

Traité de Physique

Mécanique des milieux continus

Une introduction

JOHN BOTSIDIS
MICHEL DEVILLE

Presses polytechniques et universitaires romandes

Traité de Physique

Cet ouvrage présente les concepts de base pour la modélisation des milieux continus classiques, fluides et solides (tenseurs cartésiens, cinématique, dynamique, thermodynamique, lois de comportement, lois des fluides classiques newtoniens, mécanique des solides et mécanique des fluides newtoniens). Des exemples d'applications simples permettent d'obtenir des solutions analytiques qui illustrent la puissance de la modélisation ainsi proposée. Chaque chapitre propose une série d'exercices et des annexes donnent les compléments nécessaires pour suivre l'ouvrage et résoudre les problèmes. Clair et pédagogique, cet ouvrage s'adresse plus particulièrement aux étudiants de deuxième et troisième cycle en mécanique, mathématique, physique, ainsi qu'aux ingénieurs, physiciens et scientifiques qui souhaitent acquérir les principes de base de la mécanique des milieux continus.



JOHN BOTYSIS est professeur de mécanique des solides et des structures (Laboratoire de mécanique appliquée et d'analyse de fiabilité) à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL).

MICHEL DEVILLE est professeur honoraire de l'EPFL.

LE TRAITÉ DE PHYSIQUE couvre l'enseignement de base donné pendant les deux premières années du niveau bachelor aux étudiants des universités et des Ecoles d'ingénieur. Rédigé par des professeurs de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, ayant une longue expérience de ces enseignements, il propose d'allier pédagogie, rigueur scientifique et exercices d'application. Les sujets abordés suivent les disciplines classiques, en commençant par la mécanique, l'électrodynamique et la mécanique des milieux continus. Les Presses polytechniques et universitaires romandes offrent ainsi un instrument de travail actualisé tant pour les étudiants francophones faisant leurs premières armes en physique que pour les enseignants chargés de les former dans ce domaine.



Cet ouvrage est également publié sous une autre couverture dans la collection Mécanique.



MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS: UNE INTRODUCTION

Illustration de couverture de l'édition Collection Mécanique

La couverture a été élaborée par Georgios Pappas du LMAF à partir d'une photographie fournie gracieusement par Alain Thébault d'Hydroptère. La simulation numérique de la coque a été effectuée par Luc D. Blecha et Joël Cugnoni du LMAF.

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS: UNE INTRODUCTION

JOHN BOTSIDIS

Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

MICHEL DEVILLE

Professeur honoraire de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

L'auteur et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne pour le soutien apporté à la publication de cet ouvrage.

Graphisme de couverture: Loup Design sàrl, Lausanne

La Fondation des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) publie principalement les travaux d'enseignement et de recherche de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), des universités et des hautes écoles francophones.

EPFL – Rolex Learning Center

Station 20

CH-1015 Lausanne

E-Mail: info@epflpress.org,

Tél. : +4121 693 21 30

<http://www.epflpress.org>

Première édition

© Presses polytechniques et universitaires romandes, 2016

ISBN 978-2-88915-073-1, version imprimée

ISBN 978-2-88914-857-8, version ebook (PDF), doi.org/10.55430/4824MMCBD

Ce texte est sous license Creative Commons :



elle vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur,
la source et l'éditeur original, sans modifications du texte
ou de l'extrait et sans utilisation commerciale

A nos épouses Maria et Christina
et à nos familles

Préface de la seconde édition

Les responsables de la collection « Traité de la Physique » nous ont proposé d'incorporer notre ouvrage *Mécanique des milieux continus*. Nous avons accepté cette initiative qui aboutit à cette deuxième édition de la monographie.

Toutes les erreurs de la première édition ont été corrigées. Faisant suite à notre expérience pédagogique de cet enseignement, un certain nombre de concepts ont été développés plus explicitement et de nombreux exemples ont été ajoutés. L'ancien chapitre 7 a été abandonné au profit de deux nouveaux chapitres. Le chapitre 7 de la seconde édition traite de l'introduction à la mécanique des solides. Nous nous sommes restreints volontairement à l'élasticité linéaire. Le chapitre 8 est une introduction à la mécanique des fluides newtoniens. Une annexe supplémentaire décrit les divers opérateurs et équations en coordonnées sphériques. A la différence de la première édition, les ouvrages de la bibliographie sont cités dans le cours du texte.

Comme les nouveaux chapitres abordent des matières appartenant à des disciplines bien établies, nous nous sommes ralliés à utiliser les notations classiques que l'on rencontre dans les ouvrages couvrant ces sujets. Ceci entraîne parfois des conflits de notation, qui sont résolus par le contexte où ils apparaissent.

Tous nos remerciements vont à Laurent Humbert et Georgios Pappas qui nous ont aidés pour la production des figures.

John Botsis
Michel Deville
Lausanne
Septembre 2015

Avant-propos

La mécanique est le paradis des sciences mathématiques parce que par son entremise, on aboutit aux fruits des mathématiques.

Carnets, vol. 1, chap. 20
Leonardo da Vinci

Ce livre est le résultat de notre enseignement de la mécanique des milieux continus aux étudiants de seconde année dans la section de génie mécanique de l'EPFL. Cette discipline a connu un développement considérable dans la seconde moitié du XX^e siècle et aujourd'hui, dans le nouveau millénaire, elle est promise à des développements tout aussi spectaculaires. Les raisons en incombent à la modélisation de matériaux nouveaux qui ont des comportements mécaniques inhabituels que ce soit sous forme solide ou fluide. Si on s'en tient aux milieux continus classiques que sont l'air ou l'eau, les phénomènes des écoulements turbulents sont loin d'être compris dans leur totalité et ce domaine est encore un lieu de recherches très intenses.

L'ingénierie moderne fait appel à des outils sophistiqués pour la conception de machines telles les avions, les trains à grande vitesse, les moteurs ou encore pour la prédition de la phénoménologie des matériaux comme les polymères, les céramiques, les composites, mais aussi pour la construction de ponts, de barrages, etc. Ces outils sont réalisés dans des logiciels de simulation qui procèdent à l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles composant les modèles continus. Les techniques expérimentales ouvrent également des horizons nouveaux. Afin de pouvoir analyser les résultats obtenus, qu'ils soient numériques ou expérimentaux, l'ingénieur doit avoir une base théorique solide. Ce livre y contribue modestement.

Le premier chapitre consacré aux tenseurs cartésiens met en place l'outil mathématique nécessaire pour la mécanique des milieux continus. En effet, les lois de conservation et de comportement s'expriment facilement dans ce contexte. Le chapitre 2 présente la cinématique du milieu continu et définit les concepts associés tels que la déformation, la vitesse, l'accélération, le gradient de vitesse et les tenseurs associés. Au chapitre 3, intitulé Dynamique des milieux continus, on trouve les lois de conservation : la masse, la quantité de

mouvement, le moment cinétique. On introduit le concept clé de tenseur des contraintes. Le chapitre 4 est consacré à la thermodynamique des milieux continus. Après le premier principe qui traite de la conservation de l'énergie totale, on trouve l'inégalité de Clausius-Duhem qui prend en compte l'irréversibilité des phénomènes auxquels le milieu continu est soumis. Les principes généraux à la base des lois de comportement sont décrits au chapitre 5. Parmi ceux-ci, l'objectivité ou encore l'invariance par rapport au référentiel est fondamentale. On aboutit à l'écriture des équations constitutives pour les fluides et les solides en toute généralité. Le chapitre 6 introduit les lois des fluides classiques newtoniens et des milieux solides élastiques linéaires et non linéaires (hyperélasticité). Après avoir énoncé la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur, on montre que l'écriture de l'équation du fluide visqueux newtonien est compatible avec le second principe de la thermodynamique. Ceci démontre que l'écriture correcte d'équation de comportement est soumise aux diverses lois qui régissent la physique des milieux continus. Le chapitre se termine sur des considérations de thermoélasticité. Enfin, le dernier chapitre déduit les équations de Navier-Stokes pour les fluides et les équations de Navier pour les solides. Pour chaque cas, des exemples d'applications simples permettent d'obtenir des solutions analytiques qui illustrent la puissance de la modélisation ainsi proposée. Des annexes contiennent les données complémentaires : liste des symboles, glossaire, équations en coordonnées cylindriques.

Ce livre s'adresse aux étudiants ingénieurs, aux physiciens et aux scientifiques qui désirent connaître les principes de base de la mécanique des milieux continus. Puissent-ils trouver dans cet ouvrage une introduction complète qui leur ouvre la porte de ce vaste territoire du savoir. Comme il ne s'agit que d'une introduction, le lecteur curieux pourra parcourir ce domaine en se référant aux nombreux textes qui sont cités dans la bibliographie. Nous souhaitons à chacun autant de plaisir dans la lecture et l'étude de cette matière que nous en avons eu nous-mêmes en rédigeant cet ouvrage.

Remerciements

M. Deville remercie Marcel Crochet qui fut son directeur de thèse à l'Université catholique de Louvain (UCL) pour lui avoir ouvert les portes de cet immense domaine intellectuel que représente la MMC. Que soit aussi remercié son collègue de l'UCL, François Dupret, pour les nombreuses heures de discussion sur la MMC, spécialement la thermodynamique et les fluides visqueux. Certains développements ont été inspirés des notes de cours : « Introduction à la mécanique des milieux continus » de M. Crochet, UCL, 1992 et « Mécanique des Fluides » de M. Deville, F. Dupret et P. Wauters, UCL, 1992.

Nous sommes reconnaissants de l'aide qu'un certain nombre de personnes ont apportée par leurs remarques, leur intérêt pour le sujet et pour la confection des figures. Il s'agit de Roland Bouffanais, Matteo Galli, David LoJacono et Aïssa Mellal.

Qi-Chang He a corédigé en 1997 la version initiale de certaines sections des chapitres 2 et 3.

Nous adressons un merci tout spécial à Laurent Humbert. Sa lecture soignée et profonde du manuscrit nous a permis d'éclaircir beaucoup de points de l'exposé. Rien n'a échappé à sa minutie. Ses commentaires pertinents et ses propositions ont amélioré la totalité de la rédaction.

Règles générales pour les notations

Dans cet ouvrage, les quantités scalaires sont en caractères italiques comme p , T . Les vecteurs et les tenseurs sont en caractères italiques gras \mathbf{v} , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{L} . Les matrices sont en italique entre crochets comme $[C]$. Lorsque les tenseurs sont écrits en notation indicelle, les indices sont choisis dans la majorité des cas parmi les lettres i, j, k, l, m, n . C'est ainsi que le vecteur \mathbf{v} aura pour composantes v_i et le tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ aura les composantes σ_{ij} .

Dans la bibliographie, nous mentionnons plus précisément les chapitres où la référence est utile pour un approfondissement des concepts et la démarche scientifique et/ou pédagogique.

Table des matières

Préface de la seconde édition	vii
Avant-propos	ix
CHAPITRE 1 Tenseurs cartésiens	1
1.1 Introduction	1
1.2 Algèbre vectorielle	4
1.2.1 Généralités sur les scalaires, vecteurs et tenseurs ..	4
1.2.2 Changement de coordonnées	6
1.2.3 Scalaires	9
1.2.4 Vecteurs	10
1.2.5 Symbole de permutation et produit vectoriel	12
1.3 Algèbre tensorielle	14
1.3.1 Définition des tenseurs d'ordre 2	14
1.3.2 Produit tensoriel ou dyadique de deux vecteurs ..	16
1.3.3 Loi de transformation des composantes cartésiennes des tenseurs	17
1.3.4 Tenseurs d'ordre quelconque	17
1.3.5 Algèbre des tenseurs d'ordre 2	20
1.3.6 Propriétés des tenseurs	21
1.3.7 Vecteur dual d'un tenseur d'ordre 2	25
1.3.8 Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur ..	26
1.3.9 Racine carrée d'un tenseur	30
1.3.10 Théorème de décomposition polaire	32
1.3.11 Fonction tensorielle isotrope d'un tenseur symétrique	33
1.3.12 Fonction scalaire d'un tenseur	34
1.4 Analyse tensorielle	34
1.4.1 Dérivée d'une fonction vectorielle ou tensorielle d'un scalaire	35
1.4.2 Gradient d'un champ scalaire	36
1.4.3 Gradient d'un champ vectoriel	37
1.4.4 Gradient d'une fonction tensorielle à valeur scalaire	38
1.4.5 Gradient d'une fonction tensorielle à valeur tensorielle	38
1.4.6 Divergence d'un vecteur et d'un tenseur	38

1.4.7	Rotationnel d'un champ vectoriel	39
1.4.8	Opérateur laplacien	40
1.4.9	Coordonnées curvilignes.....	42
1.4.10	Scalaires, vecteurs et tenseurs en coordonnées curvilignes orthogonales.....	46
1.4.11	Gradient d'un champ scalaire et d'un vecteur en coordonnées curvilignes orthogonales	46
1.4.12	Définition de la notion de flux.....	48
1.4.13	Formules intégrales de Gauss et Stokes	49
1.5	Exercices	51
CHAPITRE 2 Cinématique des milieux continus		55
2.1	Introduction	55
2.2	Corps, configurations et mouvement.....	55
2.3	Descriptions matérielle et spatiale	58
2.4	Vitesse, dérivée matérielle et accélération.....	64
2.4.1	Vitesse.....	64
2.4.2	Dérivée matérielle.....	64
2.4.3	Accélération	66
2.5	Trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission.....	67
2.6	Equations de la cinématique du mouvement du corps rigide.....	69
2.6.1	Translation de corps rigide	70
2.6.2	Rotation de corps rigide autour d'un point fixe ..	70
2.6.3	Mouvement général du corps rigide	71
2.7	Gradient et tenseurs de déformation.....	73
2.7.1	Définition	73
2.7.2	Tenseurs de déformation	74
2.7.3	Interprétation géométrique	79
2.8	Déformations homogènes	82
2.9	Petits déplacements et tenseur de déformation infinitésimale	86
2.9.1	Petits déplacements	86
2.9.2	Tenseur de déformation infinitésimale	87
2.9.3	Equations de compatibilité pour le tenseur de déformation infinitésimale	91
2.10	Gradient de vitesse et tenseurs associés.....	92
2.11	Objectivité des quantités cinématiques	95
2.12	Exercices	100
CHAPITRE 3 Dynamique des milieux continus		105
3.1	Introduction	105
3.2	Théorème du transport de Reynolds	105
3.2.1	Définitions	105

3.2.2 Transformation d'un élément de volume	106
3.2.3 Théorème du transport de Reynolds	107
3.3 Conservation de la masse	109
3.3.1 Forme matérielle	109
3.3.2 Forme spatiale	112
3.4 Forces volumiques, forces de contact et postulat de Cauchy	114
3.5 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique	117
3.6 Théorème de Cauchy. Equation du mouvement pour un milieu continu	120
3.7 Propriétés du tenseur de contrainte de Cauchy	128
3.8 Etats de contrainte simplifiés	132
3.9 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff	134
3.9.1 Considérations générales	134
3.9.2 Premier et second tenseurs de Piola-Kirchhoff ..	135
3.9.3 Linéarisation des tenseurs de contraintes	138
3.10 Exercices	141
CHAPITRE 4 Energétique	145
4.1 Introduction	145
4.2 Conservation de l'énergie	145
4.3 Conservation de l'énergie mécanique en représentation matérielle	151
4.4 Interprétation des lois de conservation par le premier principe	153
4.4.1 Premier cas : translation uniforme	154
4.4.2 Deuxième cas : rotation de corps rigide	155
4.5 Notion d'entropie	156
4.6 Second principe de la thermodynamique	159
4.7 Exercices	161
CHAPITRE 5 Lois de comportement : principes de base	163
5.1 Introduction	163
5.2 Principes généraux	166
5.2.1 Hypothèse de causalité ou de déterminisme ..	166
5.2.2 Principe d'action locale	167
5.2.3 Principe d'objectivité	167
5.2.4 Principe d'invariance matérielle	169
5.2.5 Principe de mémoire	170
5.2.6 Principe d'admissibilité	170
5.3 Conséquence du principe d'action locale	171
5.4 Equations thermomécaniques de comportement	172
5.4.1 Principe de déterminisme	173

5.4.2	Principe d'équipréférence	173
5.4.3	Principe d'action locale	173
5.4.4	Principe d'objectivité	174
5.5	Définition d'un solide et d'un fluide	174
5.6	Principe de mémoire régulière	175
5.7	Exercices	176
CHAPITRE 6	Lois de comportement classiques	177
6.1	Introduction	177
6.2	Fluides simples	177
6.3	Fluides classiques ou fluides visqueux newtoniens	179
6.4	Milieux élastiques isothermes isotropes	181
6.5	Matériaux hyperélastiques	184
6.5.1	Matériaux hyperélastiques isotropes	186
6.5.2	Formes de la fonction d'énergie de déformation	190
6.5.3	Exemples d'états de contraintes simples	192
6.6	Elasticité linéaire infinitésimale	195
6.7	Conduction de la chaleur	199
6.8	Second principe de la thermodynamique pour les fluides visqueux	200
6.9	Thermodynamique du gaz idéal	202
6.10	Second principe de la thermodynamique pour les milieux élastiques classiques	204
6.11	Thermoélasticité	205
6.12	Exercices	207
CHAPITRE 7	Introduction à la mécanique des solides	211
7.1	Introduction	211
7.2	Equations fondamentales de l'élastostatique linéaire	212
7.2.1	Equations de champ de l'élastostatique linéaire	212
7.2.2	Conditions aux limites	214
7.2.3	Principe de superposition	215
7.3	Elasticité plane linéaire isotrope	215
7.3.1	Etats de déformation plane	215
7.3.2	Etats de contrainte plane	219
7.4	Méthodes de solution en elasticité linéaire	222
7.4.1	Fonctions de déplacement	223
7.4.2	Fonctions de contrainte et solutions d'Airy pour des problèmes plans	236
7.5	Propagation d'ondes dans un milieu élastique linéaire	247
7.5.1	Ondes de distorsion et de dilatation	247
7.5.2	Ondes de surface de Rayleigh	250
7.5.3	Ondes élastiques planes	254
7.5.4	Propagation d'une onde dans une corde élastique	257
7.6	Exercices	269

CHAPITRE 8 Introduction à la mécanique des fluides newtoniens	273
8.1 Introduction	273
8.2 Considérations physiques sur les écoulements laminaires et turbulents.....	274
8.3 Considérations physiques sur les écoulements de fluide compressible.....	278
8.3.1 Ecoulements subsonique, supersonique et hypersonique.....	278
8.3.2 Onde de choc	280
8.4 Equations de Navier-Stokes	284
8.4.1 Equations de Navier-Stokes pour un gaz idéal à chaleurs massiques constantes	284
8.4.2 Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en écoulement isotherme	285
8.5 Forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes	285
8.5.1 Cas du fluide compressible	285
8.5.2 Cas du fluide incompressible en écoulement isotherme	288
8.6 Conditions initiales et aux limites	290
8.6.1 Fluide visqueux.....	290
8.6.2 Fluides parfaits	291
8.7 Solution exactes des équations de Navier-Stokes	291
8.7.1 Ecoulements plans stationnaires.....	291
8.7.2 Ecoulements axiymétriques stationnaires	299
8.7.3 Ecoulements plans instationnaires	304
8.8 Ecoulements lents.....	307
8.8.1 Ecoulements rampants plans	307
8.8.2 Ecoulement parallèle autour d'une sphère	309
8.9 Vorticité et cinématique du tourbillon.....	314
8.10 Equation dynamique du tourbillon	316
8.10.1 Equation générale.....	316
8.10.2 Interprétation physique de la dynamique de la vorticité.....	318
8.11 Equation du tourbillon pour le fluide visqueux newtonien	319
8.12 Equation de la circulation.....	320
8.13 Equation du tourbillon pour le fluide parfait	321
8.14 Equation de Bernoulli.....	322
8.15 Ondes acoustiques	324
8.16 Ecoulement stationnaire irrotationnel et isentropique d'un fluide parfait compressible	327
8.16.1 Théorie des petites perturbations	328
8.16.2 Ecoulement bidimensionnel d'un fluide compressible au voisinage d'une paroi ondulée sinusoïdale	329
8.17 Exercices	331

ANNEXE A	Coordonnées cylindriques	335
ANNEXE B	Coordonnées sphériques	341
ANNEXE C	Glossaire français-anglais	347
Liste des symboles		351
Suggestions pour la résolution des exercices		357
Bibliographie		361
Index		365

CHAPITRE 1

Tenseurs cartésiens

1.1 Introduction

La mécanique des milieux continus (MMC) est la partie de la mécanique qui modélise le comportement des matériaux fluides ou solides. On sait grâce aux considérations physiques que la matière est composée de particules élémentaires. A l'échelle atomique (de l'ordre du nanomètre ou aux échelles inférieures), on fait usuellement appel à la mécanique statistique pour décrire les phénomènes physiques. En effet, chaque « particule » constituante peut être décrite par une loi de Newton, mais la valeur du nombre d'Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ par mole rend impossible toute résolution du système résultant d'équations par voie analytique ou numérique.

Pour le cas des fluides compressibles, la théorie cinétique des gaz est un bel exemple de l'approche statistique où on recourt à une fonction de densité de probabilité déterminant la particule via une description basée sur l'espace de phase qui implique position et vitesse. Ces particules sont soumises à un mouvement brownien aléatoire caractérisé par le libre parcours moyen λ . Ceci conduit à la définition du nombre de Knudsen $Kn = \lambda/L$ qui est le rapport du libre parcours moyen à une longueur L de référence pour le problème examiné. Si $Kn < 1$ alors le milieu est suffisamment dense pour éviter de considérer chaque particule individuellement et l'hypothèse de milieu continu dont l'échelle spatiale pertinente est L , est valable. Si, au contraire, $Kn \sim 1$ ou $Kn > 1$, alors le modèle de milieu continu n'est plus approprié. On constate donc que la notion de milieu continu dépend directement de l'échelle d'observation.

Une autre façon de définir la notion de milieu continu consiste en l'étude de l'évolution de la densité de masse d'un cube en fonction de sa taille. Par souci de simplicité, nous considérons l'eau comme système physique et un cube centré autour d'un point P avec une longueur de côté h . Dans le cube se trouve un certain nombre de molécules ayant une masse volumique moyenne ρ_h définie comme $\rho_h = M_h/h^3$, où M_h est la masse d'eau dans le cube.

On va maintenant considérer la variation de ρ_h en fonction de h à un moment donné. Lorsque h est très petit, le cube contient quelques molécules et un petit changement de h entraîne une forte fluctuation de ρ_h , puisque plusieurs molécules peuvent être exclues en réduisant h . Notez que 1 cm³ contient environ

3×10^{22} molécules d'eau et quand h est d'environ 10^{-7} cm il y a environ 30 molécules d'eau dans le cube. Par conséquent, de grandes fluctuations de ρ_h sont attendues pour des valeurs inférieures à $h^* \sim 10^{-7}$ cm (fig. 1.1).

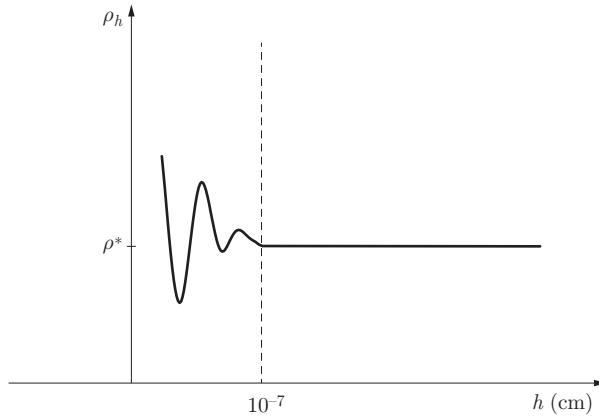


Fig. 1.1 Variation qualitative de la densité de la masse moyenne à l'intérieur d'un cube de taille h pour l'eau.

Au-dessus de cette valeur de h , la densité est constante, en supposant une température uniforme dans le milieu, et elle est considérée comme la masse volumique de l'eau au point P lorsque l'approximation continue est considérée. Les vitesse, accélération, etc., continues peuvent être définies en utilisant des considérations similaires. Un autre exemple où l'hypothèse du milieu continu peut être facilement violée et où la taille du cube doit être précisément définie, est celui d'un système physique avec structure poreuse. Lorsque h est très faible, de faibles variations de sa dimension peuvent provoquer de grandes variations de la densité de masse (fig. 1.2).

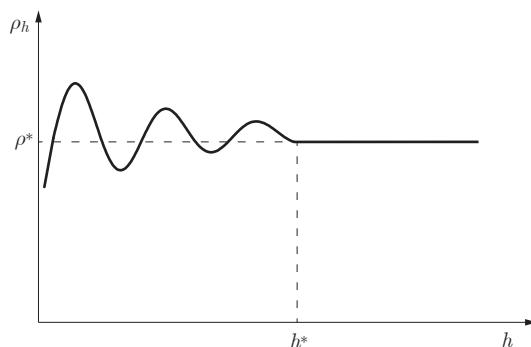


Fig. 1.2 Variation qualitative de la densité de la masse moyenne à l'intérieur d'un cube de taille h pour un matériau poreux.

La densité devient indépendante de h (et donc de la taille du cube) après une certaine valeur limite h^* , aussi longtemps que la microstructure du solide est similaire. En général, de grandes variations de la densité ou d'autres grandeurs physiques sont observées, lorsque h est de l'ordre de la dimension de longueur dans la microstructure (c'est-à-dire la distance entre les molécules, ou bien les paramètres de longueur caractéristiques dans des matériaux ayant des microstructures complexes comme des matériaux poreux ou composites).

Donc, pour des considérations d'ingénierie et de conception, il n'est pas nécessaire de raisonner à l'échelle atomique ou microstructurelle. A cette fin, on considère que les matériaux sont des milieux continus qui seront traités à l'échelle macroscopique. Cette abstraction de la réalité ignore l'aspect discret de la matière et considère que les propriétés comme la viscosité, la masse volumique, le module d'élasticité, etc., attribuées à un point du milieu continu, sont des fonctions continues des variables d'espace. Ces quantités sont des moyennes obtenues sur un grand nombre de particules à l'intérieur d'un petit volume de la matière contenant le point. La dimension h spécifique de l'élément de volume dépend de la structure du milieu et nécessite des techniques mathématiques et des arguments physiques à définir.

La théorie que nous développerons est une théorie phénoménologique, c'est-à-dire qu'elle représente la généralisation des lois de la mécanique rationnelle (mécanique du point) aux milieux continus. Par rapport à la mécanique statistique, les modèles que nous établirons sont aussi satisfaisants du point de vue mathématique. On considérera que la transformation entre deux régions de l'espace, que le matériau peut occuper à des instants différents, est une transformation continue. Grâce à cette abstraction, on pourra parler de la vitesse en un point d'une manière plus adéquate que la même notion basée sur un modèle moléculaire. En effet, pour ce dernier modèle, il faut prendre la vitesse moyenne des molécules au voisinage du point considéré. La question de la définition du voisinage devient cruciale. Si celui-ci est trop grand, alors son lien avec le point s'estompe ; s'il est trop petit, alors la notion de moyenne est en question. Pour établir un lien valable entre les modèles moléculaires et continus, il faut faire appel à des notions de moyennes plus sophistiquées qui sont en dehors des considérations de cette monographie.

Le débutant en MMC peut se poser la question de savoir pourquoi les premiers concepts introduits sont consacrés aux *vecteurs* et aux *tenseurs*. La raison est que le calcul tensoriel et l'algèbre qui lui est associée constituent les outils naturels de la théorie des champs ou du continu. Plus particulièrement, on désire que les quantités physiques qui décrivent un milieu continu soient indépendantes du système de coordonnées dans lequel on travaille. Cet objectif n'est réalisé qu'en faisant appel aux tenseurs.

De nombreuses publications dédiées à la MMC traitent des outils vectoriels et tensoriels de la MMC. Sans vouloir être exhaustifs, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages suivants pour un complément de lecture : [2, 15, 32, 35, 47, 57].

1.2 Algèbre vectorielle

1.2.1 Généralités sur les scalaires, vecteurs et tenseurs

En mécanique des milieux continus, la description du mouvement et des grandeurs physiques associées se fait dans l'*espace ponctuel euclidien* \mathbb{R}^3 (espace physique ambiant) auquel est associé un espace vectoriel E^3 de dimension 3. Les éléments de \mathbb{R}^3 et E^3 sont appelés respectivement des points et des vecteurs. Les scalaires, vecteurs et tenseurs qui décriront les grandeurs mécaniques introduites plus loin sont également attachés (pour la plupart) aux points d'un espace ponctuel (typiquement \mathbb{R}^3) formant alors ce qu'on appelle des champs scalaires, vectoriels ou tensoriels.

On rappelle tout d'abord qu'un *espace vectoriel* est défini uniquement à partir des propriétés opératoires de ses éléments et suppose au préalable l'existence d'un corps arbitraire (typiquement le corps des nombres réels \mathbb{R}) dont les éléments sont appelés scalaires. L'*espace vectoriel* E^3 est alors l'ensemble des éléments notés $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ tels que

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u} + \mathbf{v} \in E^3 & a\mathbf{u} \in E^3 \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) & 1\mathbf{u} = \mathbf{u} \\ \exists \mathbf{0} \in E^3 \mid \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} & a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u} \\ \exists -\mathbf{u} \in E^3 \mid \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} & (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} & a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \end{array} \quad (1.1)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On remarque que les axiomes (1.1) se scindent en deux parties. La première concerne la structure additive de l'espace vectoriel et montre que E^3 est un groupe commutatif par rapport à l'addition. Les axiomes restants traduisent l'action du corps \mathbb{R} sur l'espace vectoriel (distributivité par rapport à l'addition vectorielle et l'addition des scalaires).

En munissant E^3 d'un produit scalaire afin de calculer ultérieurement des longueurs et des angles, il prend le nom d'espace euclidien. Le produit scalaire associe à tout couple de vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^3$ un scalaire noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le *produit scalaire* est par conséquent une application de $E^3 \times E^3$ dans \mathbb{R} qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments. On l'appelle également une forme bilinéaire définie positive. La positivité vient de la dernière relation dans (1.2). Le produit scalaire permet de définir la *norme d'un vecteur* \mathbf{u} , notée $\|\mathbf{u}\|$ par la relation

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.3)$$

Le vecteur \mathbf{u} est dit unitaire lorsque $\|\mathbf{u}\| = 1$ et deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux si et seulement si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Tout vecteur de E^3 peut se décomposer

de manière unique selon une base formée de trois vecteurs linéairement indépendants de E^3 . Le choix de la base est arbitraire mais on utilise généralement la *base canonique* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ définie par

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Comme le montre (1.4), les vecteurs de la base canonique sont unitaires et deux à deux orthogonaux (c.-à-d. orthonormés). La base est dite ***orthogonale*** lorsque les vecteurs ne sont plus unitaires tout en restant bien sûr orthogonaux.

En choisissant un point 0 fixe (mais arbitraire) de l'espace ponctuel \mathbb{R}^3 , on fait correspondre à tout vecteur \mathbf{x} de E^3 un point P de \mathbb{R}^3 et un seul (différent de 0) tel que $\mathbf{OP} = \mathbf{x}$. Le repère cartésien $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de l'espace \mathbb{R}^3 est par définition l'ensemble formé du point 0 pris comme origine et des trois vecteurs de base orthonormés $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ issus de cette origine. Les coordonnées cartésiennes du point P dans le repère ainsi que les composantes du vecteur \mathbf{x} dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ associée sont alors représentées par un unique triplet de nombres (x_1, x_2, x_3) tels que $\mathbf{OP} = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ (dans ce contexte, \mathbf{x} est le vecteur position du point P). En utilisant les propriétés (1.2) et (1.4), le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^3 y_j \mathbf{e}_j$ est donné par

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i. \quad (1.5)$$

La simplicité du résultat (1.5) montre clairement l'intérêt d'utiliser ultérieurement la base canonique (ou tout autre base orthonormée) pour effectuer des opérations sur les vecteurs.

Il existe beaucoup de quantités physiques auxquelles seule une valeur peut être associée. Par exemple, l'une d'entre elles est la *masse volumique* d'un matériau. On la notera ρ et elle a pour unités des kg/m^3 et pour dimensions ML^{-3} avec M la masse et L une longueur. Pour l'eau, à température ambiante, ρ vaut 1000 kg/m^3 . On remarquera que ρ est abusivement appelée densité par de nombreux auteurs (notamment dans la littérature anglo-saxonne). La densité est en toute rigueur le rapport de la masse volumique d'un matériau donné sur celle de l'eau. En conséquence, la densité de l'eau est égale à l'unité.

Dans le voisinage d'un point, cette masse volumique est pratiquement constante et de plus, il n'y a pas de direction associée à cette grandeur. On parle alors d'une quantité scalaire.

D'autres quantités ont non seulement une grandeur, mais aussi une direction. Une force d'un Newton est celle qui, appliquée en un point, lui donne une *accélération* d' 1 m s^{-2} . Puisque cette force a une direction, c'est un vecteur. On sait que les vecteurs sont exprimés en fonction du repère dans lequel ils sont décrits. Dans un repère particulier, ce vecteur est spécifié par ses composantes. En passant d'un système d'axes à un autre, seules les composantes du vecteur changeront par une loi de transformation.

Enfin, le concept de tenseur peut être introduit de manière rudimentaire comme suit. Par exemple, une contrainte est une force par unité de surface. Or

une force est un vecteur. Il en est de même d'un élément de surface puisqu'on doit spécifier à la fois sa taille et son orientation, c'est-à-dire la direction du vecteur normal. Si \mathbf{f} décrit le vecteur force et \mathbf{s} le vecteur de norme égale à la surface S dans la direction de sa normale, alors on pourrait penser que la contrainte \mathbf{T} s'exprime par \mathbf{f}/\mathbf{s} . Cependant, comme la division de deux vecteurs est une opération indéfinie, on contourne la difficulté en disant qu'étant donné \mathbf{s} , on peut trouver \mathbf{f} par la multiplication de \mathbf{s} par une nouvelle entité \mathbf{T} telle que

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{T}\mathbf{s}.$$

Ce nouvel être mathématique est un tenseur qui donne la contrainte en un point. Dans ce cas, il s'agit d'un tenseur d'ordre 2. On sent intuitivement que cette quantité est associée à deux directions spatiales, et non à une seule comme pour les vecteurs ou zéro pour les scalaires. En fait, ce tenseur peut être représenté par une matrice à deux indices, chaque indice correspondant à une direction de l'espace euclidien. C'est donc une entité à 9 composantes. A nouveau, on désire que la quantité physique (le tenseur) reste invariante lorsqu'on change de systèmes d'axes. Dès lors, les composantes d'un tenseur suivront une loi de transformation lors d'un changement de système de coordonnées.

1.2.2 Changement de coordonnées

Dans l'espace physique euclidien (\mathbb{R}^3), soit le système orthonormé de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, que nous noterons aussi en raccourci $0x_i$ ($i = 1, 2, 3$), d'origine 0 et portant des vecteurs unitaires \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) dirigés suivant les axes $0x_i$ (fig. 1.3). Le système d'axes $0x'_i$ ($i = 1, 2, 3$) ayant les vecteurs unitaires \mathbf{e}'_i définit un autre système de coordonnées cartésiennes de même origine 0. Les cosinus (directeurs) du système x'_p par rapport aux axes x_i , notés par c_{pi} , sont donnés par les produits scalaires des vecteurs de base

$$c_{pi} = \cos(x'_p, x_i) = \mathbf{e}'_p \cdot \mathbf{e}_i \quad i, p = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

De même, les *cosinus directeurs* du premier système par rapport au second sont donnés par

$$c'_{pi} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}'_i = c_{ip}, \quad (1.7)$$

la dernière égalité étant obtenue par (1.6).

Soit un point P de coordonnées x_i dans le premier système et x'_i dans le second. Par la relation (1.6), les coordonnées x'_i sont liées à celles x_i par les équations

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ x'_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

On peut écrire (1.8) sous la forme

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_j \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

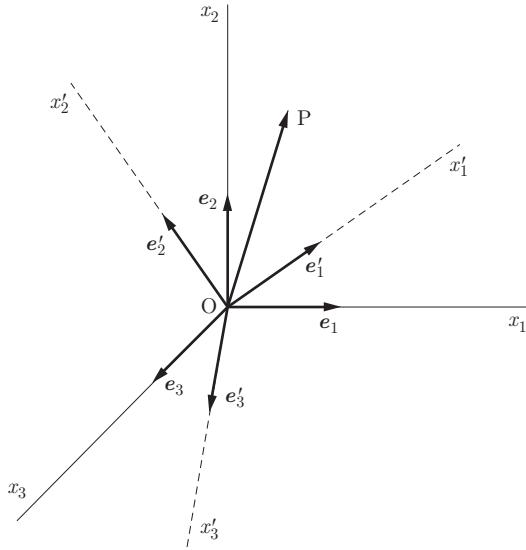


Fig. 1.3 Système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

On peut voir facilement que les inverses de (1.8) sont données par

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + c_{31}x'_3 \\ x_2 &= c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{32}x'_3 \\ x_3 &= c_{13}x'_1 + c_{23}x'_2 + c_{33}x'_3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

ou encore

$$x_i = \sum_{j=1}^3 c_{ji}x'_j = \sum_{j=1}^3 c'_{ij}x'_j. \quad (1.11)$$

On peut éviter d'utiliser le symbole de sommation \sum en adoptant par la suite la **convention de sommation** d'Einstein sur les indices répétés, c'est-à-dire que lorsqu'un indice apparaît deux fois dans un produit, on effectue la somme par rapport à cet indice en lui faisant prendre successivement toutes les valeurs possibles (ici, $i = 1, 2, 3$). Dès lors, les équations (1.9) et (1.11) s'écrivent sous forme compacte

$$x'_i = c_{ij}x_j \quad x_i = c_{ji}x'_j \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

On pourra écrire par exemple,

$$\sigma_{ij}n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}n_j = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j n_i &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}n_j n_i = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21})n_1 n_2 \\ &\quad + (\sigma_{23} + \sigma_{32})n_2 n_3 + (\sigma_{31} + \sigma_{13})n_3 n_1. \end{aligned}$$

Dans l'expression $\sigma_{ij}n_j$, l'indice i est fixé. Il a une valeur dans 1, 2, 3. On l'appelle l'indice franc.

Le symbole u_i désignera l'ensemble des 3^1 quantités u_1, u_2, u_3 (3 pour l'espace et 1 pour l'indice franc). De même, le symbole L_{ij} signifie l'ensemble des 3^2 quantités $L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{31}, L_{32}, L_{33}$ (3 pour l'espace et 2 pour les indices francs). Pour un scalaire, on a $3^0 = 1$ quantité. On peut écrire

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \sum_{i=1}^3 L_{ii} = L_{11} + L_{22} + L_{33} \\ A_i B_k C_i &= \sum_{i=1}^3 A_i B_k C_i = B_k \sum_{i=1}^3 A_i C_i = B_k (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) \\ ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i = dx_i dx_i \\ M_{ijk} u_i v_j w_k &= M_{jik} u_j v_i w_k = M_{ikj} u_i v_k w_j = \dots \end{aligned}$$

On remarquera que l'indice sur lequel la sommation porte, est un indice muet ; on peut changer de notation pour cet indice sans changer la signification de la somme. C'est ainsi que

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_{ik} n_k = \sigma_{il} n_l .$$

Un indice muet ne peut pas apparaître plus de deux fois dans une expression. Par conséquent pour insérer la deuxième équation (1.12) dans la première, on doit la réécrire par exemple sous la forme

$$x_j = c_{qj} x'_q .$$

D'où il vient,

$$x'_i = c_{ij} c_{qj} x'_q \quad \text{et de même} \quad x_i = c_{ji} c_{jq} x_q . \quad (1.13)$$

Il est évident que le coefficient de x'_q dans la première équation (1.13) doit être égal à l'unité pour $i = q$ et 0 pour $i \neq q$. Ceci est vrai également pour la deuxième équation (1.13). Si on introduit le *symbole de Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j , \end{cases} \quad (1.14)$$

alors on obtient

$$c_{ij} c_{qj} = \delta_{iq} . \quad (1.15)$$

Les composantes c_{ij} forment une *matrice orthogonale* $[C]$ telle que sa transposée soit égale à son inverse, ce qui donne

$$c_{ik} c_{kj}^{-1} = c_{ik} c_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad [C][C]^{-1} = [C][C]^T = [I] , \quad (1.16)$$

avec $[I]$ dénotant la matrice unité. La matrice des c_{ij} est telle que

$$\det [C] = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) , \quad (1.17)$$

c'est-à-dire $\det[C] = \pm 1$. Le signe + ou - caractérise un système direct ou rétrograde. Le symbole \times représente le produit vectoriel.

Notons qu'en utilisant le symbole de Kronecker, l'indice d'une composante peut être changé comme suit

$$\begin{aligned} L_{ik} &= \delta_{ij} L_{jk}, \\ A_i B_k C_i &= \delta_{ij} A_i B_k C_j, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} &= u_{j,i} = \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \delta_{kj} u_{k,i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} &= u_{i,jk} = \delta_{jl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} = \delta_{jl} u_{i,lk}. \end{aligned}$$

1.2.3 Scalaires

Soit un point P d'un milieu continu, et $F(P)$ la valeur réelle d'une fonction continue de P. Si la valeur $F(P)$ ne dépend pas du système de coordonnées, alors la fonction F est appelée fonction scalaire, ou scalaire, ou encore tenseur d'ordre 0. C'est par exemple le cas de la température, de la pression, de l'énergie cinétique, etc. Ce n'est pas le cas des composantes (du vecteur) de la vitesse qui dépendent du système de coordonnées. Bien sûr, ceci ne veut pas dire que la fonction qui fournit la valeur $F(P)$ soit indépendante du système choisi. Si le point P a pour coordonnées x_i et si $F(P)$ a pour valeur $f(x_i)$, alors le changement de coordonnées de la deuxième équation (1.12) entraîne pour le scalaire $F(P)$

$$F(P) = f(x_i) = f(c_{ji}x'_j) = f'(x'_j). \quad (1.18)$$

Prenons, par exemple, un champ de température $T(P)$ linéaire donné dans un système de coordonnées x_i par

$$T(x_i) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} x_1,$$

tel que $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_1$. Par rotation de 45° autour de l'axe x_3 , on passe au système de coordonnées x'_i par la transformation

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En toute généralité, la matrice qui exprime un changement de système de coordonnées par rotation autour de l'axe e_3 d'un angle θ est donnée par

$$[C] = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La température dans le nouveau système de coordonnées devient

$$T'(x'_i) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} \frac{\sqrt{2}}{2} (x'_1 - x'_2)$$

puisque par (1.11)

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + c_{31}x'_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} x'_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x'_2. \end{aligned}$$

1.2.4 Vecteurs

Soit un vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$ ayant son origine au point P et son extrémité au point Q. Ce vecteur a une direction et trois composantes v_i . Le vecteur lui-même est indépendant du système de coordonnées.

Etudions les représentations de \mathbf{v} dans les deux systèmes de coordonnées liés par les relations

$$x'_i = c_{ij}x_j \quad \text{et} \quad x_i = c_{ji}x'_j. \quad (1.19)$$

Soient x_i, y_i les coordonnées des points P et Q dans le premier système d'axes et x'_i, y'_i celles dans le second. Les composantes de \mathbf{v} dans le premier système s'écrivent

$$v_i = y_i - x_i$$

et

$$v'_i = y'_i - x'_i$$

dans le second. On relie les composantes v'_i à celles v_i par la loi de transformation

$$v'_i = y'_i - x'_i = c_{ij}(y_j - x_j) = c_{ij}v_j. \quad (1.20)$$

Comme dans un système d'axes cartésiens, les cosinus directeurs c_{ij} sont indépendants des coordonnées de P, on peut écrire

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = c_{ij} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = c_{ji} \quad (1.21)$$

et donc

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_i}.$$

En combinant (1.20) et (1.21), on obtient

$$v'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v_j \quad \text{ou} \quad v'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} v_j. \quad (1.22)$$

On dira par définition qu'un objet mathématique \mathbf{v} caractérisé par les trois composantes v_i dans un système de coordonnées cartésiennes est un vecteur ou

un tenseur d'ordre 1 si lors d'un changement de système de coordonnées, ses composantes se transforment suivant la loi (1.22). En conséquence, un triplet de nombres dans un système de coordonnées ne donne pas nécessairement un vecteur. C'est la loi de transformation (1.22) associée au caractère invariant du vecteur qui en assure la nature. La notation indicée permet de mettre en œuvre l'algèbre standard des vecteurs et de leurs composantes scalaires. Par exemple, si a est un scalaire, la $i^{\text{ème}}$ composante de av est av_i . Par (1.22), on peut montrer que la multiplication av' est un vecteur puisque

$$(av'_i) = c_{ij}(av_j) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} (av_j).$$

L'addition de deux vecteurs s'obtient par l'addition de leurs composantes respectives, c'est-à-dire

$$w_i = u_i + v_i. \quad (1.23)$$

En notation vectorielle, on a

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

On traite maintenant le cas du *produit scalaire de deux vecteurs*. On note le produit b comme la somme $u_i v_i$. Sous forme symbolique, $b = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ tandis que

$$b = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1.24)$$

Examinons si le produit b est affecté par un changement d'axes. La relation (1.20) peut se mettre sous la forme

$$v_i = y_i - x_i = c_{ji}(y'_j - x'_j) = c_{ji}v'_j.$$

En conséquence, il vient

$$\begin{aligned} b &= u_i v_i = c_{ji}u'_j c_{ki}v'_k \\ &= c_{ji}c_{ki}u'_j v'_k \\ &= \delta_{jk}u'_j v'_k \\ &= u'_j v'_j. \end{aligned}$$

Donc le *produit* $u_i v_i$ est un *scalaire* (1.18) puisque sa valeur ne change pas lors d'un changement de repère. Par la géométrie vectorielle, on peut montrer que

$$b = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta, \quad (1.25)$$

où $\|\mathbf{u}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$ sont les normes des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} respectivement, tandis que θ est l'angle entre les deux vecteurs.

On rappelle qu'une conséquence importante de (1.25) est que deux vecteurs (non nuls) orthogonaux ont un produit scalaire nul. Un autre résultat intéressant provient de ce que le produit scalaire du vecteur par lui-même fournit le carré de sa norme :

$$v_i v_i = \|\mathbf{v}\|^2. \quad (1.26)$$

Si le vecteur considéré est issu de l'origine et repère un point P de l'espace euclidien, ce vecteur est le vecteur position \mathbf{x} tel que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{OP}$. Le vecteur position est un concept fondamental de la cinématique des milieux continus que nous décrirons plus complètement au chapitre 2. Ce vecteur dépend des coordonnées spatiales. Dès lors, on peut écrire

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} . \quad (1.27)$$

1.2.5 Symbole de permutation et produit vectoriel

Le symbole de permutation est défini de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ est une permutation paire de 123} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ est une permutation impaire de 123} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases} \quad (1.28)$$

ou encore

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2} (i-j)(j-k)(k-i) . \quad (1.29)$$

Suite à la définition (1.28), on peut déplacer un indice de l'avant vers l'arrière et inversement

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} .$$

La permutation de deux indices adjacents induit un changement de signe

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik} \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{ikj} . \end{aligned}$$

Par (1.28) et la définition du symbole de Kronecker (1.14), on peut prouver l'identité très utile

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} . \quad (1.30)$$

Dans une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, noté parfois $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, se définit par l'égalité

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k . \quad (1.31)$$

Par exemple, on peut évaluer que

$$w_1 = \varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_3 v_2 = u_2 v_3 - u_3 v_2 .$$

On peut faire de même pour w_2 et w_3 .

Un point important de la notation (1.31) est que le premier indice de ε_{ijk} doit être celui de la composante du vecteur \mathbf{w} , le deuxième doit être le même que celui du premier vecteur du produit $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ et le dernier doit être associé au dernier vecteur du produit.

La norme d'un produit vectoriel est égale au produit des normes des vecteurs multiplié par le sinus de l'angle θ que forment ces vecteurs :

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta. \quad (1.32)$$

Un certain nombre de formules en notation symbolique présente des combinaisons diverses de produits scalaires et vectoriels. Par exemple

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \quad (1.34)$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad (1.35)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.36)$$

EXEMPLE 1.1

Le produit vectoriel engendre un vecteur perpendiculaire au plan des deux vecteurs et les trois vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} forment un système direct. On peut démontrer que \mathbf{w} est orthogonal à \mathbf{v} en montrant que le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ est nul. En utilisant (1.28), il vient

$$\begin{aligned} v_i w_i &= v_i \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j + \varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j + \varepsilon_{kji} v_k v_i u_j) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j - \varepsilon_{ijk} v_i v_k u_j) = 0. \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.2

On utilisera l'algèbre de la notation indicée pour vérifier l'identité (1.36). Le membre de gauche \mathfrak{G} s'écrit

$$\mathfrak{G} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m.$$

Avec (1.30), on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= \delta_{jl} a_j c_l \delta_{km} b_k d_m - \delta_{jm} a_j d_m \delta_{kl} b_k c_l. \end{aligned}$$

Par les propriétés du symbole de Kronecker δ_{ij} , on pose $l = j$ et $m = k$ dans le premier terme et $m = j$ et $l = k$ dans le second. On a

$$\mathfrak{G} = a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k.$$

Le membre de droite de cette dernière relation n'est rien d'autre que la notation indicée du membre correspondant de droite de (1.36).

EXEMPLE 1.3

Si $P_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$ où u_i sont des fonctions continues de x_i avec des dérivées partielles continues, démontrer que $P_{i,i} = 0$.

On utilise des propriétés du symbole de permutation pour modifier l'expression de manière suivante

$$\begin{aligned} P_i &= \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \Rightarrow P_{i,i} = \varepsilon_{ijk} u_{k,ji} = \varepsilon_{jik} u_{k,ij} \\ \varepsilon_{jik} &= -\varepsilon_{ijk}, \quad u_{k,ij} = u_{k,ji} \\ \Rightarrow P_{i,i} &= \varepsilon_{ijk} u_{k,ji} = -\varepsilon_{ijk} u_{k,ji} \\ 2P_{i,i} &= \varepsilon_{ijk} u_{k,ji} - \varepsilon_{ijk} u_{k,ji} = 0 \Rightarrow P_{i,i} = 0. \end{aligned}$$

1.3 Algèbre tensorielle

1.3.1 Définition des tenseurs d'ordre 2

La notion de tenseur d'ordre 2 est introduite par l'examen de la représentation d'un objet invariant. Soit E^3 l'espace vectoriel euclidien des vecteurs associé à \mathbb{R}^3 et \mathbf{L} une transformation linéaire sur E^3 qui transforme un vecteur en un autre, c'est-à-dire

$$\mathbf{L} : E^3 \rightarrow E^3 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{Lu}. \quad (1.37)$$

Si \mathbf{L} transforme \mathbf{u}_1 en \mathbf{v}_1 et \mathbf{u}_2 en \mathbf{v}_2 par les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{Lu}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{Lu}_2 &= \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

et si \mathbf{L} a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= \mathbf{Lu}_1 + \mathbf{Lu}_2 \\ \mathbf{L}(\alpha \mathbf{u}_1) &= \alpha \mathbf{Lu}_1 \end{aligned} \quad (1.38)$$

avec \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 deux vecteurs arbitraires de E^3 et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on dit que \mathbf{L} est une transformation linéaire. C'est aussi un tenseur d'ordre 2 ou simplement un tenseur. Les **tenseurs unité \mathbf{I}** et **nul \mathbf{O}** sont définis par les relations $\mathbf{u} = \mathbf{Iu}$ et $\mathbf{0} = \mathbf{Ou}$, respectivement.

Pour tout vecteur \mathbf{u} , le vecteur \mathbf{v} est tel que l'on a

$$\mathbf{v} = \mathbf{Lu} = \mathbf{Lu}_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{Le}_i. \quad (1.39)$$

Les composantes de \mathbf{v} sont obtenues en prenant le produit scalaire

$$v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}. \quad (1.40)$$

Par combinaison de (1.39) et (1.40), il vient

$$v_i = \mathbf{e}_i \cdot (u_j \mathbf{L} \mathbf{e}_j) = u_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_j. \quad (1.41)$$

Les termes tels que, par exemple, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_1$ sont les composantes suivant \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 de $\mathbf{L} \mathbf{e}_1$. On convient d'écrire ces composantes comme $L_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_1$, $L_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_1$, etc. En général, on aura

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}_j. \quad (1.42)$$

Les éléments L_{ij} sont les composantes du tenseur \mathbf{L} . Par (1.41) et (1.42), on obtient

$$v_i = L_{ij} u_j. \quad (1.43)$$

Cette dernière relation peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$$

est la matrice du tenseur \mathbf{L} par rapport aux vecteurs de base $\{\mathbf{e}_i\}$. On remarquera que les composantes de la première colonne sont celles du vecteur $\mathbf{L} \mathbf{e}_1$, celle de la seconde colonne sont les composantes du vecteur $\mathbf{L} \mathbf{e}_2$ et ainsi de suite. Donc, on a

$$\mathbf{L} \mathbf{e}_1 = L_{11} \mathbf{e}_1 + L_{21} \mathbf{e}_2 + L_{31} \mathbf{e}_3 = L_{j1} \mathbf{e}_j,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{L} \mathbf{e}_i = L_{ji} \mathbf{e}_j. \quad (1.45)$$

On constate donc que les composantes d'un tenseur dépendent du système de coordonnées défini par la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de la même manière que les composantes d'un vecteur en dépendent également.

Cependant, un tenseur qui est un *opérateur linéaire* invariant, est une grandeur intrinsèque, comme par exemple, une force par unité de surface. Seules ses composantes seront affectées par un changement de base. On notera la **matrice associée au tenseur \mathbf{L}**

$$[L] = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

et son **déterminant** par

$$\det \mathbf{L} = \det [L] = \det \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Un tenseur est dit **singulier** si et seulement si $\det \mathbf{L} = 0$.

1.3.2 Produit tensoriel ou dyadique de deux vecteurs

Le produit tensoriel ou produit dyadique $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} est défini comme le tenseur qui assigne à chaque vecteur \mathbf{v} le vecteur $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \quad (1.48)$$

Pour tout vecteur \mathbf{v} et \mathbf{w} et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= (\mathbf{b} \cdot (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}))\mathbf{a} \\ &= (\alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}))\mathbf{a} \\ &= \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w})\mathbf{a} \\ &= \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} + \beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Ceci démontrera que $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ est un tenseur. Ses composantes par rapport à la base $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) sont

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{a}) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}_j = a_i b_j.$$

Donc, on a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j. \quad (1.49)$$

La matrice correspondante sera donnée par

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

En général, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \neq (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$. Evaluons le produit tensoriel $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. On a

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{u} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u})\mathbf{e}_i = u_j \mathbf{e}_i. \quad (1.50)$$

Par (1.50) et (1.43), on peut écrire

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{L}\mathbf{u} = L_{ij} u_j \mathbf{e}_i = L_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{u}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\mathbf{L} = L_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (1.51)$$

EXEMPLE 1.4

Les tenseurs identité \mathbf{I} et le produit dyadique peuvent s'exprimer comme

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= a_i b_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

1.3.3 Loi de transformation des composantes cartésiennes des tenseurs

La représentation dans le système de coordonnées cartésiennes x_i de l'opérateur linéaire \mathbf{L} , qui est invariant, est donnée par ses composantes L_{ij} (1.42). Dans le système de coordonnées x'_i , les composantes de \mathbf{L} s'expriment comme

$$L'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{L} \mathbf{e}'_j.$$

On peut évaluer facilement la relation entre les composantes L_{ij} et L'_{ij} . En effet, par (1.20), la relation précédente donne

$$L'_{ij} = (c_{ik}\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{L} (c_{jl}\mathbf{e}_l) = c_{ik}c_{jl}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{L}\mathbf{e}_l = c_{ik}c_{jl}L_{kl}. \quad (1.52)$$

En invoquant (1.21), on a

$$L'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} L_{kl} \quad \text{ou} \quad L'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} L_{kl}. \quad (1.53)$$

En notation matricielle, l'équation (1.52) s'écrit

$$[L'] = [C][L][C]^T. \quad (1.54)$$

Par définition, une matrice $[L]$ à 9 composantes correspond à un tenseur d'ordre 2 si lors d'un changement de coordonnées, ses composantes se transforment suivant (1.53). Par extension, on parlera aussi du tenseur L_{ij} . Les lois de transformation (1.53) garantissent l'invariance de \mathbf{L} vis-à-vis du choix de coordonnées.

A titre d'exemple, vérifions que le produit tensoriel $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ est un tenseur d'ordre 2. Il vient

$$T'_{ij} = a'_i b'_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} a_k b_l = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} T_{kl}.$$

1.3.4 Tenseurs d'ordre quelconque

Rappelons les lois de transformation des vecteurs (tenseurs d'ordre 1) et des tenseurs d'ordre 2 pour un changement de coordonnées

$$v'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v_j \quad L'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} L_{kl}.$$

En généralisant ces lois, on peut définir un tenseur d'ordre n . Soit \mathcal{T} un objet dont la valeur dans un système de coordonnées x_i est donnée par 3^n composantes $\mathcal{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}$, où les indices i_j prennent la valeur 1, 2 ou 3. Par définition, \mathcal{T} est un tenseur d'ordre n si lors d'un changement de coordonnées, ses composantes se transforment selon la loi

$$\mathcal{T}'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\partial x'_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial x'_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \dots \frac{\partial x'_{i_n}}{\partial x_{j_n}} \mathcal{T}_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (1.55)$$

On notera que pour $n = 1$ et 2 , on retrouve les lois de transformation des vecteurs et des tenseurs d'ordre 2.

On peut aussi vérifier que le symbole de permutation introduit à l'équation (1.28) est un tenseur d'ordre 3. Pour le montrer, on applique à ε_{ijk} la transformation tensorielle (1.55) et on vérifie que les composantes ε'_{ijk} satisfont les relations (1.28). Par (1.21), on écrit

$$\varepsilon'_{ijk} = c_{im}c_{jn}c_{kp}\varepsilon_{mnp}.$$

On peut développer le second membre en tenant compte de (1.28). On obtient

$$\varepsilon'_{ijk} = c_{i1}c_{j2}c_{k3} + c_{i2}c_{j3}c_{k1} + c_{i3}c_{j1}c_{k2} - c_{i2}c_{j1}c_{k3} - c_{i1}c_{j3}c_{k2} - c_{i3}c_{j2}c_{k1}.$$

Le membre de droite de cette équation n'est autre que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} \\ c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} \end{pmatrix}$$

qui est la matrice orthogonale des cosinus directeurs. Lorsque (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, ε'_{ijk} vaut 1 si le système d'axes est direct ; lorsque (i, j, k) est une permutation impaire de $(1, 2, 3)$, les lignes sont permutées un nombre impair de fois, et le déterminant vaut -1 . Enfin, dans tous les autres cas, deux lignes au moins sont égales et le déterminant est nul.

Les tenseurs d'ordre n satisfont les règles suivantes.

Multiplication par un scalaire :

la multiplication d'un tenseur d'ordre n par un scalaire s'effectue en multipliant chaque composante du tenseur par le scalaire. Le résultat est un tenseur d'ordre n .

Combinaison linéaire :

la combinaison linéaire de deux tenseurs d'ordre n s'effectue par la combinaison linéaire des composantes correspondantes. On obtient un tenseur de même ordre.

Tenseur nul :

c'est le tenseur dont toutes les composantes sont égales à zéro.

Tenseurs égaux :

lorsque les composantes de deux tenseurs du même ordre sont égales terme à terme dans un système de coordonnées, elles le sont dans tout autre système ; les tenseurs sont égaux. Par conséquent, si une relation tensorielle est vérifiée dans un système de coordonnées, elle est vraie dans tout système de coordonnées.

Produit extérieur de tenseurs :

soient $\mathcal{A}_{i_1 \dots i_n}$ et $\mathcal{B}_{j_1 \dots j_m}$ les composantes respectives d'un tenseur d'ordre n et d'un tenseur d'ordre m dans un système de coordonnées. Les 3^{n+m} quantités obtenues par

$$\mathcal{C}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} = \mathcal{A}_{i_1 \dots i_n} \mathcal{B}_{j_1 \dots j_m}$$

forment un tenseur \mathcal{C} d'ordre $n + m$. A titre d'exemple, on a montré précédemment que le produit tensoriel (dyadique) de deux vecteurs donne un tenseur d'ordre 2.

Contraction d'un tenseur :

soit \mathcal{A} un tenseur d'ordre n dont les composantes dans un système de coordonnées sont $\mathcal{A}_{i_1 \dots i_n}$.

L'opération de contraction consiste à égaler deux indices du tenseur, par exemple le $j^{\text{ième}}$ et le $k^{\text{ième}}$ avec j et $k \leq n$, et en sommant sur ces indices ($j = k = 1, 2, 3$) pour former un tenseur d'ordre $n - 2$ comprenant donc 3^{n-2} composantes. Ce tenseur sera obtenu par contraction des indices j et k .

Par exemple, L_{ii} est la seule contraction possible de L_{ij} . Ce n'est plus un tenseur d'ordre 2, mais un scalaire (tenseur d'ordre 0).

Considérons deux tenseurs \mathbf{S} et \mathbf{T} d'ordre 2. Leur produit extérieur engendre un tenseur d'ordre 4 dont les composantes sont

$$\mathcal{R}_{ijkl} = S_{ij}T_{kl}.$$

Les composantes obtenues par contraction sur les deuxième et troisième indices de \mathcal{R} sont

$$\mathcal{R}_{imml} = S_{im}T_{ml}.$$

Montrons qu'il s'agit bien d'un tenseur d'ordre 2. Par la loi de transformation (1.55), on a

$$\mathcal{R}'_{ijkl} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}c_{ls}\mathcal{R}_{pqrs}.$$

De même, on a

$$\mathcal{R}'_{imml} = c_{ip}c_{mq}c_{mr}c_{ls}\mathcal{R}_{pqrs}.$$

Par (1.15), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_{imml} &= c_{ip}c_{ls}\delta_{qr}\mathcal{R}_{pqrs} = c_{ip}c_{ls}\mathcal{R}_{prrs} \\ &= \frac{\partial x'_i}{\partial x_p} \frac{\partial x'_l}{\partial x_s} \mathcal{R}_{prrs}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité prouve le caractère tensoriel d'ordre 2 de \mathcal{R}_{imml} .

A posteriori, on peut s'apercevoir que le membre de gauche de l'équation (1.30) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$ est un tenseur d'ordre 4 obtenu par contraction. De la même manière, la contraction

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{1.56}$$

fournit un tenseur d'ordre 2 et la relation

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

donne un scalaire.

1.3.5 Algèbre des tenseurs d'ordre 2

Somme de tenseurs

Soient \mathbf{L} et \mathbf{T} deux tenseurs d'ordre 2. Leur somme notée $(\mathbf{T} + \mathbf{L})$ est telle que pour tout vecteur \mathbf{a} , on ait

$$(\mathbf{T} + \mathbf{L})\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{L}\mathbf{a}. \quad (1.57)$$

Les composantes de $(\mathbf{T} + \mathbf{L})$ sont telles que

$$(\mathbf{T} + \mathbf{L})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{L})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}\mathbf{e}_j$$

ou encore

$$(\mathbf{T} + \mathbf{L})_{ij} = T_{ij} + L_{ij}. \quad (1.58)$$

Produit intérieur de deux tenseurs

Si \mathbf{L} et \mathbf{T} sont deux tenseurs d'ordre 2, alors \mathbf{LT} et \mathbf{TL} sont définis par les équations

$$(\mathbf{LT})\mathbf{a} = \mathbf{L}(\mathbf{T}\mathbf{a}) \quad (1.59)$$

et

$$(\mathbf{TL})\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{L}\mathbf{a}) \quad (1.60)$$

Les composantes de \mathbf{LT} s'obtiennent comme suit, en tenant compte de (1.45),

$$\begin{aligned} (\mathbf{LT})_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{LT})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}(\mathbf{T}\mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}T_{mj}\mathbf{e}_m = T_{mj}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}\mathbf{e}_m. \end{aligned}$$

Il vient

$$(\mathbf{LT})_{ij} = L_{im}T_{mj}. \quad (1.61)$$

De même, on a

$$(\mathbf{TL})_{ij} = T_{im}L_{mj}. \quad (1.62)$$

On remarquera que le produit intérieur des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{T} est une multiplication contractée des tenseurs d'ordre 2, dans laquelle la contraction porte sur le dernier indice du premier tenseur et sur le premier indice du second tenseur. Sous forme matricielle, on peut écrire que la matrice relative au produit intérieur est égale au produit des matrices des deux tenseurs tel que

$$[(\mathbf{LT})] = [L][T] \quad \text{et} \quad [(\mathbf{TL})] = [T][L].$$

On remarquera que le produit intérieur de tenseurs n'est pas commutatif en général, c'est-à-dire $\mathbf{LT} \neq \mathbf{TL}$.

Si \mathbf{L} , \mathbf{T} et \mathbf{S} sont trois tenseurs, alors on peut évaluer

$$(\mathbf{L}(\mathbf{ST}))\mathbf{a} = (\mathbf{L}(\mathbf{ST})\mathbf{a}) = \mathbf{L}(\mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{a}))$$

et

$$(\mathbf{LS})(\mathbf{T}\mathbf{a}) = \mathbf{L}(\mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{a})).$$

Donc, on obtient

$$\mathbf{L}(\mathbf{S}\mathbf{T}) = (\mathbf{L}\mathbf{S})\mathbf{T}. \quad (1.63)$$

Le produit intérieur des tenseurs est associatif. Lorsque $\mathbf{L} = \mathbf{T}$, on peut introduire les notations suivantes $\mathbf{T}\mathbf{T} = \mathbf{T}^2$, $\mathbf{T}\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^3$, etc.

On a la propriété

$$\det(\mathbf{S}\mathbf{T}) = \det \mathbf{S} \det \mathbf{T} \quad (1.64)$$

Notons aussi les relations

$$\mathbf{L}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{L}\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} \quad (1.65)$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{b}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}). \quad (1.66)$$

EXEMPLE 1.5

On utilise l'algèbre de la notation indicée pour vérifier l'identité (1.65)

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}))_{ij} &= L_{im}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{mj} = L_{im}a_m b_j \\ &= (\mathbf{L}\mathbf{a})_i b_j = ((\mathbf{L}\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b})_{ij}. \end{aligned}$$

1.3.6 Propriétés des tenseurs

Tenseur transposé

Le tenseur transposé d'un tenseur est celui obtenu en échangeant deux indices : le transposé de L_{ij} est L_{ji} . On le notera \mathbf{L}^T , et donc, on a la relation

$$(\mathbf{L}^T) = L_{ji}. \quad (1.67)$$

En conséquence, on peut établir aisément que

$$(\mathbf{L}\mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T \mathbf{L}^T \quad (1.68)$$

et

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^T \mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{L}\mathbf{u}. \quad (1.69)$$

Pour la dyade, on a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad (1.70)$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{L} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{L}^T \mathbf{b}. \quad (1.71)$$

On notera également la propriété

$$\det \mathbf{L}^T = \det \mathbf{L}. \quad (1.72)$$

Inverse d'un tenseur

Pour un tenseur régulier \mathbf{L} , c'est-à-dire $\det \mathbf{L} \neq 0$, il existe un tenseur unique appelé le tenseur inverse \mathbf{L}^{-1} de \mathbf{L} qui satisfait la relation

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{I}. \quad (1.73)$$

Par définition de l'inverse, on peut montrer que

$$(\mathbf{L}^{-1})^{-1} = \mathbf{L} \quad (1.74)$$

$$(\alpha\mathbf{L})^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{L}^{-1} \quad (1.75)$$

$$\det(\mathbf{L}^{-1}) = (\det \mathbf{L})^{-1}. \quad (1.76)$$

Pour deux tenseurs inversibles \mathbf{S} et \mathbf{T} , on a

$$(\mathbf{ST})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}. \quad (1.77)$$

Tenseurs symétriques

On dit qu'un tenseur est symétrique lorsqu'il est égal à son transposé. Le tenseur \mathbf{L} est symétrique si

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^T, \quad (1.78)$$

c'est-à-dire si

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (1.79)$$

Par conséquent, un tenseur symétrique a six composantes indépendantes.

Tenseurs antisymétriques

Un tenseur \mathbf{L} est dit antisymétrique s'il est égal à l'opposé de son transposé, ou encore

$$\mathbf{L} = -\mathbf{L}^T, \quad (1.80)$$

c'est-à-dire

$$L_{ij} = -L_{ji}. \quad (1.81)$$

Dans ce dernier cas, les composantes diagonales de \mathbf{L} sont nulles et seules trois composantes sont indépendantes.

Dès lors, on peut prouver que tout tenseur \mathbf{L} d'ordre 2 peut être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur symétrique \mathbf{L}^S et d'un tenseur antisymétrique \mathbf{L}^A . Pour montrer que cette décomposition est possible, on écrit

$$\begin{aligned} L_{ij} &= L_{ij}^S + L_{ij}^A \\ L_{ij}^S &= \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji}) \\ L_{ij}^A &= \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Pour démontrer l'unicité, supposons qu'il existe deux décompositions, c'est-à-dire

$$L_{ij} = L_{ij}^S + L_{ij}^A = L'_{ij}^S + L'_{ij}^A.$$

La dernière égalité donne

$$L_{ij}^S - L'_{ij}^S = L'_{ij}^A - L_{ij}^A. \quad (1.83)$$

Le membre de gauche de (1.83) est symétrique, le membre de droite est antisymétrique. Seul le tenseur nul (toutes ses composantes sont nulles) satisfait la condition (1.83). On a donc

$$L_{ij}^S = L'_{ij}^S \quad L_{ij}^A = L'_{ij}^A.$$

Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur \mathbf{L} d'ordre 2, notée tr , est la somme de ses composantes diagonales

$$\text{tr}(\mathbf{L}) = \text{tr}(L_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)) = L_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = L_{ij} \delta_{ij} = L_{ii}. \quad (1.84)$$

La trace du produit tensoriel de deux vecteurs se réduit au produit scalaire des vecteurs

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.85)$$

Les propriétés de la trace sont

$$\text{tr} \mathbf{L} = \text{tr} \mathbf{L}^T \quad (1.86)$$

$$\text{tr}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \text{tr} \mathbf{S} + \text{tr} \mathbf{T} \quad (1.87)$$

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{L}) = \alpha \text{tr} \mathbf{L} \quad (1.88)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{L}) = \text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{A}), \quad (1.89)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tenseurs déviateurs

Un tenseur \mathbf{L} peut être décomposé en la somme d'un tenseur sphérique \mathbf{L}^s et d'un tenseur à trace nulle \mathbf{L}^d , dit déviateur tel qu'on ait

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^d. \quad (1.90)$$

La composante sphérique \mathbf{L}^s est le tiers de sa trace, soit $L_{ij}^s = \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij}$. Les composantes déviatoires \mathbf{L}^d seront définies par

$$L_{ij}^d = L_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{L}) \delta_{ij}. \quad (1.91)$$

Ces composantes L_{ij}^d ne sont pas indépendantes car la trace de \mathbf{L}^d est nulle.

Tenseur orthogonal

Un tenseur \mathbf{Q} est orthogonal s'il satisfait la condition

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (1.92)$$

pour tout vecteur \mathbf{u} et \mathbf{v} . En utilisant (1.69), la condition (1.92) s'écrit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.93)$$

Donc un tenseur orthogonal satisfait l'égalité $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Puisque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est préservé dans cette transformation, l'angle entre les vecteurs et leur norme $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ sont aussi préservés. Le tenseur \mathbf{Q} possède la propriété que $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. Si $\det \mathbf{Q} = +1$, le tenseur est appelé orthogonal propre; il correspond à une rotation. Lorsque $\det \mathbf{Q} = -1$, il est appelé impropre et correspond à une réflexion. Il est important de remarquer le lien entre le tenseur orthogonal \mathbf{Q} et le changement de coordonnées résultant de la rotation des axes effectuée dans le paragraphe 1.2.2. On y a défini une nouvelle base vectorielle \mathbf{e}'_i ($i = 1, 2, 3$) par rotation de la base vectorielle \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$), les deux systèmes d'axes étant cartésiens orthogonaux. Puisque par (1.92), l'angle entre vecteurs est conservé, le changement de coordonnées peut être considéré comme une transformation orthogonale qui effectue la rotation des vecteurs de base \mathbf{e}_i en \mathbf{e}'_i . Par conséquent, la matrice du tenseur \mathbf{Q} est égale à la matrice $[C]$.

Produit scalaire de deux tenseurs

Le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2 est le scalaire défini par la double somme

$$a = S_{ij} T_{ij}. \quad (1.94)$$

Symboliquement, on le note $a = \mathbf{S} : \mathbf{T}$. On remarquera qu'il s'agit d'une multiplication avec double contraction. En effet, on peut écrire successivement

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{T}^T) = \text{tr}(\mathbf{T} \mathbf{S}^T) = \mathbf{T} : \mathbf{S}. \quad (1.95)$$

La norme d'un tenseur $\|\mathbf{L}\|$ est définie par la relation

$$\|\mathbf{L}\| = (\mathbf{L} : \mathbf{L})^{1/2} = (L_{ij} L_{ij})^{1/2} \geq 0. \quad (1.96)$$

Le produit scalaire satisfait aussi les propriétés suivantes :

$$\mathbf{L} : (\mathbf{S} \mathbf{T}) = (\mathbf{S}^T \mathbf{L}) : \mathbf{T} = (\mathbf{L} \mathbf{T}^T) : \mathbf{S} \quad (1.97)$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.98)$$

$$\mathbf{L} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{L} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbf{L}. \quad (1.99)$$

EXEMPLE 1.6

On utilisera l'algèbre de la notation indicée pour vérifier l'identité (1.99). Avec la définition (1.94), il vient

$$\mathbf{L} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = L_{ij}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = L_{ij}a_i b_j = a_i L_{ij} b_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{L} \mathbf{b}. \quad \P \quad (1.100)$$

EXEMPLE 1.7

On considère les tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} tels que $A_{ij} = A_{ji}$ est symétrique et $B_{ij} = -B_{ji}$ antisymétrique. Le produit de ces deux tenseurs s'annule. (Notons que $A_{ji}B_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ puisque le résultat est un scalaire.) D'après les définitions (1.78), (1.80) et (1.94), on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} : \mathbf{B}) &= A_{ij}B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ij}) = \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ji}) \\ &= \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ji}B_{ij}) = \frac{1}{2}(A_{ij}B_{ij} - A_{ij}B_{ij}) = 0. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Produit à droite d'un tenseur et d'un vecteur

Le produit à droite d'un tenseur \mathbf{L} et d'un vecteur \mathbf{u} est défini comme

$$v_j = u_i L_{ij} = L_{ij} u_i. \quad (1.102)$$

On note \mathbf{uL} . Ici, l'ordre des symboles est important, ce qui n'est pas le cas pour la notation indicée. La forme symbolique \mathbf{Lu} représente un autre vecteur qui en notation indicée, s'écrit

$$w_i = L_{ij} u_j = u_j L_{ij}. \quad (1.103)$$

On remarquera que cette dernière relation n'est autre que (1.43).

1.3.7 Vecteur dual d'un tenseur d'ordre 2

Les composantes d_i du vecteur dual (ou axial) d'un tenseur \mathbf{L} sont définies par le produit

$$d_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} L_{jk} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_{jk}. \quad (1.104)$$

soit explicitement

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{123} L_{23} + \varepsilon_{132} L_{32}) = -\frac{1}{2} (L_{23} - L_{32}) \\ d_2 &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{231} L_{31} + \varepsilon_{213} L_{13}) = -\frac{1}{2} (L_{31} - L_{13}) \\ d_3 &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_{312} L_{12} + \varepsilon_{321} L_{21}) = -\frac{1}{2} (L_{12} - L_{21}). \end{aligned}$$

On remarque au passage que si le tenseur \mathbf{L} est symétrique, le vecteur dual \mathbf{d} est nul. Décomposant \mathbf{L} en ses parties symétrique et antisymétrique, il vient par (1.82)

$$d_i = -\frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} L_{jk}^S + \varepsilon_{ijk} L_{jk}^A). \quad (1.105)$$

Comme ε_{ijk} est par définition antisymétrique par rapport à n'importe quel couple de ses indices, le premier terme du membre de droite s'annule puisque c'est le produit intérieur d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique (1.101). Donc le vecteur dual dépend uniquement de la partie antisymétrique d'un tenseur

$$d_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_{jk}^A. \quad (1.106)$$

L'inverse de la relation (1.104) s'obtient en multipliant les deux membres par ε_{ilm} , c'est-à-dire

$$\varepsilon_{ilm} d_i = \varepsilon_{lmi} d_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ijk} L_{jk}.$$

Grâce à (1.30), on obtient successivement

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ilm} d_i &= -\frac{1}{2} (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) L_{jk} \\ &= -\frac{1}{2} (L_{lm} - L_{ml}) = -L_{lm}^A \end{aligned}$$

ou encore

$$-L_{lm}^A = \varepsilon_{lmi} d_i. \quad (1.107)$$

Les trois composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique (les composantes diagonales sont nulles) sont équivalentes aux trois composantes du vecteur dual pour ce qui concerne l'information qu'elles fournissent, puisque $d_1 = -L_{23}^A$, $d_2 = -L_{31}^A$, $d_3 = -L_{12}^A$.

1.3.8 Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur

Soit un tenseur \mathbf{L} . Si \mathbf{u} est un vecteur qui sous l'application de \mathbf{L} se transforme en un vecteur parallèle à lui-même, c'est-à-dire

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (1.108)$$

alors le vecteur \mathbf{u} est un vecteur propre de \mathbf{L} et λ est la valeur propre correspondante. On sait que les vecteurs propres sont de longueur arbitraire, en toute généralité. Cependant, pour la facilité, nous allons les normaliser à l'unité. Soit \mathbf{n} un vecteur propre unitaire. Alors, si on introduit \mathbf{I} le tenseur unité, on peut écrire

$$\mathbf{L}\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} = \lambda \mathbf{In}, \quad (1.109)$$

ce qui donne

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (1.110)$$

Sous forme indicée, avec $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$, on a

$$(L_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad n_j n_j = 1. \quad (1.111)$$

Comme l'équation (1.111) est valable pour tout $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, on doit résoudre l'équation

$$\det([L] - \lambda[I]) = 0 \quad (1.112)$$

pour obtenir une solution.

Si le tenseur L est symétrique, alors l'équation caractéristique (1.112) permet d'invoquer un théorème de l'algèbre linéaire qui s'énonce ainsi.

Théorème

Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont toutes réelles.

Il en sera de même pour les valeurs propres correspondantes du tenseur L , qu'on appellera valeurs principales. Les vecteurs propres associés définissent les *directions principales*.

Montrons que pour un tenseur symétrique, il y a toujours trois directions principales orthogonales entre elles. Soient \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 deux vecteurs propres correspondant aux valeurs propres respectives λ_1 et λ_2 du tenseur L . Alors,

$$L\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \quad (1.113)$$

et

$$L\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_2. \quad (1.114)$$

Effectuons le produit scalaire de (1.113) par \mathbf{n}_2 et de (1.114) par \mathbf{n}_1 . On obtient en passant à la forme indicée

$$L_{ij}(n_1)_j(n_2)_i = \lambda_1(n_1)_i(n_2)_i \quad (1.115)$$

et

$$L_{ij}(n_2)_j(n_1)_i = \lambda_2(n_2)_i(n_1)_i. \quad (1.116)$$

Le premier membre de (1.116) peut se transformer grâce à la propriété de symétrie de L . On écrit

$$L_{ji}(n_1)_j(n_2)_i = \lambda_2(n_2)_i(n_1)_i. \quad (1.117)$$

Soustrayant (1.115) et (1.117), il en résulte

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0. \quad (1.118)$$

Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ et $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sont orthogonaux. Donc, on peut conclure que si les valeurs propres sont toutes distinctes, alors les trois directions principales sont mutuellement orthogonales.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, on a $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$. Les directions \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont choisies mutuellement orthogonales et normales à \mathbf{n}_3 .

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, les directions $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ et \mathbf{n}_3 sont choisies mutuellement orthogonales sans aucune restriction.

Examinons quelle est la forme de la matrice d'un tenseur par rapport à ses directions principales. Notons $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ les vecteurs unitaires dans ces directions. Si on utilise ces vecteurs comme vecteurs de base, alors les composantes du tenseur deviennent

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{L} \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{n}_1) = \lambda_1 \\ L_{22} &= \lambda_2 \\ L_{33} &= \lambda_3 \\ L_{12} &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{L} \mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{n}_2) = 0 = L_{21} \\ L_{13} &= L_{31} = 0 \\ L_{23} &= L_{32} = 0. \end{aligned} \tag{1.119}$$

Donc la matrice est diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres.

Invariants scalaires d'un tenseur et théorème de Cayley-Hamilton

L'équation caractéristique d'un tenseur (1.112) est cubique en λ . On peut l'écrire

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{L})\lambda^2 + I_2(\mathbf{L})\lambda - I_3(\mathbf{L}) = 0, \tag{1.120}$$

où $I_1(\mathbf{L}), I_2(\mathbf{L}), I_3(\mathbf{L})$ sont les invariants scalaires du tenseur \mathbf{L} . Ceux-ci sont tels que

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{L}) &= L_{ii} = \text{tr } \mathbf{L} \\ I_2(\mathbf{L}) &= \left| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} L_{22} & L_{23} \\ L_{32} & L_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} L_{11} & L_{13} \\ L_{31} & L_{33} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} (L_{ii}L_{jj} - L_{ij}L_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{L})^2 - \text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{L})) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{L})^2 - \text{tr}(\mathbf{L}^2)) \\ I_3(\mathbf{L}) &= \varepsilon_{ijk}L_{i1}L_{j2}L_{k3} = \det \mathbf{L}. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Comme par définition les valeurs propres de \mathbf{L} sont indépendantes des vecteurs de base $\{\mathbf{e}_i\}$, alors les coefficients de la cubique doivent être les mêmes pour tout $\{\mathbf{e}_i\}$. C'est la raison de leur nom « invariants scalaires ».

EXEMPLE 1.8

Trouver les valeurs principales (valeurs propres) et les vecteurs unitaires correspondants (vecteurs propres) du tenseur symétrique

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.122}$$

En utilisant les expressions (1.121), les invariants correspondants sont

$$I_1(\mathbf{L}) = 4, \quad I_2(\mathbf{L}) = -18, \quad I_3(\mathbf{L}) = -36,$$

et l'équation caractéristique correspondante (1.112) est donnée par

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 18\lambda + 36 = 0.$$

Cette équation a trois racines distinctes qui sont les valeurs principales de \mathbf{L}

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1,65, \quad \lambda_3 = -3,65.$$

Supposons que le vecteur propre \mathbf{n}_1 correspondant à λ_1 a comme composantes $(n_1)_1, (n_1)_2, (n_1)_3$. Pour cette valeur propre particulière, l'équation (1.111) donne le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} (2 - 6)(n_1)_1 + (n_1)_2 - 2(n_1)_3 &= 0 \\ (n_1)_1 + (4 - 6)(n_1)_2 - 3(n_1)_3 &= 0 \\ -2(n_1)_1 - 3(n_1)_2 - (2 + 6)(n_1)_3 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent $(n_1)_2 = -2(n_1)_3$. En insérant ce résultat dans la troisième équation, on obtient $(n_1)_1 = -(n_1)_3$. La relation d'orthogonalité est

$$(n_1)_1^2 + (n_1)_2^2 + (n_1)_3^2 = 1.$$

Avec cette condition et les résultats pour $(n_1)_1, (n_1)_2$, on obtient $(n_1)_3 = 0,4082$. Avec cette valeur, les autres composantes sont $(n_1)_1 = -0,4082$, $(n_1)_2 = -0,8165$. Par une démarche similaire on calcule les vecteurs unitaires pour les deux autres valeurs principales. Finalement, il vient

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 6 &: (n_1)_1 = -0,4082, (n_1)_2 = -0,8165, (n_1)_3 = +0,4082 \\ \lambda_2 = 1,65 &: (n_2)_1 = +0,8736, (n_2)_2 = -0,4792, (n_2)_3 = -0,0849 \\ \lambda_3 = -3,65 &: (n_3)_1 = +0,2650, (n_3)_2 = +0,3220, (n_3)_3 = +0,9089. \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.9

Démontrer que l'expression $a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}L_{js}L_{kt}$ est un invariant du tenseur symétrique \mathbf{L} .

On utilise l'identité (1.30) pour modifier l'expression de la manière suivante

$$\begin{aligned} 2a &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}L_{js}L_{kt} = (\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks})L_{js}L_{kt} \\ &= \delta_{js}L_{js}\delta_{kt}L_{kt} - \delta_{jt}L_{js}\delta_{ks}L_{kt} \\ &= L_{jj}L_{kk} - L_{ts}L_{st} = L_{jj}L_{kk} - L_{ts}L_{ts}. \end{aligned}$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Tout tenseur \mathbf{L} satisfait sa propre équation caractéristique (cf. exercice 1.17)

$$\mathbf{L}^3 - I_1(\mathbf{L})\mathbf{L}^2 + I_2(\mathbf{L})\mathbf{L} - I_3(\mathbf{L})\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (1.123)$$

Tenseur défini positif

Introduisons la notion de tenseur défini positif. Un tenseur \mathbf{L} sera dit défini positif si pour tout vecteur \mathbf{v} différent de zéro, il satisfait l'inégalité

$$\forall \mathbf{v} \in E^3, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{L}\mathbf{v} > 0. \quad (1.124)$$

On montre de manière simple que les valeurs propres d'un tenseur défini positif sont strictement positives. En effet, soit λ une valeur propre d'un tenseur défini positif \mathbf{L} et soit \mathbf{n} le vecteur propre unitaire correspondant. Puisque $\mathbf{L}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ et que $\|\mathbf{n}\| = 1$, alors

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}\mathbf{n} = \lambda > 0.$$

Décomposition spectrale d'un tenseur

Soit le tenseur \mathbf{L} symétrique qui possède trois valeurs propres réelles λ_i et trois vecteurs propres réels orthogonaux \mathbf{n}_i . Ces vecteurs propres forment la base de décomposition spectrale qui s'écrit comme la somme de trois auto-dyades principales $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i. \quad (1.125)$$

Cette expression est connue comme la décomposition spectrale ou représentation spectrale d'un tenseur \mathbf{L} . Elle est facilement établie en exprimant $\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{I}$, $\mathbf{L} = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ et en utilisant (1.65) et (1.109).

1.3.9 Racine carrée d'un tenseur

Théorème

Soit \mathbf{C} un tenseur symétrique, défini positif dont les valeurs propres sont λ_i^2 et les vecteurs propres correspondants \mathbf{n}_i . Alors, il existe un tenseur unique, symétrique, défini positif \mathbf{U} tel que

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}. \quad (1.126)$$

On écrira $\sqrt{\mathbf{C}} = \mathbf{U}$.

DÉMONSTRATION.

1) *Existence.* Soit par (1.125)

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (1.127)$$

Définissons \mathbf{U} par la relation

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (1.128)$$

Alors, l'équation (1.126) est la conséquence directe de

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) = \mathbf{C}$$

car, en toute généralité,

$$(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)(\mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) & \text{si } i = j . \end{cases}$$

2) *Unicité.* Supposons qu'il y a deux tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} tels que

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2 = \mathbf{C} .$$

Soit \mathbf{n} le vecteur propre de \mathbf{C} correspondant à la valeur propre $\lambda > 0$. Alors,

$$0 = (\mathbf{U}^2 - \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{n} = (\mathbf{U} + \lambda \mathbf{I})(\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{n} . \quad (1.129)$$

Posons

$$\mathbf{v} = (\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{n} . \quad (1.130)$$

Alors il vient par (1.129)

$$\mathbf{U}\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{v} .$$

Mais le vecteur \mathbf{v} doit s'annuler, sinon $-\lambda$ serait une valeur propre de \mathbf{U} , ce qui est impossible puisque \mathbf{U} est défini positif et $\lambda > 0$. Donc, par (1.130), on obtient

$$\mathbf{U}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} . \quad (1.131)$$

De manière semblable, on a $\mathbf{V}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$ et donc $\mathbf{U}\mathbf{n} = \mathbf{V}\mathbf{n}$ pour tout vecteur propre \mathbf{n} de \mathbf{C} . Puisqu'on peut former une base de vecteurs propres de \mathbf{C} , alors \mathbf{U} et \mathbf{V} doivent coïncider. \square

1.3.10 Théorème de décomposition polaire

Théorème

Soit \mathbf{F} un tenseur appartenant à l'ensemble des tenseurs \mathbf{F} de déterminant $\det \mathbf{F} > 0$. Alors, il existe des tenseurs symétriques, définis positifs \mathbf{U} , \mathbf{V} et une rotation, c'est-à-dire un tenseur orthogonal de déterminant positif (et égal à 1), \mathbf{R} tels que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (1.132)$$

Chacune de ces décompositions est unique. En fait, on a

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}. \quad (1.133)$$

La représentation $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ (respectivement $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$) est la décomposition polaire à droite (respectivement à gauche) de \mathbf{F} .

DÉMONSTRATION.

1) Montrons que $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ et $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ appartiennent à l'ensemble de tous les tenseurs symétriques, définis positifs. Les deux tenseurs sont à l'évidence symétriques. De plus,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{v} = v_j F_{mi} F_{mj} v_i = F_{mi} v_i F_{mj} v_j = (\mathbf{F}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{v}) \geq 0.$$

Ce dernier produit scalaire ne peut être égal à zéro que si $\mathbf{F}\mathbf{v} = 0$. Dès lors, il ne s'annulera que si $\mathbf{v} = 0$. Donc, $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ appartient à l'ensemble des tenseurs symétriques, définis positifs. Un raisonnement analogue tient pour $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

2) *Unicité.* Soit $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ la décomposition polaire à droite de \mathbf{F} . Puisque \mathbf{R} est une rotation, il vient

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2.$$

Mais par le théorème de la racine carrée, il ne peut y avoir qu'un seul tenseur \mathbf{U} appartenant à l'ensemble des tenseurs symétriques définis positifs, dont le carré est $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Donc, la première relation de (1.133) est valable et \mathbf{U} est unique. Puisque $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$, \mathbf{R} est aussi unique. D'autre part, si $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ est la décomposition polaire à gauche, alors

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (1.134)$$

et \mathbf{V} est déterminé par (1.133) avec $\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$.

3) *Existence.* Soit un tenseur \mathbf{U} appartenant à l'ensemble des tenseurs symétriques, définis positifs donné par (1.133) et soit

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}. \quad (1.135)$$

Pour vérifier que $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ est bien une *décomposition polaire*, on doit montrer que \mathbf{R} appartient à l'ensemble de toutes les rotations.

Comme $\det \mathbf{F} > 0$ et $\det \mathbf{U} > 0$, alors $\det \mathbf{R} > 0$ ($\det \mathbf{U} > 0$ parce que toutes les valeurs propres de \mathbf{U} sont strictement positives). On doit alors seulement montrer que \mathbf{R} appartient à l'ensemble des tenseurs orthogonaux.

On procède comme suit :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^2 \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (1.136)$$

Montrons que $\det \mathbf{R} = 1$. On sait que $\det \mathbf{F} = J > 0$. Donc, $\det \mathbf{U}^2 = J^2$ et $\det \mathbf{U}^{-1} = 1/J > 0$. Par (1.136), on a $\det \mathbf{R} = \pm 1$. La relation (1.135) permet de déduire $\det \mathbf{R} = +1$, ce qui correspond à une rotation. Si on définit

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad (1.137)$$

alors \mathbf{V} appartient à l'ensemble des tenseurs symétriques définis positifs et

$$\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

□

1.3.11 Fonction tensorielle isotrope d'un tenseur symétrique

Une fonction tensorielle isotrope, dont la variable \mathbf{T} est un tenseur symétrique d'ordre 2, satisfait par définition l'identité

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{T})\mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) \quad (1.138)$$

quel que soit le tenseur orthogonal \mathbf{Q} . Alors l'application de l'espace vectoriel des tenseurs symétriques dans lui-même engendre un tenseur symétrique tel que

$$\mathbf{L} = \mathbf{f}(\mathbf{T}). \quad (1.139)$$

Nous présentons ci-après sans démonstration le théorème de représentation.

Théorème de Rivlin-Ericksen

L'expression (1.139) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \varphi_0(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{I} + \varphi_1(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{T} \\ & + \varphi_2(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{T}^2, \end{aligned} \quad (1.140)$$

où les φ_i ($i = 0, 1, 2$) sont des fonctions scalaires des invariants de \mathbf{T} .

