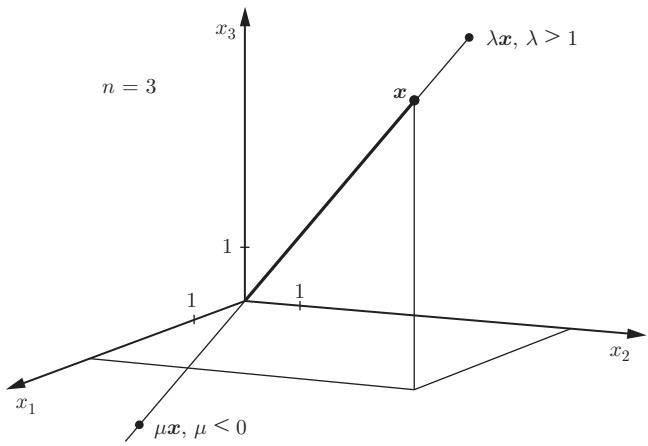


Fig. 13.1

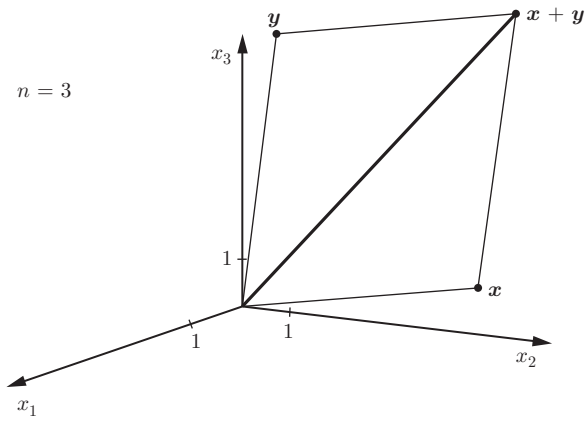


Fig. 13.2

13.1.2 Définition de la norme euclidienne

Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel positif ou nul $||\boldsymbol{x}||$ défini par

$$||\boldsymbol{x}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

est appelé la *norme euclidienne de* $\boldsymbol{x}$.

13.1.3 Propriétés de la norme euclidienne

- $||\boldsymbol{x}|| = 0$ est équivalent à $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda| \cdot ||\boldsymbol{x}||$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:
  $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ (inégalité triangulaire) ;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:
  $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \geqslant \big|\, ||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}|| \,\big|$ (inégalité triangulaire inverse).

DÉMONSTRATION. Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition de la norme euclidienne. Montrons donc la troisième propriété. Comme

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (§ 7.4.4) :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| \cdot |y_i|) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2},$$

que

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 = (||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||)^2.$$

Par conséquent $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ (fig. 13.3).

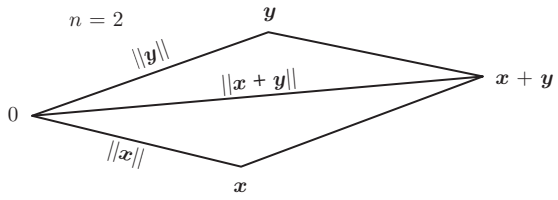


Fig. 13.3

Montrons à présent la quatrième propriété. On déduit de l'inégalité

$$||\boldsymbol{x}|| = ||(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y}||$$

que $||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$. De même,

$$||\boldsymbol{y}|| = ||(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{x}||$$

entraîne que $-||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}||$. D'où $-||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$ ou encore $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \geqslant \big|\, ||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}|| \,\big|$. ■

13.2 Suites dans $\mathbb{R}^n$

13.2.1 Définition d'une suite dans $\mathbb{R}^n$

Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $\boldsymbol{f}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui, à tout entier naturel k, fait correspondre l'élément $\boldsymbol{f}(k)$ de $\mathbb{R}^n$.

L'élément $\boldsymbol{f}(k)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé le *k-ième terme* de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par k, par exemple : $\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$, la suite elle-même étant alors désignée par $(\boldsymbol{x}_k)$. Le sous-ensemble $\{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé l'*ensemble des éléments* de la suite. Si $\{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on dit que $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite d'éléments de E.

13.2.2 Définition d'une suite bornée

Une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est dite *bornée* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N} : ||\boldsymbol{x}_k|| \leqslant M$.

13.2.3 Caractérisation d'une suite bornée

Une suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est bornée si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ soit bornée. Alors, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2 \right)^{1/2} = ||\boldsymbol{x}_k|| \leqslant M;$$

ce qui entraîne que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ soient bornées. Alors, il existe n nombres réels positifs ou nuls $M_1, \ldots, M_n$ tels que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0 : |x_{j,k}| \leqslant M_j$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$||\boldsymbol{x}_k|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \right)^{1/2};$$

ce qui revient à dire que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est bornée. ■

13.2.4 Définition d'une suite convergente

On dit qu'une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est *convergente* et admet pour *limite* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ si, à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que la relation $k \geqslant k_0$ implique $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| \leqslant \epsilon$. On écrit alors $\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$, et on dit que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ *converge* vers $\boldsymbol{x}$.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

13.2.5 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*.

13.2.6 Caractérisation des suites convergentes

Une suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, la suite numérique $(x_{j,k})$ converge vers x_j.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$

$$|x_{j,k} - x_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2 \right)^{1/2} = ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| \leqslant \epsilon,$$

on peut conclure que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$.

Réciproquement, supposons que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$: $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout $k \geqslant k_j$: $|x_{j,k} - x_j| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, on obtient que la relation $k \geqslant k_0$ implique

$$||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n} \right)^{1/2} = \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

13.2.7 Unicité de la limite

La limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, si elle existe, est unique.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes 3.2.4 et 13.2.6. ■

13.2.8 Exemple d'une suite convergente

Le résultat du paragraphe 13.2.6 nous permet d'affirmer, sans autre, que la suite $(\boldsymbol{x}_k = (e^{-k}, 1))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ converge vers $\boldsymbol{x} = (0, 1)$ (fig. 13.4).

13.2.9 Propriété des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

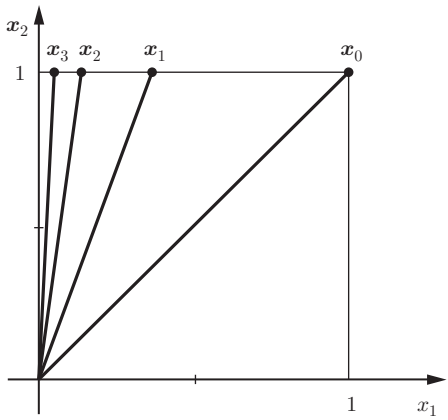


Fig. 13.4

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier naturel $k_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| \leqslant 1$. Ainsi on obtient que pour tout $k \geqslant k_0$:

$$||\boldsymbol{x}_k|| = ||(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}|| \leqslant 1 + ||\boldsymbol{x}||.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$||\boldsymbol{x}_k|| \leqslant \max\{||\boldsymbol{x}_0||, \ldots, ||\boldsymbol{x}_{k_0-1}||, 1 + ||\boldsymbol{x}||\};$$

ce qui revient à dire que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est bornée. ■

13.2.10 Propriété de la limite d'une suite convergente

Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite qui converge vers $\boldsymbol{x}$ et supposons qu'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$: $||\boldsymbol{x}_k|| \leqslant M$. Alors, $||\boldsymbol{x}|| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$:

$$||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{x}_k|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k|| \leqslant \epsilon;$$

ce qui entraîne que

$$||\boldsymbol{x}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}_k|| + \epsilon \leqslant M + \epsilon.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée quel que soit $\epsilon > 0$, on peut conclure que $||\boldsymbol{x}|| \leqslant M$. ■

13.2.11 Opérations algébriques sur les suites

Considérons deux suites $(\boldsymbol{x}_k)$ et $(\boldsymbol{y}_k)$. On peut par addition et multiplication par un scalaire λ obtenir les nouvelles suites suivantes :

$$(\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{v}_k = \lambda \boldsymbol{x}_k).$$

Supposons à présent que les deux suites $(\boldsymbol{x}_k)$ et $(\boldsymbol{y}_k)$ convergent respectivement vers $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Alors,

- La suite $(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k)$ admet pour limite $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

  DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $m \geqslant k_1 : ||\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}|| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant k_2 : ||\boldsymbol{y}_p - \boldsymbol{y}|| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, on obtient que pour tout $k \geqslant k_0$:

  $$||(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})|| \leqslant ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}|| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

  ■

- La suite $(\lambda \boldsymbol{x}_k)$ admet pour limite $\lambda \boldsymbol{x}$.

  DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et supposons que $\lambda \neq 0$ (dans le cas contraire, le résultat est évident). Puisque la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0 : ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| \leqslant \epsilon/|\lambda|$; ce qui entraîne que $||\lambda \boldsymbol{x}_k - \lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda| \cdot ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k|| \leqslant \epsilon$.

  ■

13.2.12 Définition d'une suite de Cauchy

On dit qu'une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une *suite de Cauchy*, si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l|| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

13.2.13 Caractérisation d'une suite de Cauchy

Une suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0 : ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l|| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$

$$|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,l})^2 \right)^{1/2} = ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l|| \leqslant \epsilon,$$

on peut conclure que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ soient des suites de Cauchy. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_j$ et $l \geqslant k_j$: $|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, on obtient que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent

$$||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l|| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_{j,k} - x_{j,l})^2 \right)^{1/2} \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

13.2.14 Propriété caractéristique des suites de Cauchy

Une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Si $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy (§ 13.2.13), donc convergentes (§ 3.7.4) ; ce qui implique (§ 13.2.6) que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge.

Réciproquement, si $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite convergente, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont convergentes (§ 13.2.6), donc de Cauchy (§ 3.7.4) ; ce qui implique (§ 13.2.13) que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy. ■

13.2.15 Définition d'une sous-suite

Une *sous-suite* d'une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite $p \mapsto \boldsymbol{x}_{k(p)}$, où $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Une sous-suite d'une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est aussi appelée une *suite partielle* ou encore une *suite extraite* de $(\boldsymbol{x}_k)$. Elle est notée $\left(\boldsymbol{x}_{k(p)}\right)$ ou $\left(\boldsymbol{x}_{k_p}\right)$.

Remarque. Observons l'abus de notation : dans $(\boldsymbol{x}_k)$, $k \in \mathbb{N}$ désigne une variable entière, alors que dans $\left(\boldsymbol{x}_{k(p)}\right)$, $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ désigne une fonction strictement croissante.

13.2.16 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée $(\boldsymbol{x}_k)$ on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge.

DÉMONSTRATION. Comme la suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, \ x_{n,k}))$ est bornée et que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2 \right)^{1/2} = ||\boldsymbol{x}_k||,$$

on peut affirmer que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées (§ 13.2.3).

Ainsi, en utilisant le théorème 3.6.3, on sait que de la suite $(x_{1,k})$ on peut extraire une sous-suite $(x_{1,k_1(p)})$ qui converge, où $k_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Comme la sous-suite $(x_{2,k_1(p)})$ de la suite $(x_{2,k})$ est aussi bornée, le théorème 3.6.3 assure qu'il existe une fonction $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{2,k_1(k_2(p))})$ converge.

En continuant ainsi, on obtient des fonctions strictement croissantes $k_1, \ldots, k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les sous-suites suivantes convergent :

$$(x_{1,k_1(p)}),\ (x_{2,k_1(k_2(p))}),\ \ldots,\ (x_{n,k_1(k_2(\ldots k_n(p)\ldots))}).$$

Puisque $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, $(x_{1,k_1(k_2(p))})$ est une sous-suite de la sous-suite convergente $(x_{1,k_1(p)})$, et elle est donc aussi convergente. De même, $(x_{j,k_1(k_2(\ldots k_n(p)\ldots))})$ converge pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ car c'est une sous-suite de la suite convergente $(x_{j,k_1(k_2(\ldots k_j(p)\ldots))})$.

Par le paragraphe 13.2.6, la sous-suite

$$(\boldsymbol{x}_{k_1(k_2(\cdots k_n(p)\cdots))}) = (\boldsymbol{x}_{(k_1\circ\cdots\circ k_n)(p)})$$

converge. Observons que $k_1 \circ \ldots \circ k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bien une fonction strictement croissante, car elle s'obtient par composition de fonctions strictement croissantes. ■

13.3 Topologie de $\mathbb{R}^n$

13.3.1 Définition d'une boule ouverte

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, on pose $B(\boldsymbol{x}, \delta) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| < \delta\}$. Par définition, $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est appelée la *boule ouverte de centre* $\boldsymbol{x}$ *et de rayon* δ (fig. 13.5).

13.3.2 Définition de l'intérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point $\boldsymbol{x}$ est dit *intérieur* à E s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E$.

L'ensemble des points intérieurs à E est appelé *l'intérieur* de E et est noté $\mathring{E}$.

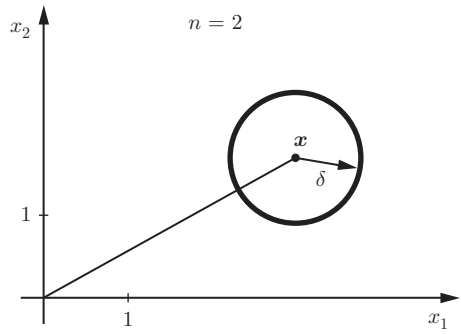


Fig. 13.5

Remarque. L'intérieur de l'ensemble vide est usuellement considéré comme égal à l'ensemble vide : $\mathring{\emptyset} = \emptyset$. Néanmoins, sauf mention explicite du contraire, *il sera toujours sous-entendu dans ce livre que, lorsque l'intérieur d'un sous-ensemble est considéré, ce sous-ensemble n'est pas vide.*

13.3.3 Définition d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* s'il est vide ou s'il ne contient que des points intérieurs.

13.3.4 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$.

13.3.5 Propriétés des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

- Toute réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

est ouvert. En effet, si $\boldsymbol{x} \in A$, il existe au moins un $j \in I$ tel que $\boldsymbol{x} \in A_j$. Puisque A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset A_j \subset A$.

Supposons à présent que $(B_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

est ouvert. En effet, si $\boldsymbol{x} \in B$, alors $\boldsymbol{x}$ appartient à tous les B_i. Puisque tous les B_i sont ouverts, il existe m nombres réels positifs $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tels que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(\boldsymbol{x}, \delta_j) \subset B_j$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, on obtient que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset B(\boldsymbol{x}, \delta_j) \subset B_j$; ce qui entraîne que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset B$. ■

13.3.6 Exemples de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)$, la boule ouverte de centre $\boldsymbol{y}$ et de rayon $r = \delta - ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||$ est incluse dans $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ (fig. 13.6).

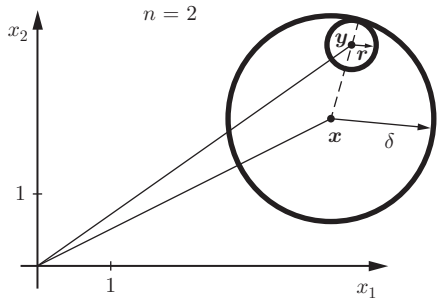


Fig. 13.6

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, $\mathring{E}$ est ouvert. C'est même le plus grand sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui soit contenu dans E. Autrement dit, si A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans E, alors $A \subset \mathring{E}$.

13.3.7 Remarque

En général, une intersection infinie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'intersection de toutes les boules ouvertes de la forme $B(\boldsymbol{0}, 1/k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est le sous-ensemble $\{\boldsymbol{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$ réduit au seul point $\boldsymbol{0}$, et $\{\boldsymbol{0}\}$ n'est pas ouvert.

13.3.8 Définition d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si son complémentaire

$$\complement E = \mathbb{R}^n \backslash E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin E\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (fig. 13.7).

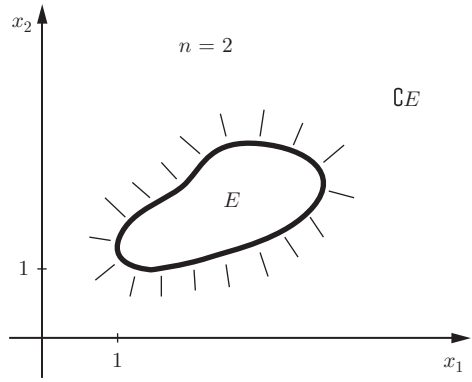


Fig. 13.7

13.3.9 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de E qui converge dans $\mathbb{R}^n$ converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit fermé et que $(\boldsymbol{x}_k)$ soit une suite d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $\boldsymbol{x} \in E$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\boldsymbol{x} \notin E$. Alors, $\boldsymbol{x} \in \complement E$. Comme $\complement E$ est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \complement E$; ce qui entraîne que $\{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B(\boldsymbol{x}, \delta) = \emptyset$. Ce résultat est impossible car $\boldsymbol{x}$ est la limite de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$. D'où la contradiction. Par conséquent $\boldsymbol{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que E ne soit pas fermé. Alors $\complement E$ n'est pas ouvert ; ce qui implique l'existence d'un élément $\boldsymbol{x}$ de $\complement E$ tel que pour tout entier $k > 0 : B(\boldsymbol{x}, 1/k) \cap E \neq \emptyset$. Ainsi, à tout entier $k > 0$, on peut associer un élément $\boldsymbol{x}_k$ de E vérifiant l'inégalité $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| < 1/k$. On a donc construit une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x} \in \complement E$ (l'élément $\boldsymbol{x}_0$ pouvant être choisi arbitrairement dans E). ■

13.3.10 Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les deux seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui soient à la fois ouverts et fermés.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la définition d'un ouvert que $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont deux ouverts. Puisque l'un est le complémentaire de l'autre, ils sont aussi fermés.

Supposons à présent qu'il existe un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui soit à la fois ouvert et fermé. Désignons-le par E. Puisque E et $\complement E$ ne sont pas vides, ils contiennent chacun au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in \complement E$. Posons

$$I = \{\lambda \in [0,1] : \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{a} \in E\}.$$

Comme I est borné et pas vide (car $0 \in I$), le nombre réel $\beta = \sup I$ existe. De la définition de β, on déduit l'existence d'une suite (λ_k) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = \beta$; ce qui entraîne, entre autres, que la suite

$$(\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{b} + (1-\lambda_k)\boldsymbol{a})$$

d'éléments de E converge vers $\boldsymbol{c} = \beta\boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$. Étant donné que E est fermé, on peut affirmer (§ 13.3.9) que $\boldsymbol{c} \in E$.

Comme $\boldsymbol{b} \notin E$, on a aussi que $0 \leqslant \beta < 1$. Ainsi, en posant $\alpha_k = \beta + (1-\beta)/(k+1)$, on obtient que

$$(\boldsymbol{y}_k = \alpha_k \boldsymbol{b} + (1-\alpha_k)\boldsymbol{a})$$

est une suite d'éléments de $\complement E$ ($\alpha_k \notin I$ car $\alpha_k > \beta = \sup I$) qui converge vers $\boldsymbol{c}$. Puisque $\complement E$ est fermé, on peut écrire que $\boldsymbol{c} \in \complement E$.

Ainsi, $\boldsymbol{c}$ appartient à la fois à E et à $\complement E$; ce qui est une absurdité. On peut donc conclure qu'un tel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ n'existe pas. D'où le résultat. ■

13.3.11 Remarque

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ peut très bien n'être ni ouvert ni fermé. C'est le cas de l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y = 0\}$.

13.3.12 Propriétés des sous-ensembles fermés

- Toute intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A = \bigcup_{i\in I} \complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ouverts, on obtient (§ 13.3.5) que $\complement A$ est ouvert.

Supposons à présent que $(B_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B = \bigcap_{i=1}^{m} \complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ouverts, on peut affirmer (§ 13.3.5) que $\complement B$ est ouvert. ■

13.3.13 Définition de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Puisque tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathbb{R}^n$, qui est un fermé, on peut poser la définition suivante : l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée l'*adhérence* de E et est notée $\overline{E}$.

De cette définition, il résulte immédiatement (§ 13.3.12) que $\overline{E}$ *est le plus petit fermé qui contienne* E et que $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Comme l'intérieur de $\complement E$ (noté $(\complement E)^\circ$) est le plus grand ouvert inclus dans $\complement E$, on en déduit

$$\complement \overline{E} = (\complement E)^\circ.$$

En appliquant cette dernière relation au sous-ensemble $\complement E$ plutôt qu'à E, on obtient aussi $\complement \complement \overline{E} = \mathring{E}$ et donc

$$\overline{\complement E} = \complement \mathring{E}$$

(ces égalités restant vraies si E ou $\complement E$ est vide).

Comme $\complement \overline{E} = (\complement E)^\circ$ et $(\complement E)^\circ$ est le sous-ensemble des $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\delta > 0$ (qui peut dépendre de $\boldsymbol{x}$) vérifiant $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \complement E$, on obtient que $\overline{E}$ est le sous-ensemble des $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall \delta > 0 \quad B(\boldsymbol{z}, \delta) \cap E \neq \emptyset.$$

13.3.14 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

13.3.15 Caractérisation de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$ il faut et il suffit que $\boldsymbol{x}$ soit la limite d'une suite d'éléments de E.

DÉMONSTRATION. Montrons que cette condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\overline{E}$ possède un élément $\boldsymbol{x}$ qui ne soit la limite d'aucune suite d'éléments de E. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que

$B(\boldsymbol{x},\delta)\cap E=\emptyset$. Par conséquent, $E\subset \complement\, B(\boldsymbol{x},\delta)$. Comme $\complement\, B(\boldsymbol{x},\delta)$ est un fermé contenant E, il contient aussi $\overline{E}$. On a obtenu la contradiction $x\in\overline{E}\subset \complement\, B(\boldsymbol{x},\delta)$. On a ainsi démontré que la condition était nécessaire.

Reste à montrer qu'elle est suffisante. En effet, si $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite d'éléments de E, $\boldsymbol{x}$ est aussi la limite d'une suite d'éléments de $\overline{E}$. Comme $\overline{E}$ est fermé, on peut conclure (§ 13.3.9) que $\boldsymbol{x}\in\overline{E}$. ■

13.3.16 Définition d'une boule fermée

Pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta>0$, l'adhérence de la boule ouverte de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon δ est égale à $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||\leqslant\delta\}$. Autrement dit, $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||\leqslant\delta\}$.

Par définition, $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$ est appelée la *boule fermée de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon δ*.

DÉMONSTRATION. Posons $A=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||\leqslant\delta\}$. Montrons que $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}\subset A$. En effet, si $\boldsymbol{z}\in\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$ il existe une suite $(\boldsymbol{z}_k)$ d'éléments de $B(\boldsymbol{x},\delta)$ qui converge vers $\boldsymbol{z}$ (§ 13.3.15) ; ce qui entraîne que la suite $(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{x})$ converge vers $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}$. Puisque pour tout $k\in\mathbb{N}$: $||\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{x}||<\delta$, on obtient (§ 13.2.10) que $||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}||\leqslant\delta$ ou encore $\boldsymbol{z}\in A$.

Montrons à présent que $A\subset\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$. En effet, si $\boldsymbol{v}\in A$, la suite $(\boldsymbol{v}_k)$ définie par

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{x}+\left(1-\frac{1}{k+1}\right)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})$$

converge vers $\boldsymbol{v}$. Comme de plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $\boldsymbol{v}_k\in B(\boldsymbol{x},\delta)$, on obtient (§ 13.3.15) que $\boldsymbol{v}\in\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$. ■

13.3.17 Définition de la frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point $\boldsymbol{x}$ est dit *point frontière* de E si toute boule ouverte de centre $\boldsymbol{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de $\complement\, E$.

L'ensemble des points frontières de E est appelé la *frontière* ou encore le *bord* de E et est noté ∂E.

Il résulte immédiatement de cette définition que :

- $\partial E=\overline{E}\cap\overline{\complement E}$; ainsi $\boldsymbol{x}\in\partial E$ si et seulement si $\boldsymbol{x}$ est la limite d'une suite d'éléments de E et d'une suite d'éléments de $\complement\, E$ (§ 13.3.15) ;
- ∂E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$;
- $\partial E=\overline{E}\cap\complement\mathring{E}=\{\boldsymbol{x}\in\overline{E} : \boldsymbol{x}\notin\mathring{E}\}$;
- $\overline{E}=\mathring{E}\cup\partial E$ et $\partial E\cap\mathring{E}=\emptyset$.

Remarque. La frontière de l'ensemble vide est usuellement considérée comme égale à l'ensemble vide : $\partial\,\emptyset=\emptyset$. Néanmoins, sauf mention explicite du contraire, *il sera toujours sous-entendu dans ce livre que, lorsque la frontière d'un sous-ensemble est considérée, ce sous-ensemble n'est pas vide.*

13.3.18 Propriété de la frontière

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, on a : $\partial\overline{E} \subset \partial E$.

DÉMONSTRATION. En effet $\partial E = \overline{E}\backslash\mathring{E}$ et, de même $\partial\overline{E} = \overline{\overline{E}}\setminus\mathring{\overline{E}}$. D'où

$$\partial\overline{E} = \overline{\overline{E}}\setminus\mathring{\overline{E}} \subset \overline{E}\backslash\mathring{E} = \partial E$$

car $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ ($\overline{E}$ étant fermé) et $\mathring{E} \subset \mathring{\overline{E}}$ (puisque $E \subset \overline{E}$). ■

Remarque. L'inclusion peut être stricte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ et pour $E =]0,1[\cup]1,2[$, on obtient $\partial E = \{0,1,2\}$ et $\partial\overline{E} = \{0,2\}$.

13.3.19 Frontière de la boule ouverte et celle de la boule fermée

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la frontière de la boule ouverte $B(\boldsymbol{x},\delta)$ est égale à $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|| = \delta\}$. Autrement dit,

$$\partial B(\boldsymbol{x},\delta) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|| = \delta\}.$$

De même, $\partial\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|| = \delta\}$.

DÉMONSTRATION. Si $||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|| < \delta$, alors

$$B\Big(\boldsymbol{z}, \delta - ||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}||\Big) \subset B(\boldsymbol{x},\delta) \subset \overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$$

et donc $\boldsymbol{z}$ n'appartient ni à la frontière de $B(\boldsymbol{x},\delta)$ ni à celle de $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$.

Si $||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|| > \delta$, alors

$$B\Big(\boldsymbol{z}, ||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|| - \delta\Big) \subset \complement\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)} \subset \complement B(\boldsymbol{x},\delta)$$

et donc $\boldsymbol{z}$ n'appartient ni à la frontière de $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$ ni à celle de $B(\boldsymbol{x},\delta)$.

Si $||\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|| = \delta$, alors la suite

$$\left(\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{x} + \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})\right)$$

converge vers $\boldsymbol{z}$ et est constituée d'éléments de $B(\boldsymbol{x},\delta) \subset \overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$. D'autre part la suite

$$\left(\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{x} + \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})\right)$$

converge vers $\boldsymbol{z}$ et est constituée d'éléments de $\complement\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)} \subset \complement B(\boldsymbol{x},\delta)$. Ainsi $\boldsymbol{z}$ appartient à la frontière de $B(\boldsymbol{x},\delta)$ et à celle de $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$. ■

13.3.20 Remarque

On sait (§ 13.3.18) que pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$: $\partial\overline{E} \subset \partial E$. Mais contrairement à ce que pourrait laisser faire croire le résultat du paragraphe 13.3.19 où $\partial B(\boldsymbol{x}, \delta) = \partial\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$, la frontière de E n'est généralement pas incluse dans celle de $\overline{E}$. Par exemple, pour $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$, on a : $\partial E = \mathbb{R}^2 = \overline{E}$, tandis que $\partial\overline{E} = \emptyset$.

13.3.21 Définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *borné* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$: $||\boldsymbol{x}|| \leqslant M$.

13.3.22 Définition d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est dit *compact* s'il est à la fois fermé et borné.

Remarque. L'ensemble vide est usuellement considéré comme compact. Néanmoins, sauf mention explicite du contraire, *il sera toujours sous-entendu dans ce livre que, lorsque un sous-ensemble compact est considéré, ce sous-ensemble n'est pas vide.*

13.3.23 Adhérence d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

L'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

DÉMONSTRATION. Soit E un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et M un nombre réel positif ou nul tel que la relation $\boldsymbol{x} \in E$ implique $||\boldsymbol{x}|| \leqslant M$. Soit $\boldsymbol{y} \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{y}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{y}$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$: $||\boldsymbol{y}_k|| \leqslant M$, on obtient (§ 13.2.10) que $||\boldsymbol{y}|| \leqslant M$. Par conséquent $\overline{E}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus $\overline{E}$ est fermé, on peut affirmer que $\overline{E}$ est compact. ■

13.3.24 Exemple d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule fermée $\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$ est compacte.

13.3.25 Caractérisation d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit compact et soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite d'éléments de E. Puisque E est borné, on peut en extraire (§ 13.2.16) une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus E est fermé, on sait (§ 13.3.9) que $\boldsymbol{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Le résultat obtenu au paragraphe 13.3.9 implique que E est fermé. Reste à démontrer que E est borné. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne le soit pas. Alors, à chaque entier naturel k, on peut associer un élément $\boldsymbol{y}_k$ de E tel que $\|\boldsymbol{y}_k\| > k$. Par conséquent, si $(\boldsymbol{y}_{k(p)})$ est une sous-suite de $(\boldsymbol{y}_k)$, on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N} : \|\boldsymbol{y}_{k(p)}\| > k(p) \geqslant p$; ce qui entraîne que $(\boldsymbol{y}_{k(p)})$ n'est pas bornée, donc pas convergente. Ainsi, de $(\boldsymbol{y}_k)$ on ne peut extraire aucune sous-suite qui converge; ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite $(\boldsymbol{y}_k)$. D'où E est borné. ■

13.3.26 Définition d'un chemin

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle *chemin* de E une application $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [0,1] \to E$ dont les n fonctions

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

sont continues. Les points $\boldsymbol{\gamma}(0)$ et $\boldsymbol{\gamma}(1)$ sont appelés respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de ce chemin.

On dit que deux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E peuvent être *joints par un chemin (de E)* s'il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$ (fig. 13.8).

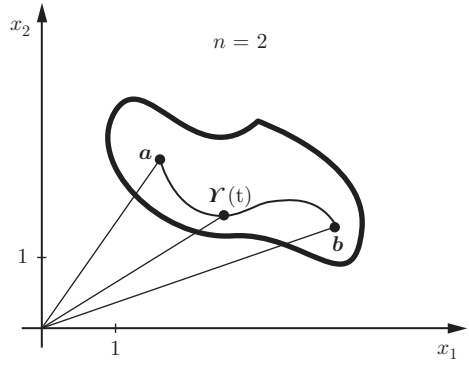


Fig. 13.8

13.3.27 Définition d'un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin de E.

13.3.28 Connexité par arcs de la boule ouverte

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est connexe par arcs. De même, la boule fermée $\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$ est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux éléments quelconques de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$. Puisque pour tout $t \in [0,1] : t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)$, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to B(\boldsymbol{x}, \delta)$ définie par $\boldsymbol{\gamma}(t) = t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a}$ est un chemin de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. Ce résultat étant valable pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$, on peut conclure que $B(\boldsymbol{x}, \delta)$, est connexe par arcs.

De façon analogue, on démontre que $\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$ est aussi connexe par arcs. ■

13.3.29 Réunion d'une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$ ayant une intersection non vide. Alors,

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Comme

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset,$$

cette intersection contient au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{x}_0$. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ une paire d'éléments quelconques de A. Alors, il existe deux indices $i_1, i_2 \in I$ tels que $\boldsymbol{a} \in A_{i_1}$ et $\boldsymbol{b} \in A_{i_2}$. Montrons que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin de A. Puisque A_{i_1} et A_{i_2} sont connexes par arcs, les points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{x}_0$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to A_{i_1}$, tandis que les points $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_2 : [0,1] \to A_{i_2}$. Par conséquent, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to A$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \boldsymbol{\gamma}_2(2t-1) & \text{si } t \in \,]1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin de A d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. D'ou le résultat. ■

13.3.30 Remarque

D'une manière générale, si E_1 et E_2 sont deux ensembles connexes par arcs disjoints, on ne peut rien dire a priori concernant la connexité par arcs de leur réunion $E_1 \cup E_2$. Par exemple, la réunion des deux connexes par arcs $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 2\}$ n'est pas connexe par arcs (fig. 13.9), tandis que la réunion des deux connexes par arcs $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$ et $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ est connexe par arcs.

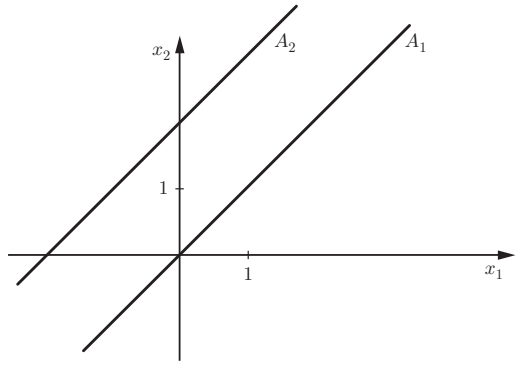


Fig. 13.9

13.3.31 Exemple d'un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$

Le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geqslant 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs (fig. 13.10).

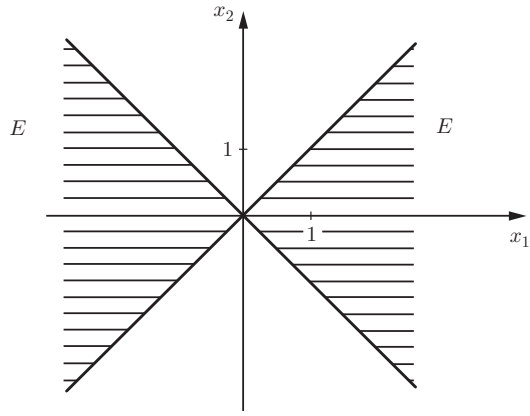


Fig. 13.10

13.3.32 Lemme

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a}$ un élément de E. Alors,

$$E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E : \text{ il existe un chemin de } E \text{ d'origine } \boldsymbol{a} \text{ et d'extrémité } \boldsymbol{x}\}$$

et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de E_1. Par hypothèse, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0, 1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}$. De plus, E étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E$. Montrons que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E_1$.

En effet, si $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)$ l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \boldsymbol{x} + (2t-1)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) & \text{si } t \in]1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{y}$; ce qui entraîne que $\boldsymbol{y} \in E_1$.

Montrons à présent que E_2 est aussi ouvert. Si $E_2 = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $E_2 \neq \emptyset$, et soit $\boldsymbol{z}$ un élément quelconque de E_2. Puisque E est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{z}, \beta) \subset E$. Comme $\boldsymbol{z} \notin E_1$ on peut affirmer que $B(\boldsymbol{z}, \beta) \cap E_1 = \emptyset$ (car sinon on pourrait relier $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{z}$) ; ce qui implique que $B(\boldsymbol{z}, \beta) \subset E_2$. ■

13.3.33 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert et connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que E soit connexe par arcs il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition est suffisante. Soit $\boldsymbol{a} \in E$. On sait, d'après le lemme 13.3.32, que

$$E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E \ : \text{ il existe un chemin de } E \text{ d'origine } \boldsymbol{a} \text{ et d'extrémité } \boldsymbol{x}\}$$

et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Puisque $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E_1 \neq \emptyset$, il résulte de l'hypothèse que $E_2 = \emptyset$. D'où $E_1 = E$. Comme par construction E_1 est connexe par arcs, E l'est aussi.

Montrons à présent que la condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts non vides disjoints A_1 et A_2 tels que $E = A_1 \cup A_2$. Soit $\boldsymbol{a}_1 \in A_1$ et $\boldsymbol{a}_2 \in A_2$. Puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}_1$ et d'extrémité $\boldsymbol{a}_2$. Posons $B = \{t \in [0,1] : \boldsymbol{\gamma}(t) \in A_1\}$.

Comme $\boldsymbol{\gamma}(0) \in A_1$ le nombre réel $s = \sup B$ existe ; ce qui entraîne l'existence d'une suite (t_k) d'éléments de B qui converge vers s. D'autre part, en constatant que $s \in [0,1]$ et que $\boldsymbol{\gamma}(1) \notin A_1$, la suite (r_k) définie par

$$r_k = s + \frac{1-s}{1+k}$$

est une suite d'éléments de $[0,1] \cap \complement B$ qui converge elle aussi vers s. Ainsi, la définition d'un chemin nous permet d'affirmer que $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\gamma}(t_k) = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{\gamma}(r_k) = \boldsymbol{\gamma}(s)$; ce qui implique (§ 13.3.15) que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Comme de plus $\boldsymbol{\gamma}(s) \in E = A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, on aboutit à l'alternative suivante : soit $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1$ soit $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_2$. Supposons d'abord que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1$. Le sous-ensemble A_1 de $\mathbb{R}^n$ étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \subset A_1$; ce qui entraîne, puisque $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \cap A_2 = \emptyset$. Ce résultat contredit le fait que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \bar{A}_2$. D'où $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin A_1$. De manière analogue, on démontre que $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin A_2$. On obtient ainsi une contradiction. Par conséquent, la condition est nécessaire. ■

13.3.34 Lemme

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E (c'est-à-dire tel que $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$). Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i.

DÉMONSTRATION. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel nombre δ n'existe pas. Alors, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un élément $\boldsymbol{x}_k$ de E tel que la boule $B(\boldsymbol{x}_k, 1/k)$ ne soit contenue dans aucun des A_i. De la suite $(\boldsymbol{x}_k)$, on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de E (§ 13.3.25). Puisque $\boldsymbol{x}$ appartient à un certain A_j et que A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \beta) \subset A_j$. D'autre part, comme $\lim_{p\to+\infty} \boldsymbol{x}_{k(p)} = \boldsymbol{x}$, il existe un entier $p_0 > 2/\beta$ tel que $\boldsymbol{x}_{k(p_0)} \in B(\boldsymbol{x}, \beta/2)$. Ainsi, en constatant que pour tout $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}_{k(p_0)}, 1/k(p_0))$:

$$||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| \leqslant ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_{k(p_0)}|| + ||\boldsymbol{x}_{k(p_0)} - \boldsymbol{x}|| < \frac{1}{k(p_0)} + \frac{\beta}{2} \leqslant \frac{1}{p_0} + \frac{\beta}{2} < \beta,$$

on obtient que $B(\boldsymbol{x}_{k(p_0)}, 1/k(p_0)) \subset B(\boldsymbol{x}, \beta) \subset A_j$; ce qui est absurde. D'où le lemme. ■

13.3.35 Théorème de Heine–Borel–Lebesgue

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E, et soit $(\boldsymbol{a}_k)$ une suite quelconque d'éléments de E. Montrons que de $(\boldsymbol{a}_k)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, à chaque élément $\boldsymbol{x}$ de E, on peut associer un nombre réel $\delta(\boldsymbol{x}) > 0$ tel que l'ensemble

$$F(\boldsymbol{x}) = \{k \in \mathbb{N} : \boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{x}, \delta(\boldsymbol{x}))\}$$

ne contienne au plus qu'un nombre fini d'entiers naturels. Comme

$$E \subset \bigcup_{\boldsymbol{x}\in E} B(\boldsymbol{x}, \delta(\boldsymbol{x})),$$

on peut affirmer l'existence de p éléments $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ de E tels que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(\boldsymbol{x}_j, \delta(\boldsymbol{x}_j));$$

ce qui implique, entre autres, que

$$\bigcup_{j=1}^{p} F(\boldsymbol{x}_j) = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in E} F(\boldsymbol{x}) = \mathbb{N}.$$

Ce résultat est impossible car $\bigcup_{j=1}^{p} F(\boldsymbol{x}_j)$ ne contient au plus qu'un nombre fini d'éléments. D'où la contradiction. Par conséquent, de la suite $(\boldsymbol{a}_k)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Ainsi, la caractérisation donnée au paragraphe 13.3.25 nous permet de conclure que E est compact.

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, supposons que E soit compact, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$E \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Ainsi, grâce au lemme 13.3.34, on sait qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i. Soit $\boldsymbol{b}_1 \in E$. Alors, il existe $i_1 \in I$ tel que $B(\boldsymbol{b}_1, \delta) \subset A_{i_1}$. Si A_{i_1} contient E, il n'y a rien à démontrer. Si A_{i_1} ne contient pas E, le sous-ensemble $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin A_{i_1}\}$ contient au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{b}_2$. De plus, il existe $i_2 \in I$ tel que $B(\boldsymbol{b}_2, \delta) \subset A_{i_2}$. Si $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ contient E, il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, on recommence en prenant un élément $\boldsymbol{b}_3$ de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}\}$ et ainsi de suite... Après un nombre fini de fois, ce processus s'arrête, car sinon on obtiendrait une suite $(\boldsymbol{b}_k)$ d'éléments de E telle que pour tout couple d'entiers $r \neq s$: $||\boldsymbol{b}_r - \boldsymbol{b}_s|| > \delta$; ce qui serait en contradiction avec le fait que E est compact (§ 13.3.25). Par conséquent, il existe un entier $l > 0$ tel que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{l} A_{i_k}.$$

Ainsi, s'achève la démonstration du théorème de Heine–Borel–Lebesgue. ■

13.4 Exercices

13.4.1 Montrer que

1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

13.4.2 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

13.4.3 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
2) Peut-on inverser l'inclusion ?

13.4.4 Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

13.4.5 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} = \overline{E}$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

13.4.6 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $E = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

13.4.7 Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = \sin 1/x\}$. Montrer que

$$\overline{E} = E \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

13.4.8 Soit

$$E = \left\{ \left(m + \frac{1}{p}, n + \frac{1}{q} \right) : m, n \in \mathbb{Z},\ p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\} \right\}.$$

1) E est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?
2) E est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?
3) Calculer $\overline{E}$ et ∂E.

13.4.9 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} \neq \emptyset$. Montrer que $\partial \mathring{E} \subset \partial E$.

13.4.10 Soit E un sous-ensemble non vide strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\partial E = \partial \left(\complement E \right)$.

13.4.11 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial E = \emptyset$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

13.4.12 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\boldsymbol{x} \in \partial E$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de E et une suite d'éléments de $\complement E$ qui convergent vers $\boldsymbol{x}$.

13.4.13 Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer que $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

13.4.14 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un élément $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé un *point d'accumulation* de E si pour tout nombre réel $\delta > 0$, l'intersection $E \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ contient au moins un élément autre que $\boldsymbol{a}$.

1) Montrer que tous les points d'accumulation d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à son adhérence. En donnant un contre-exemple, montrer que la réciproque est fausse.
2) Démontrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui admet un point d'accumulation possède une infinité d'éléments.
3) Montrer que tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ qui n'admet pas de point d'accumulation ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Que devient ce résultat si le sous-ensemble n'est pas borné ?
4) Démontrer qu'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

13.4.15 Soit $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ p éléments distincts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble $E = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p\}$ est compact.

13.4.16 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble non vide de E est compacte.

13.4.17 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E telle que pour tout sous-ensemble fini I_0 de I : $\bigcap_{i\in I_0} F_i \neq \emptyset$. Montrer que

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$$

13.4.18 Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Montrer que la suite numérique $(||\boldsymbol{x}_k||)$ converge vers $||\boldsymbol{x}||$.

13.4.19 Soit A un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et B un sous-ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in A$ et $\boldsymbol{b} \in B$ tels que

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| \ = \inf\{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}.$$

13.4.20 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ un chemin de E. Montrer que $\boldsymbol{\gamma}([0,1]) = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$ est connexe par arcs.

13.4.21 Soit A et B deux sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que l'union $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont connexes par arcs. En déduire que A et B sont connexes par arcs.

13.4.22 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin 1/x\}$. Montrer que E est connexe par arcs, tandis que $\overline{E}$ (exercice 13.4.7) ne l'est pas.

13.4.23 Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||}{1 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||}.$$

Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

13.4.24 Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1 et $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, par

$$||\boldsymbol{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

(Pour $p = 2$, on obtient la norme euclidienne définie au paragraphe 13.1.2.) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_p \leqslant ||\boldsymbol{x}||_p + ||\boldsymbol{y}||_p.$$

13.4.25 (*Produit scalaire*). Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, par

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k.$$

1) Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ et tout couple de nombres réels α et β :
$$\langle \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

2) En déduire que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$:
$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \quad (\textit{égalité de Pythagore}).$$

3) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:
$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \quad (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz} \text{ (§ 7.4.4)}).$$

Chapitre 14

Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

14.1 Définitions

14.1.1 Fonction réelle de plusieurs variables réelles

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et G une partie du produit cartésien $E \times \mathbb{R}$ telle que, pour tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots x_n)$ de E, il existe un nombre réel y et un seul tel que le couple $(\boldsymbol{x}, y)$ appartienne à G. Alors, le triplet

$$f = (G, E, \mathbb{R})$$

s'appelle *fonction définie sur E à valeurs dans* $\mathbb{R}$ ou encore *application de E dans* $\mathbb{R}$. Ici, les mots application et fonction seront toujours considérés comme synonymes. On dit que G est le *graphe* de f et on le note par $G(f)$, que E est l'*ensemble de départ* ou le *domaine de définition* et on le désigne généralement par $D(f)$. L'unique nombre réel y correspondant à l'élément $\boldsymbol{x}$ de E par f s'appelle l'*image de $\boldsymbol{x}$ par f* et se note $f(\boldsymbol{x})$, tandis que $\boldsymbol{x}$ est appelé la *variable indépendante*. Le sous-ensemble

$$\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, \boldsymbol{x} \in E \text{ tel que } f(\boldsymbol{x}) = y\}$$

de $\mathbb{R}$ est appelé l'*image* de E par f et est noté $\mathrm{Im}f$. La notation $f = (G, E, \mathbb{R})$ n'est pas utilisée en pratique, on lui préfère les notations suivantes :

$$f : E \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad E \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Pour montrer que $f(\boldsymbol{x})$ est le nombre réel associé à $\boldsymbol{x}$, on emploie la notation

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}).$$

14.1.2 Graphique d'une fonction de deux variables

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons à présent l'espace euclidien rapporté à trois axes de coordonnées $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}z$ définis par les trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. Alors, à tout élément (x, y) de E, on fait correspondre le point P de l'espace dont les coordonnées relativement aux trois axes $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}z$ sont x, y et $z = f(x, y)$. L'ensemble de ces points est appelé le *graphique* de la fonction f relativement aux trois axes $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}z$ (fig. 14.1 et 14.2).

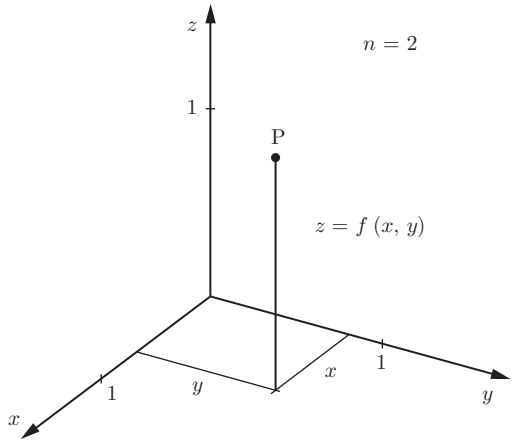


Fig. 14.1

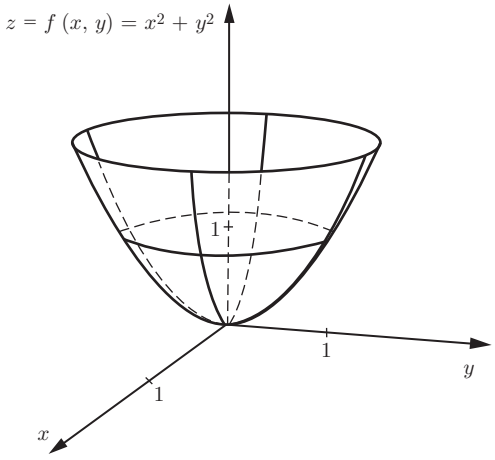


Fig. 14.2

En général l'axe Ox est appelé l'*axe des abscisses*, Oy l'*axe des ordonnées* et Oz l'*axe des cotes*. L'intersection de ces trois axes est appelée l'*origine*, notée par la lettre majuscule O ou sous forme vectorielle $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$.

14.1.3 Fonction bornée

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *bornée* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $\boldsymbol{x} \in E$ implique $|f(\boldsymbol{x})| \leqslant M$.

14.2 Limites

14.2.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est *définie au voisinage de* $\boldsymbol{x}_0$ si $\boldsymbol{x}_0$ est un point intérieur à $E \cup \{\boldsymbol{x}_0\}$, c'est-à-dire, s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\boldsymbol{x}_0\}$.

14.2.2 Définition de la limite d'une fonction

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ admet pour *limite* le nombre réel l lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - l\,| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

14.2.3 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ admet pour limite le nombre réel l lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$ la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers l.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$ et que la suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ converge vers $\boldsymbol{x}_0$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Étant donné que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - l| \leqslant \epsilon$. D'autre part, puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{x}_0 \notin \{\boldsymbol{a}_k \ : k \in \mathbb{N}\}$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_0 : 0 < \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$. Finalement, on peut écrire que pour tout $k \geqslant k_0 \ : |f(\boldsymbol{a}_k) - l| \leqslant \epsilon$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers l. Montrons que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que ce résultat soit faux. Alors, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier $k \geqslant 0$, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, 1/(k+1))\}$$

contient au moins un élément $\boldsymbol{b}_k$ pour lequel $|f(\boldsymbol{b}_k) - l\,| > \epsilon$. Ainsi, par construction, $(\boldsymbol{b}_k)$ est une suite d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$ et dont la suite des images $(f(\boldsymbol{b}_k))$ ne converge pas vers l. D'où la contradiction ; ce qui nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$. ■

14.2.4 Unicité de la limite d'une fonction

Si l_1 et l_2 sont deux limites de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$, alors $l_1 = l_2$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{a}_k)$ une suite d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E \ : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$. Alors, $l_1 = \lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k)$ et $l_2 = \lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k)$ (§ 14.2.3). Par conséquent $l_1 = l_2$ (§ 3.2.4). ■

14.2.5 Opérations algébriques sur les limites

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l_1$ et $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = l_2$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la limite de la fonction $\alpha f + \beta g$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à $\alpha l_1 + \beta l_2$;
- la limite de la fonction fg lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à $l_1\, l_2$;
- si $l_2 \neq 0$ et g ne s'annule pas sur E, la limite de la fonction f/g lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à l_1/l_2.

DÉMONSTRATION. Pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E \ : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, les trois suites

$$(\alpha f(\boldsymbol{a}_k) + \beta g(\boldsymbol{a}_k)),\ (f(\boldsymbol{a}_k)g(\boldsymbol{a}_k)) \ \text{ et } \ (f(\boldsymbol{a}_k)/g(\boldsymbol{a}_k))$$

convergent respectivement vers $\alpha l_1 + \beta l_2, l_1\, l_2$ et l_1/l_2 (§ 3.3.3). Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 14.2.3. ■

14.2.6 Limite d'une fonction composée

Soit $a \in \mathbb{R}$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(b_1,\ldots,b_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = l$$

et soit $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fonctions telles que

$$\lim_{t\to a} g_1(t) = b_1, \ \ldots \ , \lim_{t\to a} g_n(t) = b_n.$$

Supposons de plus qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < |t - a| \leqslant \alpha$ implique $(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \neq (b_1, \ldots b_n)$. Alors,

$$\lim_{t\to a} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = l.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, puisque

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(b_1,\ldots,b_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = l,$$

il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que la relation $0 < (\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - b_i)^2)^{1/2} \leqslant \beta$ implique $|f(x_1, \ldots, x_n) - l| \leqslant \epsilon$. D'autre part, comme

$$\lim_{t \to a} g_1(t) = b_1, \ \ldots, \ \lim_{t \to a} g_n(t) = b_n,$$

il existe n nombres réels positifs $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tels que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, la relation $0 < |t - a| \leqslant \delta_j$ implique $|g_j(t) - b_j| \leqslant \beta/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\alpha, \delta_1, \ldots, \delta_n\}$, on obtient que pour tout $0 < |t - a| \leqslant \delta$:

$$0 < \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} (g_i(t) - b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \beta \ ;$$

ce qui entraîne que $|f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) - l\,| \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat. ■

14.2.7 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 14.2.6, on omet de faire l'hypothèse qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < |t - a| \leqslant \alpha$ implique $(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \neq (b_1, \ldots, b_n)$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et si $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions définies respectivement par

$$g_1(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_2(t) = 0,$$

on a $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 1$ et $\lim\limits_{t \to 0} g_1(t) = 0$. Néanmoins, puisque

$$f(g_1(t), g_2(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{(k\pi)^{-1} : k \in \mathbb{Z}^*\} \\ 1 & \text{si } t \notin \{(k\pi)^{-1} : k \in \mathbb{Z}^*\}, \end{cases}$$

on obtient que $\lim\limits_{t \to 0} f(g_1(t), g_2(t))$ n'existe pas.

14.2.8 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calculons sa limite lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$. En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 14.2.6 (avec $g_1(t) = g_2(t) = t$, $b = (0, 0)$ et $a = 0$), on sait que si cette limite existe elle doit être égale à $\lim\limits_{t \to 0} f(t, t) = 0$. Reste à démontrer que zéro est bien la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$. En effet, en associant à

tout nombre réel $\epsilon > 0$ le nombre $\delta = \epsilon/3$, la relation $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \delta$ implique bien

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \frac{|x+y|\,|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \leqslant (|x|+|y|)\frac{x^2+|x||y|+y^2}{x^2+y^2}\\ &\leqslant (|x|+|y|)\frac{x^2+|x||y|+y^2+\frac{1}{2}(|x|-|y|)^2}{x^2+y^2}\\ &= (|x|+|y|)\frac{\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2}{x^2+y^2}\\ &\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

14.2.9 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction (fig. 14.3) définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

En remarquant que $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 1/2 \neq 0 = \lim\limits_{t\to 0} f(t,0)$, on peut affirmer (§ 14.2.6) que la fonction f n'admet pas de limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

Le graphique de f est représenté à la figure 14.3. Le graphe de f contient les deux droites $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$, et les demi-droites

$$\{(t,t,1/2) : t \in]0,+\infty[\,\},\quad \{(t,t,1/2) : t \in]-\infty,0[\,\},$$

$$\{(t,-t,-1/2) : t \in]0,+\infty[\,\},\quad \{(t,-t,-1/2) : t \in]-\infty,0[\,\}.$$

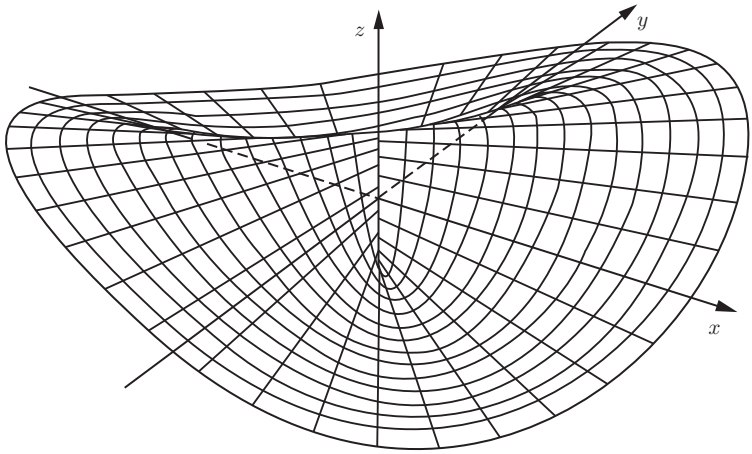


Fig. 14.3

14.2.10 Permutation des limites

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Supposons, de plus, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe. Alors,

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = l.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, posons $h(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la relation $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqslant \delta$ implique $|f(x,y) - l\,| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour tout $0 < |x-a| \leqslant \delta/2$: $|g(x) - l\,| = \lim\limits_{y\to b} |f(x,y) - l\,| \leqslant \epsilon$ et pour tout $0 < |y-b| \leqslant \delta/2$: $|h(x) - l\,| = \lim\limits_{x\to a} |f(x,y) - l\,| \leqslant \epsilon$.

Ces deux résultats étant vrais quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to b} h(y) = l$. ■

14.2.11 Remarques

D'une part, le fait que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe n'entraîne pas, en général, que l'une ou l'autre des deux limites suivantes $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x,y) = x\,h(y) + y\,h(x) \quad \text{avec } h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Par contre, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ n'existe pas.

D'autre part, le fait que $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)) = l$ n'implique pas a priori que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe. Par exemple, pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

on sait (§ 14.2.9) que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Néanmoins, il est facile de vérifier que $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.

14.2.12 Théorème des deux gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = l$;
- il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant h(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$$

pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de $\{\boldsymbol{x} \in E : 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \alpha\}$.

Alors, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} h(\boldsymbol{x}) = l$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{a}_k)$ une suite arbitraire d'éléments de

$$\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$$

qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$. De la deuxième propriété, on déduit qu'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $f(\boldsymbol{a}_k) \leqslant h(\boldsymbol{a}_k) \leqslant g(\boldsymbol{a}_k)$. Comme

$$\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{k\to+\infty} g(\boldsymbol{a}_k) = l$$

(§ 14.2.3), on peut affirmer (§ 3.3.10) que $\lim\limits_{k\to+\infty} h(\boldsymbol{a}_k) = l$. Ainsi, le résultat démontré au paragraphe 14.2.3 nous permet de conclure que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} h(\boldsymbol{x}) = l$. ■

14.2.13 Exemple

Montrons que la limite de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (fig. 14.4) définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(|x|+|y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vaut zéro lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. D'une part, pour tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1$:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = |xy\ln(|x|+|y|)| \leqslant |(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)|.$$

D'autre part, puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t\ln t = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)| = 0.$$

Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes, on obtient que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0;$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

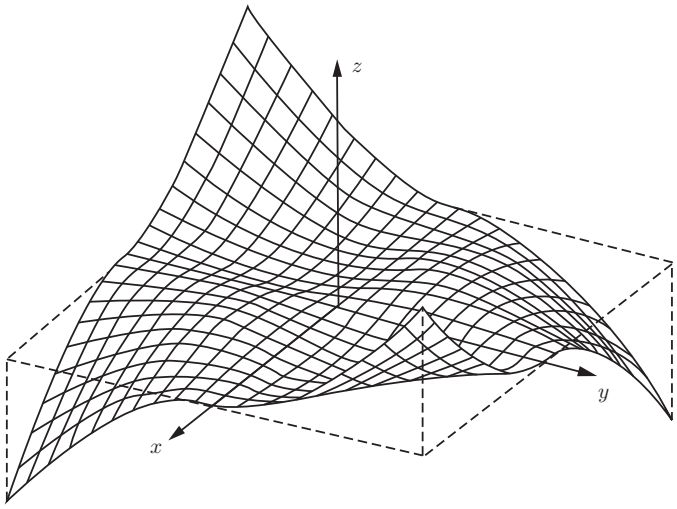


Fig. 14.4

14.3 Fonctions continues

14.3.1 Définition d'une fonction continue en un point

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *continue en* $\boldsymbol{x}_0$ si $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$.

14.3.2 Première définition équivalente

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

14.3.3 Deuxième définition équivalente

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers $f(\boldsymbol{x}_0)$.

14.3.4 Remarque

Si une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, alors, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction d'une variable f_j définie par

$$\begin{aligned} f_j : \{x \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in E\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_j(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

est continue en a_j ; autrement dit f est continue par rapport à chacune de ses variables.

En général, la réciproque est fausse ; c'est-à-dire que la continuité des n fonctions d'une variable $f_1, \ldots, f_n$ respectivement en $a_1, \ldots, a_n$ n'entraîne pas nécessairement la continuité de la fonction f au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue au point $(0, 0)$ (§ 14.2.9). Par contre, les deux fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f_1(x) = f(x, 0)$ et $f_2(y) = f(0, y)$ sont continues en $x = 0$ et $y = 0$.

14.3.5 Remarque

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \alpha x) = f(0, 0)$, peut-on en conclure que f est continue au point $(0, 0)$? La réponse à cette question est non. En effet, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (fig. 14.5) définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2y^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

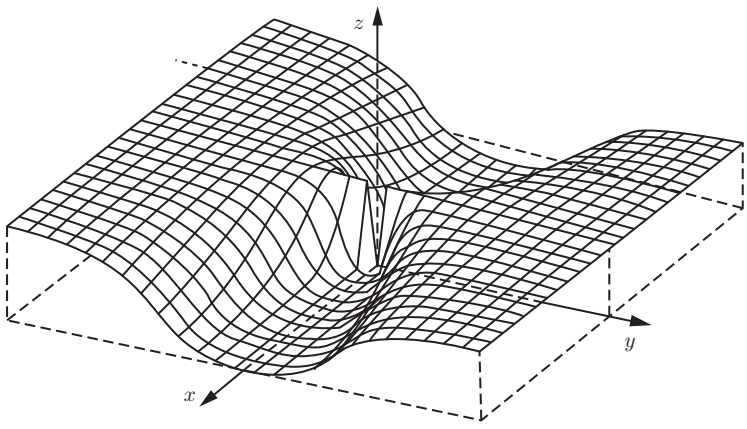


Fig. 14.5

vérifie la propriété ci-dessus ; mais, comme $\lim_{t\to 0} f(0,t) = 2 \neq 0 = f(0,0)$, elle n'est pas continue au point $(0,0)$ (§ 14.2.6).

14.3.6 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en $\boldsymbol{x}_0$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$;
- de même, les fonctions fg, f/g (avec $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ et g ne s'annulant pas sur E) et $|f|$ sont continues en $\boldsymbol{x}_0$.

14.3.7 Continuité d'une fonction composée

D'une part, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et

$$g_1, \ldots, g_p : A \to \mathbb{R}$$

$p \geqslant 1$ fonctions continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. D'autre part, soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ contenant

$$\{(g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_p(\boldsymbol{y})) : \boldsymbol{y} \in A\}$$

et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a}))$. Alors la fonction $F : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y_1, \ldots, y_n) = f\left(x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_p = g_p(y_1, \ldots, y_n)\right)$$

est continue au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Remarque. Ce résultat est aussi valable pour $n = 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{z}_k)$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\boldsymbol{a}$. Alors, les p suites numériques

$$(g_1(\boldsymbol{z}_k)), \ldots, (g_p(\boldsymbol{z}_k))$$

convergent respectivement vers $g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a})$; ce qui implique (§ 13.2.6) que la suite

$$(g_1(\boldsymbol{z}_k), \ldots, g_p(\boldsymbol{z}_k))$$

converge vers $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a}))$. Par conséquent, la continuité de la fonction f au point $\boldsymbol{b}$ nous permet d'écrire que

$$\lim_{k\to+\infty} F(\boldsymbol{z}_k) = F(\boldsymbol{a}).$$

D'où le résultat. ■

14.3.8 Exemple

Montrons que la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = -\sin(xy)$ est continue au point $(0, 0)$. Pour cela, considérons les deux fonctions auxiliaires $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(x, y) = xy \quad \text{et} \quad f(t) = -\sin t.$$

Puisque g est continue en $(0, 0)$ et que f est continue en $g(0, 0)$, on peut conclure (§ 14.3.7) que la fonction F est continue au point $(0, 0)$ (fig. 14.6).

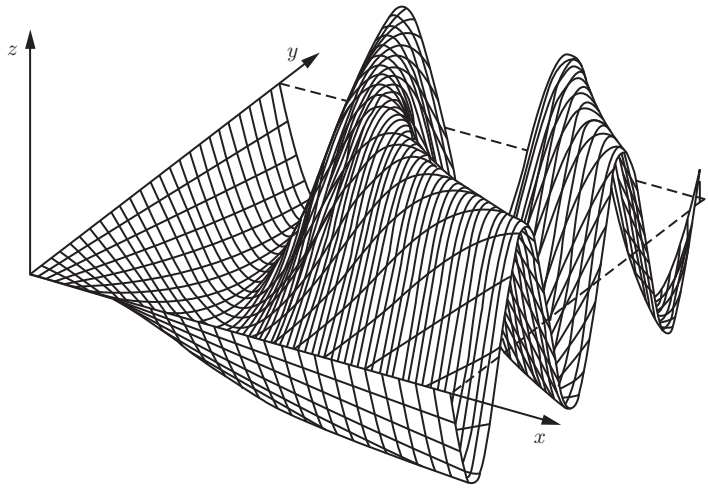


Fig. 14.6

14.3.9 Exemple d'une fonction continue

Démontrons que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ (fig. 14.7).

Définissons la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin s}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ 1 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Elle est continue en tout $s \neq 0$ et, comme

$$\lim_{s \to 0} h(s) = 1 = h(0),$$

elle est aussi continue en 0.

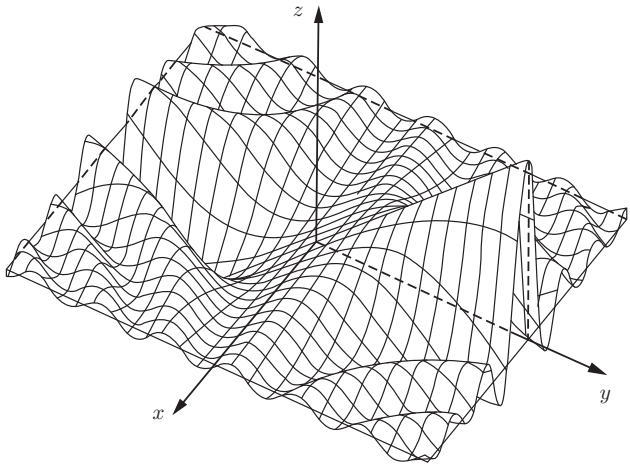


Fig. 14.7

D'autre part $f(x, y) = h(xy)y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or les fonctions

$$(u, v) \to a(u, v) = uv \quad \text{et} \quad (u, v) \to b(u, v) = v$$

étant continues en tout point de $\mathbb{R}^2$, il résulte du paragraphe 14.3.7 et de la relation

$$f(x, y) = h(xy)y = a(h(xy), y) = a(h(a(x, y)), b(x, y)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

14.3.10 Fonction continue sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *continue sur E,* ou tout simplement qu'elle est *continue* si à tout élément $(\boldsymbol{x}_0, \epsilon) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

L'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ est noté $C(E, \mathbb{R})$.

14.3.11 Propriété des fonctions continues sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E si et seulement si pour tout $\boldsymbol{x}_0 \in E$ et toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$ la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers $f(\boldsymbol{x}_0)$.

14.3.12 Remarque

Pour $n = 1$, la définition du paragraphe 14.3.10 généralise à des sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}$ la notion de continuité donnée pour les intervalles aux paragraphes suivants : 5.3.16, 10.1.1 et 10.2.1

14.3.13 Généralisation de la définition de la continuité en un point

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in E$. Dans la définition équivalente 14.3.2 de la continuité de f en $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0$ est supposé être un point intérieur à E. Le paragraphe 14.3.2 permet de généraliser la notion de continuité en un point de $E \backslash \mathring{E}$ comme suit.

Soit $\boldsymbol{x}_0 \in E \backslash \mathring{E}$ (si un tel point existe). Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon$.

Avec cette extension de la définition de la continuité en un point, on obtient qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point $\boldsymbol{x}_0$ de E.

Néanmoins, sauf mention explicite du contraire, lorsque le concept de continuité en un point est utilisé, *il sera toujours sous-entendu dans ce livre que le point est un point intérieur du domaine de définition.*

14.3.14 Définition de la continuité uniforme d'une fonction

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* sur E si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de E vérifiant la relation $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \delta$, on ait : $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend du nombre ϵ mais pas de $\boldsymbol{x}$ ou de $\boldsymbol{y}$.

14.3.15 Exemple

Il résulte de l'inégalité triangulaire inverse (§ 13.1.3) que pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ est uniformément continue sur E (fig. 14.8).

14.3.16 Remarques

Dans la définition de la continuité uniforme, le nombre δ ne dépend que de ϵ, alors que dans la définition de la continuité (§ 14.3.10) il dépend, en général, aussi du point considéré $\boldsymbol{x}_0$.

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur E est continue sur E. La réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque pour tout nombre $\alpha > 0$ donné, la différence

$$|f(x + \alpha, y) - f(x, y)| = \alpha|2x + \alpha|$$

peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

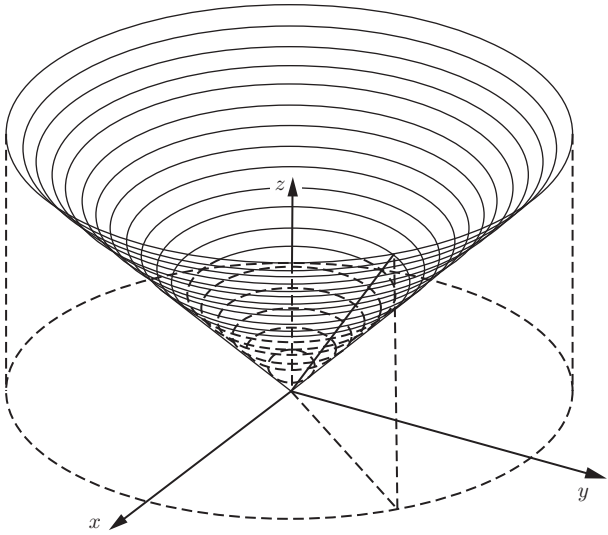


Fig. 14.8

14.3.17 Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et M (resp. m) un nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de E : $f(\boldsymbol{x}) \leqslant M$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \geqslant m$) ;
- M (resp. m) appartient à l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\}$.

Alors, le nombre réel M (resp. m) est appelé le *maximum* (resp. le *minimum*) de la fonction f sur E et est noté $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ (resp. $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$).

D'autre part, si pour

$$\boldsymbol{x}_0 \in E : f(\boldsymbol{x}_0) = \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}) (\text{resp. } f(\boldsymbol{x}_0) = \min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})),$$

nous dirons que la fonction f *atteint son maximum* (resp. *minimum*) au point $\boldsymbol{x}_0$.

14.3.18 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

- les deux nombres réels $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ existent ;
- la fonction f est uniformément continue sur E.

DÉMONSTRATION. Montrons la première propriété. Mais d'abord, vérifions que la fonction f est bornée sur E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas bornée sur E. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E telle que pour tout entier $k \geqslant 0 : |f(\boldsymbol{x}_k)| \geqslant k$. De la suite $(\boldsymbol{x}_k)$, on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de E ; ce qui implique, du fait de la continuité de f sur E, que $\lim\limits_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{x}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{x})$. Ce dernier résultat est impossible car, par contruction, la suite $(f(\boldsymbol{x}_{k(p)}))$ n'est pas bornée. D'où la contradiction. Par conséquent, la fonction f est bornée sur E.

En notant

$$m = \inf\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\},$$

on sait qu'il existe deux suites $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ d'éléments de E telles que

$$\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = m \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = M.$$

Des suites $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ on peut extraire deux sous-suites $(\boldsymbol{a}_{k(p)})$ et $(\boldsymbol{b}_{k(p)})$ qui convergent respectivement vers les éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E ; ce qui entraîne, par la continuité de f sur E que

$$m = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{a})$$

et

$$M = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = \lim_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{b}).$$

D'où $m = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $M = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$.

Montrons maintenant que f est uniformément continue sur E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle ne le soit pas. Alors, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ et deux suites $(\boldsymbol{x}_k)$ et $(\boldsymbol{y}_k)$ d'éléments de E tels que pour tout entier $k > 0$:

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k\| \leqslant 1/k \quad \text{et} \quad |f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{y}_k)| > \epsilon.$$

De la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de E (§ 13.3.25). Il en résulte que

$$||\boldsymbol{y}_{k(p)} - \boldsymbol{x}|| \leqslant ||\boldsymbol{y}_{k(p)} - \boldsymbol{x}_{k(p)}|| + ||\boldsymbol{x}_{k(p)} - \boldsymbol{x}|| \leqslant \frac{1}{k(p)} + ||\boldsymbol{x}_{k(p)} - \boldsymbol{x}||$$

converge vers 0 quand p tend vers $+\infty$, et donc la sous-suite $(\boldsymbol{y}_{k(p)})$ converge aussi vers $\boldsymbol{x}$. Par conséquent, comme f est une fonction continue sur E et que pour tout entier $p \geqslant 0 : |f(\boldsymbol{x}_{k(p)}) - f(\boldsymbol{y}_{k(p)})| > \epsilon$, on obtient, par passage à la limite, la contradiction suivante : $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \geqslant \epsilon > 0$. D'où f est uniformément continue sur E.

■

14.3.19 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit E un sous-ensemble compact et connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f atteint sa borne supérieure, sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ces deux bornes. Autrement dit,

$$\operatorname{Im} f = [\min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}),\ \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})].$$

DÉMONSTRATION. Puisque f est continue sur un compact, nous savons (§ 14.3.18) qu'il existe deux éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E tels que $f(\boldsymbol{a}) = \min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $f(\boldsymbol{b}) = \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$. De plus, comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{b}$. Ainsi, grâce à la continuité de la fonction $f \circ \boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$, on obtient (§ 5.3.22) que

$$f \circ \boldsymbol{\gamma}\,([0,1]) = [\min_{t\in[0,1]} f(\boldsymbol{\gamma}(t)),\ \max_{t\in[0,1]} f(\boldsymbol{\gamma}(t))] = [f(a),\ f(b)]\,;$$

ce qui entraîne que

$$\operatorname{Im} f = [\min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}),\ \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})].$$

■

14.3.20 Continuité d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

Soit $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle et $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $I = [c,\ d]$ (les autres cas se déduisant facilement de ce cas particulier). Soit ϵ un nombre réel positif et y_0 un élément quelconque de $[c,d]$. Puisque $[a,b] \times [c,d]$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, la fonction f est uniformément continue sur $[a,b] \times [c,d]$. Par conséquent, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [c,d]$ vérifiant $|y - y_0| \leqslant \delta$, on ait :

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}$$

quel que soit $x \in [a, b]$; ce qui entraîne, entre autres, que

$$|g(y) - g(y_0)| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) \, \mathrm{d}x \right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| \, \mathrm{d}x \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

14.3.21 Remarque

Soit $f : [0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x, y) = y^2 e^{-xy^2}$ (fig. 14.9). Puisque l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x$$

converge quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on peut considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

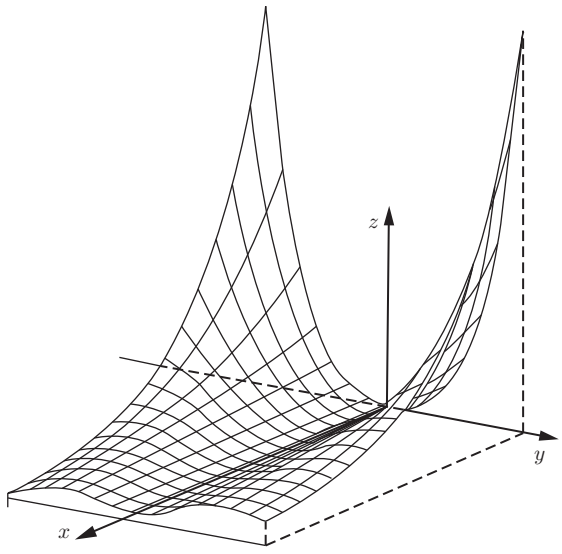


Fig. 14.9

Par suite, en constatant que

$$g(y) = \int_0^{+\infty} y^2\, e^{-xy^2}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

on obtient que la fonction g n'est pas continue au point $y = 0$.

Cet exemple nous montre que, en général, le résultat obtenu au paragraphe 14.3.20 n'est pas valable pour les intégrales généralisées. Néanmoins, sous certaines hypothèses, il peut être valable (§ 14.3.22).

14.3.22 Continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre
Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle et $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

converge. De plus, on suppose qu'à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre $c > a$ (indépendant de y) tel que pour tout $y \in I$:

$$\left| \int_c^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon.$$

Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in I$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, il existe un nombre $c > a$ (indépendant de y) tel que pour tout $y \in I$:

$$\left| \int_c^{+\infty} f(x, y)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(y) = \int_a^{c} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

est continue (§ 14.3.20), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y - y_0| \leqslant \delta$ impliquent

$$\left| \int_a^{c} (f(x, y) - f(x, y_0))\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $y \in I$ vérifiant $|y - y_0| \leqslant \delta$, on a :

$$\begin{aligned}|g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_a^c (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_c^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^c (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_c^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

14.3.23 Exemple
Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-xy}\, h(x)$ (fig. 14.10).

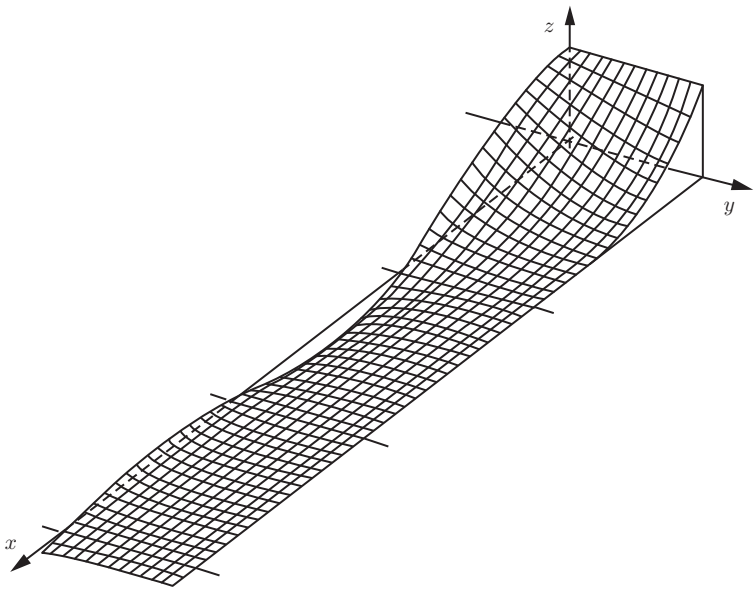


Fig. 14.10

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, si $y > 0$, on a que pour tout $x \geqslant 1 : |e^{-xy} h(x)| \leqslant 1/(yx^2)$; ce qui implique (§ 10.2.4 et 10.2.7) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

converge. D'autre part, on sait (§ 10.2.8) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x,0)\,\mathrm{d}x$$

converge. De plus, en intégrant par parties, on obtient que pour tout $y \in [\,0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_{2/\epsilon}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_{2/\epsilon}^{+\infty} e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ &= -e^{-xy}\frac{\cos x}{x}\Big|_{2/\epsilon}^{+\infty} - \int_{2/\epsilon}^{+\infty} \frac{(1+xy)e^{-xy}}{x^2}\cos x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ce qui donne, puisque pour tout $t \geqslant 0 :\ 1+t \leqslant e^t$, que

$$\left|\int_{2/\epsilon}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \int_{2/\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \epsilon.$$

On a ainsi démontré que f vérifie les hypothèses du paragraphe 14.3.22 ; ce qui nous permet de conclure que la fonction $g : [\,0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,h(x)\,\mathrm{d}x$$

est continue.

14.4 Théorème de prolongement

14.4.1 Prolongement des fonctions uniformément continues
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur E. Alors, il existe une unique fonction continue $g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E. De plus, g est uniformément continue sur $\bar{E}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E (§ 13.3.15) qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, la continuité uniforme de f sur E implique l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E vérifiant $||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|| \leqslant \delta : |f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})| \leqslant \epsilon$. D'autre part, puisque $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$: $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l|| \leqslant \delta$. Par conséquent, pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$, on a : $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}_l)| \leqslant \epsilon$. Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut affirmer que $(f(\boldsymbol{x}_k))$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Posons $\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{x})$ et montrons que cette limite est indépendante du choix de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$. En

effet, soit $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ deux suites d'éléments de E qui convergent vers $\boldsymbol{x}$, et soit $(\boldsymbol{c}_k)$ la suite définie par

$$\boldsymbol{c}_k = \begin{cases} \boldsymbol{a}_k & \text{si } k \text{ est pair} \\ \boldsymbol{b}_k & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par construction, $(\boldsymbol{c}_k)$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Ainsi, d'après ce qui précède, les trois suites numériques $(f(\boldsymbol{a}_k)), (f(\boldsymbol{b}_k))$ et $(f(\boldsymbol{c}_k))$ sont convergentes ; ce qui nous permet d'écrire, entre autres, que

$$\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_{2k}) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{c}_{2k}) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{c}_k)$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_{2k+1}) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{c}_{2k+1}) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{c}_k).$$

D'où

$$\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k).$$

Montrons à présent que g est uniformément continue sur $\bar{E}$. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Puisque f est uniformément continue sur E, on sait qu'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ et $||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|| \leqslant \beta$ impliquent $|f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})| \leqslant \epsilon$. Posons $\delta = \beta/3$, et soit $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ deux éléments quelconques de $\bar{E}$ vérifiant l'inégalité $||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|| \leqslant \delta$. Alors, il existe deux suites $(\boldsymbol{y}_k)$ et $(\boldsymbol{z}_k)$ d'éléments de E qui convergent respectivement vers $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$; ce qui entraîne l'existence d'un entier $k_1 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_1$:

$$||\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}|| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad ||\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}|| \leqslant \delta.$$

Ainsi, en constatant que pour tout entier $k \geqslant k_1$:

$$||\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{z}_k|| \leqslant ||\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|| + ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k|| \leqslant \beta,$$

on peut écrire que pour tout $k \geqslant k_1$:

$$|f(\boldsymbol{y}_k) - f(\boldsymbol{z}_k)| \leqslant \epsilon$$

ou encore, par passage à la limite, que

$$|g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{z})| \leqslant \epsilon.$$

Pour finir, montrons l'unicité de la fonction g. Dans ce but, supposons que $h : \bar{E} \to R$ soit une fonction continue qui coïncide avec f dans E, et soit $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de $\bar{E}$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N} : g(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_k) = h(\boldsymbol{x}_k)$, on obtient, grâce à la continuité des deux fonctions g et h sur $\bar{E}$, que

$$g(\boldsymbol{x}) = \lim_{k\to+\infty} g(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to+\infty} h(\boldsymbol{x}_k) = h(\boldsymbol{x}).$$

D'où l'unicité de la fonction g. ■

14.4.2 Distance d'un point à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors, le nombre réel positif ou nul $d(\boldsymbol{x}, E)$ défini par

$$d(\boldsymbol{x}, E) = \inf\{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| : \boldsymbol{y} \in E\}$$

est appelé la *distance du point* $\boldsymbol{x}$ *au sous-ensemble* E.

14.4.3 Propriétés

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors :

- $d(\boldsymbol{x}, E) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$;
- la fonction $d(\cdot, E)$, qui, à tout élément $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$, fait correspondre le nombre réel $d(\boldsymbol{x}, E)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que $d(\boldsymbol{x}, E) = 0$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{y}_k)$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_k|| = 0$; ce qui implique, entre autres, que la suite $(\boldsymbol{y}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$. Par conséquent $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$ (§ 13.3.15). Réciproquement, si $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{k \to +\infty} ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k|| = 0$. De ce résultat on déduit immédiatement que $d(\boldsymbol{x}, E) = 0$.

Montrons à présent que la fonction $d(\cdot, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. Puisque, pour tout $\boldsymbol{z} \in E$:

$$d(\boldsymbol{x}, E) \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}||,$$

on peut écrire que

$$d(\boldsymbol{x}, E) \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + d(\boldsymbol{y}, E)$$

ou encore

$$d(\boldsymbol{x}, E) - d(\boldsymbol{y}, E) \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||.$$

De même, on montre que

$$d(\boldsymbol{y}, E) - d(\boldsymbol{x}, E) \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||.$$

D'où

$$|d(\boldsymbol{x}, E) - d(\boldsymbol{y}, E)| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||.$$

■

14.4.4 Théorème de Tietze-Urysohn

Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue pour laquelle il existe deux nombres réels α et β tels que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$: $\alpha \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant \beta$. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E et telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \alpha \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant \beta$.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, faisons les hypothèses supplémentaires que $a < \beta$ et que $E \neq \mathbb{R}^n$ (pour $\alpha = \beta$ ou pour $E = \mathbb{R}^n$, le théorème est évident), et soit $f_1 : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\beta - \alpha}(f(\boldsymbol{x}) - 2\alpha + \beta).$$

Cette fonction est continue et, de plus, pour tout $\boldsymbol{x} \in E : 1 \leqslant f_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 2$. Montrons à présent que la fonction $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{x} \in E \\ \dfrac{\inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| : \boldsymbol{y} \in E\}}{d(\boldsymbol{x}, E)} & \text{si } \boldsymbol{x} \in \complement E \end{cases}$$

est continue ; ce qui revient ici à démontrer que g_1 est continue en chaque point de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. Si $\boldsymbol{x}_0 \in \mathring{E}$, la continuité de la fonction f_1 sur E entraîne celle de la fonction g_1 au point $\boldsymbol{x}_0$. Supposons maintenant que $\boldsymbol{x}_0 \in \complement E$. Puisque la fonction $d(\cdot, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur l'ouvert $\complement E$ (§ 14.4.3), il nous suffit de vérifier que la fonction $h : \complement E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(\boldsymbol{x}) = \inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| : \boldsymbol{y} \in E\}$$

est continue au point $\boldsymbol{x}_0$. Pour $\epsilon > 0$, soit en effet $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'inégalité $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \leqslant \frac{1}{2} \min\{d(\boldsymbol{x}_0, E), \epsilon\}$. Alors $\boldsymbol{x} \in \complement E$ et, pour tout $\boldsymbol{y} \in E$, on obtient que

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}_0) &\leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\| \leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot (\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|) \\ &\leqslant 2\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}\| + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \epsilon + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}) &\leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot (\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| + \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\|) \\ &\leqslant 2\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\| \leqslant \epsilon + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}\| ; \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$h(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \epsilon + h(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad h(\boldsymbol{x}) \leqslant \epsilon + h(\boldsymbol{x}_0)$$

ou encore

$$|h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon.$$

Enfin, supposons que $\boldsymbol{x}_0 \in \partial E$. Puisque f_1 est une fonction continue sur E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$:

$$|g_1(\boldsymbol{x}) - g_1(\boldsymbol{x}_0)| = |f_1(\boldsymbol{x}) - f_1(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon.$$

Posons $E_1 = E \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ et $E_2 = E \cap \complement E_1$, et soit $\boldsymbol{z}$ un élément quelconque de $\complement E$ vérifiant l'inégalité $||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}_0|| \leqslant \delta/4$. Alors, en constatant que pour $\boldsymbol{y} \in E_2$ (§ 13.1.3) :

$$||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|| \geqslant ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0|| - ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{z}|| \geqslant \frac{3\delta}{4},$$

on obtient que

$$\inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|| \ : \ \boldsymbol{y} \in E_2\} \geqslant \frac{3\delta}{4} ;$$

ce qui implique, du fait que $f_1(\boldsymbol{x}_0) \cdot ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{z}|| \leqslant 2||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{z}|| \leqslant \delta/2$, que

$$\inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|| : \boldsymbol{y} \in E\} = \inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|| \ : \ \boldsymbol{y} \in E_1\}.$$

Par suite, puisque pour tout $\boldsymbol{y} \in E_1$:

$$f_1(\boldsymbol{x}_0) - \epsilon \leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \leqslant f_1(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon$$

et

$$d(\boldsymbol{z}, E) = d(\boldsymbol{z}, E_1),$$

on peut écrire que

$$(f_1(\boldsymbol{x}_0) - \epsilon) d(\boldsymbol{z}, E) \leqslant \inf\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}|| \ : \boldsymbol{y} \in E\} \leqslant (f_1(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon) d(\boldsymbol{z}, E)$$

ou encore

$$|g_1(\boldsymbol{z}) - g_1(\boldsymbol{x}_0)| \;=\; |g_1(\boldsymbol{z}) - f_1(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon.$$

Ainsi s'achève la démonstration de la continuité de la fonction g_1 sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons à présent la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(\boldsymbol{x}) = (\beta - \alpha)g_1(\boldsymbol{x}) + 2\alpha - \beta.$$

La continuité de la fonction g_1 sur $\mathbb{R}^n$ et le fait que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $1 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 2$, nous permettent d'affirmer que g est une fonction qui vérifie les conclusions du théorème de Tietze-Urysohn. ■

14.4.5 Corollaire

Soit A et B deux sous-ensembles fermés non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

- pour tout $\boldsymbol{x} \in A : g(\boldsymbol{x}) = 0$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in B : g(\boldsymbol{x}) = 1$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Posons $E = A \cup B$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \in A \\ 1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in B. \end{cases}$$

Puisque E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Tietze-Urysohn nous assure l'existence d'une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E et telle que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$. ■

14.5 Exercices

14.5.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.