Pour une fonction isotrope (1.140), les directions principales de \mathbf{T} et de $\mathbf{f}(\mathbf{T})$ coïncident ; \mathbf{T} et $\mathbf{f}(\mathbf{T})$ sont appelés tenseurs co-axiaux.

1.3.12 Fonction scalaire d'un tenseur

Une fonction $\mathcal{W}(\mathbf{T})$ est appelée fonction à valeur scalaire du tenseur \mathbf{T} . Lorsque \mathbf{T} est symétrique et que la condition

$$\mathcal{W}(\mathbf{T}) = \mathcal{W}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) \quad (1.141)$$

est satisfaite, la fonction $\mathcal{W}(\mathbf{T})$ est appelée fonction tensorielle isotrope à valeur scalaire du tenseur \mathbf{T} . Elle peut être représentée par la relation

$$\mathcal{W}(\mathbf{T}) = \Phi(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T})). \quad (1.142)$$

Cette fonction est aussi un invariant scalaire du tenseur \mathbf{T} . La représentation précédente est équivalente à

$$\mathcal{W}(\mathbf{T}) = \phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (1.143)$$

où les λ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les valeurs propres de \mathbf{T} .

On peut montrer que pour une fonction isotrope $\mathcal{W}(\mathbf{T})$, sa dérivée par rapport à \mathbf{T} s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{T}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (1.144)$$

avec \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$) les directions principales correspondant aux λ_i . Il s'ensuit que

$$\mathbf{T} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T}. \quad (1.145)$$

Cette dernière relation indique que les deux tenseurs \mathbf{T} et $\partial \mathcal{W} / \partial \mathbf{T}$ sont coaxiaux ou ont les mêmes vecteurs propres ou directions principales.

1.4 Analyse tensorielle

Dans cette section, nous allons introduire des concepts liés à la dérivation et la différentiation des tenseurs. On notera par exemple F un scalaire, v_i une composante vectorielle et L_{ij} la composante d'un tenseur qui sont toutes des fonctions de la position x_i dans l'espace. La notation $F(\mathbf{x})$ signifie $F(x_1, x_2, x_3)$, tandis que la notation $v_i(x_m)$ couvre les trois fonctions $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$ et $v_3(x_1, x_2, x_3)$.

Donc lorsque x_i est compris entre parenthèses pour indiquer une fonction, les règles de sommation ne s'appliquent pas à la variable indépendante : $F(x_i)$ n'est pas un vecteur mais c'est un champ scalaire, tandis que $v_i(x_m)$ est un champ vectoriel.

1.4.1 Dérivée d'une fonction vectorielle ou tensorielle d'un scalaire

Soit $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t)$ une fonction tensorielle d'un scalaire t (par exemple le temps). La dérivée de \mathbf{L} par rapport à t est le tenseur d'ordre 2 donné par

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{L}(t + \Delta t) - \mathbf{L}(t)}{\Delta t}. \quad (1.146)$$

En fonction de ses composantes, on a

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{dL_{ij}(t)}{dt} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \dot{L}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.147)$$

La dérivée première d'une fonction vectorielle $\mathbf{v}(t)$ par rapport à t est définie de manière semblable $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$. En terme de composantes, on a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (1.148)$$

et la dérivée seconde s'écrit

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{v}_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (1.149)$$

On peut établir facilement les identités suivantes :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.150)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.151)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L} \pm \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \pm \frac{dT}{dt} \quad (1.152)$$

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \mathbf{L}) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \mathbf{L} + \alpha(t) \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1.153)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{LT}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \mathbf{T} + \mathbf{L} \frac{dT}{dt} \quad (1.154)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{La}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \mathbf{a} + \mathbf{L} \frac{da}{dt} \quad (1.155)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}^T) = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)^T \quad (1.156)$$

Démontrons par exemple (1.155). Par la définition (1.146), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\mathbf{L}\mathbf{a}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{L}(t + \Delta t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{L}(t + \Delta t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{a}(t) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{L}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{a}(t + \Delta t) \right) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{L}(t + \Delta t) - \mathbf{L}(t))\mathbf{a}(t + \Delta t)}{\Delta t} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{L}(t)(\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t))}{\Delta t} \\
 &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \mathbf{a} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{a}}{dt}.
 \end{aligned}$$

1.4.2 Gradient d'un champ scalaire

A un champ scalaire $F(\mathbf{x})$, on associe un champ vectoriel appelé le gradient de F . Ce gradient est noté ∇F ou encore **grad** F . Il est tel que son produit scalaire avec $d\mathbf{x}$ donne la différence entre les valeurs de F évaluées en $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ et \mathbf{x} . On obtient

$$dF = F(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = \nabla F \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.157)$$

Si on désigne par dx la norme de $d\mathbf{x}$ et par \mathbf{e} le vecteur unitaire dans la direction de $d\mathbf{x}$ ($\mathbf{e} = d\mathbf{x}/dx$), alors l'équation (1.157) donne

$$\left(\frac{dF}{dx} \right)_{\text{dans la direction } \mathbf{e}} = \nabla F \cdot \mathbf{e}. \quad (1.158)$$

Cette dernière relation montre que la composante de ∇F dans la direction \mathbf{e} donne la variation de F dans cette direction (dérivée directionnelle). Puisqu'on a

$$\left(\frac{dF}{dx} \right)_{\text{dans la direction } \mathbf{e}_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \nabla F \cdot \mathbf{e}_1 = (\nabla F)_1$$

et des relations analogues dans les directions 2 et 3, les composantes cartésiennes de ∇F sont $\partial F/\partial x_i$. Il vient

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial F}{\partial x_i} \mathbf{e}_i. \quad (1.159)$$

On peut définir l'opérateur gradient comme

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad (1.160)$$

où (\bullet) indique une fonction quelconque.

Il est facile de montrer que le gradient d'un champ scalaire est un vecteur. En effet, par la relation (1.18), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x'_i} &= \frac{\partial}{\partial x'_i} f'(x'_j) = \frac{\partial}{\partial x'_i} f(x_m(x'_j)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_m) \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} F(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Cette équation est une transformation de la forme (1.22).

1.4.3 Gradient d'un champ vectoriel

Au champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, on associe un champ tensoriel, appelé le gradient de \mathbf{v} et noté $\nabla \mathbf{v}$. C'est un tenseur d'ordre 2 qui, appliqué à $d\mathbf{x}$, donne la différence de \mathbf{v} en $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ et \mathbf{x} . On a

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x}. \quad (1.161)$$

Soit à nouveau $dx = \|d\mathbf{x}\|$ et $\mathbf{e} = d\mathbf{x}/dx$. On obtient

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)_{\text{dans la direction } \mathbf{e}} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}. \quad (1.162)$$

Le tenseur $(\nabla \mathbf{v})$ d'ordre 2 (on laisse au lecteur le soin de démontrer qu'il s'agit bien d'un tenseur d'ordre 2) transforme un vecteur unitaire \mathbf{e} en un vecteur décrivant la variation de \mathbf{v} dans cette direction. Puisque

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)_{\text{dans la direction } \mathbf{e}_1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_1,$$

alors dans un système d'axes cartésiens, on a

$$(\nabla \mathbf{v})_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}.$$

En toute généralité, un raisonnement analogue conduit à écrire

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (1.163)$$

Le tenseur $\nabla \mathbf{v}$ s'exprime comme (voir (1.49) et (1.51))

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (1.164)$$

1.4.4 Gradient d'une fonction tensorielle à valeur scalaire

Pour une fonction tensorielle non linéaire $\mathcal{W}(\mathbf{T})$ à valeur scalaire régulière d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2, les deux premiers termes d'un développement en série de Taylor autour de \mathbf{T} sont

$$\mathcal{W}(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) = \mathcal{W}(\mathbf{T}) + d\mathcal{W}(\mathbf{T}) + o(d\mathbf{T}), \quad (1.165)$$

où $o(d\mathbf{T})$ est le reste du développement qui tend vers zéro lorsque $d\mathbf{T} \rightarrow 0$, selon la relation

$$\lim_{d\mathbf{T} \rightarrow 0} \frac{o(d\mathbf{T})}{\|d\mathbf{T}\|} = 0. \quad (1.166)$$

La différentielle totale s'exprime comme suit

$$d\mathcal{W}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} : d\mathbf{T} = \text{tr} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \right)^T d\mathbf{T} \right). \quad (1.167)$$

En notation indicée,

$$d\mathcal{W}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{T})}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{T})}{\partial T_{ji}} dT_{ij} \quad (1.168)$$

Le tenseur $\partial \mathcal{W}(\mathbf{T}) / \partial \mathbf{T}$ d'ordre 2 est appelé le gradient de $\mathcal{W}(\mathbf{T})$ en \mathbf{T} .

1.4.5 Gradient d'une fonction tensorielle à valeur tensorielle

Pour une fonction tensorielle non linéaire à valeur tensorielle, régulière, $\mathbf{S}(\mathbf{T})$ d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2, les deux premiers termes d'un développement en série de Taylor autour de \mathbf{T} sont

$$\mathbf{S}(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) = \mathbf{S}(\mathbf{T}) + d\mathbf{S}(\mathbf{T}) + o(d\mathbf{T}). \quad (1.169)$$

Lorsque $d\mathbf{T} \rightarrow 0$, on a

$$d\mathbf{S}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} : d\mathbf{T}. \quad (1.170)$$

En notation indicée,

$$dS_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} dT_{kl} \quad (1.171)$$

Le tenseur $\partial \mathbf{S}(\mathbf{T}) / \partial \mathbf{T}$ d'ordre 4 est le gradient de $\mathbf{S}(\mathbf{T})$ en \mathbf{T} .

1.4.6 Divergence d'un vecteur et d'un tenseur

Soit $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ un champ vectoriel. La divergence de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est le résultat scalaire obtenu par un processus de contraction. Ainsi

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{tr} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}). \quad (1.172)$$

Notons que lorsque la divergence d'un champ vectoriel \mathbf{v} est nulle, c.-à-d. $\text{div } \mathbf{v} = 0$, le champ \mathbf{v} est dit champ solénoïdal.

On peut aussi exprimer la divergence du champ \mathbf{v} comme le produit scalaire suivant

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (1.173)$$

Pour un tenseur, la divergence de \mathbf{L} est le champ vectoriel noté $\mathbf{div} \mathbf{L}$, par contraction

$$(\mathbf{div} \mathbf{L})_i = \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = L_{ij,j} \quad (1.174)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{L} &= \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_j} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial L_{ik}}{\partial x_j} \delta_{kj} \mathbf{e}_i = \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (1.175)$$

1.4.7 Rotationnel d'un champ vectoriel

Soit $\mathbf{v}(x)$ un champ vectoriel. Le rotationnel de \mathbf{v} est le champ vectoriel défini par l'équation

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (1.176)$$

Sous forme indicée, on a

$$(\mathbf{rot} \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}. \quad (1.177)$$

Par les propriétés du symbole de permutation, on peut vérifier facilement que

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{v})_1 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{v})_2 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{v})_3 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.178)$$

Si le rotationnel du champ \mathbf{v} s'annule, c-à-d. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, ce champ est irrotationnel.

EXEMPLE 1.10

Démontrer que

$$\mathbf{rot} (\nabla \Phi) = \nabla \times \nabla \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0. \quad (1.179)$$

Il vient successivement

$$(\nabla \times \nabla \Phi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}.$$

$$\text{Donc, } 2\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

EXEMPLE 1.11

Démontrer que

$$\operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{a}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 . \quad (1.180)$$

En tenant compte de (1.177), on obtient

$$\operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

En suivant la même démarche que dans l'exemple précédent, on montre que (1.180) est satisfaite.

EXEMPLE 1.12

Démontrer que

$$\operatorname{div}(\Phi \mathbf{a}) = \Phi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \Phi) . \quad (1.181)$$

En tenant compte de (1.172), on a

$$\operatorname{div}(\Phi \mathbf{a}) = \frac{\partial(\Phi a_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} a_i + \Phi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{a} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{a} .$$

1.4.8 Opérateur laplacien

Laplacien d'un champ scalaire

On rencontre aussi des dérivées seconde dans des expressions physiques. Par exemple, la divergence d'un gradient d'une fonction scalaire est

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{ou encore} \quad \nabla \cdot (\nabla F) \text{ ou } \operatorname{div}(\operatorname{grad} F) \quad (1.182)$$

qui est aussi le laplacien de F , noté symboliquement $\nabla^2 F$ ou encore ΔF ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} . \quad (1.183)$$

Une fonction F qui satisfait l'équation

$$\nabla^2 F = 0 \quad (1.184)$$

est dite harmonique. L'équation (1.184) est connue comme celle de Laplace.

Si

$$\nabla^2 F = f , \quad (1.185)$$

où f est une fonction scalaire, l'équation est celle de Poisson.

Laplacien d'un champ vectoriel

On peut aussi traiter une fonction vectorielle de la même manière. La divergence du gradient d'un vecteur s'écrit

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{ou encore} \quad \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) \text{ ou } \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}). \quad (1.186)$$

Le résultat de ces opérations est un vecteur. On note cette opération de dérivée ∇^2 , c'est-à-dire

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.187)$$

Le symbole $\nabla^2 \mathbf{v}$ ne pose pas de problème en coordonnées rectangulaires puisque $\nabla^2 \mathbf{v}$ possède trois composantes telles que

$$(\nabla^2 \mathbf{v})_i = \nabla^2 v_i.$$

La difficulté survient dans des systèmes de coordonnées curvilignes où on a

$$(\nabla^2 \mathbf{v})_i \neq \nabla^2(v_i).$$

EXEMPLE 1.13

Démontrer que

$$\operatorname{div}(\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi. \quad (1.188)$$

En effet, on a successivement

$$\operatorname{div}(\nabla \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2 \Phi. \quad (1.189)$$

EXEMPLE 1.14

Démontrer que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}. \quad (1.190)$$

Sous forme indicée, on a

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))_l = \varepsilon_{lmi} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j}.$$

A l'aide de (1.30) et des propriétés du symbole de permutation, il vient

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} &= (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} \\
 &= \delta_{lj} \delta_{mk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} - \delta_{lk} \delta_{mj} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_m \partial x_j} \\
 &= \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_m \partial x_l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_j \partial x_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial a_m}{\partial x_m} \right) - \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_j \partial x_j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_l} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 a_l = (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a})_l ,
 \end{aligned}$$

et donc

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))_l = (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a})_l ,$$

expression valable pour les trois composantes du vecteur \mathbf{a} .

EXEMPLE 1.15

Démontrer que

$$\operatorname{div} (\nabla^2 \mathbf{a}) = \nabla^2 (\operatorname{div} \mathbf{a}) . \quad (1.191)$$

Sous forme indicée, on a

$$(\nabla^2 \mathbf{a})_i = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} .$$

Donc

$$(\operatorname{div} (\nabla^2 \mathbf{a})_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) = \nabla^2 (\operatorname{div} \mathbf{a}) .$$

1.4.9 Coordonnées curvilignes

Soient x_i les coordonnées cartésiennes d'un point P. Dans un système de coordonnées curvilignes θ_i (par exemple, cylindriques ou sphériques), la position du point P est donnée par les trois nombres θ_i qui représentent les courbes de coordonnées passant par P (fig. 1.4), c'est-à-dire par les courbes sur lesquelles deux des trois coordonnées θ_i sont constantes. Les coordonnées curvilignes peuvent être considérées comme des fonctions des coordonnées cartésiennes

$$\theta_i = \theta_i(x_j) , \quad (1.192)$$

et si la condition que le jacobien J défini par $J = \det(\partial \theta_i / \partial x_j)$ ne s'annule pas est satisfaite, alors la transformation (1.192) est inversible.

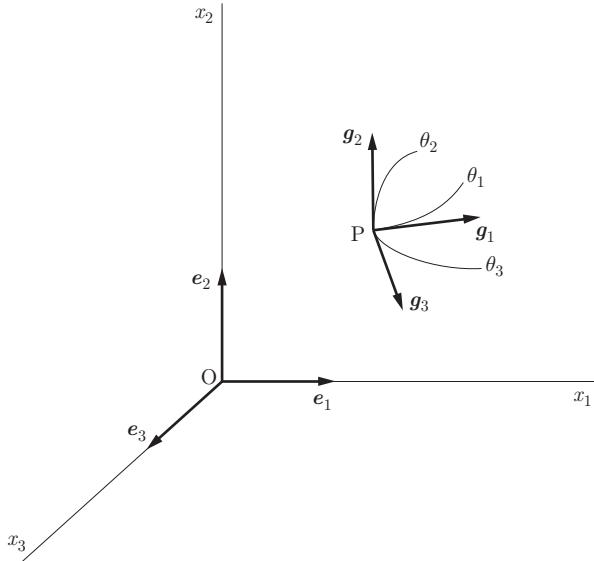


Fig. 1.4 Système de coordonnées curvilignes.

Le lieu des points pour lesquels la coordonnée curviligne \$\theta_i\$ est une constante est une surface d'équation

$$\theta_i(x_j) = \text{cste.} \quad (1.193)$$

Considérons successivement les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques. En se référant à la figure 1.5, ou à la figure 1.6, on passe respectivement des coordonnées cylindriques ou sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$\begin{aligned}\theta_1 &= r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta_2 &= \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \\ \theta_3 &= z = x_3.\end{aligned} \quad (1.194)$$

Par la figure 1.6, en coordonnées sphériques, on a

$$\begin{aligned}\theta_1 &= r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \theta_2 &= \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \\ \theta_3 &= \varphi = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}.\end{aligned} \quad (1.195)$$

L'angle \$\varphi\$ est la longitude et \$\theta\$ la colatitude.

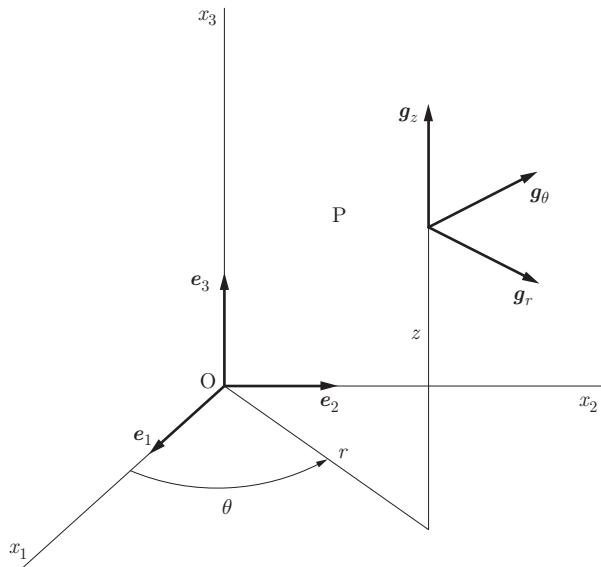


Fig. 1.5 Système de coordonnées cylindriques.

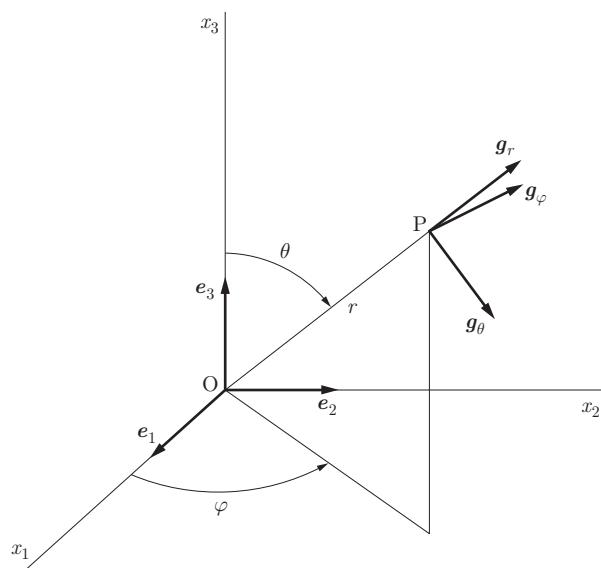


Fig. 1.6 Système de coordonnées sphériques.

Les relations inverses s'obtiennent aisément :

Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta \\x_3 &= z.\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\x_3 &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Pour le calcul d'intégrales de volume, l'élément dV s'écrit dans les divers systèmes de coordonnées :

- cartésiennes $dV = dx dy dz$,
- cylindriques $dV = r dr d\theta dz$,
- sphériques $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Le vecteur position d'un point P en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (1.196)$$

En coordonnées curvilignes, les vecteurs de base au point P sont les trois vecteurs de longueur unitaire tangents aux lignes de coordonnées passant par P. On les définit par les relations

$$\mathbf{g}_i = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_i}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_i} \right\|}. \quad (1.197)$$

Les vecteurs \mathbf{g}_i sont représentés aux figures 1.4 à 1.6 dans leur contexte respectif.

En coordonnées cylindriques, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 \\\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1 \quad \mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \\\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r \quad \mathbf{g}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{g}_z = \mathbf{e}_3.\end{aligned} \quad (1.198)$$

Par le même raisonnement, on obtient en coordonnées sphériques

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \quad \mathbf{g}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \quad \mathbf{g}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}. \quad (1.199)$$

On remarque que les vecteurs de base en coordonnées cylindriques et sphériques sont orthogonaux. Les coordonnées curvilignes correspondantes sont orthogonales.

Les cosinus directeurs des vecteurs de base \mathbf{g}_i par rapport à la base \mathbf{e}_j s'obtiennent suivant (1.6)

$$c_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j . \quad (1.200)$$

En coordonnées cylindriques, par (1.198) et (1.200), il vient

$$[C] = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.201)$$

Cette dernière matrice est orthogonale.

1.4.10 Scalaires, vecteurs et tenseurs en coordonnées curvilignes orthogonales

La valeur d'un champ scalaire est donné soit en coordonnées cartésiennes soit curvilignes par la transformation

$$F(P) = f(x_i) = f(x_i(\theta_j)) = f'(\theta_j) . \quad (1.202)$$

Soit \mathbf{v} un vecteur en un point P de coordonnées x_i, θ_i . Les composantes physiques v'_i du vecteur \mathbf{v} en coordonnées curvilignes au point P sont ses composantes suivant les vecteurs de base \mathbf{g}_i , c'est-à-dire

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{g}_i . \quad (1.203)$$

On obtient

$$v'_i = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j v_j = c_{ij} v_j . \quad (1.204)$$

Si un tenseur \mathbf{L} appliqué à un vecteur \mathbf{u} produit le vecteur \mathbf{v} suivant $\mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, les composantes physiques de \mathbf{L} en coordonnées curvilignes au point P sont telles que

$$v'_i = L'_{ij} u'_j . \quad (1.205)$$

On vérifie aisément que

$$L'_{ij} = c_{ik} c_{jl} L_{kl} . \quad (1.206)$$

1.4.11 Gradient d'un champ scalaire et d'un vecteur en coordonnées curvilignes orthogonales

Le gradient de la propriété F donnée par (1.159) est un vecteur \mathbf{h} de composantes $\partial f / \partial x_j$ dans les coordonnées cartésiennes. En coordonnées curvilignes, on aura pour les composantes physiques de ce vecteur

$$h'_i = c_{ij} h_j = c_{ij} \frac{\partial f'}{\partial \theta_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial x_j} . \quad (1.207)$$

En coordonnées cylindriques, on a avec l'aide des relations (1.194)

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{r} = \cos \theta & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}.\end{aligned}\quad (1.208)$$

Par combinaison des équations (1.207) et (1.208), on obtient facilement

$$h'_r = \frac{\partial f'}{\partial r} \quad h'_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f'}{\partial \theta} \quad h'_z = \frac{\partial f'}{\partial z}. \quad (1.209)$$

Si on considère une fonction scalaire f définie dans les deux systèmes de coordonnées, cartésiennes et cylindriques, puisque x_i et θ_i sont liés par la relation (1.192), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right).\end{aligned}$$

La dernière relation donne

$$\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_m \partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \theta_k}{\partial x_m} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j}. \quad (1.210)$$

On peut alors calculer pour les dérivées premières

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.211)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.212)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.213)$$

et pour les dérivées secondes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\end{aligned}\quad (1.214)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\end{aligned}\quad (1.215)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.216)$$

En combinant les relations (1.214)-(1.216), on obtient pour l'opérateur laplacien

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.217)$$

Pour exprimer le gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques et sphériques, il nous faut définir les tenseurs métriques des ces systèmes de coordonnées et faire appel à une analyse plus avancée que celle que nous présentons dans ce livre. Le lecteur peut trouver un complément de lecture dans [2, 15, 59]. A titre d'exemple, pour le gradient d'un vecteur, on aura

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \nabla \mathbf{v} \\ \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.218)$$

Les autres opérations, telles que la divergence d'un vecteur, les composantes du rotationnel et les composantes du laplacien d'un vecteur, sont données *in extenso* dans l'annexe A pour les coordonnées cylindriques.

L'annexe B rassemble toutes les expressions nécessaires pour le cas des coordonnées sphériques.

1.4.12 Définition de la notion de flux

Considérons à la figure 1.7 un corps dans un espace tridimensionnel ainsi qu'une surface d'aire ds sur ce corps. Le volume de matière traversant ds durant l'intervalle de temps dt est donné par

$$v_i n_i dt ds \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt ds, \quad (1.219)$$

où $v_i n_i dt$ correspond à la hauteur du cylindre de matière ayant traversé la surface pendant l'intervalle de temps dt . Alors, on a les définitions suivantes en adoptant la notation $\partial\omega$ pour la surface qui enveloppe le volume ω :

- le flux d'un vecteur

$$\int_{\partial\omega} v_i n_i ds \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds; \quad (1.220)$$

- le flux d'une quantité scalaire quelconque ρ au travers de la surface d'un corps (quantité scalaire)

$$\int_{\partial\omega} \rho v_i n_i ds \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds; \quad (1.221)$$

- le flux d'énergie cinétique (quantité scalaire)

$$\int_{\partial\omega} \frac{1}{2} \rho v_i v_i v_j n_j ds \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\omega} \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds; \quad (1.222)$$

- le flux d'une propriété Q par

$$\int_{\partial\omega} Q v_i n_i \, ds \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\omega} Q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds. \quad (1.223)$$

Dans ce dernier cas, Q peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur.

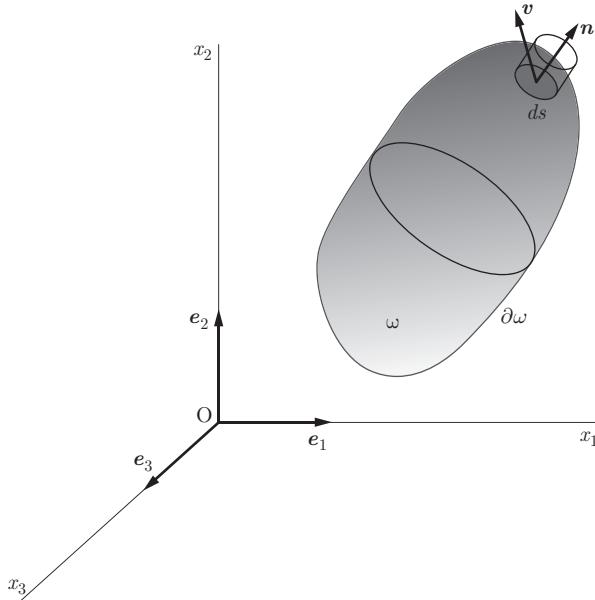


Fig. 1.7 La notion de flux.

1.4.13 Formules intégrales de Gauss et Stokes

Théorème de Gauss ou de la divergence

Le théorème de base de l'analyse établit la relation entre l'intégrale et la dérivée de l'intégrand. Si pour l'intégrand on a $f = dF/dx$, alors

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b \frac{dF}{dx} \, dx = F(b) - F(a).$$

Le théorème équivalent pour une intégrale de volume est appelé le théorème de Gauss. Ecrivons-le pour une fonction tensorielle arbitraire $T_{jk\dots}(x_i)$

$$\int_{\omega} \frac{\partial T_{jk\dots}}{\partial x_i} \, dv = \int_{\partial\omega} n_i T_{jk\dots} \, ds. \quad (1.224)$$

Le théorème de Gauss est le plus souvent utilisé sous la forme du *théorème de la divergence*. Ce théorème transforme l'intégrale volumique de la divergence d'une propriété d'un milieu continu en une intégrale de surface.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fut un mathématicien doué au point tel qu'il s'est vu couronné comme le « prince des mathématiques » à l'âge de 24 ans par des savants de toute l'Europe. Nommé professeur de mathématiques à l'Université de Göttingen, il apporta des contributions majeures à la théorie des nombres, la géodésie, la géométrie, les statistiques (méthode des moindres carrés) et la physique. Il avait pris pour devise « Pauca sed matura ». Il renonça à publier d'importants manuscrits parce qu'ils ne satisfaisaient pas ce critère.

Fig. 1.8 Carl Friedrich Gauss.

Dans (1.224), $T_{jk\dots}$ peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur de rang arbitraire et le symbole \boldsymbol{n} représente le vecteur unitaire normal à ds (fig. 6.8).

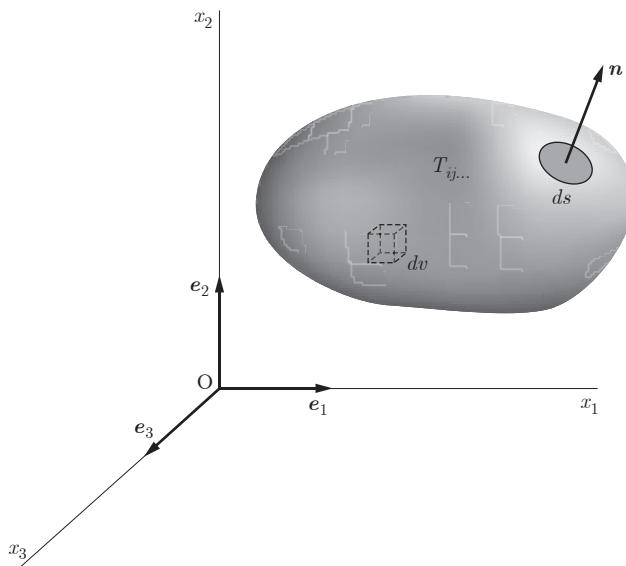


Fig. 1.9 Surface et volume élémentaire utilisés dans le théorème de Gauss.

Prenons le cas où $T_{jk\dots} = F$ (fonction scalaire). Alors le théorème devient

$$\int_{\omega} \frac{\partial F}{\partial x_i} dv = \int_{\omega} (\nabla F)_i dv = \int_{\partial\omega} n_i F ds. \quad (1.225)$$

Si $T_{jk\dots}$ est la composante d'une fonction vectorielle v_i , on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dv &= \int_{\omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v} dv = \int_{\partial\omega} n_i v_i ds \\ &= \int_{\partial\omega} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} ds. \end{aligned} \quad (1.226)$$

L'intégrale de surface du membre de droite exprime le flux du vecteur \mathbf{v} à travers la surface $\partial\omega$. Pour une quantité tensorielle telle que $\mathbf{T} = \mathbf{L}$, le théorème s'écrit

$$\int_{\omega} \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_i} dv = \int_{\partial\omega} L_{ji} n_i ds \quad \text{ou} \quad \int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{L} dv = \int_{\partial\omega} \mathbf{L} \mathbf{n} ds. \quad (1.227)$$

Pour une propriété Q quelconque, le théorème s'écrit

$$\int_{\omega} \frac{\partial Q v_i}{\partial x_i} dv = \int_{\partial\omega} Q v_i n_i ds \quad \text{ou} \quad \int_{\omega} \operatorname{div}(\mathbf{v} Q) dv = \int_{\partial\omega} Q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (1.228)$$

Théorème de Stokes

Dans ce cas, on relie l'intégrale de surface à une intégrale de contour le long de la courbe C qui borde la surface. Plus précisément, le théorème s'écrit

$$\int_{\partial\omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.229)$$

où le vecteur $d\mathbf{l}$ est tangent à C .



George Gabriel Stokes (1819-1903) est un mathématicien irlandais (né à Skreen dans le comté de Sligo). Nommé professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge à l'âge de 30 ans, il a beaucoup œuvré en hydrodynamique, en élasticité et en optique. On lui doit la loi de « Stokes » pour le mouvement des particules dans un fluide visqueux. Il a écrit, de manière très précise, les équations de la dynamique des fluides visqueux connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes.

Fig. 1.10 George Gabriel Stokes.

1.5 Exercices

[1.1] Démontrer que le symbole de Kronecker est un tenseur d'ordre 2.

[1.2] Démontrer que $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = 3$.

[1.3] Démontrer que $\varepsilon_{ijk}u_i u_j = 0$ et que $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$.

[1.4] Démontrer que $\mathbf{t} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}$.

[1.5] Calculer l'expression équivalente à

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

où les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ sont non nuls. Ecrire le résultat en notation vectorielle.

[1.6] Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs quelconques. Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante :

$$[(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}]_i = a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} .$$

Démontrer les identités suivantes :

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (1.230)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \\ &\quad + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (1.231)$$

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a}. \quad (1.232)$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} \quad (1.233)$$

[1.7] Soient \mathbf{a} une fonction vectorielle quelconque et Φ une fonction scalaire, continûment différentiable.

Démontrer les identités suivantes :

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{a}) = \Phi \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \Phi \quad (1.234)$$

$$\nabla(\Phi \mathbf{a}) = \Phi \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \nabla \Phi \quad (1.235)$$

$$\nabla^2(\nabla \Phi) = \nabla(\nabla^2 \Phi) \quad (1.236)$$

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{a}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{a}) . \quad (1.237)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \text{rot rot } \mathbf{a} . \quad (1.238)$$

[1.8] Soient \mathbf{a} une fonction vectorielle quelconque, Φ une fonction scalaire, continûment différentiable et \mathbf{x} le vecteur position. Démontrer

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{x} \quad (1.239)$$

$$\nabla^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = 2 \text{ div } \mathbf{a} + \mathbf{x} \cdot (\nabla^2 \mathbf{a}) \quad (1.240)$$

$$\nabla^2(\Phi \mathbf{x}) = 2 \nabla \Phi + \mathbf{x} \nabla^2 \Phi . \quad (1.241)$$

[1.9] Vérifier que $\text{tr}(\mathbf{L})$ est un invariant.

[1.10] Démontrer (1.69) et (1.71).

[1.11] Etablir les relations (1.121)

[1.12] Soit $[A]$ une matrice à coefficients constants. Vérifier la relation suivante :

$$\nabla(A_{jk} x_j x_k) = (A_{ij} + A_{ji}) x_j \mathbf{e}_i . \quad (1.242)$$

[1.13] Montrer que la forme quadratique $D_{ij} x_i x_j$ reste inchangée si on remplace D_{ij} par sa partie symétrique.

[1.14] Montrer que pour un tenseur orthogonal \mathbf{Q} , les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.243)$$

$$\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 . \quad (1.244)$$

[1.15] Trouver les invariants d'un tenseur antisymétrique et ses valeurs propres.

[1.16] En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton (1.123), démontrer que le théorème de représentation (1.140) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \alpha_0(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{I} + \alpha_1(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{T} \\ & + \alpha_2(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T}))\mathbf{T}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.245)$$

où les α_i ($i = 1, 2, 3$) sont des fonctions scalaires des invariants de \mathbf{T} .

[1.17] En utilisant l'équation caractéristique d'un tenseur (1.120), la relation (1.109) et la propriété (1.59), démontrer (1.123).

[1.18] Pour une matrice $[A]$ d'ordre 3, démontrer les relations suivantes :

$$\det[A] = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \quad (1.246)$$

$$([A]^{-1})_{ij} = \frac{1}{2 \det[A]} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} a_{km} a_{ln}. \quad (1.247)$$

[1.19] Démontrer que pour les fonctions scalaires f et g , on a

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g. \quad (1.248)$$

Cinématique des milieux continus

2.1 Introduction

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps qu'il soit solide ou fluide. Ce mouvement est décrit par les positions consécutives de chaque point du corps en fonction du temps. Nous ne nous intéresserons pas aux causes de ce mouvement. Cependant, nous imposerons la condition que le corps reste un milieu continu au sens où sa masse volumique et tous les autres paramètres décrivant le mouvement sont des fonctions continues des variables spatiales et du temps. Dans ce chapitre, on définira les divers paramètres qui caractérisent le mouvement du corps et on présentera de manière détaillée des mesures de sa déformation. Leurs propriétés et leur signification seront mises en valeur. De plus, l'invariance de ces divers paramètres par rapport à un référentiel, en relation avec un observateur, sera discutée. La description sera générale et ne sera pas limitée à une forme particulière des mouvements ou de la constitution du corps.

La cinématique des milieux continus est couverte dans les monographies suivantes : [14, 22, 23, 24, 32, 35, 39, 41, 44, 45, 47, 61, 69].

2.2 Corps, configurations et mouvement

Un **corps** \mathcal{C} est un ensemble de *particules* ou de *points matériels*. Ces particules correspondent dans la réalité à un volume matériel infinitésimal. A tout instant t , chaque particule occupe un point d'un espace euclidien tridimensionnel. Le volume V occupé par toutes les particules de \mathcal{C} au temps t est appelé la **configuration** \mathcal{R}_t ou \mathcal{R} . En particulier, la configuration de \mathcal{C} au temps $t = 0$ est définie comme la **configuration initiale** et sera notée \mathcal{R}_0 (fig. 2.1). De plus, la frontière du corps est indiquée par $\partial\mathcal{R}$, ou $\partial\mathcal{R}$.

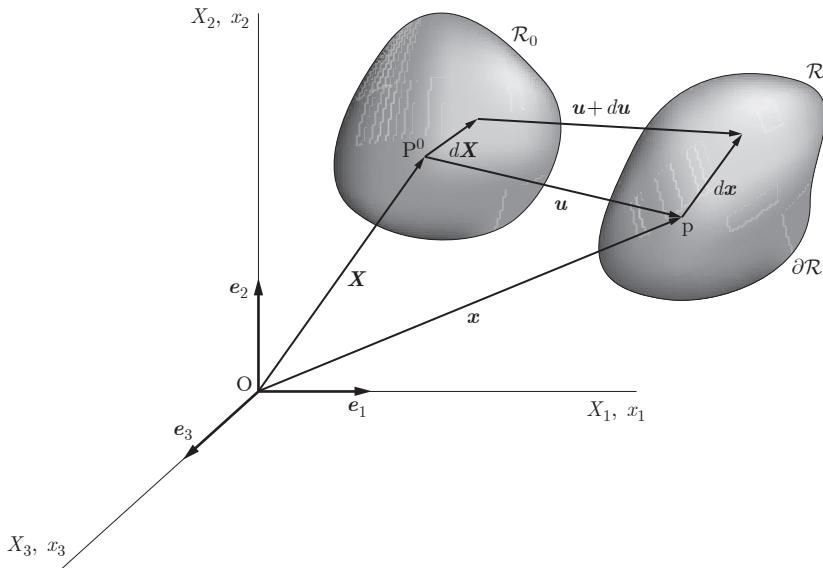


Fig. 2.1 Configurations initiale en $t = 0$ et actuelle au temps présent t de \mathcal{C} .

Un *mouvement* de \mathcal{C} est une séquence continue de configurations de \mathcal{C} vue par un *observateur*. La notion de mouvement est évidemment liée à celle de référentiel. En mécanique rationnelle [1, 27], un référentiel est un ensemble de N points ($N \geq 4$), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres, et par rapport auxquels on étudie le mouvement. Le choix du référentiel étant arbitraire, en mécanique classique, on utilise souvent un référentiel d'inertie ou galiléen. Il ne faut pas confondre les notions de référentiel et de repère : pour un référentiel donné, il existe une infinité de repères. Comme en mécanique classique, nous définirons le concept d'observateur par

$$\text{un observateur} = \text{un chronomètre} + \text{un repère}.$$

Dans le repère cartésien orthogonal fixe (de l'observateur), ayant pour origine 0, la position P^0 d'une particule de \mathcal{C} à $t = 0$ est représentée par le *vecteur position initiale* \mathbf{X} et sa position p au temps présent $t \geq 0$ par le *vecteur position actuelle* \mathbf{x} . Donc, le mouvement de \mathcal{C} est décrit par une fonction vectorielle χ définie à tout instant t et qui dépend de \mathbf{X} :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

La fonction vectorielle χ est appelée *mouvement* ou *déformation* du corps. Par ailleurs, si la forme originelle de référence ($t = 0$) coïncide avec la forme actuelle, la fonction χ doit satisfaire la condition

$$\mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, 0). \quad (2.2)$$

Le mouvement χ est une bijection entre les configurations initiale \mathcal{R}_0 et actuelle \mathcal{R} , assurant une correspondance biunivoque entre les positions initiales

et actuelles des particules de \mathcal{C} . L'existence de la fonction $\chi : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}$ et de son *inverse* $\chi^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_0$

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{X}, 0) \quad (2.4)$$

garantit l'intégralité et l'unité du corps. La continuité de la fonction du mouvement et son inverse interdisent respectivement toute séparation (fissuration) et fusion locale (soudure, superposition) de la matière. La continuité implique qu'un domaine connexe le reste durant le mouvement, que deux points infinitésimement voisins dans la configuration initiale restent comme tels dans les configurations déformées ($t > 0$). On supposera que les fonctions χ et χ^{-1} sont deux fois continûment différentiables par rapport aux variables d'espace et de temps. Ces hypothèses permettront par la suite de préserver la régularité du corps, de définir et calculer les vitesses et accélérations, ainsi que les équations d'équilibre et de compatibilité, sans encombre.

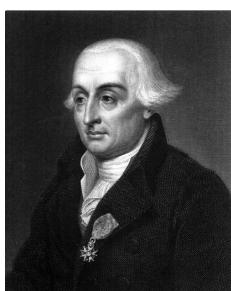
Ceci signifie que \mathbf{X} est la position initiale d'une particule située maintenant en \mathbf{x} . Naturellement les équations (2.3) et (2.4) sont obtenues à partir de (2.1) en calculant \mathbf{X} en fonction de \mathbf{x} . Par définition, ceci implique que

$$\begin{aligned}\chi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) &= \mathbf{x} \\ \chi^{-1}(\chi(\mathbf{X}, t), t) &= \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Par définition en se référant à la figure 2.1, le vecteur *déplacement* \mathbf{u} est la différence vectorielle

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5)$$

où (2.1) et (2.3) sont utilisées dans les deuxième et troisième égalités.



Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) est un mathématicien français (né à Turin). Après avoir enseigné à l'école d'artillerie de Turin, il succède à Euler à l'académie de Berlin comme directeur de la classe mathématique. Il fut plus tard enseignant à l'Ecole Normale et à l'Ecole Polytechnique de Paris. Son livre de *Mécanique Analytique* publié en 1788 constitue une présentation mathématique de la mécanique, dont la parution fut approuvée par un comité qui comprenait Laplace et Legendre.

Fig. 2.2 Joseph-Louis de Lagrange.

2.3 Descriptions matérielle et spatiale

La ***description matérielle***, appelée aussi ***description lagrangienne***, de la mécanique des milieux continus signifie que l'on étudie le phénomène physique ou mécanique concerné en regardant ce qui se passe *pour une particule P du corps*. Par contre, la ***description spatiale*** ou encore ***description eu-lérienne***, consiste à observer les événements *se produisant en un point fixe de l'espace*. Donc lorsque les événements en tout point fixe de l'espace sont enregistrés, on obtient la description spatiale. La figure 2.3 montre les deux représentations dans le cas d'un fluide s'écoulant dans une conduite de section variable.

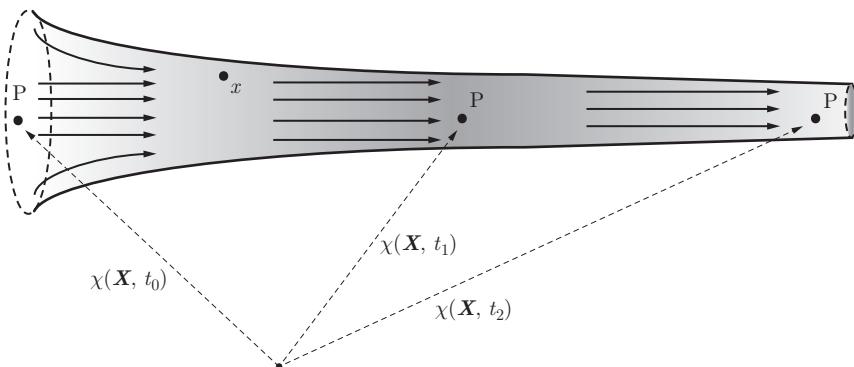


Fig. 2.3 Schéma de la description matérielle et spatiale dans le cas d'un fluide représenté par les flèches.

D'un point de vue pratique, les problèmes de mécanique des solides sont souvent plus faciles à formuler et à résoudre en description matérielle, et ceux de mécanique des fluides le sont en description spatiale.

Afin de définir exactement les descriptions matérielle et spatiale, nous introduisons d'abord la notion de ***configuration de référence***. Par définition, il s'agit d'une configuration particulière \mathcal{R}_r utilisée pour identifier chaque particule de \mathcal{C} . Par la suite, la configuration \mathcal{R}_0 de \mathcal{C} à $t = 0$ sera choisie comme la configuration de référence. Ainsi, nous avons les définitions suivantes.

Description matérielle :

c'est celle où les composantes du vecteur position initiale \mathbf{X} sont les variables indépendantes spatiales.

Description spatiale :

c'est celle où les composantes du vecteur position actuelle \mathbf{x} sont les variables indépendantes spatiales.

Quand nous calculons des dérivées partielles de diverses quantités (fonctions) relevant du modèle de la mécanique des milieux continus, nous pouvons utiliser les coordonnées matérielles ou les coordonnées spatiales comme variables indépendantes, c'est-à-dire \mathbf{X} ou \mathbf{x} . Puisque \mathbf{X} et \mathbf{x} sont liés, nous

avons aussi besoin de relier les dérivées de fonctions relativement à ces variables. Ceci est réalisé par l'application de la règle des dérivées d'une fonction composée.



Fig. 2.4 Leonhard Euler (15/04/1707-18/09/1783) est un célèbre mathématicien suisse né à Bâle. Il succède à Daniel Bernoulli à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg. Il fut plus tard enseignant à l'Académie des Sciences de Berlin. Outre qu'il fut un des meilleurs mathématiciens de tous les temps, Euler comme mécanicien a conçu les « équations d'Euler » qui décrivent la dynamique des fluides non visqueux. Il a eu l'honneur de figurer pendant de longues années sur les billets de dix francs suisses avec son projet de turbine hydraulique. Euler a été l'auteur prolifique de nombreux livres et de près de 900 mémoires (on dirait aujourd'hui articles). Avec les fondements du calcul des variations, il a ouvert la porte aux méthodes modernes du calcul scientifique. Dans ses *Lettres à une princesse d'Allemagne* [21], il expose en français et sans équations, la physique de son temps. De nombreuses considérations religieuses y sont également présentes, car Euler était un croyant fervent.

Pour faciliter la dérivation, nous introduisons la convention suivante :

- les fonctions indiquées en *lettres minuscules* font référence aux fonctions de **variables spatiales**, par exemple, $f(\mathbf{x}, t)$;
- les fonctions indiquées en *lettres majuscules* font référence aux fonctions de **variables matérielles**, par exemple, $F(\mathbf{X}, t)$.

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$f(\mathbf{x}, t) \longrightarrow f(\chi(\mathbf{X}, t), t) = F(\mathbf{X}, t) \quad (2.6)$$

$$F(\mathbf{X}, t) \longrightarrow F(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = f(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Dans (2.6) nous avons substitué \mathbf{x} en fonction de \mathbf{X} , alors que dans (2.7) nous avons substitué \mathbf{X} en fonction de \mathbf{x} . Nous notons que les fonctions f et F sont des fonctions différentes. Elles représentent le même phénomène physique. Leurs valeurs aux points correspondants \mathbf{X} et \mathbf{x} sont par contre égales comme l'indiquent les équations (2.6) et (2.7).

Considérons l'exemple suivant : soit $\theta(\mathbf{x}, t)$ la température au temps t , à la position \mathbf{x} . Soit $\Theta(\mathbf{X}, t)$ la température au temps t d'une particule qui était initialement localisée en \mathbf{X} . Nous avons, d'après (2.6) et (2.7),

$$\theta(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \theta(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \Theta(\mathbf{X}, t)$$

$$\Theta(\mathbf{X}, t) \longrightarrow \Theta(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \theta(\mathbf{x}, t).$$

Les équations (2.6) et (2.7) illustrent la transformation entre la description spatiale (ou eulérienne) et la description matérielle (ou lagrangienne).

Ces termes sont définis plus précisément de la manière suivante.

Description spatiale :

\mathbf{x}, t sont les variables indépendantes.

Description matérielle :

\mathbf{X}, t sont les variables indépendantes.

Un observateur peut mesurer la vitesse, la masse volumique, etc., en un certain point de l'espace. Si ces mesures sont faites pour chaque point dans la région qui nous intéresse, nous avons la description spatiale. Pour obtenir la description matérielle, l'observateur effectuerait de telles mesures en voyageant avec la particule, à sa vitesse propre.

Dans la plupart des cas, nous supposons que la configuration de référence est la configuration occupée au temps $t = 0$ (c.-à-d. la configuration lagrangienne). Les coordonnées matérielles et spatiales sont généralement mesurées par rapport aux mêmes axes de coordonnées. Notons qu'aussi bien pour les fluides que pour les solides, la configuration de référence peut être arbitrairement choisie.

Considérons maintenant une particule initialement ($t = 0$) située en \mathbf{X} et qui, après un certain temps t , se trouve à la position \mathbf{x} . Sur la figure 2.1, nous voyons que

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad (2.8)$$

où $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ est le déplacement en coordonnées matérielles. En coordonnées spatiales le déplacement est donné par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t). \quad (2.9)$$

On notera que les deux fonctions vectorielles \mathbf{u} et \mathbf{U} ont la même valeur, puisqu'elles représentent la même réalité physique. Cette dernière équation, en tenant compte de (2.3), nous permet d'écrire (2.8) sous la forme

$$\mathbf{x} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Cette dernière équation se lit : la position initiale d'une particule située à l'instant présent en \mathbf{x} plus le déplacement de cette particule évalué en \mathbf{x} est égale à sa position actuelle.

EXEMPLE 2.1

La transformation d'un corps est décrite par

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + aX_2 \\ x_2 &= X_2 + aX_1 \\ x_3 &= X_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où a est une constante.

1) Exprimer le mouvement et les déplacements du corps en coordonnées matérielles et spatiales.

2) Pour un corps cubique défini par

$$\Omega = \{\mathbf{X} \in E^3 \mid 0 \leq X_1 \leq 1, 0 \leq X_2 \leq 1, 0 \leq X_3 \leq 1\}, \quad (2.12)$$

esquisser la déformée de Ω après la transformation (2.11) pour $a = 1/3$.

3) Quelle est la forme après déformation de la surface définie par

$$\Omega = \{\mathbf{X} \in E^3 \mid X_1^2 + X_2^2 \leq 1/(1 - a^2), X_3 = 0\}? \quad (2.13)$$

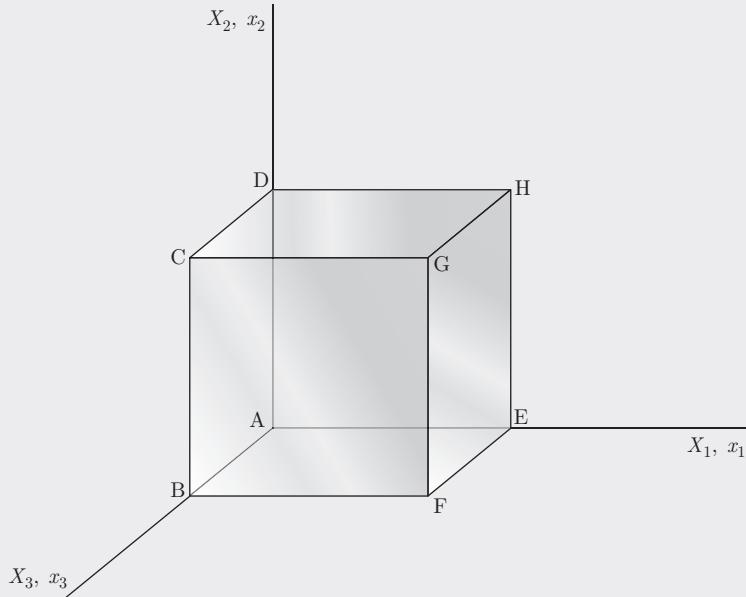


Fig. 2.5 Cube solide unitaire : configuration initiale.

1) Le mouvement en description spatiale s'obtient en inversant les relations (2.11)

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1 - ax_2)/(1 - a^2) \\ X_2 &= (x_2 - ax_1)/(1 - a^2) \\ X_3 &= x_3 . \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant (2.8), les composantes du vecteur déplacement en coordonnées matérielles sont

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1 - X_1 = X_1 + aX_2 - X_1 = aX_2 \\ U_2 &= x_2 - X_2 = X_2 + aX_1 - X_2 = aX_1 \\ U_3 &= x_3 - X_3 = 0 . \end{aligned} \quad (2.15)$$

En utilisant (2.10), les composantes du vecteur déplacement en coordonnées spatiales sont

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - X_1 = a(x_2 - ax_1)/(1 - a^2) \\ u_2 &= x_2 - X_2 = a(x_1 - ax_2)/(1 - a^2) \\ u_3 &= x_3 - X_3 = 0 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

On notera que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$.

2) En donnant des valeurs aux variables X_i dans l'équation (2.15), on peut construire la déformée du corps. A titre d'exemple, considérons les cas suivants :

Pour l'arête $X_1 = X_1, X_2 = X_3 = 0$, on a $U_1 = U_3 = 0, U_2 = aX_1$.

Pour l'arête $X_1 = 0, X_2 = X_2, X_3 = 0$, on a $U_1 = aX_2, U_2 = U_3 = 0$.

Pour l'arête $X_1 = X_2 = 0, X_3 = X_3$, il résulte $U_1 = U_2 = U_3 = 0$.

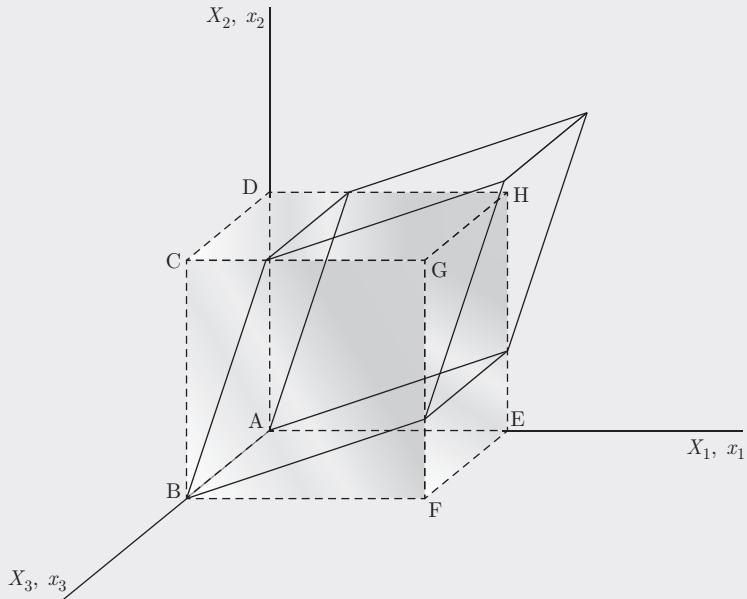


Fig. 2.6 Cube solide unitaire : configuration déformée.

3) La surface donnée est un cylindre décrit par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 1/(1 - a^2) .$$

En insérant (2.14) dans cette dernière expression, on obtient

$$\left(\frac{x_1 - ax_2}{1 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - ax_1}{1 - a^2} \right)^2 \leq 1/(1 - a^2) ,$$

qu'on peut aussi écrire comme

$$x_1^2(1 + a^2) + x_2^2(1 + a^2) - 4ax_1x_2 \leq (1 - a^2) ,$$

qui est une surface elliptique.

2.4 Vitesse, dérivée matérielle et accélération

2.4.1 Vitesse

La *vitesse* d'une particule matérielle au temps t est la dérivée de la fonction du mouvement par rapport au temps. Par définition, on a en description matérielle

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$V_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ exprime la vitesse à l'instant t de la particule qui, à l'instant initial, se trouvait en \mathbf{X} . Notons que (2.17) est obtenue en utilisant (2.1), compte tenu que \mathbf{X} est une des variables indépendantes. Par (2.8) nous avons aussi

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.19)$$

La description spatiale de la vitesse, notée \mathbf{v} selon la convention, est obtenue par

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t). \quad (2.20)$$

Le vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ exprime la vitesse à l'instant t de la particule qui, à cet instant, passe par la position \mathbf{x} .

2.4.2 Dérivée matérielle

Introduisons la notion de *dérivée matérielle* pour un champ spatial. Soit φ un champ scalaire de \mathcal{C} . Lors d'un mouvement $\boldsymbol{\chi}$ de \mathcal{C} , la dérivée matérielle de φ , notée $\dot{\varphi}$ ou $D\varphi/Dt$, est le taux de changement de φ avec le temps (la dérivée par rapport au temps) en une particule *fixe* de \mathcal{C} . Pour établir la dérivée matérielle du champ $\varphi(\mathbf{x}, t)$, nous utilisons les opérations sur les fonctions composées. En description matérielle, c'est-à-dire $\varphi(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) = \Phi(\mathbf{X}, t)$ (pour rappel, cf. éq. (2.6) et (2.7)), nous avons simplement

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \dot{\varphi} = \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.21)$$

La dernière égalité montre que la dérivée matérielle s'applique pour la même particule. Certains auteurs l'appellent pour cette raison la dérivée particulaire. Puisqu'on peut écrire $\Phi(\mathbf{X}, t) = \Phi(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \varphi(\mathbf{x}, t)$, il vient

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{\partial \chi_3}{\partial t} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}. \quad (2.22)$$

Utilisant la définition de la vitesse (2.17), la relation précédente prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} + V_i(\mathbf{X}, t) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}. \quad (2.23)$$

Puisque le but est d'exprimer le membre de droite de (2.23) en termes des coordonnées spatiales, nous devons faire la substitution $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ dans la dernière équation qui donne

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (2.24)$$

où l'on a utilisé

$$V_i(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} = v_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.25)$$

Maintenant, on peut définir la dérivée suivante :

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt} \equiv \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.26)$$

où, d'après (2.24),

$$\frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (2.27)$$

$$= \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}. \quad (2.28)$$

La dérivée $D\varphi(\mathbf{x}, t)/Dt$ est appelée **dérivée matérielle** (ou dérivée substantielle, ou dérivée particulaire) et représente le taux de changement de la fonction φ en conservant la même particule dont la vitesse est $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Alternativement, cette dérivée peut être considérée comme donnant le changement de φ avec le temps, vu par un observateur accompagnant la particule qui est actuellement située en \mathbf{x} .

A titre d'exemple, considérons que la fonction φ représente la température d'une particule fluide dans une rivière ; nous la noterons θ . On désire connaître la variation $D\theta/Dt$ et à cette fin, nous disposons d'un thermomètre. Dans une première phase de l'expérience, nous montons à bord d'un canot et nous plongeons le thermomètre dans l'eau. Larguant les amarres, nous mesurons la variation de θ pour la particule fluide que nous accompagnons, c.-à-d. nous mesurons $\partial\theta(\mathbf{X}, t)/\partial t$ correspondant au dernier terme de l'équation (2.26). D'où le nom de dérivée particulaire pour cette quantité. Dans la seconde phase, nous accrochons le thermomètre au pilier d'un pont. Le thermomètre se situe au point \mathbf{x} . On y mesure $D\theta/Dt$ qui se compose de $\partial\theta/\partial t$, c.-à-d. la variation temporelle de la température en ce point, ainsi que la variation due à l'advection locale $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ induite par le champ de vitesse changeant (éq. (2.27)).

Pour un champ vectoriel \mathbf{w} , nous avons la formule similaire pour ses dérivées matérielles :

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \dot{\mathbf{w}} = \left. \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.29)$$

$$\frac{Dw_i}{Dt} = \dot{w}_i = \left. \frac{\partial W_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$\dot{w}_i = \frac{\partial w_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} v_j.$$

Notons que la dérivée matérielle d'un champ matériel $\Phi(\mathbf{X}, t)$ est la dérivée partielle standard :

$$\dot{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\Phi(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.31)$$

2.4.3 Accélération

L'accélération \mathbf{A} d'une particule matérielle au temps t est la dérivée de sa vitesse \mathbf{V} par rapport au temps, c'est-à-dire la dérivée matérielle de \mathbf{V} . En description matérielle, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \\ A_i &= \dot{V}_i = \frac{\partial^2 \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

et en description spatiale, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ a_i &= \dot{v}_i = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} v_j(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Le premier terme du membre de droite de (2.33) peut être considéré comme l'accélération due à la dépendance temporelle de la vitesse, en un endroit fixe de l'espace. Le deuxième terme peut être interprété comme la contribution à l'accélération de la particule matérielle due à l'hétérogénéité du champ de vitesse. Ces termes sont parfois appelés parties locale et (convective) advective de l'accélération, respectivement. L'advection correspond au transport du champ de vitesse par lui-même.

Notons que l'équation (2.33) peut également s'écrire

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

avec la définition

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})_i = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

expression qu'il ne faut pas confondre avec $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial v_j / \partial x_j$.

2.5 Trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission

L'équation (2.1) donne les positions successives \mathbf{x} d'une particule \mathbf{X} avec le temps t comme paramètre et décrit donc une courbe dans l'espace. Cette courbe est appelée **trajectoire** de la particule \mathbf{X} . Sous forme différentielle, elle est définie par une des équations suivantes :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dt \quad \text{ou} \quad dx_i = V_i(\mathbf{X}, t) dt \quad (2.34)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt \quad \text{ou} \quad dx_i = v_i(\mathbf{x}, t) dt, \quad (2.35)$$

avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}$.

Une **ligne de courant** à un instant \bar{t} donné est une courbe dans l'espace qui est en tout point tangente au vecteur vitesse. Elle est donc déterminée en terme d'un paramètre s par l'équation différentielle

$$d\mathbf{x}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), \bar{t}) ds \quad (2.36)$$

$$dx_i(s) = v_i(\mathbf{x}(s), \bar{t}) ds. \quad (2.37)$$

Un mouvement est dit *stationnaire* si la vitesse en tout point \mathbf{x} est indépendante du temps c'est-à-dire $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. Dans ce cas, l'équation (2.36) est identique à (2.35). Ainsi, *dans un mouvement stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires*.

La **ligne d'émission** à travers un point donné de l'espace $\bar{\mathbf{x}}$ à un instant donné \bar{t} est la courbe constituée de toutes les particules qui ont occupé $\bar{\mathbf{x}}$ précédemment, autrement dit de toutes les particules qui sont passées par la position $\bar{\mathbf{x}}$ pour une valeur du temps comprise entre 0 et \bar{t} . Cette courbe peut être paramétrée, en terme de t , comme suit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\chi^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, t), \bar{t}) \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (2.38)$$

EXEMPLE 2.2

Considérons l'exemple suivant où un écoulement plan est donné par le champ de vitesse

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad v_2 = x_2 \quad v_3 = 0. \quad (2.39)$$

Calculons d'abord les lignes de courant. L'équation (2.37) appliquée à (2.39)

donne

$$dx_1 = \frac{x_1}{1+t} ds \quad dx_2 = x_2 ds \quad dx_3 = 0. \quad (2.40)$$

Posant $t = \bar{t}$, il vient en intégrant

$$x_1 = c_1 e^{\frac{s}{1+\bar{t}}} \quad x_2 = c_2 e^s \quad x_3 = c_3. \quad (2.41)$$

C'est l'équation de la ligne de courant qui passe par le point \mathbf{c} .

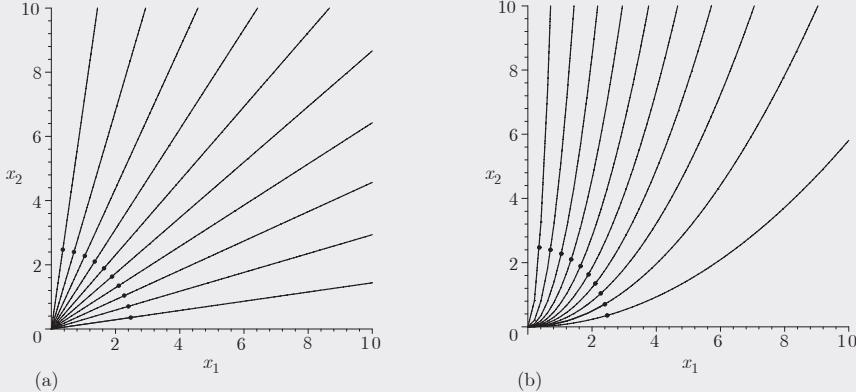


Fig. 2.7 Lignes de courant : (a) pour $\bar{t} = 0$, (b) pour $\bar{t} = 1$. Les points sur les lignes sont ceux correspondant à \mathbf{c} répartis de manière uniforme sur le cercle de rayon $R = 2.5$.

La figure 2.7 montre ces lignes de courant qui sont des courbes du plan $x_3 = c_3$ telles que

$$\frac{x_2}{c_2} = \left(\frac{x_1}{c_1} \right)^{(1+\bar{t})}. \quad (2.42)$$

Le calcul des trajectoires s'effectue par la combinaison de (2.35) et (2.39). Il vient

$$\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx'_1}{x'_1} = \int_0^t \frac{dt'}{1+t'} \quad \int_{X_2}^{x_2} \frac{dx'_2}{x'_2} = \int_0^t dt' \quad \int_{X_3}^{x_3} \frac{dx'_3}{x'_3} = 0. \quad (2.43)$$

La première intégrale donne $\ln x'_1|_{X_1}^{x_1} = \ln(1+t')|_0^t$ et donc $\ln x_1 - \ln X_1 = \ln(1+t)$ puisque $x_1 = X_1$ au temps $t = 0$. Finalement, on obtient

$$x_1 = X_1(1+t) \quad x_2 = X_2 e^t \quad x_3 = X_3. \quad (2.44)$$

Les trajectoires sont des courbes du plan $x_3 = c_3$ données par

$$x_2 = X_2 e^{(x_1-X_1)/X_1}. \quad (2.45)$$

Elles sont dessinées à la figure 2.8.

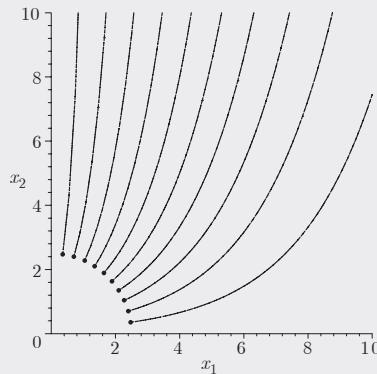


Fig. 2.8 Trajectoires ; les points correspondant à \mathbf{X} sont les mêmes que ceux de la figure 2.7.

Pour le calcul des lignes d'émission, on inverse tout d'abord les relations des trajectoires

$$X_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad X_2 = x_2 e^{-t} \quad X_3 = x_3. \quad (2.46)$$

Comme la particule passe par $\bar{\mathbf{x}}$ aux temps $t \leq \bar{t}$, on a

$$X_1 = \frac{\bar{x}_1}{1+t} \quad X_2 = \bar{x}_2 e^{-t} \quad X_3 = \bar{x}_3. \quad (2.47)$$

En substituant (2.47) dans (2.44) évaluée au temps \bar{t} , on obtient les équations paramétriques de la ligne d'émission

$$x_1 = \bar{x}_1 \frac{1+\bar{t}}{1+t} \quad x_2 = \bar{x}_2 e^{\bar{t}-t} \quad x_3 = \bar{x}_3. \quad (2.48)$$

2.6 Équations de la cinématique du mouvement du corps rigide

Lorsque nous ferons appel à l'objectivité dans le cadre des principes généraux régissant les lois de comportement des milieux continus, nous examinerons essentiellement la rotation dite de corps rigide (ou mouvement rigidifiant). Afin de nous y préparer, nous allons étudier quelques relations de la cinématique du corps rigide. Un mouvement de corps rigide est celui dans lequel les longueurs et les angles sont conservés.

2.6.1 Translation de corps rigide

Dans ce cas illustré à la figure 2.9, l'équation du mouvement est donnée par la relation

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{c}(t) \quad (2.49)$$

avec $\boldsymbol{c}(0) = \mathbf{0}$.

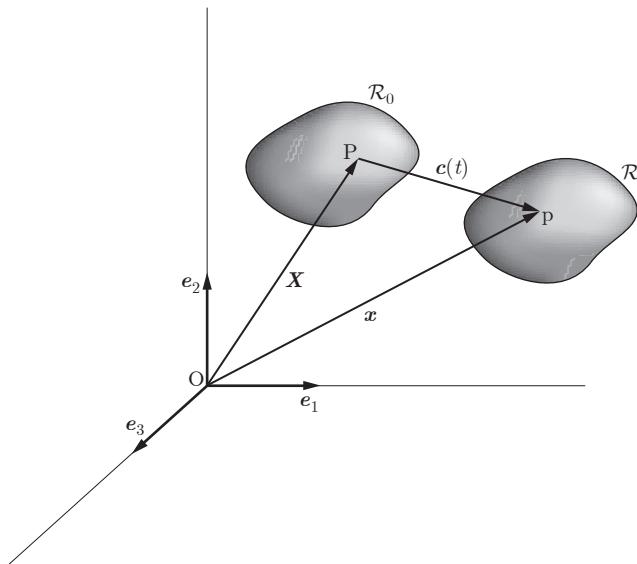


Fig. 2.9 Translation de corps rigide.

Nous pouvons constater que le vecteur déplacement \boldsymbol{U} est indépendant de \boldsymbol{X} , puisqu'on a

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{c}(t). \quad (2.50)$$

Chaque point matériel se trouve déplacé de manière identique avec la même grandeur et la même direction au temps t .

2.6.2 Rotation de corps rigide autour d'un point fixe

Le mouvement illustré à la figure 2.10 est décrit par l'équation

$$\chi(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{b}), \quad (2.51)$$

où \boldsymbol{Q} est un tenseur de rotation orthogonal tel que $\boldsymbol{Q}(0) = \boldsymbol{I}$ et \boldsymbol{b} est un vecteur constant.

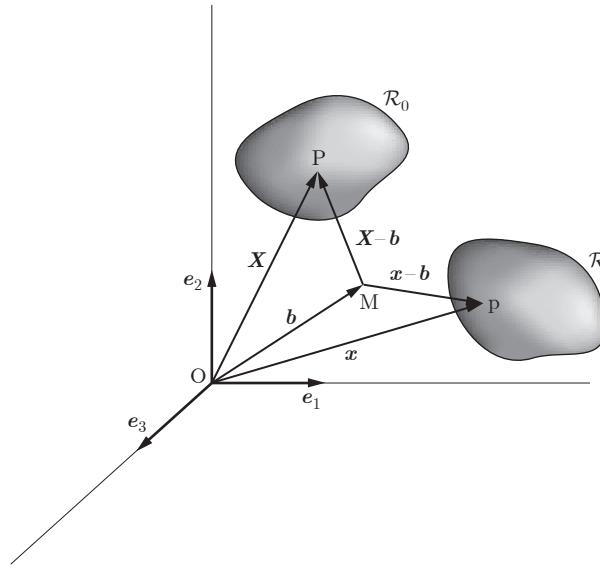


Fig. 2.10 Rotation de corps rigide autour d'un point fixe.

On constate que lorsque le point matériel $X = \mathbf{b}$ coïncide avec le point spatial $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la rotation a toujours lieu autour du point fixe $\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si le centre de rotation est placé à l'origine, alors $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ et le mouvement de rotation est donné par $\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}$.

2.6.3 Mouvement général du corps rigide

Le mouvement illustré à la figure 2.11 s'écrit

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{d}(t), \quad (2.52)$$

où \mathbf{Q} est un tenseur de rotation comme précédemment et $\mathbf{d}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{b} + \mathbf{c}(t)$. Le vecteur $\mathbf{c}(t)$ est tel que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{b}$. L'équation (2.52) indique que le mouvement est composé d'une rotation $\mathbf{Q}(t)$ et de la translation $\mathbf{c}(t)$ d'un point matériel $\mathbf{X} = \mathbf{b}$.

La vitesse est obtenue en dérivant par rapport au temps la relation (2.52)

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{X} - \mathbf{b}) + \dot{\mathbf{c}}. \quad (2.53)$$

Or par (2.52), on a

$$\mathbf{X} - \mathbf{b} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{c}). \quad (2.54)$$

En tenant compte de (2.20), on peut écrire

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \dot{\mathbf{c}}. \quad (2.55)$$

Le tenseur \mathbf{Q} étant orthogonal, on a $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{I}$ (éq. (1.243)). En dérivant cette dernière égalité par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = 0. \quad (2.56)$$

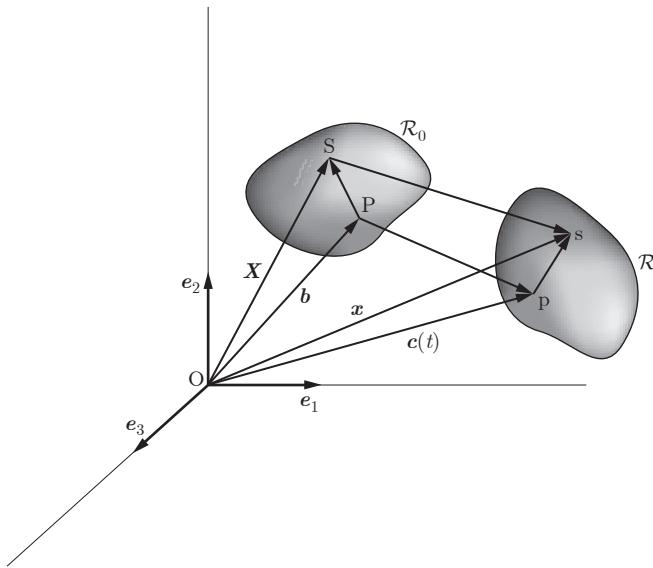


Fig. 2.11 Mouvement général de corps rigide.

qui démontre que $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ est antisymétrique. Posons

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.57)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est le tenseur antisymétrique de rotation. Alors, en utilisant le vecteur dual de ce tenseur (cf. éq. (1.104))

$$\omega_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\Omega_{ij}, \quad (2.58)$$

on obtient successivement à l'aide de (1.107)

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k = \varepsilon_{ikj}\omega_k \quad (2.59)$$

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x} = \Omega_{ij}x_j\mathbf{e}_i = \varepsilon_{ikj}\omega_kx_j\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \quad (2.60)$$

A l'aide de (2.60), on peut réécrire l'équation (2.55) sous la forme

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \dot{\mathbf{c}}. \quad (2.61)$$

Posons $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{c}$, où \mathbf{r} est le vecteur position du point matériel général à la translation \mathbf{c} près. Finalement, on a

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{c}}. \quad (2.62)$$

Cette relation montre que la vitesse spatiale \mathbf{v} d'un point matériel quelconque d'un corps rigide est la somme de la vitesse de rotation angulaire du corps $\boldsymbol{\omega}$ et d'une vitesse de translation $\dot{\mathbf{c}}$ d'un point matériel choisi arbitrairement.

2.7 Gradient et tenseurs de déformation

2.7.1 Définition

Considérons une particule donnée dont la position dans la configuration \mathcal{R}_0 est \mathbf{X}^0 , et son voisinage \mathcal{V} . Sa position dans la configuration \mathcal{R} est donnée par (2.1). Si \mathcal{V} est suffisamment petit, la relation (2.1) pour les autres particules de \mathcal{V} peut être approchée en utilisant la formule de Taylor. Soient \mathbf{X} et \mathbf{x} les positions initiale et actuelle d'une particule dans \mathcal{V} ; alors, si la fonction χ est suffisamment régulière, nous avons

$$\begin{aligned} x_i &= \chi_i(X_k, t) \\ &= \chi_i(X_k^0, t) + \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \Big|_{X_k^0} (X_j - X_j^0) + 0(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|^2), \end{aligned} \quad (2.63)$$

où le dernier terme signifie

$$0(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|^2) \sim C\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|^2 + \dots \quad (2.64)$$

avec C une constante bornée. Le tenseur \mathbf{F} dont les composantes sont données par

$$F_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \quad (2.65)$$

est appelé **tenseur du gradient de déformation**. Dans la suite de ce chapitre, on omettra les arguments des fonctions (vectorielles ou tensorielles) afin d'alléger les notations.

Si la distance $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|$ entre \mathbf{X} et \mathbf{X}^0 est de loin inférieure à l'unité, la relation (2.63) peut être approchée par

$$x_i \cong x_i^0 + F_{ij}(X_j - X_j^0) \quad \text{avec} \quad x_i^0 = \chi_i(X_k^0, t). \quad (2.66)$$

Dans ce cas, le tenseur \mathbf{F} est représenté (abusivement) par

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (2.67)$$

Soit J le jacobien de \mathbf{F} :

$$J = \det \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \right) = \det \mathbf{F}. \quad (2.68)$$

L'hypothèse de continuité du matériau et donc de dérivabilité continue pour la déformation du milieu continu implique que

$$0 < J < \infty. \quad (2.69)$$

Ceci assure l'existence de l'inverse \mathbf{F}^{-1} de \mathbf{F} avec $\det \mathbf{F}^{-1} = 1/J$. En utilisant (2.8), (2.10) et (2.67), nous pouvons calculer \mathbf{F} et \mathbf{F}^{-1} en terme du déplacement

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.70)$$

ou

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad} \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{U} \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{grad} \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}. \quad (2.71)$$

Une autre façon d'écrire (2.66) est

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (2.72)$$

où nous voyons que \mathbf{F} transforme un vecteur $d\mathbf{X}$ lié à \mathbf{X}^0 en un vecteur $d\mathbf{x}$ lié à \mathbf{x} (fig. 2.1).

D'après le *théorème de décomposition polaire* (1.132), il existe un tenseur unique de rotation \mathbf{R} et deux tenseurs uniques, symétriques, définis positifs \mathbf{U} et \mathbf{V} , tels que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (2.73)$$

Habituellement, pour $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, la décomposition polaire *droite* de \mathbf{F} , et pour $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, la décomposition polaire *gauche* de \mathbf{F} , les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} sont appelés tenseurs d'elongation droit et gauche. Lorsque $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, (2.73) se réduit à $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$ et la déformation est appelée **déformation pure**.

En insérant (2.73) dans (2.72), on obtient

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{U} d\mathbf{X}. \quad (2.74)$$

Nous verrons plus loin que cette relation permet de conclure que le changement de configuration au voisinage de la particule matérielle s'obtient par la transformation du vecteur $d\mathbf{X}$ en un vecteur $\mathbf{U} d\mathbf{X}$ par une déformation pure \mathbf{U} suivie d'une rotation locale \mathbf{R} .

2.7.2 Tenseurs de déformation

Ecrivons (2.72) sous la forme indicelle

$$dx_i = F_{ij} dX_j. \quad (2.75)$$

Alors, le carré de la norme ds du vecteur $d\mathbf{x}$ est donné par

$$ds^2 = \|d\mathbf{x}\|^2 = dx_m dx_m = F_{mi} F_{mj} dX_i dX_j. \quad (2.76)$$

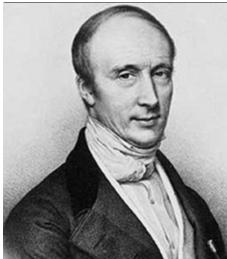
Le tenseur \mathbf{C} défini par

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T \quad C_{ij} = F_{mi} F_{mj} \quad (2.77)$$

est le **tenseur symétrique de déformation de Cauchy-Green droit**.

Ce tenseur symétrique est un tenseur métrique. Comme l'indique la relation (2.76), il permet de calculer la longueur de $d\mathbf{x}$ en fonction des composantes de $d\mathbf{X}$. A l'inverse, la longueur dS de $d\mathbf{X}$ peut être calculée en termes des composantes de $d\mathbf{x}$:

$$\|d\mathbf{X}\|^2 = dX_m dX_m = F_{mi}^{-1} F_{mj}^{-1} dx_i dx_j. \quad (2.78)$$



Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français né à Paris. Il fut professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris. Son œuvre abondante a traité de tous les grands problèmes mathématiques de son époque. On lui doit notamment les fonctions holomorphes et des critères de convergence pour les suites. Son nom figure sur la liste des 72 savants inscrits sur la tour Eiffel.

Fig. 2.12 Augustin Louis Cauchy.

Avec la notation $\mathbf{F}^{-T} = (\mathbf{F}^{-1})^T$, le tenseur \mathbf{c}^{-1} , défini par

$$\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})^T \quad c_{ij}^{-1} = F_{mi}^{-1} F_{mj}^{-1}, \quad (2.79)$$

est l'inverse du **tenseur symétrique de déformation de Cauchy-Green gauche**. La différence entre $\|d\mathbf{x}\|^2$ et $\|d\mathbf{X}\|^2$ peut être exprimée sous l'une des deux formes suivantes :

$$\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2 = C_{ij} dX_i dX_j - dX_m dX_m = 2E_{ij} dX_i dX_j \quad (2.80)$$

$$\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2 = dx_m dx_m - c_{ij}^{-1} dx_i dx_j = 2e_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.81)$$

Le tenseur \mathbf{E} introduit dans (2.80), dont les composantes sont

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}), \quad (2.82)$$

est appelé le **tenseur de déformation de Green-Lagrange**.



George Green (1793-1841) est un mathématicien anglais né à Sneinton, près de Nottingham. Pratiquement autodidacte, il obtint un titre de bachelor à l'âge de 44 ans. Il contribua à la théorie du potentiel en introduisant les fonctions qui portent son nom. Il a traité d'optique, d'acoustique et d'hydrodynamique. Ses travaux peu connus de son vivant furent remis en évidence en 1846 par Lord Kelvin.

Fig. 2.13 George Green.

Le tenseur \mathbf{e} introduit dans (2.81), dont les composantes sont

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - c_{ij}^{-1}), \quad (2.83)$$

est le **tenseur de déformation de Euler-Almansi**.

En termes de déplacements matériel et spatial \mathbf{U} et \mathbf{u} , les tenseurs de déformation ci-dessus s'écrivent

$$\begin{aligned} C_{ij} &= F_{mi}F_{mj} = \left(\delta_{mi} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial U_m}{\partial X_j} \right) \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i} \frac{\partial U_m}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^{-1} &= F_{mi}^{-1}F_{mj}^{-1} = \left(\delta_{mi} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{mj} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \\ &= \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i} \frac{\partial U_m}{\partial X_j} \right) \quad (2.86)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right). \quad (2.87)$$

Les tenseurs de déformation peuvent aussi s'écrire en fonction de \mathbf{U} et \mathbf{V} . Par application directe de la décomposition polaire (2.73), ils ont pour expressions :

- le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 ; \quad (2.88)$$

- le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche et son inverse

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.89)$$

$$\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2} ; \quad (2.90)$$

- le tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) ; \quad (2.91)$$

- le tenseur de déformation d'Euler-Almansi

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{c}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}). \quad (2.92)$$

Une observation importante est que le tenseur de rotation \mathbf{R} n'affecte aucun des tenseurs de déformation considérés. En fait, c'est un besoin élémentaire pour donner un sens à une mesure de déformation, autrement un corps rigide serait pris comme déformable. De plus, on peut vérifier facilement que pour le mouvement du corps rigide (2.51), $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$ et $\mathbf{C} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$ et donc $\mathbf{E} = \mathbf{e} = 0$.

Sur la base du tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} et des tenseurs de déformation associés, on peut exprimer le changement de longueur d'un élément linéaire, d'un élément de surface et d'un élément de volume au cours du mouvement du corps (fig. 2.14). Un élément linéaire $d\mathbf{X}$ dans la configuration de référence est de norme $\|d\mathbf{X}\| = (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^{1/2}$. A cause du mouvement du corps (2.1), il devient l'élément $d\mathbf{x}$ de norme $\|d\mathbf{x}\| = (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^{1/2}$. En tenant

compte de (2.72), le rapport du carré des normes dans ces deux configurations est donné par

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \frac{\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2}. \quad (2.93)$$

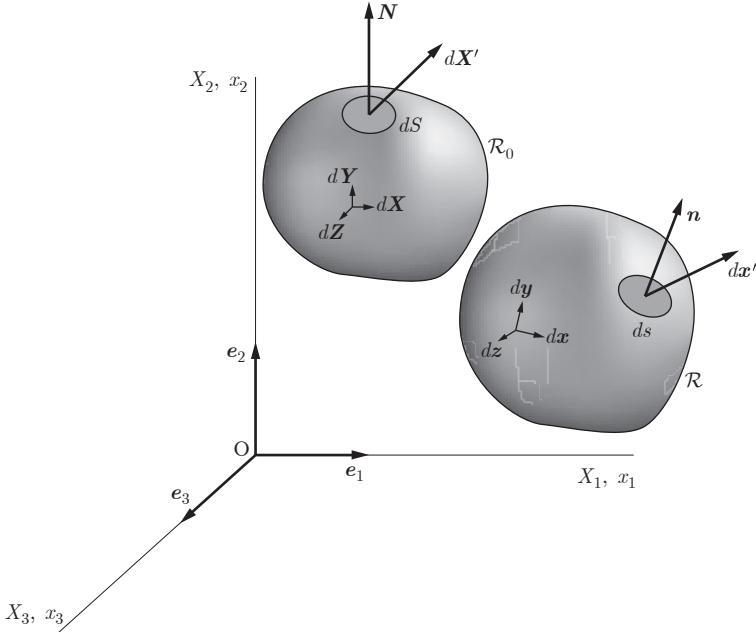


Fig. 2.14 Éléments linéaire et de surface dans les configurations \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_t du corps \mathcal{C} .

Comme $d\mathbf{X} = \mathbf{N} \|d\mathbf{X}\|$ où \mathbf{N} est le vecteur unitaire dans la direction $d\mathbf{X}$, (2.93) s'écrit

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\| \|d\mathbf{X}\|} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \mathbf{N} = \lambda_N^2. \quad (2.94)$$

Le paramètre λ_N est appelé la **dilatation**. Par la relation (2.88) entre \mathbf{C} et \mathbf{U} , il peut s'exprimer par les égalités

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{U}^2 \mathbf{N})^{1/2} = (\mathbf{U} \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \mathbf{N})^{1/2} = \|\mathbf{U} \mathbf{N}\| = \lambda_N. \quad (2.95)$$

On peut exprimer l'angle entre deux éléments linéaires par les procédures similaires qui suivent. Supposons que deux éléments linéaires $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ se coupent avec un angle Θ dans la configuration de référence. Alors,

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}}{\|d\mathbf{X}\| \|d\mathbf{Y}\|}. \quad (2.96)$$

Après le mouvement, ces deux éléments deviennent $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ et leur angle θ est donné par une expression semblable

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\|}. \quad (2.97)$$

En utilisant successivement (2.72) et (2.88), cette dernière relation devient

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{Y}}{\|\mathbf{F} d\mathbf{X}\| \|\mathbf{F} d\mathbf{Y}\|} = \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{Y}}{\|\mathbf{F} d\mathbf{X}\| \|\mathbf{F} d\mathbf{Y}\|} \\ &= \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{Y}}{\|\mathbf{F} d\mathbf{X}\| \|\mathbf{F} d\mathbf{Y}\|}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Puisque $d\mathbf{X} = \mathbf{N}_x \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{Y} = \mathbf{N}_y \|d\mathbf{Y}\|$ où \mathbf{N}_x et \mathbf{N}_y sont les vecteurs unitaires suivant les éléments linéaires, et comme $\|\mathbf{F} d\mathbf{X}\| = (\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X})^{1/2} = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X})^{1/2}$, (2.98) donne

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{N}_x \cdot \mathbf{C} \mathbf{N}_y}{(\mathbf{N}_x \cdot \mathbf{C} \mathbf{N}_x)^{1/2} (\mathbf{N}_y \cdot \mathbf{C} \mathbf{N}_y)^{1/2}}. \quad (2.99)$$

La différence angulaire $\Theta - \theta$ est attribuée au cisaillement.

Afin d'exprimer la relation entre les éléments volumiques dans les deux configurations, nous considérons trois éléments linéaires infinitésimaux et non coplanaires $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$, $d\mathbf{Z}$ (fig. 2.14) dans la configuration de référence en sorte que

$$dV = d\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{Y} \times d\mathbf{Z}) > 0. \quad (2.100)$$

Dans la nouvelle configuration, les trois éléments linéaires deviennent $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{z}$ et le volume correspondant est donné par

$$dv = d\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{y} \times d\mathbf{z}). \quad (2.101)$$

Comme le volume s'exprime comme un déterminant, par (2.75), on a

$$dv = \det \begin{pmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_{1j} dX_j & F_{1j} dY_j & F_{1j} dZ_j \\ F_{2j} dX_j & F_{2j} dY_j & F_{2j} dZ_j \\ F_{3j} dX_j & F_{3j} dY_j & F_{3j} dZ_j \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

On voit facilement par ce déterminant et (2.68) que le volume élémentaire est transformé suivant la relation

$$dv = \det \mathbf{F} dV = J dV \quad (2.103)$$

Pour évaluer les changements d'un élément de surface (fig. 2.14), nous commençons par l'expression de l'élément de volume dans les configurations de référence et actuelle

$$dV = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS \quad dv = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.104)$$

où les éléments de surface sont indiqués par $\mathbf{N} dS$ et $\mathbf{n} ds$ avec \mathbf{N} et \mathbf{n} les vecteurs unitaires sur les éléments de surface correspondants. En tenant compte de (2.72) et (2.104), (2.103) devient

$$dv = \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{n} ds = J d\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS \quad (2.105)$$

ou

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{n} ds - J \mathbf{N} dS) \cdot d\mathbf{X} = 0. \quad (2.106)$$

Puisque cette relation est valable pour un choix arbitraire de $d\mathbf{X}$, on conclut que

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS \quad \text{ou} \quad d\mathbf{s} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS. \quad (2.107)$$

Cette expression, appelée **formule de Nanson**, relie les éléments de surface correspondants entre les configurations de référence et actuelle.

2.7.3 Interprétation géométrique

Donnons une interprétation géométrique de (2.73). A cette fin, nous devons d'abord examiner quelques propriétés des valeurs propres de \mathbf{U} et \mathbf{V} . Soit λ_i ($i = 1, 2, 3$) les valeurs propres de \mathbf{U} correspondant aux vecteurs propres unitaires \mathbf{A}_i , alors

$$\mathbf{U} \mathbf{A}_i = \lambda_i \mathbf{A}_i \quad (\text{sans sommation sur } i). \quad (2.108)$$

Comme \mathbf{U} est symétrique défini positif, les λ_i sont réelles et $\lambda_i > 0$; de plus, par la décomposition spectrale (1.125), on a

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3 \text{ avec } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j = \delta_{ij}. \quad (2.109)$$

En utilisant (2.88) et (2.108), on peut écrire

$$\mathbf{C} \mathbf{A}_i = \lambda_i^2 \mathbf{A}_i \quad (\text{sans sommation sur } i). \quad (2.110)$$

Dès lors, le tenseur \mathbf{C} a λ_i^2 comme valeurs propres et \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, 3$) comme vecteurs propres. Concernant les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathbf{V} , l'utilisation de (2.73) et (2.108) conduit à

$$\mathbf{V}(\mathbf{R} \mathbf{A}_i) = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{A}_i = \lambda_i (\mathbf{R} \mathbf{A}_i) \quad (\text{sans sommation sur } i). \quad (2.111)$$

Ceci montre que les λ_i sont aussi les valeurs propres de \mathbf{V} , correspondant aux vecteurs propres unitaires

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{R} \mathbf{A}_i. \quad (2.112)$$

Donc la déformation transforme, par une rotation, les vecteurs propres de \mathbf{U} en ceux de \mathbf{V} . De manière similaire à (2.109), on peut écrire

$$\mathbf{V} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}_3 \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}. \quad (2.113)$$

Pour obtenir les valeurs propres et vecteurs propres de \mathbf{c} , nous utilisons (2.89) et (2.110) pour obtenir

$$\mathbf{V}^2(\mathbf{R}\mathbf{A}_i) = \mathbf{c}(\mathbf{R}\mathbf{A}_i) = \lambda_i^2(\mathbf{R}\mathbf{A}_i) \quad (\text{sans sommation sur } i) \quad (2.114)$$

ce qui démontre que les tenseurs \mathbf{V} et \mathbf{c} ont λ_i et λ_i^2 comme valeurs propres, respectivement, et les mêmes vecteurs propres \mathbf{b}_i , ($i = 1, 2, 3$). Dans la littérature, les λ_i sont aussi appelées les *elongations principales* du tenseur \mathbf{U} , \mathbf{A}_i les *directions d'elongation principales matérielles*, et \mathbf{b}_i les *directions d'elongation principales spatiales*. Dans le cas d'une déformation pure, la différence entre \mathbf{A}_i et \mathbf{b}_i disparaît.