2) Peut-on déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

14.5.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x} \cos\dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ et $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ n'existent pas, mais que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

14.5.3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1)$ est continue.

14.5.4 Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14.5.5 Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2xy}{x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

14.5.6 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

soit continue au point $(0,0)$?

14.5.7 Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel α de sorte que la fonction $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ ou } x = y = 0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}\, e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & \text{si } x > y \\ \alpha & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

soit continue.

14.5.8 Déterminer l'application $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f :]0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y \cot(y\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0,1] \text{ et } y \in [-1,0[\cup]0,1] \\ g(x) & \text{si } x \in]0,1] \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

soit continue.

14.5.9 Montrer que

$$\lim_{y \to +\infty} \int_0^1 2\,xy\,e^{-x^2 y}\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \left(\lim_{y \to +\infty} 2\,xy\,e^{-x^2 y} \right) \mathrm{d}x.$$

14.5.10 Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

14.5.11 Soit $f, g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que si elles coïncident sur E, elles coïncident sur $\bar{E}$.

14.5.12 Soit $f, g : \bar{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$: $f(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$. Montrer que cette inégalité reste vraie sur $\bar{E}$.

14.5.13 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et

$$f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{R}$$

une fonction dont la restriction à chaque A_i est continue. Montrer que f est continue.

14.5.14 Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et

$$f : \bigcup_{i\in I} B_i \to \mathbb{R}$$

une fonction dont la restriction à chaque B_i est continue. Peut-on conclure que f est continue ?

14.5.15 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \in I\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

14.5.16 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \in I\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

14.5.17 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout nombre réel α, les deux sous-ensembles $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) < \alpha\}$ et $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) > \alpha\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue.

14.5.18 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.

14.5.19 Soit E un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas. Montrer que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E : $f(\boldsymbol{a})f(\boldsymbol{b}) > 0$.

14.5.20 Soit E un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que s'il existe deux éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E pour lesquels $f(\boldsymbol{a})f(\boldsymbol{b}) \leqslant 0$, la fonction f s'annule au moins une fois dans E.

14.5.21 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré zéro (§ 15.1.21). Montrer que si f est continue au point $(0, \ldots, 0)$ alors elle est constante.

14.5.22 Soit A et B deux sous-ensembles fermés non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$. Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes : $f(\boldsymbol{x}) = -1$ si $\boldsymbol{x} \in A$, $f(\boldsymbol{x}) = 1$ si $\boldsymbol{x} \in B$ et $-1 < f(\boldsymbol{x}) < 1$ si $\boldsymbol{x} \in \complement A \cap \complement B$.

Chapitre 15

Dérivées partielles

15.1 Définitions et propriétés

15.1.1 Définition d'une dérivée partielle

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $E \subset \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit encore la fonction d'une variable

$$f_i : \{x \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E\} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$f_i(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Si f_i est définie au voisinage de x_i et admet une dérivée en x_i, on dit que la fonction f admet une *dérivée partielle par rapport à* x_i au point $(x_1, \ldots, x_n)$ et on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = f_i'(x_i)$$

ou encore

$$f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = f_i'(x_i).$$

Ainsi, par définition,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) &= f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \lim_{x \to x_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{x - x_i}. \end{aligned}$$

Voir la figure 15.1, où la notation (x_1, x_2) est remplacée par (x, y).

15.1.2 Remarque

Une dérivée partielle peut se calculer au moyen des techniques déjà vues à la section 6.1 pour les dérivées des fonctions réelles d'une variable réelle ; pour cela, il suffit de considérer comme constantes les variables autres que celle par rapport à laquelle on dérive.

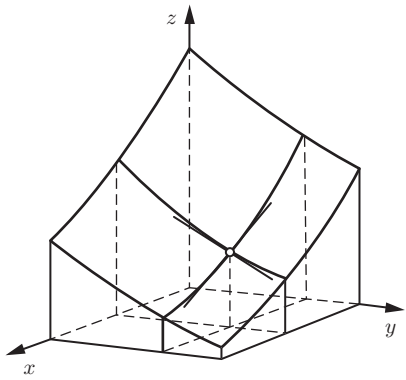


Fig. 15.1

15.1.3 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors, pour tout élément $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

15.1.4 Remarque

Nous avons vu au paragraphe 14.2.9 que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue au point $(0,0)$. Cependant, elle admet des dérivées partielles en ce point, à savoir $\partial f/\partial x\,(0,0) = \partial f/\partial y\,(0,0) = 0$. Cet exemple nous montre qu'une fonction peut très bien posséder des dérivées partielles en un point, sans pour autant être continue en ce point. Par contre, si une fonction a toutes ses dérivées partielles continues en un point, alors elle est continue en ce point (§ 15.1.6).

15.1.5 Fonction dérivée partielle

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que sa dérivée partielle par rapport à x_i existe en tout point de E. Alors, l'application de E dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E fait correspondre le nombre réel $\partial f/\partial x_i\,(x_1, \ldots, x_n)$, est appelée la *dérivée partielle* de f par rapport à x_i et se note $\partial f/\partial x_i$ ou encore f'_{x_i}.

15.1.6 Condition suffisante pour qu'une fonction soit continue en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les n fonctions

$$\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n : E \to \mathbb{R}$$

existent et soient continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Alors f est aussi continue en ce point.

DÉMONSTRATION. D'après la remarque finale du paragraphe 14.3.13, le point $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E car les dérivées partielles sont supposées continues en $\boldsymbol{a}$. Puisque $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset E$. Ainsi, grâce au théorème des accroissements finis (§ 6.2.12), à tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $B(\boldsymbol{a}, \delta)$, on peut associer n éléments $\theta_1, \ldots, \theta_n$ de $]0, 1[$ tels que

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \Big(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \Big) \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i(x_i - a_i), x_{i+1}, \ldots, x_n \Big) \cdot (x_i - a_i)\,; \end{aligned}$$

ce qui entraîne, du fait de la continuité des n fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ au point $(a_1, \ldots, a_n)$, que $\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n).} f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$. Autrement dit, la fonction f est continue au point $(a_1, \ldots, a_n)$. ■

15.1.7 Fonction de classe C^1

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^1 si les n fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n : E \to \mathbb{R}$ existent et sont continues.

Toute fonction de classe C^1 est continue (§ 15.1.6).

15.1.8 Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

Soit $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle ouvert et $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la dérivée partielle par rapport à la seconde variable existe et est continue sur $[a, b] \times I$. Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $y \in I$, on a :

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in I$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, I étant un intervalle ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que

$$[y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset I.$$

Puisque $\partial f/\partial y$ est uniformément continue sur $[a, b] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ (§ 14.3.18), il existe un nombre $0 < \delta < \beta$ tel que pour tout $(x, z) \in [a, b] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{b - a}.$$

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis (§ 6.2.12), on sait qu'à tout élément $(x, y) \in [a, b] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ on peut associer un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y_0 + \theta(y - y_0)) \cdot (y - y_0).$$

Ainsi, pour tout $y \in I$ vérifiant $0 < |y - y_0| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad = \left|\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right|\mathrm{d}x \leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $y_0 \in I$ et tout nombre réel $\epsilon > 0$, il nous permet de conclure que la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est différentiable sur I et que pour tout $y \in I$:

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Pour finir, remarquons que la continuité de la fonction $g' : I \to \mathbb{R}$ découle de celle de la fonction $\partial f/\partial y : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ (§ 14.3.20). ■

15.1.9 Exemple

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(y) = \left(\int_0^y e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right)^2 \quad \text{et} \quad g(y) = \int_0^1 \frac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$$

(pour g, voir la figure 15.2).

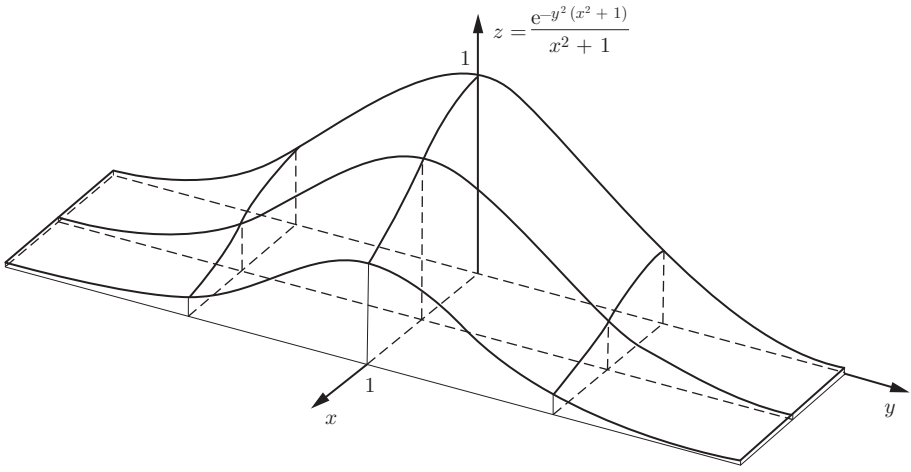


Fig. 15.2

Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$f'(y) = 2e^{-y^2} \int_0^y e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

et (§ 15.1.8)

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^1 \frac{e^{-y^2(x^2+1)}(-2y(x^2+1))}{x^2+1}\mathrm{d}x = -2e^{-y^2} \int_0^1 y e^{-(yx)^2}\mathrm{d}x \\ &= -2e^{-y^2} \int_0^y e^{-z^2}\mathrm{d}z = -2e^{-y^2} \int_0^y e^{-x^2}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

on obtient que

$$f'(y) + g'(y) = 0$$

ou encore

$$f(y) + g(y) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, en constatant que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$0 \leqslant g(y) = e^{-y^2} \int_0^1 \frac{e^{-(xy)^2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant e^{-y^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} e^{-y^2},$$

on peut conclure, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$ et donc que $\lim_{y\to+\infty} f(y) = \pi/4$; ce qui entraîne que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

15.1.10 Exemple
Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x.$$

Par le paragraphe 15.1.8, g est continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $y \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y\cos^2 x}{y^2\cos^2 x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{z=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2y}{y^2+z^2}\,\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2y}{1-y^2}\left(\frac{1}{z^2+y^2} - \frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{2y}{1-y^2} \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\arctan(z/y) - \arctan(z)\right) \\ &= \frac{\pi}{1+y}. \end{aligned}$$

La continuité de g' en $y = 1$ assure que $g'(1) = \pi/2$. On obtient

$$g(y) = g(y) - g(1) = \int_1^y \frac{\pi}{1+t}\,\mathrm{d}t = \pi\ln\left(\frac{1+y}{2}\right),$$

ce qui entraîne

$$\lim_{y\to 0+} g(y) = -\pi\ln 2.$$

D'autre part, comme l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{\pi/2} \ln \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

converge et que pour tout $y \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant g(y) - \int_{0+}^{\pi/2} \ln \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int_{0+}^{\pi/2} \ln(1 + y^2 \cot^2 x \,) \mathrm{d}x \\
&= y \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+z^2)}{y^2+z^2} \mathrm{d}z \quad (\text{avec } z = y \cot x) \\
&\leqslant y \int_0^1 \frac{z^2}{y^2+z^2} \mathrm{d}z + y \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2z^2)}{z^2} \mathrm{d}z \\
&\leqslant y \int_0^1 \mathrm{d}z + y \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2) + 2\ln(z)}{z^2} \mathrm{d}z \\
&= y + y \lim_{w \to +\infty} \left(-\frac{\ln 2}{z} - 2\frac{\ln(z)+1}{z} \right) \Bigg|_1^w \\
&= y + y(2 + \ln 2),
\end{aligned}$$

on peut aussi écrire (§ 5.2.12) que

$$\lim_{y \to 0+} g(y) = \int_{0+}^{\pi/2} \ln \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

D'où

$$\int_{0+}^{\pi/2} \ln \, \sin x \, \mathrm{d}x = -\pi \ln \sqrt{2}.$$

De ce résultat, on déduit immédiatement la valeur des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2-} \ln \, \cos \, x \, \mathrm{d}x = -\pi \ln \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \int_{0+}^{\pi/2-} \ln \tan x \, \mathrm{d}x = 0.$$

15.1.11 Lemme
Soit a un nombre réel, I un intervalle ouvert et $h : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} h(x, y) \, \mathrm{d}x$$

converge ;

- à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha > a$ (indépendant de y) tel que les relations $t \geqslant \alpha$ et $y \in I$ impliquent

$$\left| \int_t^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon.$$

Alors, la fonction $H : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(y) = \int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue et, de plus, pour tout couple d'éléments y_1, y_2 de I, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^t h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. La continuité de la fonction $H : I \to \mathbb{R}$ découle immédiatement des propriétés de la fonction h (§ 14.3.22). Ce résultat nous permet, en outre, de considérer l'intégrale

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

où y_1 et y_2 sont deux éléments quelconques de I.

Pour démontrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^t h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

il suffit de constater que pour tout $t > a$

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^t h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right| \leqslant \left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \int_t^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x \right| dy \right|$$

et d'utiliser la deuxième propriété que vérifie la fonction h. ■

15.1.12 Dérivée d'une intégrale généralisée qui dépend d'un paramètre

Soit a un nombre réel, I un intervalle ouvert et $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f admet une dérivée partielle par rapport à y continue sur $[a, +\infty[\times I$;
- pour tout $y \in I$, les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

convergent ;

- à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha > a$ (indépendant de y) tel que les relations $t \geqslant \alpha$ et $y \in I$ impliquent

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon.$$

Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $y \in I$, on a :

$$g'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit $F :]a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

et t_0 un élément quelconque de $]a, +\infty[$. Ainsi, grâce à la première propriété que vérifie f, on sait (§ 15.1.8) que pour tout $y \in I$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, y) = \int_a^{t_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Soit $c \in I$. Puisque la fonction $\partial F/\partial y\,(t_0, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ est continue (§ 14.3.20), on déduit du théorème fondamental du calcul intégral (§ 9.1.15) que pour tout $y \in I$:

$$F(t_0, y) - F(t_0, c) = \int_c^y \frac{\partial F}{\partial y}(t_0, s)\, \mathrm{d}s$$

ou encore

$$F(t_0, y) = \int_a^{t_0} f(x, c)\, \mathrm{d}x + \int_c^y \left(\int_a^{t_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.$$

Ce résultat étant valable quel que soit $t_0 \in]a, +\infty[$, on peut écrire que pour tout $(t, y) \in]a, +\infty[\times I$:

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, c)\, \mathrm{d}x + \int_c^y \left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, s) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.$$

Par suite, du fait que la fonction $\partial f/\partial y : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses du lemme 15.1.11, on obtient que la fonction $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{g}(s) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\, \mathrm{d}x$$

est continue et que pour tout $y \in I$:

$$g(y) = \lim_{t \to +\infty} F(t,y) = \int_a^{+\infty} f(x,c)\,\mathrm{d}x + \int_c^y \tilde{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$: $g'(y) = \tilde{g}(y)$. D'où le résultat. ■

15.1.13 Exemple
Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On sait (§ 14.3.23) que la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} h(x)\,\mathrm{d}x$$

est continue. De plus, en constatant que pour tout $(x,y) \in [1, +\infty[\times]0, +\infty[$

$$|e^{-xy} \sin x| \leqslant e^{-xy} \leqslant \frac{2}{x^2 y^2},$$

on obtient (voir § 10.2.4 et 10.2.7) que, quel que soit $y \in]0, +\infty[$, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} -e^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x$$

converge. Par suite, puisque pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ et tout $w \in]0, +\infty[$, les relations $t \geqslant 8/(\epsilon w^2)$ et $y > w/2$ impliquent

$$\left| \int_t^{+\infty} -e^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_t^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{2}{x^2 y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{ty^2} \leqslant 2(\epsilon w^2/8)(4/w^2) = \epsilon,$$

on peut affirmer (§ 15.1.12) que pour tout $y \in]0, +\infty[$

$$g'(y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+y^2}$$

car la fonction

$$x \to \frac{1}{1+y^2} \left(e^{-xy} \cos x + y e^{-xy} \sin x \right)$$

est une primitive de la fonction $x \to -e^{-xy} \sin x$.

Ainsi, grâce à la continuité de la fonction g sur $[0, +\infty[$, on a que pour tout $y \in [0, +\infty[$:

$$g(y) = c - \arctan y$$

où c est une constante. Calculons à présent cette constante. D'une part,

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = \lim_{y \to +\infty} (c - \arctan y) = c - \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, pour tout $y \in]0, +\infty[$

$$|g(y)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-xy} h(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y};$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = 0.$$

De ces deux résultats, on déduit que $c = \pi/2$. Par conséquent

$$g(0) = \int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

15.1.14 Dérivées partielles d'une fonction composée

D'une part, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et

$$g_1, \ldots, g_p : A \to \mathbb{R}$$

p fonctions continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ telles que pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, les p fonctions

$$\partial g_1/\partial y_i, \ldots, \partial g_p/\partial y_i : A \to \mathbb{R}$$

existent. D'autre part, soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ contenant

$$\Big\{ \Big(g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_p(\boldsymbol{y}) \Big) : \boldsymbol{y} \in A \Big\}$$

et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant p$ une dérivée partielle $\partial f/\partial x_j : B \to \mathbb{R}$ qui soit continue au point $\boldsymbol{b} = (g_1(a), \ldots, g_p(a))$. Alors, pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $F : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y_1, \ldots, y_n) = f(x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_p = g_p(y_1, \ldots, y_n))$$

possède une dérivée partielle par rapport à y_i au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et, de plus, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(g_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, g_p(a_1, \ldots, a_n)\big) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(a_1, \ldots, a_n) \right).$$

Remarque. Ce résultat reste valable pour $p = 1$ ou $n = 1$ pourvu que, là où c'est nécessaire, les dérivées partielles soient remplacées par des dérivées de fonctions d'une variable réelle. Voir en particulier le corollaire 15.1.15.

DÉMONSTRATION. Comme $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur à A et $\boldsymbol{b}$ un point intérieur à B, on sait qu'il existe deux nombres réels positifs α et β tels que $B(\boldsymbol{a},\alpha)\subset A$ et $B(\boldsymbol{b},\beta)\subset B$. Par suite, puisque les p fonctions $g_1,\dots g_p$ sont toutes continues au point $\boldsymbol{a}$, il existe p éléments $\delta_1,\dots,\delta_p$ de $]0,\alpha[$ tels que pour tout entier $1\leqslant k\leqslant p$ et tout $\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{a},\delta_k)$: $|g_k(\boldsymbol{z})-g_k(\boldsymbol{a})|\leqslant \beta/(2\sqrt{p})$. Ainsi, en posant $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_p\}$, on obtient que

$$\{(g_1(\boldsymbol{z}),\dots,g_p(\boldsymbol{z})) : \boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{a},\delta)\}\subset B(\boldsymbol{b},\beta).$$

À présent, fixons-nous arbitrairement un entier i compris entre 1 et p. Alors, grâce au théorème des accroissements finis (§ 6.2.12), à tout $y\in]a_i-\delta,a_i+\delta[$, on peut associer p éléments $\theta_1,\dots,\theta_p$ de $]0,1[$ tels que, en utilisant la notation

$$\bar{\boldsymbol{y}}=(a_1,\dots a_{i-1},y,a_{i+1},\dots a_n),$$

on obtienne

$$\begin{aligned}
F(\bar{\boldsymbol{y}})-F(\boldsymbol{a}) &= f\big(g_1(\bar{\boldsymbol{y}}),\dots g_p(\bar{\boldsymbol{y}})\big)-f\big(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_p(\boldsymbol{a})\big)\\
&=\sum_{j=1}^{p}\Big(f\Big(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_{j-1}(\boldsymbol{a}),g_j(\bar{\boldsymbol{y}}),\dots,g_p(\bar{\boldsymbol{y}})\Big)\\
&\qquad\qquad -f\Big(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_j(\boldsymbol{a}),g_{j+1}(\bar{\boldsymbol{y}}),\dots,g_p(\bar{\boldsymbol{y}})\Big)\Big)\\
&=\sum_{j=1}^{p}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_{j-1}(\boldsymbol{a}),g_j(\boldsymbol{a})+\theta_j\big(g_j(\bar{\boldsymbol{y}})-g_j(\boldsymbol{a})\big),\\
&\qquad\qquad g_{j+1}(\bar{\boldsymbol{y}}),\dots,g_p(\bar{\boldsymbol{y}})\Big)\cdot\big(g_j(\bar{\boldsymbol{y}})-g_j(\boldsymbol{a})\big)\Big);
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, du fait de la continuité des fonctions $g_1,\dots,g_p$ au point $\boldsymbol{a}$ et des fonctions $\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_p$ au point $\boldsymbol{b}=(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_p(\boldsymbol{a}))$, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{y\to a_i}\frac{F(\bar{\boldsymbol{y}})-F(\boldsymbol{a})}{y-a_i}\\
&=\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(g_1(\boldsymbol{a}),\dots,g_p(\boldsymbol{a})\big)\cdot\frac{\partial g_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{a})\right).
\end{aligned}$$

■

15.1.15 Corollaire

D'une part, soit I un intervalle ouvert et

$$g_1,\dots,g_p : I\to\mathbb{R}$$

p fonctions continûment différentiables sur I. D'autre part, soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $\{(g_1(t),\dots,g_p(t)) : t\in I\}$ et $f : E\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, la fonction $F : I\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(t)=f(x_1=g_1(t),\dots,x_p=g_p(t))$$

est continûment différentiable sur I, de plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(g_1(t), \ldots, g_p(t)\big) \cdot g_j'(t) \right).$$

Voir la figure 15.3.

Notation. La dérivée $g_j'(t)$ est notée aussi

$$\boxed{g_j'(t) = \frac{\mathrm{d}g_j}{\mathrm{d}t}(t).}$$

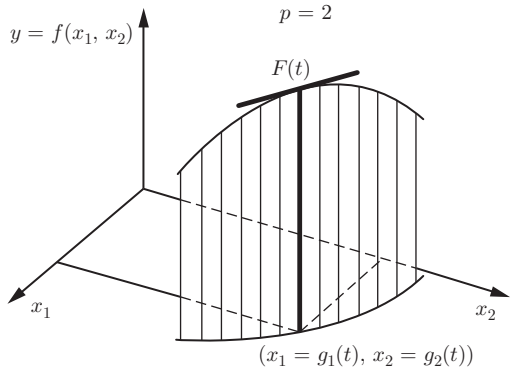


Fig. 15.3

15.1.16 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 15.1.14, on ne suppose pas que les fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_p$ sont toutes continues au point $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a}))$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$F(t) = f(x = t, y = t) = \frac{t}{2},$$

on vérifie facilement, puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

que les deux fonctions $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne sont pas continues au point (0,0) et que

$$F'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0).$$

15.1.17 Exemple

On se propose de trouver toutes les fonctions

$$f : E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$$

de classe C^1 qui, sur E, vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf(x,y)$$

où k est une constante. Pour cela, supposons que f soit une telle fonction et considérons les deux fonctions auxiliaires $g_1, g_2 :]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g_1(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{et} \quad g_2(r,\theta) = r\sin\theta.$$

Alors, si $F :]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$F(r,\theta) = f(x = g_1(r,\theta), y = g_2(r,\theta)),$$

on obtient (§ 15.1.14) que pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta))\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta))\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &\quad + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = kF(r,\theta)\,; \end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à θ (§ 12.3.2), que

$$F(r,\theta) = h(r)e^{k\theta}$$

où $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $]0,+\infty[$. De plus, la continuité de la fonction $\partial f/\partial x$ entraîne celle de la fonction h' car pour tout $r \in]0,+\infty[$:

$$h'(r) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(r,0).$$

Par conséquent, toutes les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})e^{k\arctan(y/x)} \quad \text{avec} \quad h \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).$$

15.1.18 Lemme

Soit I_1, I_2 deux intervalles ouverts et $h : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si $a \in I_1$, la fonction $g : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r,s) = \int_a^r h(x,s)\,\mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif et (r_0, s_0) un élément quelconque de $I_1 \times I_2$. D'une part, I_1 et I_2 étant deux intervalles ouverts, il existe trois nombres réels positifs α_1, α_2 et α_3 tels que

$$a \in [r_0 - \alpha_1, r_0 + \alpha_2] \subset I_1 \quad \text{et} \quad [s_0 - \alpha_3, s_0 + \alpha_3] \subset I_2\ ;$$

ce qui entraîne, puisque (§ 14.3.18) la fonction h est uniformément continue sur $E = [r_0 - \alpha_1, r_0 - \alpha_2] \times [s_0 - \alpha_3, s_0 - \alpha_3]$, l'existence d'un nombre $0 < \delta_1 < \alpha_3$ tel que pour tout $(x,s) \in [r_0 - \alpha_1, r_0 + \alpha_2] \times [s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$:

$$|h(x,s) - h(x,s_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{2(1 + |r_0 - a|)}.$$

D'autre part, comme h est bornée sur E (§ 14.3.18), il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout $(x,s) \in E$:

$$|h(x,s)| \leqslant M.$$

Ainsi, en posant

$$\delta = \min\left\{\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \frac{\epsilon}{2M}\right\},$$

on obtient que pour tout $(r,s) \in I_1 \times I_2$ vérifiant $\sqrt{(r - r_0)^2 + (s - s_0)^2} \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned} |g(r,s) - g(r_0,s_0)| &= |(g(r,s) - g(r_0,s)) + (g(r_0,s) - g(r_0,s_0))| \\ &\leqslant \left|\int_{r_0}^{r} h(x,s)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{r_0} (h(x,s) - h(x,s_0))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'ou le résultat. ■

15.1.19 Formule générale donnant la dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

D'une part, soit I_1, I_2 deux intervalles ouverts et $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à y qui soit continue. D'autre part, soit I un intervalle ouvert et $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continûment différentiables sur I telles que

$$\{(g(t), h(t), k(t)) : t \in I\} \subset I_1 \times I_1 \times I_2.$$

Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par (fig. 15.4)

$$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, k(t))\,\mathrm{d}x$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$F'(t) = f(g(t), k(t))g'(t) - f(h(t), k(t))h'(t) + k'(t)\int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(t))\,\mathrm{d}x.$$

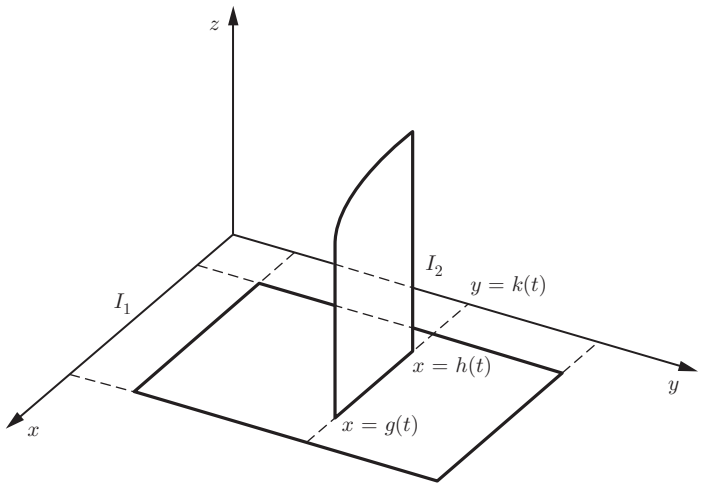


Fig. 15.4

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I_1$ et $G : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$G(r, s) = \int_a^r f(x, s)\,\mathrm{d}x.$$

Alors, pour tout $t \in I$:

$$F(t) = G(r = g(t), s = k(t)) - G(r = h(t), s = k(t)).$$

De plus, puisque pour tout $(r, s) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r, s) = f(r, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial s}(r, s) = \int_a^r \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\,\mathrm{d}x,$$

les deux fonctions $\partial G/\partial r$ et $\partial G/\partial s$ sont continues (lemme 15.1.18). Ainsi, grâce au corollaire 15.1.15, on sait que la fonction F est continûment différentiable sur I et que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial G}{\partial r}(g(t),k(t))g'(t) + \frac{\partial G}{\partial s}(g(t),k(t))k'(t) - \frac{\partial G}{\partial r}(h(t),k(t))h'(t) \\ &\quad - \frac{\partial G}{\partial s}(h(t),k(t))k'(t) \\ &= f(g(t),k(t))g'(t) - f(h(t),k(t))h'(t) + k'(t)\int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,k(t))\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

■

15.1.20 Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}^*, W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $V_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par (fig. 15.5)

$$V_0(t) = \int_0^t W(x)\sin\big(a(t-x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Alors, en remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} V_0'(t) &= W(t)\sin a(t-t) + a\int_0^t W(x)\cos a(t-x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_0^t W(x)\cos a(t-x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_0''(t) &= a\,W(t)\cos a(t-t) - a^2\int_0^t W(x)\sin a(t-x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\,W(t) - a^2 V_0(t), \end{aligned}$$

on obtient que V_0 est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''(t) + a^2 u(t) = a\,W(t).$$

La figure 15.5 donne le graphique de la fonction $(x,t) \to W(x)\sin a(t-x)$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$ et $W(x) = x$.

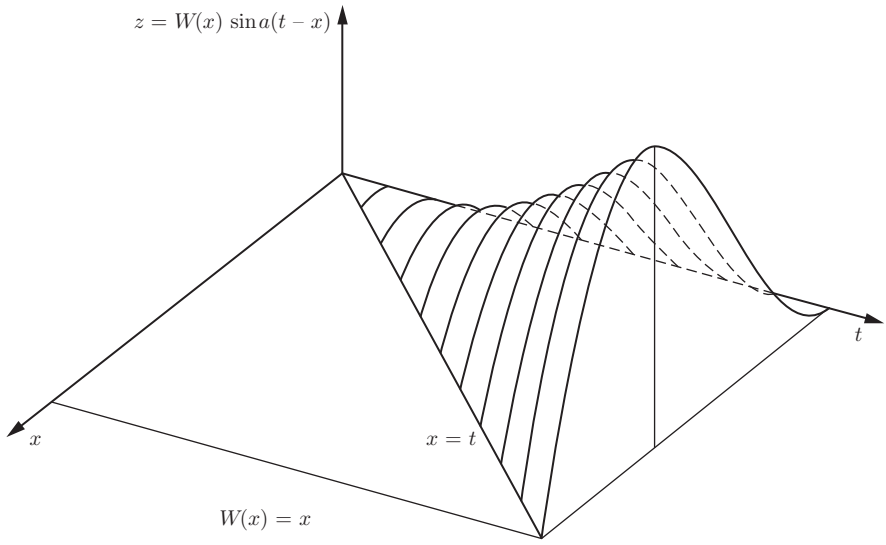


Fig. 15.5

15.1.21 Définition d'une fonction homogène

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *homogène de degré* $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ et tout nombre réel $t > 0$:

$$(tx_1, \ldots, tx_n) \in E \quad \text{et} \quad f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

15.1.22 Propriété des fonctions homogènes

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α admettant une dérivée partielle par rapport à x_i. Alors, la fonction $\partial f/\partial x_i : E \to \mathbb{R}$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

DÉMONSTRATION. Soit t un nombre réel positif quelconque. Puisque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n),$$

on obtient que

$$t\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

■

15.1.23 Théorème d'Euler

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que les relations $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $t \in]0, +\infty[$ impliquent $(tx_1, \ldots, tx_n) \in E$. Alors une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est homogène de degré α si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$:

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

Cette égalité est appelée la *relation d'Euler.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que f soit homogène de degré α et soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un élément quelconque de E. Alors, en désignant par $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = f(ta_1, \ldots, ta_n) = t^\alpha f(a_1, \ldots, a_n),$$

on obtient, grâce au corollaire 15.1.15, que pour tout nombre réel $t > 0$:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(ta_1, \ldots, ta_n)) = \alpha t^{\alpha-1} f(a_1, \ldots, a_n);$$

ce qui donne, en posant $t = 1$, la relation d'Euler.

Réciproquement, supposons que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

et soit $(b_1, \ldots, b_n)$ un élément quelconque de E. Alors, si $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$h(t) = f(tb_1, \ldots, tb_n),$$

on peut écrire, en utilisant à nouveau le corollaire 15.1.15, que pour tout nombre réel $t > 0$:

$$th'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left((tb_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tb_1, \ldots, tb_n) \right) = \alpha h(t);$$

ce qui entraîne (§ 12.3.2) que $h(t) = t^\alpha h(1)$. Comme $h(1) = f(b_1, \ldots, b_n)$, on obtient finalement que pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$f(tb_1, \ldots, tb_n) = t^\alpha f(b_1, \ldots, b_n).$$

■

15.1.24 Exemple

On se propose de trouver toutes les fonctions

$$f : E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$$

qui sont homogènes de degré zéro et de classe C^1. D'après le théorème d'Euler, ce problème revient à déterminer toutes les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui, sur E, vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Pour cela, supposons que f soit une telle fonction. Alors, si

$$F :]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$$

est la fonction définie par

$$F(r, \theta) = f\,(x = r\,\cos\theta, y = r\,\sin\theta)\,,$$

on obtient (§ 15.1.14) que pour tout $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$

$$r\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0\ ;$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à r, que

$$F(r, \theta) = h(\theta)$$

où $h :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. De plus, le fait que f soit de classe C^1 entraîne que h' est continue, car pour tout $\theta \in]-\pi/2,\ \pi/2[$:

$$h'(\theta) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(1, \theta) = -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta,\ \sin\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

Par conséquent, toutes les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x, y) = h\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec} \quad h \in C^1\,(\,]-\pi/2,\ \pi/2[\,, \mathbb{R})\,,$$

ou plus simplement

$$f(x, y) = k\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec} \quad k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

15.2 Dérivées partielles d'ordres supérieurs

15.2.1 Définitions

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à x_i. Si la fonction $\partial f/\partial x_i : E \to \mathbb{R}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à x_j, on aura la fonction $\partial/\partial x_j\,(\partial f/\partial x_i) : E \to \mathbb{R}$ que nous noterons plus simplement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{ou encore} \quad f''_{x_i x_j}.$$

Les fonctions $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j : E \to \mathbb{R}$ sont appelées les *dérivées partielles secondes* (ou d'*ordre 2*) de la fonction *f*.

De proche en proche, on peut définir ainsi, lorsqu'elles existent, les *dérivées partielles d'ordre p* de la fonction *f*. Par exemple, la dérivée partielle d'ordre p de la fonction f par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ (prises dans cet ordre) sera notée

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}} \quad \text{ou encore} \quad f^{(p)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_p}}.$$

Remarque. Lorsqu'elles sont bien définies, les notations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j} \tag{15.1}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_j x_i} \tag{15.2}$$

ont des significations différentes si $i \neq j$. Dans les notations (15.1), on dérive d'abord f par rapport à x_i et ensuite la dérivée partielle obtenue est dérivée par rapport à x_j, alors que, dans les notations (15.2), on dérive d'abord f par rapport à x_j et ensuite la dérivée partielle obtenue est dérivée par rapport à x_i. Au paragraphe 15.2.5, nous verrons que l'ordre de dérivation peut être important et, au paragraphe 15.2.6, nous donnerons une condition qui assure l'égalité $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$.

15.2.2 Fonctions de classe C^p

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p un entier positif. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^p si toutes ses dérivées partielles d'ordre p existent et sont continues.

Une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^∞ si, pour tout entier $p > 0$, elle est de classe C^p.

15.2.3 Propriété des fonctions de classe C^p

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^p, alors toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 à p existent et sont continues. Autrement dit, pour tout entier $0 < k \leqslant p$, la fonction f est de classe C^k. De plus, la fonction f est continue.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la condition suffisante démontrée au paragraphe 15.1.6. ■

15.2.4 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x \sin(xy)$ (fig. 15.6). Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sin xy + xy\cos xy \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2 \cos xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y\cos xy - xy^2 \sin xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) &= 2x\cos xy - x^2 y \sin xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) &= 2x\cos xy - x^2 y \sin xy \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^3 \sin xy.
\end{aligned}$$

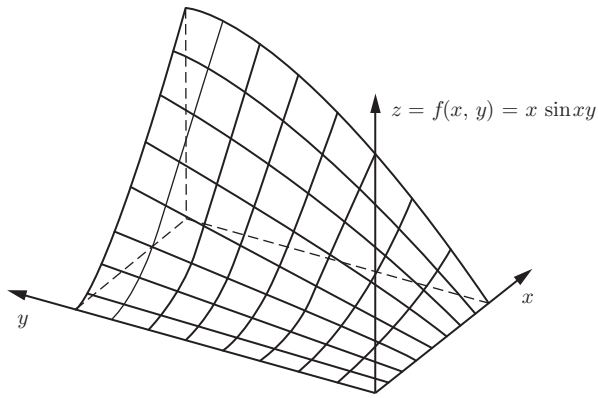


Fig. 15.6

15.2.5 Remarque

De l'exemple 15.2.4, il ne faudrait pas conclure trop hâtivement que l'égalité $\partial^2 f/\partial x \partial y\,(x, y) = \partial^2 f/\partial y \partial x\,(x, y)$ a toujours lieu. Ainsi, pour la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(fig. 15.7), on a $\partial^2 f/\partial x\,\partial y\ (0,0) = 1 \neq 0 = \partial^2 f/\partial y\,\partial x\,(0,0)$. Néanmoins, si les deux fonctions $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ sont continues en $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, alors elles sont égales en ce point. C'est le *théorème de Schwarz.*

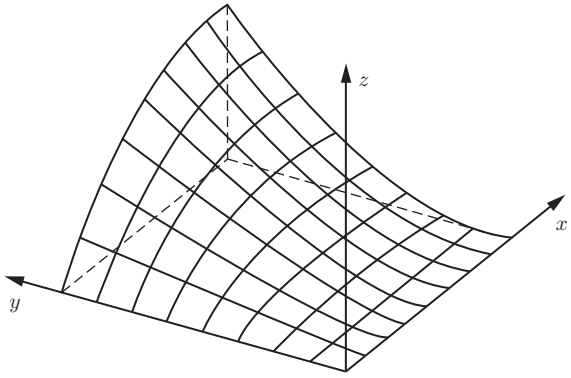


Fig. 15.7

15.2.6 Théorème de Schwarz

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les deux dérivées partielles secondes $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ existent et sont continues au point $\boldsymbol{a}$. Alors on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

DÉMONSTRATION. D'après la remarque finale du paragraphe 14.3.13, le point $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E car les deux dérivées partielles secondes $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ sont continues en $\boldsymbol{a}$ par hypothèse. Nous supposerons que $i \neq j$ et nous commencerons par le cas $n = 2$, $i = 1$ et $j = 2$.

Puisque $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, 2\delta) \subset E$ et toutes les dérivées partielles de f existent jusqu'à l'ordre 2 sur $B(\boldsymbol{a}, 2\delta)$. Soit $v \in]0, \delta[$. Pour $s \in [0, v]$, posons

$$g(s) = f(a_1 + v, a_2 + s) - f(a_1, a_2 + s),$$

ce qui donne

$$g(v) - g(0) = f(a_1 + v, a_2 + v) - f(a_1, a_2 + v) - f(a_1 + v, a_2) + f(a_1, a_2)$$

et

$$g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + v, a_2 + s) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + s)$$

pour tout $s \in]0, v[$.

Le théorème des accroissements finis (§ 6.2.12) appliqué à la fonction

$$t \to \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + t, a_2 + s)$$

et à l'intervalle $[0, v]$ assure qu'il existe $\theta_1 \in]0, v[$ tel que

$$g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + v, a_2 + s) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1, a_2 + s)v.$$

Le nombre $\theta_1 = \theta_1(v, s)$ peut dépendre de v et s.

Le théorème des accroissements finis appliqué ensuite à la fonction g et à l'intervalle $[0, v]$ assure qu'il existe $\theta_2 \in]0, v[$ tel que

$$g(v) - g(0) = g'(\theta_2)v = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1, a_2 + \theta_2)v^2,$$

où $\theta_1 = \theta_1(v, \theta_2)$.

En inversant les rôles de la première et seconde composante, posons pour $s \in [0, v]$

$$h(s) = f(a_1 + s, a_2 + v) - f(a_1 + s, a_2),$$

ce qui donne

$$h(v) - h(0) = f(a_1 + v, a_2 + v) - f(a_1 + v, a_2) - f(a_1, a_2 + v) + f(a_1, a_2).$$

On montre de même qu'il existe θ_3 et θ_4 dans $]0, v[$ tels que

$$h(v) - h(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_3, a_2 + \theta_4)v^2.$$

Comme

$$g(v)-g(0) = f(a_1+v, a_2+v)-f(a_1, a_2+v)-f(a_1+v, a_2)+f(a_1, a_2) = h(v)-h(0),$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1, a_2 + \theta_2)v^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_3, a_2 + \theta_4)v^2$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1, a_2 + \theta_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_3, a_2 + \theta_4).$$

En considérant des valeurs de v arbitrairement proches de 0, la continuité des deux dérivées partielles secondes $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$ et $\partial^2 f/\partial x_2 \partial x_1$ en (a_1, a_2) permet de conclure que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2).$$

Si $n \geqslant 3$ et $i \neq j$, on applique le même argument à la fonction $(x, y) \to F(x, y)$ que l'on obtient de f en fixant les valeurs des variables x_k à a_k pour $k \notin \{i, j\}$ et en posant $x_i = x$ et $x_j = y$. ■

15.2.7 Corollaire

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p et k un entier compris entre 1 et p. Si deux k-tuples ordonnés $(i_1, \cdots, i_k)$ et $(j_1, \cdots, j_k)$ sont égaux à une permutation près alors, pour tout élément $a = (a_1 \ldots, a_n)$ de E, on peut écrire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a_1, \cdots, a_n) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a_1, \cdots, a_n).$$

15.2.8 Exemple : équation d'onde

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

où a est une constante positive. Pour cela, supposons que f soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u, v) = f\left(x = \frac{u - v}{2a}, y = \frac{u + v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v) =& \frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{2a} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right)\right) \\ =& \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right) - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2}\right)\right) = 0\,;\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à v et ensuite par rapport à u, que

$$F(u, v) = g(u) + h(v)$$

où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x, y) = g(ax + y) + h(-ax + y) \text{ avec } g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

La figure 15.8 illustre le cas $g = 0$ et $a = 1$.

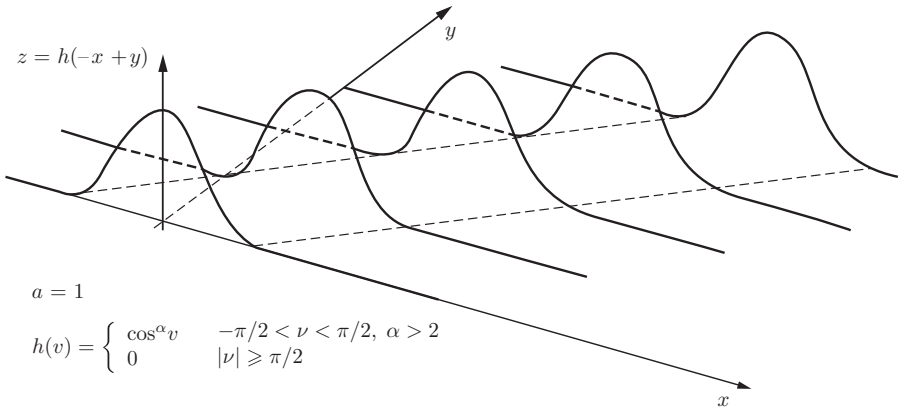


Fig. 15.8

15.2.9 Fonctions de classe C^p sur un sous-ensemble

Soit A un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^p sur A si sa restriction à A est de classe C^p.