Il est maintenant possible de donner une interprétation géométrique à (2.73). Considérons un corps dont la configuration initiale ou de référence est une sphère unitaire centrée à l'origine (fig. 2.15), et qui subit la transformation homogène (cf. sect. 2.8) suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{A} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{A}\| \leq 1. \quad (2.115)$$

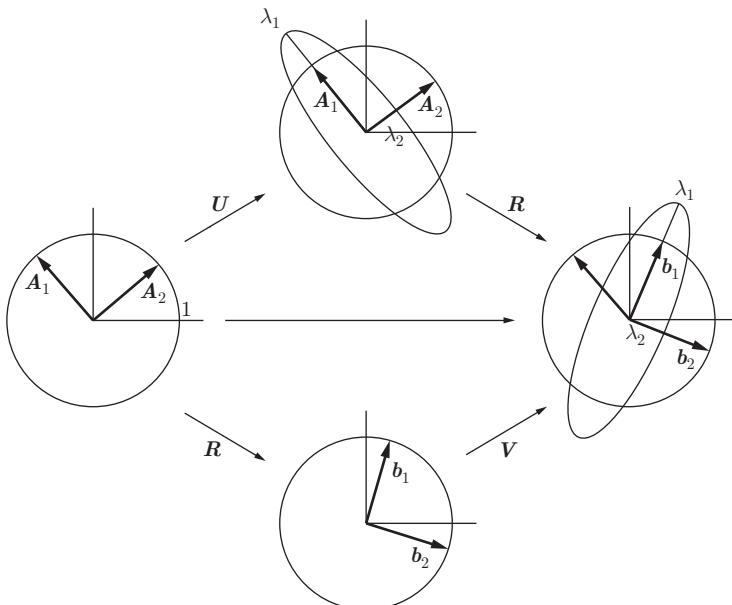


Fig. 2.15 Interprétation géométrique de $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$.

En substituant (2.73) dans (2.115), on obtient

$$\mathbf{x} = \mathbf{RUA} = \mathbf{VRUA} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{A}\| \leq 1. \quad (2.116)$$

A partir de cette expression et à la lumière de la discussion précédente sur les propriétés des valeurs propres de \mathbf{U} et \mathbf{V} , les décompositions polaires droite et gauche peuvent s'interpréter géométriquement de la façon suivante (fig. 2.15) où on montre seulement le plan $(0, x_1, x_2)$:

Décomposition polaire droite :

- Premièrement, en appliquant le tenseur d'elongation droit \mathbf{U} à la sphère unitaire, les rayons dirigés le long des directions d'elongation principales matérielles \mathbf{A}_i sont allongés (ou raccourcis) jusqu'à leurs longueurs finales λ_i tout en restant dirigés le long des directions d'elongation principales matérielles \mathbf{A}_i . De ce fait, la sphère devient un ellipsoïde.
- Ensuite, en appliquant le tenseur de rotation \mathbf{R} à l'ellipsoïde, les lignes dirigées le long des directions d'elongation principales matérielles subissent une rotation et prennent leurs orientations finales \mathbf{b}_i .

Décomposition polaire gauche :

- Premièrement, en appliquant le tenseur de rotation \mathbf{R} à la sphère unitaire, les lignes dirigées le long des directions d'elongation principales matérielles \mathbf{A}_i subissent une rotation et prennent leurs orientations finales \mathbf{b}_i . La sphère unitaire, quant à elle, tourne sur elle-même.
- Ensuite, en appliquant le tenseur d'elongation gauche \mathbf{V} à la sphère unité (ayant subi la rotation), les rayons dirigés le long des directions d'elongation principales spatiales \mathbf{b}_i sont allongés (ou raccourcis) jusqu'à leurs longueurs finales λ_i et la sphère devient un ellipsoïde.

Comme nous avons pu le voir, les éléments de lignes mutuellement orthogonaux dirigés le long des directions d'elongation matérielles principales \mathbf{A}_i avant transformation restent mutuellement orthogonaux après transformation et sont dirigés le long des directions d'elongation principales spatiales \mathbf{b}_i . Donc le tenseur de rotation \mathbf{R} peut être exprimé en fonction de \mathbf{A}_i et \mathbf{b}_i :

$$\mathbf{R} = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{A}_2 + \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{A}_3. \quad (2.117)$$

Cette dernière relation s'établit facilement comme suit. Le tenseur de rotation est exprimé comme $\mathbf{R} = \mathbf{RI}$ et le tenseur identité comme $\mathbf{I} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i$. En tenant compte de (2.112) et de la propriété (1.65), nous obtenons

$$\mathbf{R} = \mathbf{RI} = \mathbf{R}(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i) = (\mathbf{RA}_i) \otimes \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{A}_i. \quad (2.118)$$

Le tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} peut s'exprimer en fonction des vecteurs \mathbf{A}_i , \mathbf{b}_i et des élongations principales λ_i comme

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{A}_i. \quad (2.119)$$

Nous allons présenter une méthode pour déterminer les divers tenseurs cinématiques \mathbf{C} , \mathbf{U} , \mathbf{c} , \mathbf{V} et \mathbf{R} . Nous pouvons effectuer le calcul concret de \mathbf{U} ,

\mathbf{V} et \mathbf{R} pour un gradient de déformation \mathbf{F} donné. Les tenseurs \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{R} sont déterminés à partir des relations

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{F}. \quad (2.120)$$

La principale difficulté réside dans le calcul de \mathbf{U} ou de la racine carrée de $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Soit $[P]$ la matrice orthogonale diagonalisant la matrice $[C]$ du tenseur \mathbf{C} , telle que

$$[\Lambda^2] = [P][C][P]^T \quad \text{ou} \quad \Lambda_{ij}^2 = P_{im} C_{mn} P_{jn} \quad (2.121)$$

avec $[\Lambda^2] = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ où la notation diag désigne la matrice diagonale

$$\text{diag}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

Alors la matrice $[U]$ du tenseur \mathbf{U} est donnée par

$$[U] = [P]^T [\Lambda] [P] \quad \text{ou} \quad U_{ij} = P_{mi} \Lambda_{mn} P_{nj} \quad (2.123)$$

avec $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Après avoir trouvé \mathbf{U} , nous pouvons calculer \mathbf{R} par (1.135) et \mathbf{V} par (1.137) ou par $\mathbf{V} = \mathbf{F} \mathbf{R}^T$.

2.8 Déformations homogènes

La déformation ou transformation \mathbf{x} d'un corps \mathcal{C} est dite **homogène** si le gradient de déformation correspondant \mathbf{F} est indépendant de la particule \mathbf{X} . Géométriquement, une déformation homogène transforme une ligne droite de \mathcal{R}_0 en une ligne droite de \mathcal{R} (fig. 2.16). Une telle déformation \mathbf{x} est une *transformation affine*; elle a la forme générale suivante, avec la notation $x_i^0 = \chi_i(X_j^0, t)$,

$$x_i = x_i^0(t) + M_{ij}(t)(X_j - X_j^0). \quad (2.124)$$

Sous forme vectorielle, on a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{M}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0). \quad (2.125)$$

avec $0 < \det \mathbf{M} < \infty$. La relation inverse s'écrit

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{M}^{-1}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0). \quad (2.126)$$

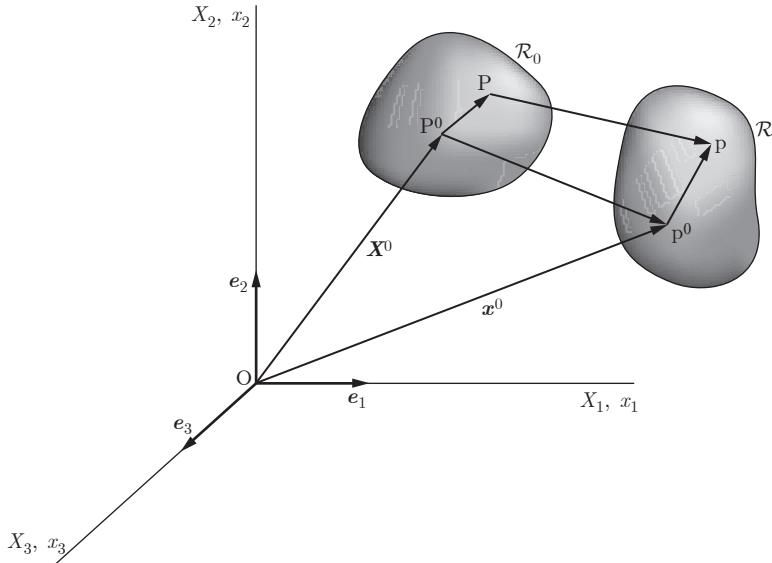


Fig. 2.16 Transformation d'un vecteur dans une déformation homogène.

Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples importants de déformations homogènes obtenus à partir des relations (2.125) et (2.126).

Translation :

\mathbf{M} est le tenseur unité \mathbf{I} et sans perte de généralité, on pose $\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$.
On obtient

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{X}. \quad (2.127)$$

Rotation autour de l'origine :

$\mathbf{X}^0 = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$, et \mathbf{M} est le **tenseur de rotation** \mathbf{R} avec la propriété

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{R}) = 1. \quad (2.128)$$

Dans ce cas, (2.124) et (2.126) deviennent

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}. \quad (2.129)$$

Le **mouvement d'un corps rigide** peut être décomposé en une rotation suivie d'une translation.

Expansion ou compression uniforme :

$\mathbf{M} = m\mathbf{I}$ et (2.124) prend la forme (fig. 2.17)

$$x_i = x_i^0 + m(X_i - X_i^0). \quad (2.130)$$

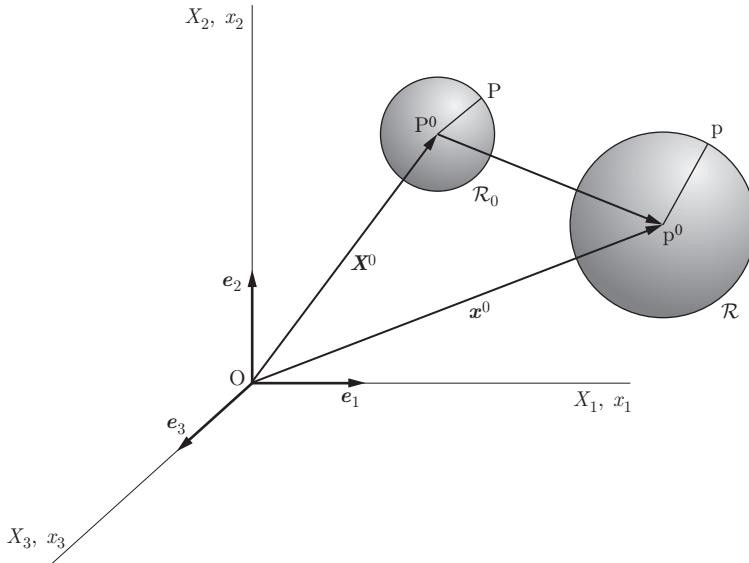


Fig. 2.17 Expansion uniforme.

Cisaillement simple :

dans un système de coordonnées cartésiennes (fig. 2.18), la matrice $[M]$ est donnée par

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

ou en notation vectorielle, on a

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{X} = (\mathbf{I} + k\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\mathbf{X} \quad (2.132)$$

en prenant l'origine comme point fixe $\mathbf{X}^0 = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$. Explicitement, (2.124) et (2.131) donnent

$$x_1 = X_1 + kX_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3. \quad (2.133)$$

A titre d'exemple, nous allons calculer \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{R} pour le cisaillement simple.

Les matrices de \mathbf{F} et \mathbf{C} peuvent être directement calculées, alors que l'obtention de celles de \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{R} requiert la solution d'un problème aux valeurs propres. L'application des définitions de \mathbf{F} et \mathbf{C} donne

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

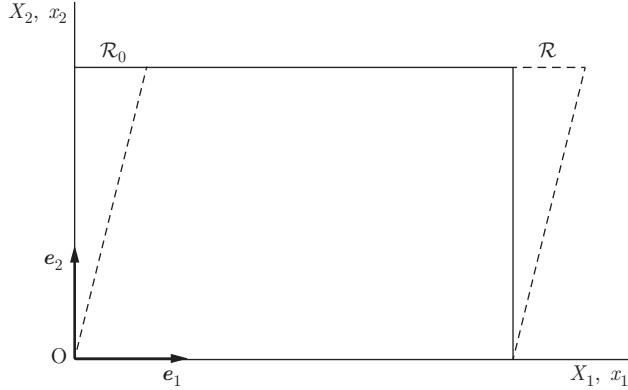


Fig. 2.18 Cisaillement simple.

Pour calculer $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$, nous cherchons la matrice diagonale $[\Lambda^2]$ de \mathbf{C} . A cet effet, on résout le problème aux valeurs propres (2.110). L'équation caractéristique correspondante est

$$\det([\mathbf{C}] - \lambda_i^2 [\mathbf{I}]) = (\lambda_i^4 - (2 + k^2)\lambda_i^2 + 1)(1 - \lambda_i^2) = 0. \quad (2.134)$$

Les trois solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= 1 + \frac{1}{2}k^2 + k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2} \\ \lambda_2^2 &= 1 + \frac{1}{2}k^2 - k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2} \\ \lambda_3^2 &= 1.\end{aligned} \quad (2.135)$$

D'où, on calcule la matrice $[\Lambda]$ définie par (2.123) telle que

$$[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (2.136)$$

Il reste à trouver la matrice $[P]$ dans (2.123) pour obtenir la matrice de \mathbf{U} par rapport à la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dont les lignes sont constituées des vecteurs propres \mathbf{A}_i normés de \mathbf{C} . Les vecteurs propres peuvent être déterminés à partir de l'équation (2.110). Après calculs, nous avons les matrices lignes

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_1) &= \left(2 + \frac{1}{2}k^2 + k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2}\right)^{-1/2} \left(1, \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2} + \frac{1}{2}k, 0\right) \\ (\mathbf{A}_2) &= \left(2 + \frac{1}{2}k^2 - k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2}\right)^{-1/2} \left(-1, \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2} - \frac{1}{2}k, 0\right) \\ (\mathbf{A}_3) &= (0, 0, 1),\end{aligned}$$

et la matrice $[P]$ s'écrit

$$[P] = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_1) \\ (\mathbf{A}_2) \\ (\mathbf{A}_3) \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Nous calculons ensuite

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{U}] &= [\boldsymbol{P}]^T [\boldsymbol{\Lambda}] [\boldsymbol{P}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & k/2 & 0 \\ k/2 & 1 + k^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + k^2/4} \end{pmatrix} \\ [\boldsymbol{R}] &= [\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & k/2 & 0 \\ -k/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + k^2/4} \end{pmatrix} \\ [\boldsymbol{V}] &= [\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}^T] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}} \begin{pmatrix} 1 + k^2/2 & k/2 & 0 \\ k/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + k^2/4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

2.9 Petits déplacements et tenseur de déformation infinitésimale

2.9.1 Petits déplacements

Considérons un champ de déplacement dépendant d'un petit nombre réel ε ($\varepsilon \ll 1$) tel que

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}) = \varepsilon \boldsymbol{W}(\boldsymbol{X}), \quad (2.139)$$

où $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{X})$ est un champ de déplacement matériel donné, auquel correspond le champ spatial $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$. Par (2.86) et (2.87), les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et Euler-Almansi sont donnés par

$$E_{ij} = \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_i}{\partial X_j} + \frac{\partial W_j}{\partial X_i} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial W_m}{\partial X_i} \frac{\partial W_m}{\partial X_j} \quad (2.140)$$

$$e_{ij} = \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial w_m}{\partial x_j}. \quad (2.141)$$

Quand ε tend vers zéro, les termes d'ordre 2 sont négligeables devant ceux d'ordre 1. On a

$$E_{ij} \simeq \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_i}{\partial X_j} + \frac{\partial W_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.142)$$

$$e_{ij} \simeq \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.143)$$

De plus, en partant de $x_i = X_i + U_i = X_i + \varepsilon W_i$ et $W_i(X_k) = w_i(x_k)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} &= \varepsilon \frac{\partial W_i}{\partial X_j} = \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \\ &= \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \left(\delta_{kj} + \varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial W_k}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (2.144)$$

et, par conséquent, il vient

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 0(\varepsilon^2). \quad (2.145)$$

Comme le déplacement $U_i(X_k)$ est nul dans la configuration de référence, un petit déplacement implique un petit gradient tel que

$$\left\| \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right\| \ll 1. \quad (2.146)$$

En effet, pour la fonction $U_i(X_j^0)$, on peut écrire

$$U(X_j^0 + dX_j) \approx U_i(X_j^0) + \frac{\partial U_i(X_j)}{\partial X_j} \Big|_{X_j^0} dX_j.$$

Si $U_i(X_j^0) = 0$ dans la configuration de référence, un petit déplacement $\|U_i(X_j)\| \ll 1$ a pour conséquence (2.146).

Sous ces conditions, (2.70) et (2.68) peuvent s'écrire

$$\left\| \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right\| = \|F_{ij} - \delta_{ij}\| \ll 1 \quad J = 1 + 0(\varepsilon^2). \quad (2.147)$$

Pour un tenseur \mathbf{L} d'ordre 2, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial X_j} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} = F_{ij} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Puisque $\partial U_i / \partial X_j$ est très petit, le dernier terme dans (2.148) est négligeable. Donc les gradients matériels et spatiaux du tenseur \mathbf{L} sont approximativement égaux

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial X_j} \approx \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_j}. \quad (2.149)$$

Cette dernière relation est le résultat de la *linéarisation cinématique*.

2.9.2 Tenseur de déformation infinitésimale

Nous pouvons maintenant déduire un résultat important à partir de la linéarisation cinématique précédente. La relation (2.145) montre que, si les termes d'ordre ε^2 sont négligés, il n'y a pas de différence entre les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi. Il est donc naturel d'introduire le *tenseur de déformation infinitésimale* $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{U} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{U})^T) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Notons que ε est un tenseur puisque le gradient du vecteur déplacement est un tenseur (voir § 1.4.3). Donc la loi de transformation de ses composantes est donnée par (1.52) et les valeurs propres, qui correspondent aux déformations infinitésimales principales, par les solutions de l'équation (1.120).

Donnons une interprétation géométrique des composantes ε_{ij} . Pour ceci, considérons de petits déplacements entre \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} (fig. 2.19). Soit $d\mathbf{X}$ un vecteur infinitésimal attaché au point \mathbf{X} avec les composantes $(dX_1, 0, 0)$. La longueur $\|d\mathbf{x}\|$ du vecteur correspondant $d\mathbf{x}$ dans \mathcal{R} est donnée par (2.80) :

$$\|d\mathbf{x}\|^2 = \|d\mathbf{X}\|^2 + 2E_{ij} dX_i dX_j = (1 + 2E_{11}) dX_1^2. \quad (2.151)$$

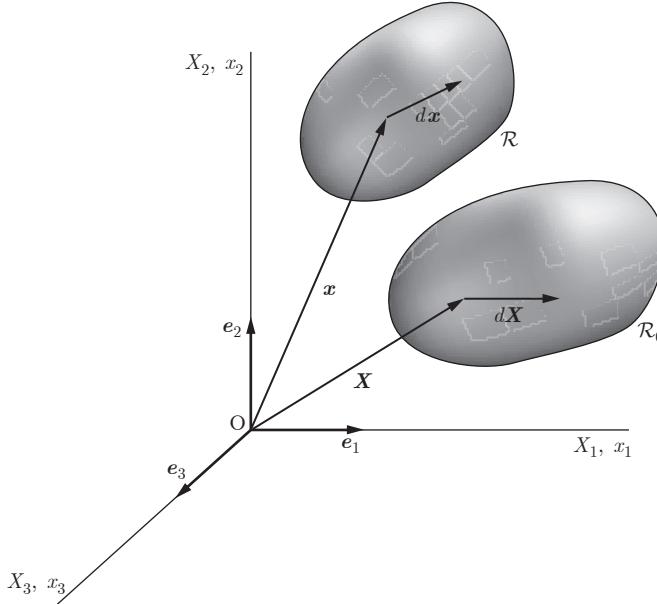


Fig. 2.19 Déformation d'un vecteur infinitésimal dirigé le long de e_1 .

Par l'hypothèse des petits déplacements, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}\|^2 &\cong (1 + 2\varepsilon_{11}) \|d\mathbf{X}\|^2 \\ \|d\mathbf{x}\| &\cong (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} dX_1 = (1 + \varepsilon_{11}) \|d\mathbf{X}\| \end{aligned} \quad (2.152)$$

d'où

$$\varepsilon_{11} \cong \frac{\|d\mathbf{x}\| - \|d\mathbf{X}\|}{\|d\mathbf{X}\|}. \quad (2.153)$$

Ainsi, ε_{11} mesure l'*extension relative* d'un élément de ligne matérielle dirigé dans la direction 1. Les autres composantes diagonales ε_{22} et ε_{33} de ε ont des interprétations similaires.

Concernant la signification géométrique de ε_{12} , considérons deux vecteurs orthogonaux dans \mathcal{R}_0 (fig. 2.20) :

$$dX = (dX_1, 0, 0) \quad \text{et} \quad dY = (0, dY_2, 0). \quad (2.154)$$

Dans \mathcal{R} , ils se déforment et deviennent les vecteurs $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ de composantes

$$dx_i = F_{i1} dX_1 \quad dy_i = F_{i2} dY_2. \quad (2.155)$$

Les longueurs de $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ sont

$$\|d\mathbf{x}\| \cong (1 + \varepsilon_{11}) dX_1 \quad \|d\mathbf{y}\| \cong (1 + \varepsilon_{22}) dY_2. \quad (2.156)$$

En notant γ_{12} l'angle entre $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$, nous avons

$$\cos \gamma_{12} = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\|} \cong \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} \cong 2\varepsilon_{12}. \quad (2.157)$$

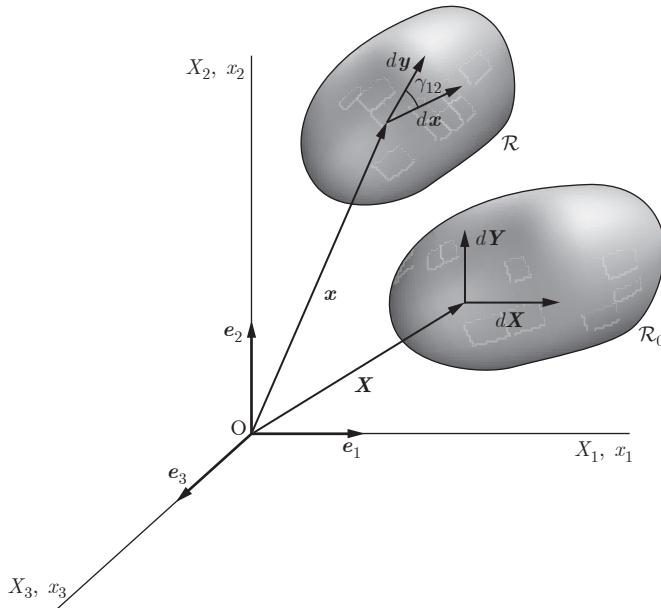


Fig. 2.20 Modification des angles entre deux vecteurs.

En introduisant l'*angle ϕ_{12} de glissement* entre deux directions orthogonales $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ (fig. 2.20), défini par

$$\phi_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}, \quad (2.158)$$

la relation (2.157) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\cos \gamma_{12} = \sin \phi_{12} \cong \phi_{12} \cong 2\varepsilon_{12}. \quad (2.159)$$

En d'autres termes, ε_{12} est la moitié du cosinus de l'angle entre les directions des déformées des vecteurs infinitésimaux dirigés dans les directions 1 et 2 dans \mathcal{R}_0 . Des interprétations similaires peuvent être données à ε_{23} et ε_{31} .

La variation relative du volume est exprimée en termes des extensions relatives. Considérons trois vecteurs orthogonaux $d\mathbf{X} = dX \mathbf{e}_1, d\mathbf{Y} = dY \mathbf{e}_2, d\mathbf{Z} = dZ \mathbf{e}_3$ dans la configuration de référence. Le volume de ce cube est $dV = dXdYdZ$. Après déformation, chaque élément se déforme comme suit

$$dx = (1 + dX)\varepsilon_{11}, \quad dy = (1 + dY)\varepsilon_{22}, \quad dz = (1 + dZ)\varepsilon_{33}, \quad (2.160)$$

et le volume après déformation s'exprime

$$\begin{aligned} dv &= dxdydz = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33})dXdYdZ \\ &= (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33})dV. \end{aligned} \quad (2.161)$$

En négligeant les puissances de degré supérieur en la déformation, on obtient la variation relative de volume

$$\frac{dv - dV}{dV} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}. \quad (2.162)$$

Notons que dans le cas des déformations infinitésimales, l'expression (2.162) est la trace du gradient du vecteur déplacement et d'après (2.150)

$$\varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}). \quad (2.163)$$

Comme nous l'avons vu par (2.150), le tenseur de déformation infinitésimale ε_{ij} correspond à la partie symétrique du gradient de déplacement $\partial u_i / \partial X_j$. En effet, on a

$$du_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) dX_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) dX_j \quad (2.164)$$

$$d\mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) d\mathbf{X} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) d\mathbf{X}. \quad (2.165)$$

Nous pouvons ainsi définir la partie antisymétrique

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.166)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.167)$$

comme le *tenseur de rotation infinitésimale* $\boldsymbol{\omega}$ et écrire

$$du_i = \varepsilon_{ij} dX_j + \omega_{ij} dX_j.$$

Notons que le rotationnel du vecteur déplacement \mathbf{u} est lié à un vecteur de rotation du corps, dont les composantes sont celles du tenseur $\boldsymbol{\omega}$ multipliées par le facteur 2, c.-à-d.

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \omega_{32} \mathbf{e}_1 + \omega_{13} \mathbf{e}_2 + \omega_{21} \mathbf{e}_3. \quad (2.168)$$

Par conséquent, le déplacement infinitésimal peut être décomposé en un tenseur de déformation pure et un tenseur de rotation pure. Cependant, une décomposition additive du gradient de déplacement n'est pas possible en grandes déformations ($\mathbf{E} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$). Dans de tels cas nous pouvons utiliser le théorème de la décomposition polaire.

2.9.3 Equations de compatibilité pour le tenseur de déformation infinitésimale

Pour un champ de déplacement \mathbf{u} donné, les composantes du tenseur de déformation infinitésimale se calculent facilement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.169)$$

Cependant, pour ε_{ij} donné, il n'existe pas forcément un champ de déplacement correspondant. Nous allons maintenant déterminer les conditions que les composantes ε_{ij} doivent satisfaire pour assurer l'existence d'un déplacement \mathbf{u} satisfaisant (2.169). En dérivant (2.169), nous obtenons

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}), \quad (2.170)$$

où les indices k et l qui suivent une virgule indiquent, par exemple, les dérivées partielles par rapport à x_k et x_l , respectivement. En interchangeant les indices, nous avons

$$\varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \quad (2.171)$$

$$\varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \quad (2.172)$$

$$\varepsilon_{ik,jl} = \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}). \quad (2.173)$$

En utilisant les symétries indicielles des dérivées de \mathbf{u} , il n'est pas difficile de vérifier que

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0. \quad (2.174)$$

Ce sont les **équations de compatibilité** de Saint-Venant. Parmi les 81 équations représentées par (2.174), seules six d'entre elles sont indépendantes en raison de la symétrie des ε_{ij} et de leurs dérivées. Explicitement, ces six équations de compatibilité sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned} \quad (2.175)$$

Il est clair à partir de la procédure que nous avons suivie pour obtenir (2.175) que lorsque le champ de déplacement est connu, les relations (2.175) sont automatiquement satisfaites. Lorsque ε_{ij} est donné, ces six équations sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence d'un champ unique de déplacement \mathbf{u} satisfaisant (2.169) à un mouvement rigide près seulement si le corps \mathcal{C} est *simplement connexe*. Pour un solide élastique *multiplement connexe*, elles sont suffisantes et des conditions additionnelles sont nécessaires.

Une interprétation des conditions de compatibilité (2.175) est donnée par l'expérience virtuelle suivante. Considérons un corps bidimensionnel, par exemple, une plaque d'épaisseur uniforme, coupée en petits morceaux carrés. Quand il n'y a pas de déformation sur la plaque, les morceaux s'ajustent parfaitement pour former celle-ci. Ensuite, nous imposons, sur chaque petit morceau carré, des champs de déformations arbitraires et nous essayons de les assembler à nouveau pour reformer la plaque. Dans le processus de reconstruction, nous remarquons qu'en général, ils ne produisent pas la plaque d'origine, mais qu'ils sont séparés par des espaces entre tous ou certains d'entre eux. Cependant, un raccord parfait n'est obtenu que lorsque la déformation prescrite imposée sur chaque carré satisfait (2.175).

2.10 Gradient de vitesse et tenseurs associés

Dans de nombreux problèmes de mécanique des milieux continus, la grandeur cinématique la plus intéressante n'est pas le changement de forme d'un corps, mais *le taux auquel ce changement se produit*. Ceci est spécialement le cas pour la mécanique des fluides.

Soient \mathcal{V} un voisinage du point P de coordonnées x_i et Q un point quelconque appartenant à \mathcal{V} de coordonnées $x_i + dx_i$. La vitesse spatiale de Q est donnée par

$$v_i(x_j + dx_j, t) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i(x_j, t)}{\partial x_j} dx_j + \dots \quad (2.176)$$

Le tenseur \mathbf{L} dont les composantes sont

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (\nabla \mathbf{v})_{ij} \quad (2.177)$$

est appelé le **gradient de vitesse**. On établit une relation entre \mathbf{L} et \mathbf{F} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{F}_{ij} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = L_{im} F_{mj}. \end{aligned} \quad (2.178)$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}. \quad (2.179)$$

La partie symétrique de \mathbf{L} , c'est-à-dire

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.180)$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (2.181)$$

est appelée le **tenseur des taux de déformation**, et sa partie antisymétrique de \mathbf{L} , c'est-à-dire

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.182)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (2.183)$$

le **tenseur des taux de rotation**. Donc, on peut écrire

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (2.184)$$

Avec les définitions (2.180) et (2.182), il s'ensuit de (2.176) que

$$v_i(x_j + dx_j, t) - v_i(x_j, t) \cong d_{ij} dx_j + \dot{\omega}_{ij} dx_j. \quad (2.185)$$

La comparaison de (2.180) avec la définition de ε_{ij} donne

$$d_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (2.186)$$

C'est pour cette raison que d_{ij} est appelé le tenseur des taux de déformation. Cependant, il faut noter que la linéarité de d_{ij} par rapport à v_i dans (2.180) est exacte, aucune hypothèse de petits déplacements n'étant faite lors de son calcul. Le vecteur dual $\dot{\Omega}_i$ (1.104) associé au tenseur des taux de rotation, c'est-à-dire

$$\dot{\Omega}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_{jk} = \frac{1}{2} (\mathbf{rot} \mathbf{v})_i, \quad (2.187)$$

est appelé le **vecteur tourbillon** ou vecteur des taux de rotation. Notons qu'en mécanique des fluides, il est classique d'introduire le vecteur vorticité ou tourbillon $\boldsymbol{\omega}$ en le définissant comme le rotationnel de la vitesse. Il vient

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (2.188)$$

ou encore

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}. \quad (2.189)$$

On déduit facilement que

$$\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\Omega}. \quad (2.190)$$

Afin de donner une interprétation au vecteur tourbillon, considérons la décomposition d'un mouvement local du fluide en ses parties élémentaires. Soit un point P de position \mathbf{x} et un point voisin P' à la figure 2.21.

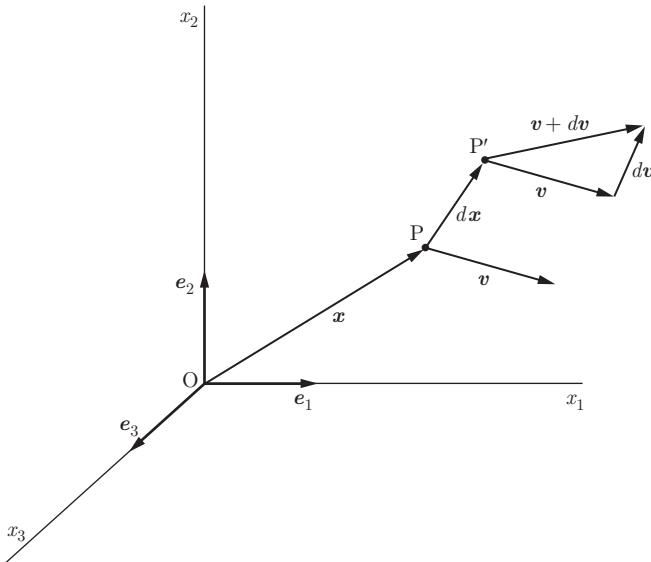


Fig. 2.21 Mouvement relatif de deux particules fluides.

Le vecteur position de P' relatif à P est $d\mathbf{x}$. Après un temps infinitésimal, P et P' occupent de nouvelles positions. P se déplace avec la vitesse locale \mathbf{v} et P' avec la vitesse $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. On considère que P est la particule fluide principale et après soustraction de sa vitesse de translation, on décrit le mouvement de P' comme si on l'observait à partir de la particule principale. Le raisonnement tenu ci-dessous n'est donc valable que localement lorsque la distance $d\mathbf{x}$ devient petite. On peut décomposer le mouvement de P et P' en trois parties distinctes : une translation, une rotation de corps rigide et une déformation. Le mouvement de translation est donné par la vitesse \mathbf{v} de P . Tous les autres mouvements pris ensemble sont donnés par $d\mathbf{v}$, la vitesse de P' par rapport à P . On a donc l'expression

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x}. \quad (2.191)$$

Par (2.184), les mouvements de déformation (allongement, raccourcissement,...) de P' par rapport à P sont décrits par \mathbf{d} . En conséquence, le mouvement de rotation de P' par rapport à P est pris en compte par $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. On peut écrire

$$d\mathbf{v}^{(r)} = \dot{\boldsymbol{\omega}} d\mathbf{x}, \quad (2.192)$$

où l'indice supérieur r fait référence à la rotation.

Le mouvement de rotation de corps rigide de P' par rapport à P doit avoir la forme de l'équation $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse de rotation angulaire. Par (2.187) et (2.190), on a $-\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k = \dot{\omega}_{ji}$. Donc la composante du

mouvement de rotation est donnée par

$$\begin{aligned} dv_j^{(r)} &= \dot{\omega}_{ji} dx_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k dx_i \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} (\omega_k) dx_i . \end{aligned} \quad (2.193)$$

Cette dernière équation est de la forme $d\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{x}$. Le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$ correspond à une vitesse angulaire telle que la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ est égale à $2\boldsymbol{\Omega}$, c'est-à-dire deux fois la vitesse angulaire de rotation de corps rigide de P' par rapport à P .

On remarquera que dans le cas du corps rigide en rotation, le tenseur \mathbf{L} s'obtient par l'équation (2.55). On a

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Omega} \quad (2.194)$$

qui est un tenseur antisymétrique. Ceci montre que dans ce cas $\mathbf{d} = 0$ et que le tenseur $\mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$. Le tenseur des taux de rotation est donc entièrement déterminé par la rotation instantanée du solide.

2.11 Objectivité des quantités cinématiques

La description d'une quantité physique ou mécanique associée au mouvement d'un corps dépend en général du choix de l'observateur ou de référentiel.

En physique, on utilise très fréquemment un référentiel inertiel pour lequel l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme. Dans ce référentiel, les lois de la mécanique newtonienne sont valables. Un corps en mouvement rectiligne uniforme pendant un intervalle de temps fini subit une force nulle. Une autre interprétation de cette situation physique dans ce référentiel consiste dans l'observation que le centre de masse du corps \mathcal{C} se déplace le long d'une droite à vitesse uniforme si le corps n'est soumis à aucune force.

Au chapitre 1, on a traité les conséquences induites par les changements du choix du système de coordonnées ou de repère dans le cas d'un seul observateur. Ce traitement est la base de l'analyse tensorielle et trouve son origine dans l'exigence que toutes les lois de la physique d'un milieu continu ne doivent pas dépendre du choix du système de coordonnées par un observateur. Cependant, lorsque le même événement dans l'espace est vu par deux observateurs situés dans deux référentiels différents, les relations entre les coordonnées et les divers paramètres cinématiques dans les deux référentiels sont différentes.

Dans la suite, l'observateur ou le référentiel sera désigné par $R = (O, \mathbf{x}, t)$. Notre but ici est de distinguer les quantités cinématiques scalaires, vectorielles ou tensorielles qui dépendent intrinsèquement de l'observateur de celles qui en sont essentiellement indépendantes. Ceci constitue une préparation à la future discussion sur l'objectivité des lois physiques générales ou constitutives. Rapelons qu'en mécanique des milieux continus, un événement, c'est-à-dire un

processus physique, est défini par ses coordonnées dans l'espace \mathbf{x} et le temps d'observation t .

Considérons un événement vu par deux observateurs R et R^* , et notés respectivement par (\mathbf{x}, t) et (\mathbf{x}^*, t^*) . Le mouvement entre deux observateurs est une fonction de l'espace et du temps. Si les effets dus à la relativité sont négligés et si on suppose que les observateurs mesurent la même distance entre deux événements simultanés et les mêmes intervalles de temps entre deux événements séquentiels, on montre que la transformation la plus générale entre les observations (\mathbf{x}, t) et (\mathbf{x}^*, t^*) du même événement est donnée par

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad t^* = t - \alpha, \quad (2.195)$$

où $\mathbf{Q}(t)$ est un tenseur de rotation orthogonal avec le temps t comme paramètre, $\mathbf{c}(t)$ un vecteur et α une constante scalaire. L'interprétation de (2.195) est montrée à la figure 2.22, où on voit deux observateurs R et R^* au temps t . Supposons qu'un événement (i.e. une expérience) ait lieu en P. Le vecteur position de P par rapport à l'observateur R est \mathbf{x} . Le même événement vu par l'observateur R^* n'est simplement pas donné par l'addition vectorielle $\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{x}$, mais par l'expression générale (2.195). En effet, on doit prendre en compte la rotation de corps rigide de l'observateur R par rapport à l'observateur R^* , pour que l'observateur R^* voie le même événement. Cette rotation est accomplie par le tenseur de rotation $\mathbf{Q}(t)$, dont les composantes sont des fonctions des deux angles β, γ et du temps. On constate que le changement de référentiel représente plus qu'une simple transformation de coordonnées induite par un changement de repère.

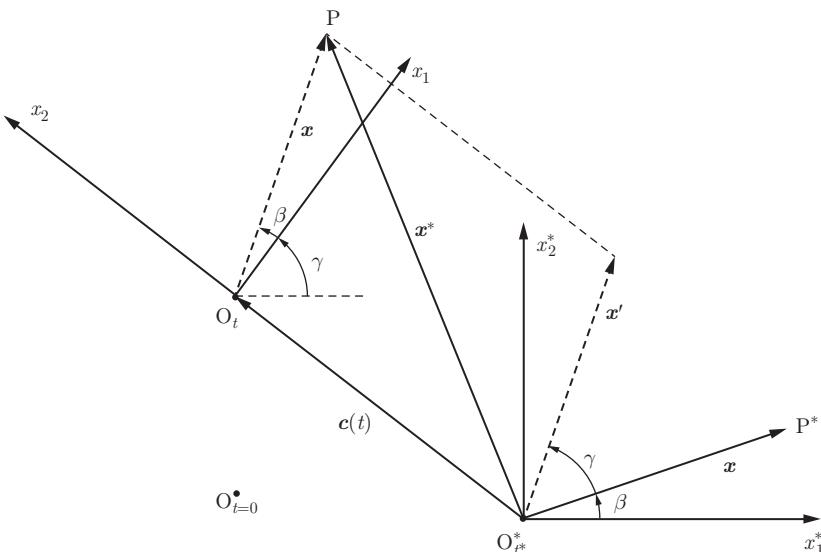


Fig. 2.22 Interprétation de (2.195). Les deux observateurs initialement positionnés en $O_{t=0}$ se déplacent dans deux référentiels.

Donc le mouvement d'un corps \mathcal{C} décrit par $\chi(\mathbf{X}, t)$ selon le premier observateur est décrit par le second observateur par $\chi^*(\mathbf{X}, t^*)$, et ces deux descriptions sont reliées de la manière suivante :

$$\chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t) \quad t^* = t - \alpha. \quad (2.196)$$

Afin d'examiner les ramifications de la transformation (2.196), considérons deux événements simultanés enregistrés par R comme (\mathbf{x}_1, t) et (\mathbf{x}_2, t) , et (\mathbf{x}_1^*, t) et (\mathbf{x}_2^*, t) par R^* . Pour ces deux événements, les positions relatives vues par les deux observateurs sont $\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ et $\mathbf{u}^* = \mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*$, respectivement. De la relation (2.196), on obtient

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Qu}. \quad (2.197)$$

Puisque le *tenseur Q* est orthogonal, on peut écrire

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* = (\mathbf{Qu}) \cdot (\mathbf{Qu}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.198)$$

Cette dernière égalité montre que les normes de \mathbf{u} et \mathbf{u}^* sont les mêmes, c'est-à-dire $\|\mathbf{u}^*\| = \|\mathbf{u}\|$ et que la transformation est celle d'une rotation de corps rigide (§ 2.6.2). Les champs vectoriels qui se transforment suivant (2.197) sont appelés objectifs ou indifférents par rapport au référentiel.

Au moyen de la définition d'un *vecteur spatialement objectif*, nous définissons un *tenseur d'ordre 2 spatialement objectif*. Soient deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} vus par l'observateur R, liés par le tenseur \mathbf{L} d'ordre 2

$$\mathbf{w} = \mathbf{Lv}. \quad (2.199)$$

Puisque \mathbf{v} et \mathbf{w} sont objectifs, l'observateur R^* les voit comme $\mathbf{w}^* = \mathbf{Qw}$ et $\mathbf{v}^* = \mathbf{Qv}$. Cet observateur considère le tenseur d'ordre 2 comme \mathbf{L}^* tel que $\mathbf{w}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{v}^*$. Pour relier \mathbf{L} et \mathbf{L}^* , on remarque que

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{Qw} = \mathbf{QLv} = \mathbf{QLQ}^T \mathbf{v}^*. \quad (2.200)$$

De cette dernière relation, on déduit l'égalité

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{QLQ}^T. \quad (2.201)$$

Les champs tensoriels qui se transforment suivant (2.201) lors d'un changement d'observateur sont appelés champs tensoriels d'ordre 2 spatialement objectifs ou indépendants du référentiel. En ce qui concerne un champ scalaire, celui-ci sera dit objectif ou indépendant du référentiel lorsque

$$f^*(\mathbf{x}^*, t) = f(\mathbf{x}, t). \quad (2.202)$$

Dans ce qui suit, nous dirons que :

- une quantité scalaire ϕ est *objective* si et seulement si (ssi) $\phi^* = \phi$;
- une quantité vectorielle \mathbf{f} est *matériellement objective* ssi $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}$;
- une quantité vectorielle \mathbf{f} est *spatialement objective* ssi $\mathbf{f}^* = \mathbf{Qf}$;

- une quantité tensorielle \mathbf{T} est *matériellement objective* ssi $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$;
- une quantité tensorielle \mathbf{T} est *spatialement objective* ssi $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$.

Afin d'examiner l'objectivité de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement, nous remarquons qu'en dérivant (2.196) par rapport au temps, la vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$ et l'accélération $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\chi}(\mathbf{X}, t)$ d'une particule \mathbf{X} se transforment de la façon suivante :

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.203)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*(\mathbf{X}, t^*) &= \ddot{\chi}^*(\mathbf{X}, t^*) \\ &= \mathbf{Q}(t)\ddot{\chi}(\mathbf{X}, t) + \ddot{\mathbf{c}}(t) + \ddot{\mathbf{Q}}(t)\chi(\mathbf{X}, t) \\ &\quad + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{V}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (2.204)$$

Par conséquent, les définitions de la vitesse et de l'accélération sont *relatives* et inextricablement liées à un observateur. En appliquant la définition du *gradient de déformation* à (2.196), nous obtenons la loi de transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t^*) &= \frac{\partial \chi^*(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi^*(\mathbf{X}, t)}{\partial \chi(\mathbf{X}, t)} \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (2.205)$$

Cette relation jouera un rôle important dans les discussions ultérieures. Notons que

$$J^* = \det \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t^*) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = J. \quad (2.206)$$

Donc la quantité scalaire J n'est pas affectée par un changement d'observateur. En partant des définitions (2.77), (2.79), (2.82) et (2.83) et en utilisant (2.205), nous avons les lois de transformation des tenseurs de déformation suivantes

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} \quad (2.207)$$

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{Q}^T \quad \mathbf{e}^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}\mathbf{Q}^T. \quad (2.208)$$

Ainsi, d'après ces définitions, le jacobien J est objectif; le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit \mathbf{C} et le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} sont matériellement objectifs; le tenseur de déformation de Cauchy \mathbf{c} et le tenseur de déformation de Euler-Almansi \mathbf{e} sont spatialement objectifs. D'autre part, la vitesse, l'accélération et le gradient de déformation *ne sont pas objectifs*. De plus, il est important de remarquer que la dérivée matérielle d'une quantité matériellement objective reste matériellement objective, alors que la dérivée matérielle d'une quantité spatialement objective n'est généralement pas spatialement objective. Par exemple,

$$\dot{\mathbf{E}}^* = \dot{\mathbf{E}} \quad (2.209)$$

$$\dot{\mathbf{c}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{c}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{c}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{c}\dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q}\dot{\mathbf{c}}\mathbf{Q}^T. \quad (2.210)$$

Dans le cadre du changement de référentiel (2.195), examinons comment le tenseur des gradients de vitesse se transforme. Réécrivons (2.203) et (2.204) en représentation spatiale

$$\mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (2.211)$$

$$\mathbf{a}^* = \ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{Q}\mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}. \quad (2.212)$$

A partir de l'équation (2.211), on évalue le tenseur des gradients de vitesse \mathbf{L}^* . On obtient

$$L_{ij}^* = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = \frac{\partial v_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*}.$$

Par (2.195), il vient

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial x_k} = Q_{jk}.$$

Son inverse $\partial x_k / \partial x_j^*$ est $Q_{kj}^{-1} = Q_{kj}^T$. L'évaluation de $\partial v_i^* / \partial x_k$ s'effectue via l'équation (2.211). On a

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial x_k} = \dot{Q}_{ik} + Q_{il} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}.$$

En assemblant ces diverses relations, on écrit

$$\mathbf{L}^* = (\mathbf{Q}\mathbf{L} + \dot{\mathbf{Q}})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.213)$$

où on a fait appel à la définition (2.57).

Etablissons le lien entre la notion d'objectivité et le mouvement rigidifiant. A cette fin, comparons l'équation qui décrit le mouvement de corps rigide (2.52) et la transformation (2.195). En posant $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ pour simplifier, le mouvement décrit par (2.195) est rigide lorsque

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{c}(t). \quad (2.214)$$

Cette dernière équation peut se généraliser pour deux mouvements différents \mathbf{x} et \mathbf{y} d'un milieu continu. Ces deux mouvements diffèrent par un mouvement de corps rigide si

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t). \quad (2.215)$$

La forme (2.215) est semblable à (2.195) avec la différence suivante : \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux événements distincts, tandis que \mathbf{x} et \mathbf{x}^* sont les lieux d'un seul événement enregistré par deux observateurs différents. Donc, on peut considérer le changement d'observateur défini par (2.195) comme un mouvement de corps rigide superposé sur la configuration actuelle d'un milieu continu.

L'importance de l'objectivité ou de la non-objectivité d'une quantité apparaîtra lors de la discussion des lois de comportement des matériaux soumis à de grandes transformations ou de grands déplacements, même accompagnés de petites déformations.

Pour clore cette section, écrivons les relations (2.211) et (2.212) sous une autre forme. En effet, l'équation (2.195) donne

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) = \mathbf{x}. \quad (2.216)$$

Insérant (2.216) dans (2.211), il vient

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}). \quad (2.217)$$

En combinant (2.216), (2.217) et (2.212), l'accélération devient

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{Q}\mathbf{a} + \ddot{\mathbf{c}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}) - 2\left(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\right)^2(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) . \quad (2.218)$$

En utilisant le tenseur de rotation (2.57), la vitesse s'écrit

$$\mathbf{v}^* - \mathbf{Q}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) , \quad (2.219)$$

où les deux termes du membre de droite correspondent aux vitesses de translation et de rotation des deux référentiels, tandis que l'accélération se met sous la forme

$$\mathbf{a}^* - \mathbf{Q}\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{c}} + 2\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}) + \left(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega}^2\right)(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) . \quad (2.220)$$

Dans le membre de droite de (2.220), le premier terme est l'accélération de translation, le second l'accélération de Coriolis et les termes suivants l'accélération de rotation et centripète du référentiel, respectivement. Pour obtenir (2.220), on a utilisé la relation

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{Q}}^T = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\Omega}^2 . \quad (2.221)$$

Si le référentiel est galiléen, un cas spécial de référentiel inertiel tel que $\dot{\mathbf{Q}} = \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ et $\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$, alors l'accélération est objective. Dans le référentiel galiléen, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 = cst$ et $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t$ où \mathbf{c}_1 est une vitesse constante. Dans ce cas la relation (2.195) se simplifie

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}_0\mathbf{x} + \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t , \quad (2.222)$$

qui est la transformation galiléenne.

2.12 Exercices

[2.1] Un milieu continu dans sa configuration déformée est donné par les relations

$$x_1 = \frac{1}{2}X_1 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 . \quad (2.223)$$

Calculer le champ de déplacement en coordonnées matérielles et spatiales.

2.2 Soit la déformation de cisaillement simple donnée par la matrice \mathbf{M} de l'équation (2.132). On demande de calculer \mathbf{M}^{-1} et les tenseurs de déformation \mathbf{C} , \mathbf{c} , \mathbf{E} , $\boldsymbol{\epsilon}$.

2.3 Répéter le même exercice dans le cas de la dilatation pure donnée par $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$, où \mathbf{I} est le tenseur unité.

2.4 Un cube vibre autour de sa position de repos. La description lagrangienne du mouvement est donnée par les équations

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}\right) \\x_2 &= X_2 + b \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{L}\right) \\x_3 &= X_3.\end{aligned}$$

Les symboles a , b , L sont des constantes qui ont pour dimension une longueur et T est une constante qui a pour dimension le temps.

- 1) Déterminer les trajectoires des points matériels.
- 2) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération.
- 3) Calculer le tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} et sa dérivée matérielle $D\mathbf{F}/Dt$.
- 4) En représentation lagrangienne, calculer le tenseur du gradient de vitesse \mathbf{L} .
- 5) Calculer le tenseur des taux de déformation \mathbf{d} et des taux de rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.
Calculer le vecteur tourbillon $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$.

2.5 Pour la transformation donnée à l'exemple 2.1 :

- 1) Calculer la matrice du gradient de la déformation \mathbf{F} . La déformation est-elle homogène ? La déformation est-elle isochore (déformation à volume constant) ? Pour quelles valeurs de a la transformation est-elle inversible ?
- 2) Calculer les matrices de \mathbf{C} , \mathbf{E} et celle de $\boldsymbol{\epsilon}$. Comparer \mathbf{E} et $\boldsymbol{\epsilon}$ dans le cas $0 < a \ll 1$.
- 3) Vérifier que les vecteurs dirigés selon l'axe x_3 et les diagonales AH et DE sont les vecteurs propres de \mathbf{C} . En utilisant ces résultats, calculer $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$.
- 4) Calculer la matrice du tenseur de rotation \mathbf{R} dans la décomposition polaire $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.

2.6 Au moyen de l'équation (2.205), démontrer les relations (2.207) et (2.208).

2.7 A l'aide de (2.205) et la troisième relation de (2.120), montrer que $\mathbf{R}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ et $\mathbf{V}^* = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T$.

[2.8] Montrer que $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}$ où \mathbf{d} est le tenseur des taux de déformation (2.180).

[2.9] Pour le mouvement suivant $x_1 = \lambda_1 X_1$, $x_2 = \lambda_2 X_2$, $x_3 = \lambda_3 X_3$, déterminer les matrices des tenseurs \mathbf{C} , \mathbf{R} , \mathbf{U} et \mathbf{E} , les valeurs principales de \mathbf{C} et \mathbf{U} et leurs invariants.

[2.10] Démontrer que $\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{R}^T$.

[2.11] Démontrer que $\mathbf{F} \mathbf{A}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$ avec λ_i les valeurs principales du tenseur \mathbf{U} et \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, 3$), ses vecteurs propres associés, et ensuite la relation (2.119).

[2.12] Déduire la relation (2.157).

[2.13] Le déplacement d'un corps est décrit par les équations

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Soit un élément infinitésimal ABCD de côtés $dx_1 dx_2$ donné à la figure 2.23. A partir de la configuration déformée A'B'C'D', déduire les relations déformations-déplacements pour le cas des déformations infinitésimales.

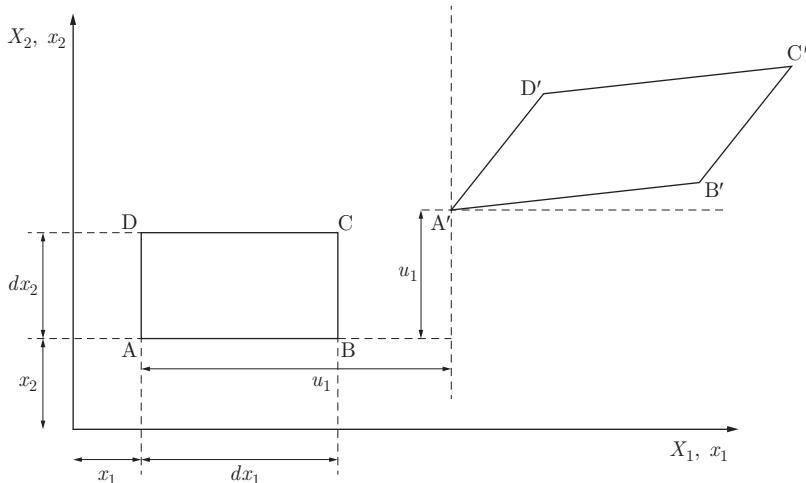


Fig. 2.23 Déformation d'un élément infinitésimal.

2.14 Une plaque d'épaisseur unitaire située dans le plan $x_1 x_2$ est soumise à un champ de déformation uniforme donné par

$$\varepsilon_{ij} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.224)$$

Trouver le changement de longueur d'un élément linéaire de longueur initiale égale à 1 :

- 1) parallèle à l'axe x_1 ;
- 2) parallèle à l'axe x_2 ;
- 3) faisant un angle de 45 degrés avec l'axe x_1 .

2.15 Démontrer que la déformation ε_N pour un élément linéaire dS du plan Ox_1x_2 , dans la direction \mathbf{N} , qui fait un angle θ avec l'axe horizontal est donnée par

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \cos \theta \sin \theta \quad (2.225)$$

où $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ sont les composantes du tenseur de déformation infinitésimale.

CHAPITRE 3

Dynamique des milieux continus

3.1 Introduction

Après l'étude du mouvement du corps et l'introduction des divers paramètres qui le décrivent, l'étape suivante consiste dans l'examen de la conservation de certaines quantités pendant ce mouvement, comme la masse, la quantité de mouvement et le moment cinétique. Dans ce contexte, on introduira le concept important de contrainte et de sa mesure; ses propriétés seront étudiées en détail. En mécanique des milieux continus, la contrainte est le paramètre qui caractérise l'interaction mécanique d'un corps avec son environnement. Cette contrainte est la cause du mouvement. Dès lors, il est essentiel de développer la mécanique du milieu continu qui est la généralisation de la mécanique du point et des lois de Newton [1, 27]. De manière similaire au cas de la cinématique du chapitre 2, le type de matériau et la spécification du mouvement n'interviennent pas dans les développements de ce chapitre.

La dynamique des milieux continus est également développée dans les références [14, 22, 23, 32, 44, 45].

3.2 Théorème du transport de Reynolds

3.2.1 Définitions

La dérivée temporelle d'une intégrale de volume joue un rôle très important dans la formulation des lois de bilan en mécanique des milieux continus. Considérons, par exemple, la fonction $I(t)$ donnée par

$$I(t) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{X}, t) dV, \quad (3.1)$$

où Φ est une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle et $\Omega \subseteq \mathcal{R}_0$ représente le volume du corps dans la configuration initiale au temps $t = 0$ ou d'une partie Π de celui-ci. Nous définissons la **dérivée matérielle temporelle d'une intégrale de volume** par l'expression

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{X}, t) dV. \quad (3.2)$$

Dans le cas où la frontière ne change pas avec le temps, alors on peut permute la dérivée temporelle et l'intégrale. L'équation (3.2) devient

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dV. \quad (3.3)$$

Quand la frontière d'un corps change avec le temps, la dérivation directe ci-dessus ne s'applique plus et nous avons besoin d'une autre méthode. Celle-ci est présentée dans la suite.

Supposons que la grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle φ exprime une caractéristique du corps considéré et que ce dernier, ou une partie $\Pi \subseteq \mathcal{C}$ de ce dernier, occupe un volume $\omega(t) \subseteq \mathcal{R}$ de frontière $\partial\omega(t) \subseteq \partial\mathcal{R}$ au temps t . L'équation de bilan peut être formulée de la manière suivante : le taux de variation de l'intégrale de $\varphi(\mathbf{x}, t)$ dans le volume $\omega(t)$ dépendant du temps *est égal* au taux de variation de $\varphi(\mathbf{x}, t)$ dans $\omega(t)$ *plus* le flux total de $\varphi(\mathbf{x}, t)$ à travers la surface $\partial\omega(t)$. Mathématiquement, l'équation de bilan s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.4)$$

Cette expression est appelée le théorème du transport de Reynolds. En utilisant le théorème de divergence (§ 1.4.13), on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(\mathbf{x}, t) v_i) \right) dv \quad (3.5)$$

ou encore à l'aide de (2.27),

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \varphi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv. \quad (3.6)$$

Dans les équations suivantes, nous noterons $\omega(t)$ par ω et $\partial\omega(t)$ par $\partial\omega$.

3.2.2 Transformation d'un élément de volume

Dans les lois de conservation que nous allons établir dans la suite apparaissent des éléments de volume. Il est utile d'exprimer le changement de volume au temps t de la représentation eulérienne par rapport au volume initial dans la représentation lagrangienne. On sait par (2.103) que

$$dv = J dV, \quad (3.7)$$

où le *jacobien* J peut s'exprimer comme

$$J = \det \mathbf{F} = \varepsilon_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3} = \varepsilon_{ijk} F_{1i} F_{2j} F_{3k}, \quad (3.8)$$

puisque en écrivant $\varepsilon_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3}$ et en utilisant les propriétés de ε_{ijk} , on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3} &= F_{11} F_{22} F_{33} + F_{21} F_{32} F_{13} + F_{31} F_{12} F_{23} \\ &\quad - F_{11} F_{32} F_{23} - F_{31} F_{22} F_{13} - F_{21} F_{12} F_{33}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le calcul de la dérivée matérielle de J se fait aisément. On a

$$\dot{J} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \dot{\chi}_1}{\partial X_i} \frac{\partial \chi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \chi_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{\chi}_2}{\partial X_j} \frac{\partial \chi_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \chi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \dot{\chi}_3}{\partial X_k}. \quad (3.10)$$

En introduisant la vitesse (2.20), on obtient en utilisant le théorème des fonctions implicites

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial \chi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \chi_3}{\partial X_k} + \frac{\partial \chi_1}{\partial X_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_j} \frac{\partial \chi_3}{\partial X_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \chi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \chi_2}{\partial X_j} \frac{\partial v_3}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} \right) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_p} \delta_{1p} J + \frac{\partial v_2}{\partial x_p} \delta_{2p} J + \frac{\partial v_3}{\partial x_p} \delta_{3p} J. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalement, il vient

$$\dot{J} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} J = \nabla \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)} J(\mathbf{X},t). \quad (3.12)$$

Cette expression s'interprète parfois en exprimant que $\dot{J}/J = \operatorname{div} \mathbf{v}$ est le taux de dilatation volumique. Comme résultat final des développements précédents, on peut obtenir la dérivée matérielle d'un élément de volume en combinant (3.7) avec (3.12). On a successivement

$$\frac{D \mathbf{v}}{Dt} = \dot{J} dV = \frac{\dot{J}}{J} dv = \operatorname{div} \mathbf{v} dv. \quad (3.13)$$

3.2.3 Théorème du transport de Reynolds

Nous pouvons établir le théorème du transport de Reynolds défini par (3.5) ou (3.6). Soit l'intégrale $I(t)$ définie par la relation

$$I(t) = \int_{\omega} \varphi(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.14)$$

On désire évaluer l'intégrale

$$\frac{DI(t)}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.15)$$

Pour évaluer cette expression, on ne peut pas permute la dérivée par rapport au temps et l'intégrale, puisque cette dernière porte sur un volume dépendant du temps. On passe alors à la représentation matérielle

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dX_1 dX_2 dX_3. \quad (3.16)$$

A l'aide de (2.103), on a

$$dx_1 dx_2 dx_3 = J(\mathbf{X}, t) dX_1 dX_2 dX_3 \quad \text{ou} \quad dv = J(\mathbf{X}, t) dV. \quad (3.17)$$



Osborne Reynolds (1842-1912) est un mathématicien anglais né à Belfast. Il fut nommé professeur d'ingénierie à l'Owens College de l'Université de Manchester en 1868. Ses contributions portent sur l'hydrodynamique et la mécanique des fluides. On lui doit l'introduction du nombre de Reynolds, ainsi que la décomposition de Reynolds pour la modélisation de la turbulence.

Fig. 3.1 Osborne Reynolds.

Alors, (3.16) peut s'exprimer par

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) dX_1 dX_2 dX_3, \quad (3.18)$$

où

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\chi(\mathbf{X}, t), t). \quad (3.19)$$

A partir de la relation (3.18), il est plus aisé d'effectuer la dérivation de l'intégrale

$$\begin{aligned} \frac{DI}{Dt} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}, t) \right. \\ &\quad \left. + \Phi(\mathbf{X}, t) \frac{\partial J(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \right) dX_1 dX_2 dX_3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En utilisant la relation (3.12), l'intégrale (3.20) peut s'écrire de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{DI}{Dt} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \right. \\ &\quad \left. + \Phi(\mathbf{X}, t) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Big|_{x=\chi(\mathbf{X}, t)} \right) J(\mathbf{X}, t) dX_1 dX_2 dX_3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En faisant les changements appropriés dans la dernière intégrale et en utilisant (2.3), (3.17) et (3.19) et

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt}, \quad (3.22)$$

nous avons le résultat final

$$\frac{DI}{Dt} = \int_{\omega} \left(\frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \varphi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.23)$$

L'expression (3.23) est le **théorème du transport de Reynolds** appliqué à une fonction scalaire $\varphi(\mathbf{x}, t)$. On peut considérer que le théorème de Reynolds est une généralisation du théorème de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} \varphi(x = b, t) - \frac{da}{dt} \varphi(x = a, t). \quad (3.24)$$

Comme

$$\frac{D\varphi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}, t), \quad (3.25)$$

l'intégrale (3.23) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{DI}{Dt} &= \int_{\omega} \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t) \right) dv \\ &= \int_{\omega} \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)) \right) dv \\ &= \int_{\omega} \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)) dv. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En utilisant le théorème de divergence (1.228) pour la deuxième intégrale, on obtient

$$\frac{DI}{Dt} = \int_{\omega} \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3.27)$$

qui n'est rien d'autre que (3.4)

3.3 Conservation de la masse

En mécanique des milieux continus, la **masse** est traitée comme un concept primitif et considérée comme inhérente au corps. La masse du corps \mathcal{C} signifie tout d'abord la quantité de matière que \mathcal{C} contient. L'expérience montre que cette quantité ne dépend ni du temps, ni de la transformation matérielle (par exemple, un changement de phase) ni de la déformation de \mathcal{C} . De plus, la quantité de matière de deux parties quelconques de \mathcal{C} est la quantité de matière de la première partie plus celle de la seconde partie. Ces aspects peuvent être formulés et donc rendus plus précis de deux manières différentes, selon que l'on adopte la description matérielle ou spatiale pour décrire le mouvement de \mathcal{C} .

3.3.1 Forme matérielle

Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} les configurations initiale (ou de référence) et actuelle de \mathcal{C} (fig. 3.2). La *densité initiale de masse* du corps \mathcal{C} en description *matérielle* est une *fonction scalaire positive et intégrable* $P_0(\mathbf{X})$ définie sur \mathcal{R}_0 , telle que la masse $m(\Omega)$ d'une partie quelconque Π de \mathcal{C} au temps $t = 0$ soit donnée par

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X}) dX_1 dX_2 dX_3, \quad (3.28)$$

où $\Omega \subseteq \mathcal{R}_0$ est la configuration initiale de $\Pi \subseteq \mathcal{C}$. D'une façon similaire, la *densité actuelle de masse* de \mathcal{C} en description *spatiale* est une *fonction scalaire*,

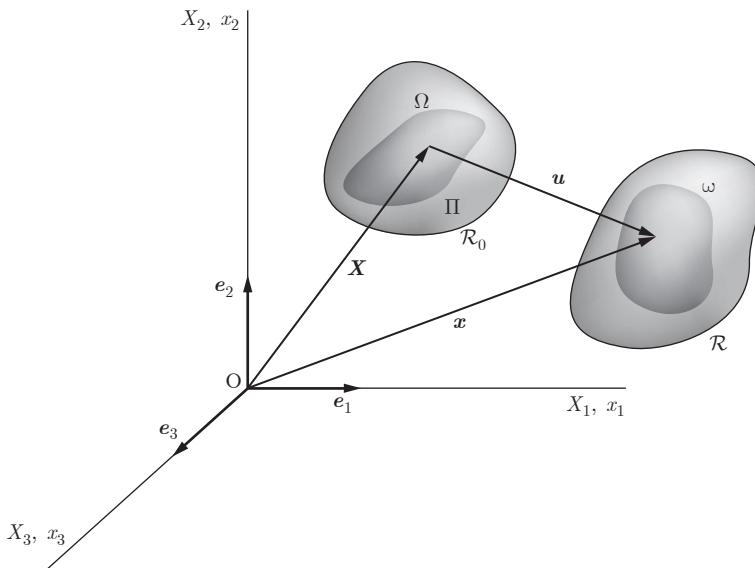


Fig. 3.2 Mouvement d'une partie arbitraire Π de \mathcal{C} .

positive et intégrable $\rho(\mathbf{x}, t)$ définie sur \mathcal{R} , telle que la masse $m_t(\omega)$ de n'importe quelle partie Π de \mathcal{C} à l'instant présent $t \geq 0$ soit donnée par

$$m_t(\omega) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (3.29)$$

où $\omega \subseteq \mathcal{R}$ est la configuration actuelle de Π .

PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE

La masse contenue dans une partie quelconque Π du corps \mathcal{C} reste inchangée avec le temps, c'est-à-dire

$$m_t(\omega) = m(\Omega). \quad (3.30)$$

En introduisant (3.28) et (3.29) dans (3.30), on obtient

$$\int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X}) dV. \quad (3.31)$$

Dans cette expression, le vecteur position actuel \mathbf{x} d'une particule de Π est relié au vecteur position initial \mathbf{X} par l'équation du mouvement de \mathcal{C} donnée par (2.1). La prise en compte de (2.1) dans (3.31) revient mathématiquement à faire un changement de variables. Or, lors d'un changement de variables de \mathbf{x} à \mathbf{X} , les éléments de volume correspondants dv et dV sont reliés par la relation (2.103). En utilisant ensuite (2.1) dans (3.31), on obtient

$$\int_{\Omega} (J(\mathbf{X}, t) \rho(\mathbf{X}, t)) - P_0(\mathbf{X}) dV = 0. \quad (3.32)$$

Si la *densité de masse actuelle* $P(\mathbf{X}, t)$ en description *matérielle* est définie par

$$P(\mathbf{X}, t) = \rho(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t), \quad (3.33)$$

l'intégrale (3.32) peut être écrite

$$\int_{\Omega} (J(\mathbf{X}, t)P(\mathbf{X}, t) - P_0(\mathbf{X})) dV = 0. \quad (3.34)$$

L'expression (3.34) est la *forme matérielle globale* du principe de conservation de la masse. Afin d'obtenir la forme *locale* du principe de conservation de la masse, nous exploitons le fait que (3.34) est valable pour une partie initiale Ω *arbitraire* de \mathcal{R}_0 , pour autant que l'intégrand de (3.34) soit *continu* par rapport à \mathbf{X} et on invoque le théorème de localisation.

Théorème de localisation

Soit f une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle continue définie sur un domaine ouvert \mathcal{D} d'un espace euclidien tridimensionnel. Si

$$\int_{\Omega} f dV = 0 \quad (3.35)$$

quel que soit le sous-domaine fermé Ω de \mathcal{D} , alors

$$f = 0 \quad (3.36)$$

en tout point de \mathcal{D} .

Par conséquent, l'intégrand de (3.34) doit être nul. On obtient

$$J(\mathbf{X}, t)P(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X}). \quad (3.37)$$

Cette égalité représente la *forme matérielle locale* du principe de conservation de la masse.

Le corps \mathcal{C} ou le matériau constituant \mathcal{C} est dit *incompressible* si sa masse volumique est invariable, c'est-à-dire qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps. Dès lors, $P(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X})$ et par conséquent

$$J(\mathbf{X}, t) = 1 \quad (3.38)$$

pour chaque point \mathbf{X} de \mathcal{R}_0 et à chaque instant t . Cette condition se présente fréquemment en mécanique des fluides et dans l'étude des matériaux solides caoutchouteux. Il découle de (3.37) et de (3.33) que la condition d'incompressibilité (3.38) est équivalente à

$$P(\mathbf{X}, t) = \rho(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) = P_0(\mathbf{X}). \quad (3.39)$$

Le mouvement pour lequel la relation (3.38) est vérifiée est isochore. C'est donc un mouvement pour lequel le volume du corps reste constant (cf. (3.7)).

3.3.2 Forme spatiale

Reprendons l'équation (3.31). La dérivée par rapport au temps donne, en utilisant le théorème du transport de Reynolds,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega} \left(\frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dv = 0. \quad (3.40)$$

Ceci est la *forme spatiale globale* du principe de conservation de la masse. En faisant l'hypothèse que l'intégrand de (3.40) est continu par rapport à \mathbf{x} , et en appliquant ensuite le théorème de localisation à (3.40), on obtient la *forme spatiale locale* du principe de conservation de la masse

$$\frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.41)$$

Cette équation est aussi appelée *équation de continuité*. Comme

$$\frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (3.42)$$

$$\operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (3.43)$$

l'expression (3.41) peut être écrite sous la forme équivalente

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (3.44)$$

L'équation (3.41) ou (3.44) est une équation de base de la mécanique des fluides alors que son homologue matérielle (3.37) est utilisée en mécanique des solides. Si le matériau est incompressible, d'après (3.39), la masse volumique $\rho(\mathbf{x}, t)$ est constante et $D\rho(\mathbf{x}, t)/Dt = 0$. Il découle ainsi de (3.41) que la *condition d'incompressibilité* peut être exprimée par une des formes équivalentes suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = d_{ii} = \operatorname{tr} \mathbf{d} = I_1(\mathbf{d}) = 0, \quad (3.45)$$

où l'on a utilisé la définition (2.180) du tenseur des taux de déformation \mathbf{d} . Notons que le champ de vitesse qui satisfait (3.45) est solénoïdal. Comme $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, il en résulte par (3.12) que $\dot{J} = 0$ et J reste constant au cours du temps. Puisque $J(\mathbf{X}, 0) = 1$, le mouvement du matériau incompressible est isochore.

Une autre manière de déduire l'équation de continuité consiste dans la démarche suivante : considérons à la figure 3.3 un fluide qui s'écoule à travers un élément de volume $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ à la vitesse $v_i(x_1, x_2, x_3)$.

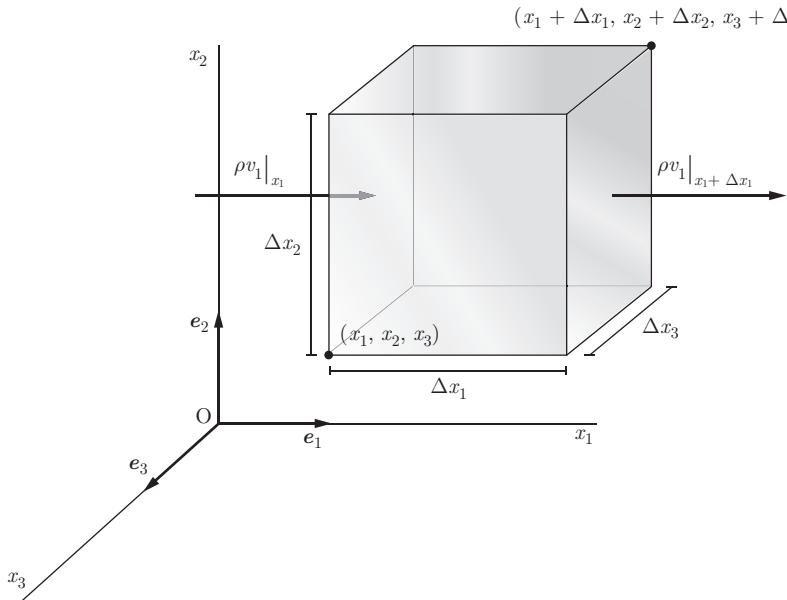


Fig. 3.3 Bilan de masse dans un volume élémentaire.

Si on suppose que l'écoulement est orienté principalement dans la direction positive de l'axe x_1 , la quantité de masse entrant dans le volume par la surface en x_1 est donnée par

$$\rho v_1|_{x_1} \Delta x_2 \Delta x_3. \quad (3.46)$$

La quantité de masse sortant du volume par la surface en $x_1 + \Delta x_1$ est donnée par

$$\rho v_1|_{x_1+\Delta x_1} \Delta x_2 \Delta x_3. \quad (3.47)$$

De manière analogue, les quantités de masse entrante et sortante dans les directions x_2 et x_3 sont données par

$$\begin{array}{lll} \text{selon } x_2 & \rho v_2|_{x_2} \Delta x_3 \Delta x_1 & \rho v_2|_{x_2+\Delta x_2} \Delta x_3 \Delta x_1 \\ \text{selon } x_3 & \rho v_3|_{x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 & \rho v_3|_{x_3+\Delta x_3} \Delta x_1 \Delta x_2. \end{array} \quad (3.48)$$

Le taux de changement de la masse dans l'élément de volume $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ est

$$(\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Le bilan pour l'écoulement dans le volume considéré est donné par

$$\left[\begin{array}{c} \text{taux de changement} \\ \text{de la masse} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{taux de} \\ \text{masse entrant} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{taux de} \\ \text{masse sortant} \end{array} \right].$$

L'équation de bilan s'écrit en utilisant les relations (3.46)-(3.49)

$$\begin{aligned} (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \left(\rho v_1|_{x_1} - \rho v_1|_{x_1 + \Delta x_1} \right) \Delta x_2 \Delta x_3 \\ &\quad + \left(\rho v_2|_{x_2} - \rho v_2|_{x_2 + \Delta x_2} \right) \Delta x_3 \Delta x_1 \\ &\quad + \left(\rho v_3|_{x_3} - \rho v_3|_{x_3 + \Delta x_3} \right) \Delta x_1 \Delta x_2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En divisant (3.50) par le volume $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ et en passant à la limite $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$, $\Delta x_3 \rightarrow 0$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\rho v_1|_{x_1} - \rho v_1|_{x_1 + \Delta x_1}}{\Delta x_1} + \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\rho v_2|_{x_2} - \rho v_2|_{x_2 + \Delta x_2}}{\Delta x_2} \\ &\quad + \lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{\rho v_3|_{x_3} - \rho v_3|_{x_3 + \Delta x_3}}{\Delta x_3} \\ &= - \left(\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'équation (3.51) peut également se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = -\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right). \quad (3.52)$$

Le membre de gauche de l'équation représente la dérivée matérielle de la masse volumique et le membre de droite la divergence du champ de vitesse

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.53)$$

On retrouve l'équation de continuité établie pour un volume de contrôle élémentaire.

3.4 Forces volumiques, forces de contact et postulat de Cauchy

Comme la masse, la **force** est un concept primitif en mécanique des milieux continus. Fondamentalement, les forces désignent les interactions entre les différentes parties intérieures d'un corps ou entre le corps et son environnement extérieur. Une force ne peut être perçue qu'au travers de ses effets ; en d'autres termes, elle ne peut pas être *directement* mesurée. Pour cette raison, la force est un des concepts les plus abstraits de la mécanique.

Pour nous en convaincre, nous citons un extrait de la lettre *LXXIV* d'Euler à une princesse d'Allemagne [21] : « Puisqu'un corps, en vertu de sa nature, conserve le même état tant de mouvement que de repos, et qu'il n'en sauroit être détourné que par des causes externes, il s'ensuit que pour qu'un corps change

d'état, il faut qu'il y soit forcé par quelque cause étrangère, et que sans cela il demeureroit toujours dans le même état. De là vient qu'on donne à cette cause externe le nom de *Force* : c'est un terme dont on se sert communément, quoique beaucoup de ceux qui l'emploient n'en aient qu'une idée fort imparfaite. »

Nous allons traiter deux types de forces : les **forces volumiques** (à distance) comme la pesanteur ou des forces électro-magnétiques comme la force de Lorenz et les **forces de contact**. Soit \mathcal{C} un corps de configuration initiale \mathcal{R}_0 et de configuration actuelle \mathcal{R} . La force volumique exercée sur \mathcal{C} au temps t représente l'action de son environnement extérieur sur les point *intérieurs* de \mathcal{C} à cet instant. Plus précisément, si Π est une partie arbitraire de \mathcal{C} dont les configurations initiale et actuelle sont Ω et ω (fig. 3.1), la force de volume agissant sur Π au temps t est donnée par

$$\mathbf{f}^b(\omega, t) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (3.54)$$

où $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ est une fonction vectorielle définie sur \mathcal{R} appelée **densité massique spatiale de force volumique** (par unité de masse) au temps t . La version matérielle de (3.54) prend la forme

$$\mathbf{F}^b(\Omega, t) = \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV, \quad (3.55)$$

où $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ est la **densité matérielle de force volumique** au temps t . Comme $\mathbf{f}^b(\omega, t)$ et $\mathbf{F}^b(\Omega, t)$ représentent la même quantité, nous devons avoir $\mathbf{f}^b(\omega, t) = \mathbf{F}^b(\Omega, t)$, c'est-à-dire

$$\int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv - \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV = 0. \quad (3.56)$$

En changeant d'abord les variables de \mathbf{x} à \mathbf{X} , en utilisant ensuite (3.33) et (3.37), et en appliquant finalement le théorème de localisation, on obtient la relation

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(\chi(\mathbf{X}, t), t). \quad (3.57)$$

Les forces de contact permettent de décrire l'interaction entre deux parties intérieures d'un corps \mathcal{C} séparées par une surface (c.-à-d. les forces internes de cohésion) ou l'action des corps extérieurs qui agissent directement (à très courte distance) sur la frontière de \mathcal{C} . Soient Π^- et Π^+ deux parties quelconques d'un corps \mathcal{C} telles que leurs configurations initiales $\Omega^- \subset \mathcal{R}_0$ et $\Omega^+ \subset \mathcal{R}_0$ soient séparées par une surface Γ_0 et leurs configurations actuelles $\omega^- \subset \mathcal{R}$ et $\omega^+ \subset \mathcal{R}$ par une surface Γ (fig. 3.4). En description spatiale, l'action de Π^+ sur Π^- à l'instant t au travers d'un élément de surface $\delta s(\mathbf{x})$ de Γ autour de \mathbf{x} est représentée par un élément de force de contact $\delta \mathbf{f}^c(\mathbf{x}, t, \Gamma)$. En écrivant ceci, nous faisons l'hypothèse tacite que l'action de Π^+ sur Π^- n'est influencée par la forme de ω^+ qu'au travers de la forme de sa frontière Γ avec ω^- . Nous faisons de plus l'hypothèse que la limite

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \Gamma) = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{f}^c(\mathbf{x}, t, \Gamma)}{\delta s(\mathbf{x})} \quad (3.58)$$

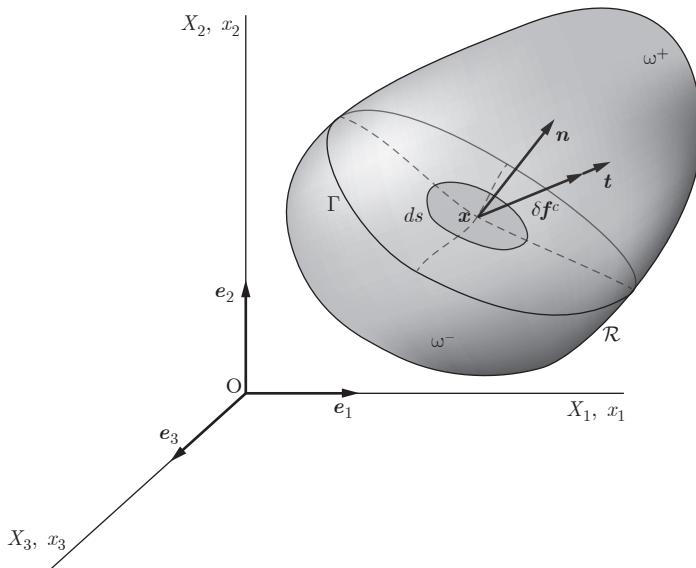


Fig. 3.4 Force de contact et vecteur contrainte de contact.

existe. Le vecteur $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \Gamma)$ est la force, par unité de surface (spatiale), exercée par Π^+ au travers de Γ sur Π^- . Cette densité des forces de contact est appelée le *vecteur contrainte spatiale (de contact)* ou *vecteur de traction surfacique*.

D'après (3.58), le vecteur contrainte \mathbf{t} en \mathbf{x} dépend de l'ensemble de la surface Γ sur laquelle \mathbf{x} se trouve. Cependant la mécanique des milieux continus classique admet l'hypothèse fondamentale suivante.

POSTULAT DE CAUCHY

Le vecteur contrainte \mathbf{t} en \mathbf{x} ne dépend de la surface Γ que par la normale unitaire sortante \mathbf{n} à Γ en \mathbf{x} , c'est-à-dire

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \Gamma) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (3.59)$$

Ce postulat stipule que, si trois surfaces différentes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 ont un même plan tangent en \mathbf{x} , les vecteurs contraintes agissant sur ces surfaces en \mathbf{x} sont identiques (fig. 3.5).

Finalement, l'action de Π^+ sur Π^- au travers de la surface Γ est décrite par le vecteur de force de contact

$$\mathbf{f}^c(\Gamma, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \quad (3.60)$$

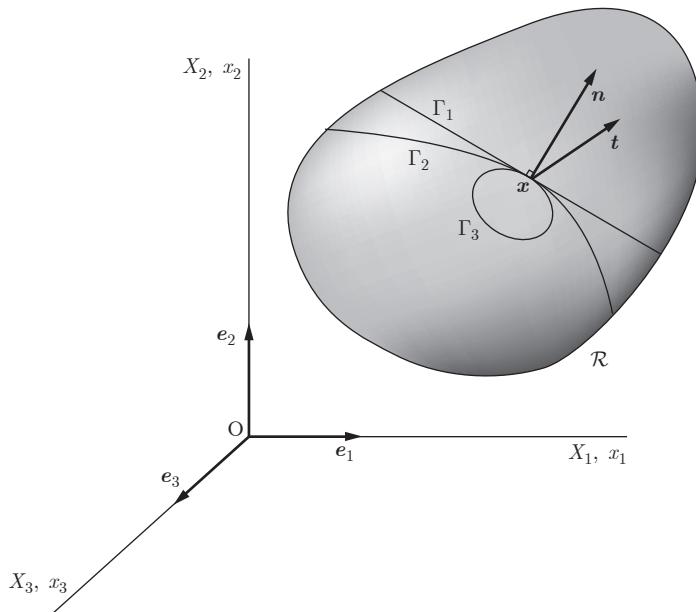


Fig. 3.5 Interprétation du postulat de Cauchy.

Par analogie, l'action de l'environnement extérieur sur un corps \mathcal{C} au travers de sa frontière $\partial\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathbf{f}^c(\partial\mathcal{R}, t) = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \quad (3.61)$$

Par la suite, la force de contact est exprimée par rapport à la configuration actuelle (ou déformée) \mathcal{R} . Cependant, dans un grand nombre de problèmes de grand intérêt, en particulier en mécanique des solides, la configuration actuelle n'est pas connue à l'avance. Ainsi convient-il mieux d'exprimer la force de contact par rapport à la configuration initiale (ou de référence) \mathcal{R}_0 . Les notions de vecteur *contrainte de contact nominale* et vecteur *contrainte de contact matérielle* peuvent alors être introduites. Toutefois, comme l'interprétation physique et géométrique de ces vecteurs est peu intuitive, nous présenterons ces notions plus en détail à la section 3.9.

3.5 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique

En physique, la *quantité de mouvement* d'une particule de masse m et de vitesse \mathbf{v} est définie par

$$\overline{\mathbf{m}} = m\mathbf{v} \quad \overline{m_i} = mv_i, \quad (3.62)$$

et son **moment cinétique** par rapport à l'origine 0 par

$$\widehat{\mathbf{m}} = m\mathbf{x} \times \mathbf{v} \quad \widehat{m}_i = m\varepsilon_{ijk}x_j v_k. \quad (3.63)$$

Pour une partie Π d'un corps \mathcal{C} dans les configurations initiale Ω et actuelle ω (fig. 3.2), on a les définitions suivantes de la quantité de mouvement et du moment cinétique par rapport à l'origine 0 :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{m}}(\omega, t) &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ \overline{m}_i(\omega, t) &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{m}}(\omega, t) &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ \widehat{m}_i(\omega, t) &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \varepsilon_{ijk} x_j v_k(\mathbf{x}, t) dv. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Les dérivées matérielles des grandeurs précédentes ont pour expression

$$\frac{D\overline{\mathbf{m}}(\omega, t)}{Dt} = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} dv = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\widehat{\mathbf{m}}(\omega, t)}{Dt} &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} dv \\ &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv. \end{aligned} \quad (3.67)$$

où \mathbf{a} est l'accélération spatiale définie par (2.33). En effet, le théorème du transport de Reynolds et l'équation de continuité (3.41) permettent d'écrire l'équation (3.64) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{m}_i(\omega, t)}{Dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho v_i dv = \int_{\omega} \left(\frac{D(\rho v_i)}{Dt} + \rho v_i \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) dv \\ &= \int_{\omega} \left(\frac{D\rho}{Dt} v_i + \rho \frac{Dv_i}{Dt} + \rho v_i \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) dv \\ &= \int_{\omega} \left(\rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) \right) dv \\ &= \int_{\omega} \rho a_i dv. \end{aligned}$$

L'égalité (3.66) est ainsi démontrée. D'une façon similaire, la relation (3.67) est prouvée en écrivant

$$\begin{aligned}
 & \frac{D\widehat{m}_i(\omega, t)}{Dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dv \\
 &= \int_{\omega} \left(\frac{D(\rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k)}{Dt} + \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) dv \\
 &= \int_{\omega} \left(\frac{D\rho}{Dt} \varepsilon_{ijk} x_j v_k + \rho \varepsilon_{ijk} \left(\frac{Dx_j}{Dt} v_k + x_j \frac{Dv_k}{Dt} + x_j v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) \right) dv \\
 &= \int_{\omega} \left(\rho \varepsilon_{ijk} x_j \frac{Dv_k}{Dt} + \rho \varepsilon_{ijk} v_j v_k + \varepsilon_{ijk} x_j v_k \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) \right) dv \\
 &= \int_{\omega} \rho \varepsilon_{ijk} x_j a_k dv,
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\varepsilon_{ijk} v_j v_k = 0$. Nous allons maintenant établir et formuler les deux principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus, connus sous le nom de *lois du mouvement d'Euler*.

PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Le taux de changement de la quantité de mouvement d'une partie quelconque Π d'un corps C au temps t est égal à la force résultante appliquée à Π à cet instant.

La force résultante est constituée de la résultante des forces volumiques agissant sur les particules de Π , et de la résultante des forces de contact agissant sur la frontière de Π . En description spatiale, cela équivaut à la somme $\mathbf{f}^b(\omega, t) + \mathbf{f}^c(\partial\omega, t)$. Par (3.54), (3.60) et (3.64), le principe de la conservation de la quantité de mouvement pour Π a la formulation *spatiale* suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \quad (3.68)$$

A l'aide de (3.66), nous pouvons écrire (3.68) comme

$$\int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \quad (3.69)$$

PRINCIPE DE CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE

Le taux de changement du moment cinétique (par rapport à l'origine) d'une partie quelconque de Π d'un corps C au temps t est égal au moment (par rapport à l'origine) des forces appliquées à Π à cet instant.

En description spatiale, cela équivaut à écrire

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \end{aligned} \quad (3.70)$$

En appliquant (3.67), (3.70) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Il faut relever que l'existence d'un observateur est implicitement supposée dans les énoncés des lois du mouvement d'Euler ou dans les expressions (3.68) et (3.70). Ceci implique que le principe de conservation de la quantité de mouvement et le principe de conservation du moment cinétique ne sont pas objectifs, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas invariants lors du passage d'un observateur à un autre. Ceci est dû au fait que la vitesse ou l'accélération ne sont pas des quantités objectives, comme cela a été montré au chapitre 2. Souvent, les observateurs pour lesquels (3.68) et (3.70) sont invariants sont qualifiés d'*inertiels* ou galiléens. Dans ce cas, le référentiel est en translation pure avec une vitesse uniforme \mathbf{c}_1 telle que $\mathbf{Q}(t) = \text{cste}$, et $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_0$, où \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_0 sont des constantes.

3.6 Théorème de Cauchy. Equation du mouvement pour un milieu continu

Nous allons maintenant déduire des conséquences de première importance des principes de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique. La première est un équivalent de la loi de Newton en mécanique du point.

LEMME DE CAUCHY

Si le vecteur contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ est continu par rapport à \mathbf{x} , alors le principe de la conservation de la quantité de mouvement (3.69) implique que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (3.72)$$

Ceci n'est rien d'autre que le principe de l'action et de la réaction.

DÉMONSTRATION.

Coupons la configuration actuelle ω d'une partie quelconque Π d'un corps \mathcal{C} en deux parties ω^- et ω^+ par une surface Γ dont la normale unitaire à Γ sortant

de ω^- est \mathbf{n} (fig. 3.6). La frontière de ω^- est composée de deux surfaces Γ et Γ^- , c'est-à-dire $\partial\omega^- = \Gamma \cup \Gamma^-$. De même, la frontière de ω^+ est $\partial\omega^+ = \Gamma \cup \Gamma^+$.

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement est valable pour ω^- et pour ω^+

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^-} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\omega^-} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega^-} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds \\ &= \int_{\omega^-} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\Gamma^-} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\omega^+} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\omega^+} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega^+} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds \\ &= \int_{\omega^+} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\Gamma^+} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) ds. \end{aligned} \quad (3.74)$$

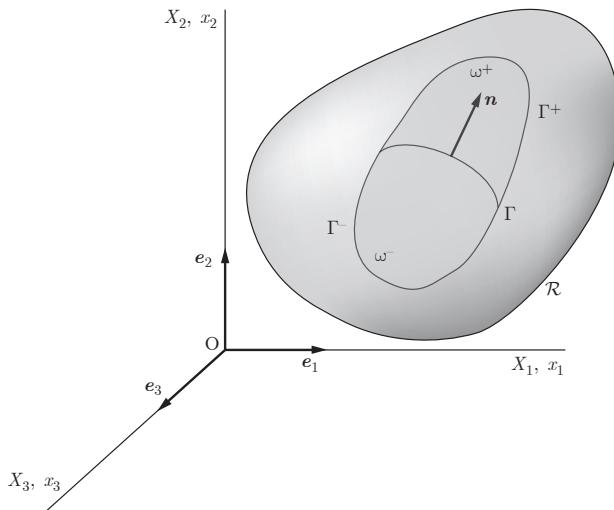


Fig. 3.6 Partition de ω en ω^+ et ω^- par une surface Γ .

Or l'équation (3.69) est valable avec $\omega = \omega^- \cup \omega^+$ et $\partial\omega = \Gamma^- \cup \Gamma^+$. En combinant (3.73) et (3.74) avec (3.69), nous obtenons

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})) ds = 0. \quad (3.75)$$

Comme $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ est continu en \mathbf{x} et que le choix de Γ est arbitraire, l'application du théorème de localisation à (3.75) donne (3.72). \square

Avec le lemme de Cauchy, nous sommes en mesure d'établir et de prouver un des résultats principaux de la mécanique des milieux continus.