15.2.10 Fonctions de classe C^p au voisinage d'un point

Soit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^p au voisinage de $\boldsymbol{a}$ s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset E$ et f est de classe C^p sur $B(\boldsymbol{a}, \delta)$.

15.2.11 Formule de Taylor

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+1} au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1 \ldots, a_n)$. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, 2\delta) \subset E$ et, à tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1 \ldots, x_n)$ de $B(\boldsymbol{a}, \delta)$, on peut associer un nombre $0 < \theta < 1$ de sorte que l'on ait l'égalité suivante (dite formule de Taylor) :

$$f(x) = F(0) + F'(0) + \ldots + F^{(p)}(0)\frac{1}{p!} + F^{(p+1)}(\theta)\frac{1}{(p+1)!}$$

où $F :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $F(t) = f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))$.

En particulier pour $n = 2$ et $p = 0$, si $||(x, y) - (a, b)||$ est suffisamment petit, on obtient que

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))\,(y-b)$$

pour un certain $\theta \in]0,1[$ qui peut dépendre de (x,y), où $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 au voisinage de $(a,b) \in E \subset \mathbb{R}^2$.

Observons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f sont évaluées ici au point $(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$.

De même dans le cas particulier $n = 2$ et $p = 1$, si $||(x,y)-(a,b)||$ est suffisamment petit, on obtient que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)\,(x-a)^2 \right. \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)\,(x-a)(y-b) \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)(y-b)^2 \right\}, \end{aligned}$$

pour un certain $\theta \in]0,1[$ qui peut dépendre de (x,y), où $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 au voisinage de $(a,b) \in E \subset \mathbb{R}^2$.

Observons que les dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de la fonction f sont évaluées ici au point $(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$.

DÉMONSTRATION. Comme f est de classe C^{p+1} au voisinage de $\boldsymbol{a}$, il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ tel que f soit de classe C^{p+1} sur $B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$. Posons $\delta = \delta_1/2$ et soit $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$. Puisque $\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) : -2 < t < 2\}$ est inclus dans $B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$, la fonction $F :]-2,2[\to \mathbb{R}$ est bien définie, et de plus elle est $(p+1)$ fois continûment différentiable sur $]-2,2[$ (§ 15.1.15) ; ce qui entraîne, entre autres, que la formule de Taylor (§ 6.4.6) donnée dans le cadre d'une fonction d'une variable réelle lui est applicable. Par conséquent, il existe un nombre réel $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(x) = F(1) = F(0) + F'(0) + \ldots + F^{(p)}(0)\frac{1}{p!} + F^{(p+1)}(\theta)\frac{1}{(p+1)!}.$$

Pour établir la formule de Taylor dans les deux cas particuliers où $n = 2$, il suffit de constater que pour tout $t \in]-2, 2[$:

$$\begin{aligned} F'(t) =& \frac{\partial f}{\partial x}\big(a + t(x-a), b + t(y-b)\big)\ (x-a) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(a + t(x-a), b + t(y-b)\big)\ (y-b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F''(t) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(a + t(x-a), b + t(y-b)\big)\ (x-a)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(a + t(x-a), b + t(y-b)\big)\ (x-a)\ (y-b) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(a + t(x-a),\ b + t(y-b)\big)\ (y-b)^2, \end{aligned}$$

et d'utiliser la formule obtenue ci-dessus. ■

15.3 Formes différentielles

15.3.1 Définitions

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (§ 1.5.1) et $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, l'équation

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{15.3}$$

est appelée une *forme différentielle*. De plus, lorsque les deux fonctions M et N sont de classe C^1 et que pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y), \tag{15.4}$$

on dit que la forme différentielle (15.3) est *exacte*.

Une fonction $y : I \to]c, d[$ continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I \subset]a, b[$ est dite *solution* de la forme différentielle (15.3) si pour tout $x \in I$:

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0.$$

15.3.2 Théorème

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $(x_0, y_0) \in]a, b[\times]c, d[$ et $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant, pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$, l'égalité (15.4). D'autre part, soit $\chi :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, pour qu'une fonction $y : I \to]c, d[$ continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I \subset]a, b[$ soit solution de la forme différentielle exacte (15.3) il faut et il suffit qu'il existe une constante α telle que pour tout $x \in I : \chi(x, y(x)) = \alpha$.

Pourvu que (15.4) soit satisfaite, il existe d'autres manières de calculer χ que d'utiliser sa définition. Par exemple

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\chi(x, y) = \int_0^1 \Big\{ (x - x_0) M\big(x_0 + s(x - x_0), y_0 + s(y - y_0)\big) + (y - y_0) N\big(x_0 + s(x - x_0), y_0 + s(y - y_0)\big) \Big\}\,\mathrm{d}s.$$

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que $\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ et (voir § 15.1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(t, y)\mathrm{d}t + N(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(t, y)\mathrm{d}t + N(x_0, y) = N(x, y). \end{aligned}$$

Définissons ensuite la fonction $G : I \to \mathbb{R}$ par $G(x) = \chi(x, y(x))$. Il suffit maintenant de remarquer que si $y : I \to]c, d[$ est une fonction continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I \subset]a, b[$, alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\partial \chi}{\partial x}\big(x, y(x)\big) + \frac{\partial \chi}{\partial y}\big(x, y(x)\big) y'(x) \\ &= M\big(x, y(x)\big) + N\big(x, y(x)\big) y'(x). \end{aligned}$$

Pour vérifier les formules alternatives pour χ, posons

$$\chi_1(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\chi_2(x,y) = \int_0^1 \Big\{(x-x_0)M\big(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0)\big) + (y-y_0)N\big(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0)\big)\Big\}\,\mathrm{d}s.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\chi_1(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\chi}{\partial x}(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial\chi}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \chi(x,y_0) - \chi(x_0,y_0) + \chi(x,y) - \chi(x,y_0) = \chi(x,y).\end{aligned}$$

Comme

$$\chi_2(x,y) = \int_0^1 \Big\{(x-x_0)\frac{\partial\chi}{\partial x}\big(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0)\big) + (y-y_0)\frac{\partial\chi}{\partial y}\big(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0)\big)\Big\}\,\mathrm{d}s$$

et l'intégrande

$$(x-x_0)\frac{\partial\chi}{\partial x}(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0))+(y-y_0)\frac{\partial\chi}{\partial y}(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0))$$

est, pour x et y fixés, la dérivée par rapport à s de $\chi(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0))$, on obtient que

$$\chi_2(x,y) = \chi(x_0+s(x-x_0),y_0+s(y-y_0))\Big|_{s=0}^{s=1} = \chi(x,y) - \chi(x_0,y_0) = \chi(x,y).$$

■

15.3.3 Remarque

Dans l'énoncé du théorème 15.3.2, le choix des deux nombres réels $x_0 \in]a,b[$ et $y_0 \in]c,d[$ est totalement arbitraire. Dans la pratique, ce choix est fait de façon à simplifier le plus possible les calculs.

15.3.4 Exemple

Résoudre la forme différentielle exacte

$$(x+y) + (x-y)y' = 0.$$

D'une part, en prenant $x_0 = y_0 = 0$, on obtient que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\chi(x,y) = \int_0^x (t+y)\,\mathrm{d}t + \int_0^y -t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy.$$

D'autre part, en utilisant le théorème 15.3.2, on sait que les solutions de la forme différentielle exacte $(x+y) + (x-y)y' = 0$ s'obtiennent en exprimant y par rapport à x dans l'expression

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy = \alpha$$

où α est une constante. Par conséquent,

- si $\alpha < 0$, il y a deux solutions (maximales, au sens expliqué dans l'introduction du chapitre 12), à savoir : les deux fonctions $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par
$$y_1(x) = x + \sqrt{2(x^2-\alpha)} \;\text{ et }\; y_2(x) = x - \sqrt{2(x^2-\alpha)};$$
- si $\alpha = 0$, il y a aussi deux solutions, à savoir : les deux fonctions $\bar{y}_1, \bar{y}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par
$$\bar{y}_1(x) = (1+\sqrt{2})x \;\text{ et }\; \bar{y}_2(x) = (1-\sqrt{2})x;$$
- si $\alpha > 0$, il y a quatre solutions, à savoir : les quatre fonctions $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 :]-\infty, -\sqrt{\alpha}[\to \mathbb{R}$ et $\tilde{y}_3, \tilde{y}_4 :]\sqrt{\alpha}, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par
$$\tilde{y}_1(x) = \tilde{y}_3(x) = x + \sqrt{2(x^2-\alpha)} \;\text{ et }\; \tilde{y}_2(x) = \tilde{y}_4(x) = x - \sqrt{2(x^2-\alpha)}.$$

La figure 15.9 représente l'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy = \alpha\right\}$ lorsque $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

15.3.5 Facteur intégrant

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M, N :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Une fonction $\mu :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[: \mu(x,y) \neq 0$,
- la forme différentielle

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0 \tag{15.5}$$

est exacte,

est appelée un *facteur intégrant* de la forme différentielle (15.3).

Lorsqu'une forme différentielle (15.3) possède un facteur intégrant, ses solutions coïncident avec celles de la forme différentielle exacte (15.5).

Pour finir, remarquons que même lorsqu'une forme différentielle possède un facteur intégrant, il n'est généralement pas facile de le trouver. Cependant, il existe des cas particuliers (§ 15.3.7 et 15.3.8) pour lesquels il est possible d'en calculer au moins un.

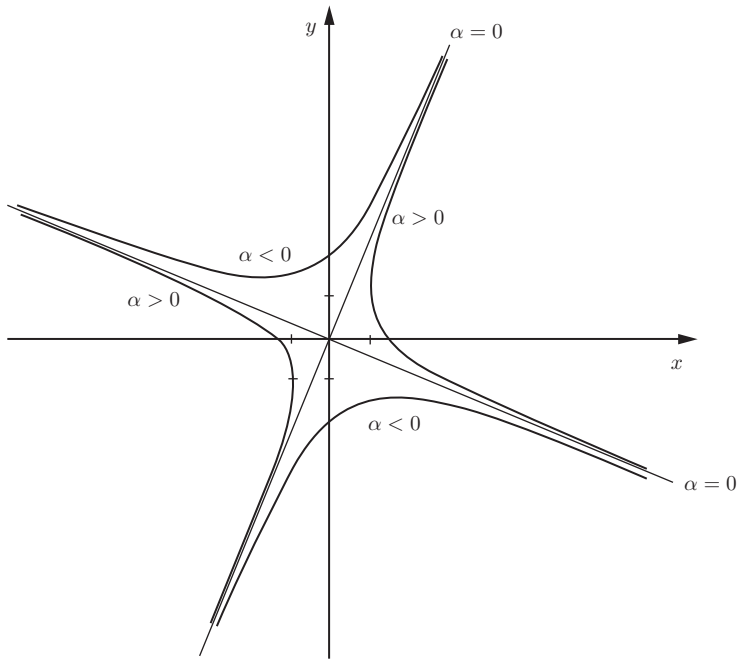


Fig. 15.9

15.3.6 Caractérisation d'un facteur intégrant

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Pour qu'une fonction $\mu :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas sur $]a, b[\times]c, d[$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle (15.3) il faut et il suffit que pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$, on ait :

$$M(x,y)\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y). \qquad (15.6)$$

DÉMONSTRATION. Pour que $\mu :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle (15.3) il faut et il suffit que pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}(x,y)$$

c'est-à-dire

$$M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

ou encore, en divisant les deux membres de cette égalité par $\mu(x, y)$, que

$$M(x,y)\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y).$$

■

15.3.7 Facteur intégrant ne dépendant que de x

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[: N(x, y) \neq 0$;
- pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$ l'expression

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y)}{N(x, y)}$$

ne dépend pas de y mais seulement de x.

Alors, en désignant par $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y)}{N(x, y)},$$

on obtient que la fonction $\mu :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x, y) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t},$$

où x_0 est un élément quelconque de $]a, b[$, est un facteur intégrant de la forme différentielle (15.3).

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que μ vérifie l'égalité (15.6) et d'utiliser le résultat du paragraphe 15.3.6. ■

15.3.8 Facteur intégrant ne dépendant que de y

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M, N :]a, b[\times]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[: M(x, y) \neq 0$;
- pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$ l'expression

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y)}{M(x, y)}$$

ne dépend pas de x mais seulement de y.

Alors, en désignant par $g :]c, d[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y)}{M(x, y)},$$

on obtient que la fonction $\mu :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = e^{\int_{y_0}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t},$$

où y_0 est un élément quelconque de $]c,d[$, est un facteur intégrant de la forme différentielle (15.3).

15.3.9 Exemple

Pour $(x,y) \in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(3x^2+y^2)y + x(y^2-x^2)y' = 0. \tag{15.7}$$

En constatant que pour tout $(x,y) \in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = -\frac{2}{y};$$

on sait (§ 15.3.8) que la fonction $\mu :]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = e^{\int_{1}^{y} \frac{-2}{t}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{y^2}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle (15.7). Ainsi, en prenant $x_0 = 0$, on obtient que pour tout $(x,y) \in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\chi(x,y) = \int_0^x \left(\frac{3t^2}{y} + y\right)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{y} + xy;$$

ce qui entraîne, d'après le théorème 15.3.2, que les solutions de la forme différentielle (15.7) s'obtiennent en exprimant y (avec $y > 0$) par rapport à x dans l'expression

$$\frac{x^3}{y} + xy = \alpha$$

où α est une constante. Par conséquent :

- si $\alpha < 0$, il y a deux solutions (maximales, au sens expliqué dans l'introduction du chapitre 12), à savoir : les deux fonctions

$$y_1, y_2 : \left]-\sqrt{\tfrac{-\alpha}{2}}, 0\right[\to]0,+\infty[$$

définies respectivement par

$$y_1(x) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x};$$

- si $\alpha = 0$, il n'y a aucune solution ;

- si $\alpha > 0$, il y a de nouveau deux solutions, à savoir : les deux fonctions

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2 : \left]0, \sqrt{\tfrac{\alpha}{2}}\right[\to]0, +\infty[$$

définies respectivement par

$$\bar{y}_1(x) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x} \quad \text{et} \quad \bar{y}_2(x) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x}.$$

15.4 Extrema d'une fonction de plusieurs variables

15.4.1 Définition d'un point stationnaire

On dit que $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ est un *point stationnaire* de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si les dérivées partielles suivantes sont bien définies en $\boldsymbol{a}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

15.4.2 Maximum et minimum local d'une fonction

Soit $\boldsymbol{a}$ un élément de E. On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* au point $\boldsymbol{a}$ s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ impliquent $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{a})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{a})$).

D'autre part, nous dirons qu'une fonction admet un *extremum local* au point $\boldsymbol{a}$ si cette fonction admet un maximum ou un minimum local en ce point.

15.4.3 Remarque

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la propriété suivante : la restriction de f à toute droite passant par le point (a, b) possède un extremum local en ce point. Peut-on déduire que f admet un extremum local au point (a, b) ? La réponse à cette question est non. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Il est facile de vérifier que la restriction de f à toute droite passant par (0,0) possède un minimum local en ce point. Par contre, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f\left(x, \frac{3x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{4} < f(0,0) = 0 < \frac{3x^4}{4} = f\left(x, \frac{x^2}{2}\right),$$

la fonction f n'admet pas d'extremum local au point $(0, 0)$.

15.4.4 Condition nécessaire pour qu'une fonction possède un extremum en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et telle que pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant n$, sa dérivée partielle par rapport à x_i au point $\boldsymbol{a}$ existe. Alors, $\boldsymbol{a}$ est un point stationnaire de f. Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit i un entier quelconque compris entre 1 et n, et

$$f_i : \{x \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in E\} \to \mathbb{R}$$

la fonction définie par

$$f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Puisque f_i est différentiable en a_i et admet un extremum local en ce point, on sait (§ 6.2.2) que $f_i'(a_i) = 0$. D'où le résultat. ■

15.4.5 Remarque

La condition démontrée au paragraphe 15.4.4 n'est pas suffisante, car $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ peut très bien être un point stationnaire de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ sans pour autant que f possède un extremum local en ce point. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$(0, 0)$ est un point stationnaire de f. Par contre, f n'admet pas d'extremum local en ce point.

15.4.6 Recherche des points où une fonction atteint ses extrema

Il résulte immédiatement de la condition nécessaire démontrée au paragraphe 15.4.4 que, si la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un extremum local au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, alors $\boldsymbol{a}$ se trouve obligatoirement parmi les points suivants :

- les points stationnaires de la fonction f ;
- les points de E où une au moins des dérivées partielles de f n'existe pas.

15.4.7 Exemple

Soit $A = (7,1), B = (x,-x), C = (y,y)$ et $D = (8,4)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$. Comment faut-il choisir x et y pour que la somme des distances de A à B, de B à C et de C à D soit minimale ? Ce problème revient à trouver un point de $\mathbb{R}^2$ pour lequel la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{(x-7)^2 + (-x-1)^2} + \sqrt{(x-y)^2 + (-x-y)^2} \\ &\quad + \sqrt{(y-8)^2 + (y-4)^2} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 - 12y + 40}) \end{aligned}$$

atteint son minimum. Il nous faut d'abord démontrer qu'un tel point existe. Pour cela, posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 10^3\}$. Puisque f est continue sur E et que E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, on sait (§ 14.3.18) qu'il existe un élément (a,b) de E tel que

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

Par suite, en constatant que pour tout $(x,y) \notin E$:

$$f(x,y) \geqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2}\sqrt{1000} > \sqrt{2}(5+\sqrt{40}) = f(0,0) \geqslant f(a,b),$$

on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Observons que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{2}\left((x^2-6x+25)^{-1/2}(x-3) + (x^2+y^2)^{-1/2}x\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{2}\left((x^2+y^2)^{-1/2}y + (y^2-12y+40)^{-1/2}(y-6)\right)$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Puisque l'unique point stationnaire de f est $(1,2)$, on peut affirmer que $(a,b) = (1,2)$ ou $(a,b) = (0,0)$ (voir le § 15.4.6). Or

$$f(1,2) = 5\sqrt{10} < \sqrt{2}(5+\sqrt{40}) = f(0,0)$$

et on peut donc affirmer que $(a,b) = (1,2)$. Par conséquent, les deux points de $\mathbb{R}^2$ cherchés sont

$$B = (1,-1) \text{ et } C = (2,2).$$

La figure 15.10 donne la solution géométrique de ce problème.

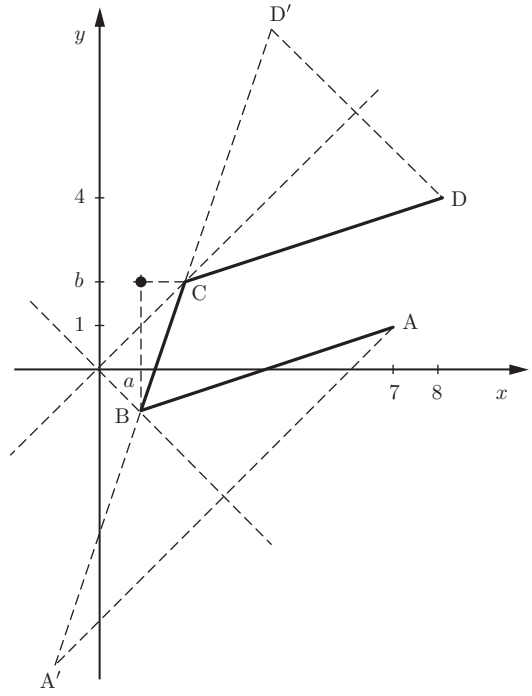


Fig. 15.10

15.4.8 Condition nécessaire pour qu'une fonction possède un extremum local en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de (a, b). Pour $(w_1, w_2) \neq (0, 0)$, la fonction

$$F : \{\tau \in \mathbb{R} : \ (a + w_1\tau, b + w_2\tau) \in E\} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$F(\tau) = f(a + w_1\tau, b + w_2\tau)$$

est deux fois continûment différentiable au voisinage de 0 et

$$F''(0) = rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2\,,$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \ \text{ et } \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Si de plus f admet en (a,b) un maximum (resp. un minimum) local, alors

$$rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 \leqslant 0 \quad (\text{resp. } \geqslant 0)$$

pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, et

$$s^2 - rt \leqslant 0.$$

DÉMONSTRATION. Puisque f est de classe C^2 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (a,b)$, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que f soit de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{c}, \beta)$. Pour $(w_1, w_2) \neq (0,0)$, la fonction F est de class C^2 sur l'intervalle ouvert

$$\left]-(w_1^2 + w_2^2)^{-1/2}\beta, (w_1^2 + w_2^2)^{-1/2}\beta\right[.$$

De plus

$$\begin{aligned} F''(\tau) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + w_1\tau, b + w_2\tau)w_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + w_1\tau, b + w_2\tau)w_1w_2 \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + w_1\tau, b + w_2\tau)w_2^2 \end{aligned}$$

pour τ dans cet intervalle. D'où $F''(0) = rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2$.

Si de plus f admet en (a,b) un maximum (resp. un minimum) local, alors F admet un maximum (resp. minimum) local en 0 et donc $F'(0) = 0$. On en déduit que

$$F''(0) = rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 \leqslant 0 \quad (\text{resp. } \geqslant 0).$$

En effet, si $F''(0) > 0$ (resp. < 0), le paragraphe 6.5.2 assure que F, supposé admettre un maximum (resp. minimun) local en 0, admettrait de plus un minimum (resp. maximum) local en 0. Ainsi F devrait être constante proche de $\tau = 0$ et on obtiendrait la contradiction $F''(0) = 0$.

Clairement, si $(w_1, w_2) = (0,0)$, alors $rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 = 0$.
Finalement, si

$$rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 \leqslant 0 \quad (\text{resp. } \geqslant 0)$$

pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, alors en particulier le polynôme en $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r\lambda^2 + 2s\lambda + t$$

ne change pas de signe. D'où $s^2 - rt \leqslant 0$. ■

15.4.9 Condition suffisante pour qu'une fonction possède un extremum local en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de (a, b), où (a, b) est un point stationnaire de f, et posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Alors :

- si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, la fonction f admet un minimum local au point (a, b) ;
- si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, la fonction f admet un maximum local au point (a, b) ;
- si $s^2 - rt > 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local au point (a, b).

Remarques

- Si $s^2 - rt < 0$, alors r et t ne sont pas nuls et ont le même signe.
- La condition
$$s^2 - rt < 0 \quad \text{et} \quad r > 0$$
est équivalente à la condition que, pour tout $(w_1, w_2) \neq (0, 0)$,
$$rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 > 0.$$
- La condition
$$s^2 - rt < 0 \quad \text{et} \quad r < 0$$
est équivalente à la condition que, pour tout $(w_1, w_2) \neq (0, 0)$,
$$rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 < 0.$$
- Pour la fonction $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ du paragraphe 15.4.3, un calcul simple donne $s^2 - rt = 0$ en $(a, b) = (0, 0)$ et les critères du présent paragraphe ne s'appliquent pas.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$. Puisque f est de classe C^2 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (a, b)$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ pour lequel la formule de Taylor (§ 15.2.11) est valable et tel que pour tout $(a_1, b_1) \in B(\boldsymbol{c}, \delta)$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, b_1)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, b_1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, b_1) < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, b_1) > 0.$$

Soit $(x, y) \neq (a, b)$ un élément quelconque de $B(\boldsymbol{c}, \delta)$. Alors, en utilisant la formule de Taylor (§ 15.2.11), on sait qu'il existe un nombre $\theta \in]0, 1[$ dépendant de (x, y) tel que

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) = &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}, \bar{b})(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}, \bar{b})(x - a)(y - b)\right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a}, \bar{b})(y - b)^2\right) \end{aligned}$$

où $\bar{a} = a + \theta(x-a)$ et $\bar{b} = b + \theta(y-b)$. Ainsi, en posant

$$\bar{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a},\bar{b}), \quad \bar{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a},\bar{b}) \text{ et } \bar{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a},\bar{b}),$$

on obtient que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= \frac{1}{2\bar{r}}\Big(\bar{r}^2(x-a)^2 + 2\bar{r}\bar{s}(x-a)(y-b) + \bar{r}\bar{t}(y-b)^2\Big) \\ &= \frac{1}{2\bar{r}}\left(\Big(\bar{r}(x-a) + \bar{s}(y-b)\Big)^2 + \big(\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2\big)(y-b)^2\right) > 0. \end{aligned}$$

D'où la première assertion.

Supposons à présent que $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$. Alors, la fonction $-f$ vérifie les hypothèses de la première assertion ; ce qui nous permet d'affirmer que $-f$ admet un minimum local au point (a,b). Par conséquent, f possède un maximum local au point (a,b).

Supposons ensuite que $s^2 - rt > 0$. Alors le paragraphe 15.4.8 assure que f n'admet ni un maximum local ni un minimum local en (a,b).

Pour finir, justifions la seconde remarque. Si, pour tout $(w_1,w_2) \neq (0,0)$,

$$rw_1^2 + 2sw_1w_2 + tw_2^2 > 0,$$

alors, en choisissant $(w_1,w_2) = (1,0)$, on en déduit que $r > 0$, que $r\lambda^2 + 2s\lambda + t > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $s^2 - rt < 0$. Réciproquement, si $r > 0$ et $s^2 - rt < 0$, alors $r\lambda^2 + 2s\lambda + t > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $r(w_1/w_2)^2 + 2s(w_1/w_2) + t > 0$ dès que $w_2 \neq 0$. D'où $rw_1^2 + 2sw_2w_1 + tw_2^2 > 0$ si $w_2 \neq 0$. Cette conclusion reste valable si $w_2 = 0$ et $w_1 \neq 0$. ■

15.4.10 Exemple

Les deux fonctions $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $g(x,y) = x^3 + x^2 + y^3$ et $h(x,y) = x^4 + y^4$ (fig. 15.11) admettent $(0,0)$ comme point stationnaire et vérifient

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Puisque la fonction g ne possède pas d'extremum local au point (0,0), tandis que la fonction h en admet un, il résulte de cet exemple, que pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 au voisinage de (a,b) qui vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0,$$

il n'est généralement pas possible a priori de savoir si elle admet un extremum local au point (a,b).

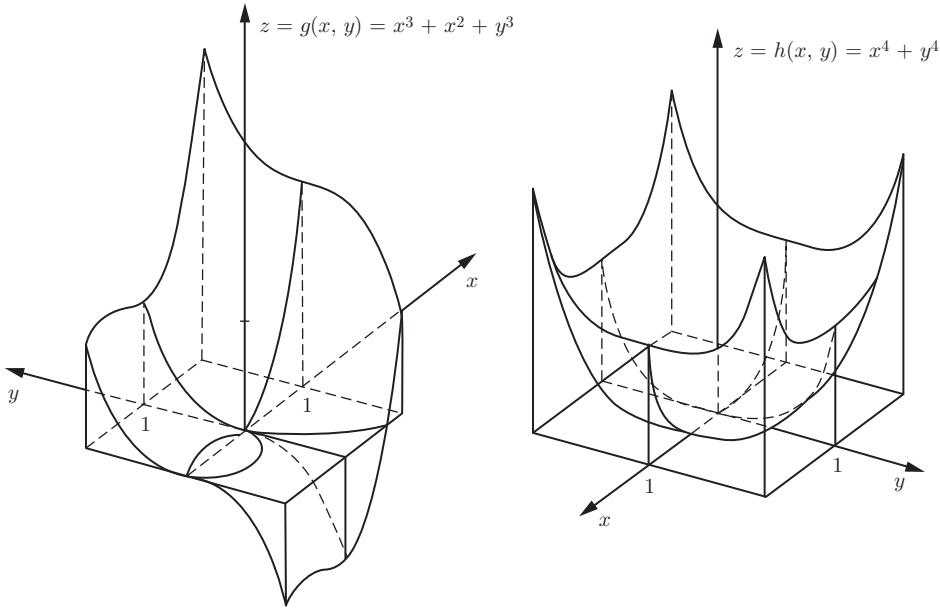


Fig. 15.11

15.4.11 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$. Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4y + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 6y - 4x$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6(y + 1),$$

on obtient que les points stationnaires de la fonction f sont $(0, 0)$ et $(4/3, 2/3)$ et qu'en ces points

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 4 > 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\,(4/3, 2/3)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(4/3, 2/3) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(4/3, 2/3) = -4 < 0.$$

Par conséquent (§ 15.4.9), la fonction f admet un minimum local au point (4/3, 2/3), tandis qu'au point (0,0) elle ne possède pas d'extremum local.

15.4.12 Définition d'une fonction harmonique

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ et δ un nombre réel positif. Une fonction continue $f : \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- f est de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{a}, \delta)$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{15.8}$$

Par définition, le nombre réel $\Delta f(\boldsymbol{x})$ est appelé le *laplacien* de la fonction f au point $\boldsymbol{x}$, et l'équation (15.8) l'*équation de Laplace*.

15.4.13 Principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \delta$ un nombre réel positif et $f : \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors, il existe deux éléments $\boldsymbol{a_1}$ et $\boldsymbol{a_2}$ de $\partial B(\boldsymbol{a}, \delta)$ tels que

$$f(\boldsymbol{a_1}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)}} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{a_2}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)}} f(\boldsymbol{x}).$$

Voir la figure 15.12.

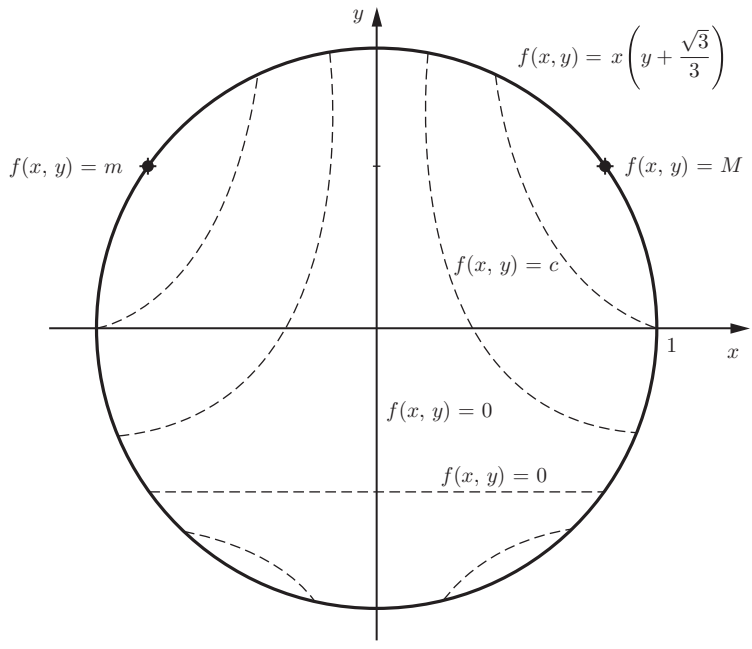


Fig. 15.12

DÉMONSTRATION. Puisque la fonction f est continue sur $\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$, les deux nombres réels $M = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} f(\boldsymbol{x})$ et $\overline{M} = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\partial B(\boldsymbol{a},\delta)} f(\boldsymbol{x})$ existent. Montrons que $M = \overline{M}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $M - \overline{M} > 0$. Alors, il existe $\boldsymbol{c} \in B(\boldsymbol{a},\delta)$ tel que $f(\boldsymbol{c}) = M$, et soit $g : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{M-\overline{M}}{4\delta^2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|^2.$$

Du fait que cette fonction est continue sur $\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$, on sait qu'il existe $\boldsymbol{c_1} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$ tel que $g(\boldsymbol{c_1}) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} g(\boldsymbol{x})$. De plus, en constatant que

$$g(\boldsymbol{c_1}) \geq g(\boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{c}) = M$$

et que pour tout $\boldsymbol{x} \in \partial B(\boldsymbol{a},\delta)$:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{M-\overline{M}}{4\delta^2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|^2 &\leqslant f(\boldsymbol{x}) + \frac{M-\overline{M}}{4\delta^2}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\|)^2 \\ &< \overline{M} + (M-\overline{M}) = M, \end{aligned}$$

on obtient que $\boldsymbol{c_1} \in B(\boldsymbol{a},\delta)$. Par suite, comme la fonction g est de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{a},\delta)$ et qu'elle admet un maximum local au point $\boldsymbol{c_1}$, la proposition 15.4.8 nous permet d'écrire que pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$r\,w_1^2 + 2s\,w_1w_2 + t\,w_2^2 \leqslant 0$$

où

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\boldsymbol{c_1}), \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(\boldsymbol{c_1}) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\boldsymbol{c_1}).$$

De cette inégalité, on déduit que $r + 2s + t \leqslant 0$ $(w_1 = w_2 = 1)$ et $r - 2s + t \leqslant 0$ $(w_1 = -w_2 = 1)$; ce qui donne, en les additionnant, que $r + t \leqslant 0$. Finalement, puisque

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{c_1}) + \frac{M-\overline{M}}{2\delta^2} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{c_1}) + \frac{M-\overline{M}}{2\delta^2}\ ,$$

on obtient que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{c_1}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{c_1}) = (r+t) + \frac{\overline{M}-M}{\delta^2} < 0.$$

Ce dernier résultat est impossible, car f est harmonique. D'où contradiction. Par conséquent $M = \overline{M}$; ce qui revient à dire qu'il existe au moins un élément $\boldsymbol{a_1}$ de $\partial B(\boldsymbol{a},\delta)$ tel que

$$f(\boldsymbol{a_1}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} f(\boldsymbol{x}).$$

La fonction $-f : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ étant harmonique, on sait, d'après ce que l'on vient de démontrer, qu'il existe $\boldsymbol{a_2} \in \partial B(\boldsymbol{a},\delta)$ tel que $-f(\boldsymbol{a_2}) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} -f(x)$; ce qui entraîne que $f(\boldsymbol{a_2}) = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} f(\boldsymbol{x})$. ■

15.4.14 Corollaire

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \delta$ un nombre réel positif et $f, g : \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques telles que pour tout $\boldsymbol{x} \in \partial B(\boldsymbol{a}, \delta) : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$. Alors, pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$.

DÉMONSTRATION. Soit $h : \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} \to \mathbb{R}$ la fonction harmonique définie par $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})$. D'où, en utilisant le principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques démontré au paragraphe 15.4.13, on sait qu'il existe deux éléments $\boldsymbol{a_1}$ et $\boldsymbol{a_2}$ de $\partial B(\boldsymbol{a}, \delta)$ tels que pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} : h(\boldsymbol{a_1}) \leqslant h(\boldsymbol{x}) \leqslant h(\boldsymbol{a_2})$; ce qui implique, puisque $h(\boldsymbol{a_1}) = h(\boldsymbol{a_2}) = 0$, que pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)} : h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) = 0$ ou encore $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$. ■

15.5 Fonctions implicites — extrema liés

15.5.1 Théorème des fonctions implicites

Soit un entier $n \geqslant 2$, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$, telle que

$$f(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Alors, pour tout nombre réel $\alpha > 0$ suffisamment petit, il existe un nombre réel $\delta \in]0, \alpha[$ et une application $\varphi : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où

$$\underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $a_n = \varphi(\underline{\boldsymbol{a}})$;
- E contient le sous-ensemble $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$, sur lequel f est de classe C^1 ;
- pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$:

$$|\varphi(\underline{\boldsymbol{x}}) - a_n| < \alpha,$$

$$f(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{x}})) = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{x}})) \neq 0;$$

- les relations

$$(\underline{\boldsymbol{x}}, y) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$$

et $f(\underline{\boldsymbol{x}}, y) = 0$ impliquent $y = \varphi(\underline{\boldsymbol{x}})$.

DÉMONSTRATION. *Première partie : valeurs permises de α.* Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $\partial f/\partial x_n(\boldsymbol{a}) > 0$ (l'autre cas se traitant de façon analogue). Puisque f est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a}$, on sait qu'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que f soit de classe C^1 sur le sous-ensemble

$$]a_1 - \beta, a_1 + \beta[\times \ldots \times]a_n - \beta, a_n + \beta[$$

et que, pour tout $\boldsymbol{x}$ dans ce sous-ensemble, $\partial f/\partial x_n(\boldsymbol{x}) > 0$. Fixons $\alpha \in]0, \beta[$. Le sous-ensemble

$$A = [a_1 - \alpha, a_1 + \alpha] \times \ldots \times [a_n - \alpha, a_n + \alpha]$$

de $\mathbb{R}^n$ est inclus dans E, f est continue en tout point de A et, pour tout $\boldsymbol{x} \in A$, $\partial f/\partial x_n(\boldsymbol{x}) > 0$.

Deuxième partie : définition de $\delta > 0$ et de φ. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : [a_n - \alpha, a_n + \alpha] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(\underline{\boldsymbol{a}}, t)$. Cette fonction est continue et, du fait que pour tout $t \in]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{\boldsymbol{a}}, t) > 0,$$

elle est aussi strictement croissante sur $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$ (§ 6.2.16) ; ce qui entraîne, puisque $g(a_n) = f(\boldsymbol{a}) = 0$, que

$$f(\underline{\boldsymbol{a}}, a_n - \alpha) = g(a_n - \alpha) < 0$$

et

$$f(\underline{\boldsymbol{a}}, a_n + \alpha) = g(a_n + \alpha) > 0.$$

Par suite, la continuité de la fonction f sur A nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre $\delta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$:

$$f(\underline{\boldsymbol{x}}, a_n - \alpha) < 0 \quad \text{et} \quad f(\underline{\boldsymbol{x}}, a_n + \alpha) > 0.$$

Soit $\underline{\boldsymbol{x}}$ un élément quelconque de $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et soit $h : [a_n - \alpha, a_n + \alpha] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$. Puisque cette fonction est continue et que pour tout $t \in]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) > 0,$$

elle est aussi strictement croissante sur $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$. Comme de plus

$$h(a_n - \alpha) = f(\underline{\boldsymbol{x}}, a_n - \alpha) < 0$$

et

$$h(a_n + \alpha) = f(\underline{\boldsymbol{x}}, a_n + \alpha) > 0,$$

on peut conclure que la fonction h s'annule une et une seule fois sur l'intervalle fermé $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$. De ce résultat et du choix arbitraire de l'élément $\underline{\boldsymbol{x}}$ de $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$, on déduit l'existence d'une fonction $\varphi : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$: $\quad |\varphi(\underline{\boldsymbol{x}}) - a_n| < \alpha \quad \text{et} \quad f(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{x}})) = 0$;
- les relations

$$(\underline{\boldsymbol{x}}, y) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[\quad \text{et} \quad f(\underline{\boldsymbol{x}}, y) = 0$$

impliquent $y = \varphi(\underline{\boldsymbol{x}})$.

En particulier $a_n = \varphi(\underline{\boldsymbol{a}})$.

Troisième partie : vérification de la continuité de φ. Montrons à présent la continuité de la fonction φ en $\underline{\boldsymbol{c}} = (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$. La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (\underline{\boldsymbol{c}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))$ et de plus

$$f(\boldsymbol{c}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}) > 0.$$

Par conséquent, en utilisant les résultats déjà démontrés appliqués au point $\boldsymbol{c}$ plutôt qu'au point $\boldsymbol{a}$ et au sous-ensemble

$$B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$$

plutôt qu'à E, on sait que, pour tout nombre réel $\alpha_2 > 0$ suffisamment petit, il existe un nombre réel $\delta_2 \in]0, \alpha_2[$ et une application $\varphi_2 : B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2) \to \mathbb{R}$ tels que

$$B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2) \subset B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta), \quad]c_n - \alpha_2, c_n + \alpha_2[\subset]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$$

et, pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2)$, on ait :

$$|\varphi_2(\underline{\boldsymbol{x}}) - c_n| < \alpha_2,$$

et

$$f(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi_2(\underline{\boldsymbol{x}})) = 0,$$

où $c_n = \varphi_2(\underline{\boldsymbol{c}})$. Par suite, en remarquant que pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2)$:

$$\varphi_2(\underline{\boldsymbol{x}}) \in]c_n - \alpha_2, c_n + \alpha_2[\subset]a_n - \alpha, a_n + \alpha[\,,$$

on peut affirmer que φ_2 n'est rien d'autre que la restriction de φ à $B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2)$. Ainsi, pour tout $\alpha_2 > 0$ suffisamment petit, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2) \subset B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et $|\varphi(\underline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})| < \alpha_2$ pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta_2)$. Ceci entraîne la continuité de la fonction φ au point $\underline{\boldsymbol{c}}$.

Dernière partie : vérification de la différentiabilité de φ. Pour finir, montrons que φ est de classe C^1. Pour cela, soit $\underline{\boldsymbol{c}}$ un élément quelconque de $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et p un entier compris entre 1 et $n-1$. Posons

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (c_1, \ldots, c_{p-1}, x, c_{p+1}, \ldots, c_{n-1}) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)\}.$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous utiliserons la notation

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (c_1, \ldots, c_{p-1}, x, c_{p+1}, \ldots, c_{n-1}).$$

Pour $x \in D$, puisque la fonction

$$s \to f\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + s(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}})\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + s(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big)$$

est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, on sait, d'après le théorème des accroissements finis (§ 6.2.12, voir aussi § 15.1.14), qu'il existe un nombre $\theta_x \in]0, 1[$ de sorte que l'on ait :

$$f(\overline{\boldsymbol{x}}\,,\, \varphi(\overline{\boldsymbol{x}})) - f(\underline{\boldsymbol{c}}\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})) = \frac{\partial f}{\partial x_p}\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + \theta_x(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}})\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + \theta_x(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big)(x - c_p)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + \theta_x(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}})\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + \theta_x(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big)\,(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\,.$$

Comme $f(\overline{\boldsymbol{x}}, \varphi(\overline{\boldsymbol{x}})) - f(\underline{\boldsymbol{c}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + \theta_x(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}), \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + \theta_x(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big) > 0,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})}{x - c_p} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_p}\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + \theta_x(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}})\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + \theta_x(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\underline{\boldsymbol{c}} + \theta_x(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}})\,,\, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}) + \theta_x(\varphi(\overline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))\Big)}.$$

Comme f est de classe C^1 sur $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$, φ continue au point $\underline{\boldsymbol{c}}$ et $\partial f/\partial x_n(\underline{\boldsymbol{c}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})) > 0$, ceci entraîne que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(\underline{\boldsymbol{c}}) = \lim_{x \to c_p} \frac{\varphi(\underline{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\underline{\boldsymbol{c}})}{x - c_p} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(\underline{\boldsymbol{c}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{\boldsymbol{c}}, \varphi(\underline{\boldsymbol{c}}))}.$$

Ceci donne une expression pour $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_p}$ à l'aide des fonctions continues $\dfrac{\partial f}{\partial x_p}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ et φ. La continuité de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_p}$ en résulte.

Ainsi se termine la démonstration du théorème des fonctions implicites. ■

15.5.2 Remarque

Si dans l'énoncé du théorème des fonctions implicites, on ne suppose pas que $\partial f/\partial x_n(\boldsymbol{a}) \neq 0$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai, même si les autres hypothèses sont vérifiées. Par exemple, c'est le cas de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour $\boldsymbol{a} = (0, 0)$.

15.5.3 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 1 - y\,e^x + x\,e^y$. Puisque $f(0, 1) = 0$ et $\partial f/\partial y\,(0, 1) = -1$, on sait, grâce au théorème des fonctions implicites, qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction continûment différentiable $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes (voir fig. 15.13) :

- $\varphi(0) = 1$;
- pour tout $x \in]-\delta, \delta[$: $f(x, \varphi(x)) = 0$.