Théorème de Cauchy (existence du tenseur des contraintes)

Si le vecteur des contraintes $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ est continu par rapport à \mathbf{x} , et si $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ et $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sont bornés, alors le principe de la conservation de la quantité de mouvement implique qu'il existe un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ tel que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad t_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j. \quad (3.76)$$

DÉMONSTRATION.

Considérons un tétraèdre ω_0 dont les trois faces S_i sont perpendiculaires aux vecteurs unitaires \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) et sont concourantes à la position actuelle \mathbf{x} d'une particule d'un corps \mathcal{C} (fig. 3.7). Soit la quatrième face S_4 , d'aire A et de normale unitaire *arbitraire* $\mathbf{n} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)^T$. Alors, un simple calcul montre que l'aire A_i de la face S_i de normale unitaire (externe) \mathbf{e}_i est donnée par

$$A_i = A \cos \alpha_i \quad \cos \alpha_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (3.77)$$

En notant h la distance de \mathbf{x} à S_4 , le volume du tétraèdre est

$$V = \frac{1}{3} h A. \quad (3.78)$$

Considérons un autre tétraèdre ω similaire au premier ω_0 (fig. 3.7). Le rapport de similitude pour chaque dimension linéaire dans ω et ω_0 est égal à $\lambda > 0$. Alors le volume de ω est

$$v = \frac{1}{3} \lambda^3 h A. \quad (3.79)$$

□

L'aire a de la face s_4 de ω avec \mathbf{n} comme normale unitaire externe est

$$a = \lambda^2 A, \quad (3.80)$$

et l'aire a_i de la face s_i de ω de normale unitaire externe \mathbf{e}_i a l'expression suivante :

$$a_i = \lambda^2 A \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda^2 A \cos \alpha_i. \quad (3.81)$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement (3.69), pour le tétraèdre ω donne

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} (\rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{a}(\mathbf{y}, t) - \rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{b}(\mathbf{y}, t)) dv \\ &= \int_{s_4} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}) ds + \sum_{i=1}^3 \int_{s_i} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, -\mathbf{e}_i) ds. \end{aligned} \quad (3.82)$$

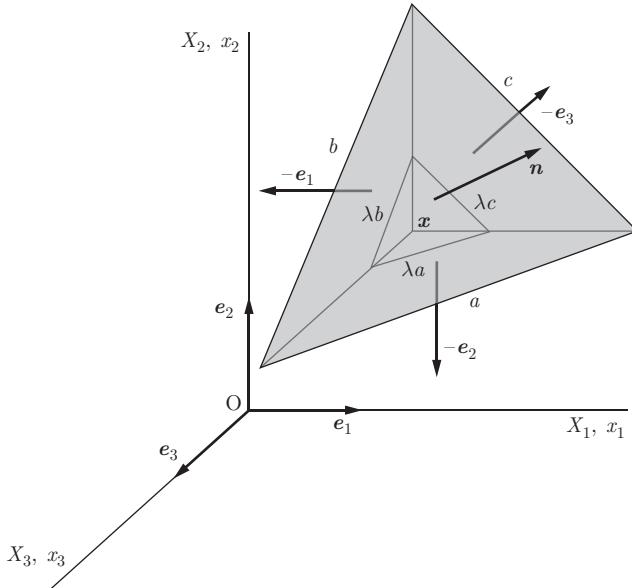


Fig. 3.7 Tétraèdre de Cauchy.

Puisque le vecteur contrainte \mathbf{t} est, par hypothèse, continu en \mathbf{y} , alors le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral implique qu'il existe $\bar{\mathbf{y}}_i \in s_i$ tel que

$$\int_{s_4} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}) ds = a t(\bar{\mathbf{y}}_4, t, \mathbf{n}) = \lambda^2 A \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_4, t, \mathbf{n}) \quad (3.83)$$

$$\int_{s_i} \mathbf{t}(\mathbf{y}, t, -\mathbf{e}_i) ds = a_i \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_i, t, -\mathbf{e}_i) = \lambda^2 A \cos \alpha_i \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_i, t, -\mathbf{e}_i). \quad (3.84)$$

Dans cette dernière relation, il n'y a pas sommation sur i .

De plus, comme $\rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{b}(\mathbf{y}, t)$ et $\rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{a}(\mathbf{y}, t)$ sont supposés continus et bornés, alors il existe une constante finie $M > 0$ telle que

$$\left\| \int_{\omega} (\rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{a}(\mathbf{y}, t) - \rho(\mathbf{y}, t)\mathbf{b}(\mathbf{y}, t)) dv \right\| \leq Mv = \frac{1}{3} M \lambda^3 h A. \quad (3.85)$$

En tenant compte de (3.83), (3.84) et (3.85) dans (3.82), nous pouvons écrire

$$0 \leq \left\| \lambda^2 A t(\bar{\mathbf{y}}_4, t, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^3 \lambda^2 A \cos \alpha_i \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_i, t, -\mathbf{e}_i) \right\| \leq \frac{1}{3} M \lambda^3 h A, \quad (3.86)$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \left\| \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_4, t, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \mathbf{t}(\bar{\mathbf{y}}_i, t, -\mathbf{e}_i) \right\| \leq \frac{1}{3} M \lambda h. \quad (3.87)$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, alors $\bar{\mathbf{y}}_i \rightarrow \mathbf{x}$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ et (3.87) devient

$$\left\| \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i) \right\| = 0. \quad (3.88)$$

En utilisant le lemme de Cauchy (3.72) et la seconde relation de (3.77), il découle de (3.88) que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i) = 0, \quad (3.89)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3). \quad (3.90)$$

La définition du produit tensoriel de deux vecteurs (1.48) nous permet d'écrire (3.90) sous la forme

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3) \mathbf{n}. \quad (3.91)$$

Par conséquent, l'existence du **tenseur de contrainte de Cauchy**

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3, \quad (3.92)$$

tel que (3.76) est valable, est ainsi démontrée. Une contrainte étant une force par unité de surface, elle s'exprimera en Pascal (Pa) dans le système international des unités.

Le théorème de Cauchy exprime la dépendance *linéaire* de $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ par rapport à la normale unitaire. Ainsi, lorsque le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ est connu, le vecteur contrainte agissant en \mathbf{x} sur toute surface de normale unitaire extérieure \mathbf{n} est complètement déterminé. Par conséquent, l'*état de contrainte* en \mathbf{x} (à l'instant t) est caractérisé par le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$. Même si les propriétés principales du tenseur des contraintes seront étudiées plus loin, il est utile de donner une interprétation géométrique de ses composantes σ_{ij} afin de mieux cerner $\boldsymbol{\sigma}$.

Les composantes σ_{ij} de la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ relative à la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont obtenues par

$$\sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{e}_j} \quad \mathbf{t}_{\mathbf{e}_j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_j. \quad (3.93)$$

Cette relation montre que σ_{ij} est la composante du vecteur contrainte $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_j}$ dans la direction i agissant sur un élément de surface spatiale dont la normale unitaire est dirigée dans la direction \mathbf{e}_j (fig. 3.8).

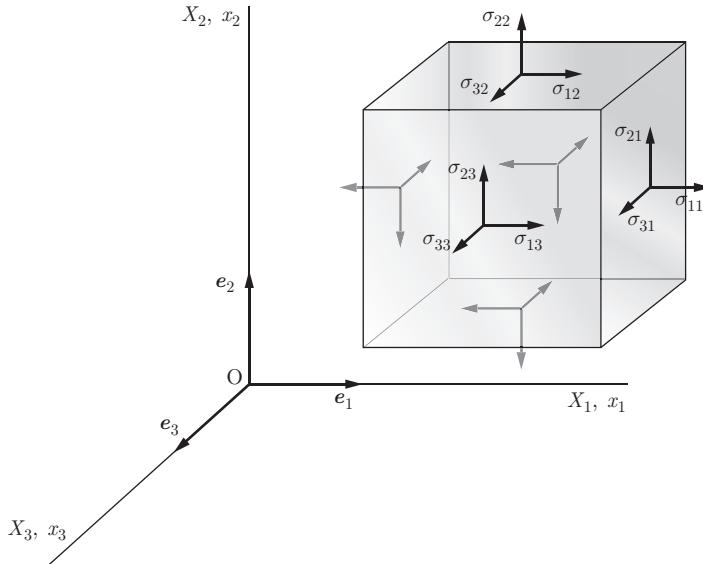


Fig. 3.8 Composantes matricielles du tenseur des contraintes de Cauchy σ .

Par exemple, σ_{11} est la composante dans la direction 1 du vecteur contrainte agissant sur un élément de surface de normale unitaire e_1 , et σ_{12} est la composante dans la direction 1 du vecteur contrainte agissant sur un élément de surface de normale unitaire e_2 . La composante normale de t_{e_j} , c'est-à-dire

$$\sigma_{jj} = e_j \cdot t_{e_j} = e_j \cdot \sigma e_j \quad (\text{sans sommation sur } j), \quad (3.94)$$

est appelée **contrainte normale**. Elle correspond à une *traction* si elle est positive ou à une *compression* si elle est négative. Les composantes tangentielles de t_{e_j} , c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = e_i \cdot t_{e_j} = e_i \cdot \sigma e_j \quad \text{avec} \quad e_i \cdot e_j = 0, \quad (3.95)$$

sont appelées **contraintes de cisaillement**. Par exemple, σ_{11} est une contrainte normale et σ_{12} est une contrainte de cisaillement.

Nous allons maintenant utiliser le théorème de Cauchy et le théorème de la divergence pour établir les équations du mouvement pour un milieu continu à partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Théorème

Supposons que le tenseur des contraintes $\sigma(\mathbf{x}, t)$ est continûment différentiable par rapport à \mathbf{x} , et que $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ et $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sont continus en \mathbf{x} . Alors, le principe de la conservation de la quantité de mouvement, c'est-à-dire (3.69), est satisfait si et seulement si, pour un point quelconque

\boldsymbol{x} de \mathcal{R} ,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) + \rho(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{b}(\boldsymbol{x}, t) = \rho(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i. \quad (3.96)$$

DÉMONSTRATION.

Nécessité. En introduisant (3.76) dans (3.69), on obtient

$$\int_{\omega} \rho(\boldsymbol{x}, t)a_i(\boldsymbol{x}, t) dv = \int_{\omega} \rho(\boldsymbol{x}, t)b_i(\boldsymbol{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)n_j ds. \quad (3.97)$$

En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme, on peut écrire cette expression

$$\int_{\omega} (\rho(\boldsymbol{x}, t)a_i(\boldsymbol{x}, t) - \rho(\boldsymbol{x}, t)b_i(\boldsymbol{x}, t) - \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{x}, t)) dv = 0. \quad (3.98)$$

Comme l'intégrand est continu en \boldsymbol{x} , (3.96) découle du théorème de localisation.

Suffisance. Supposons que (3.96) est valable pour tout point intérieur de \mathcal{R} . Alors, pour un domaine arbitraire ω de \mathcal{R} ,

$$\int_{\omega} (\rho(\boldsymbol{x}, t)a_i(\boldsymbol{x}, t) - \rho(\boldsymbol{x}, t)b_i(\boldsymbol{x}, t) - \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{x}, t)) dv = 0. \quad (3.99)$$

En appliquant le théorème de Cauchy et le théorème de divergence à cette dernière équation, nous concluons que (3.68) est vérifié. \square

L'équation (3.96), due à Cauchy, est appelée **équation du mouvement de Cauchy**. Lorsqu'il n'y a pas d'accélération, elle est aussi appelée **équation d'équilibre**. Comme nous le constaterons, l'équation (3.96) est l'une des équations les plus utilisées en mécanique des milieux continus.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE

Théorème (Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy)

Supposons que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$ est continûment différentiable par rapport à \boldsymbol{x} , et que $\rho(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{b}(\boldsymbol{x}, t)$ et $\rho(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, t)$ sont continus en \boldsymbol{x} . Alors le principe de la conservation du moment cinétique (3.71) implique la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.100)$$

DÉMONSTRATION.

Compte tenu de (3.76) dans (3.71), il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \varepsilon_{ijk} x_j a_k(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \varepsilon_{ijk} x_j b_k(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{km}(\mathbf{x}, t) n_m ds. \end{aligned} \quad (3.101)$$

En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme et par le fait que $x_{j,m} = \delta_{jm}$ (éq. (1.27)), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\omega} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{km}(\mathbf{x}, t) n_m ds \\ &= \int_{\omega} \varepsilon_{ijk} (x_{j,m} \sigma_{km}(\mathbf{x}, t) + x_j \sigma_{km,m}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\omega} \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj}(\mathbf{x}, t) + x_j \sigma_{km,m}(\mathbf{x}, t)) dv. \end{aligned} \quad (3.102)$$

La substitution de (3.102) dans (3.101) donne

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \varepsilon_{ijk} x_j (\rho(\mathbf{x}, t) a_k(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) b_k(\mathbf{x}, t) - \sigma_{km,m}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\omega} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}(\mathbf{x}, t) dv. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Par (3.96), le membre gauche de cette expression est égal à zéro. Ainsi (3.103) est réduit à

$$\int_{\omega} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}(\mathbf{x}, t) dv = 0. \quad (3.104)$$

Le théorème de localisation conduit à

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) = 0. \quad (3.105)$$

Ceci implique que $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, c'est-à-dire (3.100). L'équation (3.100) signifie que

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}. \quad (3.106)$$

Par conséquent, parmi les 9 composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (fig. 3.8), 6 sont indépendantes. De plus, dû à sa symétrie, $\boldsymbol{\sigma}$ possède un grand nombre de propriétés qui peuvent être obtenues en appliquant directement les résultats de l'algèbre linéaire relatifs aux tenseurs symétriques. En particulier, le théorème de décomposition spectrale pour un tenseur symétrique permet une plus grande connaissance de $\boldsymbol{\sigma}$. Finalement, on peut relever que la symétrie du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ garantit à elle seule le respect du principe de la conservation du moment cinétique. La démonstration de cette affirmation est faite simplement en inversant la démarche du théorème précédent. Ainsi, les deux lois du mouvement d'Euler sont vérifiées si le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique et qu'il satisfait l'équation (3.96). \square

3.7 Propriétés du tenseur de contrainte de Cauchy

Nous allons maintenant étudier les principales propriétés de $\sigma(\mathbf{x}, t)$, à partir de (3.76) et de (3.100). Afin de simplifier les notations durant cette étude, la dépendance de σ par rapport à \mathbf{x} et à t ne sera pas considérée, car les propriétés de σ restent valables indépendamment des valeurs de \mathbf{x} et de t . Le vecteur contrainte est donné par le théorème de Cauchy exprimé par la relation (3.76)

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (3.107)$$

De manière générale, \mathbf{t} n'agit pas dans la direction de la normale unitaire \mathbf{n} à laquelle il est associé. Donc, \mathbf{t} a non seulement une *composante normale*

$$t_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \sigma \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad t_N = n_i t_i = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (3.108)$$

mais aussi une *composante tangentielle* (de cisaillement)

$$t_T = \|\mathbf{t} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})\mathbf{n}\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{t}\| = (t_i t_i - t_N^2)^{1/2}. \quad (3.109)$$

Cependant, il peut arriver que \mathbf{t} agisse uniquement dans la direction de \mathbf{n} . Cette possibilité conduit à étudier le problème aux valeurs propres suivant :

$$\sigma \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} n_j = \lambda n_i. \quad (3.110)$$

L'algèbre linéaire (§ 1.3.8) permet d'affirmer que l'équation caractéristique associée à (3.110)

$$\det(\sigma - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (3.111)$$

possède trois racines réelles σ_i ($i = 1, 2, 3$) car le tenseur σ est symétrique. Ces racines sont les valeurs principales de σ qui, en mécanique, sont appelées **contraintes principales**. Dans le cas général, σ possède trois contraintes principales distinctes σ_1, σ_2 et σ_3 , qui sont habituellement ordonnées de façon à ce que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Les axes dirigés le long des vecteurs propres \mathbf{n}_i associés aux σ_i sont appelés **axes principaux de contrainte** et les plans normaux à ces axes sont appelés **plans principaux**. En résumé, une contrainte principale est la contrainte normale qui agit sur un plan principal où aucune contrainte de cisaillement n'existe.

Par ailleurs, en algèbre linéaire, il est démontré que les vecteurs principaux correspondant aux valeurs principales distinctes d'un tenseur symétrique σ sont mutuellement orthogonaux. Ceci signifie que deux axes ou plans principaux associés à deux contraintes distinctes sont perpendiculaires. Cette propriété est utilisée pour la décomposition spectrale de σ

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \sigma_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \quad (3.112)$$

où $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, 3$. En d'autres termes, relativement à la base $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ constituée des vecteurs propres orthonormaux \mathbf{n}_i , la matrice σ_{ij} du tenseur de contrainte de Cauchy est diagonale :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

L'état de contrainte d'une particule d'un corps \mathcal{C} est dit *tridimensionnel* si σ_1 , σ_2 et σ_3 sont toutes les trois non nulles, *bidimensionnel* ou plan si deux des contraintes σ_1 , σ_2 ou σ_3 sont non nulles, et *unidimensionnel* si seulement l'une des contraintes σ_1 , σ_2 et σ_3 est non nulle.

Si l'équation (3.111) est développée, elle devient (éq. (1.120))

$$\lambda^3 - I_1(\sigma)\lambda^2 + I_2(\sigma)\lambda - I_3(\sigma) = 0, \quad (3.114)$$

où

$$I_1(\sigma) = \text{tr } \sigma = \sigma_{ii} \quad (3.115)$$

$$I_2(\sigma) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \sigma)^2 - \text{tr } \sigma^2) = \frac{1}{2} ((\sigma_{ii})^2 - \sigma_{mn}\sigma_{nm}) \quad (3.116)$$

$$I_3(\sigma) = \det \sigma = \varepsilon_{ijk}\sigma_{i1}\sigma_{j2}\sigma_{k3}, \quad (3.117)$$

sont les *invariants principaux* de σ . Comme nous le verrons, ces invariants jouent un rôle prépondérant dans la formulation des équations constitutives des matériaux isotropes. A l'aide de (3.113), ils peuvent être exprimés en fonction des contraintes principales

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Notons que la permutation des indices 1, 2, et 3 ne change pas $I_1(\sigma)$, $I_2(\sigma)$ et $I_3(\sigma)$.

Rappel de la définition des invariants

Dans la formule (3.93), les composantes σ_{ij} de la matrice de σ sont définies relativement à la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ par

$$\sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \sigma \mathbf{e}_j. \quad (3.119)$$

Considérons une autre base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ obtenue par rotation de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}'_i = c_{ij}\mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.120)$$

où c_{ij} est donné par la relation (1.6). Alors les composantes de σ' , relatives à la base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ sont reliées à σ_{ij} par

$$\sigma'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \sigma \mathbf{e}'_j = c_{im}c_{jn}\mathbf{e}_m \cdot \sigma \mathbf{e}_n = c_{im}c_{jn}\sigma_{mn}. \quad (3.121)$$

L'expression (3.121) est *la règle de transformation pour les matrices de contraintes de Cauchy*. En fait, les scalaires donnés par (3.118) sont dits invariants au sens où

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \sigma'_{ii} \\ (\sigma_{ii})^2 - \sigma_{mn}\sigma_{mn} &= (\sigma'_{ii})^2 - \sigma'_{mn}\sigma'_{mn} \\ \varepsilon_{ijk}\sigma_{i1}\sigma_{j2}\sigma_{k3} &= \varepsilon_{ijk}\sigma'_{i1}\sigma'_{j2}\sigma'_{k3}.\end{aligned}$$

Il est souvent utile de décomposer $\boldsymbol{\sigma}$ de la manière suivante (éq. (1.90) et (1.91))

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_0 \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad (3.122)$$

où

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}. \quad (3.123)$$

Le tenseur \mathbf{s} défini ainsi est appelé **tenseur déviateur des contraintes** associé à $\boldsymbol{\sigma}$. Par construction, $\text{tr } \mathbf{s} = s_{ii} = 0$. En d'autres termes, si la partie déviatrice de $\boldsymbol{\sigma}$ est nulle, alors $\boldsymbol{\sigma}$ est de la forme $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ avec $\sigma_0 = -p$. Dans ce cas, il s'agit d'un **état de contrainte hydrostatique pure**, et p est une *pression hydrostatique*. Le signe négatif vient du fait qu'en mécanique des fluides, par convention, la pression est positive.

EXEMPLE 3.1

Soit le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ dont les éléments sont donnés par (1.122), donnant l'état de contrainte d'un milieu continu (en unités arbitraires). Ainsi, le problème aux valeurs propres résolu dans cet exemple n'est autre que celui de trouver les contraintes principales et les directions principales. En utilisant ce même état de contrainte, trouver le vecteur de contrainte sur le plan défini par le vecteur normal unitaire $\mathbf{n} = 2/3\mathbf{e}_1 + 2/3\mathbf{e}_2 - 1/3\mathbf{e}_3$.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

Pour trouver les composantes du vecteur contrainte sur le plan prescrit, on utilise le théorème de Cauchy (3.76)

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Les composantes de contrainte normale et de cisaillement sur ce plan sont données par (3.108) et (3.109), respectivement. Leurs valeurs sont

$$t_N = n_i t_i = 5,55 \quad \text{et} \quad t_T = (t_i t_i - t_N^2)^{1/2} = 4,56.$$

Considérons maintenant un système de coordonnées défini par les directions principales. Par rapport à ce système, nous définissons un plan avec un vecteur normal donné par $\mathbf{m} = 1/\sqrt{3}\mathbf{n}_1 + 1/\sqrt{3}\mathbf{n}_2 + 1/\sqrt{3}\mathbf{n}_3$. En utilisant (3.76) le vecteur de contrainte sur ce plan est

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,65 & 0 \\ 0 & 0 & -3,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1,65 \\ -3,65 \end{pmatrix}$$

Les composantes normale et de cisaillement sont

$$t_N = n_i t_i = 1,33 \quad \text{et} \quad t_T = (t_i t_i - t_N^2)^{1/2} = 3,94.$$

Le plan défini par le vecteur unitaire ci-dessus est appelé plan octaédrique et les contraintes associées les contraintes octaédriques normales et de cisaillement ou contraintes de comparaison. Sur ce plan particulier, on peut montrer que

$$\begin{aligned} t_N &= I_1(\boldsymbol{\sigma})/3 \\ t_T &= \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2(\boldsymbol{\sigma}) - 6I_2(\boldsymbol{\sigma})}. \end{aligned}$$

La démonstration de ces expressions est laissée en exercice au lecteur. La composante de cisaillement peut en outre s'exprimer en termes de contraintes principales ou du deuxième invariant $I_2(\mathbf{s})$ du tenseur déviateur des contraintes \mathbf{s} (3.123)

$$t_T = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3} I_2(\mathbf{s})}.$$

Notons qu'une contrainte équivalente σ_e ou contrainte de von Mises, proportionnelle à t_T ,

$$\sigma_e = \left[\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{3} I_2(\mathbf{s})}$$

est utilisée fréquemment en mécanique des matériaux comme déformation plastique ou rupture des matériaux.

3.8 Etats de contrainte simplifiés

Comme cela a été mentionné, les équations d'équilibre pour un milieu continu correspondent à l'équation (3.96) sans accélération

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0\end{aligned}\quad (3.125)$$

ou

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0. \quad (3.126)$$

Souvent, la force de volume est notée comme $f_i = \rho b_i$.

EXEMPLE 3.2

Soit l'état de contrainte d'un corps donné par les expressions suivantes

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 10x_1^3 + x_2^2, & \sigma_{12} &= 2x_3 \\ \sigma_{22} &= 20x_1^3 + 100, & \sigma_{13} &= x_2^3 \\ \sigma_{33} &= 30x_2^2 + 10x_3^2, & \sigma_{23} &= 52x_1^3.\end{aligned}$$

On demande de trouver les forces de volume telles que l'équilibre statique soit vérifié.

Les équations de l'équilibre statique sont données par (3.125). Avec les composantes de la contrainte données, ces équations donnent

$$\begin{aligned}30x_1^3 + \rho b_1 &= 0 \\ 0 + \rho b_2 &= 0 \\ 20x_3 + \rho b_3 &= 0.\end{aligned}$$

Donc les forces de volume qui assurent l'équilibre sont données par le vecteur $(-30x_1^3, 0, -20x_3)$. Les équations (3.125) peuvent être simplifiées si l'on suppose les forces volumiques négligeables. Ces trois équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les 6 composantes σ_{ij} de $\boldsymbol{\sigma}$, mais elles doivent être vérifiées pour tout corps en l'absence d'accélération. Une simple inspection révèle que, si chaque composante de $\boldsymbol{\sigma}$ est indépendante de \boldsymbol{x} , les trois équations de (3.125) sans forces volumiques sont identiquement vérifiées. Un état de contrainte est dit **homogène** si $\boldsymbol{\sigma}$ est indépendant de \boldsymbol{x} . De tels états de contrainte sont importants, non seulement parce qu'un grand nombre d'essais d'identification statiques ou quasi statiques en mécanique des milieux continus sont basés sur eux, mais aussi parce qu'une bonne compréhension de ces états est nécessaire pour traiter des états de contrainte plus compliqués.

Traction ou compression uniforme

On supposera que cette traction ou compression s'exerce dans la direction 1. Le tenseur σ est donné par

$$\sigma = \sigma \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.127)$$

où σ est constant. Ce tenseur caractérise l'état de contrainte dans une barre cylindrique droite parallèle à \mathbf{e}_1 , sans force sur sa surface latérale et avec des contraintes normales, uniformément appliquées sur les deux bases. La barre est dite en **traction** si $\sigma > 0$ et en **compression** si $\sigma < 0$. Les axes principaux de contrainte sont ceux qui sont parallèles à \mathbf{e}_1 et tous ceux qui sont normaux à \mathbf{e}_1 . De façon plus générale que (3.127), la traction ou compression uniforme dans la direction définie par un vecteur unitaire \mathbf{m} a pour expression

$$\sigma = \sigma (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sigma m_i m_j \quad (3.128)$$

avec σ constant.

Contrainte uniforme de cisaillement

Celle-ci s'effectue dans la direction 1 sur des plans perpendiculaires à \mathbf{e}_2 . Le tenseur σ est donné par

$$\sigma = \tau (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.129)$$

où $\tau \geq 0$ est constant. Cet état de contrainte peut se présenter dans un écoulement laminaire d'un fluide visqueux dont la direction est parallèle à \mathbf{e}_1 mais sur une surface perpendiculaire à \mathbf{e}_2 . L'équation caractéristique (3.114) pour cet état de contrainte prend la forme

$$\lambda(\lambda^2 - \tau^2) = 0. \quad (3.130)$$

Par conséquent, les contraintes principales sont $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = -\tau$ et les directions principales correspondantes sont $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{n}_3 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$. En résumé, la décomposition spectrale (3.112) pour une contrainte de cisaillement est

$$\sigma = \tau (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{2} - \tau (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \otimes \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{2}. \quad (3.131)$$

Pression hydrostatique

Nous avons vu que le tenseur des contraintes correspondant a la forme

$$\sigma = -p(\mathbf{x}) \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = -p(\mathbf{x}) \delta_{ij}, \quad (3.132)$$

et l'équation d'équilibre (3.125) est réduite à

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{ou} \quad -p_{,i} + \rho b_i = 0. \quad (3.133)$$

Flexion pure

On suppose qu'il n'y a pas de forces volumiques et que σ est donné par

$$\sigma = \alpha(x_2 - h_0)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad \text{ou} \quad [\sigma] = \begin{pmatrix} \alpha(x_2 - h_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.134)$$

où α et h_0 sont constants. Les trois équations de (3.125) sont immédiatement satisfaites par (3.134). Le tenseur σ donne une approximation du champ de contraintes telles qu'elles apparaissent dans une poutre prismatique parallèle à \mathbf{e}_1 , soumise à deux couples appliqués à ses extrémités et agissant sur des axes le long de \mathbf{e}_3 .

Contrainte plane

Dans ce cas,

$$\sigma = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (3.135)$$

ou

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.136)$$

où σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont uniquement fonction de x_1 et de x_2 . Alors, en l'absence de forces de volume les équations (3.125) se simplifient en

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (3.137)$$

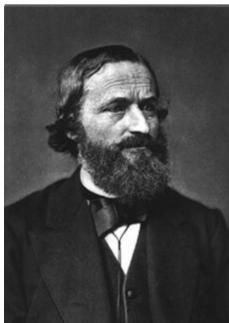
Le champ de contrainte (3.136) peut être utilisé pour approcher les contraintes présentes dans une plaque mince, parallèle au plan normal à \mathbf{e}_3 , et soumise à des forces parallèles au plan. Ceci inclut la flexion pure comme un cas particulier.

3.9 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff

3.9.1 Considérations générales

Jusqu'à présent, la force de contact a été exprimée par unité d'aire ou de surface de la configuration actuelle (ou déformée) \mathcal{R} . Donc, le tenseur des contraintes de Cauchy est exprimé en fonction de sa valeur actuelle agissant sur la surface courante. C'est la raison pour laquelle on l'appelle la contrainte vraie. Par conséquent, le principe de la conservation de la quantité de mouvement et celui de la conservation du moment cinétique ont été formulés seulement par rapport à la configuration actuelle. Comme mentionné à la fin de la section 3.4, la résolution de problèmes en relation avec des solides requiert une formulation par rapport à la configuration initiale ou de référence \mathcal{R}_0 . Ce n'est pas seulement parce qu'il est difficile de connaître a priori la configuration déformée du solide,

mais aussi parce qu'il est plus commode d'analyser sa réponse expérimentalement par rapport à la configuration non déformée. Par conséquent, des mesures de contraintes définies par rapport à la configuration non déformée ont été proposées. Deux pareilles mesures bien connues dans l'étude des solides sont les tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff. Le point de départ pour définir ces tenseurs est d'exprimer la force de contact agissant *effectivement* sur une surface dans la configuration actuelle par un vecteur de contrainte *artificiellement* appliqué à la surface correspondante dans la configuration initiale. Une telle définition du vecteur de contrainte nous permet de reformuler les principes de la section 3.5 et d'en tirer des conclusions similaires à celles de la section 3.6.



Gustav Kirchhoff (1824-1887) est né à Königsberg. Il enseigna successivement à l'Université de Breslau, d'Heidelberg et enfin, à l'Université Humboldt à Berlin. Ses contributions sont importantes en spectroscopie, en théorie du corps noir et en élasticité. Il a repris la description lagrangienne du tenseur des contraintes que Gabrio Piola (1794-1850) avait introduite auparavant.

Fig. 3.9 Gustav Kirchhoff.

3.9.2 Premier et second tenseurs de Piola-Kirchhoff

Soit $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ le vecteur contrainte de Cauchy en \mathbf{x} agissant sur un élément de surface déformée $\mathbf{n} ds$ (fig. 3.10). Le *premier vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff* $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$ appliqué en \mathbf{X} et agissant sur l'élément de surface de référence $\mathbf{N} dS$ associé à $\mathbf{n} ds$ est défini par

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}(\mathbf{X})) dS = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) ds. \quad (3.138)$$

Comme dS et ds sont tous deux des scalaires positifs, (3.138) implique que \mathbf{T} et \mathbf{t} ont *la même direction*. Cependant, le vecteur de contrainte \mathbf{T} ne représente pas l'intensité actuelle ; il est souvent appelé le vecteur de pseudo-contrainte. Il agit sur la configuration présente et est une fonction de \mathbf{X} et de la normale \mathbf{N} en dS dans la configuration initiale. La relation (3.138) fournit la force élémentaire appliquée à la configuration présente.

De plus, dS et ds étant généralement différents, $\|\mathbf{T}\|$ et $\|\mathbf{t}\|$ le sont généralement aussi.

En introduisant le théorème de Cauchy (3.76) dans (3.138) et en utilisant ensuite la formule de Nanson (2.107), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) dS &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds \\ &= J(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\sigma}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS. \end{aligned} \quad (3.139)$$

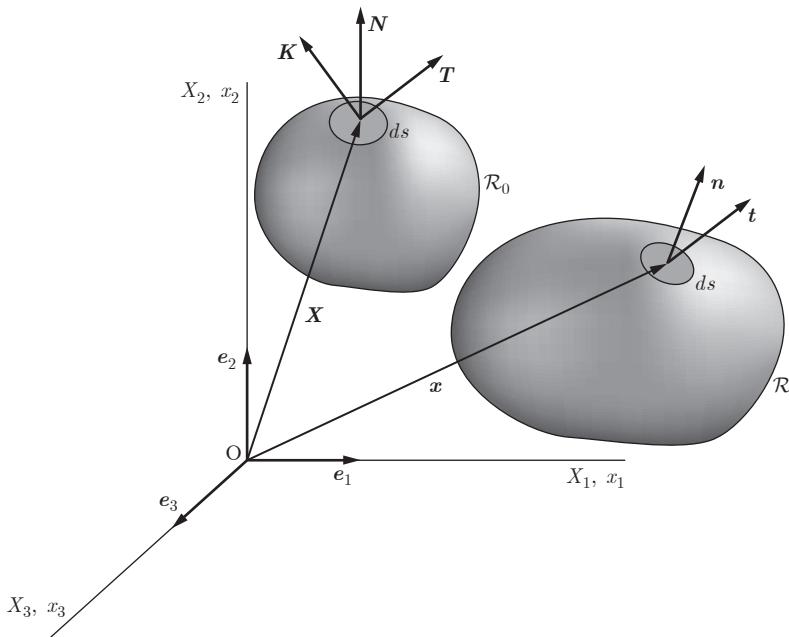


Fig. 3.10 Relations entre le vecteur de contrainte de Cauchy \mathbf{t} et les premier et second vecteurs de contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{T} et \mathbf{K} .

Comme $dS > 0$, on en déduit que

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}, \quad (3.140)$$

où

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\sigma}(\chi(\mathbf{X}, t), t)\mathbf{F}^{-T} \quad (3.141)$$

est le *premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff*. L'équation (3.140) n'est rien d'autre qu'un équivalent du théorème de Cauchy (3.76). Ce résultat peut être déduit directement du principe de la conservation de la quantité de mouvement et est écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X})\mathbf{a}(\chi(\mathbf{X}, t), t) dV \\ &= \int_{\Omega} P_0(\mathbf{X})\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) dS, \end{aligned} \quad (3.142)$$

où $P_0(\mathbf{X})$ est la densité de masse initiale définie par (3.28) et $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ la densité de force volumique définie par (3.55).

En substituant (3.140) dans (3.142) et en faisant appel aux mêmes arguments utilisés pour la démonstration de (3.96), on peut déduire l'*équation du mouvement* pour un milieu continu

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + P_0(\mathbf{X})\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X})\mathbf{a}(\chi(\mathbf{X}, t), t). \quad (3.143)$$

Notons que la dérivation est effectuée ici par rapport à la variable matérielle \mathbf{X} . Examinons les propriétés du tenseur \mathbf{P} . En utilisant (3.100) et (3.141), on montre facilement que

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T. \quad (3.144)$$

Donc, par manque de symétrie, \mathbf{P} ne possède pas les propriétés du tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ présentées dans la section 3.7 et le principe de la conservation du moment cinétique est satisfait si et seulement si \mathbf{P} vérifie la condition (3.144).

Considérons maintenant la relation de Cauchy (3.76) vue par deux observateurs R et R^* . En supposant que les vecteurs \mathbf{t} et \mathbf{n} sont objectifs, en l'occurrence qu'ils se transforment suivant (2.195), on peut raisonner comme suit. A partir de $\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n}^*$ et l'objectivité de \mathbf{t}^* et \mathbf{n}^* , on peut écrire

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{Q}\mathbf{n}. \quad (3.145)$$

D'autre part, à partir de (3.76), on a

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}. \quad (3.146)$$

En comparant les deux dernières équations, on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T. \quad (3.147)$$

Donc, le tenseur des contraintes de Cauchy est objectif. Examinons maintenant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} . A cette fin, nous écrivons (3.141) pour l'observateur R^* comme

$$\mathbf{P}^*\mathbf{F}^{*T} = J^*\boldsymbol{\sigma}^*. \quad (3.148)$$

En utilisant (2.205), (2.206), (3.141) et (3.147) dans (3.148), on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(\mathbf{Q}\mathbf{F})^T &= J\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{P}^*\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{P}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Donc, le tenseur \mathbf{P} n'est pas objectif lors d'un changement d'observateur.

Bien que le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} convienne pour des problèmes en mécanique des solides, il n'est pas symétrique et il n'est pas objectif lors d'un changement d'observateur. Pour éviter cet inconvénient dans la formulation des lois constitutives de matériaux solides soumis à de grandes déformations, on utilise souvent le *second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff* \mathbf{S} qui est objectif. Ce tenseur peut être introduit de la façon suivante.

Premièrement, le *second vecteur de contrainte de Piola-Kirchhoff* \mathbf{K} appliqué en \mathbf{X} et agissant sur l'élément de surface de référence NdS est défini par

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) dS = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t) \mathbf{t}(\chi(\mathbf{X}, t), t, \mathbf{n}(\mathbf{X}, t)) ds. \quad (3.150)$$

Ainsi, d'après la définition, \mathbf{K} exprime la force de contact par unité d'aire de référence « transformée » par \mathbf{F}^{-1} . (Physiquement parlant, un tel vecteur de contrainte n'est pas naturel.) Alors, par les mêmes arguments utilisés pour déduire (3.140) et (3.141), ce vecteur s'écrit

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} \quad (3.151)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) &= J(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\sigma}(\chi(\mathbf{X}, t), t)\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (3.152)$$

Comme $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique, il est facile de montrer que \mathbf{S} l'est aussi. Cependant, au contraire de $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{S} n'a pas d'interprétation physique significative. L'équation du mouvement pour un milieu continu peut aussi être exprimée en fonction de \mathbf{S} ; on remarque que $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$ et il suffit alors de substituer cette expression dans (3.143). D'un autre côté, lorsque \mathbf{S} est employé, le principe de la conservation du moment cinétique est automatiquement vérifié grâce à la symétrie de \mathbf{S} .

3.9.3 Linéarisation des tenseurs de contraintes

Examinons les effets de la linéarisation cinématique introduite à la section 2.9 sur les tenseurs de contraintes. Le tenseur de Piola-Kirchhoff calculé par (3.144) s'écrit en notation indicelle

$$P_{mk} = F_{mi}(P_{ij})^T(F_{jk})^{-T} = F_{mi}P_{ji}F_{kj}^{-1}. \quad (3.153)$$

En utilisant (2.70) et (2.145) dans (3.153), on obtient

$$P_{mk} = P_{km} - P_{jm}\frac{\partial U_k}{\partial X_j} + P_{ki}\frac{\partial U_m}{\partial X_i} - P_{ji}\frac{\partial U_m}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}. \quad (3.154)$$

De même, avec (3.152), (2.145) et la deuxième égalité de (2.70), le second tenseur de Piola-Kirchhoff s'exprime comme

$$S_{ij} = F_{ik}^{-1}P_{kj} = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right) P_{kj} = P_{ij} - P_{kj}\frac{\partial U_i}{\partial X_k}. \quad (3.155)$$

Finalement, pour le tenseur de contrainte de Cauchy, nous écrivons (3.141) comme

$$\sigma_{ij} = J^{-1}P_{ik}(F_{kj})^T = J^{-1}P_{ik}F_{kj}. \quad (3.156)$$

Par (2.70) et (2.147), nous avons

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= J^{-1} P_{ik} \left(\delta_{jk} + \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \right) \\ &= J^{-1} \left(P_{ij} + P_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \right) \approx P_{ij} + P_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial X_k}.\end{aligned}\quad (3.157)$$

En négligeant les termes contenant le gradient du déplacement dans (3.154), (3.155) et (3.157), il vient

$$P_{mk} \approx P_{km} \quad S_{ij} \approx P_{ij} \quad \sigma_{ij} \approx P_{ij}. \quad (3.158)$$

Donc, le résultat de la linéarisation cinématique, pour des petits déplacements et des gradients infinitésimaux, s'exprime par la symétrie du premier tenseur de Piola-Kirchhoff et par l'égalité approximative des trois tenseurs des contraintes.

EXEMPLE 3.3

Pour apprécier les différences entre les trois tenseurs de contraintes, considérons le cas uni-axial d'un barreau prismatique de section circulaire, encastré à l'extrémité A et soumis à une force P_t comme le montre la figure 3.11.

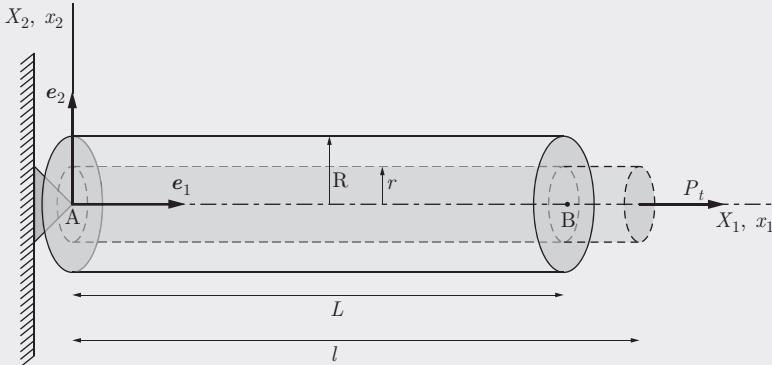


Fig. 3.11 Barreau cylindrique soumis à une contrainte uni-axiale.

Le mouvement est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}x_1 &= aX_1 \\ x_2 &= bX_2 \\ x_3 &= bX_3.\end{aligned}\quad (3.159)$$

La longueur et le rayon avant déformation sont ℓ_0 et R_0 , respectivement. Au temps t , ces paramètres deviennent ℓ_t et R_t . Pour l'extrémité B du barreau et selon (3.159), on peut écrire

$$\begin{aligned}\ell_t &= a\ell_0 \quad \Rightarrow \quad a = \ell_t/\ell_0 \\ R_t &= bR_0 \quad \Rightarrow \quad b = R_t/R_0.\end{aligned}\quad (3.160)$$

Selon (3.160), les relations (3.159) s'expriment comme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\ell_t}{\ell_0} X_1 \\ x_2 &= \frac{R_t}{R_0} X_2 \\ x_3 &= \frac{R_t}{R_0} X_3 . \end{aligned} \quad (3.161)$$

Donc, la matrice du tenseur du gradient de déformation (2.65) est

$$[F] = \begin{pmatrix} \ell_t/\ell_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_t/R_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_t/R_0 \end{pmatrix} \quad (3.162)$$

et son jacobien J

$$J = \det[F] = \frac{\ell_t}{\ell_0} \left(\frac{R_t}{R_0} \right)^2 = \frac{\ell_t}{\ell_0} \frac{A_t}{A_0} . \quad (3.163)$$

où A_0 et A_t sont les aires de la section au temps $t = 0$ et t , respectivement.

Une force P_t , parallèle à l'axe 1 agit au centre de gravité de la section à l'extrémité B. Donc la matrice des contraintes de Cauchy est définie par la force au temps t , P_t , et l'aire de la section au temps t

$$[\sigma] = \frac{P_t}{A_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma_{11} = \frac{P_t}{A_t} . \quad (3.164)$$

Avec (3.141) et (3.152), la matrice des contraintes des premier et deuxième tenseurs de Piola-Kirchhoff sont

$$\begin{aligned} [P] &= J[\sigma][F]^{-T} = \frac{\ell_t}{\ell_0} \frac{A_t}{A_0} \begin{pmatrix} \frac{P_t}{A_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\ell_0}{\ell_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_0}{R_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_0}{R_t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{P_t}{A_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P_{11} = \frac{P_t}{A_0} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S] &= J[F]^{-1}[\sigma][F]^{-T} \\ &= \frac{\ell_t}{\ell_0} \frac{A_t}{A_0} \begin{pmatrix} \frac{\ell_0}{\ell_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_0}{R_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_0}{R_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{P_t}{A_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\ell_0}{\ell_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_0}{R_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_0}{R_t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{P_t}{A_0} \frac{\ell_0}{\ell_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_{11} = \frac{P_t}{A_0} \frac{\ell_0}{\ell_t} . \end{aligned}$$

Les expressions précédentes montrent que la composante du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donnée par la force au temps t et l'aire de la section au temps $t = 0$ (ou la section initiale). La composante du second tenseur n'a pas d'interprétation directe, comme les deux autres tenseurs. Il sera cependant utile à la modélisation des solides en grandes déformations. Ce sujet sera traité au chapitre 6.

Puisque la déformation est homogène, les composantes de déformation infinitésimales sont exprimées comme

$$\frac{\ell_t}{\ell_0} = \frac{\ell_0 + \Delta\ell}{\ell_0} = 1 + \varepsilon_{11}$$

$$\frac{R_t}{R_0} = \frac{R_0 + \Delta R}{R_0} = 1 + \varepsilon_{22} .$$

Donc,

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_{22} \end{pmatrix} .$$

On montre facilement que si $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} \ll 1$, les trois mesures de contraintes sont approximativement les mêmes. Ce résultat est une conséquence de la linéarisation cinématique.

3.10 Exercices

[3.1] Montrer que le champ de vitesse $v_i = Ax_i/r^3$ où $x_i x_i = r^2$ et A est une constante arbitraire, satisfait l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible.

[3.2] Pour le champ de vitesse $v_i = x_i/(1+t)$ montrer que

$$\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 X_1 X_2 X_3 .$$

[3.3] Montrer que l'écoulement donné par le champ de vitesse

$$v_r = \frac{(1 - r^2) \cos \theta}{r^2}$$

$$v_\theta = \frac{(1 + r^2) \sin \theta}{r^2}$$

$$v_z = 0$$

satisfait l'équation d'incompressibilité lorsque la masse volumique ρ est constante.

[3.4] L'état des contraintes dans un corps est donné par la matrice des contraintes suivant :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & Cx_1 & 0 \\ Cx_1 & 0 & -Cx_2 \\ 0 & -Cx_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.165)$$

où C est une constante arbitraire.

- 1) Déterminer la force volumique pour que l'équilibre statique soit satisfait.
- 2) Calculer au point P de coordonnées $(4, -4, 7)$ le vecteur de contraintes sur le plan d'équation $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$, et sur la sphère d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$.
- 3) Déterminer les contraintes principales, le maximum des contraintes de cisaillement et des contraintes déviatrices principales en P.

[3.5] En l'absence de forces de volume, déterminer si le champ de contrainte suivant satisfait l'équilibre

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2 & \sigma_{22} &= 5x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{4}x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2 & \sigma_{33} &= \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (3.166)$$

[3.6] Soit \mathcal{C} un corps tridimensionnel non pesant, soumis à une pression uniforme (normale) sur toute sa surface extérieure. Montrer que \mathcal{C} est en équilibre.

[3.7] Pour chaque état de contrainte en un point donné par les matrices suivantes :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & -2p \end{pmatrix} \quad (3.168)$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & p & p \\ p & 0 & p \\ p & p & 0 \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

avec p une constante, déterminer les contraintes principales. A quel état de contrainte correspond chacun de ces cas ?

[3.8] Montrer que les invariants du tenseur déviateur des contraintes \mathbf{s} sont reliés à ceux du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ par les expressions suivantes

$$I_1(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.170)$$

$$I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{3}I_1^2(\boldsymbol{\sigma}) - I_2(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.171)$$

$$I_3(\mathbf{s}) = \frac{2}{27}I_1^3(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})I_2(\boldsymbol{\sigma}) + I_3(\boldsymbol{\sigma}) . \quad (3.172)$$

[3.9] Si $P_{ij\dots}(\boldsymbol{x}, t)$ est une fonction arbitraire scalaire, vectorielle ou tensorielle, démontrer qu'on a

$$\int_{\partial\omega} P_{ij\dots} \sigma_{pq} n_q \, ds = \int_{\omega} (\sigma_{pq} P_{ij\dots,q} + \rho P_{ij\dots} (\dot{v}_p - b_p)) \, dv. \quad (3.173)$$

[3.10] En utilisant (3.141), démontrer l'égalité (3.144).

[3.11] Montrer que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \boldsymbol{S} satisfait les relations

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T \quad \text{et} \quad \boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}. \quad (3.174)$$

Energétique

4.1 Introduction

Après avoir décrit les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, nous allons introduire maintenant les principes reliés à la thermodynamique d'un milieu continu en mouvement, ainsi qu'à la conservation de l'énergie.

Nous rappelons que toute déformation dans un matériau produit un effet thermique de la même manière qu'un effet thermique produit une déformation. Il suffit pour s'en convaincre de chauffer une barre de métal, qui sous l'action de la chaleur, s'allonge.

Dans ce chapitre, nous travaillerons généralement en représentation spatiale ou eulérienne. Le principe de conservation de l'énergie totale est d'abord établi. Il conduit à l'écriture du principe de conservation de l'énergie interne. Ensuite, nous considérons la conservation de l'énergie mécanique en représentation lagrangienne. Ultérieurement, on montrera que, du principe de conservation de l'énergie totale auquel l'objectivité est imposée, on peut inférer les autres lois de conservation. Enfin, le chapitre se termine par l'introduction de l'entropie et le second principe de la thermodynamique qui repose sur l'inégalité de Clausius–Duhem, une mesure de l'irréversibilité des phénomènes associés à la physique des milieux continus.

La thermodynamique des milieux continus a retenu particulièrement l'attention des auteurs suivants : [22, 28, 33, 68, 76].

4.2 Conservation de l'énergie

Soit ω le volume matériel d'un milieu continu à l'instant t , tel que $\omega \subseteq \mathcal{R}$, la configuration actuelle du corps \mathcal{C} . On généralise le concept d'énergie cinétique en définissant celle-ci comme l'intégrale sur le volume actuel $\omega(t)$ de la moitié de la masse volumique $\rho(\mathbf{x}, t)$ multipliée par le carré de la norme de la vitesse

spatiale locale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. L'énergie cinétique de $\omega(t)$, que nous noterons $E_c(t)$, est un scalaire donné par la relation

$$E_c(t) = \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{2} dv. \quad (4.1)$$

Pour simplifier, la dépendance de ω par rapport au temps ne sera plus indiquée dans la suite. Outre l'énergie cinétique, l'énergie d'une région matérielle contient des contributions provenant de mouvements à l'échelle microscopique tels que des mouvements de translation aléatoires, des vibrations moléculaires, des rotations de molécules et d'autres modes énergétiques microscopiques. Toutes ces énergies contribuent à l'*énergie interne* $E_{\text{int}}(t)$. Par exemple, on sait que pour deux corps \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 au repos (énergie cinétique nulle), si la température du premier est plus élevée que celle du second, alors \mathcal{C}_1 contient plus d'énergie que \mathcal{C}_2 . L'énergie interne $E_{\text{int}}(t)$ de \mathcal{C} s'exprime comme l'intégrale de volume de la densité d'énergie interne $u(\mathbf{x}, t)$ par unité de masse. On a

$$E_{\text{int}}(t) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dv. \quad (4.2)$$

La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne (qui est l'analogue pour un matériau de l'énergie potentielle en mécanique du point) est l'*énergie totale* de \mathcal{C} . L'énergie totale peut varier au cours du temps sous l'action du travail exercé par les forces qui agissent sur \mathcal{C} et par les apports extérieurs d'énergie calorifique. Avant de préciser le concept de travail pour un milieu continu, remémorons-nous sa formulation en mécanique classique du point. La loi de Newton pour une particule de masse m se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} s'écrit

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

En effectuant le produit scalaire des deux membres de cette relation par \mathbf{v} , on obtient

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ,$$

qui est une forme du théorème de l'énergie cinétique.

La *puissance*, c'est-à-dire la variation du travail au cours du temps, résulte du produit scalaire de la force par la vitesse. Seule la composante de la force dans la direction de la vitesse accroît l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ de la particule. La composante de la force orthogonale à la vitesse induit une courbure de la trajectoire, mais elle n'augmente pas l'énergie cinétique.

La puissance dans un milieu continu est donc donnée par la composante de la force dans la direction du mouvement multipliée scalairement par la vitesse du matériau.

Considérons à nouveau le corps \mathcal{C} . Pour les forces de volume, cette puissance s'écrit

$$\int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.4)$$

La puissance fournie par les forces de surface est donnée par la relation :

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad (4.5)$$

où on a fait appel à la relation de Cauchy (3.107). La dernière intégrale dans (4.5) peut se transformer par le théorème de la divergence. En utilisant (1.228) et en tenant compte de (1.69) et de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, on a

$$\int_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\partial\omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v} \, ds = \int_{\omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) \, dv = \int_{\omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \, dv. \quad (4.6)$$

Sous forme indicielle, on a

$$\int_{\partial\omega} \sigma_{ij} v_j n_i \, ds = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_j) \, dv = \int_{\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_j + \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \, dv, \quad (4.7)$$

et en faisant appel à la notion de produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2 (1.94), la dernière intégrale de (4.7) devient

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_j + \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \, dv = \int_{\omega} ((\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}) \, dv. \quad (4.8)$$

Dès lors, sous forme vectorielle, on écrit

$$\int_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\omega} ((\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}) \, dv. \quad (4.9)$$

Le transfert de chaleur constitue la seconde voie par laquelle de l'énergie est fournie au volume matériel. Nous allons tenir compte d'abord d'un terme de production/consommation de chaleur en son sein, de la forme

$$\int_{\omega} r(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (4.10)$$

où $r(\mathbf{x}, t)$ représente la *chaleur produite ou reçue* par unité de temps et de volume. Ce pourrait être la *chaleur dégagée* ou consommée par une réaction chimique dans le milieu ou un chauffage par effet Joule (électrode de carbone dans un milieu en fusion). Il peut également prendre en compte la chaleur reçue par rayonnement de la part d'éventuelles sources extérieures. Sa dimension est $M L^{-1} T^{-3}$ avec les symboles M, L, T désignant la masse, la longueur et le temps, respectivement, et l'unité SI correspondante est le W/m^3 . L'apport extérieur de chaleur se fait le plus souvent par conduction à travers la surface $\partial\omega$. On peut bien entendu trouver d'autres modes de transfert de chaleur, par exemple par radiation. Nous les ignorerons dans la suite.

Désignons par q la quantité scalaire qui représente la chaleur qui entre dans \mathcal{C} par unité de temps et par unité de surface ds . Soit \mathbf{n} la normale à ds . Par analogie avec le postulat de Cauchy, nous supposerons que q au point \mathbf{x} dépend uniquement de la normale unitaire pointant vers l'extérieur au point \mathbf{x} , c'est-à-dire

$$q = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (4.11)$$

Notons par q_1, q_2, q_3 les *flux de chaleur* obtenus en un point matériel P lorsque la normale \mathbf{n} est dirigée respectivement suivant les vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Dès lors,

$$q_i = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i). \quad (4.12)$$

Par un raisonnement basé sur la conservation de l'énergie dans un élément matériel tétraédrique, on montre d'une manière analogue à celle du théorème de Cauchy pour le tenseur des contraintes (sect. 3.6) que le flux de chaleur q est une combinaison linéaire des flux q_i multipliés par les composantes n_i

$$q = q_i n_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.13)$$

Par définition, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ est le vecteur flux de chaleur. Le taux de chaleur reçu par conduction par le corps entier est égal à

$$-\int_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (4.14)$$

Le signe négatif introduit dans (4.14) signifie qu'un taux de chaleur positif est obtenu lorsque \mathbf{q} pointe vers l'intérieur du volume matériel. La quantité $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ est donc la densité surfacique du taux de chaleur reçue par conduction à travers $\partial\omega$.

Si pour toute évolution du matériau, on a $\mathbf{q} = 0$ et $r = 0$, on dit que l'évolution du milieu est adiabatique. Il n'y a pas d'échange calorifique avec l'extérieur. Si on applique le théorème de la divergence à l'intégrale (4.14), il vient

$$-\int_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = -\int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{q} dv. \quad (4.15)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la loi de conservation de l'énergie, qui constitue le premier principe de la thermodynamique.

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

La dérivée temporelle de l'énergie totale dans \mathcal{C} est égale à la somme de la puissance des forces de volume et de contact et du taux de chaleur reçue par le matériau.

En vertu des équations (4.1), (4.2), (4.4)-(4.6), (4.10) et (4.15), on écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + u \right) dv = \int_{\omega} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + r) dv \quad (4.16)$$

soit avec les définitions (4.1) et (4.2), et la relation (4.8),

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} (E_c(t) + E_{\text{int}}(t)) \\ &= \int_{\omega} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r) dv. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A l'aide du théorème du transport de Reynolds, de la conservation de la masse (3.41), le premier membre de (4.16) devient

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(E_c(t) + E_{\text{int}}(t)) &= \int_{\omega} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \frac{Du}{Dt} \right) \rho dv \\ &= \int_{\omega} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + u \right) dv.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Les forces à distance \mathbf{b} peuvent toujours dériver d'un potentiel $W(\mathbf{x})$ indépendant du temps. Par définition, on a

$$\mathbf{b} = -\nabla W, \quad b_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (4.19)$$

Il vient alors pour $\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$

$$\rho b_i v_i = -\rho v_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = -\rho \frac{DW}{Dt}. \quad (4.20)$$

En combinant les relations (4.16), (4.18), (4.19) et en faisant appel au théorème de localisation, on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie totale :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + W \right) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (4.21)$$

Avec les relations (4.16)-(4.18), on peut encore obtenir, si on ne fait pas appel au potentiel W ,

$$\int_{\omega} (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\omega} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} - r \right) dv = 0. \quad (4.22)$$

La première intégrale de (4.22) s'annule par le principe de conservation de la quantité de mouvement (3.96). En invoquant le théorème de localisation pour la seconde intégrale de volume de (4.22), la loi de conservation de l'énergie interne devient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (4.23)$$

Le premier terme du membre de droite \mathfrak{D} de (4.23) peut être réécrit en tenant compte de la symétrie de σ_{ij} et de la relation (2.180)

$$\mathfrak{D} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} d_{ij} \quad (4.24)$$

ou encore

$$\mathfrak{D} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}. \quad (4.25)$$

On interprète ce terme comme la *puissance des forces* de contact au sein du matériau. On peut aussi écrire \mathfrak{D} comme étant $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L})$ via (1.95) ou encore $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L}$, où la notation \mathbf{L} désigne le tenseur des gradients de vitesse $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ défini par (2.177). L'équation (4.23) montre que l'accroissement d'énergie interne est

égal à la somme de la puissance développée par les forces de contact, le transfert de chaleur par conduction et la production volumique de chaleur au sein de \mathcal{C} .

On peut faire apparaître le théorème de l'énergie cinétique en soustrayant la relation (4.23) de (4.21) et en tenant compte de (4.20)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}. \quad (4.26)$$

Ce théorème exprime que la variation dans le temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts engendrés par les forces de volume (premier terme du second membre) et par les forces de contact (second terme du second membre). On remarquera que cette relation n'est rien d'autre que la conservation de la quantité de mouvement (3.96) multipliée scalairement par \mathbf{v} .

EXEMPLE 4.1

Pour un corps élastique linéaire en équilibre, soumis à des forces de volume \mathbf{b} et de surface \mathbf{t} , démontrer l'égalité suivante :

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{\omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} ds, \quad (4.27)$$

où $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ sont les tenseurs de contrainte et de déformation.

Sous forme indicelle, on a

$$\int_{\omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_{\omega} \rho b_i u_i dv + \int_{\partial\omega} t_i u_i ds.$$

En utilisant (3.76), l'intégrale de surface se modifie en une intégrale de volume comme suit

$$\int_{\partial\omega} t_i u_i ds = \int_{\partial\omega} \sigma_{ij} n_j u_i ds = \int_{\partial\omega} \sigma_{ij} u_i n_j ds = \int_{\omega} \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} dv$$

ou encore

$$\int_{\omega} \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} dv = \int_{\omega} \left(\frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dv = \int_{\omega} (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dv.$$

En tenant compte des équations d'équilibre (3.126), le membre de droite de (4.27) s'écrit comme

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\rho b_i u_i + \sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dv &= \int_{\omega} (u_i (\rho b_i + \sigma_{ij,j}) + \sigma_{ij} u_{i,j}) dv \\ &= \int_{\omega} \sigma_{ij} u_{i,j} dv \end{aligned}$$

L'intégrand à droite s'écrit grâce à la symétrie du tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}u_{i,j} &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij,j}u_i + \sigma_{ij}u_{i,j}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij,j}u_i + \sigma_{ji}u_{j,i}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij,j}u_i + \sigma_{ij}u_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\int_{\omega} \sigma_{ij}u_{i,j}dv = \int_{\omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv.$$

4.3 Conservation de l'énergie mécanique en représentation matérielle

L'analyse de la conservation de l'énergie qui a été faite ci-dessus a été menée en représentation eulérienne. Un développement semblable peut s'effectuer en représentation matérielle pour décrire les diverses composantes de l'énergie. C'est l'objet de cette section. Pour simplifier, nous supposerons que le flux de chaleur \mathbf{q} et le terme de volume r sont nuls.

En utilisant (4.5) et (4.6), l'équation de conservation de l'énergie (4.16) devient

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} (E_c(t) + E_{\text{int}}(t)) &= \int_{\omega} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) dv + \int_{\omega} \rho \frac{Du}{Dt} dv \\ &= \int_{\omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds.\end{aligned}\tag{4.28}$$

En prenant en compte (4.23) avec $\mathbf{q} = r = 0$ et (4.25), on a

$$\int_{\omega} \rho \frac{Du}{Dt} dv = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} dv = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv.\tag{4.29}$$

Cette dernière équation montre qu'en ignorant tous les effets thermiques, le taux de changement de l'énergie interne est égal à la puissance des forces internes. Puisque le volume est arbitraire, on déduit la forme locale qui s'écrit

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}.\tag{4.30}$$

Finalement, la conservation de l'énergie mécanique devient

$$\int_{\omega} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) dv + \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv = \int_{\omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds.\tag{4.31}$$

Afin d'écrire cette dernière relation en coordonnées matérielles, considérons tout d'abord l'énergie cinétique. A partir de (2.103), (3.33) et de l'équation

de conservation de la masse (3.37), on déduit que $\rho dv = P_0 dV$. De plus, en considérant l'équation (2.20), on a

$$\int_{\omega} \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dv = \int_{\Omega} P_0 \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} dV. \quad (4.32)$$

Pour le second terme du membre de gauche de (4.31), on a d'après (2.179) $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$. Puisque $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})$, on obtient

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) dv. \quad (4.33)$$

En utilisant l'identité tensorielle (1.97), le second membre de (4.33) se modifie comme suit

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) dv = \int_{\omega} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} dv. \quad (4.34)$$

A l'aide de (3.141) et (2.103), on peut écrire (4.34) dans la configuration matérielle avec le tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{P}

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) dv &= \int_{\omega} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} dv \\ &= \int_{\Omega} (J \boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV. \end{aligned} \quad (4.35)$$

La contribution des forces de volume s'exprime facilement en coordonnées matérielles au moyen des relations (2.20), (3.37), (3.57) et (2.103)

$$\int_{\omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv = \int_{\Omega} P_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} dV. \quad (4.36)$$

Pour les forces de contact, on fait appel à (2.20) et (3.138) de sorte que

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dS. \quad (4.37)$$

Finalement, le principe de conservation de l'énergie mécanique s'écrit dans la configuration de référence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P_0 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) dV + \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV \\ = \int_{\Omega} P_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dS. \end{aligned} \quad (4.38)$$

D'après (4.28), la dérivée matérielle de l'énergie interne s'exprime successivement comme

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} E_{\text{int}}(t) &= \int_{\omega} \rho \frac{Du}{Dt} dv \\ &= \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} u(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) P(\mathbf{X}, t) dV. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En posant $u(\chi(\mathbf{X}, t), t) = U(\mathbf{X}, t)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} u(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) P(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} U(\mathbf{X}, t) P_0(\mathbf{X}) dV. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Par conséquent, le second terme du premier membre de (4.38) peut s'exprimer comme suit

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{\Omega} P_0 \frac{DU}{Dt} dV \quad (4.41)$$

et localement

$$P_0 \dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (4.42)$$

L'expression de l'énergie interne peut être modifiée en utilisant $\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}$ (cf. problème 2.8) et les équations (3.152) et (1.97). Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv &= \int_{\Omega} J \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) dV \\ &= \int_{\Omega} J(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}}) dV \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{F} \mathbf{S}) : (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}}) dV = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Il est intéressant de noter que la puissance mécanique peut s'exprimer indifféremment comme le produit doublement contracté du tenseur des contraintes de Cauchy et du tenseur des taux de déformation ($\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$), du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des taux du gradient de déformation ($\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$), ou encore du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des taux de déformation de Green-Lagrange ($\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$). En conséquence, nous pouvons écrire l'égalité suivante pour la puissance des efforts intérieurs (puissance effectuée par les contraintes internes et la déformation) par unité de volume

$$J \rho \dot{u} = P_0 \dot{U} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.44)$$

De telles paires de paramètres sont appelées *paramètres conjugués* parce que leur produit interne (scalaire) fournit une énergie. C'est un résultat très important de la mécanique des milieux continus qui permettra de déduire les équations de comportement à partir d'une fonction potentielle. Ce sujet sera abordé au chapitre 6.

4.4 Interprétation des lois de conservation par le premier principe

Dans cette section, nous allons retrouver les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment cinétique à partir du seul principe de conservation de l'énergie, ainsi que du principe d'objectivité.

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire en vertu des relations (4.16) et (4.17)

$$\frac{D}{Dt} (E_c(t) + E_{\text{int}}(t)) = \int_{\omega} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) - \text{div } \mathbf{q} + r) dv. \quad (4.45)$$

Avec le théorème du transport sous la forme (3.5), le premier membre de (4.45) devient

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} (E_c(t) + E_{\text{int}}(t)) \\ &= \int_{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) + \text{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \mathbf{v} \right) \right) dv. \end{aligned} \quad (4.46)$$

En appliquant de plus le théorème de localisation, la relation (4.45) s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \text{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \mathbf{v} \right) \\ &= \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r - \text{div } \mathbf{q} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Cette dernière équation peut se mettre aisément sous la forme

$$\begin{aligned} & \rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{q} - r + \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{a} - \text{div } \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b}) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) (\dot{\rho} + \rho \text{div } \mathbf{v}) = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

où la notation $\dot{\rho}$ désigne la dérivée particulaire.

Considérons deux référentiels $R = (0, \mathbf{x}, t)$ et $R^* = (0^*, \mathbf{x}^*, t^*)$ se déplaçant l'un par rapport à l'autre et dont le mouvement relatif est décrit par (2.195).

Si, en plus de (2.195), (2.211), (2.205) et (2.213), les règles de transformation suivantes sont valables :

$$\rho^* = \rho \quad (4.49)$$

$$u^* = u \quad (4.50)$$

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{Q} \mathbf{q} \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T \quad (4.52)$$

$$r^* = r \quad (4.53)$$

les quantités ρ , u , \mathbf{q} , $\boldsymbol{\sigma}$ et r sont objectives.

On montre que l'objectivité de la conservation de l'énergie (4.48), c'est-à-dire qu'elle reste valable si on l'écrit avec les quantités * , implique les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

4.4.1 Premier cas : translation uniforme

Choisissons le référentiel R^* en translation par rapport à R avec une vitesse de vitesse translation $\dot{\mathbf{c}}(t)$ constante. Soit,

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{u} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (4.55)$$

Alors la relation (2.211) devient

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{u} + \mathbf{v}. \quad (4.56)$$

On réécrit (4.48) avec des quantités étoilées. On y remplace \mathbf{v}^* par sa valeur (4.56) et de l'équation résultante, on retranche (4.48). On a en utilisant les relations (4.49)-(4.53)

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{a} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b}) = 0. \quad (4.57)$$

Si on fait un changement d'échelle sur \mathbf{u} en passant à $\alpha \mathbf{u}$, on demande que (4.57) soit vérifié quelle que soit α . On obtient

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.58)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b} + \mathbf{v} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0. \quad (4.59)$$

Cette dernière relation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (4.60)$$

L'équation (4.60) est l'équation de la conservation de la quantité de mouvement où le terme d'accélération est modifié par la conservation de la masse (4.58).

4.4.2 Deuxième cas : rotation de corps rigide

Si maintenant on considère le référentiel R^* dans un mouvement de rotation par rapport à R tel qu'à l'ancien champ de vitesses, on superpose une rotation de corps rigide

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I} \quad (4.62)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.63)$$

le champ de vitesse \mathbf{v}^* s'écrit en tenant compte de (2.57) et de (2.60)

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \quad (4.64)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est le *vecteur dual* de $\boldsymbol{\Omega}$ (§ 2.6.3). On applique un raisonnement analogue au cas précédent. Le principe de conservation de l'énergie fournit la conservation du moment de la quantité de mouvement telle que

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (4.65)$$

Il faut remarquer qu'en toute généralité, le terme de force de volume où \mathbf{b} a les dimensions d'une accélération, s'exprime par (2.212) sous la forme

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q}\mathbf{b} + \dot{\mathbf{c}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}. \quad (4.66)$$

Dans le cas où le référentiel R^* tourne à vitesse angulaire constante, cette dernière relation devient en tenant compte de (2.60)

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v} = \mathbf{b} + 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} = \mathbf{b} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (4.67)$$

où apparaît le terme de force de Coriolis $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

4.5 Notion d'entropie

L'entropie d'un système peut être considérée comme une mesure de son désordre. En raison de l'agitation continue et incohérente des molécules d'un milieu continu, deux niveaux d'observation doivent être distingués. Au niveau microscopique (moléculaire), le système physique (\mathcal{X}) passe (ou peut passer) par un très grand nombre d'états différents \mathcal{X}_i , alors qu'au niveau macroscopique, qui est celui de l'observation habituelle, ces états sont indiscernables. D'une certaine manière, on peut dire que le désordre du système vient du nombre des états \mathcal{X}_i équivalents du point de vue macroscopique et que son entropie est liée à ce nombre. Notons que les grandeurs cinématiques et dynamiques usuelles (par ex. la masse volumique, les vitesses, les forces de contact) sont mesurées au niveau macroscopique sur la particule de matériau, mais correspondent en fait à des moyennes sur des mesures faites au niveau microscopique.

Plus précisément, en associant à chaque état \mathcal{X}_i une probabilité p_i , une mesure exacte du désordre de \mathcal{X} est donnée par son entropie, que nous noterons s , définie à une constante multiplicative près par la relation

$$s(\mathcal{X}) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i . \quad (4.68)$$

Remarquons que cette définition est proche de celle utilisée en théorie de la communication pour mesurer l'entropie de l'information. On constate sans peine que dans le cas de N états \mathcal{X}_i différents, l'entropie maximale est atteinte si ces résultats sont équiprobables. Comme $p_i = 1/N$, elle vaut alors

$$s(\mathcal{X}) = \log N . \quad (4.69)$$

Par contre, l'entropie est minimale (et nulle) si un état est certain et les $(N - 1)$ autres impossibles. Une autre constatation tirée de (4.68) est que dans le cas de deux systèmes indépendants \mathcal{X} et \mathcal{X}' , la probabilité de l'état microscopique (\mathcal{X}_i et \mathcal{X}'_j) est $p_i p'_j$, de sorte que l'entropie de la réunion de \mathcal{X} et \mathcal{X}' est donnée par l'expression

$$s(\mathcal{X} \cup \mathcal{X}') = - \sum_{i,j=1}^N p_i p'_j \log(p_i p'_j) = s(\mathcal{X}) + s(\mathcal{X}') \quad (4.70)$$

car on a toujours les relations

$$\sum_i^N p_i = \sum_j^N p'_j = 1 . \quad (4.71)$$

On voit ainsi que l'entropie est une grandeur extensive.

D'autre part, si une certaine grandeur physique prend les valeurs A_i dans les états \mathcal{X}_i , sa valeur macroscopique est donnée par la formule :

$$A = \sum_i^N p_i A_i \quad (4.72)$$

ce qui montre le lien mathématique entre les deux niveaux d'observation.

Le concept de température relève d'abord de l'observation courante, mais son lien avec la mécanique statistique peut être approché comme suit : l'énergie interne d'un système est la quantité totale d'énergie désordonnée qu'il contient, c'est-à-dire d'énergie répartie différemment, d'un état \mathcal{X}_i à l'autre, sur ses molécules.

Il est important de noter que dans cette définition certaines composantes de l'énergie interne, présentes dans le cas de réactions chimiques (et entre autres en dynamique des gaz), sont exclues. L'analyse statistique montre que cette énergie cinétique se répartit en moyenne de manière égale sur chaque molécule, et suivant chaque degré de liberté de mouvement désordonné.

La température absolue T est alors, à une constante multiplicative près, l'énergie désordonnée par molécule et par degré de liberté. On peut interpréter le fait physique que deux corps différents mis en contact ont tendance à uniformiser leurs températures, par le principe statistique que leurs énergies désordonnées par molécule et par degré de liberté doivent devenir égales, de même qu'elles sont égales pour chaque degré de liberté.

Un lien existe de toute évidence entre température absolue et entropie et pourrait être développé à l'aide de la mécanique statistique. Il s'exprime par la relation

$$\delta u(\mathcal{X}) = T \delta s(\mathcal{X}) \quad (4.73)$$

qui lie les accroissements $\delta u(\mathcal{X})$ et $\delta s(\mathcal{X})$ de l'énergie interne et de l'entropie du système lorsque toutes ses caractéristiques cinématiques (masse volumique, déformation, etc.) sont maintenues constantes.

Nous ne cherchons pas à interpréter cette relation, qui doit être regardée comme fondamentale lorsqu'on se place au niveau macroscopique.

Parallèlement, l'irréversibilité des phénomènes physiques s'exprime par le fait que l'accroissement d'entropie d'un système est toujours supérieur à une borne minimale égale à la chaleur fournie au système $\delta q(\mathcal{X})$ divisée par la température absolue T , c'est-à-dire qu'on a toujours l'inégalité

$$\delta s(\mathcal{X}) \geq \frac{\delta q(\mathcal{X})}{T}, \quad (4.74)$$

l'égalité n'ayant lieu que pour une transformation réversible. Cette dernière inégalité est la base de la formulation du second principe de la thermodynamique en mécanique des milieux continus.

Un point de vue intéressant sur l'irréversibilité des phénomènes physiques est apporté par la théorie de Boltzmann pour l'hydrodynamique. Partant d'une description à l'échelle atomique des systèmes macroscopiques par la mécanique

newtonienne, on est amené à résoudre un ensemble de N équations différentielles ordinaires non linéaires

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.75)$$

où N est de l'ordre du nombre d'Avogadro $N_A \sim 6 \cdot 10^{23}$. Les symboles m_i notent les masses moléculaires, $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/dt$ sont les vitesses moléculaires et \mathbf{F}_i des forces agissant sur la $i^{\text{ème}}$ molécule dues aux interactions moléculaires. Ce problème est évidemment insoluble vu sa taille énorme (d'ordre N_A) et on passe du niveau atomique au niveau de la théorie cinétique à N corps, qui est établie à partir des équations de Newton-Hamilton. Cette théorie fait appel à des fonctions de distribution $f_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N)$ qui donnent la probabilité jointe de trouver la molécule 1 à la position \mathbf{x}_1 avec la vitesse \mathbf{v}_1 et la molécule 2 à la position \mathbf{x}_2 avec la vitesse \mathbf{v}_2 et ainsi de suite jusqu'à la molécule N . Les trajectoires de l'approche newtonienne sont remplacées par la notion d'espace des phases où l'équation de la dynamique est décrite par une équation aux dérivées partielles connue sous le nom d'*équation de Liouville* qui est de dimension $6N$. On constate que la masse d'information n'a pas été réduite par rapport à l'approche newtonienne. Cependant, l'équation de Liouville permet de mettre en œuvre une procédure puissante et élégante qui élimine l'information redondante. Ceci conduit à la définition de fonctions de distribution réduites $f_M \equiv f_{12\dots M}, M < N$. Du point de vue des équations dynamiques, celles-ci deviennent une chaîne d'équations connue sous le nom de hiérarchie BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon). Pour les quantités macroscopiques intéressantes comme la masse volumique, la pression, la température, etc., des distributions à un ou deux corps suffisent et on choisit donc $M = 1, 2$ dans la hiérarchie BBGKY.

L'équation à un corps la plus importante est celle de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C[f, f]. \quad (4.76)$$

Ici, \mathbf{a} est l'accélération moléculaire. La fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ est la densité de probabilité de trouver une particule ponctuelle classique à la position \mathbf{x} au temps t avec la vitesse \mathbf{v} . Le membre de gauche de (4.76) représente le mouvement libre des particules dans le plan de phase, tandis que $C[f, f]$ est un opérateur de collision binaire sous la forme d'une intégrale qui tient compte des interactions moléculaires, dont la définition précise sort du cadre de l'exposé. L'équation de Boltzmann repose sur l'hypothèse du chaos moléculaire

$$f_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)f(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) \quad (4.77)$$

qui brise la symétrie de la réversibilité du temps qui s'applique à la mécanique newtonienne du niveau atomique. Cette brisure de symétrie ouvre la porte au comportement irréversible. Cette irréversibilité est mesurée par une quantité appelée H , (cf. [63]), qui est reliée à l'entropie par la relation $s = -k_B H$ avec k_B la constante de Boltzmann et qui est définie par

$$H = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (4.78)$$

Le théorème H montre que $dH/dt \leq 0$. Notons que la définition de l'entropie que nous avons donnée par (4.68) est une approximation numérique de la quantité $-H$.

On obtient des variables macroscopiques comme la masse volumique et la vitesse par intégration sur l'espace des vitesses

$$\rho(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.79)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad (4.80)$$

où \mathbf{u} est la notation de la vitesse dans l'espace physique et m est la masse atomique ou moléculaire. A partir de (4.76) et des relations ci-dessus, on peut arriver aux équations de l'hydrodynamique, en l'occurrence, les équations de Navier-Stokes.

4.6 Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique des milieux continus est aussi connu sous le nom d'inégalité de Clausius-Duhem.



Rudolf Clausius (1822-1888) naquit à Koslin (Prusse), aujourd'hui Koszalin (Pologne). Il fut successivement professeur à l'Ecole d'artillerie de Berlin, puis à l'ETH Zürich, et aux universités de Würzburg et Bonn. Ses contributions sont très importantes en thermodynamique, où il introduit la notion d'entropie, et en théorie cinétique des gaz.

Fig. 4.1 Rudolf Clausius.

SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Pour un volume matériel, la dérivée particulaire de l'entropie est à tout instant supérieure ou égale à la somme de la distribution volumique de sources d'entropie dans le corps et du flux d'entropie à travers la surface.

Dès lors, on généralise (4.74) à un milieu non homogène qui prend, sur un volume matériel ω , la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho s d\mathbf{v} \geq \int_{\omega} \frac{r}{T} d\mathbf{v} - \int_{\partial\omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} ds, \quad (4.81)$$

s étant l'entropie massique. Il faut en effet tenir compte des différences de température auxquelles les chaleurs élémentaires ($r dv$) et ($-q_i n_i ds$) sont fournies à ω .

La *forme locale* du second principe s'obtient par application du théorème de transport à la dérivée particulaire en tenant compte de la conservation de la masse, par application du théorème de la divergence à l'intégrale de surface (dernier terme de l'inéquation) et enfin, par application du principe de localisation

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right). \quad (4.82)$$

Cette inégalité doit être vérifiée, en tout point et à tout instant, par tout processus.

Pour mesurer les conséquences de (4.82), il faut y éliminer le terme r de chaleur massique produite par unité de temps, à l'aide de la forme locale (4.23) de l'équation de conservation de l'énergie interne. Cette élimination est nécessaire parce que r est arbitraire, puisqu'il s'agit d'une action à distance. On trouve donc l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{1}{T} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right) + \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (4.83)$$

qui doit elle-même être satisfaite par tout processus thermodynamique.



Pierre Duhem (1861-1916) naquit à Paris. Il fut nommé professeur à l'Université de Bordeaux. Ses travaux en hydrodynamique et en thermodynamique montrent qu'il fut un pionnier de l'étude de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. Son ouvrage principal est le *Traité de l'énergétique* publié en 1911.

Fig. 4.2 Pierre Duhem.

Si on introduit l'*énergie libre spécifique de Helmholtz*,

$$f = u - Ts, \quad (4.84)$$

l'inégalité de Clausius-Duhem (4.83) prend la forme

$$\rho \frac{Df}{Dt} \leq \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) - \rho s \frac{DT}{Dt} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T}. \quad (4.85)$$



Hermann von Helmholtz (1821-1894) naquit à Postdam. Il fut nommé professeur à l'Université de Berlin. Ses travaux en électrophysiologie le conduisent à rédiger un ouvrage intitulé *Théorie physiologique de la musique*. Ses contributions dans le domaine de la physique et de la chimie sont majeures. Citons l'énergie potentielle, la loi sur les tourbillons, la décomposition de Helmholtz (Théorème de Helmholtz-Hodge) pour un champ vectoriel.

Fig. 4.3 Hermann von Helmholtz.

4.7 Exercices

[4.1] Soit Q un champ scalaire sous forme spatiale dans la configuration présente ω d'un corps en mouvement. En appliquant le théorème du transport de Reynolds et l'équation de continuité, montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{DQ(\mathbf{x}, t)}{Dt} dv. \quad (4.86)$$

Utiliser ce résultat pour trouver l'expression DE_c/Dt , sachant que l'énergie cinétique du corps est définie par (4.1).

[4.2] En utilisant le théorème de Reynolds et le principe de conservation de la masse, établir que la dérivée temporelle de l'énergie totale s'écrit

$$\frac{D}{Dt} (E_c + E_{\text{int}}) = \int_{\omega} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \frac{Du}{Dt} \right) dv. \quad (4.87)$$

Exprimer le terme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ en fonction de \mathbf{v} uniquement et commenter le résultat.

[4.3] Le second principe de la thermodynamique appliqué à un milieu homogène occupant un volume $\omega(t)$ est exprimé par l'équation (4.81).

- 1) Etablir la forme locale du second principe de la thermodynamique.
- 2) Eliminer ensuite le terme r de chaleur massique, en utilisant la forme locale de la loi de conservation de l'énergie, pour établir l'inégalité de Clausius-Duhem (4.83).
- 3) Que devient cette inégalité si on introduit l'énergie libre spécifique de Helmholtz (4.84) ?

[4.4] Pour un fluide parfait :

- 1) exprimer le principe de conservation de l'énergie interne pour un fluide parfait dont le tenseur des contraintes est donné par $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$;
- 2) réécrire l'équation obtenue en faisant apparaître l'enthalpie massique définie par $h = u + p/\rho$;

- 3) montrer que pour un écoulement adiabatique la conservation de l'énergie prend la forme

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}. \quad (4.88)$$

- [4.5]** Démontrer la symétrie du tenseur des contraintes en effectuant le détail de la dérivation lorsqu'on considère le cas de rotation de corps rigide du paragraphe 4.4.2.

Suggestion : A cette fin, il faut d'abord calculer \mathbf{v}^* , ensuite écrire l'équation de conservation d'énergie dans le repère étoilé et y substituer l'expression de \mathbf{v}^* . Enfin, on retranche l'équation de départ de l'expression obtenue précédemment et on analyse le résultat obtenu.

CHAPITRE 5

Lois de comportement : principes de base

5.1 Introduction

Nous avons fait appel au formalisme tensoriel afin de présenter la description des propriétés d'un milieu continu. Ceci nous permet de raisonner en termes généraux applicables quel que soit le système d'axes auquel on se réfère.

Au chapitre 2, on s'est intéressé à la description locale du mouvement du milieu, qui peut être caractérisé par divers tenseurs. Ceux qui font apparaître les déplacements comme variables seront plus appropriés pour la description des solides tandis que les tenseurs où les variables sont les vitesses, seront plus adéquatement appliqués aux matériaux fluides.

La mécanique des milieux continus constitue une démarche axiomatique qui débouche sur un modèle phénoménologique. Grâce à cet outil, le but est de prédire, en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, le mouvement d'un matériau, auquel on associe une variable thermodynamique. Le plus souvent, cette dernière sera la température.

Dès lors, quel que soit le modèle choisi pour la description du milieu (fluide parfait, fluide visqueux, solide élastique, solide viscoélastique, etc.), les lois de la dynamique et le premier principe de la thermodynamique doivent toujours être respectés. Ces lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie conduisent sous forme locale à écrire un système d'équations aux dérivées partielles. Ces équations rapportées au système d'axes cartésiens rectangulaires sont les suivantes.

Conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.1)$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.2)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (5.3)$$

ou

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i. \quad (5.4)$$

Conservation du moment cinétique :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad (5.5)$$

ou

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (5.6)$$

Conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (5.7)$$

ou

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r. \quad (5.8)$$

Ce système contient 8 équations indépendantes ($1 + 3 + 3 + 1$), avec les forces à distance \mathbf{b} et la production volumique de chaleur r données pour le problème.

Les fonctions inconnues sont le vecteur χ du mouvement (2.1) et la température. Dans les équations de champ, on trouve les variables inconnues ρ , σ_{ij} , u , q_i . Notons au passage que \mathbf{v} est calculé à partir de χ . Au total, nous avons 18 inconnues, à savoir $\chi(3)$, $T(1)$, $\rho(1)$, $\boldsymbol{\sigma}(9)$, $u(1)$, $\mathbf{q}(3)$.

Si on admet comme hypothèse que la conservation du moment cinétique est satisfaite, alors $\boldsymbol{\sigma}$ ne compte plus que 6 inconnues. Nous avons donc 5 équations aux dérivées partielles pour 15 variables.

Cependant, on peut remarquer que notre problème est posé de manière incomplète. En effet, jusqu'ici, nous avons établi les principes de conservation en toute généralité sans nous poser la question du modèle de milieu continu. Afin de caractériser le comportement d'un matériau, il nous faut tenir compte des équations de comportement ou équations de constitution. L'écriture de telles équations se base sur les résultats expérimentaux obtenus en laboratoire. Les figures 5.1 et 5.2 montrent des courbes typiques de contrainte-déformation ou de contrainte-taux de déformation. Les équations constitutives sont aussi proposées de manière axiomatique en se basant sur des arguments mathématiques et physiques. Ces équations donnent la dépendance des variables σ_{ij} , u et q_i par rapport à l'histoire de la déformation du matériau et de la température. Pour un modèle donné, on choisit un certain nombre de variables cinématiques et thermiques et on exprime comment σ_{ij} , u et q_i dépendent de ces variables.

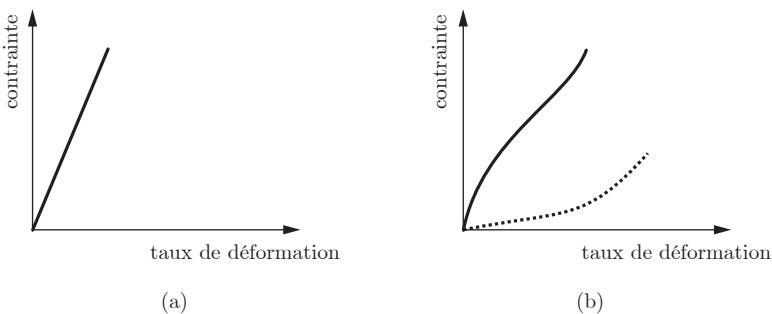


Fig. 5.1 Relation contrainte-taux de déformation (a) linéaire et (b) non linéaire.

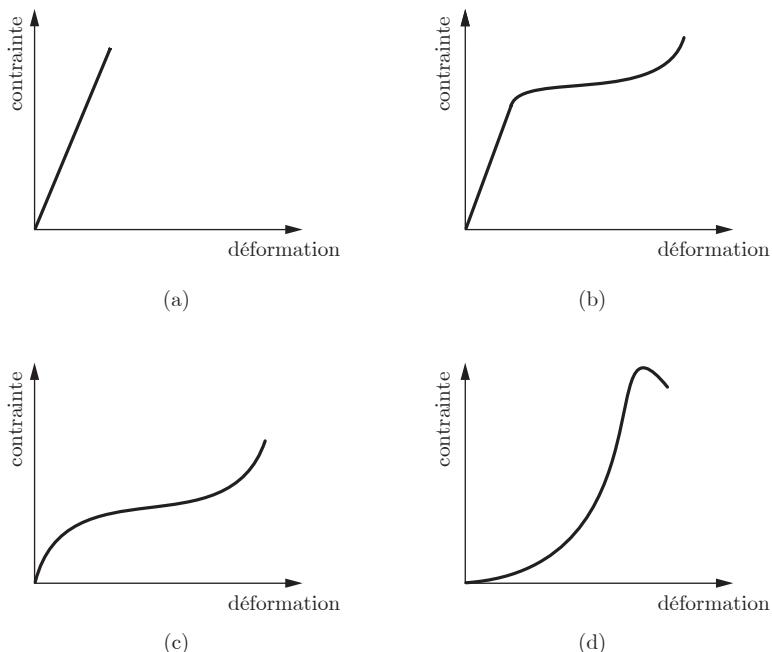


Fig. 5.2 Relation contrainte-déformation pour un solide élastique (a) ; un solide élastoplastique (b) ; un élastomère (c) et un tissu biologique mou (d).

L'ensemble des relations formé par les équations de conservation et les équations de comportement établit le modèle mathématique du milieu continu. Ce modèle constitue une idéalisation du comportement du matériau. C'est ainsi que le comportement d'un même matériau peut être décrit par divers modèles selon les circonstances des situations physiques où ces modèles sont appliqués. Par exemple, à température ambiante, le verre est un matériau élastique ; dans la zone dite de transformation, vers $600\text{ }^{\circ}\text{C}$, il est viscoélastique. Dans le four de fusion, on peut le considérer comme un fluide visqueux newtonien incompressible.

sible. Un autre exemple est fourni par les polymères qui dans un mouvement lent se comportent comme un fluide visqueux, tandis que sollicités dans un mouvement rapide, ils réagissent comme un solide élastique.

Les équations de comportement doivent *au minimum* satisfaire les trois principes fondamentaux suivants :

- 1) objectivité et indépendance de l'observateur par rapport au référentiel;
- 2) prise en compte des propriétés de symétrie matérielle du milieu continu considéré ;
- 3) respect du second principe de la thermodynamique.

Les principes fondateurs pour l'écriture des équations de comportement sont également largement développés dans les ouvrages suivants : [19, 28, 30, 33, 61, 67]. Le texte de Truesdell et Toupin [70] constitue un apport important et très élaboré de la théorie des milieux continus.

5.2 Principes généraux

Nous allons à présent introduire plusieurs principes généraux (incluant les précédents) que l'on doit généralement voir absolument vérifiés lorsque l'on établit une loi de comportement. On rappelle que χ représente le mouvement d'un corps \mathcal{C} donné par (2.1).

5.2.1 Hypothèse de causalité ou de déterminisme

La contrainte actuelle à l'instant présent t dans un matériau est déterminée par l'histoire du mouvement de ce matériau. Donc, le tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(\mathbf{x}, t)$ est donné par

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{C}}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau); \mathbf{X}, t), \quad (5.9)$$

où la fonctionnelle Σ caractérise de façon générale les propriétés mécaniques du corps \mathcal{C} . Une dépendance explicite du temps est permise. De plus, la fonctionnelle peut varier d'une particule à une autre (dépendance en \mathbf{X}) traduisant une distribution inhomogène des propriétés du matériau. On peut interpréter, de manière simplifiée, une fonctionnelle comme une fonction d'une autre fonction (ici, de la fonction du mouvement χ). En mécanique des milieux continus, elle est représentée très souvent par une intégrale sur les configurations passées $\chi(\mathbf{Z}, \tau)$ ($\mathbf{Z} \in \mathcal{C}, \tau < t$) permettant ainsi d'écrire les lois de comportement pour les différentes classes de matériaux. Notons que l'écriture de (5.9) exprime une non-localité puisqu'on trouve une dépendance par rapport à chaque point \mathbf{Z} appartenant au corps \mathcal{C} . Pour simplifier, nous noterons parfois la fonctionnelle relative à $\sigma(\mathbf{x}, t)$ par $\Sigma(\chi; \mathbf{X}, t)$.