La dérivée de la fonction $s \to f(s, \varphi(s))$ étant nulle, la formule donnée au paragraphe 15.1.15 nous permet d'affirmer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)\varphi'(0) = 0$$

et donc

$$\varphi'(0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1)} = -1 + e.$$

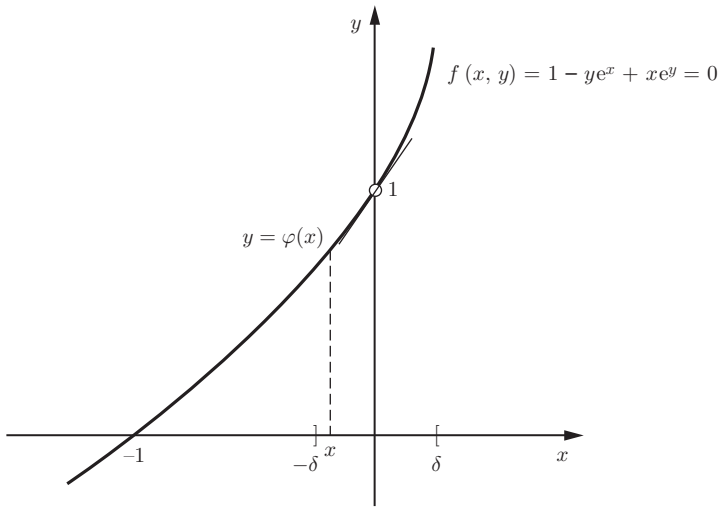


Fig. 15.13

15.5.4 Extrema liés dans $\mathbb{R}^2$

Soit un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ et deux fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 au voisinage de (a_1, a_2). De plus, on suppose que

$$g(a_1, a_2) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right)^2 > 0,$$

et soit

$$E_1 = \{(x_1, x_2) \in E : \ g(x_1, x_2) = 0\}.$$

Pour que la restriction à E_1 de la fonction f atteigne un extremum local au point (a_1, a_2), il faut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0.$$

Dans ce cas, λ est unique et il est appelé le *multiplicateur de Lagrange*.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) \neq 0$ ou $\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) \neq 0$. Quitte à échanger les rôles de la première et de la seconde variable, on peut supposer que $\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites (§ 15.5.1) appliqué à g, il existe $\alpha > 0$, $\delta \in]0, \alpha[$ et une application $\varphi :]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$ de classe C^1 vérifiant les propriétés suivantes :

- $a_2 = \varphi(a_1)$;
- E contient le sous-ensemble $]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\times]a_2 - \alpha, a_2 + \alpha[$, sur lequel g et f sont de classe C^1 (en prenant α suffisamment petit) ;

- pour tout $x_1 \in]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$:

$$|\varphi(x_1) - a_2| < \alpha, \quad g(x_1, \varphi(x_1)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1)) \neq 0;$$

- les relations $(x_1, y) \in]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\times]a_2 - \alpha, a_2 + \alpha[$ et $g(x_1, y) = 0$ impliquent $y = \varphi(x_1)$.

De plus, en considérant la fonction $G :]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x_1) = g(x_1, \varphi(x_1)), \quad x_1 \in]a_1 - \delta, a_1 + \delta[,$$

on a $G = 0$ sur $]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$,

$$0 = G'(x_1) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1))\varphi'(x_1)$$

et donc

$$\varphi'(x_1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1))}.$$

Définissons encore la fonction $F :]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1)), \quad x_1 \in]a_1 - \delta, a_1 + \delta[,$$

dont la dérivée est

$$F'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1))\varphi'(x_1).$$

Si un $\lambda \in \mathbb{R}$ comme dans l'énoncé existe, nécessairement que

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2)}$$

et donc λ est unique (s'il existe). D'autre part les affirmations suivantes sont équivalentes :

- il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0,$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2)} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0,$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\varphi'(a_1) = 0,$$

- la dérivée en a_1 de la fonction F est nulle.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'énoncé. Si la restriction de f à E_1 atteint un extremum local au point (a_1, a_2), alors la fonction F atteint elle aussi un extremum local en a_1. Puisque F est dérivable en a_1, il est donc nécessaire que sa dérivée en a_1 soit nulle. Par les équivalences précédentes, il existe ainsi nécessairement un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

15.5.5 Définition du jacobien

Pour des entiers naturels $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n}$ et

$$f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$$

n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{p+n}) \in E \subset \mathbb{R}^{p+n}$. Alors, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}$$

est appelé le *jacobien* des n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ au point $\boldsymbol{a}$ et est noté

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}).$$

15.5.6 Généralisation du théorème des fonctions implicites

Soit p et n deux entiers positifs, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et

$$f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$$

n fonctions de classe C^1 au voisinage de

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+n}) \in E,$$

telles que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n : f_j(\boldsymbol{a}) = 0$. De plus, on suppose que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Alors, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe des nombres réels $\delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in]0, \epsilon[$ et n applications

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$$

de classe C^1, où

$$\underline{\boldsymbol{a}} = (a_1 \ \ldots, a_p),$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $\varphi_i(\underline{\boldsymbol{a}}) = a_{p+i}$;
- $f_1, \ldots, f_n$ sont de classe C^1 sur

$$B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_{p+1} - \alpha_1, a_{p+1} + \alpha_1[\times \cdots \times]a_{p+n} - \alpha_n, a_{p+n} + \alpha_n[\ ,$$

qui de plus est un sous-ensemble de E ;

- pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_p) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$|\varphi_i(\underline{\boldsymbol{x}}) - a_{p+i}| < \alpha_i$$

et

$$f_i(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi_1(\underline{\boldsymbol{x}}), \ldots, \varphi_n(\underline{\boldsymbol{x}})) = 0 \ ;$$

- les relations $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$, $|y_i - a_{p+i}| < \alpha_i$ et

$$f_i(\underline{\boldsymbol{x}}, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ impliquent $y_i = \varphi_i(\underline{\boldsymbol{x}})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce théorème, nous allons raisonner par récurrence sur n (pour tous les $p > 0$ simultanément). Ce théorème ayant été démontré pour $n = 1$ (§ 15.5.1), il nous suffit donc de montrer que s'il est vrai pour $n - 1$ (avec $n > 1$), alors il est vrai pour n.

Considérons d'abord la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est le jacobien de l'énoncé. Comme le jacobien n'est pas nul, B admet une matrice inverse $C = B^{-1}$. Nous écrirons aussi ces deux matrices $B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j})$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, définissons $h_i : E \to \mathbb{R}$ par

$$h_i(x_1, \ldots, x_{p+n}) = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\, f_j(x_1, \ldots, x_{p+n})$$

et observons que

$$f_k(x_1, \ldots, x_{p+n}) = \sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, h_i(x_1, \ldots, x_{p+n})$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Il en résulte que, pour chaque $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{p+n}) \in E$,

$$\Big(\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad f_i(\boldsymbol{x}) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0\Big).$$

Dans la preuve, nous pouvons donc considérer les fonctions $h_1, \ldots, h_n$ plutôt que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, avec la propriété supplémentaire suivante à disposition : la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = CB$$

est la matrice identité.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_{p+n-1}) \quad \text{et} \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, z) = (x_1, \ldots, x_{p+n-1}, z).$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $h_n(\boldsymbol{a}) = 0$ et $\partial h_n / \partial x_{p+n}(\boldsymbol{a}) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème 15.5.1 à l'équation

$$h_n(\bar{\boldsymbol{x}}, x_{p+n}) = 0.$$

D'après le théorème 15.5.1, si $\alpha_n \in]0, \epsilon[$ est suffisamment petit, il existe un nombre réel $\delta_1 \in]0, \alpha_n[$ et une fonction $\varphi : B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ de classe C^1, dépendant de $\bar{\boldsymbol{x}}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $a_{p+n} = \varphi(\bar{\boldsymbol{a}})$;
- $B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \times]a_{p+n} - \alpha_n, a_{p+n} + \alpha_n[\subset E$ et h_n est de classe C^1 sur

$$B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \times]a_{p+n} - \alpha_n, a_{p+n} + \alpha_n[\ ;$$

- pour tout $\bar{\boldsymbol{x}} \in B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1)$: $|\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) - a_{p+n}| < \alpha_n$ et $h_n(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})) = 0$;
- les relations

$$(\bar{\boldsymbol{x}}, y) \in B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \times]a_{n+p} - \alpha_n, a_{n+p} + \alpha_n[$$

et $h_n(\bar{\boldsymbol{x}}, y) = 0$ impliquent $y = \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Pour trouver des solutions au problème

$$h_j(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ pour } \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \text{ et } \ \boldsymbol{x} \in B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \times]a_{p+n} - \alpha_n, a_{p+n} + \alpha_n[\, ,$$

il est nécessaire et suffisant de résoudre le problème

$$h_j(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})) = 0 \ \text{ pour } \ j \in \{1, \ldots, n-1\} \ \text{ et } \ \bar{\boldsymbol{x}} \in B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1)$$

(en effet, $h_n(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})) = 0$).

Considérons à présent les $n-1$ fonctions $g_1, \ldots, g_{n-1} : B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ définies par $g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = h_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}))$, et observons que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}}(\bar{\boldsymbol{a}}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+n-1}}(\bar{\boldsymbol{a}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{p+1}}(\bar{\boldsymbol{a}}) & \cdots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{p+n-1}}(\bar{\boldsymbol{a}}) \end{pmatrix}$$

est la matrice identité, et donc que son déterminant n'est pas nul :

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(\bar{\boldsymbol{a}}) \neq 0. \tag{15.9}$$

Ainsi, en utilisant (15.9) et l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer qu'il existe des nombres réels $\delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in]0, \epsilon[$ et $n-1$ fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$: $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n-1$: $a_{p+i} = \varphi_i(\underline{\boldsymbol{a}})$;
- $g_1, \ldots, g_{n-1}$ sont de classe C^1 sur

$$B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \times]a_{p+1} - \alpha_1, a_{p+1} + \alpha_1[\times \cdots \times]a_{p+n-1} - \alpha_{n-1}, a_{p+n-1} + \alpha_{n-1}[\, ,$$

qui de plus est un sous-ensemble de $B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1)$;

- pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$|\varphi_i(\underline{\boldsymbol{x}}) - a_{p+i}| < \alpha_i$$

et

$$g_i(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi_1(\underline{\boldsymbol{x}}), \ldots, \varphi_{n-1}(\underline{\boldsymbol{x}})) = 0 \ ;$$

- les relations $\underline{\boldsymbol{x}} \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$, $|y_i - a_{p+i}| < \alpha_i$ et

$$g_i(\underline{\boldsymbol{x}}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ impliquent $y_i = \varphi_i(\underline{\boldsymbol{x}})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Par suite, en désignant par $\varphi_n : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi_n(\underline{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\underline{\boldsymbol{x}}, \varphi_1(\underline{\boldsymbol{x}}), \ldots, \varphi_{n-1}(\underline{\boldsymbol{x}})),$$

on obtient que les n applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et qu'elles possèdent les propriétés demandées. D'où le théorème. ■

15.5.7 Théorème de la fonction réciproque

Soit n un entier positif, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$$

n fonctions de classe C^1 au voisinage de

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E,$$

telles que pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $f_i(\boldsymbol{a}) = b_i \in \mathbb{R}$. De plus, on suppose que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Alors il existe deux nombres réels $\delta_1, \delta_2 > 0$ et une application

$$\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) : B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \to \mathbb{R}^n \, ,$$

où $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$;
- pour tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \in E \ \text{ et } \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y},$$

où

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) : E \to \mathbb{R}^n \ ;$$

- pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$:

$$\boldsymbol{x} \in E, \ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \ \text{ et } \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},$$

- les fonctions $f_1, \ldots, f_n : B(\boldsymbol{a}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ et $g_1, \ldots, g_n : B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1.

DÉMONSTRATION. Ceci est une conséquence du théorème des fonctions implicites généralisé. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, considérons la fonction $F_i : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_i(y_1, \ldots, y_n, \boldsymbol{x}) = -y_i + f_i(\boldsymbol{x}),$$

qui est de classe C^1 au voisinage de $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$. De plus $F_i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$ et

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites généralisé appliqué aux fonctions F_i (§ 15.5.6), il existe des nombres réels $\delta_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ et une application $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) : B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = g_i(\boldsymbol{b})$ et f_i est de classe C^1 sur

$$]a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1[\times \cdots \times]a_n - \alpha_n, a_n + \alpha_n[,$$

qui de plus est un sous-ensemble de E ;

2) pour tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots . y_n) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$|g_i(\boldsymbol{y}) - a_i| < \alpha_i \quad \text{et} \quad -y_i + f_i(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = F_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = 0 \ ;$$

3) les relations

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \times]a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1[\times \cdots \times]a_n - \alpha_n, a_n + \alpha_n[$$

et $-y_i + f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ impliquent $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$.

La deuxième propriété a pour conséquence que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ pour tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$. Il résulte de la continuité des f_i en $\boldsymbol{a}$ qu'il est possible de choisir $\delta_1 > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$,

$$\boldsymbol{x} \in]a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1[\times \cdots \times]a_n - \alpha_n, a_n + \alpha_n[\subset E$$

et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$. La troisième propriété assure finalement que, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$. ■

15.5.8 Extrema liés — Méthode des multiplicateurs de Lagrange : cas général

Soit p et n deux entiers positifs, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et

$$f, g_1, \ldots, g_n \ : \ E \to \mathbb{R}$$

$n + 1$ fonctions de classe C^1 au voisinage de

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+n}),$$

telles que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$: $g_j(\boldsymbol{a}) = 0$. De plus, on suppose que

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0,$$

et soit

$$\begin{aligned} E_1 &= \bigcap_{j=1}^{n} \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{p+n}) \in E \,:\, g_j(\boldsymbol{x}) = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in E \,:\, g_1(\boldsymbol{x}) = \ldots = g_n(\boldsymbol{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Pour que la restriction de la fonction f à E_1 atteigne un extremum local au point $\boldsymbol{a}$, il faut qu'il existe n nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n+p$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) \right) = 0.$$

Par définition, les n nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange*.

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer E par un ensemble plus petit, on peut supposer que la restriction de f à E_1 atteint son minimum ou son maximum au point $\boldsymbol{a}$. Soit la fonction

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{p+n}) : E \to \mathbb{R}^{n+p}$$

définie par

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_p, g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}))$$

et qui satisfait

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_{n+p})}{D(x_1, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) = \frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Posons

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_{p+n}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) = (a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0).$$

D'après le théorème de la fonction réciproque, il existe deux nombres réels $\delta_1, \delta_2 > 0$ et une application

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_{p+n}) : B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \to \mathbb{R}^{p+n}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$;
- pour tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{p+n}) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) \in E \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$$

- pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$:

$$\boldsymbol{x} \in E, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},$$

- les fonctions $u_1, \ldots, u_{p+n} : B(\boldsymbol{a}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ et $v_1, \ldots, v_{p+n} : B(\boldsymbol{b}, \delta_2) \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1.

L'image de

$$\{\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2) : \ y_{p+1} = \ldots = y_{p+n} = 0\}$$

par $\boldsymbol{v}$ est ainsi un sous-ensemble de E_1 et, de plus, la fonction

$$\boldsymbol{y} \to h(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}))$$

est définie pour $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{b}, \delta_2)$. Le fait que la fonction

$$(y_1, \ldots, y_p) \to h(y_1, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$$

atteint son minimum ou son maximum en $(b_1, \ldots, b_p)$ entraîne (§ 15.4.4) que

$$\frac{\partial h}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) = 0 \ \text{ pour tout } \ i \in \{1, \ldots, p\}.$$

D'autre part $f(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$ et donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, p+n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial y_{p+i}}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial u_{p+i}}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial y_{p+i}}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) \right).$$

Ainsi l'énoncé est prouvé avec

$$\lambda_i = -\frac{\partial h}{\partial y_{p+i}}(\boldsymbol{b})$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. ■

15.5.9 Exemple

On propose de démontrer que pour tout m-tuple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de nombres réels positifs

$$\sqrt[m]{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \leqslant \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}{m}$$

($m \geqslant 2$). Autrement dit, que la moyenne géométrique d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ n'est jamais supérieure à la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. En effet, soit

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

un m-tuple quelconque de nombres réels positifs et soit

$$f, g : E = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$$

les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sqrt[m]{x_1, \ldots x_m}$$

et

$$g(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \ldots + x_m - \beta, \quad \text{où} \quad \beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m.$$

Comme

$$E_1 = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E : g\,(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$ et que f est continue, il existe au moins un élément $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ de E_1 où la restriction de f à E_1 atteint son maximum (§ 14.3.18). La méthode des multiplicateurs de Lagrange assure que ce maximum, dit lié, est atteint parmi les points $\boldsymbol{a} \in E_1$ vérifiant l'un des deux cas suivants :

1) $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m = 0$;

2) $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m > 0$ et il existe un nombre réel λ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{a}) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_m}(\boldsymbol{a}) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas, $f(\boldsymbol{a}) = 0$. En constatant que $(\beta/m, \ldots, \beta/m) \in E_1$ et que $f(\beta/m, \ldots, \beta/m) > 0$, on peut affirmer que le premier cas ne se produit pas pour un point $\boldsymbol{a}$ en lequel le maximum lié est atteint. Dans le second cas, f est bien de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a}$ et il existe un nombre réel λ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt[m]{a_1 \ldots a_m}}{a_1} + \lambda = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt[m]{a_1 \ldots a_m}}{a_m} + \lambda = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en résolvant ce système et en tenant compte de l'égalité $a_1 + \ldots + a_m = \beta$, on obtient immédiatement que

$$a_1 = \ldots = a_m = \frac{\beta}{m},$$

et donc le maximum lié est atteint en $\boldsymbol{a} = (\beta/m, \ldots, \beta/m) \in E_1$.

Finalement, puisque $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_1$, on peut écrire que

$$\sqrt[m]{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = f(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant f(\boldsymbol{a}) = \sqrt[m]{a_1 \ldots a_m} = \frac{\beta}{m} = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}{m}.$$

15.6 Exercices

15.6.1 Calculer

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{(x-t)e^{-t^2}}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}t.$$

15.6.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}.$$

15.6.3 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(|x| + |y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est de classe C^1.

15.6.4 Soit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe C^2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{g(x)} k(t, h(x))\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^2 en calculant f' et f''.

15.6.5 En effectuant le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

15.6.6 En effectuant le changement de variables $u = x$, $v = y - x$ et $w = z - x$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

15.6.7 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α qui soit de classe C^2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$:

$$\alpha(\alpha-1) f(x,y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

15.6.8 En effectuant le changement de variables $x = u$ et $y = uv$, trouver toutes les fonctions $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

15.6.9 En utilisant les exercices 15.6.7 et 15.6.8, trouver toutes les fonctions $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ qui sont homogènes de degré 1 et de classe C^2.

15.6.10 Soit a, b et c trois constantes vérifiant $a \neq 0$ et $b^2 - ac > 0$. En posant

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

et en effectuant le changement de variables $u = \alpha x + y$ et $v = \beta x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

15.6.11 (*Laplacien en coordonnées polaires*). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r, \theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$

Montrer que pour tout couple (r, θ) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta). \end{aligned}$$

15.6.12 (*Laplacien en coordonnées cylindriques*). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r, \theta, z) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z).$$

Montrer que pour tout $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \\ =& \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r, \theta, z). \end{aligned}$$

15.6.13 (*Laplacien en coordonnées sphériques*). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r, \beta, \theta) = f(x = r\sin\beta\cos\theta, y = r\sin\beta\sin\theta, z = r\cos\beta).$$

Montrer que pour tout $(r,\beta,\theta)\in\mathbb{R}^*\times\{t\in\mathbb{R}:t\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\Delta f(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\
&\quad=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\
&\quad=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\beta,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\beta^2}(r,\beta,\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\beta,\theta)+\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\beta,\theta)\\
&\qquad+\frac{\cot\beta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\beta}(r,\beta,\theta).
\end{aligned}$$

15.6.14 Écrire la formule de Taylor (§ 15.2.11) pour $n=3$.

15.6.15 Soit $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2$ et δ un nombre réel positif. Trouver toutes les fonctions harmoniques $f:\overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}\to\mathbb{R}$ qui s'annulent sur le bord $\partial B(\boldsymbol{a},\delta)$.

15.6.16 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_1,\dots,f_n:E\to\mathbb{R}$$

n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$, telles que

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a})\neq 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta>0$ et n applications

$$\varphi_1,\dots,\varphi_n:B(\boldsymbol{b},\delta)\to\mathbb{R}$$

de classe C^1, où $\boldsymbol{b}=(f_1(a_1,\dots,a_n),\dots,f_n(a_1,\dots,a_n))$, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout entier $1\leqslant i\leqslant n:\varphi_i(\boldsymbol{b})=a_i$;
- pour tout $(y_1,\dots,y_n)\in B(\boldsymbol{b},\delta)$ et tout entier $1\leqslant j\leqslant n$:

$$f_j(x_1=\varphi_1(y_1,\dots,y_n),\dots,x_n=\varphi_n(y_1,\dots,y_n))=y_j.$$

15.6.17 Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et supposons que pour $(x,y)\in\,]a,b[\times]c,d[$, la forme différentielle $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ soit exacte.

1) Montrer que pour tout $(x,y)\in\,]a,b[\times]c,d[$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,y)=M(x,y)\quad\text{et}\quad\frac{\partial\chi}{\partial y}(x,y)=N(x,y)$$

où χ est la fonction définie au paragraphe 15.3.2.

2) En déduire qu'il existe deux fonctions continûment différentiables $f:\,]a,b[\to\mathbb{R}$ et $g:\,]c,d[\to\mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y)\in\,]a,b[\times]c,d[$:

$$\chi(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)\,\mathrm{d}t+g(y)=\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,\mathrm{d}t+f(x)$$

où $(x_0,y_0)\in\,]a,b[\times]c,d[$.

15.6.18 Résoudre les deux formes différentielles exactes suivantes :

1) $2x + e^x y + (e^x - 2y)y' = 0$ pour $]-\infty, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$

2) $\arctan(y/x) + \ln\sqrt{x^2+y^2}\, y' = 0$ pour $]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$

15.6.19 1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la forme différentielle

$$(y^2+1)\sin x + f(x)y\, y' = 0$$

soit exacte.

2) Parmi toutes ces fonctions, déterminer celle qui satisfait la condition initiale $f(0) = 4$.

3) Pour cette fonction particulière, résoudre la forme différentielle.

15.6.20 Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$x^2 - 3y^2 + 2xy\, y' = 0.$$

(Indication : faire le changement de variable $u = y/x$.)

15.6.21 Pour $(x, y) \in]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$-2xy + (y^2 + x^2 + 3)y' = 0$$

sachant qu'il existe un facteur intégrant ne dépendant que de y.

15.6.22 Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(x^4 + y^2) + xy(x^2 - 1)y' = 0$$

sachant qu'il existe un facteur intégrant ne dépendant que de x.

15.6.23 Pour $(x, y) \in]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$ résoudre la forme différentielle

$$x(2\sqrt{x^2+y^2} + 1) + y\, y' = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de $x^2 + y^2$.

15.6.24 Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(-y^3 + xy^2 + x^2\, y) + x(y^2 + xy - x^2)y' = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de xy.

15.6.25 Soit $M, N : E =]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions homogènes de degré α et de classe C^1 telles que pour tout $(x, y) \in E : xM(x, y) + yN(x, y) \neq 0$.

1) En utilisant le théorème d'Euler (§ 15.1.23), montrer que la fonction $\mu : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$.

2) Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$\sqrt{xy} + xy' = 0.$$

15.6.26 Soit $p, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment différentiables et m un entier strictement supérieur à 1.

1) Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $\mu :]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\mu(x, y) = y^{-m} h(x)$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle

$$(p(x)\, y - f(x) y^m) + y' = 0.$$

2) Résoudre cette équation pour la condition initiale $y(x_0) = y_0 > 0$, et comparer la solution avec celle obtenue au paragraphe 12.2.7.
3) En déduire la solution de l'équation de Bernoulli

$$y' + y = x\, y^3$$

pour la condition initiale $y(0) = \sqrt{2}$.

15.6.27 Trouver les extrema de la fonction

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}.$$

15.6.28 Trouver les extrema de la fonction

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant x\} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}.$$

15.6.29 Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin(x + y).$$

15.6.30 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z, y, z) = 1.$$

En quels points de $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$, la fonction f atteint-elle son maximum ou son minimum ?

15.6.31 Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 4xy + 3y^2$$

et étudier leur nature.

15.6.32 Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2$$

et étudier leur nature.

15.6.33 Comment faut-il choisir le nombre réel α de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2 + y^2}$$

possède un minimum local au point (0,0) ?

15.6.34 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Trouver les extrema de f sous la condition $3x^2 + 2xy + 5y^2 - 72 = 0$.

15.6.35 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Trouver les extrema de f sous la condition $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 - 4yz - 1 = 0$.

15.6.36 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Déterminer le minimum de f sous les deux conditions

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad xy = 1.$$

15.6.37 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Trouver les extrema de f sous les deux conditions

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 - 2\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

15.6.38 Minimiser la distance de P_1 à P_2 où P_1 est un point de l'ellipsoïde d'équation

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0$$

et P_2 un point du plan d'équation

$$x + y + z - 10 = 0.$$

15.6.39 Trouver les valeurs extrêmes de z sur la surface d'équation

$$2\,x^2 + 3\,y^2 + z^2 - 12\,xy + 4\,xz - 35 = 0.$$

15.6.40 Déterminer les axes de l'ellipse d'équation $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.

15.6.41 Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - 4 = 0$ et du plan d'équation $x + y + 2z - 2 = 0$.

15.6.42 Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire, celui qui a la plus petite hypoténuse.

15.6.43 Déterminer à l'intérieur d'un triangle dont l'aire est connue, le point dont le produit des distances aux trois côtés est maximum.

15.6.44 Déterminer parmi les triangles ayant le même périmètre $2p$, celui dont l'aire est maximale.

Chapitre 16

Gradient, dérivées directionnelles, différentielle, courbes paramétrées

16.1 Introduction

Dans la première partie du présent chapitre (sect. 16.2 - sect. 16.7), sauf mention explicite du contraire, les fonctions seront définies sur des sous-ensembles *ouverts* de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$). Ainsi, lorsque nous écrirons par exemple $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$), il sera sous-entendu que E est ou sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Il est usuel d'écrire les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme de n-uples :

$$\boldsymbol{x} = \vec{x} = \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

voir par exemple le chapitre 13. Dans ce chapitre, nous n'utiliserons la notation $(x_1, \ldots, x_n)$ (ligne) que lorsque les composantes de $\boldsymbol{x}$ apparaissent dans l'argument d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$. Ainsi nous écrirons par exemple $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Dans les autres cas, sauf mention explicite du contraire, nous utiliserons la notation sous forme de vecteur colonne :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la transposée, ceci s'écrit aussi

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$$

ou encore

$$\boldsymbol{x} = (x_1\,,\ \ldots\ , x_n)^\top.$$

La somme de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ devient

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ y_1 + y_n \end{pmatrix},$$

le produit d'un nombre réel λ avec un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ devient

$$\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

et le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ devient

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \,.$$

Le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a toutes ses composantes nulles, sauf celle sur la j-ième ligne, qui vaut 1.

Pour des entiers $n, m \geqslant 1$, nous dirons qu'une application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est *linéaire* si

$$L(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha L(\boldsymbol{x}) + \beta L(\boldsymbol{y})$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. En choisissant $\alpha = \beta = 0$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$, ceci implique en particulier que l'image de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ par L est $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$:

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

L'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sera noté par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

16.2 Dérivées partielles, gradient

Soit un entier $n \geqslant 1$. Soit encore un sous-ensemble (ouvert) $E \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de la variable $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Pour $\boldsymbol{a} \in E$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ fixés, on considère la fonction réelle g définie par

$$g(s) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, s, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

son domaine de définition étant le sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ donné par

$$D(g) = \Big\{ s \in \mathbb{R} : \, (a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, s, a_{j+1}, \ldots, a_n)^\top \in E \Big\}.$$

Rappel et notation. Si g est dérivable en a_j, on dit que *la j-ième dérivée partielle* de f existe en $\boldsymbol{a}$ et est égale à $g'(a_j)$. Elle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}), \quad f'_{x_j}(\boldsymbol{a}) \quad \text{ou} \quad D_j f(\boldsymbol{a}).$$

Comme

$$g'(a_j) = \lim_{t\to 0} \frac{g(a_j+t) - g(a_j)}{t}\,,$$

on voit que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a})}{t}\,.}$$

Si toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$ existent en $\boldsymbol{a} \in E$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

est appelé le *gradient* de f en $\boldsymbol{a}$, que l'on note $\nabla f(\boldsymbol{a})$ ou $\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{a})$:

$$\boxed{\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ D_n f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.}$$

16.3 Dérivées directionnelles

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. La ligne droite passant par $\boldsymbol{a}$ et admettant le vecteur directeur $\boldsymbol{v}$ est paramétrée comme suit :

$$\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit la fonction réelle g définie par $g(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})$, son domaine de définition étant $D(g) = \{t \in \mathbb{R} :\ \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v} \in E\}$. C'est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

Si g est dérivable en $t = 0$, on dit que f est *dérivable en* $\boldsymbol{a}$ *suivant le vecteur* $\boldsymbol{v}$. De plus $g'(0)$ est appelé *la dérivée de* f *en* $\boldsymbol{a}$ *suivant* $\boldsymbol{v}$ ou encore *la dérivée directionnelle de* f *en* $\boldsymbol{a}$ *suivant* $\boldsymbol{v}$, que l'on note

$$Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}).$$

Ainsi

$$Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}\,.$$

Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ et f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e}_j$, observons que $Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$.

Ainsi, si f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant tous les vecteurs $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, alors toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$, $j = 1, \ldots, n$, sont bien définies.

La réciproque n'est pas vraie en général. Voir l'exemple du paragraphe 16.5.1.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$Df(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\lambda\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{s\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{s/\lambda}$$
$$= \lambda \lim_{s\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{s} = \lambda Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}),$$

où $s = \lambda t$.

Ainsi, si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ et f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant $\boldsymbol{v}$, f est aussi dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant $\lambda\boldsymbol{v}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et

$$Df(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}).$$

Il suffit donc de considérer les dérivées suivant les vecteurs unitaires. Lorsque $||\boldsymbol{v}|| = 1$, on dit aussi *dérivée dans la direction* $\boldsymbol{v}$.

16.4 Fonction dérivable, différentielle

La définition 16.4.1 de *différentielle* est une extension de la notion de *différentiabilité* d'une fonction réelle d'une variable réelle (voir § 6.1.3). Rappelons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}$ est dite *différentiable* en $a \in E$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall x \in E \quad f(x) = f(a) + \ell(x - a) + r(x)$$

et

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x - a} = 0.$$

Ceci est le cas exactement lorsque f est dérivable en a et

$$\ell = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

(§ 6.1.4). De plus, dans ce cas, le graphique de f admet une droite tangente passant par $(a, f(a))$ d'équation cartésienne

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

(§ 6.1.7). La définition 16.4.1 de différentielle pour les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}^n$ admet également une interprétation géométrique lorsque $n = 2$, qui est expliquée au paragraphe 16.4.2. La droite tangente y est remplacée par un *plan tangent*.

Il résulte du dernier résultat fondamental du paragraphe 16.4.3 une manière simple de vérifier que $f : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de l'ensemble (ouvert) $E \subset \mathbb{R}^n$: il suffit que les n dérivées partielles de f existent en tout point de E et que chacune soit continue sur E. Cette condition *suffisante* est souvent utilisée dans la pratique.

16.4.1 Définition : différentielle

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a} \in E$.

On dit que f est *dérivable au point* $\boldsymbol{a}$ ou *différentiable au point* $\boldsymbol{a}$ s'il existe une application *linéaire* $L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x})$$

et

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{r(\boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||} = 0,$$

où $L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}$ est la valeur de l'application $L_{\boldsymbol{a}}$ évaluée en $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$.

Il y a au plus une application linéaire $L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant cette condition. Lorsque f est différentiable en $\boldsymbol{a}$, $L_{\boldsymbol{a}}$ est appelé *la différentielle* de f au point $\boldsymbol{a}$. On utilise la notation suivante pour $L_{\boldsymbol{a}}$:

$$L_{\boldsymbol{a}} = df(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- Soit une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Définissons

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

par

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} L(\boldsymbol{e}_1) \\ \vdots \\ L(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad L(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$L(\boldsymbol{v}) = L\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j L(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \ell_j = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

- Lorsque $n = 1$, f admet une différentielle en a exactement lorsque la dérivée $f'(a) \in \mathbb{R}$ existe.
- Les adjectifs « différentiable » et « dérivable » seront toujours considérés comme synonymes.
- Si f est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$, alors $df : E \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est dérivable ou différentiable *sur* E et que $df : E \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est la (fonction) différentielle de f.

16.4.2 Interprétation géométrique lorsque $n = 2$

Soit un sous-ensemble (ouvert) $E \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ dérivable en $\boldsymbol{a} \in E$ de différentielle $L_{\boldsymbol{a}} = df(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $\boldsymbol{\ell}$ tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \quad L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

L'équation

$$x_3 = f(\boldsymbol{a}) + \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle = f(a_1, a_2) + \ell_1(x_1 - a_1) + \ell_2(x_2 - a_2), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

décrit un plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par le point

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1, a_2) \end{pmatrix}.$$

La direction normale à ce plan est donnée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car

$$x_3 = f(\boldsymbol{a}) + \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - f(a_1, a_2) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Si f est dérivable en $\boldsymbol{a} \in E \subset \mathbb{R}^2$, $L_{\boldsymbol{a}} = df(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^2$ est tel que

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \quad L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

alors l'équation

$$x_3 = f(\boldsymbol{a}) + \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

décrit le plan dans $\mathbb{R}^3$ tangent au graphique de f en

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1, a_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

La normale au graphique de f en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))^\top$ est la droite paramétrée comme suit :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1, a_2) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ 1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

16.4.3 Résultats fondamentaux

Théorème. Soient $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a} \in E$ avec f dérivable en $\boldsymbol{a}$ de différentielle $L_{\boldsymbol{a}} = df(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors :

1) f est continue en $\boldsymbol{a}$.
2) Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v}$ et

$$Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}).$$

En particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j)$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Autrement dit, le gradient $\nabla f(\boldsymbol{a})$ existe et

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\ell},$$

où $\ell_j = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$,

$$Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle.$$

4) Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $||\boldsymbol{v}|| = 1$,

$$Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \leqslant ||\nabla f(\boldsymbol{a})||$$

et, si $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$,

$$Df\left(\boldsymbol{a}, \frac{1}{||\nabla f(\boldsymbol{a})||} \nabla f(\boldsymbol{a})\right) = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||.$$

Ainsi $\dfrac{1}{||\nabla f(\boldsymbol{a})||} \nabla f(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n$ donne la *direction de la plus grande pente* de f en $\boldsymbol{a}$ et $||\nabla f(\boldsymbol{a})||$ est la valeur de la plus grande pente.

Remarques

- Il découle de la relation $L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ que la différentielle $L_{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est unique si elle existe, comme ceci a déjà été mentionné.

- La seconde partie du théorème assure que si f est dérivable en $\boldsymbol{a}$, alors f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ suivant tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. La réciproque n'est pas vraie en général ; voir l'exemple du paragraphe 16.5.2.

DÉMONSTRATION.

1) Vérifions que $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$. On a

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x})$$

avec

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{r(\boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||} = 0.$$

Il en résulte $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} r(\boldsymbol{x}) = 0$ et

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \Big(f(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x})\Big) \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} r(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

2) Fixons $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ et posons $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$. Alors $D(g)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et il faut démontrer que g est dérivable en $t = 0$. Or en effet

$$\begin{aligned}g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{L_{\boldsymbol{a}}(t\boldsymbol{v}) + r(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})}{t} = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) + \lim_{t\to 0} \frac{r(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})}{t} \\ &= L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) + \lim_{t\to 0} \frac{r(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})}{||\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}||} \frac{||\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}||}{t} \\ &= L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) + \lim_{t\to 0} \frac{r(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})}{||\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}||} \frac{|t|\,||\boldsymbol{v}||}{t} = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

ce qui montre que $Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = g'(0) = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$.

En choisissant en particulier $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = Df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_j) = L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j) = \ell_j\,.$$

D'où

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

3) Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = L_{\boldsymbol{a}}\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \ell_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle.$$

4) Pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $||\boldsymbol{v}|| = 1$,

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle \leqslant ||\nabla f(\boldsymbol{a})|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||$$

et, si $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$,

$$D\left(\boldsymbol{a}, \frac{1}{||\nabla f(\boldsymbol{a})||} \nabla f(\boldsymbol{a})\right) = \left\langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \frac{1}{||\nabla f(\boldsymbol{a})||} \nabla f(\boldsymbol{a}) \right\rangle = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||.$$

■

Le théorème suivant donne une méthode pour vérifier qu'une fonction est dérivable en un point.

Théorème Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a} \in E$.

Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset E$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe sur $B(\boldsymbol{a}, \delta)$ et est continue en $\boldsymbol{a}$. Alors f est dérivable en $\boldsymbol{a}$.

Remarque. Ceci améliore la conclusion du paragraphe 15.1.6.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&= f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&\quad + f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) - f(x_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(a_1 + \theta_1(x_1 - a_1), a_2, \ldots, a_n\Big)(x_1 - a_1) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big(x_1, a_2 + \theta_2(x_2 - a_2), a_3, \ldots, a_n\Big)(x_2 - a_2) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a_n + \theta_n(x_n - a_n)\Big)(x_n - a_n),
\end{aligned}$$

où $\theta_j \in]0,1[$ pour $j = 1, \ldots, n$ est donné par la formule des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle. Ainsi

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(a_1 + \theta_1(x_1 - a_1), a_2, \ldots, a_n\Big)(x_1 - a_1) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_1 - a_1) \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big(x_1, a_2 + \theta_2(x_2 - a_2), a_3, \ldots, a_n\Big)(x_2 - a_2) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(x_2 - a_2) \\ + \ldots \\ + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a_n + \theta_n(x_n - a_n)\Big)(x_n - a_n) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_n - a_n) \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||} = 0$$

grâce à la continuité des dérivées partielles en $\boldsymbol{a}$. Ainsi f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ et $df(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est l'application linéaire

$$\boldsymbol{v} \to \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle .$$

■

16.5 Exemples

16.5.1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \\ \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\} . \end{cases}$$

Remarquons d'abord que f n'est pas continue en $\boldsymbol{0}$ car

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\boldsymbol{0})$$

(voir le § 14.2.9 et la figure 14.3). Donc f n'est pas dérivable en $\boldsymbol{0}$. Son gradient $\nabla f(x_1, x_2)$ est bien défini en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ et

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \\ \dfrac{x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2(-x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \\ \dfrac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix} .$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ et la dérivée directionnelle de f en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ suivant $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ peut se calculer à l'aide du gradient :

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle.$$

La différentielle de f en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ est l'application linéaire

$$\boldsymbol{v} \to \langle \nabla f(a_1, a_2), \boldsymbol{v} \rangle = \frac{a_2(-a_1^2 + a_2^2)v_1}{(a_1^2 + a_2^2)^2} + \frac{a_1(a_1^2 - a_2^2)v_2}{(a_1^2 + a_2^2)^2}$$

($\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$). En $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, les dérivées partielles existent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} - 0 \right) = 0$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = 0,$$

d'où $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Par contre, nous observons que les limites $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,t)$ et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)$ n'existent pas.

Finalement, pour $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$,

$$D(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1 v_2}{t(v_1^2 + v_2^2)}$$

est bien défini dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$.

Remarque. En plus des notations $f(x_1, x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, les notations $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont souvent utilisées. Voir par exemple les paragraphes 15.1.3 et 15.1.4.

16.5.2

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par (fig. 16.1)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \\ \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{si } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

Remarquons que f n'est pas continue en $\mathbf{0}$ car

$$\lim_{t \to 0} f(t^2, t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\mathbf{0}).$$

Donc f n'est pas dérivable en $\mathbf{0}$. Son gradient $\nabla f(x_1, x_2)$ est bien défini en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$ et

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2^2(x_1^2 + x_2^4) - 2x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\ \\ \dfrac{2x_1 x_2(x_1^2 + x_2^4) - 4x_1 x_2^5}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2^2(-x_1^2 + x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \\ \\ \dfrac{2x_1 x_2(x_1^2 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^4)^2} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$. En $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, les dérivées partielles existent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t\cdot 0^2}{t^2+0^4} - 0\right) = 0$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = 0,$$

d'où $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Par contre, nous observons que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(-t^2+t^4)}{(t^2+t^4)^2} = -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}).$$

Plus généralement, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$, la dérivée de f en $\mathbf{0}$ suivant $\boldsymbol{v}$ existe :

$$D(\mathbf{0},\boldsymbol{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{(tv_1)(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4} - 0\right) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{(v_1)^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1} \in \mathbb{R}$$

si $v_1 \neq 0$ et, si $v_1 = 0$,

$$D(\mathbf{0},\boldsymbol{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{(t\cdot 0)(tv_2)^2}{(t\cdot 0)^2+(tv_2)^4} - 0\right) = 0.$$

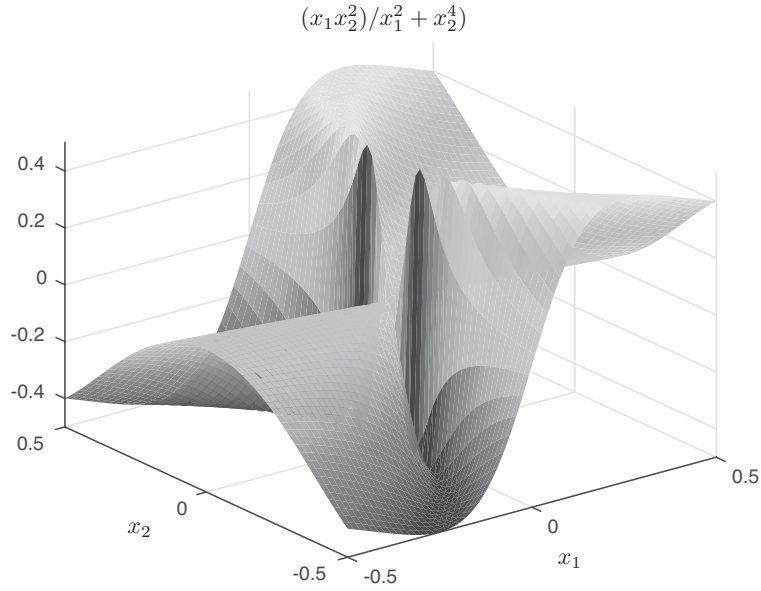


Fig. 16.1

En posant $D(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, l'application $\boldsymbol{v} \to D(\mathbf{0},\boldsymbol{v})$ n'est clairement pas linéaire en $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ dans cet exemple. De plus, pour $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$, la relation $D(\mathbf{0},\boldsymbol{v}) = \langle \nabla f(\mathbf{0}), \boldsymbol{v}\rangle$ n'est valable que si $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$.

Dans la figure 16.1, le graphique de f n'est pas dessiné pour les (x, y) proches de $(0, 0)$. En particulier, l'ensemble $\{(t^2, t, 1/2) : t \in \mathbb{R}^*\}$ inclus dans le graphe de f n'est pas entièrement représenté pour les t proches de 0.

16.6 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Si le gradient de f est défini en tout $\boldsymbol{a} \in E$, la fonction gradient

$$\boldsymbol{a} \to \nabla f(\boldsymbol{a})$$

est un exemple d'une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, dans le premier exemple ci-dessus, le gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{cases} (0,0)^\top & \text{si } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \\ \left(\dfrac{x_2(-x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, \dfrac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)^\top & \text{si } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\}, \end{cases}$$

est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, le but est maintenant d'étudier les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, où $m \geqslant 1$ est un entier quelconque, dans le même esprit que les considérations précédentes sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient des entiers $m, n \geqslant 1$, $E \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert) et une fonction quelconque $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$. Écrivons, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

où $f_i : E \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

16.6.1 Définitions : dérivée partielle, dérivée suivant un vecteur

On dit que $\boldsymbol{f}$ admet une *dérivée partielle au point* $\boldsymbol{a} \in E$ si chacune des fonctions f_i admet une dérivée partielle au point $\boldsymbol{a}$. Une dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ est notée par un vecteur colonne :

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.}$$

Pour un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, la *dérivée (directionnelle) de* $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{a}$ *suivant* $\boldsymbol{v}$ est le vecteur colonne noté par $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ ou $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ et défini par

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} Df_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \\ Df_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix}.$$

Lorsque $||\boldsymbol{v}|| = 1$, on dit aussi *dérivée dans la direction* v.