5.2.2 Principe d'action locale

Pour une particule donnée \mathbf{X} du matériau, la fonctionnelle $\Sigma(\chi; \mathbf{X}, t)$ ne dépend que du voisinage de \mathbf{X} . Pour deux mouvements quelconques χ et $\bar{\chi}$ coïncidant dans un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}$ quel que soit le temps $\tau \leq t$, la valeur de Σ est inchangée. Formellement, on écrit

$$\Sigma(\chi; \mathbf{X}, t) = \Sigma(\bar{\chi}; \mathbf{X}, t) \quad (5.10)$$

pourvu qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{X})$ tel que

$$\chi(\mathbf{Z}, \tau) = \bar{\chi}(\mathbf{Z}, \tau) \quad \forall \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X}) \quad \forall \tau \leq t. \quad (5.11)$$

On observe que $\Sigma(\chi; \mathbf{X}, t)$ est une fonctionnelle de la fonction χ à deux variables, à savoir le temps τ et la particule \mathbf{Z} au voisinage de la particule fixée \mathbf{X} . Dans ce cas, le tenseur $\sigma(x, t)$ est donné par une relation analogue à (5.9) telle que

$$\bar{\sigma}(x, t) = \sigma(x, t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau); \mathbf{X}, t). \quad (5.12)$$

5.2.3 Principe d'objectivité

Toutes les équations de comportement qui satisfont le principe d'action locale ne sont pas admissibles. Elles doivent en outre satisfaire le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle qui exprime que la fonctionnelle Σ est invariante dans tout changement continu de référentiel. On désire écrire des lois de comportement qui sont indépendantes de l'observateur, et notamment, indépendantes des mouvements rigides superposés. Plus précisément, on a (sect. 2.11)

$$\mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{X}, t) \quad (5.13)$$

$$\sigma^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\sigma(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t) \quad (5.14)$$

$$t^* = t - \alpha. \quad (5.15)$$

En utilisant (5.13)-(5.15), le principe d'objectivité se traduit par

$$\sigma^*(\mathbf{X}, t^*) = \sum_{\substack{\tau^* \leq t^* \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi^*(\mathbf{Z}, \tau^*); \mathbf{X}, t^*) \quad (5.16)$$

tel que

$$\sum_{\substack{\tau^* \leq t^* \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi^*(\mathbf{Z}, \tau^*); \mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t) \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau); \mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^T(t). \quad (5.17)$$

Afin de mettre en lumière l'incidence de ce principe sur l'écriture de la fonctionnelle Σ , on étudie successivement trois changements particuliers de référentiel.

Dans la suite nous prendrons τ comme variable temporelle et t indiquera l'instant présent (ou actuel), auquel la contrainte est évaluée. Dès lors, $\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{Q}^T(\tau) = \mathbf{Q}^T(\tau)\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{Q}(\tau) = 1, \forall \tau$.

Translation rigide du repère spatial sans décalage de l'échelle de temps :

Posons $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$, $\alpha = 0$ et

$$\mathbf{c}(\tau) = -\chi(\mathbf{X}, \tau). \quad (5.18)$$

Cela signifie que le repère spatial est en translation rigide de sorte qu'après changement de référentiel, le point matériel \mathbf{X} au temps τ reste à l'origine. De plus, $t^* = t$. Par (5.13), on a pour $\mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})$

$$\chi^*(\mathbf{Z}, \tau) = \chi(\mathbf{Z}, \tau) - \chi(\mathbf{X}, \tau)$$

et par (5.12), (5.14) et (5.16), il vient

$$\sigma^*(\mathbf{X}, t^*) = \sigma(\mathbf{X}, t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau) - \chi(\mathbf{X}, \tau); \mathbf{X}, t). \quad (5.19)$$

Changement d'échelle de temps et repère fixe :

Cette situation correspond au choix suivant :

$$\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I} \quad \mathbf{c}(\tau) = \mathbf{0} \quad t = \alpha. \quad (5.20)$$

Le temps présent t est le temps de référence après le changement de repère. On a donc respectivement par (5.15) et (5.20)

$$\tau^* = \tau - \alpha = \tau - t. \quad (5.21)$$

A l'instant t^* , on a en utilisant (5.21) et (5.14)

$$t^* = t - t = 0 \quad \sigma^*(\mathbf{X}, t^*) = \sigma^*(\mathbf{X}, 0) = \sigma(\mathbf{X}, t). \quad (5.22)$$

Par (5.13), (5.20) et (5.21) on obtient

$$\chi^*(\mathbf{Z}, \tau^*) = \chi(\mathbf{Z}, \tau) = \chi(\mathbf{Z}, t + \tau^*). \quad (5.23)$$

A partir de (5.22), (5.16) et (5.23), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{X}, t) &= \sigma^*(\mathbf{X}, 0) = \sum_{\substack{\tau^* \leq t^* \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau^* + t); \mathbf{X}, 0) \\ &= \sum_{\substack{\tau - t \leq 0 \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau); \mathbf{X}, 0). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Par conséquent, la fonctionnelle Σ ne dépend pas explicitement de t . On introduit

$$\tau = t - s \quad 0 \leq s \leq \infty. \quad (5.25)$$

Combinant (5.19) et (5.24), on obtient

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \sum_{\substack{s \geq 0 \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, t - s) - \chi(\mathbf{X}, t - s); \mathbf{X}). \quad (5.26)$$

On constate donc que la fonctionnelle Σ dépend uniquement des mouvements relatifs à partir du temps présent de toutes les particules \mathbf{Z} dans \mathcal{C} , c'est-à-dire $\mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})$.

Rotation rigide du repère :

On choisit $\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{0}$, $\alpha = 0$ et $\mathbf{Q}(\tau)$ arbitraire. Ceci correspond à une rotation instationnaire du référentiel. Dans cette rotation, le tenseur des contraintes se transforme suivant la relation

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t). \quad (5.27)$$

Par combinaison de (5.13), (5.14), (5.16), (5.26) et (5.27), on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\Sigma}(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X})\mathbf{Q}^T(t) \\ = \boldsymbol{\Sigma}(\chi^*(\mathbf{Z}, t-s) - \chi^*(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}) \\ = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{Q}(t-s)(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s)), \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Cette dernière équation est la restriction qu'on doit imposer à la fonctionnelle $\boldsymbol{\Sigma}$ pour qu'elle soit objective. On peut voir aisément qu'inversement, toute équation de constitution de la forme (5.26) obéissant à la condition (5.28) satisfait le principe d'indifférence matérielle. Ceci est dû au fait que tout changement général de référentiel peut être obtenu par une succession des trois changements particuliers envisagés ci-dessus. Dès lors, l'équation (5.26) avec la condition (5.28) satisfaite est l'équation de comportement la plus générale pour la théorie mécanique des milieux matériels continus. Plus précisément, on constate que la contrainte est représentée par une fonction tensorielle isotrope, à valeur tensorielle.

5.2.4 Principe d'invariance matérielle

Les matériaux solides ont des propriétés de symétrie dues à leurs caractéristiques cristallographiques : solide à réseau cristallin cubique, rhomboédrique, etc. Certains fluides possèdent également ce type de propriétés ; par exemple, les fluides à cristaux liquides. Dans ce cas, les fonctionnelles de comportement ne vont pas changer de forme lorsque les coordonnées matérielles (X_1, X_2, X_3) deviennent $(X_1, X_2, -X_3)$. Ceci représente une opération de réflexion du repère par rapport au plan $X_3 = 0$. Cette condition cependant impose des restrictions sur les équations de constitution.

La réflexion à travers un plan de symétrie passant par l'origine 0 et orthogonal au vecteur unitaire \mathbf{n} est définie par le tenseur \mathbf{R} de composantes

$$R_{ij} = \delta_{ij} - 2 n_i n_j \quad \text{avec} \quad \det [R] = -1. \quad (5.29)$$

Notons $\{\mathbf{O}\}$ un sous-groupe du groupe complet des transformations orthogonales pour les axes matériels et $\{\mathbf{B}\}$ le groupe de translations de ces axes. Alors le principe d'invariance matérielle s'énonce comme suit.

PRINCIPE D'INVARIANCE MATÉRIELLE

Les équations de comportement doivent être invariantes formellement par rapport à un groupe de transformations orthogonales $\{\mathbf{O}\}$ et d'un groupe de translations $\{\mathbf{B}\}$ des coordonnées matérielles. Ces restrictions proviennent des conditions de symétrie induites par $\{\mathbf{O}\}$ et $\{\mathbf{B}\}$ dans le système de coordonnées \mathbf{X} .

On aura donc une transformation de la forme

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{O}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \quad (5.30)$$

avec

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \det \mathbf{O} = \pm 1. \quad (5.31)$$

Ces conditions expriment des symétries géométriques représentées par $\{\mathbf{O}\}$ et des inhomogénéités représentées par $\{\mathbf{B}\}$, au point \mathbf{X} , des propriétés physiques du corps matériel. Lorsque $\{\mathbf{O}\}$ est le groupe orthogonal propre caractérisé par la matrice $[O]$ telle que $\det [O] = +1$, le matériau est **hémitrope**. On ne peut pas opérer de réflexion de l'axe x_i par rapport au plan $x_i = 0$. Lorsque $\{\mathbf{O}\}$ est le groupe complet ($\det [O] = \pm 1$), le matériau est dit **isotrope**. Un matériau qui n'est pas hémitrope est appelé **anisotrope**.

Lorsque les fonctions ne dépendent pas des translations $\{\mathbf{B}\}$ de l'origine des coordonnées matérielles, on dit que le matériau est **homogène**. Si ces fonctions changent avec certaines translations $\{\mathbf{B}\}$ des axes matériels, alors le matériau est **inhomogène**.

Si on couple le principe d'invariance matérielle et le principe d'objectivité avec une transformation relative aux coordonnées matérielles X_i , on a la condition

$$\begin{aligned} \Sigma(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}) \\ = \Sigma(\chi(\mathbf{OZ} + \mathbf{B}, t-s) - \chi(\mathbf{OX} + \mathbf{B}, t-s), \mathbf{OX} + \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.2.5 Principe de mémoire

Les valeurs des variables de comportement dans un passé lointain n'affectent pas de manière appréciable les valeurs actuelles de ces variables au temps présent.

Nous reviendrons sur ce principe dans la suite en le précisant et en introduisant le concept de mémoire évanescante.

5.2.6 Principe d'admissibilité

Toutes les équations de comportement doivent être cohérentes avec les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus, c'est-à-dire qu'elles sont soumises aux lois de conservation : masse, quantité de mouvement, énergie ainsi qu'à l'inégalité de Clausius-Duhem.

5.3 Conséquence du principe d'action locale

Supposons pour simplifier que la fonction vectorielle $\chi(\mathbf{Z}, t)$ puisse être développée en série de Taylor autour de $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ pour tout $\tau \leq t$ et pour tout $\mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})$:

$$\chi(\mathbf{Z}, \tau) = \chi(\mathbf{X}, \tau) + (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, \tau) + 0(\|\mathbf{Z} - \mathbf{X}\|^2). \quad (5.33)$$

On voit apparaître dans cette expression le tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} introduit par la relation (2.65). Nous nous restreindrons au cas de matériaux qui ne dépendent que des gradients du premier ordre en nous limitant au premier terme du développement (5.33). On aboutit à une écriture de $\sigma(\mathbf{X}, t)$ telle que

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma \left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}; \mathbf{X}, t \right). \quad (5.34)$$

Ces matériaux sont dits *simples*.

En combinant l'écriture résultant du principe d'action locale régulière (5.34), ainsi que l'équation (5.26), il vient

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \sum_{s \geq 0} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}(t-s), \mathbf{Z} - \mathbf{X}, \mathbf{X} \right). \quad (5.35)$$

On a écrit dans (5.35) la dépendance explicite par rapport aux vecteurs directionnels $\mathbf{Z} - \mathbf{X}$ qui ont pour origine \mathbf{X} à trois dimensions spatiales. On peut écrire plus simplement que cette dépendance s'exprime en fonction de la base vectorielle \mathbf{e}_k des coordonnées matérielles de \mathbf{X} . Cette écriture rappelle que la forme de la fonctionnelle Σ dépend du choix des bases. L'introduction de $\mathbf{Z} - \mathbf{X}$ dans (5.35) traduit la dépendance directionnelle des propriétés matérielles au point \mathbf{X} . Lorsqu'aucune ambiguïté n'est permise, on peut négliger $\mathbf{Z} - \mathbf{X}$ dans les arguments de la fonctionnelle constitutive. De plus, l'équation (5.35) exprime que la contrainte au temps t dépend de l'histoire du gradient de déformation. On a

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \sum_{s \geq 0} (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}). \quad (5.36)$$

Si on impose la condition d'objectivité (5.28) à la relation (5.36), on obtient

$$\mathbf{Q}(t) \Sigma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}) \mathbf{Q}^T(t) = \Sigma(\mathbf{Q}(t-s) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}). \quad (5.37)$$

Par le théorème de décomposition polaire (2.73), on a

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t-s) = \mathbf{R}(t-s) \mathbf{U}(\mathbf{X}, t-s),$$

où $\mathbf{R}(t-s)$ et $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t-s)$ sont les histoires du tenseur de rotation et du tenseur symétrique d'élargissement à droite, respectivement. Si on fait le choix particulier $\mathbf{Q}(t-s) = \mathbf{R}^T(t-s)$, l'équation (5.37) devient

$$\mathbf{R}^T \Sigma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}) \mathbf{R} = \Sigma(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t-s), \mathbf{X}). \quad (5.38)$$

On peut omettre d'incorporer la dépendance explicite de Σ par rapport à \mathbf{X} car celle-ci est déjà prise en compte par \mathbf{F} . Cela facilite l'écriture et cependant, ceci n'affecte pas la généralité des considérations qui suivent. En conséquence, la relation (5.36) du tenseur des contraintes s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t)\Sigma(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t-s))\mathbf{R}^T(t). \quad (5.39)$$

Cette dernière relation est la forme générale de l'équation de comportement d'un matériau simple. Elle fournit la solution générale de l'équation fonctionnelle (5.37). De plus, elle montre que la contrainte dans un matériau simple est affectée par la rotation au temps présent, alors que les rotations passées n'ont pas d'influence.

Si on rappelle le théorème de décomposition polaire et (2.88), on peut mettre (5.39) sous la forme

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{C}(t-s)), \quad (5.40)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} \quad \mathcal{F}\left((\mathbf{U}(t-s))^2\right) \equiv \mathbf{U}(t)\Sigma(\mathbf{U}(t-s))\mathbf{U}(t).$$

Le tenseur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes transporté (convecté). En posant

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}(t-s)) \equiv \mathbf{C}^{-1}(t)\mathcal{F}(\mathbf{C}(t-s))\mathbf{C}^{-1}(t),$$

alors l'équation (5.40) devient

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{F}\mathcal{L}(\mathbf{C}(t-s))\mathbf{F}^T. \quad (5.41)$$

5.4 Equations thermomécaniques de comportement

Jusqu'à présent, nous avons considéré des matériaux en situation isotherme. Dès qu'on veut tenir compte d'effets thermiques, il faut introduire une nouvelle variable primaire analogue à celle du mouvement pour la déformation. A cette fin, on utilise la température que nous prenons telle que

$$T = T(\mathbf{X}, t). \quad (5.42)$$

Ceci signifie que dans un problème thermomécanique, les variables constitutives indépendantes sont le mouvement χ et la température T . La vitesse sera simplement obtenue par la dérivée temporelle du mouvement et le tenseur des gradients de vitesse à partir de \mathbf{v} . La masse volumique est reliée au mouvement par l'équation de continuité (3.37) écrite sous la forme $\det \mathbf{F} = P_0/P = \rho_0/\rho$ en coordonnées spatiales.

5.4.1 Principe de déterminisme

Outre l'histoire du mouvement du matériau, la contrainte est influencée par la température. L'équation (5.9) se généralise en la relation

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{C}}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau), T(\mathbf{Z}, \tau); \mathbf{X}, t). \quad (5.43)$$

Puisqu'on tient compte des effets thermiques, nous devons aussi donner des relations de comportement pour le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} , l'énergie interne u et la densité d'entropie s . A l'équation (5.43) viendront s'ajouter des équations de comportement telles que le principe de déterminisme se généralise comme suit : la valeur des fonctions de comportement thermomécanique $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, u, s)$ en un point matériel \mathbf{X} et au temps t est déterminée par l'histoire du mouvement et de la température pour tous les points du corps \mathcal{C} . On aura donc

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\chi, T; \mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}(\mathbf{Z}, \tau), T(\mathbf{Z}, \tau), \mathbf{X}, t) \quad (5.44)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(\chi, T; \mathbf{X}, t) \quad (5.45)$$

$$u(\mathbf{X}, t) = \mathcal{U}(\chi, T; \mathbf{X}, t) \quad (5.46)$$

$$s(\mathbf{X}, t) = \mathcal{S}(\chi, T; \mathbf{X}, t). \quad (5.47)$$

5.4.2 Principe d'équiprésence

A priori, toutes les fonctionnelles constitutives sont exprimées en fonction du même ensemble de variables indépendantes de constitution, jusqu'à preuve du contraire.

5.4.3 Principe d'action locale

Le raisonnement que nous avons tenu à la section 5.3 s'applique aussi au champ de température. On effectue un développement en série de Taylor de $T(\mathbf{Z}, \tau)$ autour de $T(\mathbf{X}, \tau)$ pour écrire

$$T(\mathbf{Z}, \tau) = T(\mathbf{X}, \tau) + (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}} + O(\|\mathbf{Z} - \mathbf{X}\|^2). \quad (5.48)$$

En se restreignant aux matériaux simples, la fonctionnelle $\boldsymbol{\Sigma}$ ne dépend que des gradients d'ordre 1. Il vient donc

$$T(\mathbf{Z}, \tau) \simeq T(\mathbf{X}, \tau) + (\mathbf{Z} - \mathbf{X}) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} \left(\chi(\mathbf{Z}, \tau), \frac{\partial \chi(\mathbf{Z}, \tau)}{\partial \mathbf{X}}, T(\mathbf{Z}, \tau), \frac{\partial T(\mathbf{Z}, \tau)}{\partial \mathbf{X}}; \mathbf{X}, t \right). \quad (5.49)$$

5.4.4 Principe d'objectivité

On a vu au chapitre 2, qu'un champ scalaire est objectif si et seulement si

$$T^* = T. \quad (5.50)$$

Pour la translation rigide du référentiel (5.18), la fonctionnelle de σ s'écrit

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \sum_{\substack{\tau \leq t \\ \mathbf{Z} \in \mathcal{V}(\mathbf{X})}} (\chi(\mathbf{Z}, \tau) - \chi(\mathbf{X}, \tau), T(\mathbf{Z}, \tau), \mathbf{X}, t). \quad (5.51)$$

Les considérations liées au changement d'échelle de temps conduisent à la relation

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s), T(\mathbf{Z}, t-s), \mathbf{X}). \quad (5.52)$$

Enfin, la prise en compte de la rotation du référentiel impose la condition

$$\begin{aligned} & Q(t) \Sigma(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s), T(\mathbf{Z}, t-s), \mathbf{X}) Q^T(t) \\ &= \Sigma(Q(t-s)(\chi(\mathbf{Z}, t-s) - \chi(\mathbf{X}, t-s)), T(\mathbf{Z}, t-s), \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (5.53)$$

En combinant les résultats du principe d'action locale régulière (5.49) et de l'objectivité, on aboutit à la relation

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma \left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}(t-s), T(t-s), \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}(t-s), \mathbf{Z} - \mathbf{X}, \mathbf{X} \right) \quad (5.54)$$

qui généralise (5.35).

Lorsque la théorie tient compte des effets thermiques, on doit s'attendre à ce que la masse volumique varie. On peut montrer qu'en toute généralité, l'utilisation du théorème de décomposition polaire pour imposer l'objectivité fait apparaître le tenseur de déformation de Cauchy-Green, mais aussi l'invariant scalaire lié au tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} , à savoir

$$\det \mathbf{F}(t-s) = (\det \mathbf{C}(t-s))^{1/2} = \frac{\rho_0}{\rho(t-s)}. \quad (5.55)$$

(Voir (2.68), (2.77) et (3.37).)

En conséquence, l'équation la plus générale des matériaux simples est de la forme

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F} \mathcal{L} \left(\mathbf{C}(t-s), \rho^{-1}(t-s), T(t-s), \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}(t-s), \mathbf{X} \right) \mathbf{F}^T, \quad (5.56)$$

ce qui est une généralisation de (5.41).

5.5 Définition d'un solide et d'un fluide

On définit un fluide comme un milieu matériel simple dont on suppose que la configuration de référence est, le plus souvent, celle de l'instant présent. Un

fluide est aussi un matériau incapable de « résister » à un effort de cisaillement. Soumis à cette contrainte, il se met à s'écouler. Les fluides classiques du type newtonien ont une mémoire infiniment courte. Ceci signifie que dans la fonctionnelle (5.56), la contrainte ne dépend que de $\mathbf{C}(t-s)$, par exemple, pour $0 \leq s \leq \varepsilon$ avec ε tendant vers zéro. Le tenseur des contraintes a une mémoire quasi instantanée.

On définit un solide comme un milieu matériel simple qui possède des configurations préférées. L'une d'entre elles peut être prise comme configuration de référence et on l'appellera l'état de référence. Dans la plupart des cas, dans cet état, le matériau est non constraint ($\boldsymbol{\sigma} = 0$). On dit que c'est l'état naturel du milieu. Si au contraire, à cet état de référence, $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$, on dira que le matériau est préconstraint.

5.6 Principe de mémoire régulière

On suppose que les histoires thermo-mécaniques $\chi(\mathbf{X}, \tau)$ et $T(\mathbf{X}, \tau)$ peuvent être développées en série de Taylor par rapport à τ pour $\tau = t$ et $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{C}$. On a

$$\chi(\mathbf{X}, \tau) = \chi(\mathbf{X}, t) + (\tau - t)\dot{\chi}(\mathbf{X}, t) + \dots \quad (5.57)$$

et

$$T(\mathbf{X}, \tau) = T(\mathbf{X}, t) + (\tau - t)\dot{T}(\mathbf{X}, t) + \dots \quad (5.58)$$

avec la notation

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}, \quad \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}. \quad (5.59)$$

Pour rappel, la relation (5.59) est identique à (2.17). Pour obtenir un principe de mémoire régulière, on supposera que les fonctionnelles constitutives sont aussi régulières que possible afin d'adoucir des discontinuités dans ces fonctions et/ou dans leurs dérivées temporelles. En conséquence, l'axiome de mémoire régulière conduit à remplacer la relation (5.56) par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}\mathcal{L} & \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \ddot{\mathbf{C}}, \dots; \right. \\ & \left. \rho^{-1}, \dot{\rho}, \ddot{\rho}, \dots; T, \dot{T}, \ddot{T}, \dots; \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}, \frac{\partial \dot{T}}{\partial \mathbf{X}}, \dots, \mathbf{X} \right) \mathbf{F}^T, \end{aligned} \quad (5.60)$$

où apparaissent des dérivées temporelles des diverses variables.

Le concept de mémoire évanescante fait appel à la fonction d'oubli qui est introduite dans l'équation de comportement afin de donner plus de poids aux événements du passé récent proches de t et moins de poids au passé lointain. Typiquement, ces fonctions d'oubli ont une écriture du type $e^{-\beta s}$ avec β constant. Elles sont particulièrement utiles en viscoélasticité pour tenir compte des phénomènes de fluage, c'est-à-dire de déformation sous contrainte constante, et de relaxation des contraintes, c'est-à-dire de déformation maintenue constante sous contrainte variable dans le temps. Quoique ce sujet soit important pour bon nombre de matériaux, il sort du cadre introductif de cette monographie.

5.7 Exercices

[5.1] Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un champ vectoriel objectif. Montrer que son gradient spatial est également objectif, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$(\nabla \mathbf{u})^* = \mathbf{Q} \nabla \mathbf{u} \mathbf{Q}^T, \quad (5.61)$$

où $(\nabla \mathbf{u})^* = \partial \mathbf{u}^* / \partial \mathbf{x}^*$ désigne le gradient spatial du vecteur \mathbf{u}^* .

[5.2] Démontrer que le tenseur des taux de déformation \mathbf{d} (resp. des taux de rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}}$) est (resp. n'est pas) objectif.

[5.3] Soit \mathbf{T} un tenseur objectif quelconque d'ordre 2. La dérivée matérielle de \mathbf{T} est-elle objective ?

[5.4] Soit \mathbf{T} un tenseur objectif quelconque d'ordre 2. Démontrer que l'expression

$$\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{T} \quad (5.62)$$

est objective, où $\dot{\mathbf{T}}$ dénote la dérivée matérielle de \mathbf{T} et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ le tenseur des taux de rotation.

[5.5] Démontrer que le tenseur \mathbf{T} d'ordre 2, défini par la relation

$$\mathbf{T} = 2\dot{\mathbf{d}} + 2\mathbf{dL} + 2\mathbf{L}^T\mathbf{d} \quad (5.63)$$

est objectif. Le tenseur \mathbf{d} est le tenseur des taux de déformation et $\dot{\mathbf{d}}$ est sa dérivée matérielle. Le tenseur \mathbf{L} est celui du gradient de vitesse. Pour la démonstration, il faut utiliser l'équation (à démontrer également)

$$\dot{\mathbf{d}}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{d}\dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{d}}\mathbf{Q}^T. \quad (5.64)$$

CHAPITRE 6

Lois de comportement classiques

6.1 Introduction

Nous allons examiner dans ce chapitre les lois de comportement classiques des fluides visqueux newtoniens, des solides hyperélastiques et élastiques et de la conduction de la chaleur. Nous évaluerons ces lois constitutives par rapport au second principe de la thermodynamique afin de constater que leur écriture satisfait cette inégalité. La section relative à la thermodynamique du fluide idéal effectue la liaison méthodologique entre la thermodynamique des milieux continus et la thermodynamique classique afin de montrer que ces deux points de vue sont complémentaires. Le chapitre se termine par des considérations relatives à la thermoélasticité.

Pour le comportement des fluides, des compléments de lecture sont proposés dans [2, 19, 22, 23, 35, 49, 53, 54, 67, 69, 70]. Pour celui des solides, le lecteur consultera [5, 12, 13, 32, 43, 47, 52, 59, 66].

6.2 Fluides simples

Généralement, on peut dire qu'un fluide est un milieu continu tel que dans n'importe quelle configuration déformée, qui laisse la masse volumique inchangée, il ne garde pas mémoire de ses états passés. Dès lors on peut proposer la définition suivante : un fluide est un matériau tel que chaque configuration du corps laissant la masse volumique à une valeur prescrite puisse être choisie comme configuration de référence [19].

Si on se restreint aux dérivées partielles d'ordre 1 (par rapport au temps ou à l'espace) en (5.60), on a l'équation pour les matériaux thermomécaniques simples

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}\mathcal{L}\left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \rho^{-1}, \dot{\rho}, T, \dot{T}, \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}, \frac{\partial \dot{T}}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X}\right)\mathbf{F}^T. \quad (6.1)$$

Puisque toute configuration peut être une configuration de référence, on choisit la configuration actuelle comme celle de référence et on peut écrire $\boldsymbol{x} = \mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}$ avec ρ prescrit. Par (2.179) et (2.181), il s'ensuit que

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad \dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = 2\mathbf{d} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \boldsymbol{x}}. \quad (6.3)$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse (3.41) $\dot{\rho} = -\rho d_{ii}$, on élimine la dépendance par rapport à $\dot{\rho}$. La relation (6.1) devient donc

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{K} \left(\mathbf{d}, \rho^{-1}, T, \dot{T}, \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial \dot{T}}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \right). \quad (6.4)$$

Dans la suite, on supposera que le comportement des fluides est indépendant du gradient de température $\partial T / \partial \boldsymbol{x}$ et de la variation temporelle de ce gradient $\partial \dot{T} / \partial \boldsymbol{x}$. Cette simplification est cohérente avec l'observation expérimentale du comportement fluide. L'équation (6.4) devient

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{d}, \rho^{-1}, T, \dot{T}, \boldsymbol{x}). \quad (6.5)$$

Le passage de (6.1) à (6.5) a fait perdre le caractère objectif de la relation (6.1). On le rétablit en appliquant le principe d'objectivité à (6.5) qui démontre que la fonctionnelle \mathbf{K} ne dépend pas explicitement de \boldsymbol{x} . Nous considérons que la contrainte dépend de la valeur instantanée de la température, et que l'histoire \dot{T} est obtenue à partir du principe de conservation d'énergie. Par conséquent, un fluide est donc un milieu dont la loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{d}, \rho^{-1}, T) \quad (6.6)$$

avec la condition imposée par l'objectivité

$$\mathbf{Q} \mathbf{K} \mathbf{Q}^T = \mathbf{K}(\mathbf{Q} \mathbf{d} \mathbf{Q}^T, \rho^{-1}, T). \quad (6.7)$$

La condition (6.7) impose que la fonctionnelle, maintenant réduite à la fonction \mathbf{K} , soit une fonction isotrope du tenseur symétrique \mathbf{d} . Par application du théorème sur les fonctions isotropes de tenseurs symétriques (§ 1.3.11), la relation (6.7) devient

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = K_0 \mathbf{I} + K_1 \mathbf{d} + K_2 \mathbf{d}^2. \quad (6.8)$$

Les fonctions scalaires K_i ($i = 0, 1, 2$) seront fonctions des invariants de \mathbf{d} , de ρ^{-1} et T .

Lorsque le fluide est incompressible, sa masse volumique est invariante. Donc, $\rho_0 = \rho$ et $\det \mathbf{F} = 1$. De plus, le premier invariant de \mathbf{d} est nul. L'équation de comportement d'un *fluide incompressible* est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = -p \mathbf{I} + K_1(I_2(\mathbf{d}), I_3(\mathbf{d})) \mathbf{d} + K_2(I_2(\mathbf{d}), I_3(\mathbf{d})) \mathbf{d}^2, \quad (6.9)$$

avec p , la pression scalaire indéterminée. On remarque que lorsque le fluide est au repos, $\mathbf{d} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$. Le comportement à l'équilibre du fluide sera obtenu par l'hydrostatique (éq. (3.133)). Il faut remarquer que la contrainte en ce qui concerne sa dépendance par rapport à la vitesse, est fonction uniquement du tenseur symétrique des taux de déformation. Ceci est une conséquence directe du principe d'objectivité qui exclut l'utilisation du tenseur des taux de rotation qui n'est pas objectif et qui plus est, est antisymétrique.

Nous remarquons que l'équation (6.9) est non linéaire en \mathbf{d} . Il s'agit d'un fluide dit non newtonien par opposition aux fluides classiques newtoniens. On le connaît sous le nom de fluide de Rivlin-Ericksen de complexité un.

6.3 Fluides classiques ou fluides visqueux newtoniens

Un *fluide classique* est un milieu tel que les composantes du tenseur des contraintes sont des fonctions *linéaires* du tenseur des taux de déformation. Cette définition impose $K_2 = 0$ dans l'équation (6.9). On notera le cas particulier des *fluides parfaits* ou *fluides non visqueux*, pour lequel par définition, le tenseur des contraintes est indépendant de \mathbf{d} . Le tenseur des contraintes est alors sphérique (composantes hors diagonale nulles). On écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad (6.10)$$

$$p = p(\rho, T). \quad (6.11)$$

Dans (6.11), on a utilisé le fait que $1/\rho = v$ avec v le volume spécifique et que cette dernière variable apparaît dans les lois de la physique des gaz. Si le fluide est *incompressible*, la pression sera déterminée par la résolution des équations du mouvement. Par contre, si le fluide est compressible, la pression sera donnée par une équation d'état résultant des considérations thermodynamiques. Si le fluide n'est pas parfait, il est dit visqueux. On pose

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad (6.12)$$

avec \mathbf{T} , le tenseur des extra-contraintes, tel que $\mathbf{T} = K_1(I_2(\mathbf{d}), I_3(\mathbf{d}))\mathbf{d}$.

Pour les fluides classiques, \mathbf{T} est une fonction linéaire de \mathbf{d} et on peut montrer que \mathbf{T} est nécessairement de la forme

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{d}\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}, \quad (6.13)$$

où λ et μ sont des coefficients scalaires. Le tenseur \mathbf{T} dépend du tenseur des taux de déformation (et non de la déformation) de telle sorte qu'il s'annule lorsque le fluide est en mouvement de corps rigide (c.-à-d. taux de déformation nul). La pression est un champ scalaire qui ne dépend pas explicitement du taux de déformation. Le coefficient λ est la *viscosité volumique*, tandis que μ est le coefficient de *viscosité dynamique*. On verra que λ et μ sont toujours positifs. Ces coefficients ont pour dimensions $M L^{-1} T^{-1}$ et les unités correspondantes du Système International (S.I.) sont $N s/m^2$ ou $Pa.s$.

Tableau 6.1 Constantes matérielles de fluides visqueux.

	μ (Pa · s)	ρ (kg/m ³)	ν (m ² s ⁻¹)
air	$1,776 \cdot 10^{-5}$	1,225	$14,5 \cdot 10^{-6}$
eau	0,0011	999,2	$1,138 \cdot 10^{-6}$

A titre d'exemple, on donne dans le tableau 6.1 les constantes matérielles, à température ambiante, de deux fluides largement utilisés dans les applications industrielles : l'air et l'eau. La *viscosité cinématique* ν est définie par la relation $\nu = \mu/\rho$. En notation indicelle, l'équation de constitution du fluide visqueux newtonien compressible s'écrit

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (6.14)$$

avec

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T) \\ \lambda &= \lambda(\rho, T) \\ \mu &= \mu(\rho, T) \\ d_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'équation de comportement du fluide visqueux incompressible se réduit à

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (6.16)$$

avec p un champ scalaire indéterminé et μ , une constante dans la majorité des cas. Remarquons qu'en prenant la trace de (6.16), on obtient $p = -1/3 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}$ et donc que la pression est la moyenne des composantes diagonales du tenseur des contraintes.

EXEMPLE 6.1 (écoulement de cisaillement simple)

Soit un écoulement de cisaillement simple établi entre deux parois parallèles. La paroi inférieure est fixe et la paroi supérieure se meut dans son propre plan à la vitesse U constante. Le champ de vitesse est tel que

$$\begin{aligned} v_1 &= kx_2 \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Seule la composante d_{12} du tenseur \boldsymbol{d} est différente de zéro. Par la suite, en un point arbitraire M du fluide présenté à la figure 6.1, on a $\sigma_{22} = -p$ et $\sigma_{12} = \mu k$. Le fluide situé au-dessus du point M exerce sur le fluide situé dans la zone inférieure des efforts de cisaillement proportionnels à μ et au

gradient de vitesse k dans la direction x_2 . Par la présence de viscosité, les couches fluides les plus rapides tendent à entraîner les couches fluides plus lentes avec lesquelles elles sont en contact ; réciproquement, les couches plus lentes tendent à freiner celles qui s'écoulent plus rapidement.

Cette interprétation physique confirme qu'il est raisonnable de supposer $\mu > 0$. Ceci montre aussi que dans le fluide parfait, les différentes couches fluides n'exercent aucun effet d'accélération ou de freinage les unes sur les autres. Elles ne sont soumises qu'aux effets de pression.

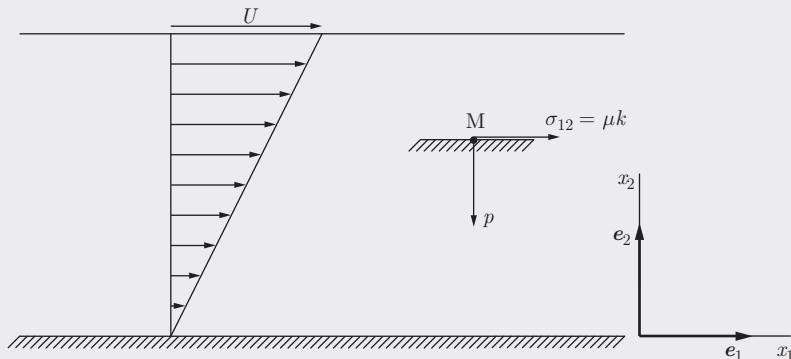


Fig. 6.1 Ecoulement de cisaillement.

On comprend qu'il s'agit d'une idéalisation drastique de la réalité. Tous les fluides réels sont visqueux. Lorsqu'ils le sont faiblement, on peut les approcher par le concept du fluide parfait.

6.4 Milieux élastiques isothermes isotropes

On a constaté précédemment qu'un solide a une mémoire privilégiée, à savoir qu'il se souvient de la configuration de référence.

Le *milieu élastique isotherme* est un matériau simple tel que par (5.36),

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t - s), \mathbf{X}). \quad (6.17)$$

En tenant compte du fait que \mathbf{F} est le tenseur du gradient de déformation qui permet de passer de l'état de référence à l'état actuel, pour un matériau élastique, on peut écrire que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}(t)). \quad (6.18)$$

Pour simplifier, nous considérerons dans la suite que la dépendance de $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport au temps t se fait via \mathbf{F} et nous ne noterons plus t explicitement dans $\boldsymbol{\sigma}$. Le principe d'objectivité requiert

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}^*) . \quad (6.19)$$

En utilisant (2.205) et (3.147), on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}^*) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad (6.20)$$

ou encore

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T . \quad (6.21)$$

Par le théorème de décomposition polaire et en posant $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, cette dernière équation devient

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}) \mathbf{R} \quad (6.22)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (6.23)$$

$\forall \mathbf{F}$ et \mathbf{R} . La relation (6.23) exprime le résultatat de l'imposition de l'objectivité à (6.18).

L'équation constitutive (6.23) exprime le tenseur de Cauchy avec le tenseur de déformation \mathbf{U} ou \mathbf{C} . D'autres formes d'*équations constitutives* peuvent s'écrire au moyen des tenseurs de contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} ou \mathbf{S} . En effet, en combinant (6.18) et (3.141), on obtient

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = J\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} = \mathcal{P}(\mathbf{F}) , \quad (6.24)$$

où \mathcal{P} est une fonction tensorielle. Par un raisonnement analogue à celui qui a conduit à (6.23) et en tenant compte de (3.149), il vient

$$\mathcal{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathcal{P}(\mathbf{U}) . \quad (6.25)$$

Pour écrire l'équation de comportement en fonction du tenseur \mathbf{S} , on introduit (6.23) dans (3.152) et on procède de manière similaire pour aboutir à

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T\mathbf{F}^{-T} . \quad (6.26)$$

A l'aide du théorème de décomposition polaire, cette dernière relation s'écrit

$$\mathbf{S} = J\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{U})\mathbf{U}^{-T} \quad (6.27)$$

ou encore

$$\mathbf{S} = \mathcal{S}(\mathbf{U}) , \quad (6.28)$$

où \mathcal{S} est une fonction tensorielle de \mathbf{U} . Puisque $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ et que $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$, les conditions imposées par l'objectivité sont remplies. L'équation (6.28) peut s'exprimer en fonction du tenseur de Cauchy-Green \mathbf{C} puisque $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$.

Nous allons construire dans la suite une théorie des milieux élastiques isotropes. Si le matériau est isotrope par rapport à sa configuration de référence, on doit avoir par le principe d'invariance matérielle (§ 5.2.4)

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\Sigma}(\overline{\mathbf{F}}), \quad (6.29)$$

où $\overline{\mathbf{F}}$ est le tenseur du gradient de déformation calculé pour un système de coordonnées matérielles

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{O}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (5.30),$$

relation dans laquelle $\{\mathbf{O}\}$ et $\{\mathbf{B}\}$ tiennent compte des symétries et des translations des axes matériels, respectivement. Or le tenseur du gradient de déformation $\overline{\mathbf{F}}$ s'exprime d'après (5.30) comme

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \overline{\mathbf{X}}} = \mathbf{F}\mathbf{O}^T. \quad (6.30)$$

En combinant (6.29) et (6.30), il vient

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}\mathbf{O}^T). \quad (6.31)$$

Le théorème de décomposition polaire donne la solution suivante $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ ($= \mathbf{R}\mathbf{U}$). Pour faire apparaître \mathbf{V} dans la fonctionnelle $\boldsymbol{\Sigma}$, il nous faut choisir \mathbf{O} tel que $\mathbf{F}\mathbf{O}^T = \mathbf{V}$, soit $\mathbf{O} = \mathbf{R}$. On voit par la décomposition polaire que ce choix est judicieux et on obtient d'après (6.18)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}). \quad (6.32)$$

Par l'objectivité (5.28) et l'isotropie (6.31), pour toute matrice orthogonale \mathbf{O} , on a

$$\mathbf{O}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{U})\mathbf{O}^T = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{O}\mathbf{U}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{O}\mathbf{U}\mathbf{O}^T) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{F}\mathbf{O}^T) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}). \quad (6.33)$$

On conclut que la fonctionnelle $\boldsymbol{\Sigma}$ est une fonction isotrope de \mathbf{V} . Pour un matériau isotrope, les équations constitutives (6.18) et (6.32) peuvent être écrites aussi sous d'autres formes.

Tenant compte de ce que $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ (éq. (1.134)), la loi de comportement d'un matériau élastique isotrope peut s'exprimer par l'une des égalités

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{V}) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{H}(\mathbf{V}^2) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}(\mathbf{e}), \quad (6.34)$$

où \mathbf{e} est le tenseur d'Euler-Almansi défini par (2.83). Comme les fonctions tensorielles $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathcal{H} sont *isotropes* et dépendent de tenseurs symétriques, on peut écrire par exemple (voir (1.140))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & k_0(I_1(\mathbf{e}), I_2(\mathbf{e}), I_3(\mathbf{e}))\mathbf{I} + k_1(I_1(\mathbf{e}), I_2(\mathbf{e}), I_3(\mathbf{e}))\mathbf{e} \\ & + k_2(I_1(\mathbf{e}), I_2(\mathbf{e}), I_3(\mathbf{e}))\mathbf{e}^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

avec

$$k_p = k_p(I_1(\mathbf{e}), I_2(\mathbf{e}), I_3(\mathbf{e})) \quad p = 0, 1, 2$$

qui sont des fonctions scalaires des invariants du tenseur \mathbf{e} . On peut observer que les tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformation \mathbf{e} ont les mêmes directions principales. De plus, la relation (6.35) montre que pour un matériau isotrope trois paramètres sont nécessaires pour caractériser la réponse constitutive.

6.5 Matériaux hyperélastiques

La relation (6.35) présentée dans la section précédente est la forme la plus générale d'équation de constitution pour un matériau élastique isotrope. On a obtenu cette équation de comportement sur base de considérations purement théoriques et sans aucune référence à la thermodynamique. Dans la littérature, la théorie de l'élasticité relative à (6.35) est appelée l'élasticité de Cauchy et le matériau correspondant est un **matériau élastique de Cauchy**. Dans cette section, nous développons une théorie des équations constitutives en nous fondant sur l'hypothèse de l'existence d'une fonction énergétique. La théorie est adaptée aux matériaux élastiques non linéaires où les déformations peuvent être grandes, c'est-à-dire finies. Elle est normalement appelée hyperélasticité finie ou simplement **hyperélasticité**. Les matériaux qu'elle décrit sont qualifiés d'hyperélastiques ou de *matériaux élastiques de Green*.

En supposant que les processus sont isothermes et en considérant uniquement des effets mécaniques, nous introduisons la fonction d'énergie libre par unité de volume dans la configuration de référence. A cette fin, on définit la *fonction d'énergie* $\mathcal{W}(\mathbf{X}, t)$ telle que

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X})U(\mathbf{X}, t). \quad (6.36)$$

Par (4.44), on obtient

$$\frac{D\mathcal{W}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \dot{\mathcal{W}}(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X})\dot{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (6.37)$$

Un matériau hyperélastique ou élastique de Green est celui dont l'énergie élastique est donnée par une fonction d'énergie libre telle que

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}, t) = P_0(\mathbf{X})U(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}) \quad (6.38)$$

qui, pour un matériau homogène, devient

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{W}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}) = \mathcal{W}(\mathbf{F}). \quad (6.39)$$

L'énergie libre s'annule pour la configuration de référence, c'est-à-dire $\mathcal{W}(\mathbf{I}) = 0$ et satisfait aussi la condition $\mathcal{W}(\mathbf{F}) \geq 0$.

Afin d'établir le rapport entre l'énergie et les contraintes, on procède comme suit. D'abord, on exprime la dérivée temporelle de $\mathcal{W}(\mathbf{F})$ par (1.167)

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{F}) = \frac{D\mathcal{W}(\mathbf{F})}{Dt} = \frac{D\mathcal{W}(\mathbf{F})}{D\mathbf{F}} \cdot \frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (6.40)$$

Ensuite, on combine (6.40) avec (6.37) pour obtenir

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{P} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0. \quad (6.41)$$

La relation (6.41) est valable pour des valeurs arbitraires de $\dot{\mathbf{F}}$. Donc, pour un matériau hyperélastique, l'équation de constitution s'écrit

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (6.42)$$

Strictement parlant, les *matériaux élastiques linéaires* et non linéaires sont hyperélastiques. Cependant, l'appellation hyperélasticité est utilisée pour le comportement élastique non linéaire.

En exprimant $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de \mathbf{P} par (3.141), l'équation de comportement devient

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (6.43)$$

On suppose que la fonction d'énergie de déformation est indépendante du référentiel. Ceci implique que pour deux observateurs en mouvement relatif décrit par (5.13), on ait

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}) = \mathcal{W}(\mathbf{F}^*) = \mathcal{W}(\mathbf{Q}\mathbf{F}). \quad (6.44)$$

En remplaçant \mathbf{F} par sa décomposition polaire à droite $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ et en posant $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, on obtient

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}) = \mathcal{W}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathcal{W}(\mathbf{U}) \quad (6.45)$$

qui exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour l'objectivité de la fonction d'énergie $\mathcal{W}(\mathbf{F})$. En se rappelant que $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, on peut écrire

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}) = \mathcal{W}(\mathbf{U}) = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C}). \quad (6.46)$$

En mécanique des solides, l'intérêt se focalise sur la formulation des relations constitutives en fonction du tenseur métrique \mathbf{C} . Il est donc nécessaire d'exprimer $\partial \mathcal{W}(\mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}$ dans (6.42) ou (6.43) en fonction de \mathbf{C} . En dérivant (6.46) par rapport au temps, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}}. \quad (6.47)$$

Prenant en compte $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ et en utilisant (1.95) on peut montrer que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T = 2 \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (6.48)$$

Par la symétrie de \mathbf{C} , $\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) / \partial \mathbf{C}$ est aussi symétrique. En conséquence, on a

$$\frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (6.49)$$

et on écrit (6.42) sous la forme

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (6.50)$$

En insérant (3.152) dans (6.42), l'équation constitutive en fonction du second tenseur de Piola-Kirchhoff devient

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (6.51)$$

Les équations (6.50) et (6.51) représentent les formes générales des équations de comportement pour un matériau hyperélastique satisfaisant l'objectivité.

6.5.1 Matériaux hyperélastiques isotropes

Examinons les équations constitutives d'un milieu élastique isotrope. Puisque la symétrie de la matière du corps n'est pas prise en compte dans les équations précédentes, il nous faut étudier les conséquences de son imposition. Suivant (6.30), l'énergie de déformation devrait satisfaire la relation

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}) = \mathcal{W}(\overline{\mathbf{F}}) = \mathcal{W}(\mathbf{F}\mathbf{O}^T). \quad (6.52)$$

Comme \mathbf{O} peut être identifié à \mathbf{Q} (§ 5.2.4), on peut aussi bien avoir $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T$ que

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{F}}^T \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T. \quad (6.53)$$

En tenant compte de (6.46), le matériau soumis à la transformation (5.30) satisfait les égalités suivantes :

$$\mathcal{W}(\overline{\mathbf{F}}) = \widehat{\mathcal{W}}(\overline{\mathbf{C}}) = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad (6.54)$$

$$\widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T). \quad (6.55)$$

La relation (6.55) donne la condition d'isotropie pour la fonction d'énergie de déformation. Elle implique également que $\widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})$ soit une fonction isotrope scalaire du tenseur symétrique \mathbf{C} et qu'elle soit un invariant de \mathbf{C} . Grâce au théorème de représentation des invariants, la fonction scalaire (6.55) peut s'écrire en fonction des invariants principaux de son argument \mathbf{C} . On peut donc remplacer (6.55) par la fonction

$$\widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) = \Phi(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})). \quad (6.56)$$

Puisque les valeurs principales de \mathbf{C} sont $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$, les invariants correspondants sont donnés par

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Pour simplifier, nous utiliserons le même symbole pour la fonction d'énergie Φ et les invariants (6.57) seront spécifiés sans référence au tenseur \mathbf{C} .

En inspectant la fonction (6.56) et les relations (6.50) et (6.51), la prochaine étape de la formulation des équations constitutives des matériaux isotropes consiste à dériver $\Phi(\mathbf{C})$ par rapport aux invariants (6.57). En supposant que $\Phi(\mathbf{C})$ possède des dérivées continues par rapport aux invariants, on a

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}. \quad (6.58)$$

Les dérivées des I_i ($i = 1, 2, 3$) par rapport à \mathbf{C} sont données par

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}. \quad (6.59)$$

A titre d'exemple, pour démontrer la troisième égalité, on procède de la manière suivante. Par les relations (1.144) et (2.110), on écrit successivement les relations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= \sum_1^3 \frac{\partial(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2)}{\partial \lambda_i^2} (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i) \\ &= \lambda_2^2 \lambda_3^2 (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1) + \lambda_1^2 \lambda_3^2 (\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) + \lambda_2^2 \lambda_1^2 (\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3) \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_1^{-2} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_2^{-2} (\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_3^{-2} (\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3) \\ &= I_3 \sum_1^3 \lambda_i^{-2} (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i) = I_3 \mathbf{C}^{-1}.\end{aligned}$$

Par substitution de (6.59) dans (6.58), on a

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \mathbf{C}. \quad (6.60)$$

En portant (6.60) dans (6.51), la forme générale de l'équation constitutive d'un matériau hyperélastique isotrope devient

$$\mathbf{S} = 2 \left(I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \mathbf{C} \right). \quad (6.61)$$

Il faut remarquer que lorsque la déformation est nulle, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ou encore, en utilisant les invariants du tenseur \mathbf{C} , $I_1 = 3$, $I_2 = 3$, $I_3 = 1$. De plus, pour $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, l'équation constitutive (6.61) conduit à la condition suivante pour les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = 0. \quad (6.62)$$

En combinant (3.152) et (6.61), on obtient l'équation de comportement pour la contrainte de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left(I_3(\mathbf{c}) \frac{\partial \Phi}{\partial I_3(\mathbf{c})} \mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1(\mathbf{c})} + I_1(\mathbf{c}) \frac{\partial \Phi}{\partial I_2(\mathbf{c})} \right) \mathbf{c} - \frac{\partial \Phi}{\partial I_2(\mathbf{c})} \mathbf{c}^2 \right), \quad (6.63)$$

où \mathbf{c} est le tenseur de déformation de Cauchy (2.89). On se rappellera que les tenseurs \mathbf{C} et \mathbf{c} ont les mêmes élongations principales λ_i^2 ($i = 1, 2, 3$). Donc les invariants correspondants sont aussi égaux.

Conséquemment, lorsque la fonction d'énergie d'un certain matériau hyperélastique est connue, sa loi constitutive est établie soit par (6.61) soit par (6.63). Pour un matériau isotrope, l'énergie de déformation (6.56) peut aussi s'écrire comme une fonction symétrique des élongations principales λ_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) = \phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (6.64)$$

En dérivant (6.64), on obtient

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i^2} \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \mathbf{C}}. \quad (6.65)$$

Par la relation de l'analyse tensorielle

$$\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i, \quad (6.66)$$

où les λ_i^2 sont les *valeurs principales* de \mathbf{C} et \mathbf{A}_i les *directions principales* correspondantes, nous obtenons

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i. \quad (6.67)$$

En combinant cette dernière relation avec (6.51), on a

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i. \quad (6.68)$$

Par la décomposition spectrale d'un tenseur (1.125), nous avons pour les valeurs principales du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff S_i ($i = 1, 2, 3$),

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}. \quad (6.69)$$

En faisant appel à la relation liant \mathbf{S} et \mathbf{P} et les développements du paragraphe 2.7.3, la relation constitutive correspondante utilisant les valeurs principales du premier tenseur de Piola-Kirchoff est obtenue comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} (\mathbf{F}\mathbf{A})_i \otimes \mathbf{A}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{A}_i. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Donc, il vient

$$P_i = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}. \quad (6.71)$$

Les valeurs principales σ_i du tenseur des contraintes de Cauchy sont obtenues en utilisant (3.141), (2.113), la propriété (1.70) et $\mathbf{F}\mathbf{A}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$ (cf. exercice 2.11),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P}^T = J^{-1} \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} (\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{A}_i)^T \right) \\ &= J^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{F}\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{b}_i \right) = J^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_i \right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Dès lors,

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}. \quad (6.73)$$

Les équations de comportement (6.61) et (6.63) sont valables pour un matériau hyperélastique quelconque. Cependant, il existe des matériaux hyperélastiques dont le comportement du point de vue de la déformation est quasiment *incompressible*. Ceci revient à dire que leur volume reste presque inchangé lors d'une déformation. De tels matériaux incluent des matériaux du type caoutchouc et les tissus biologiques mous. Pour ces matériaux, on tire de (3.38) et (3.7)

$$J = \frac{dv}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (6.74)$$

La *condition d'incompressibilité* introduit également la relation suivante :

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1. \quad (6.75)$$

Dans ce cas, l'équation de comportement (6.61) devient

$$\mathbf{S} = -p \mathbf{C}^{-1} + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \mathbf{C}, \quad (6.76)$$

où $I_3 \partial \Phi / \partial I_3 = \partial \Phi / \partial I_3$ est remplacé par $-p/2$ avec p un paramètre du type pression. Lorsque le tenseur de contrainte de Cauchy est utilisé pour un matériau incompressible, la relation (6.63) devient

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \mathbf{c} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \mathbf{c}^2. \quad (6.77)$$

De plus, lorsque la fonction d'énergie de déformation est exprimée en fonction des élongations principales, les relations constitutives (6.69), (6.71) et (6.73) prennent la forme

$$S_i = -\frac{p}{\lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \quad P_i = -\frac{p}{\lambda_i} + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} \quad \text{et} \quad \sigma_i = -p + \lambda_i \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}. \quad (6.78)$$

Le paramètre p est une constante qui ne produit pas de travail pendant le mouvement. Il est généralement identifié à une *pression hydrostatique* et il est calculé à partir des équations d'équilibre et des conditions aux limites.

Il est souvent très utile d'exprimer les contraintes principales en fonction des élongations principales. Ceci est facile à réaliser puisque pour un matériau isotrope, les directions des contraintes principales et des élongations coïncident. En conséquence, puisque les valeurs principales du tenseur de déformation de Cauchy \mathbf{c} sont $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$, les contraintes principales résultent de (6.77)

$$\sigma_i = -p + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \lambda_i^2 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \lambda_i^4 \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.79)$$

6.5.2 Formes de la fonction d'énergie de déformation

L'équation de comportement est spécifiée une fois que la fonction d'énergie est elle-même identifiée. Les conditions mathématiques imposées jusqu'à présent sont fondées sur l'objectivité et l'isotropie. D'autres exigences peuvent provenir du type de problème aux limites, de la configuration expérimentale et de l'unicité de la solution. Généralement, on se base sur des développements méthodologiques, des données expérimentales et/ou la microstructure du matériau pour écrire explicitement la fonction d'énergie.

On a démontré auparavant que l'énergie de déformation d'un matériau isotrope peut s'exprimer en fonction des trois invariants I_i ($i = 1, 2, 3$) ou comme une fonction symétrique des élongations principales λ_i^2 ($i = 1, 2, 3$) de C . En supposant que la fonction est de classe C^∞ , (6.56) peut s'écrire comme une série infinie de puissances de $I_1 - 3$, $I_2 - 3$, $I_3 - 1$

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} C_{ijk}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j(I_3 - 1)^k, \quad (6.80)$$

où C_{ijk} sont les paramètres matériels, indépendants de la déformation. Dans la configuration de référence, c'est-à-dire dans le cas d'un état sans contrainte appliquée, $I_1 = I_2 = 3$, $I_3 = 1$ et $\Phi(3, 3, 1) = C_{000} = 0$. De plus, du point de vue physique, la fonction d'énergie devrait être une fonction croissante de la déformation telle que $\Phi(I_1, I_2, I_3) \geq 0$. Alternativement, (6.80) peut s'écrire

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij0}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^{\infty} (I_3 - 1)^k. \quad (6.81)$$

En pratique, seul un nombre limité de termes est nécessaire dans (6.80) ou (6.81) pour décrire correctement la réponse en déformation d'une particule matérielle. Pour les matériaux incompressibles, $I_3 = 1$ et (6.80) ou (6.81) deviennent une fonction des deux premiers invariants

$$\Phi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j. \quad (6.82)$$

Pour obtenir un état non contraint pour une déformation nulle, le premier coefficient C_{00} doit s'annuler. Remarquons que les paramètres matériels sont nécessairement évalués par une expérience détaillée et des procédures d'identification, un processus qui devient plus difficile lorsque le nombre de paramètres impliqués dans la fonction d'énergie de déformation s'accroît.

Dans le passé récent, un certain nombre de *fonctions d'énergie* ont été proposées. Parmi celles-ci, nous en retenons quelques-unes pour les matériaux incompressibles. La plus simple est celle du *modèle néo-hookéen*. Il résulte de (6.82) pour $(i, j) = (1, 0)$

$$\Phi(I_1) = C_{10}(I_1 - 3). \quad (6.83)$$

Ce modèle tire son origine de la théorie statistique des molécules de polymères en élasticité du caoutchouc et donne des résultats satisfaisants pour des rapports d'allongement inférieurs à 2. La constante est exprimée par $C_{10} = nk_B T$ avec n le nombre de chaînes par unité de volume, $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$ J K⁻¹ la constante de Boltzmann et T la température absolue. Cette constante est normalement reliée au module de cisaillement du matériau.

Un autre modèle très utilisé en élasticité du caoutchouc est connu comme la fonction d'énergie de déformation de Mooney ou *de Mooney-Rivlin*. On l'obtient à partir de (6.82) pour $(i, j) = (1, 0)$ et $(i, j) = (0, 1)$,

$$\Phi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \quad (6.84)$$

Ce modèle a joué un rôle important dans le développement de l'élasticité non linéaire. On peut l'utiliser pour des rapports d'allongement allant jusque 4. Pour des rapports plus élevés, ce modèle devient incorrect.

Le modèle proposé par *Valanis et Lander* suppose que la fonction d'énergie de déformation peut s'écrire comme la somme de trois parties dont chacune d'entre elles est une fonction d'une seule élévation

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \omega(\lambda_1) + \omega(\lambda_2) + \omega(\lambda_3). \quad (6.85)$$

Ici, $\omega(\lambda_i)$ note une fonction de λ_i ($i = 1, 2, 3$). La décomposition (6.85) correspond à l'*hypothèse de Valanis-Lander*.

Une forme générale de la fonction d'énergie est due à Ogden [47]. On l'exprime en fonction des *elongations principales* comme suit

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3), \quad (6.86)$$

où α_i, μ_i sont des paramètres matériels. Ce modèle a été testé pour des états de tension simple, biaxiaux et de cisaillement simple du caoutchouc. D'excellents résultats ont été obtenus pour une large plage du rapport d'extension pour le choix $N = 3$. Notons que les modèles ci-dessus mentionnés ainsi que beaucoup d'autres disponibles dans la littérature sont des cas particuliers de (6.86). Il se réduit au modèle néo-hookéen pour $N = 1, \alpha_1 = 2$ et en posant $C_{10} = \mu_1/2$ et l'expression pour le premier invariant (6.57). On obtient la forme de Mooney-Rivlin (6.84) pour $N = 2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$ et en posant $C_{10} = \mu_1/2, C_{01} = -\mu_2/2$ et l'expression pour les premier et second invariants (6.57). Nous remarquons qu'avec l'hypothèse de Valanis-Lander, l'énergie de déformation (6.86) prend la forme

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{k=1}^3 \omega(\lambda_k) \quad \text{et} \quad \omega(\lambda_k) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_k^{\alpha_i} - 1). \quad (6.87)$$

Cette section se termine par la définition du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

Par le théorème de représentation (1.140) et avec (6.55), nous pouvons exprimer (6.61) comme

$$\mathbf{S} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 \mathbf{C}^2, \quad (6.88)$$

où les paramètres $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont fonctions scalaires des invariants (6.57). En supposant que $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ dans la configuration de référence pour laquelle $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, on peut montrer que près de la configuration de référence

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} + o(\mathbf{E}), \quad (6.89)$$

où \mathbf{E} est le tenseur de déformation (2.82) et $o(\mathbf{E})$ sont les termes d'ordre supérieur. Nous constatons qu'il n'y a que deux paramètres λ, μ dans l'approximation à l'ordre 1 ; ce sont les **coefficients de Lamé**.



Gabriel Lamé (1795-1870) naquit à Tours. Il est envoyé avec Clapeyron à Saint-Pétersbourg pour y enseigner les mathématiques appliquées et la physique aux élèves de l'Ecole des voies de communication. De retour à Paris, il est nommé professeur à l'Ecole Polytechnique et ensuite à la Sorbonne. Ses principales contributions se situent en mathématiques appliquées et en élasticité. Il a rédigé notamment les *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*.

Fig. 6.2 Gabriel Lamé.

Il faut éviter de confondre cette constante λ avec le paramètre d'allongement puisque dans (6.89), on utilise le tenseur de déformation \mathbf{E} et non les invariants (6.57). Lorsqu'on annule le terme $o(\mathbf{E})$, on obtient

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (6.90)$$

qui est l'équation de constitution d'un **matériau de Saint-Venant-Kirchhoff**. La relation (6.90) représente le modèle classique non linéaire pour les matériaux hyperélastiques compressibles. Elle est adéquate pour l'analyse de déformations relativement petites de matériaux élastiques, isotropes et homogènes. On peut aussi l'appliquer à l'analyse non linéaire du point de vue géométrique pour de grands déplacements avec les relations déplacement-déformation données par (2.86). On peut montrer facilement qu'un tel matériau est hyperélastique avec la fonction d'énergie de déformation donnée par

$$\widehat{\mathcal{W}}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \mathbf{E}^2. \quad (6.91)$$

On peut aussi exprimer (6.90) en fonction du premier tenseur de Piola-Kirchhoff en utilisant (3.152)

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S} = \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{F} + 2\mu \mathbf{F} \mathbf{E}. \quad (6.92)$$

6.5.3 Exemples d'états de contraintes simples

Dans cette section, nous exprimons le tenseur de Cauchy (6.79) pour quelques cas simples de charges appliquées à un matériau isotrope incompressible. Le lecteur est renvoyé à l'ouvrage [65] pour des exemples de matériaux compressibles.

Extension biaxiale

Ce type de mouvement se rencontre dans le cas des plaques minces avec une charge plane dans deux directions orthogonales et il est défini de telle sorte que nous ayons deux élongations principales indépendantes λ_1, λ_2 et par (6.74) $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$. Les contraintes correspondantes sont $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 = 0$. Portant $\sigma_3 = 0$ dans (6.79), on obtient pour le paramètre p

$$p = 2 \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + 2 \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}. \quad (6.93)$$

En introduisant (6.93) dans (6.79) et après quelques manipulations algébriques, on écrit les expressions suivantes pour les contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right) \\ \sigma_2 &= 2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Extension équibiaxiale

Ce type de mouvement est un cas particulier du cas précédent avec $\sigma_1 = \sigma_2$ et $\sigma_3 = 0$. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. En utilisant (6.94), la contrainte σ devient

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right). \quad (6.95)$$

Pareil chargement se rencontre dans une coque sphérique sous pression où les deux contraintes tangentes au plan milieu de la coque sont égales et la troisième contrainte, normale à la surface de la coque, est considérée comme nulle.

Extension uniaxiale

Lorsque le matériau est chargé dans une seule direction, on a $\lambda_1 = \lambda$ et par la condition d'incompressibilité $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$. Les contraintes sont $\sigma_1 = \sigma$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Avec ces valeurs des paramètres et (6.94), nous obtenons

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \right). \quad (6.96)$$

Inflation d'un ballon

Comme exemple de l'hyperélasticité, nous allons traiter le cas de l'inflation d'un ballon fait dans un matériau caoutchouteux. Quoiqu'on puisse utiliser l'un des modèles introduits précédemment, nous utiliserons ici les modèles néo-hookéen et de Mooney-Rivlin pour décrire la pression dans un ballon sphérique comme une fonction du rapport d'extension. On supposera que le matériau est isotrope et incompressible. Le ballon sphérique a une épaisseur initiale e_i et un rayon R tel que $R \gg e_i$. Dans la configuration déformée, l'épaisseur et le rayon sont e et r , respectivement ainsi qu'on peut le voir à la figure 6.3.

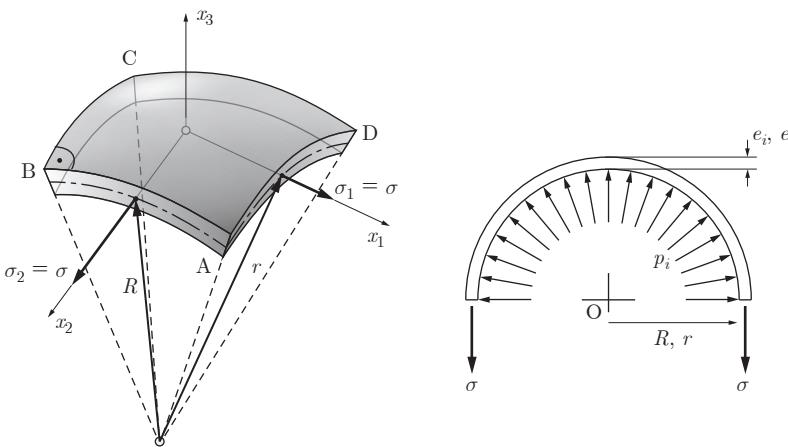


Fig. 6.3 Inflation d'un ballon : (a) géométrie et (b) conditions aux limites.

Grâce à la symétrie sphérique de la charge et de la géométrie, les deux contraintes principales sont égales $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ et la troisième est $\sigma_3 = 0$. Donc, l'état de contrainte est équibiaxial. Pour relier la pression interne p_i avec la contrainte σ , considérons l'équilibre d'une demi-sphère dans la configuration déformée. La projection de la force due à la pression sur le plan passant par le centre est en équilibre avec les contraintes dans l'épaisseur du ballon $\pi r^2 p_i = 2\pi r e \sigma$, d'où nous obtenons

$$p_i = 2 \frac{e}{r} \sigma. \quad (6.97)$$

Pour décrire la déformation du ballon, nous définissons le rapport d'extension par $\lambda = r/R$. La condition d'incompressibilité du matériau s'exprime en posant l'égalité du volume matériel dans les configurations déformée et non déformée, c'est-à-dire $4\pi r^2 e = 4\pi R^2 e_i$. Donc

$$\frac{e}{e_i} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (6.98)$$

Combinant les expressions ci-dessus on obtient pour le modèle néo-hookéen

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 2C_{10} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \quad (6.99)$$

et la pression

$$p_i(\lambda) = 4C_{10} \frac{e_i}{R} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^6} \right). \quad (6.100)$$

En tenant compte de $C_{10} = \partial \Phi / \partial I_1$ et $C_{01} = \partial \Phi / \partial I_2$ dans le modèle de Mooney-Rivlin, nous obtenons pour la contrainte

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) (C_{10} + \lambda^2 C_{01}). \quad (6.101)$$

En utilisant (6.101) et (6.98) dans (6.97), on obtient

$$p_i(\lambda) = 4C_{10} \frac{e_i}{R} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^6} \right) (1 + \eta \lambda^2) \quad (6.102)$$

avec $\eta = C_{01}/C_{10}$. En posant $e_i/R = 0,01$, la pression normalisée $p_i(\lambda)/C_{10}$ selon (6.102) est montrée à la figure 6.4 en fonction du rapport λ pour des valeurs différentes de η . La courbe correspondant au cas $\eta = 0$ représente le modèle néo-hookéen (6.100).

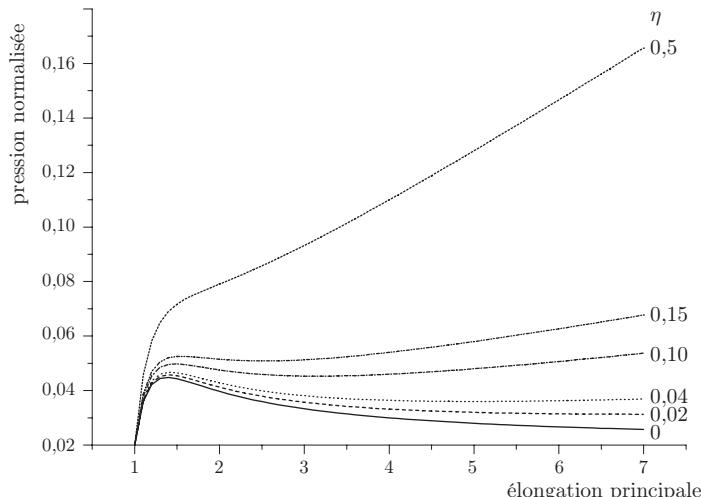


Fig. 6.4 Pression normalisée dans un ballon en fonction du rapport d'extension pour différentes valeurs de η .

6.6 Elasticité linéaire infinitésimale

Comme dans beaucoup de cas, les déplacements et les déformations des solides élastiques sont petits, on utilise une théorie linéarisée dans le cadre des petits déplacements et des déformations infinitésimales. Ces notions ont été introduites à la section 2.9.

L'élasticité classique est donc une théorie linéarisée autour de l'état naturel du matériau considéré comme homogène et isotrope. Dans ce cas, on a démontré que la différence entre les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi est proportionnelle à des termes d'ordre 2, qui sont négligés dans la linéarisation. On introduit dès lors le *tenseur de déformation infinitésimale* $\boldsymbol{\varepsilon}$ défini par (2.150), tel que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.103)$$

En vertu de cette approximation, les tenseurs de Piola-Kirchhoff se réduisent au tenseur de Cauchy σ (sect. 3.9). De plus, le principe d'objectivité est satisfait (sect. 2.11). Au vu de ces linéarisations, les équations de Saint-Venant-Kirchhoff deviennent

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon, \quad (6.104)$$

où les coefficients scalaires λ et μ sont les *coefficients d'élasticité de Lamé*, dont les dimensions sont une force par unité de surface (Pa). Donc, l'élasticité linéaire relie la contrainte à la déformation par une relation linéaire connue sous le nom de *loi de Hooke*.



Robert Hooke (1635-1703) naquit à Freshwater sur l'île de Wight. Le portrait ci-dessus est une représentation d'artiste. Il fut un scientifique d'abord expérimentateur. Il a contribué aux domaines de l'architecture, de la mécanique, de la chimie, de la physique, etc. Il est surtout célèbre pour la loi d'élasticité (*ut tensio, sic vis*).

Fig. 6.5 Robert Hooke.

Il est très facile d'inverser la relation (6.104) afin d'obtenir ε en fonction de σ . La trace de σ s'obtient par

$$\sigma_{mm} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mm}. \quad (6.105)$$

Avec (6.104) et (6.105), on obtient

$$\varepsilon = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \operatorname{tr} \sigma \mathbf{I} + \frac{\sigma}{2\mu}. \quad (6.106)$$

Cette relation n'existe que si

$$3\lambda + 2\mu \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu \neq 0. \quad (6.107)$$

L'équation (6.106) peut également s'écrire

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma \mathbf{I} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma \quad (6.108)$$

avec E le *module de Young* (Pa) et ν le *coefficient de Poisson* sans dimension. Ces derniers coefficients sont liés à ceux de Lamé par les relations

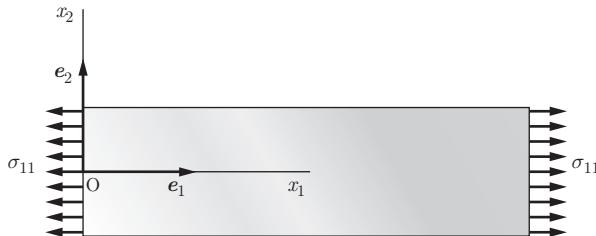
$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (6.109)$$

Le tableau 6.2 donne les valeurs du module de Young, du coefficient de Poisson et de la masse volumique de quelques matériaux élastiques utilisés dans l'ingénierie.

Tableau 6.2 Constantes matérielles de solides élastiques.

	E (Pa)	ν	ρ (kg/m ³)
acier	$200 \cdot 10^9$	0,27	7 850
verre	$69 \cdot 10^9$	0,19	2 500
caoutchouc	$0,05 \cdot 10^9$	0,50	850

Nous allons donner une interprétation des coefficients d'élasticité en considérant quelques cas simples. Le premier exemple est celui de la *traction simple* (fig. 6.6). Soit une barre soumise à la traction dans la direction x_1 . On suppose que les faces latérales de la barre sont libres et qu'aucune force de contact n'agit sur elles.

**Fig. 6.6** Traction simple.

Le tenseur des contraintes n'a qu'une seule composante non nulle, à savoir σ_{11} . Pour calculer les déformations, on utilise les équations (6.106). On obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0.\end{aligned}\quad (6.110)$$

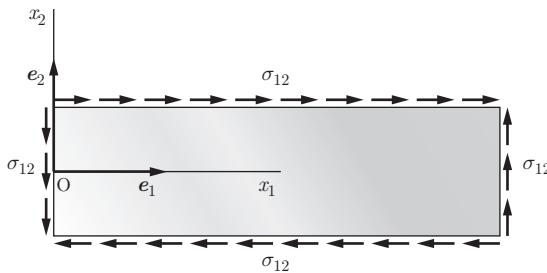
Avec (6.109), les relations (6.110) deviennent

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (6.111)$$

Le coefficient de Poisson correspond donc au rétrécissement latéral de l'échantillon soumis à la traction. On peut exprimer les coefficients de Lamé en fonction de E et ν . Il vient en inversant (6.109)

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.112)$$

Le module E est positif car l'expérience montre que si $\sigma_{11} > 0$, ceci entraîne que ε_{11} est positif. La pièce s'allonge sous l'effet d'une traction. L'expérience montre aussi que ν est positif.

**Fig. 6.7** Cisaillement simple.

Le second exemple est celui du *cisaillement* d'un bloc (fig. 6.7) tel que le tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (6.113)$$

avec

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \neq (1, 2) \text{ et } (2, 1).$$

Le tenseur des déformations (6.106) avec (6.113) donne

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \quad (6.114)$$

les autres composantes étant nulles. Comme la composante \$\varepsilon_{12}\$ donne la moitié du complément de l'angle formé après déformation par des fibres initialement orientées suivant les directions \$x_1\$ et \$x_2\$ par (2.158), on a

$$\frac{\sigma_{12}}{\mu} = \phi_{12}. \quad (6.115)$$

On appelle le coefficient de Lamé \$\mu\$ **module de cisaillement** ou encore **module de rigidité au glissement**.

Le troisième exemple est celui d'une contraction locale uniforme telle que le tenseur des contraintes soit sphérique (diagonal) avec

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (6.116)$$

où la pression est notée \$p\$. Alors par (6.106), on calcule

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{p}{(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \quad (6.117)$$

ou encore

$$p = -\frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk} = -K \varepsilon_{kk}. \quad (6.118)$$

Le coefficient défini par l'égalité

$$K = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3} = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (6.119)$$

est le **module de compressibilité** ou **module de rigidité à la dilatation**. Pour une valeur de pression donnée, la variation volumique \$\varepsilon_{kk}\$ sera d'autant

plus petite que K est grand. L'expérience montre que K est positif, ce qui conduit à $\nu \leq 0,5$. Le cas particulier $\nu = 1/2$ est celui du matériau élastique incompressible pour lequel $K \rightarrow \infty$. Un exemple de ce dernier type de matériau est le caoutchouc qu'on traite comme incompressible.

6.7 Conduction de la chaleur

On a vu au paragraphe 5.4.1 que le flux de chaleur s'écrit

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{Q}(\chi, T, \mathbf{X}, t). \quad (6.120)$$

En appliquant tous les principes généraux des lois de comportement, on aboutit à l'équation

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{Q}\left(\mathbf{F}, T, \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}}, \mathbf{X}\right). \quad (6.121)$$

On constate que le flux de chaleur dépend du gradient de température. Lorsqu'on étudie le transfert de chaleur par conduction dans les fluides et les solides, on peut montrer que \mathbf{q} dépend essentiellement du gradient de température $\partial T / \partial \mathbf{X}$ et peu de \mathbf{F} . Ceci est d'ailleurs corroboré par l'expérience. On devrait donc écrire en représentation eulérienne

$$q_i = K_{il} \frac{\partial T}{\partial x_l}. \quad (6.122)$$

Cependant, on peut spécialiser l'équation (6.122) au cas où le flux de chaleur est donné par la *loi de Fourier* avec $K_{il} = -k \delta_{il}$

$$\mathbf{q} = -k(T) \nabla T \quad q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (6.123)$$

Le coefficient k est le coefficient de conductibilité thermique. Ses unités sont exprimées en $\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. La loi de Fourier est valable aussi bien pour un fluide que pour un solide.



Joseph Fourier (1768-1830) naquit à Auxerre. Elève brillant de l'Ecole Polytechnique, il y est nommé professeur à l'âge de 16 ans. Il participe à la campagne d'Egypte avec Champollion. Revenu en France, Napoléon le nomme préfet de l'Isère. Élu à l'académie des Sciences en 1817, il en devient le secrétaire perpétuel en 1822. Fourier a rédigé la *Théorie analytique de la chaleur*, où il introduit l'équation aux dérivées partielles de la diffusion de la chaleur. Il la résout par les séries de fonctions périodiques qui portent son nom.

Fig. 6.8 Joseph Fourier.

6.8 Second principe de la thermodynamique pour les fluides visqueux

L'application de (4.83) aux fluides visqueux newtoniens se fait en y introduisant les formes (6.14) pour le champ de contraintes et (6.123) pour le flux de chaleur par conduction. Nous y ajoutons celles de l'énergie interne massique u et de l'entropie massique s , prises comme fonctions de la température T et de la masse volumique ρ uniquement. Nous allons établir la relation d'état :

$$\rho(du - T ds) - \frac{p}{\rho} d\rho = 0. \quad (6.124)$$

On se propose également de montrer que les trois coefficients κ , μ et k doivent toujours être positifs, avec le coefficient κ défini par

$$\kappa = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu). \quad (6.125)$$

A cet effet, nous admettrons le postulat suivant.

POSTULAT

L'inégalité de Clausius-Duhem (4.83) est satisfaite à tout instant, pour des histoires arbitraires et indépendantes de la température, de la masse volumique, du taux de déformation déviatoire \mathbf{d}^d et du gradient thermique ($\partial T / \partial \mathbf{x}$).

Ces grandeurs sont appelées les variables thermodynamiques du modèle. Leur histoire, c'est-à-dire l'expression de leurs valeurs en fonction du temps, pour un point matériel donné, est appelé le **processus thermodynamique**. On remarquera que les équations de constitution expriment σ_{ij} , q_i , u et s en fonction du processus thermodynamique (l'histoire de ρ donnant celle de $\text{tr } \mathbf{d}$, par la conservation de la masse). Considérons tout d'abord les relations suivantes (sous forme indicelle)

$$d_{ij}^d = d_{ij} - \frac{1}{3} d_{mm} \delta_{ij} \quad (6.126)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = d_{ii} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (6.127)$$

$$d_{ij}^d d_{ij}^d = d_{ij}^d \left(d_{ij} - \frac{1}{3} d_{mm} \delta_{ij} \right) = d_{ij}^d d_{ij}$$

puisque $\text{tr } \mathbf{d}^d = 0$. L'équation de constitution (6.14) peut se réécrire par (6.125) et (6.126)

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \kappa d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}^d. \quad (6.128)$$

On peut alors tirer de (4.24), (6.128) et (6.123) le développement

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ = -p d_{ii} + \kappa (d_{mm})^2 + 2\mu d_{ij}^d d_{ij}^d + \frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \\ = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \kappa (d_{mm})^2 + 2\mu d_{ij}^d d_{ij}^d + \frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (6.129)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (4.83) s'écrit donc sous la forme suivante, valable pour tous les fluides visqueux newtoniens,

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \leq \kappa (d_{mm})^2 + 2\mu d_{ij}^d d_{ij}^d + \frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (6.130)$$

Cette inégalité doit être satisfaite pour un processus thermodynamique quelconque (dans les limites d'application du modèle). Dès lors, on peut aussi exiger qu'elle soit vérifiée à tout instant quelconque, quelles que soient les variables thermodynamiques ($T, \rho, d_{ij}^d, \partial T / \partial x_i$) et leurs dérivées matérielles (éq. (6.1) et (6.6)). Soient $\hat{T}, \hat{\rho}, \hat{d}_{ij}^d, \hat{T}_{,i}$ des valeurs fixées des variables thermodynamiques et $\hat{\hat{T}}, \hat{\hat{\rho}}, \dots$, celles de leurs dérivées matérielles. On doit donc avoir, par développement en série de Taylor par rapport au temps autour des valeurs fixées, l'inégalité (6.130)

$$\begin{aligned} E &\equiv \hat{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - T \frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_{(\hat{T}, \hat{\rho})} \hat{\hat{\rho}} \\ &\quad + \hat{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial T} - T \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{(\hat{T}, \hat{\rho})} \hat{\hat{T}} - \frac{p(\hat{T}, \hat{\rho})}{\hat{\hat{\rho}}} \hat{\hat{\rho}} \\ &\leq \kappa \left(-\frac{\hat{\hat{\rho}}}{\hat{\hat{\rho}}} \right)^2 + 2\mu \hat{d}_{ij}^d \hat{d}_{ij}^d + \frac{k}{\hat{\hat{T}}} \hat{T}_{,i} \hat{T}_{,i}. \end{aligned} \quad (6.131)$$

D'après le postulat adopté, on peut, en ne changeant pas $\hat{T}, \hat{\rho}, \hat{\hat{T}}$ et $\hat{\hat{\rho}}$, annuler les grandeurs arbitraires \hat{d}_{ij}^d et $\hat{T}_{,i}$ dans (6.131) ce qui revient à considérer un processus thermodynamique identique, mais sans flux de chaleur ni taux de déformation déviateur au point matériel suivi. On a donc aussi l'inégalité suivante :

$$E \leq \kappa \left(-\frac{\hat{\hat{\rho}}}{\hat{\hat{\rho}}} \right)^2. \quad (6.132)$$

On peut ensuite, suivant le même postulat, multiplier $\hat{\hat{T}}$ et $\hat{\hat{\rho}}$ par une quantité arbitraire ε positive ou négative, sans changer \hat{T} ni $\hat{\rho}$ (ce qui revient à ralentir le processus à l'instant étudié ou à considérer un processus lent de sens opposé). On obtient ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$\varepsilon E \leq \varepsilon^2 \kappa \left(-\frac{\hat{\hat{\rho}}}{\hat{\hat{\rho}}} \right)^2,$$

et donc obligatoirement l'égalité

$$E = \left(\rho \left(\frac{Du}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right)_{(\hat{T}, \hat{\rho}, \hat{\hat{T}}, \hat{\hat{\rho}})} = 0. \quad (6.133)$$

En mettant (6.133) sous forme différentielle, on trouve la relation (6.124) cherchée. Dès le moment où (6.124) est satisfaite, le membre de gauche de (6.131)

devient identiquement nul. Pour que le membre de droite soit toujours positif, il faut et il suffit que les coefficients κ , μ et k soient positifs. En effet, on est en présence d'une combinaison linéaire de carrés d'expressions indépendantes, qui doit être une forme quadratique définie positive, et donc à coefficients positifs.

Le membre de droite de l'inégalité (6.130),

$$\kappa (d_{mm})^2 + 2\mu d_{ij}^d d_{ij}^d + \frac{k}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right), \quad (6.134)$$

mesure l'*irréversibilité locale* du processus étudié.

6.9 Thermodynamique du gaz idéal

Dans cette section, nous établissons les liens entre la thermodynamique des milieux continus et la thermodynamique classique. Pour cette dernière, nous nous référerons à l'ouvrage de L. Borel et D. Favrat [7].

Introduisons la définition de l'*enthalpie massique*

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (6.135)$$

pour un fluide visqueux newtonien.

L'équation de constitution (6.12), complétée par l'hypothèse consistant à admettre que l'énergie interne massique ne dépend pas de la masse volumique et donc $u = u(T)$, fournit le modèle du gaz idéal. Ce gaz qui satisfait la loi de Boyle-Mariotte, à savoir « à température constante, le produit de la pression p par le volume V est constant », est parfois appelé gaz parfait dans les ouvrages de thermodynamique classique. Cette dénomination prête à confusion avec le fluide parfait (sans viscosité) et nous ne l'emploierons pas pour cette raison. On déduit de (6.135) qu'il en va de même pour l'enthalpie massique, de sorte qu'on a les relations

$$p = \rho RT \quad (6.136)$$

$$u = u(T) \quad (6.137)$$

$$h = h(T). \quad (6.138)$$

Si on introduit la notion de volume spécifique $v = 1/\rho$, l'équation d'état (6.136) correspond à la relation $pv = \text{cste}$ dans un processus isotherme. Par dérivation, on définit les chaleurs massiques (ou chaleurs spécifiques) à volume et pression constants

$$du = c_v(T) dT \quad dh = c_p(T) dT. \quad (6.139)$$

D'autre part, la dérivation de (6.135) en tenant compte de (6.136) et (6.137) mène à la relation

$$dh = du + R dT, \quad (6.140)$$

dont on tire

$$c_p(T) - c_v(T) = R. \quad (6.141)$$

La constante R est celle du gaz idéal (parfait) exprimée en $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$. Diverses expressions de ds se trouvent en combinant (6.124) et (6.137) :

$$ds = \begin{cases} c_v d(\log T) - R d(\log \rho) \\ c_p d(\log T) - R d(\log p) \\ c_v d(\log p) - c_p d(\log \rho). \end{cases} \quad (6.142)$$

Notons que l'observation physique révèle que les coefficients de viscosité et de conduction thermique ne dépendent généralement que de la température absolue, pour un gaz idéal.

Des simplifications importantes peuvent être faites si on suppose que, pour un certain intervalle de températures, les chaleurs massiques sont invariables. Dans ce cas, on peut écrire à des constantes d'intégration près, dans cette intervalle de températures les relations

$$u = c_v T \quad (6.143)$$

$$h = c_p T \quad (6.144)$$

$$s = c_v \log p - c_p \log \rho.$$

Un *écoulement isentropique* est alors tel que

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad (6.145)$$

avec la définition du rapport calorifique :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (6.146)$$

Le fluide en écoulement isentropique est un fluide *barotrope* pour lequel la masse volumique est fonction uniquement de la pression telle que $\rho = \rho(p)$. Dans ce cas, on montre facilement la relation

$$\frac{1}{\rho(p)} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (6.147)$$

En effet, pour une fonction $f(p)$ donnée, on a

$$\nabla f(p) = \frac{df}{dp} \nabla p \quad (6.148)$$

Posant

$$f(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (6.149)$$

alors il vient

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{\rho(p)}. \quad (6.150)$$

Enfin, toujours à une constante près, on peut écrire

$$h = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (6.151)$$

La vitesse du son a est définie par la relation

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s. \quad (6.152)$$

Dans le cas particulier du gaz idéal, (6.152) prend, à l'aide de (6.145), la forme

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (6.153)$$

de sorte qu'on peut tirer de (6.151) la relation, vérifiée à une constante près

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1}. \quad (6.154)$$

Dans le cas de l'air considéré comme un gaz idéal, on a les constantes suivantes : $R_{air} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\gamma_{air} = 1,401$, $c_p = 1006 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ à 300 K. L'air conduit la chaleur comme le prédit la loi de Fourier (6.123) avec $k = 0,0262 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. La vitesse du son dans l'air vaut 340 m s^{-1} à température ambiante ; par comparaison, celle dans l'eau de mer est d'environ 1500 m s^{-1} .

6.10 Second principe de la thermodynamique pour les milieux élastiques classiques

Nous nous plaçons dans le cadre des solides élastiques décrits par la théorie linéaire infinitésimale. Dans ce cas, le matériau conserve sa forme originale après déformation. Si on se restreint aux petites déplacements, l'énergie interne et l'énergie libre définies par la relation (4.84) sont de la forme

$$u = u(\boldsymbol{\varepsilon}, T) \quad f = f(\boldsymbol{\varepsilon}, T). \quad (6.155)$$

L'élasticité classique fait l'hypothèse de la réversibilité des phénomènes thermodynamiques, étant donné que le solide élastique ne subit pas de déformations permanentes. Dès lors, l'inégalité de Clausius-Duhem devient une égalité, à savoir

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{v} - \frac{1}{T} \boldsymbol{q} \cdot \nabla T. \quad (6.156)$$

Faisons l'hypothèse d'un processus adiabatique ($\boldsymbol{q} = 0$). La relation (6.156) devient, puisque pour des petits déplacements $\boldsymbol{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \rho \left(\frac{Df}{Dt} + s \frac{DT}{Dt} \right). \quad (6.157)$$

De la deuxième égalité de (6.157), on tire

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} - s dT = df. \quad (6.158)$$

Il s'ensuit que sous forme indicée, on a

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}. \quad (6.159)$$

L'*énergie libre* est donc un potentiel pour le tenseur $-\boldsymbol{\sigma}/\rho$ et pour l'entropie s . Si on réduit la dépendance de f à ε_{ij} en ne considérant que des processus isothermes, alors on peut développer f au voisinage de l'état naturel du milieu élastique. On a

$$f = f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 \varepsilon_{ij} + \dots, \quad (6.160)$$

où l'indice zéro note l'état naturel non contraint. Par (6.159)₁, les coefficients du terme linéaire sont nuls ($\sigma_{ij}|_0 = 0$). Donc, $(f - f_0)$ est d'ordre 2 en ε_{ij} , et dans l'identité

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (\rho(f - f_0)) = \rho \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} + (f - f_0) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (6.161)$$

le second terme du second membre qui serait au moins d'ordre 2 doit être négligé par la théorie linéaire. Donc on peut considérer ρ comme une constante. La première relation de (6.159) peut s'écrire alors

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.162)$$

avec

$$W = \rho(f - f_0), \quad (6.163)$$

l'*énergie de déformation* par unité de volume avec σ_{ij} et ε_{ij} comme paramètres conjugués correspondants. Avec l'équation (6.104), le potentiel d'énergie W peut se mettre sous la forme

$$W = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (6.164)$$

6.11 Thermoélasticité

On fera l'hypothèse de petits déplacements ainsi que de petites déviations par rapport à une température de référence T_0 . Comme nous élaborons une théorie approchée, nous allons développer $f(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ en série de Taylor au voisinage de $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ et $T = T_0$ et la tronquer après les termes quadratiques. Comme la relation (6.163) donne des contraintes nulles pour $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ et $T = T_0$, le développement

ne contient pas de terme linéaire en ε seul. Il est approprié de travailler sur ρf plutôt que sur f . On a

$$\begin{aligned} \rho f &= \rho f_0 - \rho s_0(T - T_0) + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} \\ &\quad + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} c_{ij}(T - T_0) - \frac{\rho c}{2T_0} (T - T_0)^2, \end{aligned} \quad (6.165)$$

expression dans laquelle les coefficients f_0 , s_0 , c_{ij} et c sont encore à déterminer et les facteurs ρ et ρ/T_0 ont été ajoutés pour simplifier les développements ultérieurs. Si on applique (6.165) au cas $\varepsilon = 0$ et $T = T_0$, on constate que f_0 est l'énergie libre de l'état naturel.

Si on impose l'isotropie du matériau élastique, le tenseur c_{ij} doit être isotrope et de la forme $a \delta_{ij}$ avec a un scalaire. Prenant ce scalaire $a = -(3\lambda+2\mu)\alpha$ avec α à déterminer, on obtient

$$c_{ij} \varepsilon_{ij}(T - T_0) = -(3\lambda + 2\mu)\alpha \varepsilon_{kk}(T - T_0). \quad (6.166)$$

Calculons σ_{ij} par la relation (6.159) appliquée à (6.165), (6.166). Il vient

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) \delta_{ij}. \quad (6.167)$$

C'est la généralisation de la *loi de Hooke* (6.104). On peut inverser la relation pour obtenir ε en fonction de σ

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma + \left(2\mu\alpha(T - T_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \operatorname{tr} \sigma \right) I \right). \quad (6.168)$$

Cette relation est semblable à (6.106) à l'exception du terme additionnel $\alpha(T - T_0) \delta_{ij}$ qui provient des effets thermiques. Il correspond à une extension uniforme $\alpha(T - T_0)$ dans toutes les directions, c'est-à-dire à une dilatation du volume $3\alpha(T - T_0)$. Le coefficient α est le *coefficient d'expansion thermique*. Il a les dimensions de l'inverse d'une température.

Si maintenant on applique (6.159)₂ à (6.165) et (6.166), on peut évaluer l'entropie

$$\rho s = -\rho \frac{\partial f}{\partial T} = \rho s_0 + (3\lambda + 2\mu)\alpha \varepsilon_{kk} + \frac{\rho c}{T_0} (T - T_0). \quad (6.169)$$

La quantité s_0 est l'entropie de l'état naturel.