Remarquons que

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) v_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$.

16.6.2 Définition : différentielle

La notion de différentielle se généralise facilement. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{a} \in E$.

On dit que $\boldsymbol{f}$ est *dérivable au point* $\boldsymbol{a}$ ou *différentiable au point* $\boldsymbol{a}$ s'il existe une application *linéaire* $L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction

$$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)^\top : E \to \mathbb{R}^m$$

telles que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$$

et

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0},$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||} r_i(\boldsymbol{x}) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, ou encore

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{||\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}||} = 0.$$

Il y a au plus une application linéaire $L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vérifiant cette condition. Lorsque $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{a}$, cette application linéaire $L_{\boldsymbol{a}}$ est appelée *la*

différentielle de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{a}$. On utilise les notations suivantes pour $L_{\boldsymbol{a}}$:

$$L_{\boldsymbol{a}} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

16.6.3 Proposition

Soit $f : E \to \mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$ si et seulement si f_i est dérivable en $\boldsymbol{a}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dans ce cas, en notant

$$L_{\boldsymbol{a}} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad L_{i,\boldsymbol{a}} = df_i(\boldsymbol{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} L_{1,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ L_{m,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$.

Remarque. Il découle de cette proposition que la différentielle $L_{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est unique si elle existe, comme ceci a déjà été mentionné.

16.6.4 Matrice et déterminant de Jacobi

Comme $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont munis des bases canoniques, à toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est associée une matrice à m lignes et n colonnes. Plus précisément, la j-ième colonne de cette matrice est constituée des m composantes du vecteur $L(\boldsymbol{e}_j)$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

En particulier, si $f : E \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\boldsymbol{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$, on peut considérer la matrice associée à $L_{\boldsymbol{a}} = df(\boldsymbol{a})$. Sa j-ième colonne est

$$L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j) = \begin{pmatrix} L_{1,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j) \\ \vdots \\ L_{m,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, la j-ième dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.

Ceci conduit à la définition suivante. La *matrice de Jacobi* ou *matrice jacobienne* de $\boldsymbol{f}$ (ou de $f_1, \ldots, f_m$) au point $\boldsymbol{a}$ est la matrice notée

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \quad \text{ou} \quad J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})$$

définie par

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Elle a m lignes et n colonnes. Sa i-ième ligne est

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right),$$

qui est la transposée du vecteur colonne $\nabla f_i(\boldsymbol{a})$:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right) = \nabla f_i(\boldsymbol{a})^\top$$

$(1 \leqslant i \leqslant m)$. Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$, observons que, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$,

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) \\ Df_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{v}\rangle \\ \langle \nabla f_2(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Lorsque $m = n$, le déterminant

$$\det D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = |D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}$$

est appelé le *déterminant de Jacobi* ou le *jacobien* de f (ou de $f_1, \dots, f_n$) au point $\boldsymbol{a}$. Il est noté aussi $\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a})$:

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a}) = \det D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}.$$

16.6.5 Fonction composée et matrices de Jacobi

On notera par $M_{m,n}(\mathbb{R})$ les matrices à coefficients réels possédant m lignes et n colonnes.

Énoncé. Soit un sous-ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $\boldsymbol{g} : A \to \mathbb{R}^p$, un sous-ensemble ouvert $B \subset \mathbb{R}^p$ tel que $\boldsymbol{g}(A) \subset B$ et une fonction $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^q$. La fonction composée $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} : A \to \mathbb{R}^q$ est donc bien définie.

Soit encore $\boldsymbol{a} \in A$ et $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) \in B$ tels que $\boldsymbol{g}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{b}$.

Alors $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$,

$$\boxed{d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \circ d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}), \quad \text{où} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}),}$$

et la matrice de Jacobi $D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) \in M_{q,n}(\mathbb{R})$ est le produit matriciel des matrices de Jacobi $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ et $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \cdot D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}), \quad \text{où} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).}$$

Si de plus $n = p = q$, alors on obtient la relation suivante pour les déterminants de Jacobi :

$$\boxed{|D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a})| = |D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})| \cdot |D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})| \quad \text{où} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).}$$

DÉMONSTRATION. Nous noterons par $\boldsymbol{y}$ l'argument variable de la fonction $\boldsymbol{g}$ et par $\boldsymbol{x}$ celui de la fonction $\boldsymbol{f}$. Écrivons $L_{\boldsymbol{a}} = d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ et $L_{\boldsymbol{b}} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$. Les applications $L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $L_{\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ étant linéaires, leur composée $L_{\boldsymbol{b}} \circ L_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est aussi une application linéaire. Vérifions que

$$\forall \boldsymbol{y} \in A \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) + L_{\boldsymbol{b}}(L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$$

et

$$\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}||} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

pour une certaine fonction $\boldsymbol{r} : A \to \mathbb{R}^q$.

Par hypothèse, il existe des fonctions $r_{\boldsymbol{g}} : A \to \mathbb{R}^p$ et $r_{\boldsymbol{f}} : B \to \mathbb{R}^q$ telles que

$$\forall \boldsymbol{y} \in A \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}),$$

$$\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{a}} \frac{1}{||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}||} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in B \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) + L_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$$

et

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{b}} \frac{1}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

On a pour tout $\boldsymbol{y} \in A$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) &= \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) + L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})\Big) \\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) + L_{\boldsymbol{b}}\Big(L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})\Big) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) \\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) + L_{\boldsymbol{b}}(L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})) + L_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})).
\end{aligned}$$

En posant

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = L_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})),$$

on obtient bien

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}.$$

En effet, pour tout $\boldsymbol{y} \in A\backslash\{\boldsymbol{a}\}$,

$$||L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})|| = \left\| \begin{pmatrix} \langle \nabla g_1(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla g_p(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\rangle \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{i=1}^{p} (\langle \nabla g_i(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\rangle)^2 \right)^{1/2}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{p} ||\nabla g_i(\boldsymbol{a})||^2 ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{p} ||\nabla g_i(\boldsymbol{a})||^2 \right)^{1/2} ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||,$$

$$\begin{aligned} \frac{||L_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} &= \frac{1}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} \left\| \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_q(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})\rangle \end{pmatrix} \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} \left(\sum_{i=1}^{q} ||\nabla f_i(\boldsymbol{b})||^2 ||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})||^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{q} ||\nabla f_i(\boldsymbol{b})||^2 \right)^{1/2} \frac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}, \\ \dfrac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}||} \dfrac{||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{b}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}, \\ \dfrac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}||} \dfrac{||L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{b}, \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}, \\ \dfrac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}||} \left(\left(\sum_{i=1}^{p} ||\nabla g_i(\boldsymbol{a})||^2 \right)^{1/2} + \dfrac{||\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}||} \right) & \text{si } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{b}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$ et $d(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = L_{\boldsymbol{b}} \circ L_{\boldsymbol{a}}$. La théorie générale des matrices et déterminants assure finalement que

$$D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \cdot D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

(*produit matriciel*) et, lorsque $n = p = q$,

$$|D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{a})| = |D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})| \cdot |D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})|$$

(*produit de deux déterminants*).

■

16.7 Calcul vectoriel

16.7.1 Définitions

Soit un ouvert non vide $E \subset \mathbb{R}^n$:

- Une fonction $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^m$ telle que $m = n$ est appelée un *champ de vecteurs* ou un *champ vectoriel* (sur E).
- Rappelons (§ 16.2) que le *gradient* d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ en $\boldsymbol{a} \in E$ est défini par

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)^\top \in \mathbb{R}^n$$

si les n dérivées partielles de f existent en $\boldsymbol{a}$. Si f est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$, on obtient une fonction $\nabla f : E \to \mathbb{R}^n$.

D'une manière informelle, on écrit

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} f.$$

- La *divergence* d'un champ vectoriel $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^n$ en $\boldsymbol{a} \in E$ est définie par

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}$$

si ces dérivées partielles existent en $\boldsymbol{a}$.

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$, on obtient une fonction $\operatorname{div} \boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$ et $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$ sur E, le champ de vecteurs $\boldsymbol{f}$ est dit *solénoïdal* (sur E).

D'une manière informelle,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j = \langle \nabla, \boldsymbol{f} \rangle.$$

- Lorsque $n = 3$, le *rotationnel* d'un champ vectoriel $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^3$ en $\boldsymbol{a} \in E \subset \mathbb{R}^3$ est défini par

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{a}) - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

si ces dérivées partielles existent en $\boldsymbol{a}$. Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$, on obtient une fonction $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^3$.

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout $\boldsymbol{a} \in E$ et $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ sur E, le champ de vecteurs $\boldsymbol{f}$ est dit *irrotationnel* (sur E).

D'une manière informelle,

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \boldsymbol{f}.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, rappelons (§ 15.4.12) que le *laplacien* d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E est défini par

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j^2}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$$

pour $\boldsymbol{x} \in E$. Ainsi

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

sur E.

Si f est de classe C^2 et $\Delta f = 0$ sur E, rappelons aussi que la fonction f est dite *harmonique* (sur E).

D'une manière informelle, $\Delta f = \langle \nabla, \nabla f \rangle$.

16.7.2 Proposition

1) Soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert non vide $E \subset \mathbb{R}^3$. Alors $\mathbf{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$ sur E.
   Ainsi ∇f est un champ vectoriel irrotationnel sur E.
2) Soit un champ vectoriel $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 sur l'ouvert non vide $E \subset \mathbb{R}^3$. Alors $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}) = 0$ sur E.
   Ainsi $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}$ est un champ vectoriel solénoïdal sur E.

D'une manière informelle, ces formules s'écrivent aussi

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \text{ et } \langle \nabla, \nabla \times \boldsymbol{f} \rangle = 0$$

sur E.

DÉMONSTRATION.

1) On a

$$\mathbf{rot}(\nabla f) = \mathbf{rot} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

2) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2\partial x_1}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3\partial x_1}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3\partial x_2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1\partial x_2}\\ &\quad+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_3}=0,\end{aligned}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\ldots)$ est la j-ième dérivée partielle de la fonction entre parenthèses.

■

16.8 Courbes paramétrées

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier important où l'ensemble de définition d'une fonction est un intervalle de $\mathbb{R}$ et son image est incluse dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$, pour lequel il existe des notions et une terminologie propres.

16.8.1 Notation

Pour $n \geqslant 2$, les points de $\mathbb{R}^n$ seront notés dans cette dernière partie du chapitre sous forme de vecteurs colonnes ou comme transposés de vecteurs lignes :

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^{\top}=(x_1,\ldots,x_n)^{\top}\in\mathbb{R}^n\,.$$

16.8.2 Définitions : courbe, paramètre et vecteur tangent

Soit un entier $n \geqslant 1$. Étant donné un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$, une *courbe* (paramétrée) dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$ qui à $t \in I$ fait correspondre

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$$

et telle que f_i est *continue sur* I pour $i = 1, \ldots, n$. L' intervalle I est appelé *l'intervalle de paramétrisation* de la courbe. La variable t est le *paramètre*, et l'*image* de $\boldsymbol{f}$

$$\operatorname{Im}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(I)=\{\boldsymbol{f}(t):t\in I\}$$

s'appelle aussi la *trace* de $\boldsymbol{f}$. On dit parfois que $\boldsymbol{f}(I)$ *admet la paramétrisation* $\boldsymbol{f}$. Comme paramètre, on peut choisir d'autres variables que t, qui ne

représente pas nécessairement le temps.

On dit que la courbe $\boldsymbol{f}$ est *dérivable* ou *différentiable* en $t_0 \in I$ et que son *vecteur tangent* ou *vecteur vitesse* en t_0 vaut $\boldsymbol{f}'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0} - \boldsymbol{f}'(t_0) \right\| = 0.$$

Autres notations :

$$\boldsymbol{f}'(t_0) = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0}\,.$$

La *vitesse* en t_0 est alors définie par

$$V_{\boldsymbol{f}}(t_0) = ||\boldsymbol{f}'(t_0)||,$$

où $||\cdot||$ est la norme euclidienne.

Remarque. Certains auteurs définissent le vecteur tangent en t_0 tel que $\boldsymbol{f}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$ par

$$\frac{1}{||\boldsymbol{f}'(t_0)||} \boldsymbol{f}'(t_0),$$

de telle manière qu'il soit de norme 1. Voir par exemple le livre de M. Troyanov. Défini comme dans le présent ouvrage, le vecteur tangent n'est pas nécessairement de norme 1 (il peut même être de norme nulle).

16.8.3 Lemme

Énoncé. La courbe $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si chaque fonction $f_i : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0. Dans ce cas

$$\boldsymbol{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^n$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} & \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0} - \boldsymbol{\ell} \right\| = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{t \to t_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} - \ell_i \right)^2 \right)^{1/2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \ell_i\,. \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en t_0, il en découle en choisissant $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{f}'(t_0)$ que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \ell_i\,;$$

d'où chaque f_i est dérivable en t_0 et $\ell_i = f_i'(t_0)$.

Réciproquement, si chaque f_i est dérivable en t_0, il en découle en choisissant $\ell_i = f_i'(t_0)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ que

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{t - t_0} - \boldsymbol{\ell} \right\| = 0;$$

d'où $\boldsymbol{f}$ est dérivable en t_0 et $\boldsymbol{f}'(t_0) = \boldsymbol{\ell}$. ■

Remarque. Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable en tout $t \in I$ et chaque f_i' est continue sur I pour $i = 1, \ldots, n$, le vecteur tangent (comme fonction de $t \in I$)

$$\boldsymbol{f}' : I \to \mathbb{R}^n$$

définit une courbe.

16.8.4 Définitions : courbes de classe C^k et courbes régulières

Soit une courbe $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$.

- Soit un entier $k \geqslant 1$. Si les dérivées $f_j^{(m)}$ existent et sont continues sur I pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$ et tout $1 \leqslant j \leqslant n$, la courbe $\boldsymbol{f}$ est dite de *classe* C^k. Si $\boldsymbol{f}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$, on dit qu'elle est de *classe* C^∞.
- Soit une courbe $\boldsymbol{f}$ de classe C^1. On dit que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{f}(I)$ est *singulier* s'il existe $t_0 \in I$ tel que $\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{f}'(t_0) = \boldsymbol{0}$, sinon $\boldsymbol{x}$ est dit *régulier*. Si $\boldsymbol{f}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ pour tout $t \in I$, on dit que $\boldsymbol{f}$ est une courbe *régulière*.
- Un point $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{f}(I)$ est dit *simple* si l'ensemble

  $$\{t \in I : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{x}\}$$

  est constitué d'un seul élément. Si $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est injective, la courbe est dite *simple*.
- Si $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, $t_0 \in I$ et $\boldsymbol{f}(t_0)$ est un point régulier et simple, la *droite tangente* est la courbe définie par

  $$s \to \boldsymbol{f}(t_0) + s\boldsymbol{f}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

  C'est une droite parcourue à vitesse constante.

16.8.5 Définition : arc de courbe

Soit une courbe $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$.

- Si $J \subset I$ est un intervalle ni vide et ni réduit à un point, la restriction de $\boldsymbol{f}$ à J s'appelle un *arc de la courbe* $\boldsymbol{f}$. On le notera par

  $$\boldsymbol{f} : J \to \mathbb{R}^n .$$

- Un point $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{f}(J)$ est dit être un *point simple* de l'arc de courbe

$\boldsymbol{f} : J \to \mathbb{R}^n$ si l'ensemble

$$\{t \in J : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{x}\}$$

est constitué d'un seul élément. Si $\boldsymbol{f} : J \to \mathbb{R}^n$ est injective, l'arc de courbe est dit *simple*.

16.8.6 Exemples

1) Dans $\mathbb{R}^2$, le cercle de centre $\boldsymbol{c}$ et de rayon $r > 0$ admet la paramétrisation

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + r\cos(a\theta) \\ c_2 + r\sin(a\theta) \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} + r\begin{pmatrix} \cos(a\theta) \\ \sin(a\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ est une constante. La courbe $\boldsymbol{f}$ est de classe C^∞, elle est régulière, mais elle n'est pas simple puisque $\boldsymbol{f}(\theta) = \boldsymbol{f}(\theta + 2\pi/a)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le vecteur tangent vaut

$$\boldsymbol{f}'(\theta) = \begin{pmatrix} -ra\sin(a\theta) \\ ra\cos(a\theta) \end{pmatrix}$$

et la vitesse est

$$||\boldsymbol{f}'(\theta)|| = \sqrt{(-ra\sin(a\theta))^2 + (ra\cos(a\theta))^2} = ra.$$

L'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [0, 2\pi/a[\to \mathbb{R}^2$ est simple et $\boldsymbol{f}([0, 2\pi/a[) = \boldsymbol{f}(\mathbb{R})$.

2) Étant donné une fonction continue $g : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I \neq \emptyset$, la courbe $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$$

s'appelle le graphe (paramétré) de g. Si g est continûment dérivable, alors $\boldsymbol{f}$ est de classe C^1, son vecteur tangent est donné par

$$\boldsymbol{f}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

et sa vitesse est donnée par

$$||\boldsymbol{f}'(t)|| = \sqrt{1 + (g'(t))^2}, \quad t \in I.$$

La courbe $\boldsymbol{f}$ est régulière et simple.

3) Dans $\mathbb{R}^2$, la *spirale logarithmique* (fig. 16.2) admet la paramétrisation $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} e^\theta\cos(\theta) \\ e^\theta\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

La courbe $\boldsymbol{f}$ est de classe C^∞, régulière et simple. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le vecteur tangent vaut

$$\boldsymbol{f}'(\theta) = \begin{pmatrix} e^\theta\cos(\theta) - e^\theta\sin(\theta) \\ e^\theta\sin(\theta) + e^\theta\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

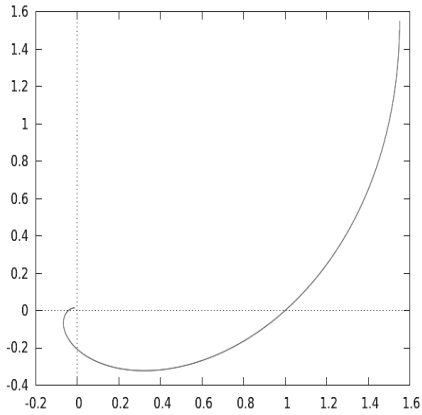


Fig. 16.2 Un arc de la *spirale logarithmique*, $-5\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$.

et la vitesse est

$$||\boldsymbol{f}'(\theta)|| = e^{\theta}\sqrt{(\cos(\theta)-\sin(\theta))^2+(\sin(\theta)+\cos(\theta))^2} = \sqrt{2}e^{\theta}\,.$$

4) Dans $\mathbb{R}^3$, l'*hélice circulaire* (fig. 16.3) admet la paramétrisation

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ a\sin(\theta) \\ b\,\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont des constantes.

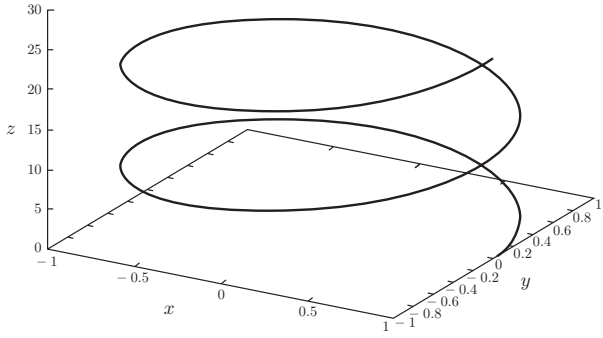


Fig. 16.3 Un arc de l'*hélice circulaire*, $a = 1$, $b = 2$ et $\theta \in [0, 4\pi]$.

La courbe $\boldsymbol{f}$ est de classe C^{∞}, régulière et simple. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le vecteur tangent vaut

$$\boldsymbol{f}'(\theta) = \begin{pmatrix} -a\sin(\theta) \\ a\cos(\theta) \\ b \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

et la vitesse est

$$||\boldsymbol{f}'(\theta)|| = \sqrt{(-a\sin(\theta))^2 + (a\cos(\theta))^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5) Dans $\mathbb{R}^2$, l'*astroïde* (fig. 16.4) admet la paramétrisation

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos^3(\theta) \\ a\sin^3(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ est une constante. La courbe $\boldsymbol{f}$ est de classe C^∞, mais elle n'est ni régulière ni simple. En effet $\boldsymbol{f}(\theta) = \boldsymbol{f}(\theta + 2\pi)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et donc elle n'est pas simple. De plus

$$\boldsymbol{f}'(\theta) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ 3a\sin^2(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

et $\boldsymbol{f}'(k\pi/2) = \mathbf{0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. D'où $\boldsymbol{f}(0) = (a, 0)^\top$, $\boldsymbol{f}(\pi/2) = (0, a)^\top$, $\boldsymbol{f}(\pi) = (-a, 0)^\top$ et $\boldsymbol{f}(3\pi/2) = (0, -a)^\top$ sont des points singuliers.
L'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ est simple et $\boldsymbol{f}([0, 2\pi[) = \boldsymbol{f}(\mathbb{R})$.

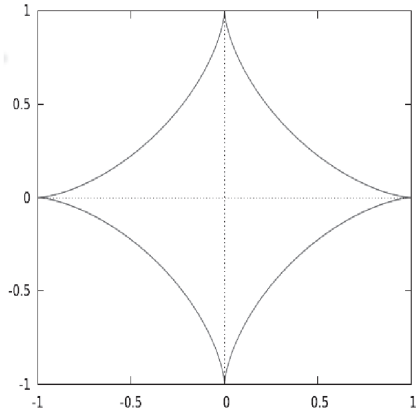


Fig. 16.4 Une *astroïde*, $a = 1$.

16.8.7 Définition : longueur d'un arc de courbe

Soit une courbe $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a < b$ dans I. La *longueur* de l'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\int_a^b ||\boldsymbol{f}'(t)|| \, \mathrm{d}t.$$

L'intervalle $[a, b]$ étant fermé borné, $L(\boldsymbol{f}) < +\infty$.

Cette définition s'étend à des intervalles plus généraux, mais la longueur est alors définie par une intégrale généralisée dont la convergence doit être discutée.

16.8.8 Exemples

1) Dans $\mathbb{R}^2$, considérons le cercle de centre $\boldsymbol{c}$ et de rayon $r > 0$ paramétré par

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} c_1 + r\cos(a\theta) \\ c_2 + r\sin(a\theta) \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} + r\begin{pmatrix} \cos(a\theta) \\ \sin(a\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ est une constante. La longueur de l'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [0, 2\pi/a] \to \mathbb{R}^2$ vaut

$$\int_0^{2\pi/a} ra \, \mathrm{d}\theta = 2\pi r.$$

2) Étant donné une fonction continûment dérivable $g : I \to \mathbb{R}$, considérons son graphe paramétré :

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

Pour $a < b$ dans I, la longueur de l'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ vaut

$$\int_a^b ||\boldsymbol{f}'(t)|| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(t))^2} \, \mathrm{d}t.$$

Remarque. Pour une autre motivation de cette formule, voir le paragraphe 9.2.4.

3) Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la spirale logarithmique paramétrée par

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} e^\theta \cos(\theta) \\ e^\theta \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, la longueur de l'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ vaut

$$\int_a^b \sqrt{2} e^\theta \, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}(e^b - e^a).$$

4) Dans $\mathbb{R}^3$, considérons l'hélice circulaire paramétrée par

$$\boldsymbol{f}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ a\sin(\theta) \\ b\,\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont des constantes. Pour $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}$, la longueur de l'arc de courbe $\boldsymbol{f} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ vaut

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 + b^2} \, \mathrm{d}\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \, (\beta - \alpha).$$

Chapitre 17

Intégrales multiples

17.1 Intégrabilité d'une fonction bornée sur un rectangle fermé

17.1.1 Sommes de Darboux inférieure et supérieure

Le but est d'étendre la théorie de l'intégrale de Riemann vue au chapitre 9 aux fonctions réelles de deux variables réelles.

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels, le rectangle fermé $D = [a, b] \times [c, d]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Considérons une subdivision $\sigma_1 = \{x_0, \ldots, x_p\}$ de $[a, b]$ et une subdivision $\sigma_2 = \{y_0, \ldots, y_q\}$ de $[b, c]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b \quad \text{et} \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = b$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$|D| = (b - a)(d - c),$$

$$D_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{et} \quad |D_{i,j}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, et observons que D est la réunion des $D_{i,j}$ et que l'aire $|D|$ de D vaut la somme des aires $|D_{i,j}|$.

Les *sommes de Darboux inférieure et supérieure* de f relativement à la paire de subdivisions (σ_1, σ_2) sont définies par

$$\underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m(D_{i,j}) |D_{i,j}|$$

et

$$\overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M(D_{i,j}) |D_{i,j}|$$

où

$$m(D_{i,j}) = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in D_{i,j}\}$$

et

$$M(D_{i,j}) = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in D_{i,j}\}.$$

Voir les figures 17.1 et 17.2.

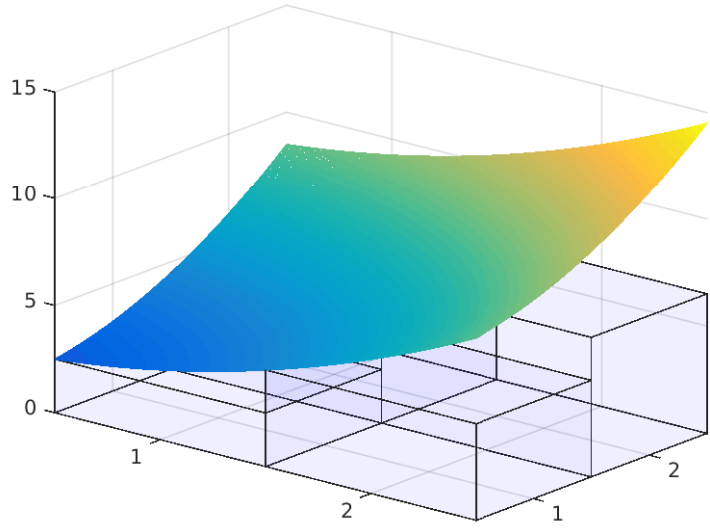


Fig. 17.1 Somme de Darboux inférieure, $[a,b]=[c,d]=[0.5\,,\,2.5]$

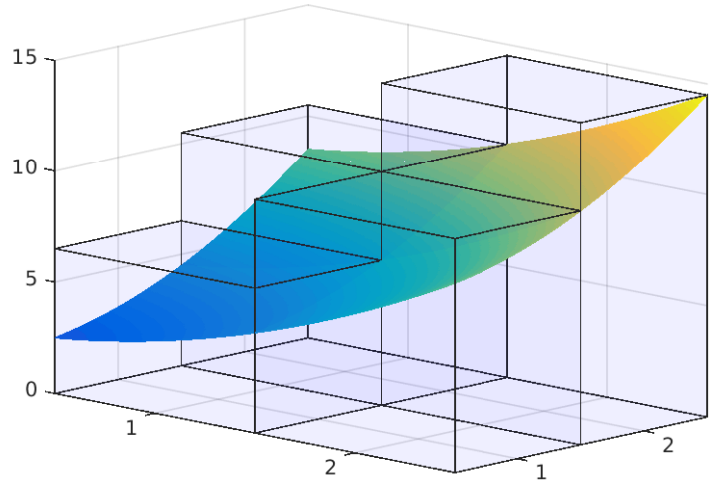


Fig. 17.2 Somme de Darboux supérieure, $[a,b]=[c,d]=[0.5\,,\,2.5]$

On définit ensuite

$$\underline{S}(f)=\sup\{\underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f):\ \sigma_1 \text{ subdivision de } [a,b],\ \sigma_2 \text{ subdivision de } [c,d]\}$$

et

$$\overline{S}(f)=\inf\{\overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f):\ \sigma_1 \text{ subdivision de } [a,b],\ \sigma_2 \text{ subdivision de } [c,d]\}$$

Remarques

- La double somme
$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(D_{i,j})|D_{i,j}|$$
signifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} m(D_{i,j})|D_{i,j}|\right)$, qui vaut aussi $\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} m(D_{i,j})|D_{i,j}|\right)$.
- Soient deux subdivisions σ_1 et $\tilde{\sigma}_1$ de $[a,b]$ et deux subdivisions σ_2 et $\tilde{\sigma}_2$ de $[c,d]$. On définit les subdivisions τ_1 et τ_2 de $[a,b]$ et $[c,d]$ par
$$\tau_1 = \sigma_1 \cup \tilde{\sigma}_1 \quad \text{et} \quad \tau_2 = \sigma_2 \cup \tilde{\sigma}_2\,.$$
On obtient
$$\underline{S}_{(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2)}(f) \leqslant \underline{S}_{(\tau_1,\tau_2)}(f) \leqslant \overline{S}_{(\tau_1,\tau_2)}(f) \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f).$$
Ainsi $\underline{S}_{(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2)}(f) \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f)$ pour toutes subdivisions σ_1 et $\tilde{\sigma}_1$ de $[a,b]$, et pour toutes subdivisions σ_2 et $\tilde{\sigma}_2$ de $[c,d]$. D'où
$$\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f).$$
- Si f est continue sur D (voir la définition 14.3.10), alors
$$m(D_{i,j}) = \min\{f(x,y) :\ (x,y) \in D_{i,j}\}$$
et
$$M(D_{i,j}) = \max\{f(x,y) :\ (x,y) \in D_{i,j}\}.$$

17.1.2 Définition : fonction intégrable

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

La fonction f est dite *intégrable (au sens de Riemann) sur D* si
$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$
Dans ce cas, l'*intégrale de f* (sur D) est définie par $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et elle est notée
$$I_D(f) = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puisque D est un sous-ensemble du plan, la terminologie suivante est aussi utilisée : *intégrale double* de la fonction f sur le rectangle fermé $D = [a,b]\times[c,d]$.

Remarque. Soit $K \in [\,0, +\infty[\,$. Si f est bornée et intégrable avec

$$\forall (x,y) \in D \quad |f(x,y)| \leqslant K,$$

alors

$$-K|D| \leqslant \underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \overline{S}_{(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2)}(f) \leqslant K|D|$$

pour toute subdivisions $\sigma_1, \tilde{\sigma}_1$ de $[a,b]$ et $\sigma_2, \tilde{\sigma}_2$ de $[c,d]$.

Interprétation. Lorsque $f > 0$ sur D, $I_D(f)$ est le volume (au sens intuitif usuel) de l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}.$$

17.1.3 Intégrabilité des fonctions continues

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels, $D = [a,b] \times [c,d]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ *continue* sur D. Alors f est intégrable sur D.

DÉMONSTRATION. Fixons $\epsilon \in\,]0, +\infty[\,$. Puisque $f : D \to \mathbb{R}$ est continue, elle est uniformément continue sur D (§ 14.3.14 et 14.3.18). Il existe donc une subdivision $\sigma_1 = \{x_0, \ldots, x_p\}$ de $[a,b]$ et une subdivision $\sigma_2 = \{y_0, \ldots, y_q\}$ de $[c,d]$, telles que

$$M(D_{i,j}) - m(D_{i,j}) \leqslant \epsilon$$

pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$ et $j \in \{1, \ldots, q\}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M(D_{i,j})|D_{i,j}| - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(D_{i,j})|D_{i,j}| \\ = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \Big(M(D_{i,j}) - m(D_{i,j})\Big)|D_{i,j}| \leqslant \epsilon \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} |D_{i,j}| = \epsilon|D|.\end{aligned}$$

D'où

$$0 \leqslant \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) - \underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) \leqslant \epsilon|D|.$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte que

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

et ainsi f est intégrable sur D. ■

17.1.4 Théorème de Fubini pour une fonction continue sur un rectangle fermé

Ce théorème affirme que l'intégrale d'une fonction continue sur un rectangle fermé se calcule à l'aide d'intégrations itérées. Commençons par des remarques préliminaires.

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors les deux fonctions $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad h(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

sont continues (§ 14.3.20). Ainsi, les deux nombres

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

sont bien définis. Montrons à présent qu'ils sont égaux et valent $I_D(f)$ (§ 17.1.2 et 17.1.3).

Énoncé. Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$I_D(f) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Prouvons que

$$I_D(f) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et considérons les subdivisions $\sigma_1 = \{x_0, \ldots, x_p\}$ et $\sigma_2 = \{y_0, \ldots, y_q\}$ introduites dans la preuve du paragraphe 17.1.3. On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y &= \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g(y)\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^{p} m(D_{i,j})(x_i - x_{i-1}) \right) \mathrm{d}y \leqslant \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^{p} M(D_{i,j})(x_i - x_{i-1}) \right) \mathrm{d}y.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m(D_{ij}) \, (x_i - x_{i-1}) \, (y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M(D_{ij})(x_i - x_{i-1}) \, (y_j - y_{j-1})$$

et donc

$$\underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) \leqslant \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f).$$

D'autre part

$$\underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) \leqslant I_D(f) \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f)$$

(par définition de $I_D(f)$) et

$$0 \leqslant \overline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) - \underline{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}(f) \leqslant \epsilon |D|$$

(comme vu dans la preuve du paragraphe 17.1.3). Par conséquent

$$\left| \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - I_D(f) \right| \leqslant \epsilon |D|.$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, il en résulte l'égalité voulue. La preuve de l'égalité

$$I_D(f) = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

est similaire. ■

Remarque. Par convention, on écrira aussi :

$$\int_{c}^{d} \mathrm{d}y \int_{a}^{b} f(x,y) \, \mathrm{d}x = \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{c}^{d} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

17.1.5 Exemple

Soit $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x, y) = x \sin(xy)$. Alors

$$I_D(f) = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \sin(xy)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^\pi -\cos(xy) \Big|_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi (1 - \cos x)\, \mathrm{d}x = (x - \sin x) \Big|_0^\pi = \pi.$$

17.1.6 Aire d'un rectangle fermé

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et D le rectangle fermé $[a, b] \times [c, d]$. Puisque

$$\iint_D 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y = (b - a)\,(d - c),$$

on peut écrire, on utilisant les notations

$$\mathrm{Aire}(D) = |D| = (b - a)(d - c),$$

que

$$\mathrm{Aire}\ (D) = \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

17.1.7 Linéarité de l'intégrale double pour les fonctions continues

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f, g : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on a :

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\ (x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. La linéarité de l'intégrale simple (§ 9.1.18) nous permet d'écrire que pour tout $y \in [c, d]$:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ (x, y)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x, y)\, \mathrm{d}x$$

et que

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b (\alpha f + \beta g)\, (x, y)\, \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\alpha \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
$$= \alpha \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x + \beta \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b g(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

■

17.1.8 Intégrale double de la valeur absolue d'une fonction continue

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\left| \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. En effet, ce résultat étant vrai pour les intégrales simples (voir § 9.1.21), on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| &= \left| \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \int_c^d \left| \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right| \mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_c^d \left(\int_a^b |f(x, y)|\, dx \right) \mathrm{d}y = \iint_D |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

■

17.1.9 Propriétés de l'intégrale double d'une fonction continue positive ou nulle

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout élément (x, y) de D, on ait : $f(x, y) \geqslant 0$. Alors

- $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geqslant 0$;
- $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur D.

DÉMONSTRATION. Les propriétés de l'intégrale simple d'une fonction positive ou nulle (§ 9.1.19) nous autorisent à écrire que pour tout $y \in [c, d]$:

$$\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \geqslant 0$$

et que

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \geqslant 0.$$

Supposons à présent que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,;$$

ce qui entraîne (§ 9.1.19) que pour tout $y \in [c,d]$:

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Il s'ensuit que pour tout $(x,y) \in D : f(x,y) = 0$. La réciproque est évidente. ■

17.1.10 Corollaire

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f, g : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout élément (x,y) de D, on ait : $f(x,y) \leqslant g(x,y)$. Alors :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $h : D \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = g(x,y) - f(x,y)$. Ainsi, en constatant que pour tout $(x,y) \in D$: $h(x,y) \geqslant 0$, on obtient (§ 17.1.7 et 17.1.9) que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \iint_D h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D (g-f)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

ou encore

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

■

17.1.11 Théorème de la moyenne

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un élément (x_0, y_0) de D tel que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0,y_0) \cdot \mathrm{Aire}\,(D).$$

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque la fonction f est continue et que D est compact, les deux nombres réels $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ et $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ existent (§ 14.3.18) ; ce qui entraîne (corollaire 17.1.10) que

$$m \cdot \text{Aire}\,(D) \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant M \cdot \text{Aire}\,(D)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\text{Aire}\,(D)} \leqslant M.$$

D'autre part, comme D est aussi connexe par arcs, la fonction f atteint toute valeur comprise entre m et M (§ 14.3.19). Par conséquent, il existe un élément (x_0, y_0) de D pour lequel

$$\frac{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\text{Aire}\,(D)} = f(x_0, y_0).$$

D'où le théorème de la moyenne. ■

17.2 Intégrabilité d'une fonction bornée sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$

17.2.1 Introduction

Dans cette section, nous généralisons la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée sur un rectangle fermé à une fonction bornée sur un *sous-ensemble borné* de $\mathbb{R}^2$.

17.2.2 Ensemble de mesure nulle au sens de Jordan

Un sous-ensemble N de $\mathbb{R}^2$ est dit de *mesure nulle au sens de Jordan* (dans $\mathbb{R}^2$) si

pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ est des rectangles fermés $D_1, \ldots, D_k \subset \mathbb{R}^2$ tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{k} D_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{k} |D_j| \leqslant \epsilon.$$

Dans ce cas, nous noterons $|N|_J = 0$.

17.2.3 Proposition sur les ensembles de mesure nulle

- Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenant un nombre fini d'éléments (ou vide), alors $|A|_J = 0$.
- Toute réunion finie d'ensembles de mesure nulle au sens de Jordan est de mesure nulle au sens de Jordan.

- Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et intégrable sur $[a, b]$ (voir chap. 9), alors le graphe

$$G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : a \leqslant x \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^2$$

satisfait $|G(\varphi)|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

17.2.4 Définition : fonction intégrable sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^2$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E et un rectangle fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient E. Posons

$$\widehat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in E, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in D \backslash E. \end{cases}$$

La fonction f est dite *intégrable (au sens de Riemann) sur* E si $\widehat{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur D. Dans ce cas, l'*intégrale de* f *sur* E est définie par

$$I_E(f) = I_D(\widehat{f}).$$

Elle se note aussi

$$I_E(f) = \iint_E f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puisque E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, on utilise aussi la terminologie *intégrale double de* f *sur* E.

Remarques

- Cette définition ne dépend pas du choix du rectangle fermé D.
- Si $N \subset \mathbb{R}^2$ satisfait $|N|_J = 0$, alors N est borné. Si de plus la fonction $f : N \to \mathbb{R}$ est bornée sur N, alors f est intégrable sur N et $I_N(f) = 0$.

17.2.5 Invariance de l'intégrale par permutation des variables

Soient un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable sur E. La fonction définie par

$$f_\pi(x, y) = f(y, x)$$

sur le sous-ensemble borné

$$E_\pi = \{(x, y) : (y, x) \in E\}$$

est bornée et intégrable sur E_π, et

$$I_{E_\pi}(f_\pi) = I_E(f).$$

17.2.6 Théorème : condition suffisante d'intégrabilité

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^2$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E et un sous-ensemble fermé $N \subset \mathbb{R}^2$. Le bord ∂E et l'intérieur $\mathring{E}$ ont été définis aux paragraphes 13.3.17 et 13.3.2.

Si le bord ∂E et N satisfont

$$|\partial E|_J = |N|_J = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

et si f est continue en tout point de l'ouvert $\mathring{E}\backslash N$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur E.

Si de plus $f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathring{E}\backslash N$, alors $I_E(f) = 0$.

Remarque. Le cas $N = \emptyset$ est permis, de même le cas $N \not\subset \mathring{E}$. Rappelons que $\mathring{E}\backslash N = \{\boldsymbol{x} \in \mathring{E} : \boldsymbol{x} \notin N\}$.

17.2.7 Théorème : division du domaine d'intégration

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^2$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E, $k \in \mathbb{N}^*$ et des sous-ensembles $E_1, \ldots, E_k \subset E$ tels que $E = \cup_{j=1}^{k} E_j$.

Si

$$|E_j \cap E_\ell|_J = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ pour tout } 1 \leqslant j < \ell \leqslant k$$

et si f est intégrable au sens de Riemann sur E_j pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur E et

$$I_E(f) = \sum_{j=1}^{k} I_{E_j}(f).$$

Remarque. La restriction $f|_{E_j} : E_j \to \mathbb{R}$ de f à E_j est souvent notée (comme ici) plus simplement par f. En général ceci ne crée pas d'ambiguïtés.

17.2.8 Définition de l'aire d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est de mesure de Jordan nulle

Soit E un sous-ensemble borné non vide de $\mathbb{R}^2$ tel que $|\partial E|_J = 0$. Alors le nombre réel $I_E(1) \geqslant 0$ est appelé l'*aire* de E et est noté $\mathrm{Aire}(E)$. Autrement dit,

$$\mathrm{Aire}\,(E) = \iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cette définition n'a de sens que si elle généralise la notion d'aire d'une surface plane donnée aux paragraphes 9.2.1 et 9.2.3 ; ce que nous pourrons vérifier

grâce au corollaire 17.3.2. Observons que la fonction constante égale à 1 est intégrable sur E car la condition suffisante d'intégrabilité du paragraphe 17.2.6 est satisfaite.

17.2.9 Linéarité de l'intégrale double

Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et intégrables. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est bornée et intégrable sur D et

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Remarque. Ceci généralise le résultat du paragraphe 17.1.7.

17.2.10 Monotonicité de l'intégrable double

Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et intégrables telles que pour tout $(x, y) \in D$ on ait : $f(x, y) \leqslant g(x, y)$. Alors,

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Remarques

- Ceci généralise le résultat du paragraphe 17.1.10.
- Si en plus de l'hypothèse $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ sur D, on suppose aussi l'égalité

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

  on ne peut pas déduire en général que $f = g$ sur D. Dans la seconde affirmation du paragraphe 17.1.9, la continuité de f est importante.

17.2.11 Bornes de l'intégrale double

Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $|\partial D|_J = 0$, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable. Alors

$$m \cdot \mathrm{Aire}\,(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant M \cdot \mathrm{Aire}\,(D)$$

où $m = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$ et $M = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$.

17.2.12 Remarque importante sur le théorème de la moyenne

L'énoncé du théorème de la moyenne au paragraphe 17.1.11 n'ai plus vrai en général si l'hypothèse de continuité sur la fonction f est remplacée par l'hypothèse que f est bornée et intégrable.

17.2.13 Intégrale double sur un sous-ensemble

Si $f : D \to [0, +\infty[$ est bornée et intégrable sur le sous-ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et si $f : D' \to [0, +\infty[$ est intégrable sur $D' \subset D$, alors

$$\boxed{0 \leqslant I_{D'}(f) \leqslant I_D(f).}$$

DÉMONSTRATION. Soit un rectangle fermé P contenant D et $g : P \to [0, +\infty[$ définie par $g = f$ sur D et $g = 0$ sur $P \backslash D$. Soit encore $h : P \to [0, +\infty[$ définie par $h = f$ sur D' et $h = 0$ sur $P \backslash D'$. Par définition (§ 17.2.4), $I_D(f) = I_P(g)$ et $I_{D'}(f) = I_P(h)$. Comme $0 \leqslant h \leqslant g$ sur P, on en déduit (§ 17.2.10) que

$$0 \leqslant I_{D'}(f) = I_P(h) \leqslant I_P(g) = I_D(f).$$

■

17.2.14 Convention

Soit p un nombre réel positif. Par convention, on pose $0^p = 0$. Ainsi, grâce à cette convention, la fonction $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue (§ 7.4.1).

17.2.15 Lemme

Soit a, b deux nombres réels positifs ou nuls. Alors, pour tout couple de nombres réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a l'inégalité suivante :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DÉMONSTRATION. Si $a = 0$ ou si $b = 0$, c'est évident. Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$. La fonction $-\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ (voir le §6.6.1). D'où

$$-\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leqslant \frac{1}{p}\left(-\ln(a^p)\right) + \frac{1}{q}\left(-\ln(b^q)\right),$$

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \ln(ab)$$

et donc

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geqslant ab$$

car $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. ■

17.2.16 Inégalité de Hölder
Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $|\partial D|_J = 0$, et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors, pour tout couple de nombres réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\iint_D |fg|(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\iint_D |f|^p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \cdot \left(\iint_D |g|^q(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Hölder*. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse supplémentaire que ni f ni g ne soit la fonction identiquement nulle sur D (dans le cas contraire, le résultat est évident). Soit un rectangle fermé A contenu dans D tel que f ne s'annule pas sur A. Puisque (§ 17.1.9)

$$\iint_A |f|^p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0,$$

on a aussi (§ 17.2.13)

$$\iint_D |f|^p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

et, de même,

$$\iint_D |g|^q(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0.$$

On peut donc considérer les deux fonctions auxiliaires $f_1, g_1 : D \to \mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f_1(x,y) = \frac{|f(x,y)|}{\left(\iint_D |f|^p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}}$$

et

$$g_1(x,y) = \frac{|g(x,y)|}{\left(\iint_D |g|^q(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 17.2.15, on obtient que pour tout $(x,y) \in D$:

$$(f_1 \cdot g_1)(x,y) \leqslant \frac{f_1^p(x,y)}{p} + \frac{g_1^q(x,y)}{q};$$

ce qui donne en intégrant (corollaire 17.2.10) que

$$\iint_D (f_1 \cdot g_1)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'ou l'inégalité de Hölder. ■

17.2.17 Inégalité de Minkowski
Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $|\partial D|_J = 0$, et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors, pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, on a :

$$\left(\iint_D |f+g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \leqslant \left(\iint_D |f|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} + \left(\iint_D |g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Minkowski*.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que $p = 1$. Alors, pour tout $(x, y) \in D$:

$$|f+g|(x,y) \leqslant |f(x,y)| + |g(x,y)|\,;$$

ce qui entraîne (§ 17.2.9 et 17.2.10) que

$$\iint_D |f+g|(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D (|f|+|g|)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D |f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D |g(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Supposons à présent que $p > 1$ et faisons l'hypothèse supplémentaire que

$$\iint_D |f+g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq 0$$

(dans le cas contraire, le résultat est évident). Alors, puisque pour tout $(x, y) \in D$:

$$|f+g|^p(x,y) \leq (|f| \cdot |f+g|^{p-1})(x,y) + (|g| \cdot |f+g|^{p-1})(x,y);$$

on peut écrire, en posant $q = p/(p-1)$ dans l'inégalité de Hölder (§ 17.2.16), que

$$\iint_D |f+g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \left(\iint_D |f|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\iint_D |f+g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p} + \left(\iint_D |g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\iint |f+g|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}.$$

Ainsi, pour obtenir l'inégalité de Minkowski, il suffit de diviser les deux membres de cette inégalité par le nombre positif

$$\left(\iint_D |f+g|^p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}.$$

■

17.3 Calcul des intégrales doubles

17.3.1 Théorème

Soit a et b deux nombres réels, φ_1, $\varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in]a, b[: \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par (fig. 17.3) :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

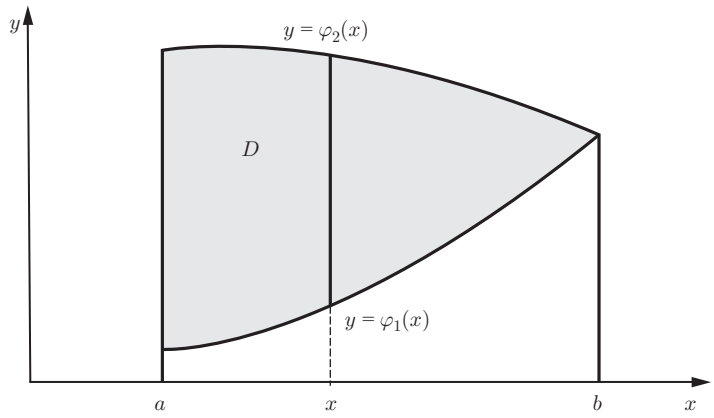


Fig. 17.3

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} \to \mathbb{R},$$

on a :

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{D} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Le paragraphe 17.2.6 assure que f est intégrable sur $\bar{D}$ et sur D. Par le paragraphe 17.2.3, $|\partial D|_J = 0$ et, par la seconde remarque du paragraphe 17.2.4, f est intégrable sur ∂D et $I_{\partial D}(f) = 0$. D'où

$$I_{\bar{D}}(f) = I_D(f) + I_{\partial D}(f) = I_D(f) + 0 = I_D(f)$$

(voir le § 17.2.7).

Considérons le rectangle fermé

$$P = [a, b] \times [m, M],$$

où

$$m = -1 + \min_{x\in[a,b]} \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad M = 1 + \max_{x\in[a,b]} \varphi_2(x),$$

et définissons $\hat{f} : P \to \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \bar{D}, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in P\backslash\bar{D}. \end{cases}$$

Par définition de $I_{\bar{D}}(f)$ (§ 17.2.4), on a $I_{\bar{D}}(f) = I_P(\hat{f})$.

Première partie. Faisons d'abord l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$ et soit $\epsilon \in]0, 1/3]$.

Définissons la fonction continue $\tilde{f} : P \to \mathbb{R}$ par

- $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in \bar{D}$,
- $\tilde{f}(x,y) = f(\varphi_1(x), y)$ si $y \leqslant \varphi_1(x)$,
- $\tilde{f}(x,y) = f(\varphi_2(x), y)$ si $y \geqslant \varphi_2(x)$.

Pour $\epsilon \in]0, 1/3]$, définissons encore la fonction continue $g_\epsilon : P \to [0,1]$ par

- $g_\epsilon(x,y) = 0$ si $y \leqslant \varphi_1(x)$ ou $y \geqslant \varphi_2(x)$ ou $x = a$ ou $x = b$,
- $g_\epsilon(x,y) = 1$ si $a + \epsilon(b-a) \leqslant x \leqslant b - \epsilon(b-a)$ et

$$\varphi_1(x) + \epsilon(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) - \epsilon(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)),$$

- ailleurs dans P, $g_\epsilon(x,y)$ vaut le produit

$$\min\left\{\frac{x-a}{\epsilon(b-a)}, \frac{b-x}{\epsilon(b-a)}, 1\right\} \cdot \min\left\{\frac{y-\varphi_1(x)}{\epsilon(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))}, \frac{\varphi_2(x)-y}{\epsilon(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))}, 1\right\},$$

assurant ainsi que g_ϵ est bien continue et à valeurs dans $[0,1]$.

Finalement, pour $\epsilon \in]0, 1/3]$, définissons la fonction continue $h_\epsilon : P \to [0,1]$ par

- $h_\epsilon(x,y) = 0$ si $y \leqslant \varphi_1(x) - \epsilon$ ou si $y \geqslant \varphi_2(x) + \epsilon$,
- $h_\epsilon(x,y) = 1$ si $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$,
- $h_\epsilon(x,y) = \dfrac{y - \varphi_1(x) + \epsilon}{\epsilon}$ si $\varphi_1(x) - \epsilon \leqslant y \leqslant \varphi_1(x)$,
- $h_\epsilon(x,y) = \dfrac{\varphi_2(x) + \epsilon - y}{\epsilon}$ si $\varphi_2(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) + \epsilon$.

Comme $g_\epsilon \tilde{f} \leqslant \hat{f} \leqslant h_\epsilon \tilde{f}$ sur P, le paragraphe 17.2.10 donne

$$I_P(g_\epsilon \tilde{f}) \leqslant I_P(\hat{f}) = I_{\bar{D}}(f) \leqslant I_P(h_\epsilon \tilde{f}).$$

D'autre part, par le paragraphe 17.1.4,

$$\begin{aligned} I_P(g_\epsilon \tilde{f}) &= \int_a^b \left(\int_m^M g_\epsilon(x,y) \tilde{f}(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{a+\epsilon(b-a)}^{b-\epsilon(b-a)} \left(\int_{\varphi_1(x)+\epsilon(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))}^{\varphi_2(x)-\epsilon(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - 4\epsilon(b-a) \max_{t\in[a,b]} (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \max_{(u,v)\in\bar{D}} f(u,v) \end{aligned}$$

et

$$I_P(h_\epsilon \tilde{f}) = \int_a^b \left(\int_m^M h_\epsilon(x,y) \tilde{f}(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
$$\leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)-\epsilon}^{\varphi_2(x)+\epsilon} \tilde{f}(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + 2\epsilon(b-a) \max_{(u,v)\in \bar{D}} f(u,v).$$

Ceci étant valable pour $\epsilon \in]0, 1/3]$ arbitrairement petit, on en déduit la formule de l'énoncé.

Deuxième partie. Ce résultat s'étend à une fonction f ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f + B) - B$ où $B = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in \bar{D}\} \geqslant 0$, on obtient que $f + B \geqslant 0$ et

$$I_D(f) = I_D(f+B) - I_D(B)$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (f+B)(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} B\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

■

17.3.2 Corollaire

Soit $a < b$ deux nombres réels, φ_1, $\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in]a,b[$: $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

Alors

$$\mathrm{Aire}(\bar{D}) = \mathrm{Aire}(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, \mathrm{d}x.$$

(Voir la remarque faite au paragraphe 17.2.8.)

17.3.3 Exemple

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ (fig. 17.4) et $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = 6^x\, 2^y$.

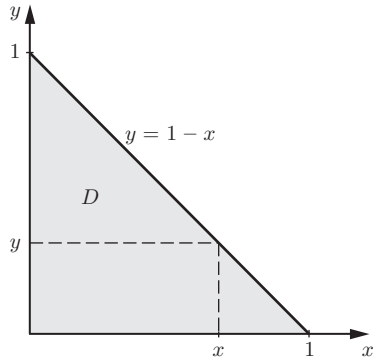


Fig. 17.4

Alors,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 6^x \left(\int_0^{1-x} 2^y\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 e^{x\ln 6}\left(\int_0^{1-x} e^{y\ln 2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 e^{x\ln 6}\frac{1}{\ln 2}\left(e^{(1-x)\ln 2}-1\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(e^{x(\ln 2+\ln 3)-x\ln 2+\ln 2}-e^{x\ln 6}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 (2e^{x\ln 3}-e^{x\,\ln 6})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{\ln 3}-\frac{5}{\ln 6}\right).\end{aligned}$$

17.3.4 Exemple

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, x^2+y^2 > 4, xy < 4\}$ (fig. 17.5) et $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = xy$.

Alors, en désignant par $\varphi_1, \varphi_2 : [2/\sqrt{5}, 2] \to \mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par

$$\varphi_1(x) = \begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [2/\sqrt{5}, \sqrt{2}]\\ x & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 2]\end{cases}$$

et

$$\varphi_2(x) = \begin{cases}2x & \text{si } x \in [2/\sqrt{5}, \sqrt{2}]\\ 4/x & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 2]\end{cases}$$

on obtient que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2/\sqrt{5} < x < 2, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$.

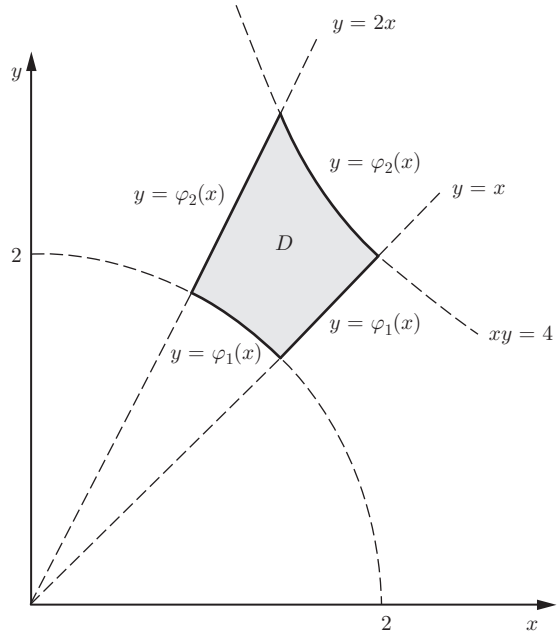


Fig. 17.5

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{2/\sqrt{5}}^{2}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} x\left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} x\left(\int_{x}^{4/x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} (5x^3-4x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{16}{x}-x^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x^4-2x^2\right)\Big|_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(16\ln x - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= -\frac{3}{5} + 4\ln 2.
\end{aligned}$$

17.3.5 Théorème

Soit $c < d$ deux nombres réels, Ψ_1, $\Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $y \in]c, d[: \Psi_1(y) < \Psi_2(y)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par (fig. 17.6)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi_1(y) < x < \Psi_2(y),\ c < y < d\}.$$

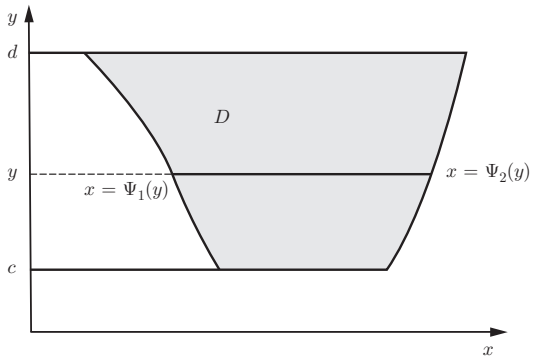


Fig. 17.6

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi_1(y) \leqslant x \leqslant \Psi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\} \to \mathbb{R},$$

on a :

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{D} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de recopier la démonstration du théorème 17.3.1 en remplaçant x par y et y par x. ■

17.3.6 Exemple

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que

$$\int_a^b (x - a) f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_y^b f(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Pour cela, considérons le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par (fig. 17.7)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, a < y < x\}.$$

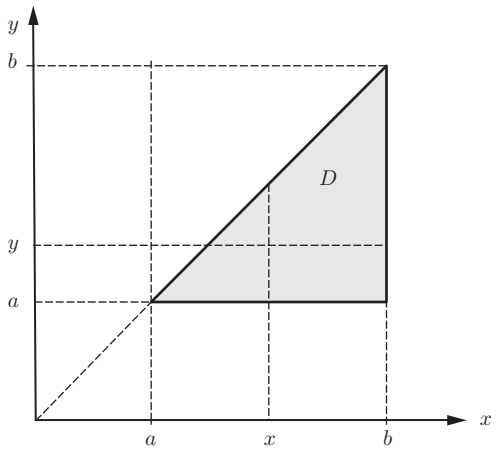


Fig. 17.7

Ainsi, en utilisant les théorèmes 17.3.1 et 17.3.5, on peut écrire successivement :

$$\int_a^b \left(\int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \iint_D f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

17.4 Changement de variables dans une intégrale double

17.4.1 Théorème

Soit D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ tels que $|\partial D|_J = 0$ et $|\partial E|_J = 0$.

Soit encore (φ, Ψ) une bijection de E dans D.

De plus, on suppose que les deux fonctions φ, $\Psi : E \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et telles que leur jacobien (ou déterminant de Jacobi, voir les paragraphes 15.5.5 et 16.6.4) est borné sur E et vérifie

$$\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(u,v)}(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\Psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

pour tout $(u,v) \in E$.

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E f(x=\varphi(u,v), y=\Psi(u,v)) \left|\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(u,v)}(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

où la valeur absolue du jacobien apparaît dans l'intégrale.

DÉMONSTRATION. Il n'est pas possible, dans le cadre de ce livre, de donner une démonstration de ce théorème. ■

17.4.2 Exemple

On se propose de calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 < 1, y > 0\}$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2,$$

on est conduit à poser $u = x + \frac{1}{2}y$ et $v = (\sqrt{3}/2)y$, c'est-à-dire, $x = u - \frac{1}{\sqrt{3}}v$ et $y = (2/\sqrt{3})v$.

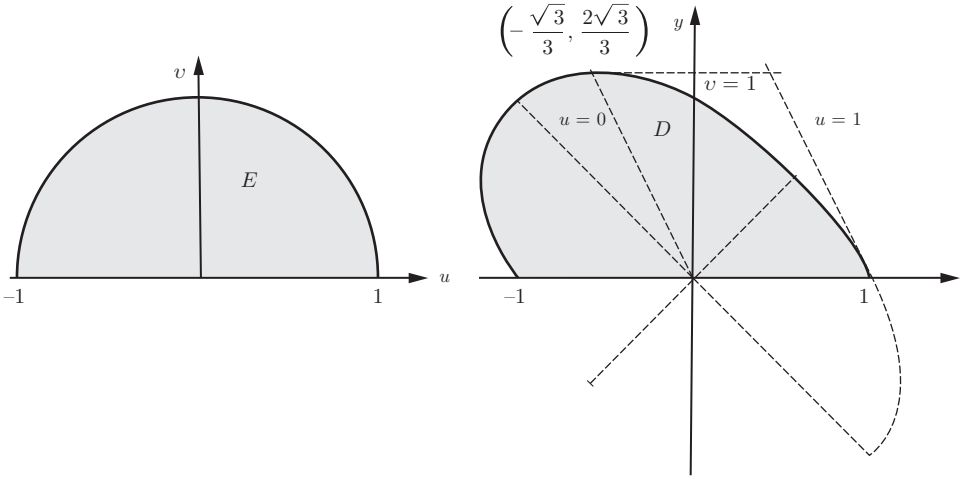


Fig. 17.8

On obtient que l'application $(\varphi, \Psi) : E = \{(u, v) \in B(\mathbf{0}, 1) : v > 0\} \to D$ définie par

$$\varphi(u, v) = u - \frac{1}{\sqrt{3}} v$$

et

$$\Psi(u, v) = \frac{2}{\sqrt{3}} v$$

est une bijection de E dans D. Ainsi, du fait que pour tout $(u, v) \in E$:

$$\frac{D(\varphi, \Psi)}{D(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0,$$

on obtient, grâce au théorème 17.4.1, que

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_E e^{u^2+v^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

D'autre part, comme l'application

$$(\varphi_1, \Psi_1) : F = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi\} \to E$$

définie par $\varphi_1(\rho, \theta) = \rho \cos\theta$ et $\Psi_1(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$ (coordonnées polaires) est une bijection de F dans E et que pour tout $(\rho, \theta) \in F$:

$$\frac{D(\varphi_1, \Psi_1)}{D(\rho, \theta)}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0,$$

on peut écrire, en utilisant les théorèmes 17.3.5 et 17.4.1, que

$$\iint_E e^{u^2+v^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_F e^{\rho^2} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \rho e^{\rho^2} \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e - 1).$$

D'où

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(e - 1).$$

17.4.3 Exemple

Soit r un nombre réel positif quelconque et E_s, $D_s (s = r \text{ ou } 2r)$ et F_r les trois sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par (fig. 17.9)

$$E_s = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < s, 0 < \theta < \pi/2\},$$
$$D_s = \{(x, y) \in B(\mathbf{0}, s) : x > 0, y > 0\}$$

et

$$F_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < r, 0 < y < r\}$$

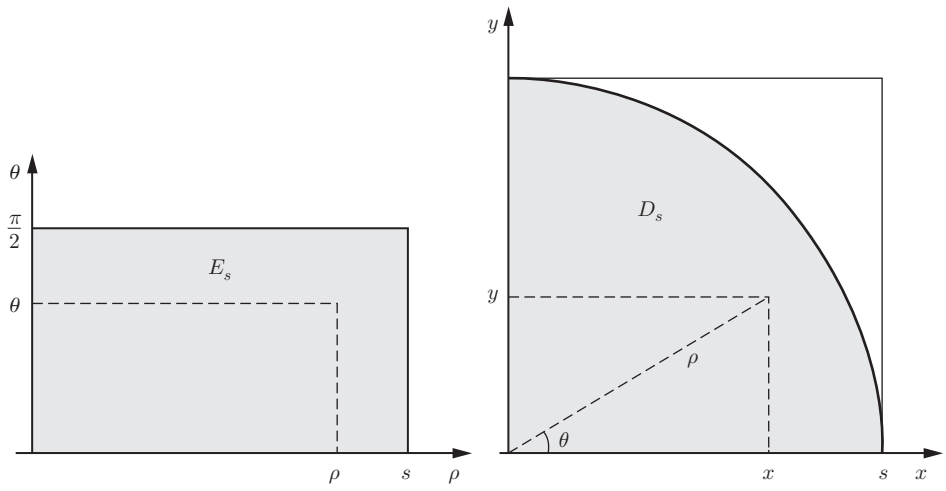


Fig. 17.9

et soit (φ, Ψ) la bijection de E_s dans D_s définie par $\varphi(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ et $\Psi(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$ (coordonnées polaires). D'une part, puisque pour tout $(\rho,\theta) \in E_s$:

$$\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0,$$

on peut écrire, grâce aux théorèmes 17.3.5 et 17.4.1, que

$$\iint_{D_s} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{E_s} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \;=\; \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^s \rho\, e^{-\rho^2} d\rho\right)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-s^2}).$$

D'autre part, en utilisant le théorème 17.3.1, on constate que

$$\iint_{F_r} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^r e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$$

Finalement, comme $D_r \subset F_r \subset D_{2r}$, on obtient (§ 17.2.13) que

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}) \leqslant \left(\int_0^r e^{-t^2} dt\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-4r^2}\right).$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $r > 0$, on peut donc affirmer, grâce au théorème des deux gendarmes (§ 5.2.12 et la dernière remarque du § 5.2.18), que

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \lim_{r\to+\infty}\left(\int_0^r e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

17.4.4 Intégrale double d'une fonction continue sur une boule fermée

Soit $\boldsymbol{c} = (a, b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, r un nombre réel positif et $f : \overline{B(\boldsymbol{c}, r)} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{B(\boldsymbol{c},r)}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{B(\boldsymbol{c},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r} f\left(a+\rho\,\cos\theta, b+\rho\sin\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{r}\left(\int_0^{2\pi} f\left(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta\right)\rho\,d\theta\right)d\rho.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le paragraphe 17.2.6 assure que f est intégrable sur $\overline{B(\boldsymbol{c}, r)}$ et $B(\boldsymbol{c}, r)$. Par la seconde remarque du paragraphe 17.2.4 et le paragraphe 17.2.7,

$$I_{\overline{B(\boldsymbol{c},r)}}(f) = I_{B(\boldsymbol{c},r)}(f).$$

Soit D et E les deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par

$$D = B(\boldsymbol{c}, r)\backslash\{(a+\delta,\ b) :\ 0 \leqslant \delta < r\}$$

et

$$E = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < r, 0 < \theta < 2\pi\},$$

et (φ, ψ) la bijection de E dans D définie par $\varphi(\rho, \theta) = \alpha + \rho\,\cos\theta$ et $\psi(\rho, \theta) = b + \rho\,\sin\theta$. Observons qu'en fait φ et ψ sont même définies et continues sur $\bar{E}$.

En raisonnant comme au début de la preuve, on obtient

$$I_{\overline{B(\boldsymbol{c},r)}}(f) = I_D(f).$$

Puisque pour tout $(\rho, \theta) \in E$:

$$\frac{D(\varphi, \Psi)}{D(\rho, \theta)}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix} = \rho > 0,$$

on peut écrire (§ 17.4.1 et 17.1.4)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{B(\boldsymbol{c},r)} f(x,y)dx\ dy &= \iint\limits_{E} f(a+\rho\cos\theta, b+\ \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\ d\theta \\ &= \iint\limits_{\bar{E}} f(a+\rho\cos\theta, b+\ \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\ d\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{r} f(a+\rho\cos\theta, b+\ \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\right) d\theta \\ &= \int\limits_0^{r}\left(\int\limits_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\ \rho\sin\theta)\rho\ d\theta\right) d\rho.\end{aligned}$$

■

17.4.5 Aire d'une boule

Pour tout $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ et tout nombre réel $r > 0$:

$$\text{Aire}(B(\boldsymbol{c},r)) = \iint\limits_{B(\boldsymbol{c},r)} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{r} \rho\ \mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \pi r^2.$$

17.4.6 Intégrale double d'une fonction continue sur une couronne fermée

Soit $\boldsymbol{c} = (a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, $r_1 < r_2$ deux nombres réels positifs et E le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a + p\cos\theta, y = b + \rho\sin\theta, r_1 < \rho < r_2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Alors, pour toute fonction $f : \bar{E} \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\bar{E}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \iint\limits_{E} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\int\limits_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Démonstration analogue à celle donnée au paragraphe 17.4.4.

■

17.5 Intégrale double d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$

17.5.1 Définition d'un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$

Une famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ est appelée un *recouvrement régulier* de $\mathbb{R}^2$ si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- $|\partial D_k|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ (§ 17.2.2) pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- $D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_{k-1} \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$;
- à tout nombre réel $r > 0$, on peut associer un entier $k(r) \geqslant 0$ tel que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\} \subset D_{k(r)}$.

Remarque. Par le paragraphe 17.2.6, toute fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable sur tout ouvert d'un recouvrement régulier.

17.5.2 Lemme

Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(D'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, à chaque entier $p \geqslant 0$, on peut associer un entier $k(p) \geqslant 0$ tel que

$$D'_p \subset D_{k(p)}.$$

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque D'_p est borné, il existe un nombre réel $r_p > 0$ tel que

$$D'_p \subset E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant r_p, |y| \leqslant r_p\}.$$

D'autre part, le fait que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ entraîne l'existence d'un entier $k(p) \geqslant$ tel que

$$E_p \subset D_{k(p)}.$$

D'où le lemme. ■

17.5.3 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x, y) \geqslant 0$ et soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(D'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, soit les deux suites numériques (d_k) et (d'_p) définies respectivement par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$d'_p = \iint_{D'_p} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

convergent vers la même limite soit elles divergent.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce théorème, il suffit de démontrer que si la suite (d_k) converge vers d alors, la suite (d'_p) converge vers d' et que $d' \leqslant d$. En effet, puisqu'à tout $p \in \mathbb{N}$, on peut associer un entier $k(p) \geqslant 0$ (lemme 17.5.2) tel que

$$D'_p \subset D_{k(p)},$$

on obtient, du fait que $f \geqslant 0$, que

$$d'_p = \iint_{D'_p} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_{k(p)}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d_{k(p)} \leqslant d.$$

Comme de plus (d'_p) est une suite croissante, on peut affirmer que (d'_p) converge et que sa limite est inférieure ou égale à d. ■

17.5.4 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) \geqslant 0$ et soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Si la suite numérique (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, sa limite est appelée l'*intégrale double* de f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cette définition a bien un sens, car cette limite est independante du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ considéré (théorème 17.5.3). Nous dirons que l'intégrable double $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ converge.

17.5.5 Exemple

Calculons

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Pour cela, considérons le recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < k, |y| < k\} \quad \text{et} \quad D_0 = D_1.$$

Alors, en constatant que pour tout entier $k > 0$:

$$\iint_{D_k} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\int_{-k}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}\right)^2 = 4(\arctan k)^2,$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \pi^2.$$

17.5.6 Critère de comparaison

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait : $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y)$. Alors, si l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge également et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Puisque pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$d_k = \iint_{D_k} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_k} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante (§ 17.2.13), elle converge ; ce qui implique que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. D'autre part, le fait que la suite (d_k) soit bornée supérieurement par

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

nous permet aussi d'écrire que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

■

17.5.7 Remarque

Pour une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quelconque, la convergence de la suite (d_k) peut très bien dépendre du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in N}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré. En effet, soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(D'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < k,\ |y| < k\} \text{ et } D_0 = D_1$$

et

$$D'_k = \{(x, y) \in R^2 : |x| < 2k,\ |y| < k\} \text{ et } D'_0 = D'_1$$

et soit f la fonction continue, qui, à tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, fait correspondre le nombre réel $x^2 - y^2$. Alors, puisque pour tout entier $k > 0$:

$$d_k = \iint_{D_k} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

et

$$\begin{aligned} d'_k &= \iint_{D'_k} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2k \int_{-2k}^{2k} x^2\mathrm{d}x - 4k \int_{-k}^{k} y^2\mathrm{d}y = 2k(16/3)k^3 - 4k(2/3)k^3 \\ &= 8k^4, \end{aligned}$$

on voit que la suite (d_k) converge vers zéro, tandis que la suite (d'_k) diverge.

Néanmoins, si on fait l'hypothèse supplémentaire que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, la suite (d_k) converge et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré. C'est ce que nous allons démontrer à présent grâce au théorème 17.5.8.

17.5.8 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. Alors, la suite (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré.

DÉMONSTRATION. Soit $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les deux fonctions auxiliaires définies respectivement par

$$g(x,y) = |f(x,y)| + f(x,y)$$

et

$$h(x,y) = |f(x,y)| - f(x,y)$$

et soit (d'_k) la suite numérique définie par

$$d'_k = \iint_{D_k} |f(x,y)| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Alors, en constatant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \geqslant 0$ et $h(x,y) \geqslant 0$, on obtient que pour tout couple d'entiers naturels $m > n$ (§ 17.2.13) :

$$d'_n + d_n = \iint_{D_n} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_m} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d'_m + d_m$$

et

$$d'_n - d_n = \iint_{D_n} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_m} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d'_m - d_m$$

ou encore

$$|d_m - d_n| \leqslant d'_m - d'_n = |d'_m - d'_n| \,;$$

ce qui entraîne, puisque la suite (d'_k) est de Cauchy, que la suite (d_k) est aussi de Cauchy et donc convergente.

Reste à démontrer que la limite de la suite (d_k) est indépendante du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ choisi. En effet, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers quelconques de $\mathbb{R}^2$. D'une part, d'après ce qui vient d'être démontré, on sait que les deux suites (a_k) et (b_k) définies respectivement par

$$a_k = \iint_{A_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$b_k = \iint_{B_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sont convergentes ; posons

$$a = \lim_{k\to+\infty} a_k \quad \text{et} \quad b = \lim_{k\to+\infty} b_k.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 17.5.2, il est possible d'obtenir par récurrence une suite strictement croissante (k_q) d'éléments de $\mathbb{N}$ telle que, en posant $k_0 = 0$,

$$A_{k_0} \subset B_{k_1} \subset A_{k_2} \subset \ldots \subset A_{k_{2p}} \subset B_{k_{2p+1}} \subset A_{k_{2p+2}} \subset \ldots \,.$$

Ainsi, en posant

$$D_q = \begin{cases} A_{k_q} & \text{si} \quad q \text{ est pair} \\ B_{k_q} & \text{si} \quad q \text{ est impair} \end{cases}$$

on obtient un recouvrement régulier $(D_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$. De plus, du fait que la suite (d_q) définie par

$$d_q = \iint_{D_q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, on a aussi

$$a = \lim_{p\to+\infty} a_{k_{2p}} = \lim_{p\to+\infty} d_{2p} = \lim_{p\to+\infty} d_{2p+1} = \lim_{p\to+\infty} b_{k_{2p+1}} = b.$$

D'où le théorème. ■

17.5.9 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. Alors, la limite de la suite numérique (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ est appelée l'*intégrale double* de f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}.$$

Cette définition a bien un sens, car cette limite existe et ne dépend pas du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ considéré (théorème 17.5.8).

17.5.10 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)$. D'une part, puisque pour tout entier $k \geqslant 0$ (§ 17.2.10 et 17.4.4) :

$$\begin{aligned} d_k &= \iint_{B(\mathbf{0},k+1)} |f(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \iint_{B(\mathbf{0},k+1)} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{k+1} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \leqslant \pi, \end{aligned}$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement par π. Comme de plus elle est croissante (§ 17.2.13), elle converge ; ce qui implique que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge (§ 17.5.4). D'autre part, du fait que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\iint_{B(\mathbf{0},k+1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{B(\mathbf{0},k+1)} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{k+1}\rho e^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \pi\int_0^{(k+1)^2} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t)\Big|_0^{(k+1)^2}\\ &= \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-(k+1)^2}\left(\cos((k+1)^2)-\sin((k+1)^2)\right)\right),\end{aligned}$$

on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\iint_{B(\mathbf{0},k+1)} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent (§ 17.5.9), on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

17.5.11 Linéarité d'une intégrale double définie sur $\mathbb{R}^2$
Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les intégrales doubles

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

convergent. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f+\beta g)(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Puisque pour tout $(x,y) \in D$:

$$|\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)| \leqslant |\alpha||f(x,y)| + |\beta||g(x,y)|,$$

on peut écrire (corollaire 17.2.10) que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} d_k &= \iint_{D_k} |\alpha f + \beta g|(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &\leqslant |\alpha| \iint_{D_k} |f(x,y)|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + |\beta| \iint_{D_k} |g(x,y)|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &\leqslant |\alpha| \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + |\beta| \iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,; \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante (§ 17.2.13), elle converge. Par conséquent, l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\alpha f + \beta g|(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

converge. Ainsi, en constatant que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\iint_{D_k} (\alpha f + \beta g)\ (x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \alpha \iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \beta \iint_{D_k} g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

on obtient (§ 17.5.9) que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f + \beta g)\ (x,y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \beta \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

■

17.5.12 Lemme

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'à tout nombre réel $\alpha > 0$, on puisse associer une fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$;
- l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

est absolument convergente. De plus, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et posons $\alpha_0 = |y_0| + 1$. Alors, puisque pour tout nombre réel $z > 0$:

$$\int_{-z}^{0} |f(x, y_0)| \mathrm{d}x \leqslant \int_{-z}^{0} F_{\alpha_0}(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_0}(x) \mathrm{d}x$$

et

$$\int_{0}^{z} |f(x, y_0)| \mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{z} F_{\alpha_0}(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_0}(x) \mathrm{d}x,$$

on peut affirmer (§ 10.2.10) que les deux intégrales généralisées

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x, y_0)| \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} |f(x, y_0)| \mathrm{d}x$$

convergent ; ce qui nous permet de conclure que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0) \mathrm{d}x$$

est absolument convergente, donc convergente. Ce résultat étant valable quel que soit $y_0 \in \mathbb{R}$, on peut donc considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

Montrons à présent qu'elle est continue. En effet, soit $b \in \mathbb{R}$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. Posons $\alpha_1 = |b| + 1$. Puisque l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x) \, \mathrm{d}x$$

converge, il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-c} F_{\alpha_1}(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{6} \quad \text{et} \quad \int_{c}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{6}.$$

Considérons à présent la fonction auxiliaire $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_c(y) = \int_{-c}^{c} f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

D'une part, pour tout $r \in \mathbb{R}$ vérifiant $|r-b| \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}|g(r)-g_c(r)| &= \left| \int_{-\infty}^{-c} f(x,r)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x,r)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-c} |f(x,r)|\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} |f(x,r)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-c} F_{\alpha_1}(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction g_c étant continue (§ 14.3.20), il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $|s-b| \leqslant \delta_1$:

$$|g_c(s) - g_c(b)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, en posant $\delta = \min\{1, \delta_1\}$, on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|y-b| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}|g(y)-g(b)| &= |(g(y)-g_c(y)) + (g_c(y)-g_c(b)) + (g_c(b)-g(b))| \\ &\leqslant |g(y)-g_c(y)| + |g_c(y)-g_c(b)| + |g_c(b)-g(b)| \leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

17.5.13 Théorème des intégrations successives

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'à tout nombre réel $\alpha > 0$, on puisse associer une fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$;
- l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

De plus, on suppose que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. Alors,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et fixons-nous un nombre $t > 0$. Alors, il existe une fonction continue $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $|y| \leqslant t$ et tout $x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant f(x,y) \leqslant F_t(x)$ et dont l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x$$

converge ; ce qui entraîne, entre autres, l'existence d'un nombre réel $a > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-a} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{4t} \quad \text{et} \quad \int_{a}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{4t}.$$

Considérons à présent la fonction continue (lemme 17.5.12) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $|y| \leqslant t$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant g(y) - \int_{-a}^{a} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+a} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-a} F_t(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{2t}\,, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\int_{-t}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-t}^{t} \left(\int_{-a}^{a} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \, + \epsilon \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \epsilon.$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on a donc démontré que pour tout nombre $t > 0$:

$$\int_{-t}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

De cette inégalité et du fait que $g \geqslant 0$, on peut déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$$

converge (§ 10.2.10) et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Montrons à présent que l'on a aussi l'inégalité inverse. En effet, soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < k, \ |y| < k\} \quad \text{et} \quad D_0 = D_1.$$

Puisque pour tout entier $k > 0$:

$$\int_{-k}^{k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \ \leqslant \ g(y),$$

on peut écrire

$$d_k = \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{-k}^{k} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\ ;$$

ce qui implique que la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge et l'on a :

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{k\to+\infty} d_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré le théorème pour $f \geqslant 0$, à savoir :

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Ce résultat s'étend à une fonction ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = f^+ - f^-$ où $f^+, f^- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f^+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}$$

et

$$f^-(x,y) = -\min\{f(x,y), 0\}$$

et en constatant que $f^+ \geqslant 0$ et $f^- \geqslant 0$ et qu'elles vérifient les hypothèses du théorème, on peut écrire, grâce à la linéarité des intégrales, que

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^-(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^-(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(f^+ - f^-\right)(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

■

17.5.14 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(x,y) = \frac{1+y^2}{(1+y^4)\big(1+(1+y^2)^2x^2\big)}\ .$$

D'une part, à tout nombre réel $\alpha > 0$ associons la fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_\alpha(x) = \frac{1+\alpha^2}{1+x^2} \, .$$

Alors, pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$ et l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \pi\,(1+\alpha^2)$$

converge. D'autre part, soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \ < k, \quad |y| \ < k\} \quad \text{et} \quad D_0 = D_1.$$

Puisque, pour tout entier $k > 0$:

$$\begin{aligned} d_k = \iint_{D_k} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-k}^{k} \left(\int_{-k}^{k} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\,(1+(1+y^2)^2x^2)}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= 2\int_{-k}^{k} \frac{\arctan\,(k(1+y^2))}{1+y^4}\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \pi \int_{-k}^{k} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} \leqslant \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4}, \end{aligned}$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge ; ce qui entraîne (§ 17.5.4) que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. On a ainsi démontré que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème 17.5.13. Par conséquent

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\big(1+(1+y^2)^2x^2\big)}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en utilisant

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{y+(\sqrt{2}/2)}{y^2+\sqrt{2}y+1} - \frac{y-(\sqrt{2}/2)}{y^2-\sqrt{2}y+1} \right) \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{1}{y^2-\sqrt{2}y+1} \right) \end{aligned}$$

et la section 9.3.

17.5.15 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $F(x) = e^{-x^2}$. Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, posons $F_\alpha = F$. Alors, pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$ et l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$$

converge. D'autre part, puisque pour tout entier $k > 0$ (§ 17.4.4) :

$$d_k = \iint_{B(\mathbf{0},k)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k \rho\, e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho \right) \mathrm{d}\theta = \pi\,(1 - e^{-k^2}) \leqslant \pi,$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge ; ce qui entraîne (§ 17.5.4) que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge. On a ainsi démontré que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème 17.5.13. Par conséquent

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \right)^2 .\end{aligned}$$

Ainsi, puisque

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \pi(1 - e^{-k^2}) = \pi,$$

on obtient que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \right)^2 = \pi$$

ou encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

De ce résultat et du fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

on déduit immédiatement que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Voir aussi les paragraphes 15.1.9 et 17.4.3.

17.6 Intégrales multiples

17.6.1 Avertissement

Dans cette section, nous supposerons toujours que $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, les résultats seront donnés sans démonstration, car il suffit très souvent de recopier la démonstration qui a été donnée dans le cadre des intégrales doubles. Le cas $n = 1$ a été essentiellement déjà vu au chapitre 9, et donc nous n'insisterons pas sur ce cas.

17.6.2 Définitions préliminaires

Pavé fermé P. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un *pavé fermé* est un sous-ensemble $P \subset \mathbb{R}^n$ qui est le produit cartésien de n intervalles fermés bornés $[\, a_j, b_j \,]$:

$$P = [\, a_1, b_1 \,] \times \ldots \times [\, a_n, b_n \,]$$

avec $a_j < b_j$ dans $\mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Son volume $|P|$ est défini par

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Si $n = 2$, $P = [\, a_1, b_1 \,] \times [\, a_2, b_2 \,]$ est un rectangle fermé et le volume $|P|$ défini ci-dessus est en fait son aire.

Si $n = 3$, $P = [\, a_1, b_1 \,] \times [\, a_2, b_2 \,] \times [\, a_3, b_3 \,]$ est un cube fermé et $|P|$ est son volume au sens usuel.

L'intérieur

$$\mathring{P} =]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[$$

de P est appelé un *pavé ouvert*. Pour la définition de l'intérieur $\mathring{P}$, voir le paragraphe 13.3.2.

Subdivision σ de P. Soit, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, une subdivision σ_j de $[\, a_j, b_j \,]$:

$$\sigma_j = \{a_j = x_0^j < \ldots < x_{n_j}^j = b_j\}, \quad n_j \in \mathbb{N}^*,$$

où les indices supérieurs servent à distinguer la subdivision σ_j dont il est question. Alors le n-uple $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est appelé une *subdivision* de P. L'ensemble de toutes les subdivisions σ de P est noté $\mathcal{S}(P)$.

Exemple : $n = 2$, $[a_1, b_1] = [10, 12]$, $[a_2, b_2] = [1, 3]$,

$$\sigma_1 = \{10, 11, 12\}, \quad n_1 = 2, \quad \sigma_2 = \{1,\ 1.5,\ 2.5,\ 3\}, \quad n_2 = 3,$$

$$\sigma = \Big(\{10, 11, 12\},\ \{1,\ 1.5,\ 2.5,\ 3\}\Big).$$

Décomposition $D(\sigma)$ de P engendrée par σ. On note par $D(\sigma)$ l'ensemble des pavés fermés de la forme $[\, x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1 \,] \times \ldots \times [\, x_{j_n-1}^n, x_{j_n}^n \,]$, où $j_1 \neq 0, \ldots, j_n \neq 0$:

$$D(\sigma) = \Big\{ [\, x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1 \,] \times \ldots \times [\, x_{j_n-1}^n, x_{j_n}^n \,] :\ 0 < j_1 \leqslant n_1,\ \ldots,\ 0 < j_n \leqslant n_n \Big\}.$$

Observons que si $Q_1 \neq Q_2$ sont dans $D(\sigma)$, alors $\mathring{Q}_1$ et $\mathring{Q}_2$ sont disjoints : $\mathring{Q}_1 \cap \mathring{Q}_2 = \emptyset$, et que

$$P = \cup_{Q \in D(\sigma)} Q \quad \text{et} \quad |P| = \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q|.$$

Dans l'exemple ci-dessus,

$$D(\sigma) = \Big\{ [\,10,11\,] \times [\,1,1.5\,],\ [\,10,11\,] \times [\,1.5,2.5\,],\ [\,10,11\,] \times [\,2.5,3\,],$$
$$[\,11,12\,] \times [\,1,1.5\,],\ [\,11,12\,] \times [\,1.5,2.5\,],\ [\,11,12\,] \times [\,2.5,3\,] \Big\}.$$

Sommes de Darboux inférieure et supérieure. Pour une fonction $f : P \to \mathbb{R}$ *bornée* sur P, elles sont définies par

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q| \quad \text{et} \quad \overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|,$$

où

$$m(Q) = \inf\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q\}, \quad M(Q) = \sup\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q\}$$

et $|Q|$ est le volume du pavé fermé Q.

On définit ensuite

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \in \mathcal{S}(P)\} \quad \text{et} \quad \overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}_\sigma(f) : \sigma \in \mathcal{S}(P)\}.$$

Remarques

- Soit deux subdivisions σ et $\tilde{\sigma}$ de P. On définit la subdivision τ de P par $\tau_j = \sigma_j \cup \tilde{\sigma}_j$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et on obtient

  $$\underline{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \leqslant \underline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f).$$

  Ainsi $\underline{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f)$ pour toutes subdivisions σ et $\tilde{\sigma}$ de P, d'où

  $$\underline{S}(f) \leqslant \overline{S}(f).$$

- Si f est continue sur P (voir la définition 14.3.10), alors

  $$m(Q) = \min\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q\} \quad \text{et} \quad M(Q) = \max\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q\}.$$

17.6.3 Définition : fonction intégrable

Soit un pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : P \to \mathbb{R}$ bornée sur P.