Ayant évalué f et s respectivement par (6.165) et (6.169), on peut obtenir l'énergie interne

$$\begin{aligned} \rho u &= \rho(f + Ts) \\ &= \rho u_0 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + \mu \varepsilon : \varepsilon + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \operatorname{tr} \varepsilon + \frac{\rho c}{2T_0} (T^2 - T_0^2) \end{aligned} \quad (6.170)$$

avec u_0 l'énergie interne de l'état naturel. L'équation (6.170) montre que l'énergie interne ne peut pas être obtenue simplement par la combinaison linéaire de

l'énergie de déformation (trois premiers termes du membre de droite de (6.170)) et d'une énergie thermique (dernier terme dans (6.170)). Sa structure est plus compliquée et implique un couplage entre les effets mécaniques et les effets thermiques. En calculant la dérivée partielle de u par rapport à la température, on obtient

$$\left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{T_0} = c \quad (6.171)$$

qui est la *chaleur massique* à la température $T = T_0$.

6.12 Exercices

[6.1] Démontrer la relation $\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{d}$ de l'équation (6.2) valable pour le fluide simple.

[6.2] Exprimer l'équation d'énergie (4.23) pour le cas du fluide visqueux newtonien (6.14).

Simplifier cette expression pour le cas du fluide parfait. Si le fluide parfait est un gaz idéal, que devient l'équation d'énergie ?

[6.3] Exprimer l'équation d'énergie (4.23) pour le cas du fluide visqueux newtonien incompressible (6.16).

Simplifier cette expression pour le cas du fluide parfait.

[6.4] Démontrer que

1) les tenseurs $\mathbf{U}, \mathbf{C}, \mathbf{S}$ ont les mêmes vecteurs propres ;

2) les tenseurs \mathbf{V}, \mathbf{c} et $\boldsymbol{\sigma}$ ont les mêmes vecteurs propres.

[6.5] A partir de (6.61), (3.152) et les relations (2.88)-(2.90), démontrer la relation (6.63).

[6.6] Utiliser l'équation de Cayley-Hamilton (1.123) pour montrer que les relations des contraintes (6.61) et (6.63) peuvent s'écrire

$$\mathbf{S} = 2 \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} - \left(I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \right) \mathbf{C} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \mathbf{C}^2 \right) \quad (6.172)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left(\left(I_2 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \mathbf{c} - I_3 \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} \mathbf{c}^{-1} \right). \quad (6.173)$$

[6.7] En utilisant (6.80), démontrer que l'énergie s'annule dans la configuration de référence lorsque $C_{000} = 0$ et qu'elle est indépendante de la contrainte lorsque les coefficients satisfont la condition $C_{100} + 2C_{010} + C_{001} = 0$.

[6.8] En utilisant les expressions des invariants (6.57) et la relation (1.144), démontrer les deux premières égalités de (6.59).

[6.9] Pour le modèle néo-hookéen, trouver le rapport d'extension pour lequel la pression maximale est obtenue dans le cas d'un ballon soumis à une pression interne (6.100).

[6.10] Utiliser le modèle de Ogden (6.86) pour exprimer les composantes des contraintes pour les cas d'extension uniaxiale, biaxiale et équibiaxiale d'un matériau incompressible. Avec le choix $N = 3$ et les paramètres matériels $\alpha_1 = 1,3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -2$, $\mu_1 = 0,63 \text{ MPa}$, $\mu_2 = 0,0012 \text{ MPa}$, $\mu_3 = -0,01 \text{ MPa}$, dessiner les composantes des contraintes en fonction des elongations correspondantes pour les extensions uniaxiales et équibiaxiales.

[6.11] Calculer l'énergie libre d'une barre faite d'un matériau élastique linéaire soumise à un effort de traction simple σ_{11} .

[6.12] Calculer les déformations induites dans une barre rectiligne de longueur L suivant l'axe x_1 où règne un champ de température $T = T_0 + (T_1 - T_0)x_1/L$.

[6.13] Etant donné la loi de conduction de Fourier et l'équation d'état de gaz idéal pour un fluide parfait compressible, on demande d'écrire l'équation de conservation de l'énergie en faisant apparaître la température comme inconnue principale du problème.

[6.14] La loi de Hooke (6.104) sous forme indicée s'écrit

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (6.174)$$

1) Décomposons les tenseurs de contrainte et de déformation en leur parties déviatoire et hydrostatique

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^d + \sigma_0 \delta_{ij} \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad \sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6.175)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^d + \varepsilon_0 \delta_{ij} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \quad \varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (6.176)$$

Montrer que (6.174) est équivalente à l'écriture

$$\sigma_{ij}^d = 2\mu \varepsilon_{ij}^d \quad \sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad (6.177)$$

où le module de compressibilité K a été défini en (6.119).

2) Montrer que les axes principaux des tenseurs de contraintes et de déformation coïncident.

3) Montrer que le potentiel d'énergie de déformation est

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{9}{2} K (\varepsilon_0)^2 + \mu \varepsilon_{ij}^d \varepsilon_{ij}^d. \quad (6.178)$$

4) Montrer que la condition de stabilité $W(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0 \ \forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ revient à imposer les conditions $K > 0$ et $\mu > 0$.

[6.15] En l'absence des force d'inertie et de volume, un corps ω soumis à une déformation infinitésimale répond par le champ de contrainte σ_{ij} . Montrer que pour tout champ de déformation infinitésimal compatible, c'est-à-dire tel que l'équation (6.103) est vérifiée, on a

$$\int_{\omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{\partial\omega} t_i u_i dS. \quad (6.179)$$

[6.16] On considère un solide de Hooke dont la relation contrainte-déformation est donnée par (6.104) et son inverse par (6.106).

- 1) Si l'état de contrainte est celui d'une compression hydrostatique, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}, \quad (6.180)$$

montrer que l'état de déformation correspondant est donné par

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{3K} \quad (6.181)$$

avec K défini en (6.119).

- 2) Si l'état de déformation est celui d'un cisaillement simple, c'est-à-dire

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma (m_i n_j + m_j n_i) \quad m_i m_i = n_i n_i = 1 \quad m_i n_i = 0, \quad (6.182)$$

montrer que l'état de déformation correspondant est donné par

$$\sigma_{ji} = \tau (m_i n_j + m_j n_i) \quad \tau = \mu \gamma. \quad (6.183)$$

Donc μ est aussi appelé le module de rigidité au glissement.

- 3) Si l'état de contrainte est celui d'une traction simple, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = \sigma n_i n_j \quad n_i n_i = 1, \quad (6.184)$$

montrer que l'état de déformation correspondant est donné par

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_n n_i n_j + \varepsilon_T (\delta_{ij} - n_i n_j) \quad \varepsilon_n = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon_T = -\nu \varepsilon_n, \quad (6.185)$$

où on retrouve le module de Young et le coefficient de Poisson définis en (6.109).

CHAPITRE 7

Introduction à la mécanique des solides

7.1 Introduction

Dans un problème typique de mécanique des solides, on s'intéresse au calcul des déplacements, des déformations et des contraintes (qui sont, en général, des fonctions du temps) en tout point du corps. Il arrive souvent que le comportement contrainte-déformation de nombreux matériaux soit non linéaire, inélastique et anisotrope. La formulation mathématique correspondante apparaît donc difficile. Plusieurs théories ont été développées et sont actuellement utilisées en ingénierie. Parmi ces approches, on citera l'élasticité linéaire et non linéaire, la viscoélasticité, la plasticité et la viscoplasticité. Leur développement a été stimulé par l'utilisation de matériaux nouveaux. Chacune de ces approches vise à modéliser certains aspects spécifiques du comportement des matériaux. En mécanique des solides, une des formes les plus simples des relations contraintes-déformations est le cas de la dépendance linéaire entre les contraintes et les déformations. De telles relations linéaires sont présentes dans tous les matériaux pour les faibles niveaux de charge ou de déplacement et fournissent souvent des solutions satisfaisantes. Il convient de souligner que la théorie de l'élasticité linéaire constitue la base de la mécanique des solides. En effet, pour un grand nombre de matériaux, comme les métaux ou les céramiques, les déformations restent petites et satisfont la loi de Hooke lorsque les forces appliquées ne sont pas trop grandes. En outre, l'étude de l'élasticité linéaire se justifie comme étant préliminaire à l'étude de l'élasticité non linéaire ou de phénomènes dissipatifs comme la viscoélasticité et l'élastoplasticité. Dans ce chapitre, on présentera des éléments de la *théorie de l'élasticité linéaire* d'un matériau homogène et isotrope et des exemples représentatifs.

On trouvera des compléments de lecture dans les ouvrages suivants : [12, 13, 31, 40, 42, 55, 59, 60, 65].

7.2 Equations fondamentales de l'élastostatique linéaire

Cette section décrit l'équilibre d'un solide soumis à des forces volumiques ainsi qu'à des déplacements ou des tractions imposés sur sa frontière. Pour simplifier, on considérera dans la suite uniquement des problèmes isothermes et stationnaires (statiques).

7.2.1 Equations de champ de l'élastostatique linéaire

Dans le cadre de l'élastostatique linéaire, les champs de déformations et de contraintes sont régis par le système d'équations composé ainsi :

- 1) six équations définissant la relation déformation-déplacement (2.150)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T); \quad (7.1)$$

- 2) les trois équations d'équilibre (3.96)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (7.2)$$

avec $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$ la force volumique ;

- 3) six équations définissant la loi de comportement isotrope homogène (6.104)

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.3)$$

ou son inverse (6.108)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma} \quad (7.4)$$

où les coefficients d'élasticité λ , μ et E , ν sont indépendants de la position.

Un simple décompte montre qu'il y a 15 inconnues (trois composantes de déplacement u_i , six composantes de déformation ε_{ij} et six composantes de contrainte σ_{ij}) et quinze équations ; le problème est donc bien posé. On a montré à la section 6.10 que le solide élastique linéaire satisfait le second principe de la thermodynamique et qu'il existe une fonction potentielle qui, dans ce cas, est une forme quadratique des déformations (6.164) ou des contraintes.

Il y a deux façons de combiner les 15 équations scalaires précédentes. En prenant tout d'abord les trois composantes du déplacement u_i comme inconnues primaires et en introduisant (7.1) dans (7.3), on obtient

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7.5)$$

et par substitution dans (7.2)

$$(\lambda + \mu)u_{k,k} + \mu u_{i,jj} + f_i = 0. \quad (7.6)$$

Les relations (7.6) sont les *équations de Navier* qu'on peut également écrire sous forme intrinsèque

$$(\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \quad (7.7)$$

où le déplacement doit être deux fois continûment différentiable. Ces équations peuvent être résolues lorsqu'on impose les conditions aux limites soit en terme de déplacement soit en terme de forces de contact exprimées en fonction du déplacement à l'aide de (7.5). Une fois les déplacements connus, les déformations s'obtiennent par (7.1) et les contraintes par (7.3).

On peut également considérer les six composantes de contrainte σ_{ij} comme inconnues. Ainsi, en substituant les relations (7.4) dans les six équations de compatibilité (2.174)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0, \quad (7.8)$$

on obtient

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{mm,nn}\delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} - (1 + \nu)(\sigma_{iq,qj} + \sigma_{jr,ri}) = 0. \quad (7.9)$$

D'autre part, il résulte de l'équation d'équilibre (7.2) que

$$\sigma_{iq,qj} + \sigma_{jr,ri} = -f_{i,j} - f_{j,i}. \quad (7.10)$$

Ainsi, (7.9) devient

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{mm,nn}\delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} + (1 + \nu)(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0. \quad (7.11)$$

En prenant la trace de cette équation, il vient

$$(1 - \nu)\sigma_{mm,nn} = -(1 + \nu)f_{k,k} \quad (7.12)$$

ce qui permet de simplifier la relation (7.11) sachant que $\nu \neq 1$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu}\sigma_{mm,ij} + f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1 - \nu}f_{n,n}\delta_{ij} = 0. \quad (7.13)$$

Ces expressions sont les *équations de compatibilité de contrainte de Beltrami-Michell*. Si les forces volumiques sont constantes, (7.13) est réduit à

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu}\sigma_{mm,ij} = 0. \quad (7.14)$$

En particulier, les équations (7.14) sont trivialement satisfaites lorsque les composantes σ_{ij} sont des fonctions affines de \mathbf{x} . Dès lors, le champ des contraintes à l'intérieur du corps doit satisfaire les trois équations d'équilibre, les équations de Beltrami-Michell et les conditions aux limites du problème. Lorsque les contraintes sont connues, on calcule les déformations par (7.4) et les déplacements par (7.1).

7.2.2 Conditions aux limites

Le système d'équations précédent ne peut être résolu que si des conditions aux limites appropriées sont imposées. Soit un solide occupant un domaine Ω dans \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$. D'une manière générale, on peut diviser la surface $\partial\Omega$ en deux parties : $\partial\Omega = S_u \cup S_t$ avec $S_u \cap S_t = \emptyset$, où

- S_u représente la partie de $\partial\Omega$ sur laquelle les composantes de déplacement u_i sont imposées, c'est-à-dire

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } S_u, \quad (7.15)$$

- S_t représente la partie de $\partial\Omega$ sur laquelle les composantes du vecteur de contrainte t_i sont prescrites, c'est-à-dire

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{sur } S_t, \quad (7.16)$$

où n_j sont les composantes de la normale unitaire extérieure à S_t .

On peut classer les problèmes d'élastostatique en trois types selon les conditions aux limites imposées :

- de type I, où on a uniquement des conditions aux limites du type déplacement (7.15) et S_u est non vide ;
- de type II, où on a uniquement des conditions aux limites du type contrainte (7.16) et S_t est non vide ;
- de type III ou mixtes, où les conditions aux limites font appel à la fois aux déplacements et aux contraintes avec S_u et S_t non vides en même temps.

On notera qu'il est interdit d'imposer à la fois la contrainte et le déplacement au même endroit.

Après avoir formulé un problème aux limites, les questions d'existence et d'unicité de la solution d'un problème d'élasticité linéaire sont posées. Une discussion de ces sujets sort du cadre introductif de ce chapitre.

Principe de Saint-Venant

Alors qu'il est relativement aisé de définir les conditions aux limites et leur type, il est souvent plus difficile de les spécifier de manière précise, particulièrement lorsqu'on considère des forces de surface. La raison en est que l'information sur la distribution exacte des forces de contact n'est pas connue facilement. Afin de surmonter cette difficulté, le problème aux limites de l'élasticité est remplacé par un autre dans lequel le corps est le même et les conditions aux limites sont substituées par d'autres qui sont statiquement équivalentes. Selon le principe de Saint-Venant, les effets dus au remplacement des conditions aux limites réelles par des conditions statiquement équivalentes sont locaux et suffisamment loin de ces limites, la solution du problème original est pratiquement identique à celle du problème équivalent. La distance pour laquelle les différences ne sont pas significatives, dépend des échelles linéaires caractéristiques de la structure considérée. Ce principe s'est révélé très utile dans plusieurs problèmes d'intérêt pratique.

7.2.3 Principe de superposition

Il vaut la peine de noter qu'en théorie de l'élasticité linéaire, les 15 équations (7.1)-(7.4) ainsi que les conditions aux limites sont linéaires. Ceci conduit à la formulation du principe de superposition qui s'énonce comme suit pour un problème de type II : Soit un corps occupant le domaine Ω de \mathbb{R}^3 , soumis aux tractions $\bar{t}_i^{(1)}$ sur $\partial\Omega$ et aux forces de volume $\bar{f}_i^{(1)}$. Le champ de contrainte engendré dans ce corps par ces forces est noté $\sigma_{ij}^{(1)}$. Le même corps soumis aux tractions de surface $\bar{t}_i^{(2)}$ et aux forces de volume $\bar{f}_i^{(2)}$ donne lieu au champ de contraintes résultant $\sigma_{ij}^{(2)}$. L'application simultanée des tractions de surface $(\bar{t}_i^{(1)} + \bar{t}_i^{(2)})$ et des forces de volume $(\bar{f}_i^{(1)} + \bar{f}_i^{(2)})$ conduit au champ de contrainte $(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})$. En conséquence, les déformations du corps s'obtiennent à partir des équations (7.4) en y insérant les contraintes $(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})$.

Le principe de superposition s'applique également aux problèmes de type I et III.

7.3 Elasticité plane linéaire isotrope

De nombreuses applications d'importance pratique ne requièrent pas la résolution du problème tridimensionnel pour l'état de contrainte et de déformation. A cause de la géométrie particulière du solide et de la forme de la charge, les équations de l'élasticité peuvent être considérées comme des fonctions de deux variables spatiales, uniquement. Le problème se réduit dès lors à un problème plan.

Dans cette section, deux cas importants de problèmes plans de l'élasticité linéaire sont définis. Ce sont les cas de déformation plane et de contrainte plane.

7.3.1 Etats de déformation plane

Soit une longue barre prismatique soumise à des forces latérales (fig. 7.1). On suppose que la composante de la force volumique selon x_3 est nulle alors que les composantes selon les directions x_1 et x_2 sont des fonctions de x_1 et x_2 . En raison de la dimension importante de la barre le long de l'axe x_3 , on peut supposer que le déplacement u_3 à une certaine distance des extrémités est une fonction de la seule coordonnée x_3 et que les déplacements u_1 et u_2 dépendent uniquement de x_1 et x_2

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad u_3 = u_3(x_3). \quad (7.17)$$

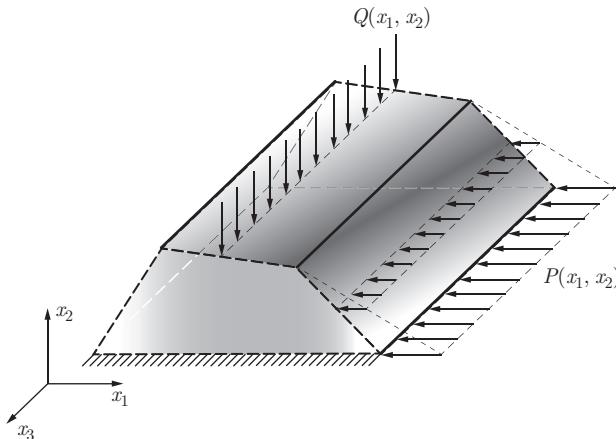


Fig. 7.1 Cas d'une longue structure chargée en déformation plane.

Pour une barre de longueur infinie ou lorsque les extrémités de celle-ci sont fixées, on peut supposer de plus que $u_3 = 0$ en chaque section. Les composantes de déformation sont alors données par

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (7.18)$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

L'état de déformation ainsi défini est appelé déformation plane. En utilisant la loi de Hooke (7.3), on remarque que les contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} et σ_{12} sont seulement des fonctions de x_1 , x_2 alors que σ_{23} et σ_{31} sont nulles partout. Par conséquent, les équations d'équilibre (7.2) deviennent

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0. \quad (7.20)$$

Connaissant la déformation (éqs (7.18) et (7.19)), on peut employer les relations contrainte-déformation (7.3) pour calculer les contraintes comme suit :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11}(1-\nu) + \nu\varepsilon_{22}) \quad (7.21)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{22}(1-\nu) + \nu\varepsilon_{11}) \quad (7.22)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{12} \quad (7.23)$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (7.24)$$

Inversement, les déformations sont données par

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad (7.25)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad (7.26)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}. \quad (7.27)$$

On impose les mêmes restrictions aux forces de surface (fig. 7.2). Les forces surfaciques \bar{t}_1 et \bar{t}_2 doivent être seulement des fonctions de x_1 et x_2 , avec $\bar{t}_3 = 0$, afin que la déformation soit effectivement plane. Ainsi, pour des conditions de type II, on écrit

$$\bar{t}_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \quad \bar{t}_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2, \quad (7.28)$$

où n_1 et n_2 sont les composantes de la normale unitaire \mathbf{n} extérieure à $\partial\Omega$. Lorsque les contraintes sont choisies comme inconnues, les équations de compatibilité doivent être utilisées. Sous l'hypothèse de déformation plane, la seule équation de compatibilité qui n'est pas identiquement satisfaite s'écrit

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7.29)$$

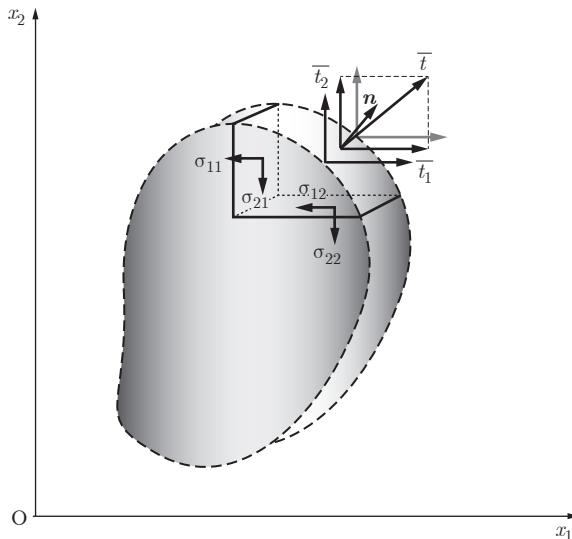


Fig. 7.2 Conditions aux limites pour les contraintes en élasticité plane.

Donc, dans le cas de déformation plane, huit quantités ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , u_1 , u_2 doivent être déterminées pour satisfaire les équations (7.18), (7.20) et (7.25)-(7.27) ainsi que les conditions aux limites (7.28). Les huit équations scalaires précédentes peuvent être réduites à trois de la manière suivante :

1) En introduisant les équations (7.25)-(7.27) dans (7.29), il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} ((1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} ((1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7.30)$$

2) En dérivant respectivement les première et deuxième équations de (7.20) par rapport à x_1 et x_2 et en additionnant les deux équations résultantes, on obtient

$$-2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \quad (7.31)$$

3) En substituant (7.31) dans (7.30), on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \quad (7.32)$$

qui est l'équation de compatibilité en fonction des composantes de contrainte.

D'après l'analyse précédente, on a maintenant un ensemble de trois équations : deux équations d'équilibre (7.20) et une équation de compatibilité (7.32). Ces trois équations ont σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} pour inconnues. Ce système d'équations, avec les conditions aux limites (7.28) peut être utilisé dans la recherche d'une solution pour un problème de déformation plane. On notera que la solution satisfaisant ce système est unique. Après avoir déterminé les composantes de contrainte, les déformations se calculent à l'aide des équations (7.25)-(7.27) et les déplacements à l'aide de (7.18).

Fonction de contrainte pour des problèmes de déformation plane

Le problème de déformation plane peut avantageusement se simplifier à une équation contenant une seule variable. Si on suppose que les forces de volume dérivent d'un potentiel $V(x_1, x_2)$

$$f_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (7.33)$$

il n'est pas difficile de montrer que les équations d'équilibre sont vérifiées si les composantes de contrainte sont les dérivées d'une fonction $\Phi(x_1, x_2)$, telles que

$$\sigma_{11} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7.34)$$

En introduisant ces composantes dans l'équation (7.32), on obtient

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (7.35)$$

ou

$$\Delta\Delta\Phi + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V = 0. \quad (7.36)$$

Lorsque les forces de volumes sont négligées, les contraintes sont données par

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2} \quad (7.37)$$

et l'équation (7.36) devient

$$\Delta\Delta\Phi = 0. \quad (7.38)$$

qui est appelée une ***équation biharmonique***. Le problème de déformation plane de l'élasticité linéaire est ainsi réduit à trouver une fonction Φ , appelée ***fonction des contraintes d'Airy***, satisfaisant (7.38) pour des conditions aux limites appropriées. La connaissance de cette fonction permet la détermination des contraintes par (7.34), des déformations par (7.25)-(7.27) et des déplacements par (7.18).

7.3.2 Etats de contrainte plane

On considère maintenant la figure 7.3 où l'on a le cas opposé à celui du long prisme de la figure 7.1. On suppose que le corps a une dimension selon x_3 très petite par rapport aux dimensions dans le plan x_1x_2 . On suppose aussi que les forces surfaciques sont appliquées parallèlement au plan x_1x_2 . Les forces volumiques selon x_3 sont nulles alors que selon les directions x_1 et x_2 , elles sont des fonctions de x_1 et x_2 seulement. Vu la géométrie du corps et les charges appliquées, on peut supposer que les composantes de contrainte σ_{33} , σ_{13} et σ_{23} sont nulles partout et que les autres composantes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} restent pratiquement constantes dans l'épaisseur. Un tel état de contrainte est appelé contrainte plane et s'écrit

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2) \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2) \quad (7.39)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (7.40)$$

Les équations d'équilibre sont à nouveau données par (7.20) de même que les conditions aux limites par (7.28). Pour obtenir les relations déformation-contrainte, on utilise la relation (7.4) qui se réduit à

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (7.42)$$

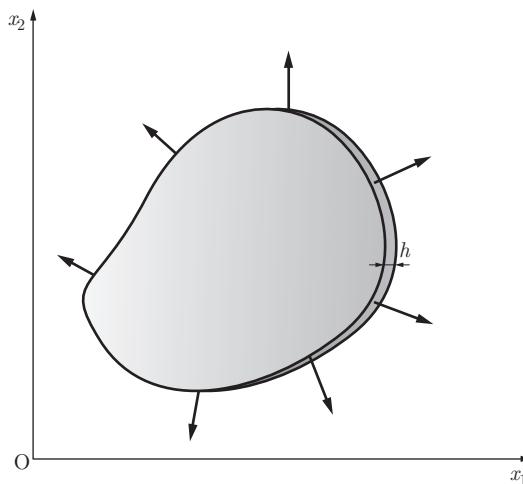


Fig. 7.3 Plaque mince avec charges dans le plan.

En inversant ces relations, on trouve les contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (7.43)$$

En extrayant ($\sigma_{11} + \sigma_{22}$) des équations (7.41) et en insérant le résultat dans la dernière équation de (7.42), on obtient

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (7.44)$$

Cette équation donne la déformation normale « qui sort de la plaque » en fonction des déformations tangentes « qui se trouvent dans la plaque ». Notons que ε_{33} ne fait pas partie des quantités qui caractérisent la contrainte plane. Cependant, on peut l'obtenir indépendamment en utilisant la dernière équation. On peut naturellement obtenir u_3 en utilisant $\varepsilon_{33} = \partial u_3 / \partial x_3$. Les déplacements u_1 et u_2 sont indépendants de x_3 et les relations déformation-déplacement sont données par (7.18).

En ce qui concerne les équations de compatibilité, on dispose de la relation (7.29) et des équations suivantes qui sont dues à la composante non nulle ε_{33}

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (7.45)$$

L'intégration de la dernière égalité impose la condition suivante pour ε_{33}

$$\varepsilon_{33} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2. \quad (7.46)$$

Dans la résolution de problèmes de contraintes planes, cette condition est généralement trop restrictive et n'est pas vérifiée ; seule l'équation (7.29) est considérée. Quoique les solutions résultantes soient approchées, elles sont satisfaisantes aussi longtemps que l'épaisseur des plaques est très petite.

Comme dans le cas de la déformation plane, les équations de contraintes planes se réduisent à trois équations qui font intervenir les composantes de contrainte σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} . C'est évident puisque les équations (7.18) et (7.29) s'appliquent aussi à la contrainte plane. La substitution des composantes de déformation (7.41) dans (7.29) et l'utilisation des équations d'équilibre (7.20) donnent

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \quad (7.47)$$

Cette dernière équation et les équations d'équilibre forment un système de trois équations à trois inconnues. On notera que, pour un problème donné, une solution qui satisfait ce système est unique.

Fonction de contrainte pour des problèmes de contrainte plane

En substituant les équations (7.37) dans l'équation (7.47) et en négligeant les forces volumiques, on trouve à nouveau une fonction de contrainte satisfaisant

$$\Delta\Delta\Phi = 0. \quad (7.48)$$

En résumé, nous avons montré qu'une même équation différentielle régit la fonction de contrainte des deux états bidimensionnels de l'élasticité linéaire : la déformation plane et la contrainte plane. La distinction entre ces deux cas apparaît après le calcul des contraintes, lors de la détermination des déformations qui s'effectue à partir des équations (7.25)-(7.27) et (7.41)-(7.42), respectivement, pour les états de déformation plane et de contrainte plane.

En utilisant les combinaisons appropriées des constantes élastiques, les équations de déformations planes peuvent être converties en celles de contraintes planes. A savoir :

De déformation plane à contrainte plane :

les relations contraintes-déformations (7.21)-(7.24) dans le cas de déformations planes peuvent être converties en celles de contraintes planes (7.43) si dans (7.43), on remplace le module de Young E par $E(1 + 2\nu)/(1 + \nu)^2$ et le coefficient de Poisson ν par $\nu/(1 + \nu)$.

De contrainte plane à déformation plane :

de façon similaire, les relations contraintes-déformations (7.43) dans le cas de contraintes planes peuvent être converties en celles de contraintes planes (7.21)-(7.24) si dans (7.43), on remplace le module de Young E par $E/(1 - \nu^2)$ et le coefficient de Poisson ν par $\nu/(1 - \nu)$.

Ainsi, la solution d'un problème en contraintes planes peut être déterminée à partir de celle du problème correspondant en déformations planes, et vice versa.

7.4 Méthodes de solution en élasticité linéaire

On a montré dans la section 7.2 que la solution d'un problème tridimensionnel en élasticité linéaire et isotrope requiert le traitement de quinze équations à quinze inconnues, ces dernières satisfaisant les conditions aux limites prescrites. Ces quinze équations sont combinées de telle sorte que : (a) trois inconnues soient les composantes du déplacement, solutions des équations (7.6), (b) six inconnues soient les composantes de la contrainte, solutions des équations (7.13). Les problèmes d'élasticité plane, tels que déformation plane ou contrainte plane, peuvent être réduits à huit équations à huit inconnues. Le nombre d'équations et d'inconnues peut aussi être réduit d'une manière similaire à celle du cas tridimensionnel.

L'écriture directe de solutions analytiques de problèmes d'élasticité n'est pas chose facile et souvent, elle s'avère impossible. En conséquence, des méthodes basées sur l'application rigoureuse des mathématiques appliquées sont proposées pour traiter les différentes classes de problèmes, tandis que d'autres techniques permettent l'obtention de solutions approchées en se basant sur l'intuition et l'expérience. On donne ci-dessous une liste des méthodes les plus utilisées en élasticité linéaire.

- *Méthode inverse.* Dans cette méthode, le champ de déplacements ou de contraintes est assigné au corps et on détermine toutes les autres quantités, forces externes comprises. Alors que les solutions de problèmes inverses ne posent pas de difficulté particulière, il n'est pas toujours possible de trouver une solution d'intérêt pour l'ingénieur [12, 65].
- *Méthode des potentiels.* Pour simplifier la solution des équations de l'élasticité, on introduit des fonctions de potentiel. Les potentiels pour les déplacements donnent la solution des équations de Navier et ceux relatifs aux contraintes engendrent des systèmes de contraintes à l'équilibre [22, 59, 62, 74].
- *Méthode semi-inverse.* Dans cette méthode, on spécifie une partie des champs de déplacements et de contraintes. En recourant à ces données partielles et en s'appuyant sur les équations de la théorie de l'élasticité, on détermine ensuite les équations qui doivent être satisfaites par les autres déplacements et contraintes. Ces équations sont normalement faciles à intégrer et, combinées avec les données admises pour la première partie des champs de déplacements et de contraintes, elles fournissent une solution complète et précise de nombreux problèmes intéressant les ingénieurs. Saint-Venant appliqua cette méthode au problème de la torsion et de la flexion des barres prismatiques [12, 65, 71].
- *Méthode des variables complexes.* Cette méthode utilise des fonctions analytiques du plan complexe pour résoudre les équations d'élasticité. Elle ne peut s'appliquer qu'à des problèmes plans, p. ex. [59].
- *Les méthodes variationnelles.* Ces méthodes se basent sur le fait que les équations de l'élasticité peuvent s'obtenir en minimisant un principe d'énergie, p. ex. [22, 59].

- *Autres.* D'autres méthodes incluent les méthodes de transformation intégrale et les approches numériques telles que la méthode des éléments finis, p. ex. [22, 25, 60].

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode des potentiels et la méthode semi-inverse pour la résolution de problèmes représentatifs avec l'objectif principal de mettre en évidence les formulations classiques de la théorie de l'élasticité. L'application des autres méthodes pour la résolution de divers problèmes est abondamment traitée dans la littérature [22, 59, 60, 65, 71].

Dans les paragraphes précédents, nous avons indiqué que le problème de l'élasticité peut se formuler en termes de déplacements avec les équations de Navier (7.6) comme équations de champ. Une autre formulation repose sur les contraintes pour lesquelles les équations de compatibilité (7.8) et les équations d'équilibre (7.2) constituent un système de neuf équations. Dans cette section, nous allons mettre en œuvre un cadre général où les fonctions de déplacement ou de contrainte sont introduites de manière à satisfaire les équations de Navier ou celles de compatibilité de Beltrami-Michell (7.13) et les équations d'équilibre (7.2), respectivement. On montre que de telles fonctions fournissent la solution de certains problèmes d'élasticité. Pour des raisons de simplicité, on considérera uniquement le cas de forces de volume nulles. Lorsque les forces de volume sont prises en considération, la méthodologie devient plus difficile et sort du cadre de cet ouvrage. Le lecteur trouvera à ce propos des compléments plus avancés et pertinents dans les ouvrages suivants [22, 59].

7.4.1 Fonctions de déplacement

Pour résoudre les équations de Navier, des fonctions de déplacement ou de potentiel sont introduites de telle sorte que le vecteur déplacement dans les équations de Navier s'obtienne à partir des dérivées de ces fonctions. Ces fonctions de potentiel sont régies par les équations de Laplace ou les équations biharmoniques, bien connues en physique mathématique. Pour aller dans ce sens, nous nous appuyons sur le théorème de la décomposition de Helmholtz, cf. [15].

Théorème de Helmholtz

Un champ vectoriel fini et continu \mathbf{a} , qui s'annule à l'infini, peut être représenté comme la somme d'un champ irrotationnel \mathbf{b} et d'un champ solеноïdal \mathbf{c}

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (7.49)$$

avec

$$\nabla \times \mathbf{b} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{c} = 0 . \quad (7.50)$$

Pour formuler la solution des équations de Navier en termes de fonctions potentielles, on élabore les définitions suivantes :

- Pour un champ irrotationnel, il existe un potentiel scalaire φ tel que $\mathbf{b} = \nabla\varphi$. Puisque l'opérateur gradient n'implique que des dérivées premières, la fonction φ n'est déterminée qu'à une constante additive arbitraire près.
- Pour un champ solénoïdal, il existe toujours un potentiel vecteur Ψ tel que $\mathbf{c} = \nabla \times \Psi$. Ce potentiel n'est déterminé qu'à une fonction vectorielle additive près.

Donc un champ de déplacement \mathbf{u} continu, fini et qui s'annule à l'infini, suivant le théorème de Helmholtz, peut être représenté par la somme

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi \quad (7.51)$$

avec les conséquences $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ et $\operatorname{div}(\nabla \times \Psi) = 0$. Notons que \mathbf{u} a trois composantes scalaires tandis que φ et Ψ en ont quatre. On peut donc imposer la condition suivante sans perte de généralité

$$\operatorname{div} \Psi = 0 . \quad (7.52)$$

Il est intéressant d'examiner la divergence et le rotationnel du déplacement exprimé dans (7.51). En utilisant (7.52), (1.179), (1.188) et (1.190), on obtient

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \nabla\varphi + \operatorname{div}(\nabla \times \Psi) = \operatorname{div} \nabla\varphi + 0 = \nabla^2\varphi \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times \nabla\varphi + \nabla \times (\nabla \times \Psi) = 0 + \nabla \times (\nabla \times \Psi) \\ &= \nabla(\operatorname{div} \Psi) - \nabla^2\Psi = -\nabla^2\Psi . \end{aligned} \quad (7.54)$$

Remarquons que par (2.163), $\operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{ii}$ et donc $\nabla^2\varphi = \varepsilon_{ii}$. Le rotationnel du vecteur déplacement, i.e. $\nabla \times \mathbf{u}$, est lié au vecteur de rotation du corps, dont les composantes sont celles du tenseur antisymétrique de rotation infinitésimale $\boldsymbol{\omega}$, multipliées par le facteur 2, cf. éq. (2.168).

Comme nous l'avons justifié précédemment, nous supposons $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ dans (7.7). En introduisant (7.51) dans (7.7) et à l'aide de (7.53) ainsi que des identités vectorielles (1.180), (1.188) et les relations (1.236), (1.237), on obtient

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2\varphi) + \mu\nabla \times (\nabla^2\Psi) = 0 . \quad (7.55)$$

Dès lors, toute paire de fonctions φ et Ψ satisfaisant (7.55) produit un champ de déplacement, donné par (7.51), qui est une solution des équations de Navier. Inversement, pour tout déplacement \mathbf{u} satisfaisant les équations de Navier, il existe au moins un ensemble de fonctions φ et Ψ satisfaisant (7.51), p. ex. [12, 22, 74].

Potentiel de déformation de Lamé

Des solutions particulières de (7.55) sont engendrées par les deux équations

$$\nabla^2\varphi = cst \quad \text{et} \quad \nabla^2\Psi = cst . \quad (7.56)$$

Lorsque

$$\nabla^2 \varphi = cst \quad \text{et} \quad \Psi = 0 , \quad (7.57)$$

la fonction φ est appelée le potentiel de déformation de Lamé et le déplacement s'obtient par

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (7.58)$$

qui satisfait l'équation de Navier. Très souvent, pour des raisons de facilité dans la résolutions d'applications, on écrit (7.58) sous la forme

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} \nabla \varphi . \quad (7.59)$$

Donc toute fonction qui satisfait l'équation de Poisson (7.57) peut servir de potentiel de déformation. Lorsque φ est connu, le vecteur déplacement s'obtient par (7.59), la déformation par (7.1) et les contraintes par (7.3). Notons que toutes ces quantités s'expriment en fonction des dérivées premières et secondes de φ . A titre d'exemple, on a

$$u_i = \frac{1}{2\mu} \varphi_{,i} \quad (7.60)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2\mu} \varphi_{,ij} \quad (7.61)$$

$$\varepsilon_{kk} = u_{k,k} = \frac{1}{2\mu} \varphi_{,kk} \quad (7.62)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \frac{\lambda}{2\mu} \varphi_{,kk} \delta_{ij} + \varphi_{,ij} . \quad (7.63)$$

Dans plusieurs problèmes pratiques de l'élasticité, l'objectif n'est pas d'obtenir une solution générale, mais plutôt une solution particulière. Alors pour raison de simplicité, considérons

$$\nabla^2 \varphi = 0 . \quad (7.64)$$

C'est une équation de Laplace et φ est une fonction harmonique. On donne ci-dessous des fonctions harmoniques utiles dans la solution de certains problèmes pratiques

$$\varphi(r, \theta) = Cr^n \cos n\theta, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (7.65)$$

$$\varphi(r) = C \ln \frac{r}{K}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (7.66)$$

$$\varphi(\theta) = C\theta, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}, \quad (7.67)$$

$$\varphi(R) = \frac{C}{R}, \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 . \quad (7.68)$$

Lors de l'utilisation des coordonnées sphériques de l'annexe B dans les exemples suivants, nous remplaçons r par le symbole R . Les deux fonctions du type Poisson données ci-après sont utiles pour la solution de la sphère creuse et

du cylindre creux, soumis à des pressions internes et externes en combinaison avec (7.66) et (7.68)

$$\varphi(R) = CR^2, \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (7.69)$$

$$\varphi(r) = Cr^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (7.70)$$

Sphère creuse sous pressions interne et externe

Soit une sphère creuse de rayon interne et externe r_i, r_e (fig. 7.4) qui est soumise aux pressions interne et externe P_i, P_e , respectivement. Les forces de volume sont négligées.

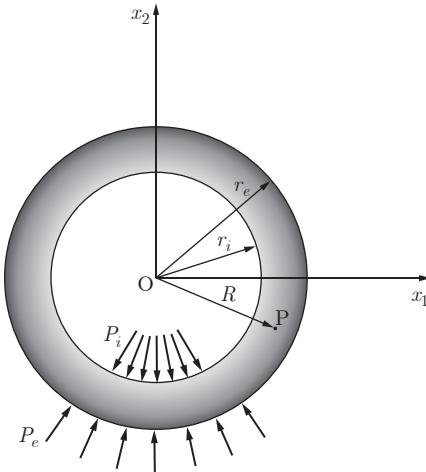


Fig. 7.4 Sphère creuse soumise à des pressions internes et externes.

A cause de la symétrie sphérique, on utilise des coordonnées sphériques (R, φ, θ) . Dans ce système, toutes les contraintes et déformations de cisaillement s'annulent et des trois composantes du vecteur déplacement u_R, u_φ, u_θ , seule la composante u_R n'est pas nulle. La solution de ce problème peut s'obtenir en combinant les deux potentiels (7.68) et (7.69)

$$\varphi(R) = \frac{C}{R} + DR^2. \quad (7.71)$$

Ce potentiel satisfait l'équation de Poisson (7.56)₁ et fournit les contraintes et déformations qui remplissent toutes les caractéristiques géométriques du problème. A l'aide de (7.60) et l'annexe B, les composantes du déplacement sont

$$u_R = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{C}{R^2} + 2DR \right), \quad u_\theta = u_\varphi = 0. \quad (7.72)$$

Avec le déplacement (7.72), les déformations s'obtiennent en utilisant les relations (B.22)-(B.24) de l'Annexe B

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{2C}{R^3} + 2D \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{C}{R^3} + 2D \right) \\ \varepsilon_{\theta\varphi} &= \varepsilon_{\theta R} = \varepsilon_{\varphi R} = 0. \end{aligned} \quad (7.73)$$

En insérant ces composantes dans la loi de Hooke (7.3), on obtient les contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{2C}{R^3} + 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}D, & \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{C}{R^3} + 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}D \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \sigma_{\theta R} = \sigma_{\varphi R} = 0.\end{aligned}\quad (7.74)$$

Les constantes C, D dans (7.74) sont déterminées par les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= -P_i \quad \text{en } R = r_i \\ \sigma_{RR} &= -P_e \quad \text{en } R = r_e.\end{aligned}\quad (7.75)$$

En appliquant ces conditions à l'expression de σ_{RR} , il vient

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{2} \frac{r_e^3 r_i^3 (P_e - P_i)}{r_e^3 - r_i^3} \\ D &= \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{r_i^3 P_i - r_e^3 P_e}{r_e^3 - r_i^3}.\end{aligned}\quad (7.76)$$

En substituant ces expressions dans (7.74), on obtient les contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{R^3} \frac{r_e^3 r_i^3 (P_e - P_i)}{r_e^3 - r_i^3} + \frac{r_i^3 P_i - r_e^3 P_e}{r_e^3 - r_i^3} \\ &= -\frac{P_i \left(\frac{r_e^3}{R^3} - 1 \right)}{\left(\frac{r_e^3}{r_i^3} - 1 \right)} - \frac{P_e \left(1 - \frac{r_i^3}{R^3} \right)}{\left(1 - \frac{r_i^3}{r_e^3} \right)}\end{aligned}\quad (7.77)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2R^3} \frac{r_e^3 r_i^3 (P_e - P_i)}{r_e^3 - r_i^3} + \frac{r_i^3 P_i - r_e^3 P_e}{r_e^3 - r_i^3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_i \left(\frac{r_e^3}{R^3} + 2 \right)}{\left(\frac{r_e^3}{r_i^3} - 1 \right)} - \frac{P_e \left(\frac{r_i^3}{R^3} + 2 \right)}{\left(1 - \frac{r_i^3}{r_e^3} \right)} \right).\end{aligned}\quad (7.78)$$

La composante non nulle du déplacement devient

$$\begin{aligned}u_R &= \frac{R}{2\mu} \left(-\frac{1}{2R^3} \frac{r_e^3 r_i^3 (P_e - P_i)}{r_e^3 - r_i^3} + \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{r_i^3 P_i - r_e^3 P_e}{r_e^3 - r_i^3} \right) \\ &= \frac{R}{2\mu} \left(P_i \frac{\frac{1}{2} \frac{r_e^3}{R^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu}}{\frac{r_e^3}{r_i^3} - 1} - P_e \frac{\frac{1}{2} \frac{r_i^3}{R^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu}}{1 - \frac{r_i^3}{r_e^3}} \right).\end{aligned}\quad (7.79)$$

Il est intéressant de noter que si $r_e \gg r_i$, les contraintes et les déplacements sont approchés par

$$\sigma_{RR} = -P_i \frac{r_i^3}{R^3} - P_e \left(1 - \frac{r_i^3}{R^3} \right)\quad (7.80)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_i}{2} \frac{r_i^3}{R^3} - \frac{P_e}{2} \left(\frac{r_i^3}{R^3} + 2 \right)\quad (7.81)$$

$$u_R = \frac{R}{2\mu} \left(\frac{P_i}{2} \frac{r_i^3}{R^3} - P_e \left(\frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} + \frac{1}{2} \frac{r_i^3}{R^3} \right) \right).\quad (7.82)$$

A la surface interne, $R = r_i$, les contraintes et les déplacements deviennent

$$\sigma_{\theta\theta}|_{R=r_i} = \sigma_{\varphi\varphi}|_{R=r_i} = \frac{P_i}{2} - \frac{3P_e}{2}, \quad \sigma_{RR}|_{R=r_i} = -P_i \quad (7.83)$$

$$u_R|_{R=r_i} = \frac{R}{2\mu} \left(\frac{P_i}{2} - \frac{3P_e}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \right). \quad (7.84)$$

Lorsque $R \rightarrow \infty$, $r_i/R \rightarrow 0$ et les équations (7.80)-(7.82) se simplifient

$$\sigma_{RR} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -P_e \quad \text{et} \quad u_R = -\frac{RP_e}{2\mu} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad (7.85)$$

Cylindre creux sous pressions interne et externe et extrémités fixes

Un cylindre creux de rayons interne et externe r_i, r_e (fig. 7.5) est soumis aux pressions interne et externe P_i, P_e , respectivement. Les forces de volume sont supposées nulles.

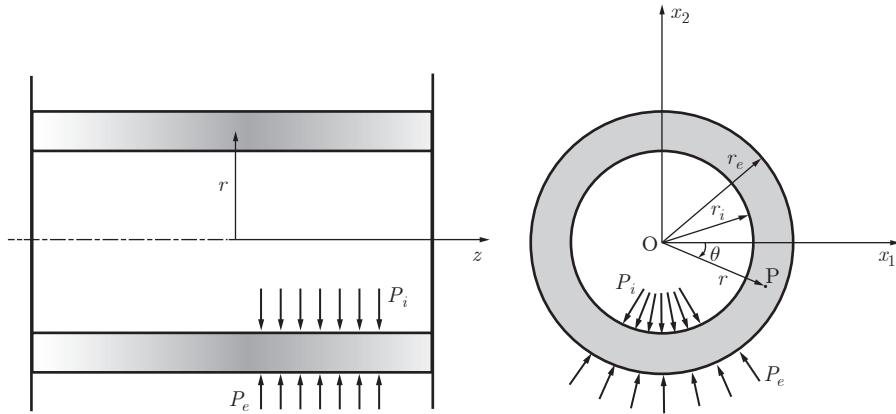


Fig. 7.5 Cylindre creux soumis à des pressions interne et externe.

A cause de la symétrie cylindrique, il est utile de recourir aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) (annexe A). Dans ce système, toutes les contraintes et déformations de cisaillement s'annulent et des trois composantes du vecteur déplacement, seule la composante u_r n'est pas nulle. On est dans le cas d'un problème de déformation plane, puisqu'aucune déformation n'est permise dans la direction de l'axe du cylindre, soumis aux conditions aux limites

$$\sigma_{rr} = -P_i, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{en} \quad r = r_i \quad (7.86)$$

$$\sigma_{rr} = -P_e, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{en} \quad r = r_e. \quad (7.87)$$

La solution de ce problème peut être obtenue par la combinaison des deux potentiels (7.66) et (7.70)

$$\varphi(r) = C_1 \ln \frac{r}{K} + C_2 r^2 \quad (7.88)$$

où C_1, K, C_2 sont des constantes déterminées via les conditions aux limites. En pratiquant la procédure de l'exemple précédent, les composantes de la contrainte et du déplacement sont

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right)\end{aligned}\quad (7.89)$$

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{r_i^2 P_i - r_e^2 P_e}{r_e^2 - r_i^2} \quad (7.90)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (7.91)$$

$$u_r = \frac{r}{2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{r_e^2 r_i^2 (P_e - P_i)}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 P_i - r_e^2 P_e}{r_e^2 - r_i^2} (1 - 2\nu) \right). \quad (7.92)$$

Ce problème est aussi résolu avec deux méthodes différentes à la section 7.5 pour le cas de l'état de contrainte plane.

Vecteur de Galerkin

Le vecteur déplacement (7.51) est représenté par une somme de dérivées premières, via l'opérateur différentiel $\nabla(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial x_i$, d'une fonction scalaire φ et d'une fonction vectorielle Ψ . Pour pouvoir construire des solutions d'application générale, le recours à des opérateurs différentiels du second ordre est plus indiqué. Des opérateurs de ce type sont l'opérateur laplacien ∇^2 (§ 1.4.8) et $\nabla(\operatorname{div}(\bullet)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j} \right)$. Ces opérateurs peuvent s'exprimer dans un système de coordonnées quelconque et s'appliquent à une fonction vectorielle.

Soit une fonction vectorielle \mathbf{V} reliée au vecteur déplacement \mathbf{u} par l'expression

$$2\mu\mathbf{u} = 2(1 - \nu)\nabla^2\mathbf{V} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{V}). \quad (7.93)$$

Le facteur 2μ est introduit pour la facilité dans les applications. Le vecteur \mathbf{V} est le vecteur de Galerkin qui fournit une solution générale des équations de Navier. En introduisant (7.93) dans (7.7), en utilisant les identités vectorielles (1.188), (1.191) et (1.236), et en se rappelant que $2(1 - \nu) = (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$, on obtient

$$\nabla^2 (\nabla^2 \mathbf{V}) = 0. \quad (7.94)$$

En conséquence, toute fonction vectorielle biharmonique peut servir de vecteur de Galerkin et le déplacement \mathbf{u} dans (7.93) satisfara (7.7). Donc les relations (7.93) et (7.94) sont équivalentes aux équations de Navier. La comparaison de (7.93) et (7.51) permet d'écrire

$$\varphi = -\frac{1}{2\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (7.95)$$

$$\nabla \times \Psi = \frac{2(1 - \nu)}{2\mu} \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (7.96)$$

Si on impose aussi la condition que \mathbf{V} soit harmonique, i.e. $\nabla^2 \mathbf{V} = 0$, alors (7.96) conduit à $\nabla \times \Psi = 0$. De plus, à cause de l'identité vectorielle (1.191), il résulte de (7.95) que φ est une fonction harmonique, $\nabla^2 \varphi = 0$. Donc, φ est un potentiel de déformation de Lamé, défini antérieurement.

La fonction de déformation de Love

Un cas particulier de vecteur de Galerkin apparaît lorsque $\mathbf{V} = V_3 \mathbf{e}_3$. Alors, on a la fonction de déformation de Love. La condition (7.94) devient

$$\nabla^2 (\nabla^2 V_3) = 0 \quad (7.97)$$

et (7.93) s'écrit

$$2\mu \mathbf{u} = 2(1-\nu)(\nabla^2 V_3) \mathbf{e}_3 - \nabla \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right). \quad (7.98)$$

Les trois composantes du déplacement sont facilement exprimées en coordonnées cartésiennes

$$2\mu u_1 = -\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad 2\mu u_2 = -\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad 2\mu u_3 = 2(1-\nu)\nabla^2 V_3 - \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2}. \quad (7.99)$$

Love introduisit cette forme particulière du vecteur dans l'étude de solides de révolution sous charges symétriques. Dans pareils cas, les composantes du déplacement s'expriment en termes de cette fonction en coordonnées cylindriques

$$2\mu u_r = -\frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z}, \quad 2\mu u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z}, \quad 2\mu u_z = 2(1-\nu)\nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \quad (7.100)$$

Problème de Kelvin : Force concentrée à l'intérieur d'un corps infini

Une application de ce potentiel de déformation consiste à établir la solution du problème d'une force unique concentrée à l'intérieur d'un corps infini. Cette application est connue comme le problème de Kelvin défini à la figure 7.6 (a) [22].

Une force P est appliquée au point O parallèlement à l'axe x_3 . Elle satisfait les conditions aux limites suivantes :

- Toutes les contraintes s'annulent à l'infini.
- La singularité à l'origine est équivalente à la force appliquée P . Donc, la force concentrée peut être considérée comme la limite d'un système de forces qui s'appliquent à la surface d'une petite cavité située à l'origine.

La solution de ce problème est obtenue en coordonnées cylindriques. Donc, en raison de la symétrie angulaire, le potentiel de déformation de Love est indépendant de θ , i.e.

$$V_z = V_z(r, z). \quad (7.101)$$

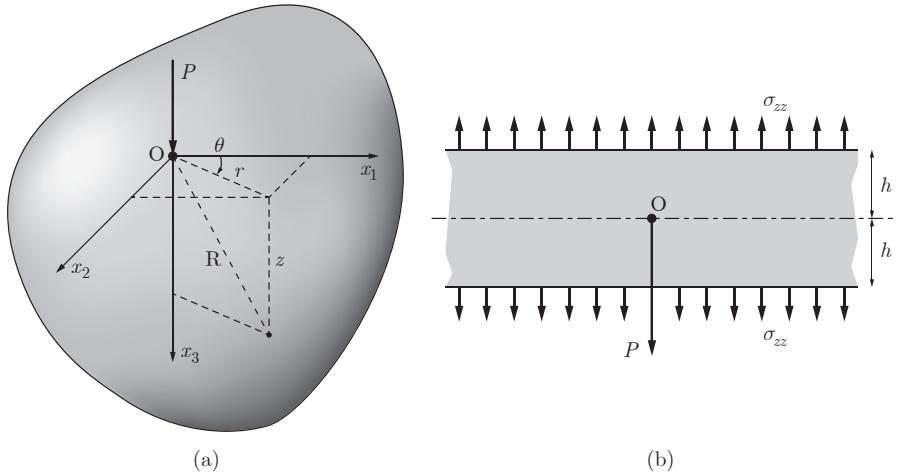


Fig. 7.6 Solide infini soumis à une force concentrée (a) et vue en coupe (b).

En utilisant les relations déformation-déplacement et contrainte-déformation (voir Annexe A), les composantes de la contrainte s'expriment par les relations

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} \right) \quad (7.102)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 V_z - \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right) \quad (7.103)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} \right) \quad (7.104)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta \partial z} \left(\frac{V_z}{r} \right) \quad (7.105)$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1-\nu) \nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (7.106)$$

$$\sigma_{zr} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right). \quad (7.107)$$

La forme particulière de la fonction (7.101) qui doit satisfaire (7.97) et ses dérivées troisièmes, qui apparaissent dans les composantes de la contrainte (éqs. (7.102)-(7.107)), s'annulent à l'infini et possèdent une singularité à l'origine. Une fonction qui satisfait ces exigences est donnée par

$$V_{\tilde{z}} = K(r^2 + z^2)^{1/2} . \quad (7.108)$$

En utilisant (7.108) dans (7.100) et dans (7.102)-(7.107), on a

$$2\mu u_r = \frac{Krz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad 2\mu u_\theta = 0, \quad (7.109)$$

$$2\mu u_z = K \left[\frac{2(1-2\nu)}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\sigma_{rr} = K \left[\frac{(1-2\nu)z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3r^2 z}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (7.110)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-2\nu)Kz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7.111)$$

$$\sigma_{zz} = -K \left[\frac{(1-2\nu)z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (7.112)$$

$$\sigma_{rz} = -K \left[\frac{(1-2\nu)r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3rz^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (7.113)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (7.114)$$

Notons que les contraintes ne sont pas définies à l'origine puisqu'elles sont singulières et qu'elles s'annulent à l'infini. Pour établir la constante K , il est nécessaire de considérer l'équilibre des forces, dans la direction verticale, d'une bande horizontale symétrique de hauteur $\pm h$ qui contient l'axe horizontal et la force P (fig. 7.6(b)). L'équilibre des forces s'écrit

$$P = \int_0^\infty 2\pi r dr \sigma_{zz}|_{z=-h} - \int_0^\infty 2\pi r dr \sigma_{zz}|_{z=+h} \quad (7.115)$$

En insérant (7.112) dans (7.115) et en intégrant, on trouve la valeur de la constante

$$K = \frac{P}{8\pi(1-\nu)}. \quad (7.116)$$

Ce paramètre est substitué dans (7.109)-(7.113) pour obtenir le déplacement et les composantes de la contrainte, respectivement.

Problème de Cerruti : Force tangentielle à la limite d'un corps semi-infini

En utilisant la méthode des potentiels, on peut résoudre certains problèmes en combinant un potentiel de déformation de Lamé et un vecteur de Galerkin. Un problème bien connu qui utilise une telle approche est celui de Cerruti, où une force tangentielle P agit à la surface d'un corps solide semi-infini comme on peut le voir à la figure 7.7, [22].

Ce problème peut se résoudre en combinant le vecteur de Galerkin de composantes

$$V_1 = AR, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = Bx_1 \ln(R + x_3) \quad (7.117)$$

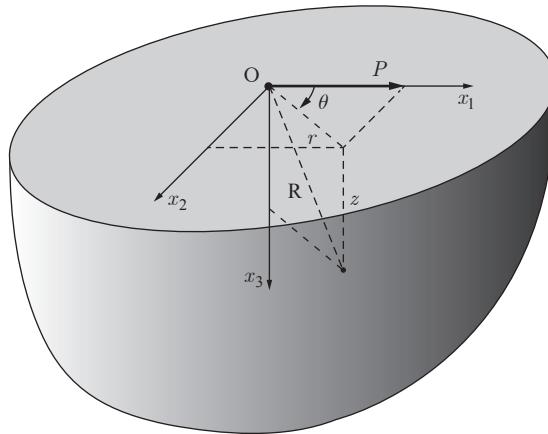


Fig. 7.7 Solide semi-infini soumis à une force tangentielle à sa surface.

et le potentiel de déformation de Lamé

$$\varphi = \frac{Cx_1}{R + x_3} \quad (7.118)$$

où les coefficients \$A, B, C\$, sont des constantes et \$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\$. Dans ce cas, le vecteur déplacement est donné par la superposition des équations (7.59) et (7.93)

$$2\mu \mathbf{u} = \nabla \varphi + 2(1 - \nu) \nabla^2 \mathbf{V} - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{V}) . \quad (7.119)$$

Les trois constantes \$A, B, C\$, sont déterminées par les conditions aux limites qui sont (fig. 7.7)

- 1) en \$x_3 = 0\$, \$\sigma_{33} = \sigma_{23} = 0\$,
- 2) la somme des forces le long de \$x_1\$ et \$\forall x_3 > 0\$ est nulle :

$$P + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = 0.$$

Ces conditions donnent

$$A = \frac{P}{4\pi(1 - \nu)}, \quad B = \frac{P(1 - 2\nu)}{4\pi(1 - \nu)}, \quad C = \frac{P(1 - 2\nu)}{2\pi} . \quad (7.120)$$

Ces constantes sont insérées dans (7.117) et (7.118) pour calculer le déplacement. Les déformations résultent de (7.1) et les contraintes de (7.3).

La présentation de Papkovich-Neuber

Remarquons que l'équation (7.55) est du troisième ordre, tandis que celle qui régit le vecteur de Galerkin (7.94) est du quatrième ordre. Dans la formulation présente, on propose un système d'équations du second ordre qui est équivalent

aux équations de Navier. Plus précisément, le vecteur déplacement est exprimé par une combinaison de fonctions harmoniques [12, 20, 74]

$$2\mu \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} - \nabla \left[\beta + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}{4(1-\nu)} \right] \quad (7.121)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$, β sont des champs vectoriel et scalaire, respectivement et \mathbf{x} est le vecteur position. En introduisant \mathbf{u} avec $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ dans (7.7) et en utilisant les identités vectorielles (1.188), (1.236) et (1.240) ainsi que la relation entre les constantes élastiques (6.109), on obtient l'équation suivante

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\alpha} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla^2 \beta) - \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right) \nabla(\mathbf{x} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\alpha}) = 0 . \quad (7.122)$$

Cette dernière équation est satisfaite lorsque

$$\nabla^2 \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \nabla^2 \beta = 0 . \quad (7.123)$$

On remarquera que ces équations sont du second ordre, et non d'ordre plus élevé comme l'étaient les équations (7.55) et (7.94). Ces quatre fonctions scalaires ne sont pas indépendantes. Cependant, on peut montrer que, pour tout domaine convexe, le nombre de fonctions indépendantes est réduit à 3 [20]. De plus, le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ et le scalaire β sont reliés au vecteur de Galerkin comme suit

$$\boldsymbol{\alpha} = 2(1-\nu) \nabla^2 \mathbf{V} \quad (7.124)$$

$$\beta = \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}{4(1-\nu)} . \quad (7.125)$$

Un cas spécial pour ces quatre fonctions en coordonnées cylindriques est donné par les relations

$$\alpha_r = \alpha_\theta = 0, \quad \alpha_z = \alpha_z(r, z), \quad \beta = \beta(r, z) \quad (7.126)$$

que nous allons utiliser pour résoudre le problème suivant, capital en élasticité.

Problème de Boussinesq : Force verticale à la limite d'un corps semi-infini

Soit un solide semi-infini soumis à une force P agissant normalement à la surface dans la direction de l'axe vertical ainsi que le montre la figure 7.8.

Les conditions aux limites de ce problème sont

- $\sigma_{rz} = 0$ partout sur la surface,
- la force résultante verticale sur un plan horizontal due à σ_{zz} à une profondeur z est égale à la force appliquée P . Notons que σ_{zz} n'est pas défini à l'origine.

En se référant à la figure 7.8, on définit la distance $R^2 = r^2 + z^2$. La solution de ce problème est obtenue si on considère les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \alpha_\theta = 0 \\ \alpha_z &= 4(1-\nu) \frac{K}{R} \\ \beta &= C \ln(R + z) . \end{aligned} \quad (7.127)$$

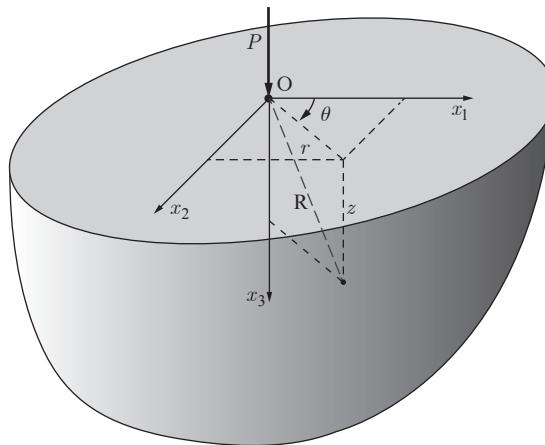


Fig. 7.8 Solide semi-infini soumis à une force verticale concentrée à sa surface.

La substitution de (7.127) dans (7.121) donne

$$\mathbf{u} = \frac{4(1-\nu)}{2\mu} \frac{K}{R} \mathbf{e}_z - \frac{1}{2\mu} \nabla \left(C \ln(R+z) + \frac{Kz}{R} \right) \quad (7.128)$$

dont les composantes en coordonnées cylindriques sont

$$u_r = -\frac{Cr}{2\mu R(R+z)} + \frac{Kzr}{2\mu R^3}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = \frac{(3-4\nu)K - C}{2\mu R} + \frac{Kz^2}{2\mu R^3}. \quad (7.129)$$

En insérant (7.129) dans les relations déformation-déplacement (A.21)-(A.23) et les déformations dans les relations correspondantes déformation-contrainte (7.3), les contraintes nécessaires pour évaluer les conditions aux limites sont

$$\sigma_{rz} = \frac{r}{R^3} \left(C - K(1-2\nu) - \frac{3Kz^2}{R^3} \right) \quad (7.130)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3Kz^3}{R^5}. \quad (7.131)$$

La première condition aux limites énoncée ci-dessus conduit à

$$C = K(1-2\nu). \quad (7.132)$$

Afin de déterminer K , la force résultante à la profondeur z due à σ_{zz} est égalée à la force appliquée P

$$P = \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{3Kz^3}{R^5} 2\pi r dr. \quad (7.133)$$

L'intégration de (7.133) donne

$$K = P/2\pi \quad (7.134)$$

et la relation (7.132) conduit à

$$C = P(1 - 2\nu)/2\pi . \quad (7.135)$$

En insérant (7.134) et (7.135) dans (7.129), les composantes du déplacement sont

$$u_r = \frac{P}{4\pi\mu R} \left(\frac{zr}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = \frac{P}{4\pi\mu R} \left(2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right) \quad (7.136)$$

Avec les déplacements connus, nous pouvons calculer les déformations en utilisant (A21)-(A23). Ces déformations sont insérées dans (7.3) pour exprimer les contraintes non nulles comme suit

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2} \left(-\frac{3r^2 z}{R^3} + \frac{R(1-2\nu)}{R+z} \right) \quad (7.137)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \quad (7.138)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5}, \quad \sigma_{rz} = -\frac{3Prz^3}{2\pi R^5} . \quad (7.139)$$

En terminant cette section, il faut mentionner que plusieurs problèmes importants du point de vue pratique (p. ex. le contact entre corps solides) impliquent l'analyse des contraintes et déformations dans des domaines semi-infinis soumis à des efforts appliqués sur des surfaces libres droites. Les solutions de ce type de problème s'obtiennent par intégration des résultats des solutions de Boussinesq et Cerruti présentées dans cette section. Le lecteur trouvera pareilles solutions dans la littérature [34].

7.4.2 Fonctions de contrainte et solutions d'Airy pour des problèmes plans

A la section 7.2, on a montré que le champ de contrainte en un point d'un corps à l'équilibre est régi par les équations (7.2), les équations de compatibilité de Beltrami-Michell (7.14) et les conditions aux limites. De manière semblable à l'étude des fonctions de déplacement, on a proposé des fonctions qui engendrent les champs de contrainte satisfaisant le système d'équations ci-dessus mentionnées. Cependant, comme la contrainte est un tenseur du second ordre, la fonction recherchée devrait refléter cette propriété [12]. Dans la suite, pour la simplicité de l'exposé, on négligera les forces de volume.

Introduisons une fonction tensorielle de contraintes $\Phi(\mathbf{x})$ qui soit symétrique et qui exprime les six composantes de la contrainte comme

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (7.140)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \quad (7.141)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (7.142)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_3^2} \quad (7.143)$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_1^2} \quad (7.144)$$

$$\sigma_{31} = \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_2^2}. \quad (7.145)$$

Il est aisé de vérifier que les équations d'équilibre (7.2) avec les forces de volume nulle ($\mathbf{f} = 0$) sont satisfaites avec les composantes de la contrainte (7.140)-(7.145). Deux voies alternatives ont été proposées pour engendrer des solutions complètes à partir des fonctions de contrainte [12, 40]. Ces fonctions sont soit celles de Maxwell soit celles de Morera. Plus précisément, si on ne retient que les composantes diagonales Φ_{ii} , on définit le système de Maxwell; dans le cas où les éléments non diagonaux sont gardés, on définit le système de Morera. Chacun des ensembles de fonctions de contrainte est complet, dans la mesure où pour toute distribution de contrainte satisfaisant les équations d'équilibre, il existe un ensemble de fonctions de Maxwell et de Morera. Dans cette section, nous discuterons uniquement les fonctions de Maxwell.

On souligne dans la littérature que si la composante Φ_{33} est la seule non nulle dans la représentation de Maxwell, ceci produit la fonction d'Airy pour les problèmes plans. Puisqu'on fait la distinction dans les problèmes plans entre contrainte plane et déformation plane (sect. 7.3), nous allons les examiner en termes de fonctions de contrainte. En partant de la seule composante $\Phi_{33} = \Phi_{33}(x_1, x_2)$, indépendante de x_3 , les équations (7.140)-(7.145) donnent

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (7.146)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (7.147)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (7.148)$$

qui correspondent au cas du problème de contrainte plane puisque $\sigma_{33} = 0$. Afin d'examiner plus avant la nature de Φ_{33} , il nous faut faire appel aux équations de compatibilité de Beltrami-Michell. Les six équations (7.14) sont écrites in

extenso

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (7.149)$$

$$\nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (7.150)$$

$$\nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_3^2} = 0 \quad (7.151)$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (7.152)$$

$$\nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \quad (7.153)$$

$$\nabla^2 \sigma_{31} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 . \quad (7.154)$$

Notons qu'à l'aide de (7.146), les équations (7.151), (7.153) et (7.154) sont satisfaites, tandis que (7.149), (7.150) et (7.152) ne le sont pas. Ceci est dû à la nature approchée du problème de contrainte plane (§ 7.3.2). Cependant, en insérant (7.146) dans (7.149) et (7.150) et en les additionnant, il est aisément de vérifier que Φ_{33} satisfait l'équation biharmonique

$$\Delta \Delta \Phi_{33} = \frac{\partial^4 \Phi_{33}}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_{33}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi_{33}}{\partial x_2^4} = 0 . \quad (7.155)$$

Pour les problèmes de déformation plane, la composante de la contrainte σ_{33} est reliée aux composantes σ_{11}, σ_{22} par la relation

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) . \quad (7.156)$$

Pour satisfaire cette exigence dans la représentation de Maxwell, il est nécessaire d'inclure les composantes Φ_{11}, Φ_{22} en supplément de Φ_{33} et d'imposer la condition

$$\Phi_{11} = \Phi_{22} = \nu \Phi_{33} \quad \text{avec} \quad \Phi_{12} = \Phi_{23} = \Phi_{31} = 0 . \quad (7.157)$$

Dans ce cas, chaque équation de compatibilité (7.149)-(7.151) conduit à l'équation biharmonique (7.155), tandis que les relations (7.152)-(7.154) sont satisfaites.

En comparant les résultats de cette section avec ceux de la section 7.3, on constate facilement que la fonction de contrainte $\Phi(x_1, x_2)$ définie à la section 7.3 est un cas particulier de la représentation de Maxwell.

Donc, pour les problèmes plans, lorsque Φ_{33} est connu et satisfait l'équation biharmonique (7.155), les composantes de la contrainte pour la contrainte plane (7.146) et celles de (7.146) et (7.156) pour la déformation plane satisfont les équations d'équilibre. On considère qu'un tel état de contrainte est solution du problème, s'il satisfait les conditions aux limites.

Avant de présenter quelques exemples, on remarquera qu'il est relativement facile de trouver une fonction de contrainte qui satisfasse (7.155). Cependant,

satisfaire les conditions aux limites n'est pas toujours chose aisée. En général, on devrait être guidé par l'intuition sur la nature de la fonction adéquate et par l'expérience. Une pratique courante consiste à utiliser des formes polynomiales et à trouver la combinaison idoine qui satisfait les conditions aux limites. Remplaçant $\Phi_{33}(x_1, x_2)$ par $\Phi(x_1, x_2)$, une fonction polynomiale appropriée s'écrit

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2) = & a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + b_1x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + b_3x_1x_2^2 + b_4x_2^4 \\ & + c_1x_1^4 + c_2x_1^3x_2 + c_3x_1^2x_2^2 + c_4x_1x_2^3 + c_5x_2^4 + \dots\end{aligned}\quad (7.158)$$

Notons que tout terme d'un polynôme de degré inférieur ou égal à trois satisfait (7.155). Les termes d'ordre supérieur ne doivent pas être considérés, mais s'ils doivent être inclus, leurs coefficients seront choisis avec soin pour satisfaire l'équation biharmonique. L'efficacité de cette approche est effective dans plusieurs problèmes comportant des domaines rectangulaires. Cependant, les fonctions polynomiales ne peuvent pas décrire facilement des discontinuités de géométrie et de charges. Alors le principe de Saint-Venant est souvent utilisé pour remplacer les conditions aux limites actuelles par des conditions statiquement équivalentes. Notons que la méthode de résolution qui se base sur une fonction de contrainte satisfaisant (7.155) est une méthode semi-inverse, puisque la fonction polynomiale est donnée et on recherche le problème qui pourra être résolu avec cette fonction.

Grâce à la symétrie de révolution présente dans plusieurs problèmes pratiques, les fonctions d'Airy sont généralement présentées en coordonnées cylindriques. La fonction proposée par Michell [60] offre une solution de (7.155) pour des problèmes plans

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) = & A_0 + A_1 \ln r + A_2 r^2 + A_3 r^2 \ln r \\ & + (A_4 + A_5 \ln r + A_6 r^2 + A_7 r^2 \ln r) \theta \\ & + \left(A_{11}r + A_{12}r \ln r + \frac{A_{13}}{r} + A_{14}r^3 + A_{15}r\theta + A_{16}r\theta \ln r \right) \cos \theta \\ & + \left(B_{11}r + B_{12}r \ln r + \frac{B_{13}}{r} + B_{14}r^3 + B_{15}r\theta + B_{16}r\theta \ln r \right) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n1}r^n + A_{n2}r^{2+n} + A_{n3}r^{-n} + A_{n4}r^{2-n}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (B_{n1}r^n + B_{n2}r^{2+n} + B_{n3}r^{-n} + B_{n4}r^{2-n}) \sin n\theta.\end{aligned}\quad (7.159)$$

Ici, $\Phi_{33}(r, \theta)$ est remplacé par $\Phi(r, \theta)$. Les coefficients $A_0, \dots, A_7 ; A_{11}, \dots, A_{16} ; B_{11}, \dots, B_{16} ; A_{n1}, \dots, A_{n4} ; B_{n1}, \dots, B_{n4}$ sont des constantes et n est un entier. On choisira des termes variés dans (7.159) pour résoudre plusieurs problèmes en coordonnées polaires. On trouvera quelques exemples ci-dessous.

Charge linéique sur une limite droite d'une plaque semi-infinie

Considérons une plaque d'épaisseur unitaire soumise à une charge P par unité d'épaisseur tel qu'on le montre à la figure 7.9.

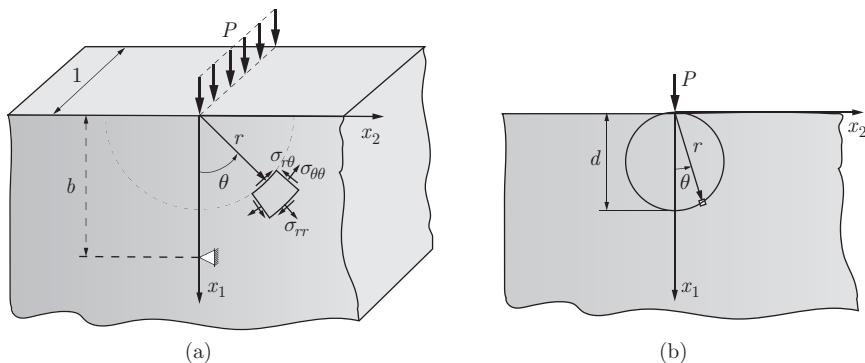


Fig. 7.9 Plaque semi-infinie soumise à une force verticale concentrée à sa surface (a), cercle du diamètre d où la contrainte est la même en tout point du cercle (b).

Le problème de contrainte plane a trois composantes de contraintes en coordonnées cylindriques $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$. Les conditions aux limites de ce problème sont

- les composantes de la contrainte $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$ en $\theta = \pm\pi/2$;
- la force verticale équilibrée par la composante verticale de la force due à la contrainte radiale à la distance r .

La solution du problème s'obtient en posant la fonction d'Airy suivante

$$\Phi(r, \theta) = Cr\theta \sin \theta . \quad (7.160)$$

En connaissant Φ , les composantes de la contrainte obtenue par les relations (7.146) en coordonnées cylindriques (A.28)-(A.30) sont

$$\sigma_{rr} = \frac{2C \cos \theta}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 . \quad (7.161)$$

En appliquant la seconde condition aux limites, la constante C est déterminée par la relation

$$P + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma_{rr} \cos \theta (rd\theta) = P + 2C \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 0 \quad \text{et} \quad C = -\frac{P}{\pi} . \quad (7.162)$$

Donc, les composantes de la contrainte sont

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 . \quad (7.163)$$

On remarque que pour le cercle de diamètre d dont le centre se trouve sur l'axe vertical et qui est tangent à l'origine, $r = d \cos \theta$. Donc la contrainte (fig. 7.9b)

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{1}{d} \quad (7.164)$$

est la même en tout point du cercle.

Une fois les contraintes connues, les déformations s'obtiennent par la loi de Hooke (7.4) (voir (A.21)-(A.23))

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{2P\nu}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0.\end{aligned}\quad (7.165)$$

Ces équations sont intégrées pour calculer les déplacements. Les constantes d'intégration sont évaluées par l'élimination du mouvement de corps rigide de la plaque. Ceci est accompli en imposant $u_\theta(r, \theta)|_{\theta=0} = 0$ et $u_r(r, \theta)|_{\theta=0, r=b} = 0$, où b est une distance arbitraire le long de l'axe x_1 (fig. 7.9a)

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln \frac{b}{r} - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta \\ u_\theta &= \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \sin \theta - \frac{2P}{\pi E} \sin \theta \ln \frac{b}{r} - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta.\end{aligned}\quad (7.166)$$

Cylindre creux sous pression interne et externe et extrémités libres

Etant donné la géométrie du cylindre et la configuration des contraintes appliquées, et en supposant que les extrémités du cylindre sont libres, on peut montrer que $\sigma_{zz} = 0$. Donc il s'agit d'un problème de contrainte plane. Les conditions aux limites sont indépendantes de θ ; de plus, comme la distribution de contrainte est symétrique par rapport à l'axe x_3 , ceci implique que $\sigma_{r\theta} = 0$. Les conditions aux limites de ce problème sont données par (7.86) et (7.87).

Ce problème sera résolu par deux méthodes. Dans la première, on utilise les équations de Navier (7.6). Dans la seconde méthode, on définit une fonction de contrainte d'Airy, appropriée pour le problème et on l'utilise pour calculer les composantes de la contrainte, de la déformation et du déplacement.

Dans la première méthode, on considère qu'un élément du cylindre ne peut que se mouvoir radialement à cause de la symétrie de la charge et de la géométrie. Donc la seule composante non nulle du déplacement est u_r et les relations déformation-déplacement en coordonnées cylindriques deviennent

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad (7.167)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (7.168)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \quad (7.169)$$

$$\varepsilon_{zz} = \nu (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr}). \quad (7.170)$$

Dans le cas de contraintes planes, les relations contrainte-déformation (7.41) sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}). \quad (7.171)$$

En résolvant ces deux relations (7.171) pour les contraintes et en utilisant (7.167)-(7.168), on a

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du_r}{dr} + \nu \frac{u_r}{r} \right) \quad (7.172)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u_r}{r} + \nu \frac{du_r}{dr} \right). \quad (7.173)$$

Avec $u_\theta = u_z = 0$, et $u_r \neq 0$, une seule équation de Navier n'est pas satisfaite. En supposant nulle la force de volume, celle-ci s'écrit

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (7.174)$$

dont la solution est donnée par

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (7.175)$$

En utilisant (7.175) dans (7.172) et (7.173), il vient

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(C_1(1+\nu) - C_2 \frac{1-\nu}{r^2} \right) \quad (7.176)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(C_1(1+\nu) + C_2 \frac{1-\nu}{r^2} \right). \quad (7.177)$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 par les conditions aux limites (7.86) et (7.87), ce qui donne

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{r_i^2 P_i - r_e^2 P_e}{r_e^2 - r_i^2} \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{r_i^2 r_e^2 (P_e - P_i)}{r_e^2 - r_i^2}. \quad (7.178)$$

Finalement, les contraintes et le déplacement prennent la forme

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right) \end{aligned} \quad (7.179)$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} \frac{r_i^2 P_i - r_e^2 P_e}{r_e^2 - r_i^2} r - \frac{1+\nu}{E} \frac{(P_e - P_i)}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_i^2 r_e^2}{r}. \quad (7.180)$$

Vérifions maintenant l'hypothèse $\sigma_{zz} = 0$. Si les extrémités du cylindre sont libres, alors $\varepsilon_{zz} = \text{cste}$. Par conséquent, les relations contrainte-déformation donnent

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + E\varepsilon_{zz} = c. \quad (7.181)$$

La constante c est déterminée en imposant que la force normale totale à l'extrémité du cylindre soit nulle

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_{zz} 2\pi r dr = \pi c(r_e^2 - r_i^2) = 0 \implies c = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = 0. \quad (7.182)$$

Dans la seconde méthode, on définit une fonction appropriée des contraintes. En tenant compte des symétries de la charge et de la géométrie, la fonction de contrainte Φ est indépendante de θ et n'est plus fonction que de r . En conséquence, la fonction de contrainte est prise sous la forme

$$\Phi(r) = A \ln r + Br^2 + Cr^2 \ln r + D. \quad (7.183)$$

Quoique cette fonction soit la solution générale de l'équation biharmonique (7.38) ou (7.48) ou également (7.155), l'analyse du déplacement radial u_r mène à la conclusion $C = 0$. La constante D n'affecte pas les composantes de la contrainte. Donc on ne retiendra que les deux premiers termes de (7.183) dans la suite. Avec cette fonction, l'équation de compatibilité (7.38) en coordonnées cylindriques (A.27)

$$\frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (7.184)$$

est automatiquement satisfaite et les composantes de la contrainte sont

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + 2B \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (7.185)$$

A l'aide des conditions aux limites (7.86) et (7.87), on obtient pour les constantes

$$A = \frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} (P_e - P_i) \quad B = \frac{r_i^2 P_i - r_e^2 P_e}{r_e^2 - r_i^2}. \quad (7.186)$$

Dès lors, les contraintes s'expriment comme

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \left(r_i^2 P_i - r_e^2 P_e - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} (P_e - P_i) \right) \end{aligned} \quad (7.187)$$

qui sont des expressions identiques à (7.179) et (7.89). La raison pour laquelle les contraintes sont les mêmes dans les deux problèmes provient du fait que la fonction des contraintes d'Airy est identique pour les problèmes de contrainte plane et ceux de déformation plane. La différence n'apparaît que dans les relations contrainte-déformation et les déplacements. Les contraintes connues, on évalue les déformations par (7.171).

L'intégration de ces dernières donne directement le déplacement u_r (7.180).

Dans le cas d'une enceinte sous pression à paroi mince d'épaisseur $e = r_e - r_i$ et $e \ll r_i$, on peut faire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} r_e^2 - r_i^2 &= (r_e - r_i)(r_e + r_i) \approx 2er_i \\ r_i^2 P_i - r_e^2 P_e &\approx r_i^2 (P_i - P_e) \\ r_e^2 &\approx r_i^2 \quad r^2 \approx r_i^2. \end{aligned} \quad (7.188)$$

En prenant en compte ces approximations, les contraintes (7.187) se réduisent aux expressions

$$\sigma_{rr} \approx 0 \quad (7.189)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{r_i(P_i - P_e)}{e}. \quad (7.190)$$

Dans les solutions données dans les traités d'introduction à la résistance des matériaux [65], on suppose que σ_{rr} s'annule, parce que $e \ll r_i$, tandis que $\sigma_{\theta\theta}$ s'obtient par l'équilibre d'un élément de l'enceinte.

Il nous faut souligner que la solution donnée dans cet exemple n'est valable que pour des sections placées suffisamment loin des extrémités du cylindre.

Poutre longue et mince sous charge uniforme q

Une poutre longue et mince de longueur l , de hauteur h et d'épaisseur $d = 1$ est soumise à une charge uniformément répartie q (N/m^2) (fig. 7.10). On se propose de déterminer les contraintes, déformations et déplacements, lorsque la poutre est en appui simple. L'épaisseur d de la poutre est supposée petite par rapport à ses dimensions planes, (c.-à-d. $h, l \gg d$) et la charge q est parallèle au plan (x_1, x_2) . Dans ce problème de contrainte plane, on néglige le poids de la poutre.

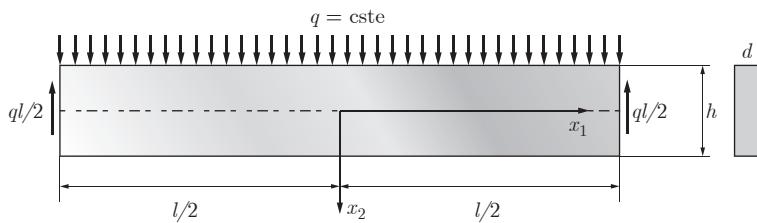


Fig. 7.10 Poutre longue et mince sous pression uniforme.

Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{h}{2} & \sigma_{22} &= -q & \sigma_{12} &= 0 \\ x_2 &= \frac{h}{2} & \sigma_{22} &= 0 & \sigma_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (7.191)$$

En évaluant la force axiale N_1 (selon x_1), le moment total M_3 (par rapport à l'axe x_3) et la force tangentielle N_2 parallèle à la section (selon x_2) aux

extrémités $x_1 = \pm l/2$ de la poutre, on a

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_2 = 0 \\ M_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2 = 0 \\ N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} dx_2 = -\frac{q}{2}. \end{aligned} \quad (7.192)$$

Une fonction de contrainte qui donne la solution du problème s'écrit

$$\Phi(x_1, x_2) = Ax_2^3 \left(x_1^2 - \frac{x_2^2}{5} \right) + Bx_1^2 x_2 + Cx_2^3 + Dx_1^2, \quad (7.193)$$

où A, B, C, D sont des constantes déterminées plus loin par les conditions aux limites (7.191) et (7.192). On vérifie tout d'abord que cette fonction satisfait l'équation biharmonique (7.38). En utilisant les équations (7.37), les trois composantes du champ de contraintes sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 6Ax_2 x_1^2 - 4Ax_2^3 + 6Cx_2 \\ \sigma_{22} &= 2Ax_2^3 + 2Bx_2 + 2D \\ \sigma_{12} &= -6Ax_2^2 x_1 - 2Bx_1. \end{aligned} \quad (7.194)$$

Avec les conditions aux limites (7.191), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{Ah^3}{4} - Bh + 2D &= -q \\ \frac{Ah^3}{4} + Bh + 2D &= 0 \\ \frac{3Ah^2}{2} + 2B &= 0. \end{aligned} \quad (7.195)$$

Ce système de trois équations à trois inconnues a pour solution

$$A = -\frac{q}{h^3} \quad B = \frac{3q}{4h} \quad D = -\frac{q}{4}. \quad (7.196)$$

La constante C s'obtient par la condition $M_3 = 0$ ($N_1 = 0$ est identiquement vérifiée)

$$C = \frac{q}{24I_3} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{h^2}{5} \right), \quad (7.197)$$

où $I_3 = h^3/12$ est le moment d'inertie de la section par rapport à x_3 . On peut montrer facilement que les deux intégrales restantes de (7.192) sont vérifiées. En

reportant ces constantes dans (7.194), les contraintes dans la poutre deviennent

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{q}{2I_3} x_2 \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x_1^2}{2} \right) + \frac{q}{2I_3} x_2 \left(\frac{2}{3}x_2^2 - \frac{h^2}{20} \right) \\ \sigma_{22} &= -\frac{q}{2I_3} \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{4} + \frac{h^3}{12} \right) \\ \sigma_{12} &= -\frac{q}{2I_3} x_1 \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right).\end{aligned}\quad (7.198)$$

Le premier terme (donnant σ_{11}) est prédit par la théorie élémentaire des poutres. Le second est un terme additionnel engendré par la prise en considération de σ_{22} qui ne dépend pas de x_1 et devient négligeable lorsque $l \gg h$. Notons que la solution n'est valable que pour des sections de poutre suffisamment éloignées de ses supports.

Avec les contraintes (7.198), les déformations sont données par (7.41). Les déplacements se calculent en intégrant les relations (7.18) avec les conditions aux limites suivantes :

- en x_1 et $x_2 = 0$,

$$u_1 = 0 \quad u_2 = f \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0;$$

- en $x_1 = \pm l/2$ et $x_2 = 0$,

$$u_2 = 0, \quad (7.199)$$

où f est la *déflexion maximale* au centre de la poutre que l'on devra déterminer ultérieurement.

On a

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{q}{2EI_3} \left(\left(\frac{l^2 x_1}{4} - \frac{x_1^3}{3} \right) x_2 + \left(\frac{2x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{10} \right) x_1 \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{4} + \frac{h^3}{12} \right) x_1 \right) \\ u_2 &= -\frac{q}{2EI_3} \left(\frac{x_2^4}{12} - \frac{h^2 x_2^2}{8} + \frac{h^3 x_2}{12} + \nu \left(\left(\frac{l_2}{4} - x_1^2 \right) \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{6} - \frac{h^2 x_2^2}{20} \right) \right) \\ &\quad - \frac{q}{2EI_3} \left(\frac{l^2 x_1^2}{8} - \frac{x_1^4}{12} - \frac{h^2 x_1^2}{20} + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) \frac{h^2 x_1^2}{4} \right) + f.\end{aligned}\quad (7.200)$$

La déflexion f au centre de la poutre s'obtient en reportant l'expression obtenue pour u_2 dans la deuxième condition (7.199)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_3} \left(1 + \frac{12}{5} \frac{h^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right). \quad (7.201)$$

Notons que le premier terme de (7.201) est la déflexion prédicta par la théorie élémentaire des poutres. Le second terme apparaît parce que nous avons pris en considération σ_{22} le long de la direction x_2 . Ce terme est particulièrement important pour les poutres courtes (c.-à-d. $l \sim h$). Pour les poutres longues et minces, on a $l \gg h$ et cette contribution devient négligeable.

7.5 Propagation d'ondes dans un milieu élastique linéaire

Jusqu'à présent, dans ce chapitre, nous avons abordé les problèmes statiques d'élasticité. A savoir, le solide est considéré au repos sous l'action des charges appliquées dont le chargement et le déchargement sont effectués suffisamment lentement, de sorte que les effets dynamiques peuvent être négligés. Une telle approche est justifiée dans l'analyse de plusieurs problèmes en élasticité et porte le nom d'« élastostatique linéaire ». Il y a cependant plusieurs problèmes dans la mécanique des solides où on prend en compte les effets dynamiques, c'est-à-dire les forces d'inertie. Celles-ci proviennent lorsque les charges externes sont appliquées à des vitesses élevées, comme les vibrations, l'impact et les explosions. Des déplacements soudains créent également des effets dynamiques comme dans le glissement d'une faille sismique. De telles charges dynamiques engendrent des ondes de contrainte et de déformation transmises à travers le corps et présentent des vitesses différentes en fonction du mode de déformation.

Pour comprendre et analyser la réponse dynamique d'un milieu élastique, les équations statiques de l'équilibre (7.7) doivent être remplacées par les équations du mouvement. Dans cette section, nous présentons les équations tridimensionnelles générales du mouvement pour un solide élastique linéaire ainsi que les solutions de propagation d'ondes dans des éléments structuraux simples.

Le lecteur consultera [26, 65] pour des compléments d'information.

7.5.1 Ondes de distorsion et de dilatation

L'équation du mouvement en termes de déplacements peut être obtenue à partir de celles de Navier (7.6) en ajoutant la composante inertie de la force et en prenant les déplacements en fonction de x_i et de t , $u_i = u_i(x_i, t)$. En supposant comme dans le cas de l'analyse statique (section 7.4), qu'il n'y a pas de forces de volume, les équations du mouvement (7.7) sont

$$(\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \mathbf{a} \quad (7.202)$$

qui donne sous forme indicée

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} = \rho a_i . \quad (7.203)$$

L'accélération peut s'exprimer en termes du vecteur déplacement comme $\mathbf{a} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ ou $a_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$. Notons que vu l'hypothèse des petits déplacements de la section 2.9, le terme non linéaire de l'accélération est d'ordre deux en ε (éq. (2.139)) et est donc négligeable. En conséquence, la relation (7.203) devient

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} . \quad (7.204)$$

Comme les déformations sont petites, les mouvements examinés dans ce modèle sont de petites oscillations élastiques ou des ondes élastiques. Selon le type de déformation, on peut distinguer deux types d'ondes de la manière suivante.

Supposons que le chargement produit des ondes qui se traduisent par une expansion de volume nulle. Ainsi $\varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et (7.204) est remplacée par

$$\mu u_{i,jj} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} . \quad (7.205)$$

Les ondes décrites par cette dernière équation sont appelées *ondes de distorsion*. On suppose ensuite que la déformation produite par la charge appliquée est irrotationnelle. Autrement dit, le tenseur de rotation (2.166) est égal à zéro, ou

$$\begin{aligned}\omega_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0, \quad \omega_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 , \\ \omega_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 . \quad (7.206)$$

Ces relations impliquent que \mathbf{u} dérive d'une fonction potentielle $\phi(x_i, t)$

$$\mathbf{u} = \nabla \phi . \quad (7.207)$$

On vérifie aisément en utilisant (1.238) que la relation (7.207) conduit aux expressions

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla^2 \phi, \quad \text{et} \quad \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla^2 \phi . \quad (7.208)$$

Par substitution de ces expressions dans (7.204), on obtient les équations des ondes irrotationnelles ou de dilatation

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} , \quad (7.209)$$

ou bien

$$(\lambda + 2\mu) u_{i,jj} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} . \quad (7.210)$$

Il est intéressant d'exprimer les équations (7.205) et (7.209) sous une forme similaire

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{u}' = \frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial t^2} , \quad (7.211)$$

où on a

$$c = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)(1 + \nu)}} , \quad (7.212)$$

pour les ondes de dilatation, et

$$c = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}} , \quad (7.213)$$

pour les ondes de distorsion. Notons que c_1, c_2 ont les dimensions de la vitesse, puisque $(MLT^{-2}L^{-2}M^{-1}L^3)^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2}$ et que $c_1 > c_2$, démontrant ainsi que les ondes élastiques de dilatation voyagent à une vitesse plus élevée que les ondes élastiques de distorsion. Par ailleurs, le cas général de la propagation des ondes dans un milieu élastique linéaire peut être obtenu par superposition d'ondes de dilatation et de distorsion.

Pour exprimer les équations du mouvement en termes des potentiels scalaire et vecteur φ, Ψ , il est nécessaire d'insérer (7.51) dans (7.202). Pour ce faire, nous exprimons la dérivée temporelle seconde de \mathbf{u} et sa divergence comme suit

$$\ddot{\mathbf{u}} = \nabla \ddot{\varphi} + \nabla \times \ddot{\Psi} \quad (7.214)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla \varphi) + \operatorname{div}(\nabla \times \Psi) = \nabla^2 \varphi \quad (7.215)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \nabla^2(\nabla \varphi + \nabla \times \Psi) = \nabla^2(\nabla \varphi) + \nabla^2(\nabla \times \Psi) \\ &= \nabla(\nabla^2 \varphi) + \nabla \times (\nabla^2 \Psi) . \end{aligned} \quad (7.216)$$

On a utilisé les identités (1.188) et (1.180) pour déduire (7.215), et les relations (1.236) et (1.237) pour obtenir (7.216). Donc les équations du mouvement (7.202) deviennent

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu) \nabla(\nabla^2 \varphi) + \mu (\nabla(\nabla^2 \varphi) + \nabla \times (\nabla^2 \Psi)) \\ &= \rho(\nabla \ddot{\varphi} + \nabla \times \ddot{\Psi}) \end{aligned} \quad (7.217)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\nabla ((\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi}) + \nabla \times (\mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi}) = 0 . \quad (7.218)$$

L'égalité (7.218) est satisfaite si

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi} = 0 \quad (7.219)$$

$$\mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi} = \mathbf{0} . \quad (7.220)$$

Finalement, nous pouvons écrire

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (7.221)$$

$$\mu \nabla^2 \Psi = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} . \quad (7.222)$$

Il est intéressant de noter que (7.221) et (7.222) ressemblent aux relations (7.209) et (7.205), respectivement (voir aussi les exercices 7.6 et 7.7). En outre, en utilisant la représentation (7.51) pour le champ de déplacement, le problème de l'élastodynamique se réduit à la résolution des équations d'onde (7.221) et (7.222).

7.5.2 Ondes de surface de Rayleigh

Dans la section précédente, nous avons examiné le cas d'ondes se propageant dans un corps élastique isotrope linéaire infini. Souvent, cependant, se présentent des frontières libres ou des interfaces entre deux corps. Dans ce cas, la propagation des ondes devient plus complexe. Les ondes de surface ont été traitées par Rayleigh (fig. 7.11) et impliquent à la fois les types longitudinal et transversal des ondes. Les ondes de surface apparaissent aussi après les tremblements de terre, les explosions et les impacts. Dans cette section, nous résumons les équations essentielles de ce type d'ondes. Pour une analyse détaillée, le lecteur est renvoyé à des traitements plus élaborés du sujet [26].



Lord Rayleigh (John William Strutt) né en 1842, fait des études de mathématiques au Trinity College à Cambridge. Il hérite du titre de Lord lors du décès de son père en 1872 et consacre une partie de son temps à la gestion du domaine tout en menant des activités scientifiques. En 1879, il prend la direction du laboratoire Cavendish à Cambridge, à la suite de Maxwell. Il décède en 1919. Ses apports sont considérables et contribuent à l'étude du son, des vibrations, à l'électrodynamique, l'électromagnétisme, à la mécanique des fluides et des solides. Son ouvrage *The Theory of Sound* paru en 1877 constitue une référence classique dans le domaine. Sa découverte la plus importante est celle de l'argon en 1894, ce qui lui vaut le prix Nobel de physique en 1904.

Fig. 7.11 Lord Rayleigh.

Un schéma d'un demi-espace est représenté à la figure 7.12. L'onde se propage dans la direction x_1 telle que le champ de déplacement est donné par $u_1(x_1, x_3, t)$, $u_3(x_1, x_3, t)$, $u_2 = 0$. Pour résoudre le problème en utilisant la représentation (7.51), on suppose que

$$\varphi = \varphi(x_1, x_3, t) \quad \text{et} \quad \Psi = -\Psi_2(x_1, x_3, t)\mathbf{e}_2. \quad (7.223)$$

Sur base de ces expressions et de (7.51), nous déduisons les composantes du déplacement

$$u_1(x_1, x_3, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \quad (7.224)$$

$$u_3(x_1, x_3, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \quad (7.225)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla^2 \varphi \quad (7.225)$$

ainsi que les composantes du tenseur infinitésimal de rotation

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi_2 \\ \omega_{21} &= \omega_{32} = 0. \end{aligned} \quad (7.226)$$

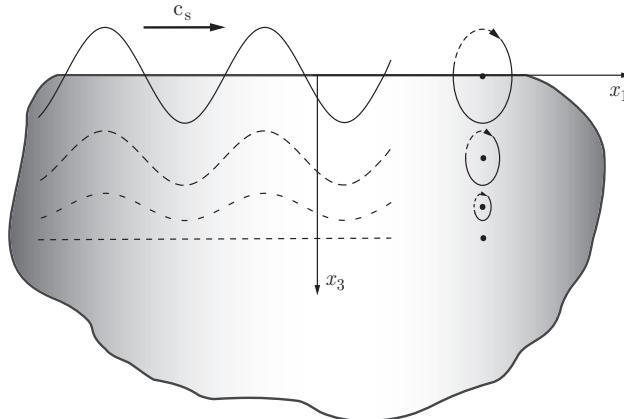


Fig. 7.12 Propagation d'une onde de Rayleigh dans la direction x_1 .

Pour ce problème plan, les équations du mouvement (7.203) se réduisent à

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7.227)$$

En utilisant (7.224)-(7.226) dans (7.227), il vient

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \varphi + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla^2 \Psi_2) &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \nabla^2 \varphi - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \Psi_2) &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (7.228)$$

Notons que ces dernières équations sont satisfaites en y insérant (7.221) et (7.222). Pour aller plus loin, nous considérons uniquement des formes harmoniques de $\varphi(x_1, x_3)$ et de $\Psi_2(x_1, x_3)$, ou une onde se propageant dans la direction x_1

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3, t) &= H(x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ \Psi_2(x_1, x_3, t) &= G(x_3) e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.229)$$

où $H(x_3), G(x_3)$ sont des fonctions à identifier, $k = \omega/c_s$ avec c_s la vitesse de l'onde à la surface et $i^2 = -1$. Insérant (7.229) dans (7.221) et (7.222), on obtient deux équations différentielles ordinaires de la forme

$$\frac{d^2 H}{dx_3^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) H = 0 \quad (7.230)$$

$$\frac{d^2 G}{dx_3^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) G = 0. \quad (7.231)$$

Définissant les symboles

$$\zeta_1^2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right), \quad \zeta_2^2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right), \quad (7.232)$$

les solutions de (7.230) et (7.231) s'écrivent comme suit

$$H(x_3) = A_1 e^{-\zeta_1 x_3} + B_1 e^{\zeta_1 x_3} \quad (7.233)$$

$$G(x_3) = A_2 e^{-\zeta_2 x_3} + B_2 e^{\zeta_2 x_3}. \quad (7.234)$$

Sur la base de raisonnements physiques du phénomène, les termes avec l'exposant positif donnent une amplitude de l'onde illimitée, ce qui est physiquement irréaliste. Donc, les constantes correspondantes sont égales à zéro, $B_1 = B_2 = 0$. En utilisant (7.233) et (7.234) dans (7.229), la solution prend la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_3, t) &= A_1 e^{-\zeta_1 x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ \Psi_2(x_1, x_3, t) &= A_2 e^{-\zeta_2 x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.235)$$

Pour ce problème, la condition aux limites suivante doit être satisfaite à la surface libre

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad \text{en } x_3 = 0. \quad (7.236)$$

Pour appliquer ces conditions, il nous faut exprimer les contraintes (7.3) en termes des fonctions (7.51). En utilisant les déplacements (7.224), nous calculons les déformations et en les insérant dans (7.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \right) \\ &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \sigma_{31} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \right) \right) \\ &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned} \quad (7.237)$$

La composante σ_{32} s'annule, puisque le champ de déplacement est indépendant de x_2 , ce qui annule toutes les dérivées par rapport à x_2 . Avec la solution (7.235) connue, (7.237) en $x_3 = 0$ produit deux équations homogènes

$$A_1 [(\lambda + 2\mu)\zeta_1^2 - \lambda k^2] + 2iA_2\mu\zeta_2 k = 0 \quad (7.238)$$

$$-2iA_1\zeta_1 k + A_2 [\zeta_2^2 + k^2] = 0. \quad (7.239)$$

Une solution non triviale pour A_1, A_2 , nécessite que le déterminant du système d'équation s'annule, ce qui conduit à l'équation caractéristique suivante

$$\left(\frac{c_s}{c_2} \right)^6 - 8 \left(\frac{c_s}{c_2} \right)^4 + (24 - 16\kappa^{-2}) \left(\frac{c_s}{c_2} \right)^2 + 16(\kappa^{-2} - 1) = 0 \quad (7.240)$$

avec $\kappa^{-2} = c_2^2/c_1^2 = \mu/(\lambda + 2\mu) = (1 - 2\nu)/(1 - \nu)$. Ainsi, la vitesse de l'onde c_s dépend du matériau via le coefficient de Poisson. Le polynôme (7.240) est traité comme une équation cubique réduite avec $(c_s/c_2)^2$ comme inconnue. Par souci de simplicité, nous considérons un matériau avec $\nu = 1/4$. Dans ce cas $\kappa^{-2} = 1/3$, et les racines de (7.240) sont

$$c_s^2/c_2^2 = 4, 2 + 2/\sqrt{2}, 2 - 2/\sqrt{2}. \quad (7.241)$$

Parmi ces trois racines, deux d'entre elles ne sont pas réalistes, car elles conduisent à des valeurs imaginaires pour les paramètres ζ_1, ζ_2 . Ainsi, c'est la troisième racine qui est retenue, ce qui donne $c_s/c_2 = 0,9194$ ou

$$c_s = 0,9194 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (7.242)$$

Pour le cas où $\nu = 0,5$, correspondant à la plus grande valeur du coefficient de Poisson, on obtient $c_s = 0,9553\sqrt{\mu/\rho}$. Donc la vitesse de l'onde de surface est légèrement inférieure à la vitesse des ondes de distorsion (7.213).

Les prochains paramètres importants à calculer sont les composantes de déplacement (7.224). Connaissant la solution (7.235), nous pouvons facilement exprimer le déplacement comme suit

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \\ &= (iA_1 k e^{-\zeta_1 x_3} - A_2 \zeta_2 k e^{-\zeta_2 x_3}) e^{i(kx_3 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.243)$$

En utilisant (7.239) pour éliminer A_2 et la formule d'Euler pour remplacer les exponentielles, on a

$$u_1(x_1, x_3, t) = -A_1 k \left(e^{-\zeta_1 x_3} - \frac{2\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_2^2 + k^2} e^{-\zeta_2 x_3} \right) \sin(kx_1 - \omega t). \quad (7.244)$$

De même, on obtient une fonction complexe pour $u_3(x_1, x_3, t)$ dont la partie réelle est

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_3, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \\ &= -A_1 \zeta_1 \left(e^{-\zeta_1 x_3} - \frac{2k^2}{\zeta_2^2 + k^2} e^{-\zeta_2 x_3} \right) \cos(kx_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (7.245)$$

Le mouvement calculé se réfère au déplacement d'une particule dans un plan vertical Ox_1x_3 . On voit à la figure 7.12 les schémas de ces mouvements pour des particules le long de l'axe vertical. Notons que le mouvement d'une particule décrit une ellipse de grand axe normal à x_1 et de petit axe normal à x_3 . Ceci est évident du fait que les équations paramétriques d'une ellipse sont exprimées comme $u_1 = C_1 \sin \theta$ et $u_3 = C_3 \cos \theta$, où C_1 et C_3 sont les demi-axes de l'ellipse. Cela est dû au fait que les ondes de dilatation et de distorsion opèrent ensemble dans la propagation des ondes de surface. De plus, la solution exprimée par (7.244) et (7.245) démontre que l'amplitude d'onde de Rayleigh diminue très vite le long de l'axe x_3 . Le taux de cette diminution dépend des valeurs de ζ_1 et ζ_2 définies par (7.232).

7.5.3 Ondes élastiques planes

Quand une perturbation dynamique se produit (charge d'impact, tremblement de terre, explosion, etc), les ondes se propagent dans toutes les directions. A des distances relativement grandes à partir de la perturbation, on peut considérer que les ondes engendrées se propagent dans un plan. Ainsi, une particule matérielle se déplace dans la direction de la propagation ou perpendiculairement à celle-ci. Ces ondes sont appelées *ondes longitudinales et transversales*, respectivement, et correspondent aux ondes de dilatation ou aux ondes de distorsion définies précédemment.

Prenons une onde longitudinale se déplaçant dans la direction x_1 . Dans ce cas, $u_2 = u_3 = 0$ et u_1 est fonction uniquement de x_1 et du temps t , et (7.209) se réduit à

$$c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (7.246)$$

Cette dernière équation peut être résolue par la méthode bien connue de séparation des variables qui sera présentée dans la section suivante. Pour cette équation particulière, cependant, il existe une méthode spéciale appelée solution de d'Alembert qui est décrite ci-dessous.

Nous supposons qu'il existe une fonction f de dérivées première et seconde continues. Ensuite, en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient pour les dérivées première et seconde

$$\frac{\partial f(x_1 - c_1 t)}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial f(x_1 - c_1 t)}{\partial x_1}, \quad (7.247)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1 - c_1 t)}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 f(x_1 - c_1 t)}{\partial x_1^2}. \quad (7.248)$$

Il est évident à partir de la deuxième égalité que f satisfait l'équation d'onde (7.246). D'une manière similaire, on peut montrer que pour une fonction g , avec des dérivées première et seconde continues, $g(x_1 + c_1 t)$ est une solution de (7.246). Etant donné que (7.246) est une équation linéaire, il en résulte que la somme de f et g

$$u_1(x_1, t) = f(x_1 - c_1 t) + g(x_1 + c_1 t) \quad (7.249)$$

est également une solution de (7.246). La solution (7.249) représente la propagation de perturbations, les unes vers la droite (fonction $f(x_1 - c_1 t)$) et les autres vers la gauche (fonction $g(x_1 + c_1 t)$). Considérons par exemple une corde étendue de $-\infty$ à $+\infty$. La fonction $f(x_1 - c_1 t)$ est constante lorsque $x_1 - c_1 t = \text{constante}$. Ainsi une augmentation en temps est nécessaire pour compenser l'augmentation en x_1 et maintenir la fonction constante comme le montre la figure 7.13. Ce comportement représente la propagation d'une perturbation non déformée vers la droite de la corde lorsque le temps croît. De la même manière, $g(x_1 + c_1 t)$ représente une perturbation se propageant vers la gauche. Pour aller plus loin dans cette analyse, il est nécessaire de définir les fonctions f et g .

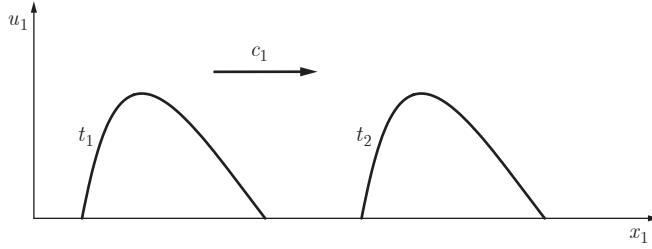


Fig. 7.13 Propagation d'une perturbation donnée par $f(x_1 - c_1 t)$ dans (7.249).

Les formes spécifiques de f et g sont déterminées par le déplacement initial décrit par la fonction $\phi(x_1)$ et la vitesse initiale de la corde $\theta(x_1)$ en chaque point x_1 . Avec ces deux fonctions et (7.249), on obtient

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= \phi(x_1) = f(x_1 - c_1 t)|_{t=0} + g(x_1 + c_1 t)|_{t=0} \\ &= f(x_1) + g(x_1), \end{aligned} \quad (7.250)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial t}|_{x_1, t=0} &= \theta(x_1) = -c_1 \frac{\partial f(x_1 - c_1 t)}{\partial x_1}|_{t=0} + c_1 \frac{\partial g(x_1 + c_1 t)}{\partial x_1}|_{t=0} \\ &= -c_1 \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (7.251)$$

En intégrant (7.251) par rapport à x_1 , il vient

$$-f(x_1) + g(x_1) = \frac{1}{c_1} \int_{x_0}^{x_1} \theta(x'_1) dx'_1. \quad (7.252)$$

En combinant (7.252) avec (7.250), on trouve

$$f(x_1) = \frac{1}{2} \left[\phi(x_1) - \frac{1}{c_1} \int_{x_0}^{x_1} \theta(x'_1) dx'_1 \right] \quad (7.253)$$

$$g(x_1) = \frac{1}{2} \left[\phi(x_1) + \frac{1}{c_1} \int_{x_0}^{x_1} \theta(x'_1) dx'_1 \right]. \quad (7.254)$$

Avec les formes de f et g connues, la solution complète s'écrit

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= f(x_1 - c_1 t) + g(x_1 + c_1 t) \\ &= \left[\frac{\phi(x_1 - c_1 t)}{2} - \frac{1}{2c_1} \int_{x_0}^{x_1 - c_1 t} \theta(x'_1) dx'_1 \right] \\ &\quad + \left[\frac{\phi(x_1 + c_1 t)}{2} + \frac{1}{2c_1} \int_{x_0}^{x_1 + c_1 t} \theta(x'_1) dx'_1 \right] \\ &= \frac{\phi(x_1 + c_1 t) + \phi(x_1 - c_1 t)}{2} + \frac{1}{2c_1} \int_{x_1 - c_1 t}^{x_1 + c_1 t} \theta(x'_1) dx'_1. \end{aligned} \quad (7.255)$$

EXEMPLE 7.1

Une corde infinie est soumise aux conditions initiales

$$\phi(x_1) = \frac{0,02}{1 + 9x_1^2}, \quad \theta(x_1) = 0. \quad (7.256)$$

Trouver l'expression du mouvement subséquent de la corde. On suppose que la vitesse d'onde est de 220 ms^{-1} .

En utilisant (7.256) dans (7.255), on obtient

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= \frac{1}{2} [\phi(x_1 + c_1 t) + \phi(x_1 - c_1 t)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{0,02}{1 + 9(x_1 - c_1 t)^2} + \frac{1}{2} \frac{0,02}{1 + 9(x_1 + c_1 t)^2}. \end{aligned} \quad (7.257)$$

Le mouvement est montré schématiquement à la figure 7.14. La configuration au temps $t_0 = 0$ montre la perturbation initiale (7.256). Ensuite, celle-ci se scinde en deux ondes qui se propagent, l'une vers la gauche, l'autre vers la droite comme l'indique la solution (7.257) et comme le montre la figure 7.14 pour les temps $t > 0$, (t_1, t_2, t_3).

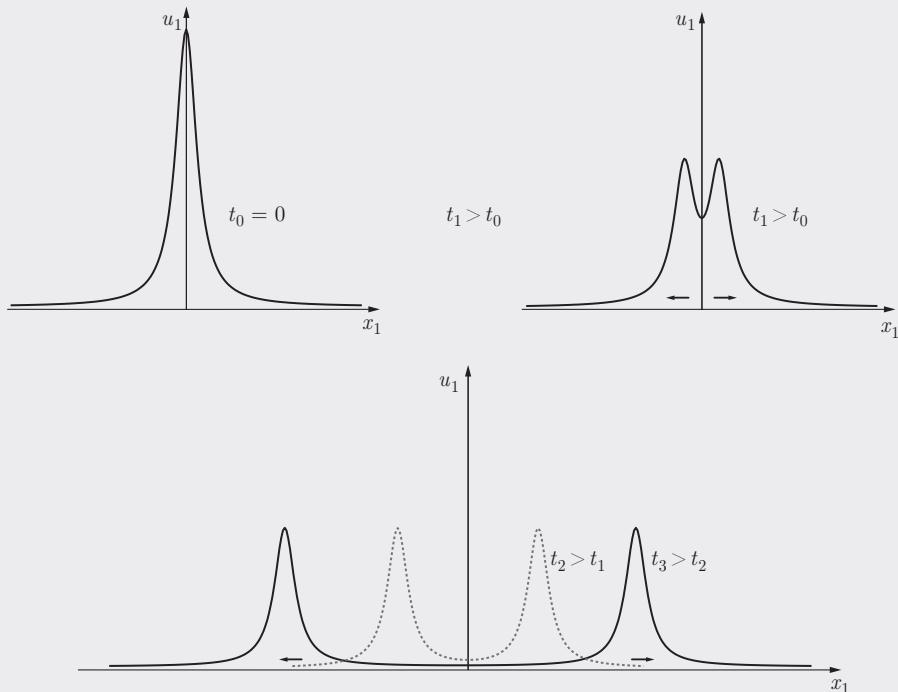


Fig. 7.14 Propagation d'une perturbation le long d'une corde de longueur infinie dans les configurations initiale ($t_0 = 0$) et ultérieures (t_1, t_2, t_3).

7.5.4 Propagation d'une onde dans une corde élastique

La vibration d'une corde est un problème physique qui illustre plusieurs aspects de la propagation des ondes. En plus de nous permettre d'examiner la solution de d'Alembert (7.249), la vibration d'une corde tendue a plusieurs applications dans l'étude des instruments de musique. En outre, l'analyse mathématique de la corde étirée a des applications dans l'étude des lignes de transport d'énergie étirées.

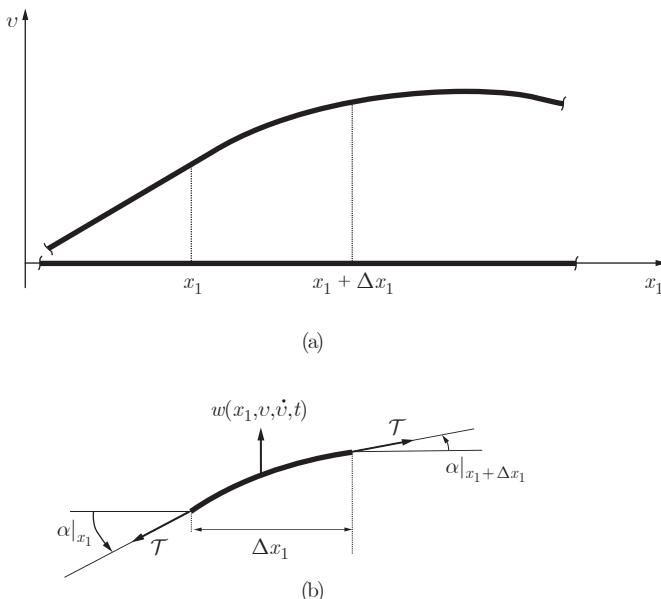


Fig. 7.15 Profil déformé d'une corde étirée (a), un segment de longueur Δx_1 (b).

Considérons une corde élastique soumise à une tension T entre deux points sur l'axe comme le montre la figure 7.15 (a). Dans la formulation du problème suivant, nous supposons plusieurs hypothèses :

- 1) Le mouvement a lieu dans un plan, et chaque particule de la corde se déplace à angle droit par rapport à la position de la corde en équilibre. Dans ce cas $u_1 = u_3 = 0$ et u_2 est une fonction uniquement de x_1 et du temps t . Pour la simplicité de l'écriture des équations, nous posons $u_2(x_1, t) = v(x_1, t)$.
- 2) La corde ne peut transmettre des efforts que dans le sens de la longueur.
- 3) Les pentes de la corde déformée sont petites.
- 4) Les déflexions de la corde sont censées être petites de sorte qu'elles n'affectent pas de manière significative la tension T et qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie.

La masse de la corde par unité de longueur est une fonction connue $m'(x_1)$. En plus des forces élastiques et d'inertie inhérentes au système, la corde peut être soumise à une charge répartie $w(x_1, v, \dot{v}, t)$. Considérons maintenant un

segment Δx_1 (fig. 7.15b). Par application de la loi de Newton au segment de la figure 7.15b, on peut écrire

$$m' \Delta x_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathcal{T} \sin \alpha|_{x_1 + \Delta x_1} - \mathcal{T} \sin \alpha|_{x_1} + w \Delta x_1 . \quad (7.258)$$

La troisième hypothèse implique que $\sin \alpha|_{x_1} \approx \tan \alpha|_{x_1}$ et $\sin \alpha|_{x_1 + \Delta x_1} \approx \tan \alpha|_{x_1 + \Delta x_1}$. En insérant ces approximations dans (7.258) et en divisant par Δx_1 on a

$$m' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathcal{T} \frac{\tan \alpha|_{x_1 + \Delta x_1} - \tan \alpha|_{x_1}}{\Delta x_1} + w . \quad (7.259)$$

Ensuite en prenant la limite $\Delta x_1 \rightarrow 0$ et en observant que $\tan \alpha|_{x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$ et que $\tan \alpha|_{x_1 + \Delta x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx_1$, la relation (7.259) se réduit à l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{m'} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{w}{m'} . \quad (7.260)$$

Dans la plupart des problèmes d'ordre pratique, les forces externes sont négligeables et $m'(x_1)$ est constant le long de la corde. Donc $w(x_1, v, \dot{v}, t)$ est considéré comme nul et $m'(x_1)$ est remplacé par une constante m'_0 . Dans ces conditions, (7.260) se réduit à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \quad a^2 = \frac{\mathcal{T}}{m'_0} , \quad (7.261)$$

où a a les dimensions d'une vitesse, puisque $(MLT^{-2}M^{-1}L)^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2}$. Donc (7.261) est l'équation de propagation d'onde (7.246) dont la solution

$$v(x_1, t) = f(x_1 - at) + g(x_1 + at) \quad (7.262)$$

représente deux ondes se propageant le long de la corde à la vitesse a , l'une vers la droite et l'autre vers la gauche comme on le voit à la figure 7.14.

Il vaut la peine de remarquer qu'outre de décrire l'onde sur une corde, l'équation (7.261), ou (7.246), est applicable aux différents types de propagation d'ondes. En effet, une onde sonore $v(x_1, t)$ représente le déplacement d'un gaz où l'onde se propage. Dans le cas d'ondes électromagnétiques, $v(x_1, t)$ représente la composante de champs électriques ou magnétiques.

Considérons maintenant la solution de l'équation aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables. La solution par cette méthode nous permet de traiter directement le problème aux limites rencontré dans plusieurs applications en ingénierie et en physique. Selon cette méthode, la solution de (7.261) s'exprime sous la forme

$$v(x_1, t) = X(x_1)T(t) . \quad (7.263)$$

Par substitution de (7.263) dans (7.261), nous obtenons

$$a^2 \frac{d^2 X/dx_1^2}{X} = \frac{d^2 T/dt^2}{T} = \gamma . \quad (7.264)$$

Dès lors par (7.264) on obtient deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{d^2X}{dx_1^2} - \frac{\gamma}{a^2}X = 0 \quad (7.265)$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \gamma T = 0. \quad (7.266)$$

La solution de ces équations dépend de la valeur positive, négative ou nulle du paramètre γ . Si $\gamma > 0$ ou $\gamma = 0$, la solution de (7.261) n'est pas périodique et ne peut pas décrire la vibration d'une corde non amortie. La seule valeur qui produit une solution périodique de la corde vibrante est celle correspondant à $\gamma < 0$.

Puisque γ est négatif, il est usuel de définir $\gamma = -\omega^2$. Alors (7.265) et (7.266) prennent la forme

$$\frac{d^2X}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X = 0, \quad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \quad (7.267)$$

dont les solutions s'écrivent

$$X = A \cos \frac{\omega}{a} x_1 + B \sin \frac{\omega}{a} x_1 \quad (7.268)$$

$$T = C \cos \omega t + D \sin \omega t, \quad (7.269)$$

de sorte que

$$v(x_1, t) = \left(A \cos \frac{\omega}{a} x_1 + B \sin \frac{\omega}{a} x_1 \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (7.270)$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires et ω peut s'interpréter comme une fréquence circulaire qui dépend des conditions aux limites et qui doit être évaluée. Notons que la solution (7.270) est périodique puisque lors d'une augmentation dans le temps d'un facteur $2\pi/\omega$, elle se répète. La première partie de l'expression définit la forme de la corde et la seconde spécifie son mouvement.

L'équation (7.270) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} v(x_1, t) = & AC \cos \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t + AD \cos \frac{\omega}{a} x_1 \sin \omega t \\ & + BC \sin \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t + BD \sin \frac{\omega}{a} x_1 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (7.271)$$

En utilisant des identités trigonométriques élémentaires, on exprime (7.271) comme

$$\begin{aligned} v(x_1, t) = & B_1 \sin \left(\frac{\omega}{a} x_1 + \omega t \right) + B_2 \sin \left(\frac{\omega}{a} x_1 - \omega t \right) \\ & + B_3 \cos \left(\frac{\omega}{a} x_1 + \omega t \right) + B_4 \cos \left(\frac{\omega}{a} x_1 - \omega t \right) \end{aligned} \quad (7.272)$$

où les $B_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont des constantes arbitraires. Fait intéressant, cette dernière équation ressemble à la solution de d'Alembert (7.249) et exprime la

propagation d'ondes harmoniques dans la corde tendue. Par exemple, un terme typique de cette solution

$$v(x_1, t) = B_4 \cos\left(\frac{\omega}{a}x_1 - \omega t\right) \quad (7.273)$$

représente une onde se propageant dans la direction x_1 à la vitesse a comme on le présente à la figure 7.16. Il est évident que les termes restants de (7.272) peuvent être interprétés de la même manière.

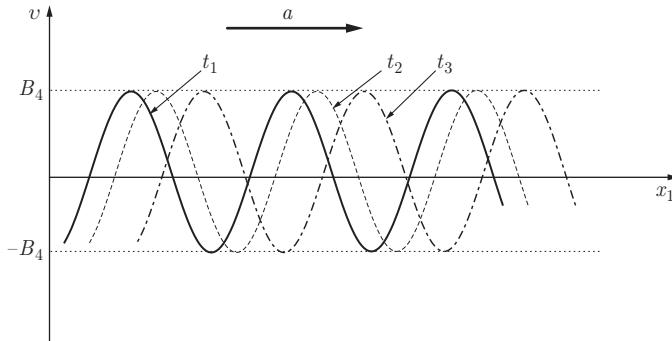


Fig. 7.16 Déviations transversales à des intervalles de temps successifs comme résultat de l'onde de propagation (7.273).

Examinons maintenant les composantes de l'énergie au cours de la propagation des ondes. Supposant qu'il n'y a pas de dissipation de l'énergie, la corde contient de l'énergie cinétique et potentielle de déformation. A partir de (7.273), la vitesse et la déformation sont exprimées comme

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -B_4 \omega \sin\left(\frac{\omega}{a}x_1 - \omega t\right) \quad (7.274)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_1} = -B_4 \frac{1}{2} \frac{\omega}{a} \sin\left(\frac{\omega}{a}x_1 - \omega t\right). \quad (7.275)$$

Soit S la section transversale de la corde. En utilisant (7.273), les énergies cinétiques et potentielles d'un élément dx_1 sont

$$dE = \frac{1}{2} \rho S dx_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho (B_4 \omega)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{a}x_1 - \omega t\right) S dx_1 \quad (7.276)$$

$$dU = 2\mu S \varepsilon_{12}^2 dx_1 = \mu \frac{1}{2} \left(B_4 \frac{\omega}{a} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{a}x_1 - \omega t\right) S dx_1. \quad (7.277)$$

En éliminant le paramètre de la vitesse d'onde a via (7.213), il est évident que $dE = dU$.

Vibration d'une corde élastique

Considérons maintenant une corde élastique tendue (ou cordon) fermement supportée entre deux points situés à une distance ℓ (fig. 7.17). La solution générale à ce problème est fournie par (7.270) ou par l'une des deux formes équivalentes. Pour obtenir la solution pour la corde de la figure 7.17, il nous

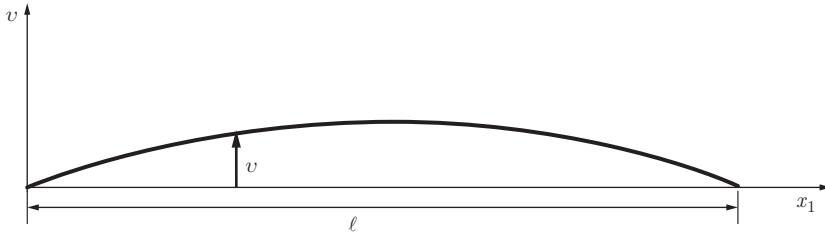


Fig. 7.17 Corde élastique déformée entre deux points situés à une distance ℓ .

faut évaluer les quatre constantes A, B, C, D et le paramètre ω par les conditions aux limites $v(0, t) = v(\ell, t) = 0$ et la condition initiale. Afin d'établir celles-ci, il est utile de choisir la vitesse de la corde nulle en $t = 0$ et de supposer que sa forme initiale en $t = 0$ soit dans une configuration de mode normal ou principal. On définira pareil mode ci-après dans cette section.

Les deux conditions aux limites spécifiées plus haut conduisent à

$$\begin{aligned} 0 &= A(D \sin \omega t + C \cos \omega t), \\ 0 &= \left(B \sin \frac{\omega}{a} \ell + A \cos \frac{\omega}{a} \ell\right)(D \sin \omega t + C \cos \omega t). \end{aligned} \quad (7.278)$$

Celles-ci doivent être satisfaites en tout temps et donc,

$$A = 0, \quad B \sin \frac{\omega}{a} \ell = 0. \quad (7.279)$$

Pour une solution non triviale, B ne peut pas s'annuler, on obtient $\sin \frac{\omega}{a} \ell = 0$ d'où on tire

$$\frac{\omega}{a} \ell = n\pi \quad (7.280)$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$. Donc ω est donné par

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell} a, \quad (7.281)$$

et la fréquence et la période de l'onde sont

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2\ell} a, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{a} \frac{2\ell}{n}. \quad (7.282)$$

Nous allons étudier deux conditions initiales dans la suite. En dérivant (7.270) par rapport au temps, on trouve pour la vitesse

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(B \sin \frac{\omega}{a} x_1\right)(D \cos \omega t - C \sin \omega t)\omega. \quad (7.283)$$

En imposant la vitesse initiale nulle en $t = 0$, on obtient $D = 0$ puisque $B \neq 0$. En conséquence la solution se réduit à

$$v(x_1, t) = BC \sin \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t . \quad (7.284)$$

Pour $t = 0$, cette dernière relation donne

$$v(x_1, 0) = BC \sin \frac{\omega}{a} x_1 , \quad (7.285)$$

qui définit une configuration de mode principal pour la condition initiale. Finalement, la solution de la corde vibrante est exprimée par

$$v(x_1, t) = \mathcal{A} \sin \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t = \mathcal{A} \sin \frac{n\pi}{\ell} x_1 \cos \frac{n\pi a}{\ell} t , \quad (7.286)$$

où \mathcal{A} représente la valeur maximale (ou l'amplitude) de la déviation $v(x_1, t)$ et $n = 1, 2, 3, \dots$. Notons que le premier terme du produit (7.286) représente la configuration et le second le mouvement de la corde. La longueur d'onde x_λ est définie par la longueur d'une onde sinusoïdale pour $\sin \frac{\omega}{a} x_1$, ou pour

$$\frac{\omega}{a} x_1 = 2\pi \quad \text{ou} \quad x_\lambda = \frac{2\ell}{n} . \quad (7.287)$$

La figure 7.18 montre les formes défléchies des trois principaux modes de vibration selon (7.286). Ce sont

- (a) $n = 1, x_\lambda = 2\ell, \omega = \frac{\pi}{\ell} a ;$
- (b) $n = 2, x_\lambda = \ell, \omega = \frac{2\pi}{\ell} a ;$
- (c) $n = 3, x_\lambda = \frac{2}{3}\ell, \omega = \frac{3\pi}{\ell} a .$

Les résultats de l'analyse montrent que la corde se déplace vers le haut et vers le bas en passant par la position d'équilibre. Un tel mouvement est appelé une onde stationnaire. Il convient de noter que (7.286) est le résultat de l'interférence de deux ondes, l'une progressive, l'autre régressive, se déplaçant dans des directions opposées. Pour démontrer cela, nous pouvons utiliser des identités trigonométriques pour réécrire (7.286) comme suit

$$\begin{aligned} v(x_1, t) &= \frac{\mathcal{A}}{2} \left[\left(\sin \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t + \cos \frac{\omega}{a} x_1 \sin \omega t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \frac{\omega}{a} x_1 \cos \omega t - \cos \frac{\omega}{a} x_1 \sin \omega t \right) \right] \\ &= \mathcal{A} \left[\sin \frac{\omega}{a} (x_1 + at) + \sin \frac{\omega}{a} (x_1 - at) \right] . \end{aligned} \quad (7.288)$$

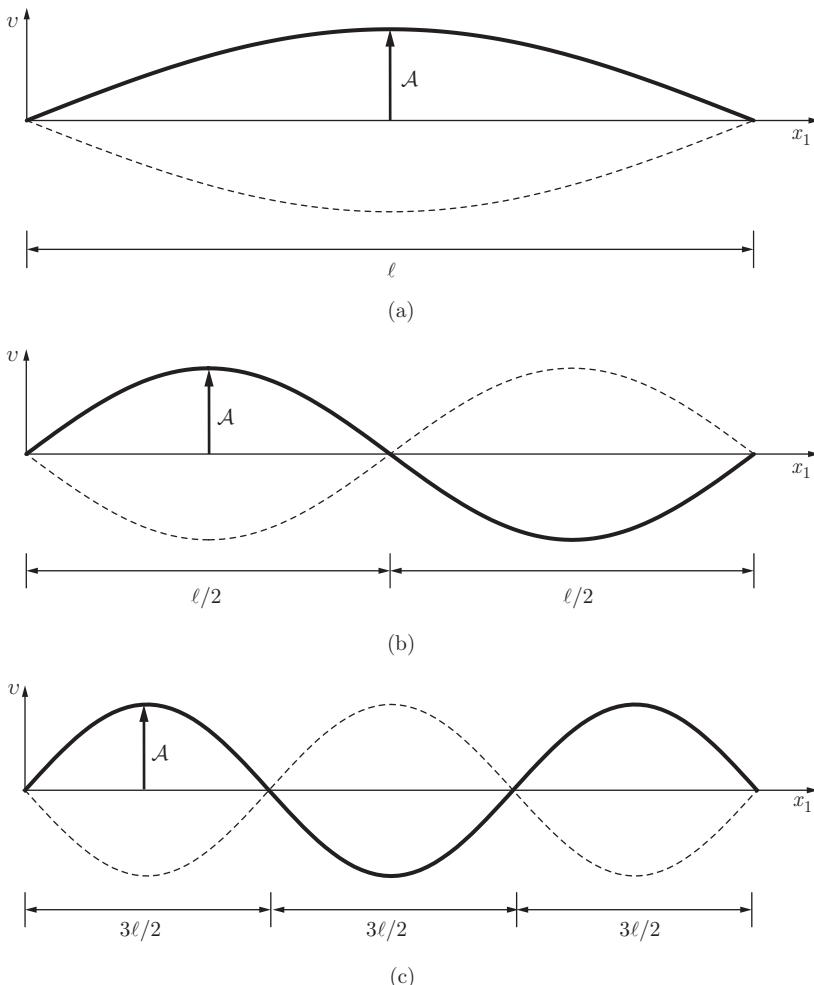


Fig. 7.18 Les trois premiers modes principaux (a), (b) et (c) (cf. page précédente) de vibration d'une corde étirée.

En outre, puisque la solution d'onde stationnaire (7.286) représente un terme typique de (7.271), nous pouvons dire que la solution générale d'une onde de propagation (7.272) peut être dérivée de la solution d'une onde stationnaire (7.271).

La méthode décrite dans cette section mène à la solution pour les modes principaux de vibration d'une corde tendue élastique. La solution est la même pour les modes principaux de vibration des types courants de corps élastiques. Bien que ces modes puissent exister seuls, ils peuvent également se produire simultanément. Dans ce cas, la solution consiste en la somme des solutions du mode principal.

Donc la solution d'une corde élastique (7.270) peut s'exprimer comme une somme sur n de la solution

$$\begin{aligned} v(x_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}(x_1, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x_1 + B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x_1 \right) \left(C_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right), \end{aligned} \quad (7.289)$$

où (7.270) est utilisé avec ω donné par (7.281). Du point de vue mathématique, ceci exprime le fait que puisque l'équation d'onde (7.261) est linéaire avec plusieurs solutions, en fonction de la valeur de n (c.-à-d. $n = 1, 2, 3, \dots$), la somme des solutions est aussi une solution. Les constantes $A_n, B_n, C_n, D_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$ sont également liées aux conditions aux limites et initiale. Cette approche est expliquée dans l'étude de la vibration de torsion d'un arbre circulaire élastique dans la section suivante.

Vibration de torsion d'un arbre circulaire.

Comme deuxième problème conduisant à une équation aux dérivées partielles similaire à (7.261), nous considérons un arbre de longueur ℓ (fig. 7.19(a)) soumis à des vibrations de torsion. Le matériau de l'arbre est supposé homogène avec une densité de masse uniforme ρ et l'aire de la section est prismatique.

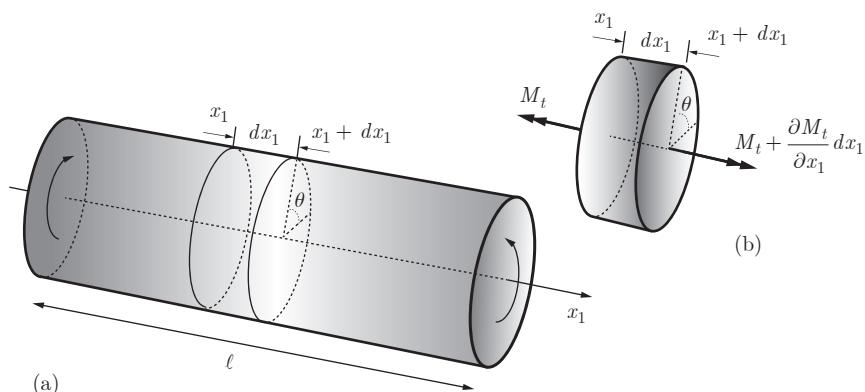


Fig. 7.19 Un arbre circulaire soumis à torsion (a), une tranche infinitésimale dx_1 (b).

En plus des forces élastiques et d'inertie inhérentes au système, la corde peut être soumise à un couple réparti par unité de longueur $w(x_1, \theta, \dot{\theta}, t)$. Dans la formulation suivante du problème, nous supposons que

- 1) les sections transversales de l'arbre restent planes lors de la déformation,
- 2) une section transversale typique tourne autour de son centre de gravité,
- 3) la rotation de l'arbre est censée être petite,
- 4) il n'existe pas de dissipation d'énergie.

Par la mécanique des solides élémentaire, on sait que, pour des conditions statiques, la variation de l'angle de torsion $\theta(x_1)$ le long de l'axe de l'arbre $d\theta/dx_1$ est exprimée comme suit

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{M_t}{\mu I_p}, \quad (7.290)$$

où le couple appliqué est $M_t(x_1)$, μ est le module de cisaillement et I_p est le moment d'inertie polaire de la section transversale circulaire. Pour le problème traité ici, l'angle de torsion est une fonction des variables de temps et d'espace. Ainsi (7.290) est réécrite comme

$$\frac{\partial\theta(x_1, t)}{\partial x_1} = \frac{M_t(x_1, t)}{\mu I_p}. \quad (7.291)$$

La dérivée partielle de (7.291) par rapport à x_1 donne

$$\frac{\partial M_t(x_1, t)}{\partial x_1} = \mu I_p \frac{\partial^2 \theta(x_1, t)}{\partial x_1^2}. \quad (7.292)$$

Afin d'établir l'équation différentielle du mouvement, on considère un segment infinitésimal de l'arbre, délimité par deux sections transversales à une distance dx_1 (fig. 7.19(b)). Le moment d'inertie massique de cette tranche est

$$dJ = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dS dx_1 = \rho dx_1 \int r^2 dS = \rho I_p dx_1 \quad (7.293)$$

où dm est la masse d'un élément à une distance r du centre de la section. En appliquant la loi de Newton sous forme torsionnelle au segment infinitésimal dx_1 (fig. 7.19b), on a

$$\begin{aligned} (I_p \rho dx_1) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \left(M_t + \frac{\partial M_t(x_1, t)}{\partial x_1} dx_1 \right) - M_t + w dx_1 \\ &= \frac{\partial M_t}{\partial x_1} dx_1 + w dx_1. \end{aligned}$$

En divisant par dx_1 et en utilisant (7.292), il vient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta(x_1, t)}{\partial x_1^2} + w. \quad (7.294)$$

Dans beaucoup de cas d'intérêt pratique, la force extérieure w peut être négligée, c.-à-d. $w(x_1, \theta, \dot{\theta}, t) = 0$. Dès lors, la relation (7.294) a la même forme que l'équation d'onde (7.246) ou (7.261) pour la corde élastique. Notons que $a = \sqrt{\mu/\rho}$ a les dimensions d'une vitesse.

Par séparation des variables, la solution s'exprime comme

$$\theta(x_1, t) = X(x_1)T(t). \quad (7.295)$$

En suivant les mêmes procédures que dans le cas du problème de la corde, traité dans la section précédente, la solution est exprimée en tant que

$$\theta(x_1, t) = \left(A \cos \frac{\omega}{a} x_1 + B \sin \frac{\omega}{a} x_1 \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) . \quad (7.296)$$

Toute extrémité de l'arbre peut être libre ou fixe par rapport à la rotation. Dans cette section, le cas de l'arbre libre aux deux extrémités est étudié. Pour déterminer les constantes dans (7.296), les conditions aux limites et initiale doivent être spécifiées. Etant donné que les extrémités de l'arbre sont libres, le couple au niveau de ces extrémités s'annule. En tenant compte de (7.291), ces conditions donnent

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta(\ell, t)}{\partial x_1} = 0 . \quad (7.297)$$

Reprenant (7.296), on trouve

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \left(-A \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} x_1 + B \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_1 \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) . \quad (7.298)$$

La première condition (7.297) conduit à

$$B \frac{\omega}{a} (C \cos \omega t + D \sin \omega t) = 0, \forall t . \quad (7.299)$$

Donc $B = 0$. De même, en imposant la seconde condition (7.297), on trouve

$$-A \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} \ell (C \cos \omega t + D \sin \omega t) = 0, \forall t . \quad (7.300)$$

Pour une solution non triviale, A ne peut pas s'annuler, on doit avoir

$$\sin \frac{\omega}{a} \ell = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{a} \ell = n\pi . \quad (7.301)$$

Donc comme dans le cas de la corde élastique, ω devrait prendre les valeurs suivantes

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \quad (7.302)$$

Il est clair que nous avons un nombre infini de solutions. La n -ième solution du problème est

$$\theta_n(x_1, t) = \cos \frac{\omega_n}{a} x_1 (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) . \quad (7.303)$$

Notons que la constante A_n est absorbée dans les constantes C_n et D_n . Puisque l'équation d'onde est linéaire, la somme sur n de toutes les solutions est aussi une solution

$$\theta(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} \left(C_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) . \quad (7.304)$$

La relation (7.304) doit satisfaire les conditions initiales suivantes

$$\theta(x_1, 0) = f(x_1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta(x_1, 0)}{\partial t} = g(x_1) . \quad (7.305)$$

Les deux fonctions $f(x_1)$ et $g(x_1)$ sont connues. Pour satisfaire ces conditions, on doit avoir

$$\theta(x_1, 0) = f(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} . \quad (7.306)$$

Ce dernier résultat implique que les coefficients C_n soient les coefficients du développement en cosinus de $f(x_1)$ sur la moitié de l'étendue de l'intervalle $(0, \ell)$

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} dx_1 . \quad (7.307)$$

La seconde condition initiale impose

$$\left. \frac{\partial \theta(x_1, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{\ell} \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} , \quad (7.308)$$

telle que $D_n \frac{n\pi a}{\ell}$ soient les coefficients du développement en cosinus de $g(x_1)$ sur la moitié de l'étendue de l'intervalle $(0, \ell)$

$$D_n \frac{n\pi a}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell g(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} dx_1 \quad \text{ou} \quad D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^\ell g(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{\ell} dx_1 . \quad (7.309)$$

Notons que la même analyse peut être effectuée pour différentes conditions aux limites, c.-à-d. lorsque les deux extrémités sont fixées ou lorsque l'une est fixe et l'autre libre d'entrer en rotation.

Vibration longitudinale d'une poutre prismatique

En utilisant la théorie élémentaire des poutres et en suivant la même procédure que dans le cas de la torsion d'une barre circulaire traité précédemment, l'équation pour les ondes longitudinales dans la poutre (fig. 7.20) est

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \quad (7.310)$$

où

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.311)$$

est la vitesse d'onde longitudinale.

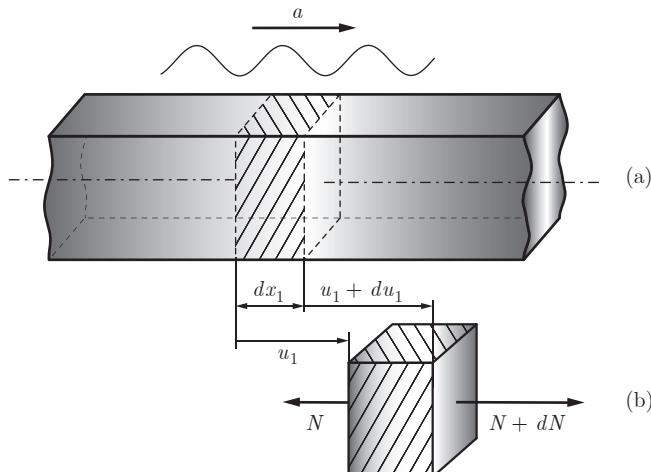


Fig. 7.20 Une poutre mince soumise à des vibrations longitudinales (a), une tranche de longueur dx_1 (b).

L'obtention de (7.310) est laissée au lecteur à titre d'exercice.

On termine cette section avec des valeurs de la vitesse d'onde dans les corps élastiques typiques. En utilisant les propriétés de la table 6.2, nous obtenons les valeurs indiquées à la table suivante.

Tableau 7.1 Vitesse d'onde dans des solides élastiques.

Vitesse d'onde (m/s)	Acier	Verre	Caoutchouc
Dilatation	5240	5505	$\rightarrow \infty$
Longitudinale	5047	5253	242
Distorsion ou transversale	3169	3405	140

La première ligne de la vitesse longitudinale correspond à la relation (7.212), la seconde à la relation (7.311). La vitesse transversale est celle de (7.213). Notons que la vitesse de dilatation pour le caoutchouc n'est pas définie, puisque nous supposons l'incompressibilité et $\nu = 0,5$. En utilisant l'expression pour une poutre mince (7.311), la vitesse longitudinale de ce matériau a une valeur finie. Dans les autres cas (deuxième ligne), elle est plus petite d'environ 4%, car les effets latéraux induits par le coefficient de Poisson sont négligés dans la théorie élémentaire.

7.6 Exercices

[7.1] Montrer que dans le cas de déformation plane, les équations d'équilibre peuvent s'exprimer en terme de déplacements sous la forme

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1 = 0 \quad (7.312)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_2 = 0, \quad (7.313)$$

où $\mu = E/2(1 + \nu)$ est le module de cisaillement et λ est relié à E et ν par la relation (6.112).

[7.2] Montrer que dans le cas de contrainte plane, les équations d'équilibre peuvent s'exprimer en terme de déplacements sous la forme

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{E}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1 = 0 \quad (7.314)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{E}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_2 = 0. \quad (7.315)$$

[7.3] Montrer que si un champ vectoriel $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est tel que

$$g_{i,mmnn} = 0, \quad (7.316)$$

alors le champ de déplacement défini par

$$u_i = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} g_{i,mm} - \frac{1}{\mu} g_{n,ni} \quad (7.317)$$

satisfait les équations de Navier sans force de volume.

[7.4] Démontrer que les équations de Navier (7.7) avec $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ sont équivalentes aux équations suivantes

- 1) $(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0$
- 2) $(1 - 2\nu)\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$
- 3) $(\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0$

[7.5] Considérons un cylindre creux soumis à des pressions internes et externes (fig. 7.5) ayant ses extrémités libres sans contraintes. En utilisant la fonction potentielle donnée par (7.66), dériver les expressions pour les contraintes et les déplacements. Comparer la solution avec (7.187).

[7.6] Exprimer l'équation d'onde (7.209) en termes de $\operatorname{div} \mathbf{u}$ comme suit

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial t^2} \quad (7.318)$$

[7.7] Exprimer l'équation d'onde (7.205) en termes des composantes de rotation du champ de déplacement $\nabla \times \mathbf{u}$ comme suit

$$\mu\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t^2} \quad (7.319)$$

[7.8] Pour le coin d'épaisseur unitaire d'angle 2α , chargé par le moment M ainsi qu'il est indiqué à la figure 7.21, déterminer si la fonction de contrainte de la forme

$$\Phi(r, \theta) = A\theta + B \sin 2\theta \quad (7.320)$$

est une solution du problème. Montrer ensuite que σ_{rr} est donné par

$$\sigma_{rr} = -\frac{2C}{r^2} \sin 2\theta \quad (7.321)$$

avec $C = M/(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)$.

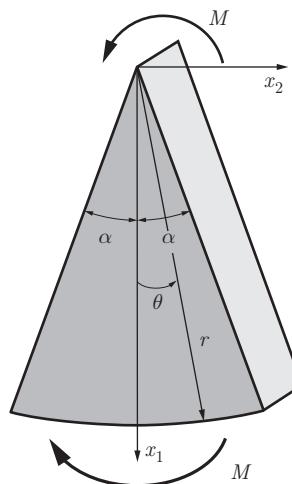


Fig. 7.21 Coin soumis à un moment M .

- 7.9** Pour le coin d'épaisseur unitaire et d'angle 2α , chargé par la force P comme il est indiqué à la figure 7.22 :

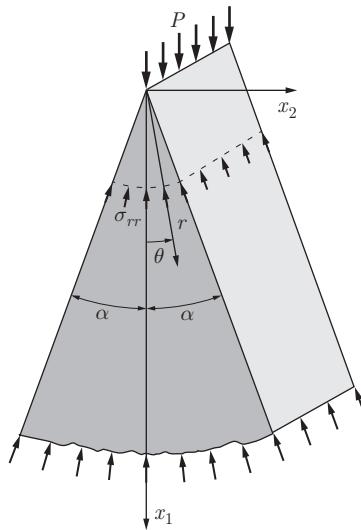


Fig. 7.22 Coin soumis à une force linéaire P .

- (a) Démontrer que la fonction de contrainte

$$\Phi(r, \theta) = Cr\theta \sin \theta \quad (7.322)$$

fournit une solution des contraintes du problème. Ensuite exprimer les composantes des contraintes et déterminer la constante C .

- (b) Comment peut-on trouver les contraintes d'une plaque d'épaisseur unitaire semi-infinie et chargée par une force linéaire comme dans le cas précédent ?

Introduction à la mécanique des fluides newtoniens

8.1 Introduction

Les fluides sont omniprésents dans la nature, la technologie et les gestes de la vie quotidienne, comme par exemple, l'eau pour se laver les mains, l'eau du café ou du thé, l'air que nous respirons, le sang circulant dans notre système vasculaire, etc. Les deux fluides les plus communs, à savoir l'air et l'eau, constituent les exemples types des deux grandes catégories qui leur sont associées : les fluides compressibles et incompressibles.

Nous avons tous été confrontés au pneu plat de notre vélo et à devoir pomper l'air dans la chambre. C'est là que l'on découvre expérimentalement que l'air peut être comprimé et qu'ainsi, la pression est augmentée, ce qui est très utile dans ce cas précis. En ce qui concerne l'eau, on considère généralement que c'est un fluide incompressible. C'est une idéalisation de la réalité, puisque la vitesse du son dans l'eau est de 1500 ms^{-1} , c.-à-d. environ cinq fois celle du son dans l'air.

Les effets de compressibilité donnent lieu à des phénomènes physiques caractéristiques, comme la propagation d'ondes acoustiques ou la présence d'ondes de choc en écoulement supersonique. Cependant, on peut traiter l'air comme un fluide incompressible lorsque le nombre de Mach est faible. C'est une pratique courante dans l'aérodynamique automobile. On peut aussi traiter l'eau comme compressible, si on s'intéresse à la propagation des ondes acoustiques, par exemple, dans l'eau de mer.

Une autre classification des fluides se fait sur la base de leur caractère newtonien ou non newtonien. L'air et l'eau sont des fluides newtoniens. Les polymères fondus, le sang, les boues, les fluides agro-alimentaires, les peintures, la pâte dentifrice, etc. sont non newtoniens.

L'écoulement de Couette entre deux cylindres circulaires est un dispositif adéquat pour discriminer ces deux catégories de fluides. Soient deux cylindres verticaux coaxiaux. On maintient, par exemple, le cylindre extérieur fixe, tandis que le cylindre intérieur est soumis à une vitesse de rotation constante de l'ordre

d'une dizaine de révolutions par minute. L'espace annulaire est rempli de fluide (liquide), jusqu'à une certaine hauteur. A la surface libre, le fluide est en contact avec l'air. Dans le cas du fluide newtonien (comme l'eau), on observe que la surface libre prend la forme d'un paraboloïde de révolution sous l'action de la force centrifuge. Pour le fluide non newtonien, celui-ci s'enroule autour du cylindre tournant. C'est l'effet Weissenberg.

Les équations de Navier-Stokes décrivent la dynamique des écoulements des fluides visqueux. Elles s'obtiennent à partir des équations de conservation et de l'équation de constitution. Dans ce chapitre, on choisira celle des fluides visqueux newtoniens, où le tenseur σ est une fonction linéaire du tenseur d .

Dans certains procédés industriels, on rencontre des matériaux dont le comportement à l'état fluide s'écarte du caractère newtonien. Dans ce dernier cas, on recourt aux concepts de la rhéologie pour étudier l'équation de constitution qui représente au mieux la phénoménologie associée à l'écoulement du fluide. Le lecteur consultera la monographie [16] pour un complément d'information.

Néanmoins, les équations de Navier-Stokes constituent un modèle suffisamment riche pour être appliquée dans un très grand nombre de cas. On choisira la représentation eulérienne des équations de conservation, car d'une part les fluides subissent en général de très grandes déformations et d'autre part, les problèmes usuels se définissent dans des repères fixes.

La physique des fluides newtoniens est caractérisée par le nombre sans dimension de Reynolds défini par la relation

$$Re = \frac{UL}{\nu} , \quad (8.1)$$

où U et L sont, respectivement, une vitesse et une longueur de référence de l'écoulement considéré et ν la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre peut prendre des valeurs comprises entre zéro et plusieurs millions. Pour Re proche de zéro, les écoulements sont laminaires. Leur configuration géométrique et leur dynamique sont relativement simples. Leur interprétation par des solutions analytiques permet une compréhension en profondeur de la physique associée. Lorsque Re croît, les écoulements laminaires sont soumis à des instabilités qui les conduisent peu à peu à la turbulence développée. C'est cette dernière que nous connaissons lors d'un vol où l'aéronef subit de violentes secousses et embardées provoquées par la turbulence atmosphérique. La compréhension de la turbulence demeure l'un des grands défis posés à la physique, encore aujourd'hui.

Le lecteur trouvera des compléments dans les ouvrages suivants : [2, 4, 6, 10, 29, 36, 37, 38, 51].

8.2 Considérations physiques sur les écoulements laminaires et turbulents de fluide incompressible

Dans cette section, on considère uniquement des écoulements de fluide incompressible en fonction du nombre de Reynolds (éq. 8.1). Ainsi que nous l'avons

déjà évoqué, la physique des écoulements change drastiquement lorsqu'on passe des écoulements lents à très bas nombres de Reynolds à ceux pour lesquels $Re \sim 10^6 - 10^7$.

Les écoulements lents sont laminaires (du latin *laminae* : couches minces) ; ils sont très souvent stationnaires et les lignes de courant épousent les contours des obstacles placés en leur sein. Ces écoulements présentent des effets aisés à prédire et à interpréter, car ils correspondent aux équations linéaires de Stokes. On les trouve dans les laves, le magma terrestre, le verre fondu, les polymères très visqueux.

Lorsque Re augmente, le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes devient prépondérant et pour des valeurs de quelques dizaines, les écoulements laminaires deviennent instables et des écoulements secondaires sont engendrés. On parle d'écoulements transitionnels.

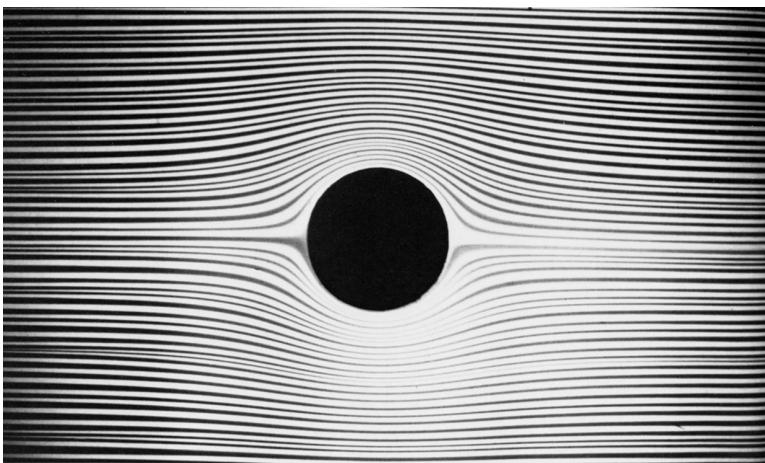


Fig. 8.1 Ecoulement sur un cylindre à $Re = 0$.

Un excellent exemple est donné par l'écoulement amont uniforme et parallèle incident sur un cylindre circulaire horizontal. Le nombre de Reynolds est défini par U la vitesse amont uniforme, $L = D$ le diamètre du cylindre et ν la viscosité cinématique du fluide. La figure 8.1⁽¹⁾ montre l'écoulement à $Re = 0$ qui présente des lignes de courant symétriques par rapport aux directions horizontale et verticale et aux diagonales.

Lorsque Re croît, pour des valeurs de 13, 1 et 26 montrées à la figure 8.2, on constate que l'écoulement est stationnaire et symétrique par rapport à l'axe horizontal. Deux zones de recirculation contra-rotative sont présentes à l'arrière du cylindre. La longueur de recirculation augmente linéairement avec Re tandis que la distance séparant les centres des tourbillons croît comme \sqrt{Re} .

⁽¹⁾ Les figures 8.1 à 8.4 et 8.7 et 8.11 sont extraites de l'ouvrage [73]. Les recherches opérées à ce jour visant à identifier les ayant-droits n'ont pas abouties, et l'éditeur invite celui ou celle qui se reconnaîtrait à se faire connaître auprès de lui.

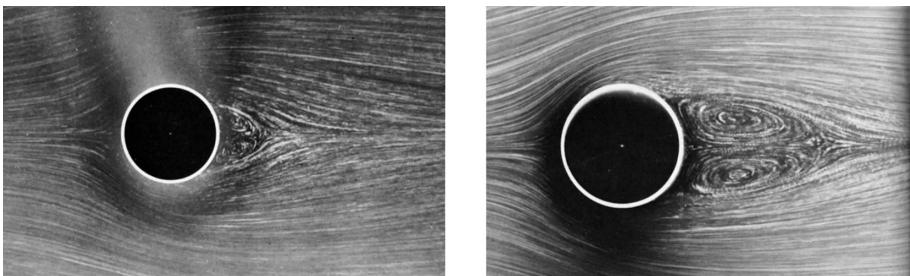


Fig. 8.2 Ecoulement sur un cylindre pour $Re = 13,1$ (gauche) et 26 (droite).

Pour $Re = 47,5$, on franchit le premier nombre de Reynolds critique pour lequel la physique devient instationnaire. On engendre l'allée de von Kármán dont les tourbillons sont lâchés alternativement de la partie supérieure et inférieure à l'aval du cylindre. Pareille allée est montrée à la figure 8.3 pour $Re = 140$, extraite de [72]. Les bouffées tourbillonnaires présentent une fréquence d'alimentation correspondant à un cycle limite dans le plan de phase. Il s'agit d'une bifurcation de Hopf. La fréquence d'alimentation, notée f , conduit à l'utilisation du nombre de Strouhal, St ,

$$St = \frac{fD}{U}. \quad (8.2)$$

Pour les valeurs de Re autour de la centaine, St est de l'ordre de 0,13.

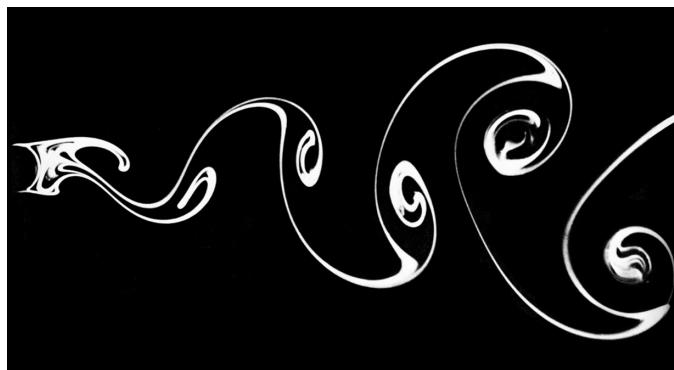


Fig. 8.3 Allée de von Karman pour $Re = 140$.

Des analyses de la stabilité font appel à l'équation de Ginzburg-Landau, ([17]) qui détermine le développement non linéaire de perturbations superposées à un écoulement de base. Cette théorie couvre un domaine très vaste que cette monographie ne peut pas couvrir. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés, comme par exemple [8, 9, 18, 56]. Si on augmente le nombre de Reynolds, on passe par des régimes transitionnels pour atteindre finalement l'état turbulent. Une excellente synthèse de la dynamique des sillages derrière un cylindre est due à Williamson [75].

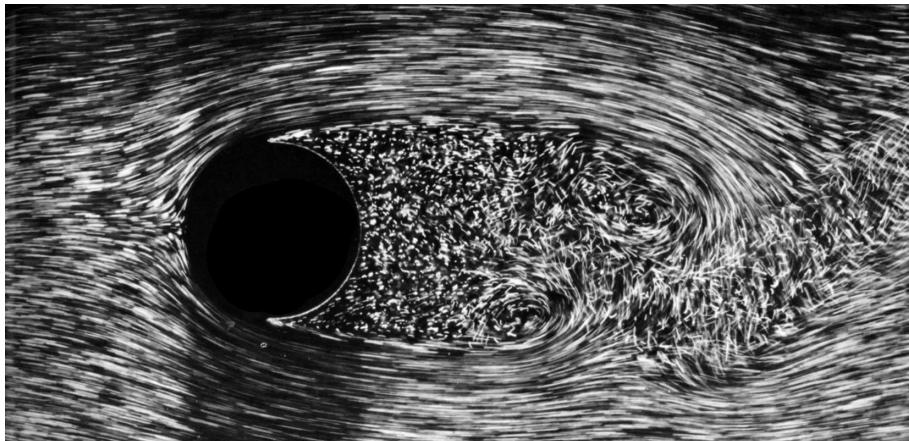


Fig. 8.4 Allée de von Karman pour $Re = 2000$.

La figure 8.4 montre la configuration de l'écoulement en turbulence faible. La couche limite qui est le siège des effets visqueux, est laminaire à l'avant du cylindre, se développe sur celui-ci, subit une séparation et produit un sillage turbulent. On y distingue encore deux vortex résultant de la dynamique non linéaire.

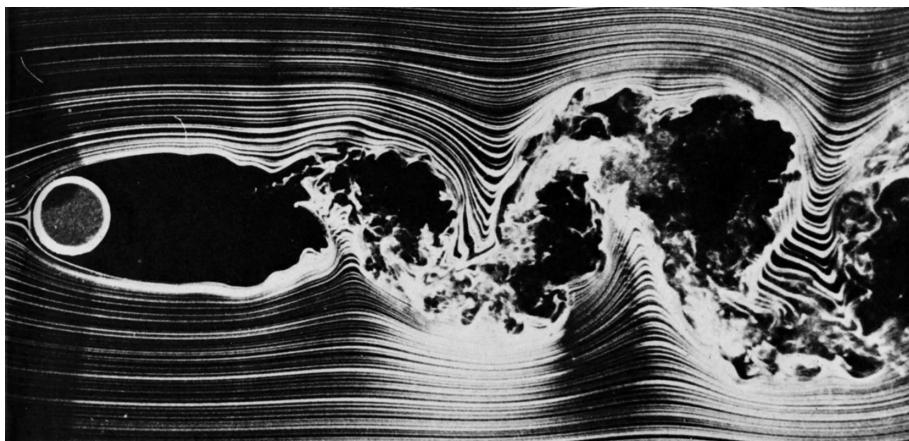


Fig. 8.5 Allée de von Karman pour $Re = 10^4$.

Pour $Re = 10^4$ à la figure 8.5, l'écoulement a grossso modo la même forme, avec des vortex identifiables.

Lorsque le nombre de Reynolds atteint plusieurs dizaines de milliers, voire plusieurs millions, la physique des fluides offre une multitude d'échelles spatiales et temporelles ; l'écoulement est en turbulence développée. La turbulence est présente dans la majorité des écoulements dans la nature. Chacun a certainement pu éprouver au cours d'un vol que les effets turbulents sont chaotiques

et aléatoires et correspondent à une dynamique à variation très rapide. La compréhension de la turbulence est l'un des rares défis que la physique moderne n'a pas encore totalement relevé.

Les équations non linéaires ont la réputation d'être très difficiles à résoudre par des moyens analytiques et celles de Navier-Stokes n'y échappent pas. C'est une des raisons pour lesquelles le recours à la simulation numérique s'est imposé au cours du temps comme la seule voie pour analyser en profondeur ces phénomènes complexes. La méthode des éléments finis constitue un choix pertinent pour effectuer ce type de calcul [3].

8.3 Considérations physiques sur les écoulements de fluide compressible

Les fluides compressibles, comme l'air ou plus généralement les gaz, offrent au physicien et à l'ingénieur des phénomènes complexes et très intéressants.

Les écoulements où les effets de compressibilité sont à prendre en considération, impliquent le plus souvent des vitesses élevées. On parle alors de dynamique des gaz. Dans ce cas, les valeurs du nombre de Reynolds sont très grandes. Comme, par exemple, la viscosité cinématique de l'air à température ambiante est $\nu_{air} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et que les vitesses sont de l'ordre de plusieurs centaines de mètres par seconde, les nombres de Reynolds valent plusieurs millions. Les écoulements sont évidemment turbulents. Cependant, en aérodynamique, les effets visqueux se font sentir dans des zones proches des obstacles ou des corps présents dans l'écoulement. C'est une des raisons pour lesquelles on peut négliger la turbulence et les effets visqueux pour ne tenir compte que de la pression comme grandeur importante. C'est cette dernière qui produira la portance nécessaire pour le vol d'un objet comme une aile ou un aéronef. La modélisation traite alors les équations d'Euler pour le fluide parfait.

Les écoulements compressibles sont caractérisés par le nombre de Mach global

$$M = \frac{U}{a}, \quad (8.3)$$

où U est une vitesse de référence comme celle de l'écoulement amont uniforme sur un corps et a la célérité du son définie par (6.152). Le nombre de Mach prend typiquement des valeurs comprises entre 0 et 8. Le cas $M = 0$ est celui du fluide incompressible correspondant à une vitesse du son infinie puisque $\rho = \text{cste.}$

8.3.1 Ecoulements subsonique, supersonique et hypersonique

Considérons un gaz en écoulement uniforme stationnaire de vitesse $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_1$. La présence d'un objet volant dans cet écoulement au point P engendre une perturbation ou onde sonore, qui sera propagée dans l'espace à la vitesse du son (relative à celle du gaz ou de l'air). Cette perturbation produit des fluctuations

de pression et de masse volumique. La vitesse de propagation de la perturbation par rapport à un système de coordonnées fixes est donc la somme de la vitesse du gaz et de la célérité a dans n'importe quelle direction caractérisée par le vecteur unitaire \mathbf{n} . La vitesse résultante $\mathbf{v} + a\mathbf{n}$ à laquelle la perturbation se déplace à partir de P s'oriente pour les diverses directions de \mathbf{n} dans l'espace. On les obtient en traçant horizontalement le vecteur \mathbf{v} à partir de P . A son extrémité, on construit la sphère de rayon a . Tous les vecteurs issus de P et se terminant sur la sphère sont des solutions possibles pour la grandeur et la direction de la vitesse de propagation.

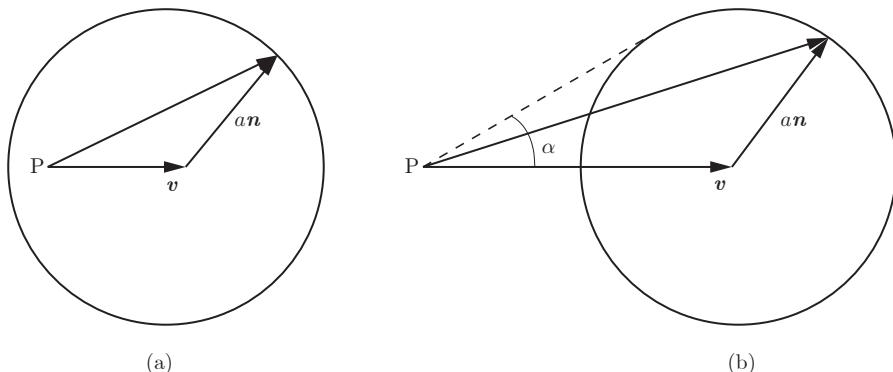


Fig. 8.6 Propagation de perturbations dans un gaz : (a) cas subsonique ; (b) cas supersonique.

Pour $0 < M < 1$, on est en écoulement subsonique avec $U < a$. En se rapportant à la figure 8.6 (a), on constate que la vitesse résultante se propage dans tout l'espace, puisque la sphère englobe le point P . On peut aussi interpréter l'écoulement de la manière suivante. Comme la source de la perturbation se déplace de gauche à droite avec la vitesse $\|\mathbf{v}\| < a$, l'onde émise au temps initial $t = t_0$ est située au temps $t = t_1 > t_0$ dans la sphère de rayon $a(t_1 - t_0)$. Pendant ce temps, la source s'est déplacée sur la distance $\mathbf{v}(t_1 - t_0)$. Comme $\|\mathbf{v}\| < a$, l'objet volant se trouve toujours à l'intérieur des sphères créées précédemment.

Si $M > 1$, l'écoulement est supersonique. La figure 8.6 (b) montre que la vitesse résultante appartient à un cône de sommet P qui est tangent à la sphère centrée à l'extrémité de \mathbf{v} . Ce cône possède un demi-angle au sommet α tel que

$$\sin \alpha = \frac{a}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{M}, \quad (8.4)$$

dont le sinus est inversement proportionnel au nombre de Mach. Notons que le nombre de Mach dans (8.4) est basé sur la vitesse \mathbf{v} ; c'est donc un nombre de Mach local qui varie avec la position. Dans un écoulement supersonique, toute perturbation est propagée *en aval* dans un cône, dont l'angle au sommet décroît lorsque M augmente. L'angle α défini par (8.4) est l'*angle de Mach*.

En résumé, l'écoulement subsonique sur un corps affecte la totalité de l'espace en amont et en aval. L'amplitude de la perturbation s'atténue avec la distance. Pour l'écoulement supersonique, la perturbation est engendrée lorsque

l'écoulement incident atteint l'obstacle et est propagée uniquement vers l'aval. Elle ne peut pas « remonter » en amont. Cette différence phénoménologique s'explique par le modèle mathématique sous-jacent à la propagation des ondes acoustiques. Pour cas subsonique, l'équation est de type elliptique, tandis que dans le cas supersonique, elle est de nature hyperbolique.

Le cas particulier $M = 1$ est celui de l'écoulement sonique. L'angle de Mach vaut 90° . Toutes les perturbations sphériques sont tangentes à un plan perpendiculaire à \mathbf{v} . Les petites perturbations (infinitésimales) interagissent pour créer une perturbation d'amplitude finie : c'est le mur du son.

L'écoulement pour lequel $M > 5$ est appelé hypersonique. Dans ce cas, l'air entre en dissociation moléculaire et le gaz s'ionise. Il faut tenir compte de la réaction chimique entre les composants de l'air et les aspects thermodynamiques sont prépondérants. Ces écoulements se présentent autour des missiles ou des navettes spatiales.

8.3.2 Onde de choc

Lorsque l'objet volant n'est pas de petite taille, les perturbations engendrées ne sont plus infinitésimales et la surface qui sépare la zone de silence de celle où la propagation s'effectue, devient une surface courbe à travers laquelle la pression, la masse volumique et la vitesse subissent des changements soudains d'amplitude finie. Ce changement abrupt des quantités physiques s'appelle un **choc** et la surface associée est l'**onde de choc**. Notons que l'onde de choc est une onde de compression. Dans la réalité, l'onde de choc a une certaine épaisseur de l'ordre de quelques millimètres. Cependant, lorsque l'objet est un avion complet, on assimile l'onde de choc à une surface de discontinuité, ce qui simplifie son traitement mathématique.

Les figures suivantes ont été réalisées par une méthode optique, l'ombroscopie, basée sur les variations d'indice de réfraction dues aux variations de masse volumique. En plaçant un écran en opposition à la source lumineuse, on obtient sur celui-ci des ombres chinoises révélant la configuration géométrique de l'écoulement. Ces figures ont été publiées par von Kármán [73].

En passant de $M = 0,84$ à $M = 0,971$, on remarque aux figures 8.7 et 8.8 la configuration des ondes de choc qui sont produites sur un obus en vol libre dans l'air avec un angle d'incidence inférieur à $1,5^\circ$. On reconnaît également la présence d'un sillage turbulent à l'arrière du culot. Notons que le nez du projectile a un demi-angle d'ouverture égal à 20° .

Lorsque l'on approche de la vitesse du son, la configuration des ondes de choc s'étend latéralement sur des distances plus importantes. Les figures 8.9 et 8.10 montrent toute la complexité de ces ondes et leur interaction compliquée.

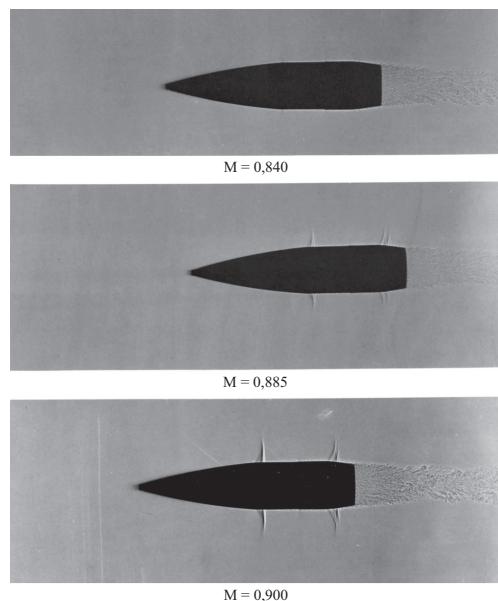


Fig. 8.7 Ecoulement subsonique d'un projectile pour $M = 0,84, 0,885$ et $0,9$.

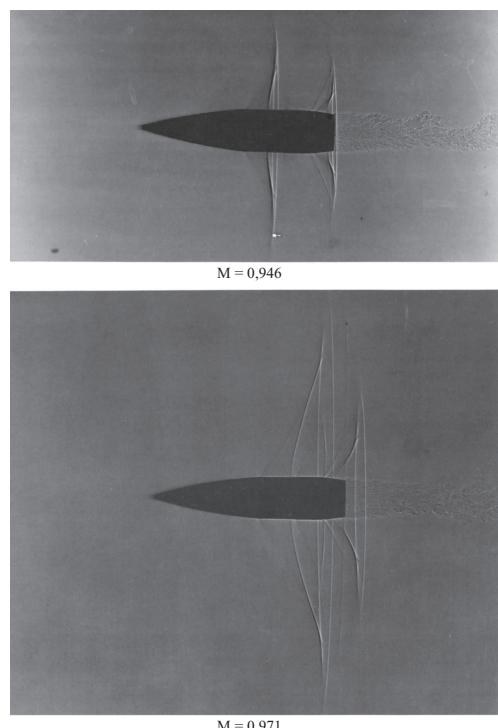


Fig. 8.8 Ecoulement subsonique d'un projectile pour $M = 0,946$ et $0,971$.

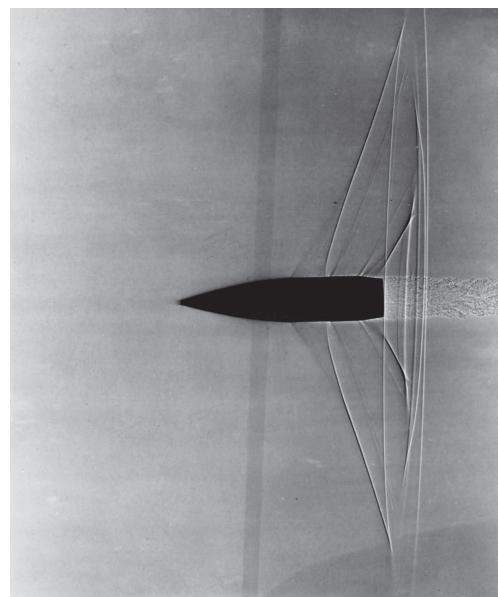
 $M = 0,978$

Fig. 8.9 Ecoulement proche de la vitesse du son, $M = 0,978$.

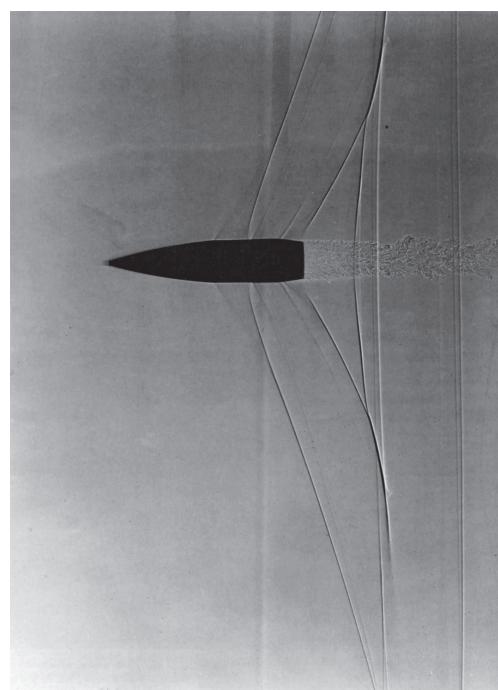
 $M = 0,990$

Fig. 8.10 Ecoulement proche de la vitesse du son, $M = 0,99$.

Enfin, la figure 8.11 est celle de l'écoulement supersonique autour d'une sphère de diamètre égal à 1,27 cm en vol libre dans l'air. Le nombre de Mach vaut $M = 1,53$. L'onde de choc produite est courbe et se détache du corps pour se placer en amont. Derrière le choc, l'écoulement redevient subsonique et couvre la surface sphérique jusqu'à environ 45° , le zéro degré correspondant au pôle de la sphère situé à l'amont sur l'horizontale. Pour un angle d'environ 90° , la couche limite laminaire se sépare via une onde de choc oblique et devient turbulente. Le sillage à l'aval de la sphère engendre un système de perturbations faibles qui donne naissance à une seconde onde de choc.

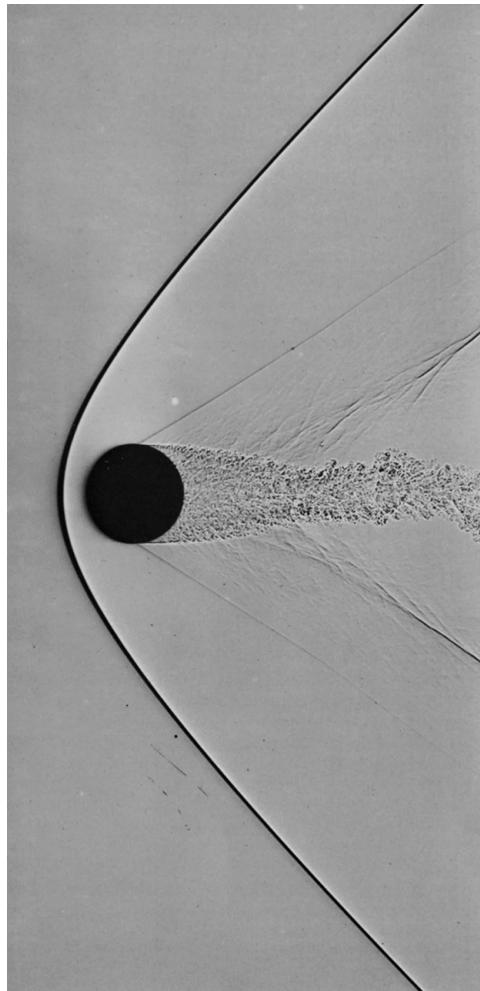


Fig. 8.11 Ecoulement supersonique autour d'une sphère à $M = 1,53$.

8.4 Equations de Navier-Stokes

Nous allons établir les équations de Navier-Stokes successivement pour le fluide newtonien compressible, ensuite pour le fluide newtonien incompressible.

8.4.1 Equations de Navier-Stokes pour un gaz idéal à chaleurs massiques constantes

Ecrivons les équations de Navier-Stokes pour le cas particulier du gaz idéal compressible à chaleurs massiques constantes.

A l'aide de la relation (6.143), l'équation de l'énergie (4.23) peut se mettre sous la forme

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (8.5)$$

L'expression $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}$ peut s'écrire successivement

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sigma_{ij} d_{ij} = -p \delta_{ij} d_{ij} + \lambda d_{kk} d_{ij} \delta_{ij} + 2\mu(d_{ij})^2 \\ &= -p d_{ii} + \lambda(d_{ii})^2 + 2\mu(d_{ij})^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -p \operatorname{tr} \mathbf{d} + \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{d})^2 + 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}). \quad (8.6)$$

Par l'équation de conservation de la masse (3.41), on a l'égalité

$$\operatorname{tr} \mathbf{d} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Dès lors, l'équation (8.5) devient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{d})^2 + 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (8.7)$$

En utilisant l'équation d'état (6.136), on transforme (8.7) qui devient

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \rho R \frac{DT}{Dt} + \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{d})^2 + 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r. \quad (8.8)$$

Afin d'obtenir l'ensemble des équations, nous utiliserons l'équation de conservation de la masse (3.41). On insère l'équation de comportement (6.14) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.96). Enfin, on modifie l'équation de l'énergie (8.8) en tenant compte de la loi de Fourier (6.123) et de la relation (6.141). Le système d'équations de Navier-Stokes s'écrit sous forme indiquée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.9)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda d_{kk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu d_{ij}) + \rho b_i \quad (8.10)$$

$$\rho c_p \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{Dp}{Dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + 2\mu d_{ij} d_{ij} + r \quad (8.11)$$

$$p = \rho RT . \quad (8.12)$$

Les équations (8.10) et (8.11) se simplifient lorsque λ , μ et k sont des constantes. En outre, faisons l'*hypothèse de Stokes*

$$3\lambda + 2\mu = 0 . \quad (8.13)$$

Cette relation a été établie sur base d'un raisonnement tiré de la théorie cinétique des gaz. Quoique cette hypothèse soit vérifiée pour les gaz monoatomiques, elle n'est plus valable dans le cas des gaz polyatomiques.

Les équations (8.10) et (8.11) deviennent alors

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (d_{kk}) + \rho b_i \quad (8.14)$$

$$\rho c_p \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{Dp}{Dt} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{2}{3} \mu (d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij} d_{ij} + r . \quad (8.15)$$

8.4.2 Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en écoulement isotherme

Comme l'écoulement est isotherme, $T = \text{cste}$, le principe de conservation de l'énergie est trivialement respecté. Tenant compte de l'incompressibilité du fluide ($\rho = \text{cste}$), les équations précédentes se simplifient

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (8.16)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} . \quad (8.17)$$

L'équation (8.17) est une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 2. Elle exprime que l'accélération est produite par l'action du gradient de pression, des forces visqueuses et des forces à distance.

8.5 Forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes

8.5.1 Cas du fluide compressible

Désignons par L , U , p_0 , ρ_0 , T_0 les grandeurs de référence : longueur, vitesse, pression, masse volumique et température, caractéristiques de l'écoulement à

étudier. L'échelle des temps est L/U , celle des forces massiques U^2/L . Introduisons ensuite des variables et des fonctions sans dimensions (notées par des primes) par les relations

$$\begin{aligned} x_i &= Lx'_i & t &= \frac{L}{U} t' & v_i &= Uv'_i & p &= p_0 p' \\ \rho &= \rho_0 \rho' & T &= T_0 T' & b_i &= U^2 \frac{b'_i}{L}. \end{aligned}$$

On fera l'hypothèse que $r = 0$.

On réécrit les équations (8.9), (8.12), (8.14) et (8.15) avec ces grandeurs sans dimensions, y compris les grandeurs constantes caractéristiques μ_0, k_0 estimées à la température T_0 , ainsi que c_p, γ, R

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + v'_j \frac{\partial \rho'}{\partial x'_j} + \rho' \frac{\partial v'_j}{\partial x'_j} = 0 \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} \\ = -\frac{p_0}{\rho_0 U^2} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{\mu_0}{UL \rho_0} \frac{1}{\rho'} \left(\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x'_j \partial x'_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x'_i} (d'_{kk}) \right) + b'_i \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left(\frac{DT'}{Dt'} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T'}{p'} \frac{Dp'}{Dt'} \right) \\ = \frac{k_0}{\mu_0 c_p} \frac{\mu_0}{\rho_0 UL} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'_j \partial x'_j} - \frac{\mu_0}{\rho_0 UL} \frac{U^2}{c_p T_0} \left(\frac{2}{3} (d'_{kk})^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$p' = \rho' T', \quad (8.21)$$

si on pose $p_0 = \rho_0 R T_0$.

Dans les relations (8.18)-(8.20) apparaissent trois nombres sans dimensions

- le *nombre de Reynolds*

$$\text{Re} = \rho_0 \frac{UL}{\mu_0} = \frac{UL}{\nu_0};$$

- le *nombre de Prandtl*

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu_0}{k_0} = \frac{\nu_0}{\Lambda};$$

- le *nombre de Mach*

$$M = \frac{U}{a_0},$$

qui apparaît dans le groupement

$$\frac{p_0}{\rho_0 U^2} = \frac{RT_0}{U^2} = \frac{a_0^2}{\gamma U^2} = \frac{1}{\gamma M^2}.$$

Le dénominateur du nombre de Mach a_0 est la vitesse du son caractéristique (éq. (6.153)). Le coefficient Λ défini par la relation

$$\Lambda = \frac{k_0}{\rho_0 c_p}$$

apparaît dans le nombre de Prandtl et s'appelle la *diffusivité thermique*.

Le nombre de Reynolds exprime l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité. Il prend ses valeurs depuis zéro jusqu'à plusieurs millions. Pour $Re = 0$, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes. Elles régissent la dynamique des écoulements lents ou rampants, et laminaires. Pour $Re \sim 10^6$, l'écoulement est turbulent. Le nombre de Prandtl permet de comparer les phénomènes de diffusion visqueuse et thermique ($Pr = 0,71$ pour l'air ambiant). Le nombre de Mach caractérise les effets de compressibilité. Sa valeur est $M = 0$ pour le fluide incompressible. Il est compris entre $0 < M < 1$ pour les écoulements subsoniques et $M > 1$ pour les écoulements supersoniques.