La fonction f est dite *intégrable (au sens de Riemann) sur* P si

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

Dans ce cas, l'*intégrale de* f (sur P) est définie par $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ et elle est

notée

$$I_P(f) = \int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_P \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

On utilise aussi la terminologie *intégrale multiple* (si $n = 2$, on parle d'*intégrale double* et si $n = 3$ d'*intégrale triple*).

Remarque. Soit $K \in [\,0, +\infty[\,$. Si f est bornée et intégrable avec

$$\forall \boldsymbol{x} \in P \quad |f(\boldsymbol{x})| \leqslant K,$$

alors

$$-K|P| \leqslant \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \overline{S}_\sigma(f) \leqslant K|P|$$

pour toute subdivision σ de P.

Convention. Nous écrirons

$$I_P(f), \quad \int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \int_P \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

dans ce livre sans systématiquement préciser au préalable que f est bornée et intégrable sur le pavé fermé P.

17.6.4 Invariance de l'intégrale par permutations des variables

Soit un pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : P \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable sur P. Soit encore une bijection $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ (on dit que π est une *permutation* de n éléments). Alors la fonction définie par

$$f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

sur le pavé fermé

$$P_\pi = \{(x_1, \ldots, x_n) : (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) \in P\}$$

est bornée et intégrable sur P_π, et

$$\int_{P_\pi} f_\pi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{P_\pi} \cdots \int f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

17.6.5 Intégrabilité des fonctions continues

Soit un pavé fermé

$$P = [\,a_1, b_1\,] \times \ldots \times [\,a_n, b_n\,]$$

et une fonction $f : P \to \mathbb{R}$ *continue* sur P. Alors f est intégrable sur P et, si de plus $n \geqslant 2$, l'intégrale se calcule à l'aide d'intégrations itérées (théorème de Fubini) :

$$\int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \right) \dots \mathrm{d}x_{n-1} \right) \mathrm{d}x_n \,.$$

Remarque. En utilisant l'invariance de l'intégrale par permutations, on obtient immédiatement l'égalité de l'intégrale avec des intégrales à une variable itérées dans n'importe quel ordre. Par exemple

$$\int_P f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \dots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \,.$$

17.6.6 Ensemble de mesure nulle au sens de Jordan

Un sous-ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est dit de *mesure nulle au sens de Jordan* (dans $\mathbb{R}^n$) si

pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ est des pavés fermés $Q_1, \dots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{k} Q_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{k} |Q_j| \leqslant \epsilon.$$

Dans ce cas, nous noterons $|N|_J = 0$.

17.6.7 Proposition sur les ensembles de mesure nulle

- Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenant un nombre fini d'éléments (ou vide), alors $|A|_J = 0$.
- Toute réunion finie d'ensembles de mesure nulle au sens de Jordan est de mesure nulle au sens de Jordan.

17.6.8 Définition : fonction intégrable

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E et un pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^n$ qui contient E. Posons

$$\widehat{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{x} \in E, \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{x} \in P \backslash E. \end{cases}$$

La fonction f est dite *intégrable (au sens de Riemann) sur* E si $\widehat{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur P. Dans ce cas, *l'intégrale de* f *sur* E est définie par

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_P \widehat{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Remarques

1) Cette définition ne dépend pas du choix du pavé fermé P.
2) Comme ci-dessus, l'intégrale de Riemann est invariante par permutations des variables.
3) Si $N \subset \mathbb{R}^n$ satisfait $|N|_J = 0$, alors N est borné. De plus, si la fonction $f : N \to \mathbb{R}$ est bornée sur N, alors f est intégrable sur N et $I_N(f) = 0$.
4) Si E est borné, nous écrirons $\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ dans ce livre sans systématiquement préciser au préalable que f est bornée et intégrable sur E.

17.6.9 Proposition sur les ensembles de mesure nulle (suite)

Si B est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et si $\varphi : B \to \mathbb{R}$ est bornée et intégrable au sens de Riemann sur B, alors le graphe

$$G(\varphi) = \{(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in B\} \subset \mathbb{R}^3$$

satisfait $|G(\varphi)|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Ceci reste valable lorsque $\mathbb{R}^2$ est remplacé par $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.

17.6.10 Théorème : condition suffisante d'intégrabilité

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E et un sous-ensemble fermé $N \subset \mathbb{R}^n$.

Si le bord ∂E de E et N satisfont

$$|\partial E|_J = |N|_J = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n,$$

et si f est continue en tout point de l'ouvert $\mathring{E}\backslash N$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur E.

Si de plus $f(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathring{E}\backslash N$, alors $\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

En particulier, soit E un sous-ensemble borné non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $|\partial E|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors, le nombre réel $I_E(1) \geqslant 0$ est appelé le *volume* de E et est noté $\mathrm{Vol}(E)$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(E) = I_E(1) = \int\limits_E \mathrm{d}\boldsymbol{x}.}$$

Lorsque $n = 3$, ceci correspond bien à la notion intuitive de volume.

17.6.11 Théorème de Fubini dans l'espace : trois intégrales itérées

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C([\,a, b\,], \mathbb{R})$, $\varphi_1 < \varphi_2$ sur $]a, b[$,

$$D = \{\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

et

$$\overline{D} = \{\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

Soit encore $G, H \in C(\overline{D}, \mathbb{R})$, $G < H$ sur D,

$$E = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ G(x, y) < z < H(x, y)\}$$

et $f \in C(\overline{E}, \mathbb{R})$, où

$$\overline{E} = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{D},\ G(x, y) \leqslant z \leqslant H(x, y)\}.$$

Alors f est intégrable au sens de Riemann sur E et sur $\overline{E}$, et

$$\boxed{\int\limits_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\overline{E}} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) \mathrm{d}x.}$$

Remarque. Dans la pratique, il peut être avantageux d'appliquer le théorème après avoir changé l'ordre des variables x, y et z.

17.6.12 Exemple

Soit $E = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < x < 1\}$ et la fonction $f \in C(\overline{E}, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y, z) = e^{x^3} = \exp(x^3)$.

L'ensemble E s'écrit aussi

$$E = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x,\ 0 < z < y\}.$$

Par ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{\overline{E}} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y e^{x^3}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x ye^{x^3}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} e^{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(e - 1). \end{aligned}$$

En considérant les variables dans l'ordre x, z et y, on obtient

$$E = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\, 0 < z < x,\, z < y < x\}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\overline{E}} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_z^x e^{x^3}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x (x-z)e^{x^3}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(e-1).\end{aligned}$$

Essayer d'autres permutations des variables x, y et z.

17.6.13 Théorème : division du domaine d'intégration

Soit un sous-ensemble borné $E \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée sur E, $k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ et des sous-ensembles $E_1, \ldots, E_k \subset E$ tels que $E = \cup_{j=1}^k E_j$.

Si

$$|E_j \cap E_\ell|_J = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^n \ \text{ pour tout } \ 1 \leqslant j < \ell \leqslant k$$

et si f est intégrable au sens de Riemann sur E_j pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur E et

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^k \int_{E_j} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Remarque. Dans la pratique, lorsque $n \in \{2, 3\}$, les E_j sont choisis de telle manière que, pour calculer

$$\int_{E_j} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

on puisse appliquer une des formules de Fubini d'intégrations itérées.

17.6.14 Théorème : changement de variables

Soit D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ tels que $|\partial D|_J = 0$ et $|\partial E|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit encore Ψ une bijection de E dans D de classe C^1 et telle que son jacobien (ou déterminant de Jacobi, voir § 15.5.5 et

§ 16.6.4)

$$\frac{D(\Psi_1,\dots,\Psi_n)}{D(u_1,\dots,u_n)}(\boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) & \dots & \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial u_n}(\boldsymbol{u}) \\ \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) & \dots & \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial u_n}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\Psi_n}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dfrac{\partial\Psi_n}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) & \dots & \dfrac{\partial\Psi_n}{\partial u_n}(\boldsymbol{u}) \end{vmatrix}$$

est borné sur E et ne s'annule en aucun point $\boldsymbol{u} \in E$.

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_E f\Big(\boldsymbol{x} = \Psi(\boldsymbol{u})\Big)\left|\frac{D(\Psi_1,\dots,\Psi_n)}{D(u_1,\dots,u_n)}(\boldsymbol{u})\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u},$$

où la valeur absolue du jacobien apparaît dans l'intégrale.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, soit le parallélépipède ouvert

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < 3,\ -y < x < 2-y,\ -\frac{2x+y}{3} < z < \frac{4-(2x+y)}{3}\right\}.$$

Par le théorème de Fubini dans l'espace (§ 17.6.11), son volume vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(A) &= \int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \left(\int_{-y}^{2-y}\left(\int_{-(2x+y)/3}^{(4-(2x+y))/3}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^3 \left(\int_{-y}^{2-y}\frac{4}{3}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{8}{3}\mathrm{d}y = 8.\end{aligned}$$

Il est également facile d'effectuer un changement de variables. Pour ce faire, définissons

$$u = H_1(x,y,z) = y,\ \ \upsilon = H_2(x,y,z) = x+y,\ \ w = H_3(x,y,z) = 2x+y+3z,$$

pour $(x,y,z) \in A$. Alors $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ est une bijection de A dans le sous-ensemble ouvert

$$B = \left\{(u,\upsilon,w) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < u < 3,\ 0 < \upsilon < 2,\ 0 < w < 4\right\}.$$

Le jacobien de $\boldsymbol{H}$ est

$$\frac{D(H_1,H_2,H_3)}{D(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

qui est une constante non nulle. Soit $\Psi : B \to A$ la fonction réciproque. Son jacobien vaut $1/(-3)$ car $\Psi \circ \boldsymbol{H}$ est l'application identique sur A et donc le produit des jacobiens constants de Ψ et $\boldsymbol{H}$ vaut 1 (le jacobien de l'application identique, voir § 16.6.5 en annexe). Le théorème du changement de variables donne

$$\mathrm{Vol}\,(A) = \int_B |-1/3|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\int_B \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\mathrm{Vol}\,(B) = \frac{24}{3} = 8.$$

17.6.15 Intégration sur tout $\mathbb{R}^n$ d'une fonction continue

Supposons que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit un *recouvrement régulier* de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :
- chaque D_k est un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$;
- $|\partial D_k|_J = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- $D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_{k-1} \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$;
- à tout nombre réel $r > 0$, on peut associer un entier $k(r) \geqslant 0$ tel que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leqslant r, \ldots, |x_n| \leqslant r\} \subset D_{k(r)}.$$

Supposons aussi que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue. Alors, si la suite $(I_{D_k}(|f|))$ converge, la suite $(I_{D_k}(f))$ converge aussi et sa limite ne dépend pas du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^n$ considéré (comme au théorème 17.5.8). Par définition, cette limite est appelée l'*intégrale multiple* (si $n = 2$, on parle d'*intégrale double* et si $n = 3$ d'*intégrale triple*) de f sur $\mathbb{R}^n$ et on écrit

$$I_{\mathbb{R}^n}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \lim_{k\to+\infty} I_{D_k}(f).$$

17.6.16 Remarque

Notons que tous les résultats donnés dans ce livre concernant les intégrales doubles restent valables pour les intégrales multiples.

17.6.17 Coordonnées cylindriques

Soit $r \in]0, +\infty[$, $h_1 < h_2$ deux nombres réels et D le cylindre défini par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < r^2,\ h_1 < z < h_2\}.$$

Alors, pour toute fonction $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \tag{17.1}$$

(Cette égalité reste valable si on permute l'ordre des intégrations.) En particulier,

$$V(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z = \pi r^2 (h_2 - h_1).$$

Pour prouver (17.1), on considère la bijection $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : E \to F$ définie par

$$E = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho < r,\ \theta \in]0, 2\pi[,\ h_1 < z < h_2\},$$

$$F = D \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}$$

et

$$\Psi_1(\rho, \theta, z) = \rho\cos\theta, \quad \Psi_2(\rho, \theta, z) = \rho\sin\theta, \quad \Psi_3(\rho, \theta, z) = z.$$

Voir la figure 17.10.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{D(\rho, \theta, z)}(\rho, \theta, z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}(\rho, \theta, z) \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}(\rho, \theta, z) \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial \Psi_3}{\partial z}(\rho, \theta, z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \rho > 0
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &\overset{\S\ 17.6.13}{=} \iiint_F f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\S\ 17.6.14}{=} \iiint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\S\ 17.6.13}{=} \iiint_{\bar{E}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\S\ 17.6.5}{=} \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

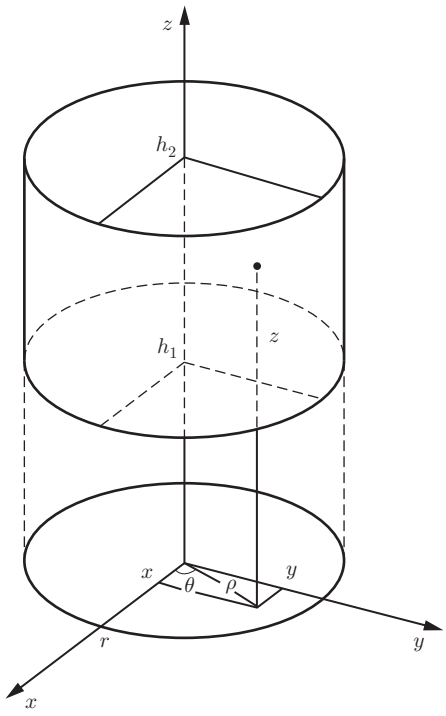


Fig. 17.10

17.6.18 Coordonnées sphériques

Soit r un nombre réel positif et $f : \overline{B(\mathbf{0},r)} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\iiint_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{r} f(\rho\sin\beta\cos\theta,\rho\sin\beta\sin\theta,\rho\cos\beta)\rho^2\sin\beta\;\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\theta \tag{17.2}$$

(Cette égalité reste valable si on permute l'ordre des intégrations.) En particulier,

$$\begin{aligned} V(B(\mathbf{0},r)) &= \iiint_{B(\mathbf{0},r)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{r}\rho^2\sin\beta\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Pour prouver (17.2), on considère la bijection $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : E \to D$ définie par

$$E = \{(\rho, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho < r,\ \beta \in]0, \pi[\,,\ \theta \in]0, 2\pi[\},$$

$$D = B(\mathbf{0}, r) \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}$$

et

$$\Psi_1(\rho, \beta, \theta) = \rho \sin\beta \cos\theta, \quad \Psi_2(\rho, \beta, \theta) = \rho \sin\beta \sin\theta, \quad \Psi_3(\rho, \beta, \theta) = \rho \cos\beta.$$

Voir la figure 17.11

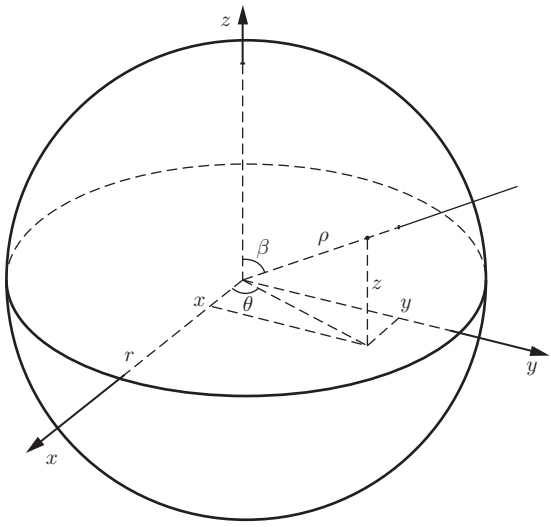


Fig. 17.11

On a

$$\begin{aligned}
\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{D(\rho, \beta, \theta)}(\rho, \beta, \theta) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \rho}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \beta}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(\rho, \beta, \theta) \\ \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \rho}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \beta}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\rho, \beta, \theta) \\ \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial \rho}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial \beta}(\rho, \beta, \theta) & \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial \theta}(\rho, \beta, \theta) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\beta\cos\theta & \rho\cos\beta\cos\theta & -\rho\sin\beta\sin\theta \\ \sin\beta\sin\theta & \rho\cos\beta\sin\theta & \rho\sin\beta\cos\theta \\ \cos\beta & -\rho\sin\beta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \rho^2 \sin\beta > 0
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\iiint_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &\overset{\S\ 17.6.13}{=} \iiint_{D} f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\S\ 17.6.14}{=} \iiint_{E} f(\rho\sin\beta\cos\theta,\rho\sin\beta\sin\theta,\rho\cos\beta)\rho^2\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\beta \\
&\overset{\S\ 17.6.13}{=} \iiint_{\bar{E}} f(\rho\sin\beta\cos\theta,\rho\sin\beta\sin\theta,\rho\cos\beta)\rho^2\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\beta \\
&\overset{\S\ 17.6.5}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{r} f(\rho\sin\beta\cos\theta,\rho\sin\beta\sin\theta,\rho\cos\beta)\rho^2\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

17.6.19 Volume d'un ellipsoïde

Soit a, b, c trois nombres réels positifs et D l'ellipsoïde défini par (fig. 17.12)

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1\right\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
V(D) &= \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

avec $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\theta$, et on a

$$V(D) = 2bc\left(\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4\pi abc}{3}.$$

17.6.20 Volume de la boule dans $\mathbb{R}^n$

Soit r un nombre réel positif et désignons par $V_n(r)$ le volume de la boule $B_n(\mathbf{0},r) = \{(x_1,\ldots,x_n\}\in\mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} < r\}$. Puisque $V_2(r) = \pi r^2$ (§ 17.4.5) et $V_3(r) = (4\pi/3)r^3$ (§ 17.6.18), il semblerait que $V_n(r) = \alpha_n\, r^n$ avec

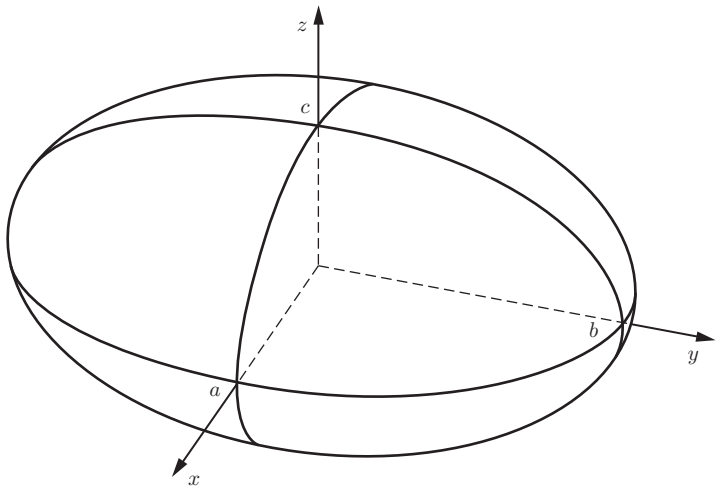


Fig. 17.12

$\alpha_n \in]0, +\infty[$. En effet, supposons le résultat vrai pour un entier $n \geqslant 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(r) &= \int\limits_{B_{n+1}(\mathbf{0},r)} \dots \int \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{B_n\left(\mathbf{0},\sqrt{r^2-x_{n+1}^2}\right)} \dots \int \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int\limits_{-r}^{r} \alpha_n (r^2 - x_{n+1}^2)^{n/2} \mathrm{d}x_{n+1} \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_n r^{n+1} \cos^{n+1}\theta \mathrm{d}\theta \quad (\text{avec } x_{n+1} = r\sin\theta) \\
&= \left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_n \cos^{n+1}\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \cdot r^{n+1} = \alpha_{n+1} r^{n+1}.
\end{aligned}$$

Puisque le résultat est vrai pour $n = 2$, on a ainsi démontré, par récurrence, qu'à tout entier $n \geqslant 2$, on peut associer un nombre réel $\alpha_n > 0$ tel que $V_n(r) = \alpha_n r^n$. De plus, pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

On se propose à présent de calculer les α_n. Pour cela, considérons la suite (β_n) définie par

$$\beta_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta \, \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

On sait, d'après l'exercice 9.6.4, que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\beta_n = \frac{n-1}{n}\beta_{n-2};$$

ce qui implique, du fait que $\beta_0 = \pi$ et $\beta_1 = 2$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n\beta_{n-1} = \frac{2\pi}{n}.$$

De ce résultat, on déduit que pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n}\alpha_{n-2}.$$

Finalement, puisque $\alpha_2 = \pi$ et $\alpha_3 = 4\pi/3$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

17.7 Exercices

17.7.1 Calculer

1) $\displaystyle\iint_D x^2y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, x^2 + y^2 > 4, xy < 4\}$

2) $\displaystyle\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1,\ x - y > 0,\ 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 < 36\}$$

3) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{\sqrt{xy}}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2,\ 4 < xy < 8,\ 4x - y - 4 < 0\}$

4) $\displaystyle\iint_D (x^3 + y^3) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$

5) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x+y)^3}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1, (x+y) < 3\}$

6) $\displaystyle\iint_D \cos\left(x^2+y^2-4x+4\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0,\ 1<(x-2)^2+y^2<4\}$$

7) $\displaystyle\iint_D |(x-y)(x+y-2)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x, x+y-2<0\}$

8) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$.

9) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\left(\frac{1}{3}+x^2+y^2\right)^{3/2}}$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<\sqrt{2},\ 0<y<\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right\}$.

17.7.2 Calculer

1) $\displaystyle\int_4^6\left(\int_1^{x/2}\frac{dy}{\sqrt{(8-x)(x-y)}}\right)\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

17.7.3 Calculer

1) $\displaystyle\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1<x^2+y^2+z^2<4\}$

2) $\displaystyle\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^2}$ où

$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0, z>0, x+y+z<1\}$

3) $\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<4-x^2-y^2\}$

4) $\displaystyle\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<4\}$

5) $\displaystyle\iiint_D z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<z<3, x^2+y^2<z^2\}$

6) $\displaystyle\iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>0,\ x^2+y^2<1,\ x^2+y^2+z^2<4\}$.

7) $\iiint_D (x+y+z)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où

$D\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 2z, x^2+y^2+z^2 < 3\}$

8) $\iiint_D e^x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4,\ x^2+z^2 < 4\}$.

17.7.4 En effectuant le changement de variables $x = u^2$ et $y = v/u$, calculer

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x)(1+xy^2)} \quad \text{où} \quad D = \{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

17.7.5 En effectuant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$ calculer

$$\iint_D e^{(x-y/x+y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = \{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \frac{1}{2} < x+y < 1\}.$$

17.7.6 En effectuant le changement de variables $x = u$ et $y = u\tan\theta$, calculer

$$\lim_{t\to 0+} \int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

17.7.7 Trouver l'aire du domaine délimité par la cardioïde $\varphi(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.

17.7.8 Calculer l'aire du domaine délimité par la lemniscate $\varphi^2(\theta) = a^2\cos 2\theta$, $a > 0$.

17.7.9 Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que

$$\iint_D fg(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_D g^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes (§ 12.4.3).

17.7.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$. Calculer

$$\iint_D \frac{2f(x)+5f(y)}{f(x)+f(y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}.$$

17.7.11 Soit $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire (c'est-à-dire telle que $f(-t) = f(t)$). Montrer que

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^2 (2-t)f(t)\mathrm{d}t \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}.$$

17.7.12 Soit $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(r,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}r.$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y)$.

17.7.13 Calculer

1) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^4)(1+y^4)}$

3) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

4) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

17.7.14 Calculer le volume de la boule $B_n(0,r)$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

Bibliographie

[1] J. Bass, *Cours de mathématiques*, tome 2, Masson, Paris 1971.

[2] S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, 2e éd., Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2014.

[3] Ch. Blanc, *Calcul différentiel et intégral*, EPFL, Lausanne 1970.

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Cours d'analyse*, tomes 1 à 5, collection U, Armand Colin, Paris 1976.

[5] L. Chambadal, J.L. Ovaert, *Cours de mathématiques*, tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, Paris 1966.

[6] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, tomes 1 et 2, collection U, Armand Colin, Paris 1967.

[7] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, tome 1, cahiers scientifiques, fascicule XXVIII, Gauthier-Villars, Paris 1972.

[8] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle*, tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, Paris 1969.

[9] J. Douchet, *Analyse : Recueil d'exercices et aide-mémoire*, volumes 1 et 2, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 2005.

[10] P. M. Fitzpatrick, *Advanced Calculus, Second Edition, A course in Mathematical Analysis*, AMS, 2006.

[11] W.A. Granville, P.F. Smith, W.R. Longley, *Eléments de calcul différentiel et intégral*, Vuibert, Paris 1970.

[12] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, tomes 1 et 2, Mir, Moscou 1980.

[13] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, tomes 3 et 4, Masson, Paris 1976.

[14] K. Rektorys, Ed., *Survey of Applicable Mathematics*, M.I.T. Press, Iliffe Books Ltd, 1969.

[15] V. Smirnov, *Cours de mathématiques*, tomes 1 et 2, Mir, Moscou 1969.

[16] M. Troyanov, *Cours de géométrie*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2013.

[17] G. Valiron, *Cours d'analyse mathématique : théorie des fonctions*, Masson, Paris 1966.

Index

Abscisses (axe des –), 81, 358
Absolue (valeur –), 13, 85
Absolument convergente
    (intégrale –), 265, 273, 275, 278, 284
    (série –), 71
Accroissements finis (théorème des –), 141
Accumulation (point d'–), 354
Adhérence (l'–), 344
Aire, 233, 490
    d'une surface de révolution, 238
Application, 81, 357
    linéaire, 452
    identique, 84
    réciproque, 83
Arc(s)
    (connexe par –), 349
    (longueur d'un – de courbe), 476
    (longueur d'un –), 235
    cosinus (fonction –), 110
    cotangente (fonction –), 112
    de courbe, 473
    sinus (fonction –), 109
    tangente (fonction –), 111
Archimède (axiome d'–), 11
Argument, 23
    cosinus hyperbolique (fonction –), 192
    cotangente hyperbolique (fonction –), 193
    sinus hyperbolique (fonction –), 191
    tangente hyperbolique (fonction –), 192
Asymptote, 167
Axe, 81
Axiome d'Archimède, 11
Axiomes des nombres réels, 5

Banach (théorème du point fixe de –), 114
Bernoulli (équation de –), 304
Bernoulli–L'Hospital (règle de –), 145
Bijective (application –), 83
Binôme
    (formule du –), 3
Binomial
    (coefficient –), 2
Bolzano-Weierstrass (théorème de –), 59, 338
Bord, 345
Borne
    inférieure, 7
    supérieure, 7
Borné (ensemble –), 7, 347
Bornée
    (fonction –), 85, 358
    (suite –), 334
Bornes d'un intervalle, 6
Boule
    fermée, 345
    ouverte, 6, 339
Branche parabolique, 169

Calcul intégral (théorème fondamental du –), 221, 223
Cartésienne (forme –), 18
Cauchy
    (critère de –), 72, 92, 101
    (suite de –), 62, 337
Cauchy–Schwarz (inégalité de –), 186, 226, 356, 493
Centre
    d'une boule ouverte, 6
    de symétrie, 88
Champ de vecteurs, 469
    irrotationnel, 470
    solénoïdal, 469

Champ vectoriel, 469
Changement de variable, 228, 501
Chemin, 348
Clairaut (équation de –), 327
Classe
  C^1, 387
  C^∞, 405
  C^p, 405
  (courbe de – C^∞), 473
  (courbe de – C^k), 473
Coefficient binomial, 2
Compact (ensemble), 347
Comparaison (critère de –), 73
Complexe
  (plan –), 20
  (nombre –), 17
Composée (fonction –), 84
Concave (fonction –), 163
Condition initiale, 298, 302, 304
Conjugué, 19
Connexe par arcs, 349
Continue
  par morceaux (fonction –), 250
  à droite (fonction –), 103
  à gauche (fonction –), 103
  (fonction –), 100, 365, 369
Continuité uniforme, 104, 370
Continûment différentiable (fonction –), 135
Contractante (fonction –), 114
Convergence
  (domaine de –), 199
  (intervalle de –), 201
  monotone (théorème de la –), 228
  (rayon de –), 201
  simple, 116
  uniforme, 116
  uniforme (théorème de la –), 227
Convergente
  (intégrale –), 261, 272, 274, 276, 284
  (intégrale absolument –), 265, 273, 275, 278, 284
  (série –), 71
  (série absolument –), 71
  (suite –), 40, 334
Convexe (fonction –), 161
Coordonnées
  cylindriques, 529
  sphériques, 531
Corps
  archimédien, 10
  de révolution (volume d'un –), 240
  des nombres réels, 4
  ordonné, 5
Cosinus hyperbolique (fonction –), 189
Cotangente hyperbolique (fonction –), 190
Cotes (axes des –), 358
Courbe, 471
  (arc de –), 473
  dérivable, 472
  de classe C^∞, 473
  de classe C^k, 473
  différentiable, 472
  régulière, 473
  simple, 473
Croissante
  (fonction –), 88
  (fonction strictement –), 88
  (suite –), 37
  (suite strictement –), 37

D'Alembert
  (critère de –), 76
  (règle de –), 50
Darboux (sommes de –), 214, 479, 522
Décomposition en éléments simples, 240
Décroissante
  (fonction –), 88
  (fonction strictement –), 88
  (suite –), 37
  (suite strictement –), 37
Définition (domaine de –), 81
Dense, 10
Dérivable (courbe –), 472
Dérivée, 127
  à droite, 134

à droite infinie, 135
à gauche, 134
à gauche infinie, 135
d'ordre p, 135
dans la direction $\boldsymbol{v}$, 454
directionnelle, 453, 464
infinie, 129
Dérivée partielle, 385, 387, 452, 463
d'ordre p, 405
seconde, 405
Déterminant de Jacobi, 466
Développement limité, 148
Différentiable
(courbe –), 472
(fonction –), 128, 455, 464
(fonction indéfiniment –), 135
(fonction n fois –), 135
(fonction n fois continûment –), 135
Différentielle, 454, 455, 465
(forme –), 412
Dini (théorème de –), 119
Direction asymptotique, 168
Discontinue (fonction –), 101
Distance d'un point, 378
Divergence, 469
Divergente
(intégrale –), 262, 272, 274, 277, 284
(série –), 71
(suite –), 40, 334
Domaine
de convergence, 199
de définition, 81, 357
Droite
(dérivée à –), 134
(dérivée infinie à –), 135
(fonction continue à –), 103
(fonction définie à –), 99
(fonction dérivable à –), 134
(limite à –), 99
numérique achevée, 14
Droite tangente, 473

Egalité de Pythagore, 356
Eléments
d'une suite, 37, 333
simples (décomposition en –), 240
Ensemble
borné, 7, 347
compact, 347
d'arrivée, 81
de départ, 81, 357
de mesure nulle au sens de Jordan, 488, 524
fermé, 341
majoré, 7
minoré, 7
ouvert, 340
vide, 6
Entier
naturel, 1
relatif, 1
Équation
d'onde, 409
de Laplace, 427
Équation différentielle, 297
à variables séparées, 298, 299
de Bernoulli, 304
de Clairaut, 327
de Riccati, 326
homogène, 306
linéaire, 298, 306, 310, 321
Espace vectoriel, 331
Euclidienne (norme –), 332
Euler
(formule d'–), 26
(relation d'–), 403
(théorème d'–), 403
Exacte (forme différentielle –), 412
Exponentielle
de base a (fonction –), 180
(fonction –), 177
(fonction complexe), 26
Extrema liés, 433, 439
Extrémité, 6
d'un chemin, 348
Extremum local, 86

Facteur intégrant, 298, 415
Factorisation
d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, 33

d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, 33
Fermée (boule–), 345
Fermé
(ensemble –), 341
(intervalle –), 6, 15
Fonction, 81, 357
bornée, 85, 358
composée, 84
concave, 163
continue, 100
continue à droite, 103
continue à gauche, 103
continue en un point, 365
continue par morceaux, 250
continue sur un ensemble, 369
contractante, 114
convexe, 161
croissante, 88
décroissante, 88
définie à droite, 99
définie à gauche, 99
dérivable, 127
dérivable à droite, 134
dérivable à gauche, 134
dérivée, 127, 129
différentiable, 128, 455, 464
discontinue, 101
exponentielle, 177
exponentielle complexe, 26
harmonique, 427, 470
homogène, 402
impaire, 88
intégrable, 481, 489, 522, 524
intégrable sur un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$, 489
lipschitzienne, 114
logarithme, 178
logarithme complexe, 35
majorée, 85
minorée, 85
paire, 88
périodique, 88
puissance, 184
rationnelle, 240
réelle d'une variable réelle, 81
uniformément continue, 104, 370
Fonctions
hyperboliques, 188
hyperboliques réciproques, 191
linéairement dépendantes, 311
linéairement indépendantes, 311
Forme
cartésienne, 18
différentielle, 412
différentielle exacte, 412
indéterminée, 52, 98
polaire, 22
Formule
d'Euler, 26
d'intégration par parties, 230
d'intégrations successives, 516
de Leibniz, 172
de MacLaurin, 150
de Moivre, 27
de Taylor, 150, 410
du binôme, 3
du changement de variable, 228
Frontière, 345
(point –), 345
Fubini (théorème de –), 483, 524, 526

Gauche
(dérivée à –), 134
(dérivée infinie à –), 135
(fonction continue à –), 103
(fonction définie à –), 99
(fonction dérivable à –), 134
(limite à –), 99
Gendarmes (théorème des deux –)
pour les fonctions, 94, 364
pour les suites, 48
Gradient, 453, 469
Graphe, 81, 357
Graphique, 81, 357

Hélice circulaire, 475
Harmonique
alternée (série –), 74
(fonction –), 427, 470
(série –), 72

Heine–Borel–Lebesgue (théorème de –), 9, 352
Hölder (inégalité de –), 186, 493
Homogène
(équation différentielle –), 306
(fonction –), 402
Hyperboliques
(fonctions –), 188
réciproques (fonctions –), 191

Image, 81, 84, 357, 471
réciproque, 84
Imaginaire
(nombre purement –), 18
(partie –), 18
(unité –), 17
Impaire (fonction –), 88
Implicites (théorème des fonctions –), 429, 435
Indéterminée (forme –), 52, 98
Induction (raisonnement par –), 1
Inégalité
de Cauchy–Schwarz, 186, 226, 356, 493
de Hölder, 186, 493
de Minkowski, 187, 494
triangulaire, 13, 332
triangulaire inverse, 14, 332
Inférieure
(borne –), 7
(limite –), 57
Infimum, 7, 85
Infini (voisinage de l'–), 96
Inflexion (point d'–), 158
Injection, 83
Injective (application –), 83
Intégrant (facteur –), 298, 415
Intégrale, 213, 481, 489, 522
absolument convergente, 265, 273, 275, 278, 284
convergente, 261, 272, 274, 276, 284
divergente, 262, 272, 274, 277, 284
double sur un borné de $\mathbb{R}^2$, 489
double sur un rectangle fermé, 481, 523
généralisée, 261
multiple, 523
sur $\mathbb{R}^2$, 529
sur $\mathbb{R}^3$, 529
sur $\mathbb{R}^n$, 529
triple, 523
Intégration par parties, 230
Intégrations successives (théorème des –), 516
Intérieur
(l'–), 339
(point –), 339
Intermédiaire (théorème de la valeur –), 106, 373
Intervalle
borné, 6
d'intégration, 215
de convergence, 201
de paramétrisation, 471
fermé, 6, 15
maximal, 298
non borné, 15
ouvert, 6, 15
semi-ouvert, 6
Irrationnel (nombre –), 6
Irrotationnel (champ de vecteurs –), 470

Jacobi
(déterminant de –), 466
(matrice de –), 465
Jacobien, 435, 466
Jordan (mesure nulle au sens de –), 488, 524

Lagrange (multiplicateurs de –), 433, 440
Laplacien, 427, 470
en coordonnées cylindriques, 444
en coordonnées sphériques, 444
Leibniz (formule de –), 172
Limite
d'une fonction, 90, 359
d'une suite, 40, 334
inférieure, 57
infinie, 97
simple, 116

supérieure, 56
supérieure (critère de la –), 75
uniforme, 116
Linéaire (application –), 452
Linéairement
dépendantes (fonctions –), 311
indépendantes (fonctions –), 311
Lipschitzienne (fonction –), 114
Logarithme
(fonction –), 178
(fonction complexe), 35
de base a (fonction –), 180
Longueur d'un arc, 235
de courbe, 476

MacLaurin
(formule de –), 150
(polynôme de –), 151
(série de –), 205
Majorant, 7, 37
Majoré (ensemble –), 7
Majorée
(fonction –), 85
(suite –), 37
Matrice
de Jacobi, 465
jacobienne, 465
Maximum, 87, 371
d'un ensemble, 7
local, 86, 419
Mesure nulle au sens de Jordan, 488, 524
Méthode de la variation
de la constante, 307, 313
des constantes, 316
Méthode des coefficients indéterminés, 323
Minimum, 87, 371
d'un ensemble, 7
local, 86, 419
Minkowski (inégalité de –), 187, 494
Minorant, 7, 37
Minoré (ensemble –), 7
Minorée
(fonction –), 85
(suite –), 37
Module, 19, 23
Moivre (formule de –), 27
Monotone
(fonction –), 88
(fonction strictement –), 88
(suite –), 38
(suite strictement –), 38
(théorème de la convergence –), 228
Moyenne (théorème de la –), 219, 487
Multiplicateurs de Lagrange, 433, 440

Nombre
complexe, 17
irrationnel, 6
purement imaginaire, 18
rationnel, 1
réel, 4
réel négatif, 6
réel positif, 6
Norme euclidienne, 332

Ordonné (corps –), 5
Ordonnées (axes des –), 81, 358
Origine, 81, 358
d'un chemin, 348
Ouvert
(ensemble –), 340
(intervalle –), 6, 15
Ouverte (boule –), 339

Paire (fonction –), 88
Parabolique (branche –), 169
Paramètre, 471
Partie
entière, 11
imaginaire, 18
négative, 89
positive, 89
principale, 148
rélle, 18
Pas, 213
Pavé
fermé, 521
ouvert, 521
Pente, 129

Période, 88
(la –), 89, 114
Périodique (fonction –), 88
Permutation, 523
Phase, 23
Plan
complexe, 20
tangent, 456
Point
(distance d'un –), 378
(voisinage d'un –), 89
d'accumulation, 354
d'inflexion, 158
de discontinuité, 101
fixe, 107
frontière, 345
intérieur, 339
régulier, 473
simple, 473
singulier, 473
stationnaire, 137, 419
Polaire (forme –), 22
Polynôme
de MacLaurin, 151
de Taylor, 151, 205
Primitive, 220
Principale (partie –), 148
Principe du maximum et du minimum, 427
Produit scalaire, 356
Prolongement, 89
par continuité, 103
Pythagore (égalité de –), 356

Racine d'un nombre complexe, 28
Raisonnement
par induction, 1
Rationnel (nombre –), 1
Rayon
d'une boule ouverte, 6
de convergence, 201
Réciproque
(application –), 83
(image –), 84
(théorème de la fonction –), 438
Recouvrement régulier, 507, 529
Rectangle fermé, 481
Réel (nombre –), 4
Réelle (partie –), 18
Règle de Bernoulli-L'Hospital, 145
Régulier (point –), 473
Régulière (courbe –), 473
Reste, 148, 205
Restriction, 89
Riccati (équation de –), 326
Rolle (théorème de –), 139
Rotationnel, 469

Schwarz (théorème de –), 407
Semi-ouvert (intervalle –), 6
Séparées (équation différentielle à variables –), 298, 299
Série, 71, 199
absolument convergente, 71
convergente, 71
de MacLaurin, 205
de puissances, 199
de Taylor, 205
divergente, 71
entière, 199
géométrique, 200
harmonique, 72
harmonique alternée, 74
Simple
(courbe –), 473
(point –), 473
Singulier (point –), 473
Sinus hyperbolique (fonction –), 188
Solénoïdal (champ de vecteurs –), 469
Solution, 297, 299, 306, 311, 321
générale, 298, 307, 308, 316, 318, 323
maximale, 298, 304
particulière, 298, 308, 317
Somme, 71
inférieure de Darboux, 214, 479, 522
partielle, 71
supérieure de Darboux, 214, 479, 522
Sous-suite, 58, 338
Spirale logarithmique, 475
Stationnaire (point –), 137, 419

Strictement croissante
(fonction –), 88
(suite –), 37
Strictement décroissante
(fonction –), 88
(suite –), 37
Subdivision, 213, 521
régulière, 213
Suite, 37, 333
bornée, 37, 334
convergente, 40, 334
croissante, 37
de Cauchy, 62, 337
de fonctions, 116
décroissante, 37
divergente, 40, 334
extraite, 59, 338
majorée, 37
minorée, 37
monotone, 38
partielle, 59, 338
Supérieure
(borne –), 7
(limite –), 56
Supremum, 7, 85
Surjection, 83
Surjective (application –), 83
Symétrie (centre de –), 88

Tangent
(plan–), 456
(vecteur –), 472
Tangente, 129
(droite –), 473
hyperbolique (fonction –), 189
Taylor
(formule de –), 150, 410
(polynôme de –), 151, 205
(série de –), 205
Théorème
d'Euler, 403
de Bolzano-Weierstrass, 59, 338
de Dini, 119
de Fubini, 483
de Heine–Borel–Lebesgue, 9, 352
de la convergence
monotone, 228
uniforme, 227
de la fonction réciproque, 438
de la moyenne, 219, 487
de la valeur intermédiaire, 106, 373
de Rolle, 139
de Schwarz, 407
de Tietze-Urysohn, 379
des accroissements finis, 141
généralisés, 144
des deux gendarmes
pour les fonctions, 94, 364
pour les suites, 48
des fonctions implicites, 429, 435
des intégrations successives, 516
du point fixe de Banach, 114
fondamental de l'algèbre, 33
fondamental du calcul intégral, 221, 223
Tietze-Urysohn (théorème de –), 379
Trace, 471

Unicité de la limite
d'une fonction, 91
d'une suite, 40
Uniforme
(continuité –), 104
(convergence –), 116
(limite –), 116
(théorème de la convergence –), 227
Unité imaginaire, 17

Valeur absolue, 13, 48, 85
Variable
(changement de –), 501, 527
d'intégration, 215
indépendante, 81, 357
Variation de la constante (méthode de la –), 307, 313
Variation des constantes (méthode de la –), 316
Vecteur
tangent, 472

vitesse, 472
Vectoriel (espace –), 331
Vide (ensemble –), 6
Vitesse, 472
(vecteur –), 472
Voisinage
d'un point, 89, 359
de l'infini, 96
Volume, 526
d'un corps de révolution, 240

Wronskien, 314

Les auteurs et *Boris Buffoni* tiennent à remercier les personnes suivantes de l'aide et des conseils qu'elles ont bien voulu leur accorder :

Pour l'édition de 2016 et suivantes (et en particulier pour la présente édition)

Les enseignants des cours d'analyse 1 et 2 de l'année académique 2015-2016
Les étudiants qui ont aidé à la composition et relecture du texte, ainsi qu'à la réalisation de figures avec le logiciel Matlab
C. Bigoni : pour la relecture de plusieurs parties
D. Kressner, C. A. Stuart, J. Stubbe, P. Wittwer : leurs notes de cours ont été utiles dans quelques paragraphes ajoutés ou modifiés
D. Kressner : initiateur des éditions 2016 (volume 1) et 2017 (volume 2)
P. Wittwer : pour plusieurs discussions et encouragements
Les collaborateurs des Presses polytechniques et universitaires romandes

Pour les éditions précédentes

Philippe Blanc : critique du manuscrit
Gabriel Caloz : critique du manuscrit
Jean Descloux : critique du manuscrit
Claude El-Hayek : critique du manuscrit
Germain Rojas : critique du manuscrit
Christian Khanmy : exercices
Alexandre Lew : dessins
Renée Pittet : composition du texte et des équations
Geneviève Rime : dactylographie du manuscrit
Klaus-Dieter Semmler : dessins