Les équations de Navier-Stokes prennent la forme réduite

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho' \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad (8.22)$$

$$\rho' \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\frac{1}{\gamma M^2} \nabla p' + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 \mathbf{v}' + \frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}') \right) + \rho' \mathbf{b}' \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left(\frac{DT'}{Dt'} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T'}{\rho'} \frac{Dp'}{Dt'} \right) \\ = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T' - (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \left(\frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v}')^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$p' = \rho' T'. \quad (8.25)$$

Si on fixe les coordonnées x_i , le temps t et tous les paramètres M , Pr , γ , et si l'on fait tendre $Re \rightarrow \infty$, alors le système (8.22)-(8.25) conduit au système des équations d'Euler des fluides parfaits. Le passage à la limite du nombre de Mach vers zéro, tous les autres paramètres maintenus fixés, devrait conduire aux équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible.

Cependant, l'examen du système (8.22)-(8.25) montre qu'il n'en est rien et que le terme $-(1/\gamma M^2) \nabla p$ devient dominant. Ce comportement est dû au choix de la pression adimensionnelle $p' = p/p_0$, qui a été fait en considérant la pression comme variable thermodynamique. L'équation du mouvement révèle que la pression est aussi une variable dynamique. Le choix d'une pression adimensionnelle par la relation

$$p^* = \frac{p - p_0}{\rho_0 U^2}$$

est plus naturel.

Dans ce cas, l'équation (8.23) devient

$$\rho' \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 \mathbf{v}' + \frac{1}{3} \nabla (\text{div } \mathbf{v}') \right) + \rho' \mathbf{b}'. \quad (8.26)$$

Le passage à la limite du nombre de Mach vers zéro fournit les relations

$$\frac{D\rho'}{Dt'} + \rho' \text{div } \mathbf{v}' = 0 \quad (8.27)$$

$$\rho' \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 \mathbf{v}' + \frac{1}{3} \nabla (\text{div } \mathbf{v}') \right) + \rho' \mathbf{b}' \quad (8.28)$$

$$\rho' \frac{DT'}{Dt'} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla^2 T' \quad (8.29)$$

$$\rho' T' = 1 \quad (8.30)$$

qui sont relatives à un *fluide incompressible*, mais susceptible de dilatation thermique.

Pour obtenir (8.29), on calcule

$$\frac{Dp'}{Dt'} = \frac{1}{p_0} \frac{Dp}{Dt'} = \frac{\rho_0 U^2}{p_0} \frac{Dp^*}{Dt'} = \frac{U^2}{RT_0} \frac{Dp^*}{Dt'} = \gamma M^2 \frac{Dp^*}{Dt'}. \quad$$

L'équation (8.30) s'obtient par l'évaluation suivante :

$$p' = \rho' T' = \frac{p}{p_0} = 1 + p^* \frac{U^2}{RT_0} = 1 + \gamma M^2 p^*. \quad$$

Si on suppose de plus qu'à la paroi du domaine, $T' = 1$, alors les équations (8.29) et (8.30) ainsi que la condition aux limites sur T sont satisfaites par

$$\rho' = 1 \quad (8.31)$$

$$T' = 1. \quad (8.32)$$

Les équations (8.27) et (8.28) se réduisent par conséquent dans ce cas aux équations d'un écoulement incompressible isotherme.

8.5.2 Cas du fluide incompressible en écoulement isotherme

Dans un premier cas, nous allons examiner le point de vue de l'aérodynamique. On fait l'hypothèse que la force de volume est celle de gravité, $\mathbf{b} = \mathbf{g}$. On prendra les mêmes échelles de temps, de longueur et de vitesse qu'au paragraphe précédent. Pour la pression, on pose

$$p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

et pour la force de gravité, on introduit

$$\mathbf{g}' = \frac{\mathbf{g}}{g},$$

où $g = \|\mathbf{g}\|$ est l'accélération de la pesanteur. L'équation (8.17) sous forme réduite devient

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}' + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{g}'. \quad (8.33)$$

Il apparaît une quantité sans dimensions, le *nombre de Froude*

$$\text{Fr} = \frac{U^2}{Lg}.$$

Ce nombre permet de comparer les forces d'inertie aux forces de gravité.

Dans un second cas, on va mettre en œuvre le point de vue des rhéologistes pour lesquels les écoulements présentent une physique dominée par les effets visqueux. Si on reprend l'équation (8.17) mais en normalisant la forme réduite du temps et de la pression par la viscosité

$$t' = \frac{\nu t}{L^2} \quad \text{et} \quad p' = \frac{p - p_0}{\frac{\mu U}{L}},$$

la *forme réduite des équations de Navier-Stokes* pour le fluide incompressible s'écrit

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + \text{Re} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \nabla^2 v'_i + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \mathbf{g}'. \quad (8.34)$$

Les équations (8.33) et (8.34) sont différentes parce que la normalisation du temps se fait d'une part par le temps lié à l'advection (terme d'inertie) L/U et d'autre part, par le temps caractéristique de la diffusion moléculaire L^2/ν .

Par conséquent, la forme limite des équations de Navier-Stokes s'obtient par (8.33) lorsque $\text{Re} \rightarrow \infty$

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Fr}} \mathbf{g}'. \quad (8.35)$$

Ce sont les équations (adimensionnelles) d'Euler. La version dimensionnelle s'écrit

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (8.36)$$

Par contre, lorsque $\text{Re} \rightarrow 0$, l'équation (8.34) se simplifie pour donner

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{v}'. \quad (8.37)$$

Ce sont les *équations (adimensionnelles) de Stokes*. Ces équations sont linéaires, à la différence des équations de Navier-Stokes qui sont non linéaires. Sous forme dimensionnelle, on les écrit

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (8.38)$$

Rappelons que la viscosité cinétique de l'eau est $\nu_{eau} = 10^{-6} m^2 s^{-1}$. Donc si U et L sont chacun de l'ordre de l'unité, le nombre de Reynolds sera $O(10^6)$. Cette valeur est typique de la turbulence, un sujet qui mériterait à lui seul une monographie complète. Nous renvoyons le lecteur à la littérature spécialisée [11, 16, 50, 64].

8.6 Conditions initiales et aux limites

8.6.1 Fluide visqueux

Le fluide visqueux en contact avec une paroi rigide adhère à cette paroi suite aux effets de la viscosité. Il y a donc lieu d'écrire la condition d'adhérence :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}} = \mathbf{v}_{\text{paroi}} . \quad (8.39)$$

D'autre part, lorsque le fluide est en contact avec un milieu gazeux, on suppose que les forces de contact s'équilibrent de part et d'autre de la surface de contact et on écrit la relation

$$n_i \sigma_{ij}^{\text{fluide}} = n_i \sigma_{ij}^{\text{gaz}} .$$

Si le gaz n'est pas visqueux, il vient

$$n_i \sigma_{ij}^{\text{fluide}} = -n_j p^{\text{gaz}} . \quad (8.40)$$

En projetant (8.40) sur la normale à l'interface, on obtient

$$n_i n_j \sigma_{ij}^{\text{fluide}} = -n_j p^{\text{gaz}} . \quad (8.41)$$

Pour la composante tangentielle, il vient :

$$n_i \tau_j \sigma_{ij}^{\text{fluide}} = -n_j \tau_j p^{\text{gaz}} = 0 , \quad (8.42)$$

puisque $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $\boldsymbol{\tau}$ désignant le vecteur unitaire tangent à la surface de contact.

Les relations (8.41) et (8.42) expriment les conditions dites de « surface libre ». Elles impliquent qu'on connaisse la forme de cette surface pour pouvoir être appliquées. Or la forme de la surface est elle-même une partie de la solution du problème à résoudre. On conçoit donc que les problèmes à surface libre constituent une des grandes difficultés de la mécanique des fluides, parce qu'ils sont intrinsèquement non linéaires.

Pour certains fluides, la condition (8.41) doit être complétée pour tenir compte de la tension superficielle. Il vient alors

$$n_i n_j \sigma_{ij}^{\text{fluide}} = -p^{\text{gaz}} + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \quad (8.43)$$

expression dans laquelle R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface et σ le coefficient de tension superficielle liquide-gaz exprimé en N/m .

Dans la pratique, on limite généralement l'étude à une partie de la zone occupée par le fluide. Dans ce cas, il faut ajouter des conditions sur les sections d'entrée, dans lesquelles on impose usuellement le vecteur vitesse, et sur les sections de sortie, pour lesquelles on impose usuellement les forces de contact qu'on suppose nulles dans la plupart des cas. Ceci correspond à une situation où on laisse sortir le fluide à sa vitesse propre.

Dans le cas d'un problème transitoire, les conditions initiales sont les vitesses qu'on prend souvent nulles au démarrage.

8.6.2 Fluides parfaits

Comme la viscosité ne joue pas de rôle ici, le fluide peut glisser à sa vitesse propre le long d'une paroi. La condition d'adhérence ne s'applique plus. On impose que la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi avec laquelle il est en contact, est nulle. Dès lors, la condition de glissement s'écrit :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{\text{paroi}} \cdot \mathbf{n}. \quad (8.44)$$

Similairement, on imposera la valeur de la composante normale de la vitesse du fluide sur toute section d'entrée ainsi que la pression sur toute section de sortie.

Pour les écoulements transitoires, on procédera comme dans le cas des fluides visqueux.

Enfin, en aérodynamique (externe, par exemple, pour l'écoulement autour d'un profil), on trouve très souvent des conditions à imposer sur une frontière non matérielle (située à distance finie ou non). C'est le cas par exemple d'un obstacle fini placé dans un écoulement non confiné. On impose alors les conditions d'un écoulement uniforme donné à l'infini.

8.7 Solution exactes des équations de Navier-Stokes

8.7.1 Ecoulements plans stationnaires

Dans cette section, nous allons examiner des solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour des écoulements plans stationnaires.

Ecoulement plan de Couette d'un fluide incompressible

On considère l'écoulement plan, stationnaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux parois parallèles.

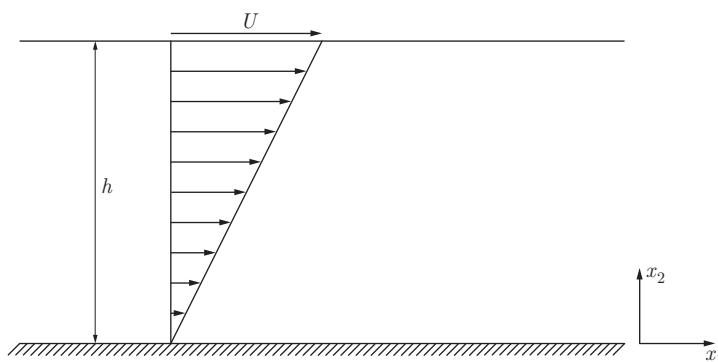


Fig. 8.12 Ecoulement plan de Couette

La figure 8.12 montre la configuration géométrique du domaine. On observe que la paroi inférieure est fixe tandis que la paroi supérieure se déplace dans son propre plan à la vitesse constante donnée U dans la direction x_1 .

Puisque l'écoulement est plan, le vecteur \mathbf{v} se réduit à deux composantes telles que $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Nous supposerons que l'écoulement est développé, c'est-à-dire que les effets transitoires ou d'entrée dans la canalisation sont négligeables. Dès lors, on peut estimer que v_1 sera une fonction uniquement de x_2 . La condition d'incompressibilité (8.16) devient

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (8.45)$$

indiquant que v_2 n'est pas une fonction de x_2 . Ce sera donc une fonction de x_1 . Cependant comme sur les deux parois, v_2 s'annule pour tous les x_1 , on conclut que $v_2 = 0$ partout. Nous écrivons l'équation bidimensionnelle de Navier-Stokes (8.17) pour la composante de vitesse v_1

$$\rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \Delta v_1 + \rho b_1. \quad (8.46)$$

Comme la force de gravité est orientée suivant la direction négative de l'axe x_2 , $b_1 = 0$. De plus le problème est stationnaire, donc $\partial v_1 / \partial t = 0$. Le terme $v_1 \partial v_1 / \partial x_1$ est nul vu que $v_1 = v_1(x_2)$. Enfin $v_2 \partial v_1 / \partial x_2$ est nul également puisque $v_2 = 0$. On peut supposer que la composante horizontale du gradient de pression est nul puisque l'écoulement est forcé de manière cinématique par le mouvement de la paroi supérieure. Il reste donc

$$\mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = 0. \quad (8.47)$$

Intégrant une fois (8.47), on obtient

$$\mu \frac{dv_1}{dx_2} = C. \quad (8.48)$$

Cette relation montre que la contrainte de cisaillement est constante sur la hauteur du canal. Intégrant encore une fois, il vient

$$v_1 = Ax_2 + B. \quad (8.49)$$

Les conditions aux limites d'adhérence

$$v_1(x_2 = 0) = 0, v_1(x_2 = h) = U \quad (8.50)$$

permettent de déterminer les constantes d'intégration ; on obtient le profil de vitesse linéaire

$$v_1 = \frac{Ux_2}{h}. \quad (8.51)$$

La contrainte de cisaillement (6.16) obtenue par (8.51) est une valeur constante

$$\sigma_{12} = \mu \frac{dv_1}{dx_2} = \mu \frac{U}{h}. \quad (8.52)$$

Si on examine la seconde équation de Navier-Stokes dans la direction x_2 , on a

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g, \quad (8.53)$$

avec g l'accélération de la gravité. Par intégration de cette relation et en tenant compte de l'indépendance de p par rapport à x_1 , on a

$$p = -\rho g x_2 + C. \quad (8.54)$$

Comme la pression dans un fluide incompressible est connue à une constante près, nous fixons celle-ci en imposant $p(x_2 = 0) = p_0 = C$. La pression est en équilibre hydrostatique

$$p = p_0 - \rho g x_2. \quad (8.55)$$

Ecoulement plan de Poiseuille d'un fluide incompressible

On considère l'écoulement plan, stationnaire, d'un fluide visqueux incompressible dans un canal composé de deux parois parallèles fixes. La figure 8.13 montre la configuration géométrique du domaine. Dans ce cas, un gradient de pression longitudinal, c-à-d. dans la direction x_1 , est établi. On suppose que l'écoulement est développé et que les particules de fluide se meuvent sur des trajectoires parallèles aux parois. Des raisonnements identiques à ceux tenus pour l'écoulement de Couette permettent d'écrire $v_1 = v_1(x_2)$, $v_2 = 0$.

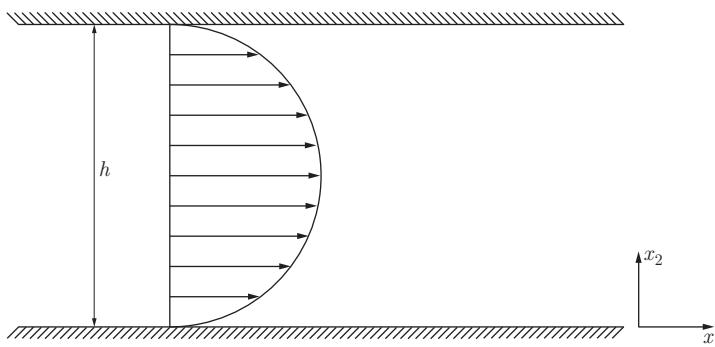


Fig. 8.13 Ecoulement plan de Poiseuille

L'équation dynamique pour la vitesse v_1 est la relation (8.17) qui pour l'écoulement de Poiseuille se réduit à

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}. \quad (8.56)$$

De manière similaire à l'écoulement de Couette, la pression dans la direction verticale est en équilibre hydrostatique

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g. \quad (8.57)$$

En intégrant cette relation, on obtient

$$p = -\rho g x_2 + P(x_1) . \quad (8.58)$$

Le facteur d'intégration $P(x_1)$ est la pression sur la paroi inférieure pour $x_2 = 0$. Le gradient de pression dans la direction x_1 peut s'écrire

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dP}{dx_1} \quad (8.59)$$

comme une fonction de x_1 uniquement. L'équation (8.56) donne

$$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx_1} = C. \quad (8.60)$$

En effet, le premier terme est fonction de x_2 tandis que le second terme est fonction de x_1 . Il s'ensuit que ces deux termes sont égaux à la même constante C . L'intégration de (8.60) donne

$$v_1 = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx_1} \frac{x_2^2}{2} + Ax_2 + B. \quad (8.61)$$

L'imposition des conditions aux limites

$$v_1(x_2 = 0) = v_1(x_2 = h) = 0, \quad (8.62)$$

donne le profil de vitesse parabolique de Poiseuille

$$v_1 = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dP}{dx_1} \frac{x_2}{h} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right). \quad (8.63)$$

Comme dans la canalisation la pression chute linéairement avec la distance x_1 , $dP/dx_1 < 0$ et l'écoulement se fait dans la direction positive de l'axe des x_1 .

La contrainte de cisaillement obtenue à partir de (8.63) est

$$\sigma_{12} = \mu \frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{h}{2} \frac{dP}{dx_1} \left(1 - \frac{2x_2}{h}\right). \quad (8.64)$$

On remarque que le cisaillement (6.16) est nul sur l'axe de symétrie du canal $x_2 = h/2$ et est maximal en valeur absolue sur les deux parois.

On peut calculer le débit-volume à travers la section S de la canalisation. En toute généralité, le débit-volume est défini par la relation

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (8.65)$$

En prenant une surface unitaire selon la direction x_3 , le débit dans le canal plan s'écrit

$$Q = \int_0^h v_1 dx_2 = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dP}{dx_1} = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\Delta P}{L}, \quad (8.66)$$

avec ΔP la différence de pression observée en deux points de même ordonnée x_2 distants de la longueur L dans la direction x_1 . On définit la vitesse moyenne par $Q = v_{moy} h$, d'où il vient

$$v_{moy} = \frac{h^2}{12\mu} \frac{\Delta P}{L}. \quad (8.67)$$

Comme la vitesse maximale v_{max} est atteinte sur l'axe de symétrie de la canalisation en $x_2/h = 1/2$, il résulte que

$$v_{max} = \frac{h^2}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (8.68)$$

et par conséquent

$$v_{moy} = \frac{2}{3} v_{max}. \quad (8.69)$$

Dans le cas où le canal plan est remplacé par une conduite de section circulaire (voir § 8.7.2), on obtient que la vitesse moyenne est égale à la moitié de la vitesse maximale. Ceci montre qu'une fraction plus petite de la section contient la zone de vitesse élevée.

Ecoulement d'un fluide incompressible sur un plan incliné

Soit l'écoulement plan, stationnaire, d'un fluide visqueux newtonien sur un plan incliné qui fait un angle α avec la direction verticale (fig. 8.14).

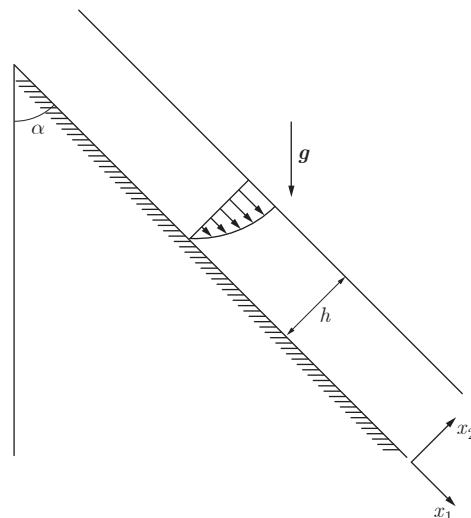


Fig. 8.14 Ecoulement sur un plan incliné.

L'épaisseur de la couche de fluide est uniforme et égale à h . Le fluide est en contact à la surface libre avec l'air ambiant que nous considérerons comme un fluide parfait à la pression atmosphérique p_a . On suppose que l'écoulement dans l'air ambiant n'affecte pas ce qui se passe dans le fluide visqueux. L'écoulement est parallèle puisque les trajectoires des particules fluides sont parallèles au plan incliné. Dès lors, $\mathbf{v} = (v_1, 0, 0)$. Par l'incompressibilité, on obtient

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad (8.70)$$

dont on déduit que $v_1 = v_1(x_2)$. La seule composante du tenseur des contraintes est σ_{12} ou σ_{21} . Comme la pression est uniforme à la surface libre, la pression dans le fluide visqueux ne dépend pas de la direction x_1 , mais dépend de x_2 . Par l'équation du mouvement (3.96) écrite dans la direction x_1 , il vient

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho b_1 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho g \cos \alpha = 0. \quad (8.71)$$

Intégrant cette relation, on a

$$\sigma_{12} = -\rho g x_2 \cos \alpha + C. \quad (8.72)$$

A la surface libre $x_2 = h$, la contrainte de cisaillement doit s'annuler. On obtient

$$\sigma_{12} = \rho g \cos \alpha (h - x_2). \quad (8.73)$$

Comme $\sigma_{12} = \mu dv_1/dx_2$, on peut évaluer la composante v_1 par intégration par rapport à x_2 , en tenant compte de la condition aux limites $v_1(x_2 = 0) = 0$. Le profil de vitesse est donné par la relation

$$v_1 = \frac{\rho g \cos \alpha}{2\mu} x_2 (2h - x_2). \quad (8.74)$$

L'équation de Navier-Stokes relative à la direction x_2 produit la relation

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho b_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g \sin \alpha = 0. \quad (8.75)$$

Intégrant par rapport à x_2 et en tenant compte de la condition à la surface libre $p(x_2 = h) = p_a$, on écrit

$$p = p_a - \rho g \sin \alpha (x_2 - h). \quad (8.76)$$

Le débit-volume par unité de longueur dans la direction x_3 est obtenu par

$$Q = \int_0^h v_1 dx_2 = \frac{\rho g \cos \alpha h^3}{2\mu}. \quad (8.77)$$

Ecoulement plan de Couette d'un fluide compressible

On considère l'écoulement plan, développé et stationnaire d'un fluide visqueux compressible entre deux parois parallèles. On négligera la gravité dans ce problème. La figure 8.15 montre la configuration géométrique du domaine. La paroi inférieure est fixe et la paroi supérieure se déplace dans son propre plan à la vitesse constante donnée U dans la direction x_1 . Comme le fluide compressible a ses propriétés matérielles qui dépendent de la masse volumique et de la température (voir éq. (6.15)), l'équation d'énergie est incorporée dans la modélisation et il nous faut prescrire des conditions aux limites pour la température. A cette fin, la température de la paroi supérieure est fixée à la valeur constante T_0 , tandis que la paroi inférieure est adiabatique, c'est-à-dire $q_2 = -k \partial T / \partial x_2 = 0$. Pour simplifier le problème, nous faisons l'hypothèse qu'aucune propriété matérielle ne dépend de x_1 , x_3 et t . Les inconnues du problème sont telles que

$$\mathbf{v} = (v_1(x_2), v_2(x_2), 0) \quad \rho = \rho(x_2) \quad T = T(x_2). \quad (8.78)$$

L'équation de conservation de la masse (8.9) devient

$$\frac{d(\rho v_2)}{dx_2} = 0. \quad (8.79)$$

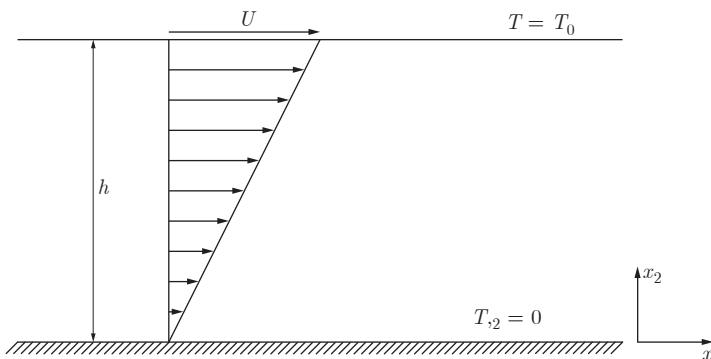


Fig. 8.15 Ecoulement plan de Couette pour un fluide compressible.

Par intégration, ρv_2 est une constante. Comme la composante verticale de vitesse v_2 s'annule sur les deux parois, il en résulte que $v_2 = 0$ partout. Les équations de Navier-Stokes (8.10) deviennent

$$0 = \frac{d}{dx_2} \left(\mu \frac{dv_1}{dx_2} \right), \quad (8.80)$$

$$0 = -\frac{dp}{dx_2}. \quad (8.81)$$

La relation (8.81) montre que la pression est constante dans tout l'écoulement. Par conséquent, on peut supposer que les propriétés matérielles seront fonction

de la température seule, puisque $p = \rho RT = \text{cste}$. L'intégration de (8.80) donne

$$\mu \frac{dv_1}{dx_2} = \sigma_0 \quad (8.82)$$

avec la convention que σ_0 représente une contrainte de cisaillement constante.

Le flux de chaleur a la seule composante q_2 non nulle, étant donné l'hypothèse sur la champ de température. Dans ce cas, l'équation d'énergie (8.11) est

$$0 = \frac{d}{dx_2} \left(k \frac{dT}{dx_2} \right) + \mu \left(\frac{dv_1}{dx_2} \right)^2 = -\frac{dq_2}{dx_2} + \sigma_0 \frac{dv_1}{dx_2}. \quad (8.83)$$

L'intégration de (8.83) fournit

$$-q_2 + \sigma_0 v_1 = C. \quad (8.84)$$

Comme la paroi inférieure fixe ($v_1(x_2 = 0) = 0$) est adiabatique, l'imposition des conditions aux limites à (8.84) donne $C = 0$ et on obtient

$$k \frac{dT}{dx_2} + \sigma_0 v_1 = k \frac{dT}{dx_2} + \mu v_1 \frac{dv_1}{dx_2} = 0. \quad (8.85)$$

Ecrivant (8.85) sous la forme

$$\frac{d}{dx_2} \left(\frac{1}{2} v_1^2 \right) = -\frac{k}{\mu} \frac{dT}{dx_2} \quad (8.86)$$

et en tenant compte des relations $k = k(T)$, $\mu = \mu(T)$, l'intégration depuis un point d'ordonnée x_2 jusqu'à la paroi supérieure donne

$$\frac{1}{2} (U^2 - v_1^2) = - \int_T^{T_0} \frac{k(T')}{\mu(T')} dT'. \quad (8.87)$$

Cette équation nous fournit v_1 en fonction de T ; cependant, comme k et μ sont des fonctions positives de T (sect. 6.8), l'intégrale dans (8.87) est une fonction monotone de T et on peut donc trouver la fonction inverse $T(v_1)$. A l'aide de cette fonction inverse, l'équation (8.82) devient

$$\mu(T(v_1)) dv_1 = \sigma_0 dx_2 \quad (8.88)$$

et par intégration depuis la paroi inférieure où $v_1 = 0$ jusqu'en un point arbitrairement choisi d'ordonnée x_2 , on obtient

$$x_2 = \frac{1}{\sigma_0} \int_0^{v_1} \mu(T(v_1')) dv_1'. \quad (8.89)$$

Cette équation est le profil de vitesse donné sous forme inverse $x_2 = x_2(v_1)$.

Nous allons illustrer cette théorie par les résultats calculés lorsque la viscosité et la conductibilité thermique sont modélisées par des lois de puissance

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad k = k_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n. \quad (8.90)$$

L'exposant n de la loi est obtenu par une approximation polynomiale (au sens des moindres carrés) des données expérimentales dans la gamme des températures impliquées dans le problème considéré. Les quantités de référence μ_0, k_0 sont les valeurs correspondant à la température de référence T_0 de la paroi supérieure. En combinant (8.87) et (8.90), il vient

$$\frac{1}{2} (U^2 - v_1^2) = -\frac{k_0}{\mu_0} \int_T^{T_0} dT' \quad (8.91)$$

et donc

$$T = T_0 + \frac{\mu_0}{2k_0} (U^2 - v_1^2). \quad (8.92)$$

La forme inverse du profil de vitesse est évaluée en insérant (8.90) dans (8.89)

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\mu_0}{\sigma_0} \int_0^{v_1} \left(\frac{T}{T_0} \right)^n dv'_1 \\ &= \frac{\mu_0}{\sigma_0} \int_0^{v_1} \left(1 + \frac{\mu_0}{2k_0 T_0} (U^2 - v'_1)^2 \right)^n dv'_1. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Envisageons deux cas : $n = 0$ est celui des propriétés constantes ; $n = 1$ est proche du comportement du gaz idéal.

Lorsque $n = 0$, la relation (8.93) produit

$$x_2 = \frac{\mu_0}{\sigma_0} v_1. \quad (8.94)$$

En évaluant σ_0 à la paroi supérieure, on retrouve le profil de Couette du fluide incompressible (8.51). Le profil de température (8.92) devient

$$T = T_0 + \frac{\mu_0 U^2}{2k_0} \left(1 - \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \right). \quad (8.95)$$

Le cas $n = 1$ conduit à la forme inverse du profil de vitesse

$$\frac{x_2}{h} = \frac{v_1}{U} \frac{1 + \frac{\mu_0 U^2}{2k_0 T_0} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{v_1}{U} \right)^2 \right)}{1 + \frac{\mu_0 U^2}{3k_0 T_0}}. \quad (8.96)$$

La relation (8.96) n'est pas inversible pour obtenir la solution explicite de v_1 . On ne peut donc pas écrire la forme explicite de la température qui satisfait toujours l'équation (8.92).

8.7.2 Ecoulements axysymétriques stationnaires

Nous considérons dans cette section des solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour des écoulements stationnaires dans des géométries à symétrie de révolution. Nous intégrerons les équations de Navier-Stokes exprimées dans un système de coordonnées cylindriques. Le vecteur vitesse a pour composantes v_r, v_θ, v_z que nous nommerons vitesse radiale, azimutale et axiale, respectivement.

Ecoulement de Couette circulaire

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible entre deux cylindres concentriques de longueur axiale supposée infinie. On note R_1 et R_2 les rayons des cylindres intérieur et extérieur, respectivement, et ω_1, ω_2 leur vitesse angulaire de rotation respective, figure 8.16. On demande de calculer la vitesse azimutale v_θ . Cet écoulement est connu sous le nom d'écoulement de Couette circulaire. On négligera les effets des forces de volume.

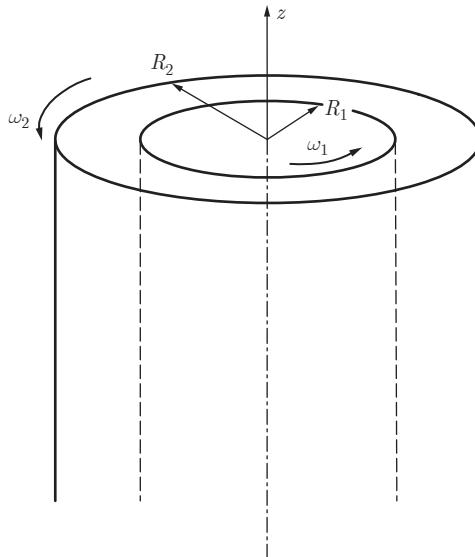


Fig. 8.16 Ecoulement de Couette circulaire.

L'écoulement n'a pas de vitesse axiale puisqu'il n'y a pas de gradient de pression dans cette direction. De plus, comme le problème possède une symétrie de révolution, il ne dépend pas de la coordonnée azimutale et donc $\partial(\bullet)/\partial\theta = 0$. Les deux composantes de vitesse v_r, v_θ , stationnaires et donc indépendantes du temps, sont fonction uniquement de la coordonnée radiale r , soit $v_r = v_r(r), v_\theta = v_\theta(r)$. Comme le fluide adhère à la paroi, les conditions aux limites sont

$$v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0, \quad v_\theta(R_1) = \omega_1 R_1, \quad v_\theta(R_2) = \omega_2 R_2 . \quad (8.97)$$

Avec les hypothèses et les déductions sur le profil de vitesse, l'équation de continuité (A.31) devient

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r v_r) = 0 . \quad (8.98)$$

En tenant compte des conditions aux limites (8.97) nulles pour v_r , la solution donne

$$v_r = 0 . \quad (8.99)$$

Les équations de Navier-Stokes (A.32)-(A.33) dans ce cas se réduisent à

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}, \quad (8.100)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = 0. \quad (8.101)$$

La solution pour la composante v_θ est de la forme $v_\theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n$. On trouve facilement que $n = \pm 1$. Par l'imposition des conditions aux limites, il vient

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (8.102)$$

avec des définitions évidentes pour les constantes A et B . Le premier terme du membre de droite correspond à une rotation d'ensemble du fluide autour de l'axe central. Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, les deux cylindres tournent à la même vitesse de rotation ω ; la vitesse devient $v_\theta = \omega r$, ce qui montre que le fluide effectue une rotation de corps solide autour de l'axe. Le second terme du second membre correspond à une déformation des particules au cours du temps. Si $R_2 \rightarrow \infty$ et $\omega_2 = 0$, alors on est dans le cas d'un cylindre dans un fluide s'étendant à l'infini. La vitesse $v_\theta = \omega_1 R_1^2 / r$ donne des lignes de courant circulaires autour du cylindre et la distribution de vitesse est irrotationnelle, c-à-d. $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.

Sur une facette de normale radiale s'exerce une contrainte tangentielle de cisaillement $\sigma_{\theta r}$ qui s'exprime par (A.5)

$$\sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right). \quad (8.103)$$

En combinant (8.102) et (8.103), on obtient

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{2B\mu}{r^2}. \quad (8.104)$$

Nous allons calculer le couple de frottement visqueux C exercé sur le cylindre intérieur par unité de longueur axiale. Ce couple est égal au produit de la composante $\sigma_{\theta r}$ évaluée en $r = R_1$ et de la surface $2\pi R_1$ sur laquelle agit cette contrainte, multiplié par le bras de levier R_1 de la distance entre l'axe et le point d'application de la force. On a

$$C = -2\pi R_1^2 \frac{2B\mu}{R_1^2} = 4\pi\mu \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (8.105)$$

Cette dernière relation indique que nous pouvons mesurer la viscosité μ d'un fluide dans un viscosimètre de Couette où le moteur d' entraînement impose le couple sur l'un des cylindres et on mesure la vitesse de rotation résultante sur l'autre.

Ecoulement de Poiseuille circulaire dans une conduite cylindrique

L'écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de rayon R est soumis à l'action d'un gradient de pression imposé dans la direction z (fig. 8.17). L'écoulement est stationnaire. A partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, montrons d'abord que la seule composante de vitesse non nulle est v_z .

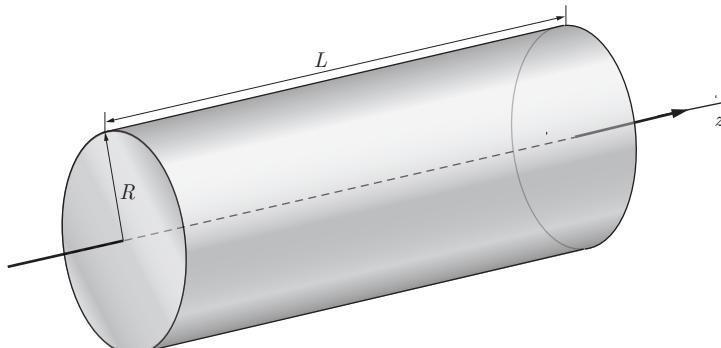


Fig. 8.17 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de section circulaire.

Etant donné les hypothèses d'écoulement stationnaire et de symétrie de révolution, les deux seules composantes de vitesse v_r, v_z sont fonction de r uniquement. L'équation de continuité (A.31) donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 . \quad (8.106)$$

Son intégration fournit

$$r v_r = f(z) .$$

Mais comme $v_r = 0$ à la paroi $r = R$, on conclut que $f(z) = 0$ et donc que v_r s'annule dans tout l'écoulement. L'équation de Navier-Stokes pour la composante radiale de vitesse (A.32) se réduit à $\partial p / \partial r = 0$. La pression ne dépend pas de r ; elle ne dépend que de z . L'équation relative à la composante de vitesse v_z (A.34) donne

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) .$$

Dans le membre de gauche, le terme ne dépend que de z ; à droite, la dépendance est en r . Donc ces deux termes sont égaux à une constante. Par intégration, on

obtient

$$v_z = \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{1}{\mu} \left(\frac{r^2}{4} + A \ln r + B \right) .$$

La vitesse doit être finie sur l'axe $r = 0$. Ceci induit $A \equiv 0$. En tenant compte de la condition $v_z(R) = 0$, on a

$$v_z = - \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) .$$

Dans l'écoulement de Poiseuille, le profil de vitesse est parabolique. La vitesse maximale au centre vaut

$$v_{max} = - \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} . \quad (8.107)$$

Le débit-volume est obtenu par intégration sur la section de la conduite. On a

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z(r) r dr = - \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} = \frac{\pi R^2 v_{max}}{2} . \quad (8.108)$$

La vitesse débitante obtenue comme le rapport du débit à l'aire S de la section est

$$v_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{v_{max}}{2} . \quad (8.109)$$

La vitesse maximale est donc égale à deux fois la vitesse débitante. La contrainte de cisaillement à la paroi que nous noterons τ_p , est donnée par la composante σ_{zr} évaluée en $r = R$

$$\tau_p = -\mu \frac{dv_z}{dr} |_{r=R} = - \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{R}{2} = \frac{2\mu v_{max}}{R} = \frac{4\mu v_{moy}}{R} . \quad (8.110)$$

Le changement de signe entre τ_p et σ_{zr} est la conséquence du fait que τ_p représente l'effort de cisaillement exercé par le fluide sur la paroi. Le coefficient de frottement est défini par le rapport de la contrainte de paroi à la pression dynamique moyenne

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{\rho v_{moy}^2}{2}} = \frac{8\mu}{\rho R v_{moy}} = \frac{8\nu}{R v_{moy}} = \frac{16}{Re_D} , \quad (8.111)$$

avec Re_D le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante et le diamètre de la section. Il est d'usage de définir le coefficient des pertes de charges λ par la relation

$$- \left(\frac{dp}{dz} \right) = \frac{\rho v_{moy}^2}{2} \frac{\lambda}{D} . \quad (8.112)$$

Il vient

$$\lambda = 4C_f = \frac{64}{Re_D} . \quad (8.113)$$

8.7.3 Ecoulements plans instationnaires

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux écoulements plans dépendants du temps. Cette situation conduit à des équations aux dérivées partielles qui ont pour variables indépendantes l'espace et le temps. Afin d'établir une solution analytique du problème, on effectuera dans certains cas un changement de variable pour obtenir une équation différentielle ordinaire plus simple à résoudre.

Ecoulement transitoire dans un espace semi-infini

Soit un demi-espace ($x_2 \geq 0$) occupé par un fluide visqueux newtonien incompressible, au repos pour $t < 0$. Au temps $t = 0$, le plan rigide qui limite le demi-espace est mis instantanément en mouvement à la vitesse constante U dans la direction positive de l'axe x_1 . Le mouvement est plan tel que $v_3 = 0$. Les conditions initiales et aux limites sont données par

$$t < 0, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad \forall x_1, x_2 \quad (8.114)$$

$$t \geq 0, \quad v_1 = U, v_2 = 0, \text{ pour } x_2 = 0, \quad (8.115)$$

$$v_1 = v_2 = 0, \text{ pour } x_2 = \infty. \quad (8.116)$$

On suppose que v_1 et v_2 sont fonctions de x_2 et de t

$$v_1 = v_1(x_2, t), \quad v_2 = v_2(x_2, t), \quad (8.117)$$

et que la pression p est fonction de x_2 seulement (il n'y a pas de gradient de pression dans la direction horizontale ; l'écoulement est engendré par le défilement de la paroi mobile). La conservation de la masse devient

$$\frac{\partial v_2(x_2, t)}{\partial x_2} = 0. \quad (8.118)$$

La composante v_2 dépend uniquement du temps, et par les conditions (8.115), elle est identiquement nulle pour tout t . Les équations de Navier-Stokes deviennent

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \quad (8.119)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \quad (8.120)$$

La pression p est une constante.

On peut, si on le désire, incorporer l'effet de la gravité dans le calcul de la pression, en écrivant

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g x_2. \quad (8.121)$$

L'intégration de cette relation conduit au calcul de la pression hydrostatique où la pression en un point est celle du poids de la colonne de fluide située au-dessus de cette position. La pression hydrostatique comme son nom l'indique, ne participe pas à la dynamique de l'écoulement.

L'équation du mouvement (8.119) est une équation de diffusion du type « équation de la chaleur ». On peut transformer cette équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire par un changement de variables qu'on peut obtenir par analyse dimensionnelle. Comme le problème ne possède pas d'autre échelle spatiale que la variable x_2 ni d'autre échelle de temps que t lui-même, on les combine pour former le groupement adimensionnel

$$\eta = \frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} . \quad (8.122)$$

Ceci permet d'obtenir une équation différentielle ordinaire dont la solution est fonction de η . Elle est appelée solution autosimilaire parce que le profil de vitesse par rapport à la variable x_2 est semblable en tout temps t .

Posant

$$v_1 = U f(\eta) , \quad (8.123)$$

la relation (8.119) devient

$$f'' + 2\eta f' = 0 , \quad (8.124)$$

avec les conditions

$$\eta = 0, f = 1; \quad \eta = \infty, f = 0 . \quad (8.125)$$

Intégrant (8.124), on obtient

$$f = A \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + B . \quad (8.126)$$

En tenant compte des conditions (8.125), on a pour $\eta = 0, B = 1$ et pour $\eta = \infty, A = -2/\sqrt{\pi}$ où on a utilisé la fonction d'erreur $\text{erf}(x)$ définie par

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau , \quad (8.127)$$

et telle que $\text{erf}(\infty) = 1$. On a donc

$$f = 1 - \text{erf } \eta . \quad (8.128)$$

La vitesse du fluide pour $t > 0$ est

$$v_1 = U [1 - \text{erf} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} \right)] . \quad (8.129)$$

Le profil de vitesse v_1/U en fonction de η est donné à la figure 8.18. Pour t fixé, la variable η est proportionnelle à x_2 . Dès lors, on peut déduire le profil de vitesse à tout instant en fonction de la distance à la paroi. Une question intéressante consiste à savoir quelle est la profondeur de pénétration du mouvement du plan dans le milieu semi-infini. Plus précisément, pour t fixé, quelle est la distance au plan à laquelle la vitesse atteint par exemple un pour cent de la valeur de U ? Par examen des valeurs de erf , la fonction $1 - \text{erf}$ prend la valeur 0,01 pour $\eta \sim 2$. La profondeur de pénétration δ ainsi définie est donnée par

$$\eta_\delta = \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \simeq 2, \quad \delta \simeq 4\sqrt{\nu t} . \quad (8.130)$$

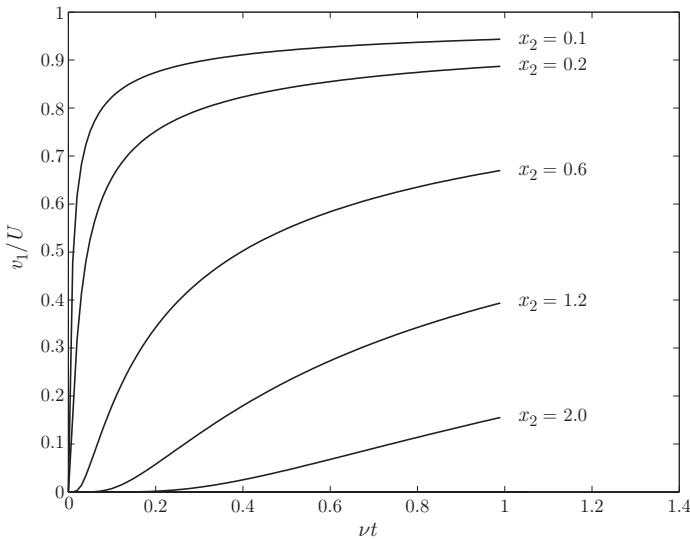


Fig. 8.18 Ecoulement transitoire dans un demi-espace infini.

Elle est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité cinématique et du temps. Ainsi, si la viscosité est très petite, le fluide « colle » moins à la paroi et son effet est moindre. Si t tend vers l'infini, la vitesse en chaque point du demi-espace tend vers U .

Ecoulement sur un plan oscillant

On considère l'écoulement produit par l'oscillation périodique d'une plaque plane dans son propre plan. L'équation à résoudre (8.119) est toujours applicable et la condition à la paroi s'écrit

$$v_1 = U \cos \omega t \quad \text{pour} \quad x_2 = 0. \quad (8.131)$$

Après des phénomènes transitoires initiaux, la vitesse du fluide devient graduellement une fonction périodique du temps à la même fréquence que celle de la paroi plane. On inspecte cet état de régime périodique. Posons que la solution v_1 est de la forme

$$v_1 = \Re(e^{i\omega t} f(x_2)). \quad (8.132)$$

La combinaison de (8.119) et (8.132) donne

$$i\omega f = \nu \frac{d^2 f}{dx_2^2}$$

dont la seule solution qui reste finie lorsque $x_2 \rightarrow \infty$ est

$$f = A \exp \left(-(1+i)(\omega/2\nu)^{1/2} x_2 \right).$$

L'imposition de la condition aux limites (8.131) établit $A = U$ et la solution devient

$$v_1 = U \exp \left(-(\omega/2\nu)^{1/2} x_2 \right) \cos \left(\omega t - (\omega/2\nu)^{1/2} x_2 \right). \quad (8.133)$$

Le profil de vitesse représente une oscillation harmonique amortie d'amplitude $Ue^{-x_2\sqrt{\omega/2\nu}}$ dans un fluide où une couche à la distance x_2 possède un retard de phase $x_2\sqrt{\omega/2\nu}$ par rapport au mouvement de la paroi. Deux couches de fluide séparées par la distance $2\pi(2\nu/\omega)^{1/2}$ oscillent en phase. Cette distance constitue une estimation de la longueur du mouvement et on la nomme profondeur de pénétration de l'onde visqueuse.

8.8 Ecoulements lents

Dans cette section, considérons tout d'abord les équations de Stokes, valables pour des écoulements très lents que l'on qualifie aussi d'écoulements rampants. Ces écoulements sont dominés par les forces visqueuses qui l'emportent de loin sur l'inertie. Des exemples provenant de la technologie couvrent des domaines aussi divers que les courants de convection dans les fours de fusion du verre, les lubrifiants dans les paliers, l'écoulement des huiles et des boues (quoique ces dernières peuvent présenter un comportement non newtonien prononcé). Dans la nature (qui n'est pas de reste), on trouve la convection thermique dans le magma terrestre, l'écoulement des laves, etc.

Nous supposons que le nombre de Reynolds $Re \ll 1$ et donc que les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes. Comme celles-ci sont linéaires, elles permettent un traitement analytique complet.

En prenant la divergence de l'équation de Stokes (8.38) et en tenant compte du caractère solénoïdal du champ de vitesse, on trouve que

$$\Delta p = 0 . \quad (8.134)$$

La pression est donc une fonction harmonique pour un écoulement plan.

En prenant le rotationnel de l'équation de Stokes, on obtient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} , \quad (8.135)$$

où on a introduit la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, éq. (2.188). Dans le cas stationnaire, chaque composante de la vorticité est aussi une fonction harmonique.

8.8.1 Ecoulements rampants plans

Soit un écoulement plan pour lequel on a

$$\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t), 0); \quad p = p(x_1, x_2, t) . \quad (8.136)$$

Dans un problème bidimensionnel, la contrainte d'incompressibilité (8.16) est automatiquement satisfaite par l'introduction de la fonction de courant ψ telle que

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} . \quad (8.137)$$

Comme la vorticité se réduit à une seule composante $\omega = (0, 0, \omega)$, il vient

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\Delta\psi , \quad (8.138)$$

et la relation (8.135) devient

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nu \Delta \Delta\psi . \quad (8.139)$$

Pour un problème stationnaire, on aura

$$\Delta \Delta\psi = 0 , \quad (8.140)$$

indiquant que la fonction de courant est une fonction biharmonique.

En coordonnées polaires (r, θ) , la conservation de la masse devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 . \quad (8.141)$$

Il existe aussi une fonction de courant ψ telle que

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (8.142)$$

Ecoulement dans un coin

Soit l'écoulement dans un coin présenté à la figure 8.19. La paroi inférieure est fixe tandis que la paroi inclinée d'un angle θ_0 est en mouvement de translation uniforme à la vitesse constante U dans la direction x_1 . Près de l'origine, les gradients de vitesse sont élevés; cependant, on s'attend à ce que les forces visqueuses soient prépondérantes au voisinage de l'origine. Afin de rendre la formulation du problème stationnaire, nous choisissons le système d'axes avec son origine à l'intersection des deux parois et en mouvement avec la paroi supérieure. Dans ce cas, les conditions aux limites s'écrivent

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad (8.143)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \theta = \theta_0 . \quad (8.144)$$

La forme des conditions aux limites suggère qu'on puisse écrire ψ sous la forme suivante

$$\psi = r f(\theta) . \quad (8.145)$$

En substituant (8.145) dans l'équation bifurmonique (8.140), on trouve la relation

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f \right) = 0 \quad (8.146)$$

dont la solution est

$$f(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + C\theta \sin \theta + D\theta \cos \theta . \quad (8.147)$$

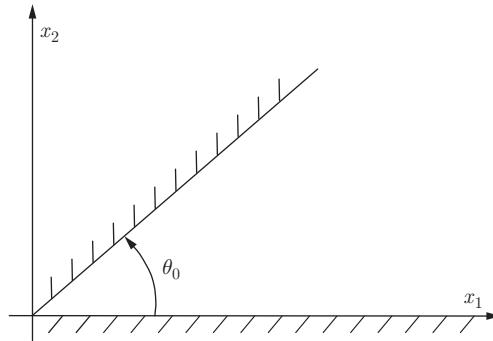


Fig. 8.19 Ecoulement dans un coin d'angle d'ouverture θ_0

(Pour mémoire, si H est une fonction harmonique, θH est une fonction bi-harmonique.) L'imposition des conditions aux limites (8.143)-(8.144) permet d'évaluer les constantes et on trouve

$$A, B, C, D = \left(-\theta_0^2, 0, \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0, \sin^2 \theta_0\right) \frac{U}{\theta_0^2 - \sin^2 \theta_0}. \quad (8.148)$$

Pour le cas particulier du coin rectangulaire, on a

$$\psi = \frac{rU}{(\frac{\pi}{2})^2 - 1} \left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \theta + \frac{\pi}{2} \theta \sin \theta + \theta \cos \theta \right) \quad (8.149)$$

dont on peut tirer facilement les composantes de vitesse

$$v_r = \frac{U}{(\frac{\pi}{2})^2 - 1} \left(\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) \cos \theta + \frac{\pi}{2} (\sin \theta + \theta \cos \theta) - \theta \cos \theta \right) \quad (8.150)$$

$$v_\theta = -\frac{U}{(\frac{\pi}{2})^2 - 1} \left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \theta + \frac{\pi}{2} \theta \sin \theta + \theta \cos \theta \right). \quad (8.151)$$

On peut examiner *a posteriori* le bien-fondé de l'hypothèse d'écoulement rampant. En effet, les composantes de l'accélération évaluées avec la solution précédente sont proportionnelles à U^2/r avec un facteur qui dépend de θ et qui est de l'ordre de l'unité. Les effets visqueux sont quant à eux, de l'ordre de $\mu U/r^2$. Donc l'hypothèse d'écoulement rampant est satisfaite si $\rho r U / \mu \ll 1$ est réalisée. Ceci est vrai dans une région proche de l'origine telle que $r \ll \nu U$. Plus loin, la solution ne sera plus correcte puisque les forces d'inertie deviennent rapidement du même ordre de grandeur que les forces visqueuses.

8.8.2 Ecoulement parallèle autour d'une sphère

Soit une sphère de rayon R dans un écoulement visqueux dont la vitesse à l'infini amont est U . On supposera l'écoulement très lent de sorte que nous résolvons les équations de Stokes (8.38). Plaçons le système d'axes cartésien de telle sorte que l'axe x_3 soit orienté dans la direction de l'écoulement incident

sur la sphère (fig. 8.20). Les conditions aux limites exprimées en coordonnées sphériques (voir fig. 1.6) sont

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad r = R, \quad (8.152)$$

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_3 \quad \text{en} \quad r = \infty. \quad (8.153)$$

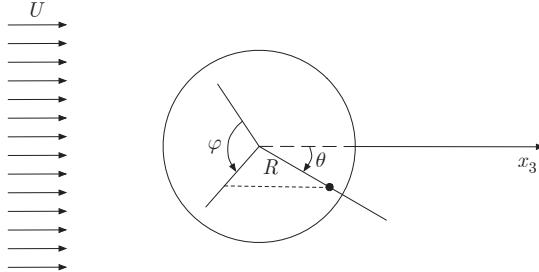


Fig. 8.20 Ecoulement autour d'une sphère.

Le problème ainsi posé possède une symétrie par rapport à l'axe Ox_3 et donc par rapport à la longitude. Par conséquent, $\partial(\bullet)/\partial\varphi \equiv 0$. De même, $v_\varphi = 0$. La contrainte d'incompressibilité (B.30) se réduit à

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0. \quad (8.154)$$

On déduit qu'il existe une fonction de courant ψ telle que

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (8.155)$$

Etant donné le caractère plan de l'écoulement, la vorticité aura une seule composante dans la direction du vecteur \mathbf{e}_φ et on la notera ω . On écrit (cf. éq. (B.5))

$$\omega(r, \theta) = -\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (8.156)$$

Dans le cas des équations de Stokes, la vorticité est une fonction harmonique. On a (pour rappel, le laplacien d'un vecteur n'est pas égal au laplacien de ses composantes)

$$\begin{aligned} \Delta \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \omega) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega \sin \theta) \right). \end{aligned} \quad (8.157)$$

La combinaison des relations (8.156)-(8.157) donne l'équation biharmonique suivante

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi = 0. \quad (8.158)$$

Les conditions aux limites (8.152)-(8.153), exprimées en termes de la fonction de courant, deviennent

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} &= \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = R, \\ v_r &= U \cos\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = Ur^2 \sin\theta \cos\theta, \quad \text{en } r = \infty \\ v_\theta &= -U \sin\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = Ur \sin^2\theta.\end{aligned}\quad (8.159)$$

La condition à l'infini peut s'intégrer facilement. Il vient

$$\psi_\infty = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2\theta. \quad (8.160)$$

Cette dernière forme de ψ suggère que la fonction de courant peut s'écrire sous la forme générale

$$\psi = \sin^2\theta f(r). \quad (8.161)$$

En introduisant (8.161) dans (8.158), on trouve

$$\frac{d^4f}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8}{r^4} f = 0. \quad (8.162)$$

Cherchant la solution comme une série de puissance r^n , on obtient le polynôme caractéristique

$$(n-2)(n-1)(n^2-3n-4) = 0,$$

dont les racines sont $n = -1, 1, 2, 4$. La fonction $f(r)$ est donc

$$f = \frac{C_{-1}}{r} + C_1 r + C_2 r^2 + C_4 r^4. \quad (8.163)$$

L'imposition des conditions aux limites (8.160) à l'infini requiert $C_4 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}U$, tandis que sur la sphère, avec $v_r = v_\theta = 0$, on détermine $C_{-1} = (1/4)UR^3$, $C_1 = -(3/4)UR$. La fonction de courant est

$$\psi = \frac{UR^2}{2} \sin^2\theta \left(\frac{R}{2r} - \frac{3}{2} \frac{r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right). \quad (8.164)$$

On peut en déduire aisément les vitesses. Le champ de vorticité s'écrit

$$\omega = -\frac{3}{2}UR \left(\frac{\sin\theta}{r^2} \right). \quad (8.165)$$

Le calcul du champ de pression peut s'effectuer facilement en tenant compte de l'identité vectorielle (1.238) qui donne lieu à l'équation de Stokes

$$\nabla p = -\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (8.166)$$

A l'aide de (B.5), ceci conduit au système d'équations

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega \sin \theta) = 3\mu U R \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad (8.167)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} = \frac{3\mu}{2} U R \frac{\sin \theta}{r^3}. \quad (8.168)$$

L'intégration de (8.167) donne

$$p = -\frac{3\mu}{2} U R \frac{\cos \theta}{r^2} + q(\theta).$$

En insérant ce résultat dans (8.168), on a

$$\frac{3\mu}{2} U R \frac{\sin \theta}{r^3} + \frac{q'(\theta)}{r} = \frac{3\mu}{2} U R \frac{\sin \theta}{r^3}.$$

Le champ de pression est finalement donné par

$$p = -\frac{3\mu}{2} U R \frac{\cos \theta}{r^2} + p_0, \quad (8.169)$$

avec p_0 une pression constante de référence.

L'écoulement à vitesse uniforme autour de la sphère va engendrer des efforts de pression et de cisaillement. Pour le calcul des effets de pression dans la direction Ox_3 , on effectue l'intégrale par rapport à la colatitude des efforts élémentaires

$$dF_{3,p} = -\left(\frac{3\mu}{2} U \frac{\cos \theta}{R} + p_0\right) \cos \theta (2\pi R^2 \sin \theta) d\theta \quad (8.170)$$

le facteur 2π provenant de la symétrie du problème qui permet l'intégration dans la direction de la longitude. En intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, on obtient

$$F_{3,p} = -2\pi\mu U R. \quad (8.171)$$

La traînée de frottement s'obtient par intégration sur la sphère de la contrainte de cisaillement qui s'exerce sur elle, à savoir $\sigma_{r\theta}$ qui vaut $-3\mu U \sin \theta / (2R)$ pour $r = R$. Il vient

$$F_{3,\sigma} = - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\sigma_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta) (2\pi R^2 \sin \theta) d\theta = -4\pi\mu U R. \quad (8.172)$$

La traînée totale $F_3 = F_{3,p} + F_{3,\sigma}$, connue sous le nom de *formule de Stokes*, est la somme de celle de pression et celle de frottement

$$F_3 = -6\pi\mu U R. \quad (8.173)$$

Si on définit le coefficient de traînée par

$$C_x = \frac{F_3}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2}, \quad (8.174)$$

on obtient

$$C_x = \frac{24}{Re}, \quad (8.175)$$

où $Re = 2UR/\nu$. Remarquons que la traînée de pression représente le tiers de la traînée totale. La relation (8.175) est confirmée par l'expérience lorsque $Re < 1$. Ceci est valable au voisinage de la sphère. Lorsqu'on s'en éloigne, l'importance des termes d'inertie croît et la solution de Stokes s'écarte de la solution exacte. La solution que nous venons d'établir ne s'applique pas au cas d'un ensemble de particules sphériques, car la présence d'un obstacle sphérique dans l'écoulement fait sentir son effet assez loin dans la mesure où les profils de vitesse décroissent en $1/r$.

La solution pour l'écoulement uniforme sur une sphère fixe peut être transposée au cas de la translation à vitesse uniforme U d'une sphère de rayon R dans un fluide au repos à l'infini. Dans ce cas, le système d'axes est toujours attaché à la sphère et est en conséquence en translation à vitesse uniforme. Ceci modifie le signe de U en $-U$ pour la pression et la vorticité. Pour la vitesse dans le fluide, celle-ci est relative au système d'axes, ce qui entraîne les modifications suivantes : pour la vitesse et la fonction de courant, U devient $-U$ et il faut soustraire également le champ de vitesse uniforme de leur expression.

Amélioration d'Oseen

La solution de Stokes a été améliorée par Oseen [48] qui a proposé d'écrire la solution des équations de Navier-Stokes (8.17) en une somme d'une répartition de vitesse constante dans l'espace et une solution de perturbation telle que

$$\mathbf{v} = U \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}' . \quad (8.176)$$

Dans le cas de l'écoulement autour de la sphère fixe, la vitesse \mathbf{v}' tiendra compte de la perturbation engendrée par la sphère dans un écoulement uniforme à l'infini. Avec (8.176), le terme d'inertie stationnaire prend la forme

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + U \frac{\partial v'_i}{\partial x_3} \right) . \quad (8.177)$$

L'hypothèse d'Oseen revient à négliger le premier terme du second membre de (8.177) par rapport au second. On obtient une équation de Navier-Stokes linéarisée

$$\rho U \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x_3} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}' + \rho \mathbf{b} . \quad (8.178)$$

Le coefficient de traînée obtenu pour la solution d'Oseen s'écrit

$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) . \quad (8.179)$$

Les résultats expérimentaux montrent que (8.179) est valable pour $Re < 5$, approximativement. Par des méthodes de développements asymptotiques raccordés, ce coefficient corrigé devient

$$C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + O(Re^3) \right) . \quad (8.180)$$

8.9 Vorticité et cinématique du tourbillon

Les équations de Navier-Stokes ont été établies à la section 8.4, pour le fluide visqueux newtonien, en termes des variables primitives : la vitesse et la pression. Les interactions observées dans un écoulement de fluide ont été interprétées par un équilibre entre les forces d'inertie, le gradient de pression, les forces de volume comme, par exemple, la gravité, et les forces visqueuses. Dans cette section, nous adoptons un point de vue différent basé sur le concept de vorticité ou tourbillon.

La présence de vorticité dans l'écoulement est une indication de l'importance des effets visqueux, étant donné que le tourbillon est engendré par les contraintes visqueuses. En effet, sous certaines hypothèses, le tourbillon possède les propriétés suivantes :

- i) en l'absence de viscosité, il est transporté par l'écoulement comme un vecteur matériel élémentaire ;
- ii) en présence de viscosité, il diffuse dans le fluide environnant et est continuellement produit aux parois solides qui délimitent l'écoulement.

C'est ainsi que le tourbillon produit sur une paroi solide fait apparaître la notion de couche limite qui conduit à modifier certaines conclusions tirées de la théorie des fluides parfaits irrotationnels. En turbulence, la dynamique de l'écoulement est largement tributaire de l'allongement ou du raccourcissement des lignes tourbillons, ainsi que de leur déformation.

Considérations cinématiques

Le tenseur \mathbf{L} des gradients de vitesse peut se décomposer en la somme du tenseur symétrique des taux de déformation \mathbf{d} et du tenseur antisymétrique des taux de rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ suivant l'équation (2.184). Le tenseur \mathbf{d} est donné par (2.181) et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ par (2.183). Rappelons que le vecteur dual $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ correspondant au tenseur des taux de rotation est le vecteur tourbillon introduit par (2.187).

En mécanique des fluides, il est classique d'introduire le vecteur vorticité ou tourbillon $\boldsymbol{\omega}$ en le définissant comme le rotationnel de la vitesse (2.188). Pour nous familiariser avec le concept de vorticité, étudions l'écoulement près d'un point d'arrêt placé à l'origine. Les composantes de vitesse sont telles que l'on a, avec la constante C ,

$$v_1 = Cx_1, \quad v_2 = -Cx_2, \quad v_3 = 0. \quad (8.181)$$

On calcule aisément que pour cet écoulement, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. L'écoulement à vorticité nulle est appelé *irrotationnel*. Notons que la fonction de courant équivalente est $\psi = Cx_1x_2$ qui est représentée par des hyperboles.

Soit l'écoulement de Poiseuille plan dans un canal de hauteur h . Si le système d'axes a son origine sur la paroi inférieure, le profil de vitesse (8.63) avec la définition (8.68) est donné par la relation

$$v_1 = 4v_{max} \frac{x_2}{h} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right), \quad (8.182)$$

avec v_{max} la vitesse maximale sur l'axe du canal en $x_2 = h/2$. La seule composante du tourbillon est ω_3 . Elle est perpendiculaire au plan de l'écoulement et vaut

$$\omega_3 = \varepsilon_{321} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{4v_{max}}{h} \left(1 - \frac{2x_2}{h}\right). \quad (8.183)$$

Dans ce cas, le tourbillon est maximal en valeur absolue sur les deux parois et s'annule sur l'axe de symétrie de la canalisation.

De ces exemples, on peut conclure que le concept de vorticité n'a pas de lien avec la courbure des lignes de courant. Dans le premier exemple, les lignes de courant sont courbes, mais la vorticité est nulle, tandis que dans le second exemple, les lignes de courant sont des lignes droites et la vorticité est finie.

A partir de la définition du tourbillon (2.188) et du théorème de Stokes (1.229), on obtient l'identité :

$$I(S) := \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \Gamma. \quad (8.184)$$

L'intégrale curviligne dans (8.184) définit la circulation de la vitesse, Γ , le long de la courbe fermée C , de vecteur tangent unitaire $\boldsymbol{\tau}$, qui est donc égale au flux du vecteur tourbillon à travers une surface quelconque s'appuyant sur le contour. Cette propriété permettra, par la suite, de donner systématiquement au concept de circulation une interprétation en termes de tourbillon. Rappelons qu'une ligne tourbillon (fig. 8.21) est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon, et qu'un tube tourbillon est une famille de lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe fermée. L'intensité d'un tube tourbillon est, pour une surface S délimitée par une ligne fermée sur laquelle s'appuie le tube tourbillon, le flux $I(S)$ du tourbillon à travers cette surface.

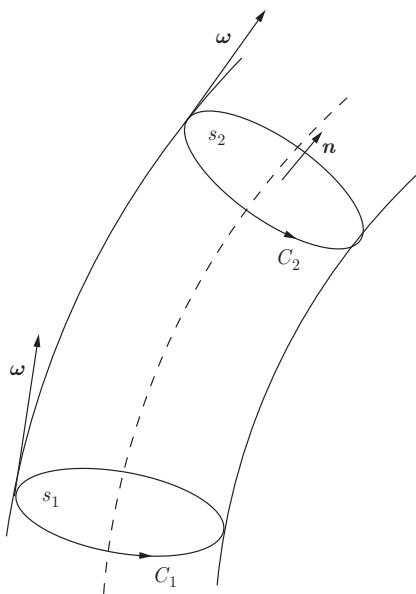


Fig. 8.21 Tube tourbillon.

Les théorèmes de Helmholtz que nous ne démontrons pas, s'énoncent comme suit :

1. le flux du tourbillon à travers une surface fermée est toujours nul ;
2. l'intensité d'un tube tourbillon ne dépend pas de la section considérée ;
3. un tube tourbillon ne peut se fermer que sur lui-même, ou encore s'étendre à l'infini, à moins qu'il ne coupe une paroi.

La démonstration de ces théorèmes peut être consultée dans l'ouvrage de Panton [49].

8.10 Équation dynamique du tourbillon

8.10.1 Équation générale

L'équation qui régit la dynamique du tourbillon requiert l'établissement de relations préliminaires.

Premièrement, le terme d'accélération \mathbf{a} peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right). \quad (8.185)$$

En effet, on peut induire à partir de (8.185) les relations successives

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\omega_j v_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_j v_j}{2} \right), \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right) v_k + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} v_k \right) + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

soit

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Cette dernière expression n'est autre que la définition de l'accélération (2.33).

Ensuite, la relation

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{a} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad (8.186)$$

est une identité. En effet, en appliquant l'opérateur **rot** à la relation (8.185), il vient

$$\mathbf{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathbf{v} + \mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \mathbf{rot} \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right),$$

ou encore

$$\mathbf{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \quad (8.187)$$

Le terme $\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ se développe comme suit :

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \boldsymbol{\omega} - (\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}. \quad (8.188)$$

Le dernier terme de (8.188) s'annule par (1.180). Par (8.187) et (8.188), il vient dès lors

$$\mathbf{rot} \mathbf{a} = \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Par l'équation de conservation de la masse (3.41), on obtient la relation

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\nabla \mathbf{v}) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{D \rho}{Dt} \boldsymbol{\omega},$$

qui est bien équivalente à l'équation (8.186), que nous écrivons sous la forme

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathbf{grad} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{a}. \quad (8.189)$$

Cette relation constitue une première description de l'évolution temporelle de la vorticité. Elle est connue comme l'équation de diffusion de Beltrami [58].

Par la conservation de la quantité de mouvement (3.96), on écrit

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathbf{grad} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} (\mathbf{b} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}). \quad (8.190)$$

Afin de séparer les effets de la pression et de la viscosité, on utilise l'équation de comportement (6.12) dans (8.190). On a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}}{\rho} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{b} + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right), \quad (8.191)$$

avec le tenseur des extra-constraints \mathbf{T} . En faisant appel à la relation (1.234), on écrit

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}}{\rho} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{b} + \frac{\nabla p}{\rho} \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right). \quad (8.192)$$

Le membre de gauche de la relation (8.192) contient la dérivée matérielle du tourbillon rapporté à la masse volumique locale. Dans le membre de droite, on trouve successivement deux termes qui décrivent la déformation (étirement-rétrécissement) et la courbure (flexion-basculement) des lignes tourbillon, le terme de baroclinicité et enfin la diffusion visqueuse de la vorticité.

Si la force de volume est conservative, elle dérive d'un potentiel χ , comme c'est le cas pour la gravité. Alors on écrit

$$\mathbf{b} = -\nabla \chi. \quad (8.193)$$

En conséquence, $\mathbf{rot} \mathbf{b} = 0$. Ce terme s'annule dans (8.192). Nous adoptons cette hypothèse pour la suite.

8.10.2 Interprétation physique de la dynamique de la vorticité

Cas du fluide parfait incompressible

Pour un fluide incompressible ($\nabla \rho = 0$), non visqueux ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$), l'équation (8.192) se simplifie

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\omega} = (\nabla \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (8.194)$$

Le terme

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

n'a pas de contrepartie dans les équations de Navier-Stokes écrites en variables primitives vitesse-pression. Examinons quelle est sa signification du point de vue de la physique de l'écoulement.

Dans la figure 8.22, considérons deux points voisins P et Q sur une ligne tourbillon. Les points P et Q définissent aussi une ligne matérielle de longueur $dx = \|d\mathbf{x}\|$, et on peut montrer l'égalité :

$$\frac{D(dx_i)}{Dt} = dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \text{ ou encore, } \frac{D(d\mathbf{x})}{Dt} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}. \quad (8.195)$$

Cette dernière équation exprime à la fois les changements en longueur et en direction d'un élément de ligne matérielle. La comparaison de (8.194) et (8.195) fait apparaître que le vecteur tourbillon $\boldsymbol{\omega}$ joue un rôle analogue à celui du

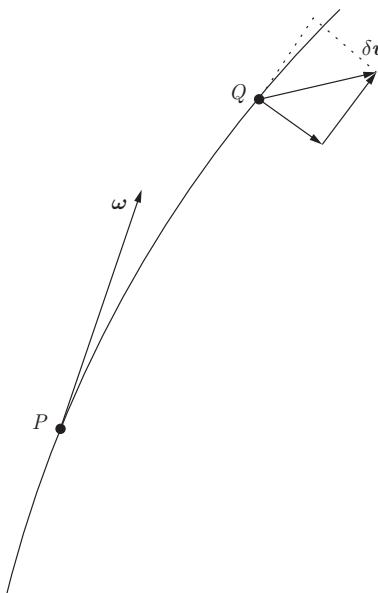


Fig. 8.22 Portion d'une ligne tourbillon.

vecteur matériel $d\mathbf{x}$. Dès lors, tout ce passe comme si le tourbillon ω se comportait comme un élément de ligne matérielle coïncidant instantanément avec une portion de ligne tourbillon. Soit $\delta\mathbf{v}$ la vitesse relative du fluide en Q par rapport à celle en P . Dans la relation (8.194), on peut faire la substitution :

$$(\nabla \mathbf{v}) \cdot \omega = \| \omega \| \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta\mathbf{v}}{PQ}.$$

Une partie du changement de ω mesuré par (8.194) provient donc de la rotation rigide de l'élément de ligne matérielle (par la composante de $\delta\mathbf{v}$ normale à ω), et l'autre partie est engendrée par la contraction ou l'extension de la ligne élémentaire (par la composante $\delta\mathbf{v}$ parallèle à ω). Finalement, l'équation (8.194) s'interprète comme suit : le tourbillon est transporté par les particules fluides, tout en s'orientant et se déformant comme les vecteurs matériels élémentaires.

Cas du fluide parfait compressible

Le terme $\nabla \rho \neq 0$ est présent dans (8.192). La production de vorticité par baroclinicité intervient dans des écoulements où les surfaces isobares et isopycnées (lignes d'égale masse volumique) se coupent. Ceci se produit dans des domaines d'application, comme la météorologie, l'océanographie et l'astrophysique. Dans le cas barocline, le centre de masse du fluide ne coïncide pas avec le centre de pression, qui est le lieu d'application de la résultante des forces de pression. Il s'ensuit qu'un couple tend à faire tourner le fluide localement et donne naissance à la circulation.

Dans le cas d'un fluide barotrope pour lequel la masse volumique est seulement fonction de la pression (voir sect. 6.9), on a

$$\rho = \rho(p) \quad \text{ou} \quad p = p(\rho) , \quad (8.196)$$

alors le terme barocline s'annule puisque les isobares et les isopycnes sont des surfaces parallèles.

8.11 Equation du tourbillon pour le fluide visqueux newtonien

Nous supposons désormais que les viscosités λ et μ sont invariables. Avec (6.13), on écrit

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\lambda}{\rho} \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + 2\nu \mathbf{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \nu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v} , \quad (8.197)$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{grad} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) - \mathbf{grad} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} - \nu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v} . \quad (8.198)$$

En prenant le rotationnel de (8.198) et en tenant compte de (1.234), il vient

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}) . \quad (8.199)$$

L'équation de la dynamique du tourbillon s'obtient en combinant (8.192) et (8.199)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) &= \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathbf{grad} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p \\ &\quad + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}) . \end{aligned} \quad (8.200)$$

Cette équation se simplifie si le fluide est compressible barotrope (8.196) ($\nabla \rho$ est parallèle à ∇p) ou incompressible ($\nabla \rho = 0$). On a alors

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \right) - \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} (\nu \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}) . \quad (8.201)$$

Cas particulier de l'écoulement plan

Pour un écoulement plan incompressible, l'équation (8.201) devient, avec la notation $\omega_3 = \omega$:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega , \quad (8.202)$$

puisque dans ce cas particulier, le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v})$ s'annule vu que $\boldsymbol{\omega}$ est orthogonal au plan de l'écoulement où se trouve $\mathbf{grad} \mathbf{v}$. On remarquera que l'équation (8.202) est analogue à celle de la conduction de chaleur, la viscosité cinématique remplaçant la diffusivité thermique. On voit que l'équation (8.202) est satisfaite pour $\omega = 0$, c'est-à-dire pour un écoulement irrotationnel. Cependant, cette solution n'est pas adéquate. Pour le voir, raisonnons par analogie avec l'équation de la chaleur, qui admet également la solution identiquement nulle. On sait, par la théorie de la chaleur, que toute distribution non uniforme de température à la paroi ou tout flux de chaleur non nul aura pour effet d'engendrer un champ de température variable dans le matériau. Dès lors, l'analogie permet de conclure que, dans le cas d'un fluide visqueux, le tourbillon qui est engendré aux parois, diffusera par cisaillement et sera emporté ensuite par l'écoulement. La création de tourbillon à la paroi est le résultat de la contrainte de cisaillement sur celle-ci. Pour obtenir la valeur du tourbillon de paroi, on recourt classiquement à la méthode de la fonction d'influence de Green.

8.12 Equation de la circulation

Sous le couvert des hypothèses de la section précédente, on va démontrer que, pour une courbe matérielle $C(t)$ le long de laquelle la circulation du vecteur vitesse vaut $\Gamma(t)$, on peut écrire la relation

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{C(t)} \nu(\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (8.203)$$

Cette relation exprime le fait que la variation de la circulation le long d'une courbe matérielle est due à la viscosité qui amortit le mouvement.

Pour établir la relation (8.203), il faut d'abord démontrer que, pour une courbe matérielle $C(t)$, le long de laquelle la circulation du vecteur vitesse vaut $\Gamma(t)$, on a l'identité suivante

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} . \quad (8.204)$$

En effet, on peut écrire l'équation

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} v_i dx_i = \frac{d}{dt} \oint_{C_0} V_i \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j ,$$

dans laquelle C_0 désigne la courbe matérielle $C(t)$ à l'instant $t = t_0$ et les coordonnées X_i sont les coordonnées lagrangiennes associées. En désignant par A_i et V_i les représentations lagrangiennes de l'accélération (2.32) et de la vitesse (2.17), on a les relations :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{C_0} V_i \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j &= \oint_{C_0} \left(A_i \frac{\partial x_i}{\partial X_j} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \right) dX_j \\ &= \oint_{C(t)} a_i dx_i + \oint_{C_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{V_i V_i}{2} \right) dX_j . \end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de cette égalité est nul sur une courbe fermée.

A l'aide de la relation (6.14) qu'on porte dans l'équation du mouvement (3.96), et compte tenu de l'identité vectorielle (1.238) et de l'équation (8.10), on peut écrire la relation

$$\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\chi - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p + \left(\frac{\lambda}{\rho} + 2\nu\right)\mathbf{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \nu\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{v}.$$

Tenant compte de la conservation de la masse, il vient

$$\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \chi - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^3}\frac{D\rho}{Dt}\mathbf{grad}\rho - \nu\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{v}. \quad (8.205)$$

Dans le cas d'un fluide peu visqueux ou peu compressible, nous considérons le terme $\frac{\lambda+2\mu}{\rho^3}\frac{D\rho}{Dt}\mathbf{grad}\rho$ du second ordre par rapport au terme du gradient de pression. Nous le négligerons dans la suite de l'exposé.

En insérant (8.205) dans (8.204), on obtient (8.203).

8.13 Équation du tourbillon pour le fluide parfait

Pour un fluide parfait incompressible, ou barotrope (et particulièrement en écoulement isentropique $ds = 0$), le théorème de la dynamique du tourbillon devient

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) \cdot \mathbf{grad}\mathbf{v}. \quad (8.206)$$

Dans le cas bidimensionnel, cette relation se réduit à

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = 0. \quad (8.207)$$

De l'équation (8.206), on déduit que, pour un fluide parfait barotrope ou incompressible, si un écoulement est irrotationnel à un instant, il le reste constamment. En particulier, un écoulement initialement uniforme sera irrotationnel par la suite. Cette proposition, appliquée aux écoulements isentropiques de fluide parfait compressible, porte le nom de **théorème de Crocco**.

Dans le cas d'un fluide parfait, l'équation (8.203) fournit le **théorème de Kelvin** :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (8.208)$$

La circulation de la vitesse le long d'une ligne matérielle fermée ne change pas, pour un fluide parfait incompressible ou barotrope (et particulièrement, en écoulement isentropique).

8.14 Equation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli s'obtient à partir des équations d'Euler (8.36), pour les fluides parfaits. Supposant que les forces de volume dérivent d'un potentiel (8.193), il vient

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \chi . \quad (8.209)$$

On utilise l'identité vectorielle

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) , \quad (8.210)$$

dans la dérivée matérielle de la vitesse pour obtenir

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \chi \right) . \quad (8.211)$$

On adopte l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est irrotationnel $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Cette hypothèse est une hypothèse drastique car les fluides réels produisent des écoulements rotationnels. Ceux-ci sont engendrés par exemple par les effets de viscosité près des parois. L'équation (8.211) s'écrit désormais

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \chi \right) . \quad (8.212)$$

Puisque l'écoulement est irrotationnel, le champ de vitesse dérive d'un potentiel tel que

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi . \quad (8.213)$$

L'équation d'Euler donne

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \chi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p . \quad (8.214)$$

Puisque le membre de gauche de (8.214) correspond au gradient d'une fonction scalaire, il faut qu'il en soit de même pour le membre de droite. Ceci n'est réalisable que si la masse volumique ρ est une fonction de p . Ceci revient à exiger que l'écoulement considéré soit celui d'un fluide barotrope au sens de la relation (6.147). Conséquemment, l'équation (8.214) devient

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \chi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) = 0 \quad (8.215)$$

On intègre cette équation pour obtenir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{v^2}{2} + \chi = C(t) . \quad (8.216)$$

Si l'écoulement est stationnaire, alors (8.216) donne l'équation de Bernoulli

$$\int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{v^2}{2} + \chi = \text{cste}, \quad (8.217)$$

qui au vu de la nature du deuxième terme, est une intégrale d'énergie. L'équation de Bernoulli est une intégrale première de l'équation d'Euler dans le cas de l'écoulement irrotationnel et stationnaire du fluide parfait.

Si l'écoulement est isentropique, la relation d'état (6.145) permet d'évaluer le terme de pression présent dans (8.217). On obtient

$$\int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (8.218)$$

où on a utilisé (6.153) pour déduire la dernière égalité. Avec (8.218) et la définition $q^2 = v_i v_i$, l'équation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{q^2}{2} + \chi = \text{cste.} \quad (8.219)$$

En supposant que l'écoulement adiabatique du fluide idéal est stationnaire et sans forces de volume, on a

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{q^2}{2} = \text{cste}, \quad (8.220)$$

Comme $\gamma > 1$, on trouve facilement que $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0^\gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma C \rho^{\gamma-1}$. Donc, on constate que $a = 0$ lorsque $\rho = 0$. La relation de Bernoulli (8.220) devient

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{q^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 = \frac{q_{max}^2}{2}. \quad (8.221)$$

Les deux constantes a_* et q_{max} désignent la vitesse du son critique et la vitesse maximale sur la ligne de courant, respectivement. On trouvera aisément que si $q = a$, alors $q = a = a_*$. Si $a = 0$, la vitesse q du fluide est égale à la vitesse maximale q_{max} . L'équation (8.220) est particulièrement utilisée en aérodynamique.

Si l'écoulement est incompressible, alors $\rho = \text{cste}$ et l'équation de Bernoulli (8.216) donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \chi = C(t). \quad (8.222)$$

Pour l'écoulement stationnaire du fluide parfait incompressible, l'équation de Bernoulli prend la forme bien connue en physique

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho \chi = C, \quad (8.223)$$

où C est une constante.

8.15 Ondes acoustiques

Les ondes acoustiques sont engendrées par des perturbations de faible amplitude de la pression ou de la masse volumique qui se propagent à une certaine

vitesse dans un écoulement de fluide. Lorsque les amplitudes sont finies, on engendre une onde de choc.

Soit un fluide parfait, compressible, en écoulement uniforme, isotherme, caractérisé par les variables $p_0, \rho_0, \mathbf{v}_0$. L'onde sonore crée une perturbation p', ρ', \mathbf{v}' telle que l'écoulement résultant est donné par

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' . \quad (8.224)$$

Comme on suppose que cette perturbation est infinitésimale, on a les estimations d'ordre de grandeur

$$\frac{|p'|}{p_0}, \quad \frac{|\rho'|}{\rho_0}, \quad \frac{\|\mathbf{v}'\|}{\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}} \ll 1 . \quad (8.225)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 , \quad (8.226)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 . \quad (8.227)$$

En insérant les relations (8.224) dans (8.226) et (8.227), on linéarise les équations en ne retenant que les termes du premier ordre et en supposant que l'écoulement de base satisfait les équations de conservation. Il vient

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} + \rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 , \quad (8.228)$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 . \quad (8.229)$$

En introduisant l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est globalement isentropique ($ds = 0$), par (6.142), il vient pour un gaz idéal

$$\frac{dp'}{p_0 + p'} = \gamma \frac{d\rho'}{\rho_0 + \rho'} ,$$

ou encore

$$\nabla p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho' . \quad (8.230)$$

Afin de faciliter l'écriture, on définit la dérivée matérielle de l'écoulement non perturbé

$$\frac{D_0(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j} . \quad (8.231)$$

Les équations de la dynamique des perturbations deviennent

$$\frac{D_0 \rho'}{Dt} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 , \quad (8.232)$$

$$\frac{D_0 \mathbf{v}'}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0 . \quad (8.233)$$

En insérant (8.230) dans (8.232), on obtient

$$\frac{D_0 \mathbf{v}'}{Dt} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0^2} \nabla \rho' = 0 . \quad (8.234)$$

L'application de l'opérateur divergence à (8.234) et l'utilisation de (1.189) conduisent à la relation

$$\rho_0 \operatorname{div} \frac{D_0 \mathbf{v}'}{Dt} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \rho' = 0 . \quad (8.235)$$

La dérivée matérielle de (8.232) donne

$$\frac{D_0^2 \rho'}{Dt^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{D_0 \mathbf{v}'}{Dt} = 0 . \quad (8.236)$$

En combinant (8.235) et (8.236), on produit l'équation des ondes

$$\frac{D_0^2 \rho'}{Dt^2} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \rho' . \quad (8.237)$$

La perturbation se propage par rapport à l'écoulement uniforme à une vitesse donnée par

$$\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} , \quad (8.238)$$

appelée la vitesse du son. Dans le cas général d'un écoulement non uniforme, on obtient la célérité du son

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} , \quad (8.239)$$

qui n'est autre que l'expression (6.153). Notons qu'à l'aide de (8.230), on peut mettre (8.237) sous la forme

$$\frac{D_0^2 p'}{Dt^2} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta p' . \quad (8.240)$$

De même, on a

$$\frac{D_0^2 v'_i}{Dt^2} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta v'_i . \quad (8.241)$$

Donc toutes les variables du problème satisfont l'équation d'ondes.

Comme l'équation d'ondes est linéaire à coefficient constant, on peut considérer qu'une harmonique de Fourier en est solution, soit

$$p'(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} , \quad (8.242)$$

où apparaissent le vecteur d'onde \mathbf{k} , la pulsation ω et l'amplitude complexe du mode $\hat{p}_{\mathbf{k}}$. La relation de dispersion s'obtient en introduisant (8.242) dans (8.240)

$$\omega^2 = a^2 k^2 . \quad (8.243)$$

La vitesse de phase de l'onde est obtenue par $|\omega|/|k| = a$ qui montre que la célérité du son ne dépend pas du nombre d'onde. Les ondes acoustiques ne sont donc pas dispersives. Dans le cas de l'air, avec $T_0 = 288K$, $a = \sqrt{\gamma RT_0} = 340 \text{ ms}^{-1}$. Pour une onde acoustique de fréquence $\omega/(2\pi) = 1000 \text{ Hz}$, la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/(\omega/a)$ vaut $0,34 \text{ m}$.

8.16 Ecoulement stationnaire irrotationnel et isentropique d'un fluide parfait compressible

Soit l'écoulement permanent d'un fluide parfait compressible dans lequel on néglige les forces de volume. On suppose que l'écoulement est adiabatique et thermodynamiquement réversible. Ceci revient à exclure la présence d'ondes de choc. L'écoulement est donc isentropique ; le fluide est barotrope et son modèle correspond à l'équation (6.147). Dès lors, on suppose l'écoulement irrotationnel puisque cette propriété se conserve dans le temps pour les fluides parfaits barotropes. Avec ces hypothèses, les équations de conservation se simplifient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 , \quad (8.244)$$

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} . \quad (8.245)$$

Pour l'écoulement isentropique, à l'aide de (6.152), il vient

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} . \quad (8.246)$$

L'équation (8.245) devient

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 . \quad (8.247)$$

Multiplions (8.247) par v_i et (8.244) par a^2/ρ . En combinant les deux relations ainsi obtenues, il vient

$$\frac{v_i v_j}{a^2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} . \quad (8.248)$$

Remarquons que la vitesse du son a dans (8.248) est une fonction de la position. Elle se calcule à partir de la vitesse du fluide par l'équation d'énergie du gaz idéal (8.221).

L'irrotationalité de l'écoulement permet d'introduire un potentiel des vitesses (8.213). En l'insérant dans (8.248), on a

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta \Phi . \quad (8.249)$$

L'équation de Bernoulli (8.221) donne

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{cste} . \quad (8.250)$$

Comme les relations (8.249) et (8.250) sont non linéaires, il nous faut procéder à des simplifications afin d'en trouver une solution.

8.16.1 Théorie des petites perturbations

On suppose un écoulement uniforme et parallèle de vitesse U dans la direction x_1 , perturbé par un obstacle mince ou par des parois peu inclinées par rapport à la direction horizontale. Ces dispositions géométriques engendrent des perturbations telles que

$$v_i = U \mathbf{e}_1 + v'_i , \quad (8.251)$$

avec les inégalités

$$\left| \frac{v'_i}{U} \right| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3 . \quad (8.252)$$

Le champ de vitesses dépend du potentiel $\Phi(x_i)$ qu'on écrit sous la forme

$$\Phi(x_i) = U x_1 + \varphi(x_i) , \quad (8.253)$$

où φ désigne le potentiel de perturbation.

Nous linéarisons les équations (8.248) et (8.221) en négligeant tous les termes d'ordre égal ou supérieur à deux exprimés en fonction de la perturbation par rapport à ceux du premier ordre. Il vient pour (8.248)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{U^2}{a^2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{U^2}{a^2} \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} . \quad (8.254)$$

Remarquons que (8.254) n'est pas linéaire, car la vitesse locale du son a dépend des perturbations v'_i .

L'équation de Bernoulli (8.221) peut s'écrire comme

$$\frac{q^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} , \quad (8.255)$$

où a_∞ est la vitesse du son à l'infini amont. La linéarisation permet d'écrire successivement

$$\begin{aligned} a^2 &= a_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (U^2 - q^2) \\ &= a_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2} [U^2 - (U + v'_1)^2 - v'_2^2 - v'_3^2] \\ &= a_\infty^2 - (\gamma - 1) U v'_1 + \dots \end{aligned} \quad (8.256)$$

En tenant compte de l'inégalité (8.252), la relation (8.256) est approchée telle que

$$a^2 \approx a_\infty^2 . \quad (8.257)$$

En combinant les relations (8.254)-(8.257), on obtient

$$\left(1 - \frac{U^2}{a_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 . \quad (8.258)$$

Avec la définition du nombre de Mach (8.3), la relation (8.258) devient

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 . \quad (8.259)$$

Lorsque le nombre de Mach approche l'unité, l'équation (8.259) dégénère et n'est plus valable. On ne l'utilise donc pas dans le cas sonique (ou transsonique). Du point de vue mathématique, l'équation (8.259) est elliptique dans le cas subsonique, $M_\infty < 1$, et hyperbolique dans le cas supersonique, $M_\infty > 1$. Cette différence de nature mathématique induit également des comportements physiques différents.

L'équation du potentiel (8.259) est soumise à des conditions aux limites qui vont imposer que le vecteur vitesse \mathbf{v} soit parallèle aux parois dans leur voisinage. Il faudra aussi s'assurer que la méthode des perturbations est bien vérifiée via (8.252).

Si l'écoulement est délimité par des parois $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, on a à proximité de celles-ci

$$\frac{v'_2}{U} \approx \frac{v'_2}{U + v'_1} = \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_3} = -\frac{(\partial F / \partial x_1)}{(\partial F / \partial x_2)} \quad (8.260)$$

$$\frac{v'_3}{U} \approx \frac{v'_3}{U + v'_1} = -\frac{(\partial F / \partial x_1)}{(\partial F / \partial x_3)}. \quad (8.261)$$

Il faudra donc que les conditions

$$|\partial F / \partial x_1| \ll |\partial F / \partial x_2| \quad \text{et} \quad |\partial F / \partial x_1| \ll |\partial F / \partial x_3| \quad (8.262)$$

soient respectées.

8.16.2 Ecoulement bidimensionnel d'un fluide compressible au voisinage d'une paroi ondulée sinusoidale

On considère l'écoulement bidimensionnel stationnaire d'un fluide parfait compressible au voisinage d'une paroi ondulée de forme $x_2 = f(x_1) = \varepsilon \sin(\alpha x_1)$, dont l'amplitude ε est faible comparée à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$, i.e. $\varepsilon\alpha \ll 2\pi$ à la figure 8.23.

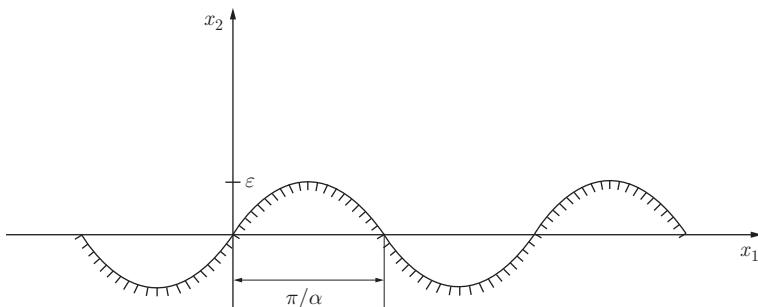


Fig. 8.23 Paroi ondulée

On résoudra

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (8.263)$$

avec la condition à la paroi $F(x_1, x_2) = x_2 - f(x_1) = 0$ (éq. (8.260)),

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{v'_2}{U + v'_1} \approx \left. \frac{v'_2}{U} \right|_{x_2=f(x_1)} . \quad (8.264)$$

On peut exprimer le dernier terme de (8.264) comme

$$\frac{v'_2}{U}(x_1, \varepsilon \sin \alpha x_1) = \frac{1}{U} \left[v'_2(x_1, 0) + \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=0} \varepsilon \sin \alpha x_1 + \dots \right] . \quad (8.265)$$

La condition à la paroi devient avec le même degré d'approximation

$$\frac{v'_2(x_1, 0)}{U} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \varepsilon \alpha \cos \alpha x_1 . \quad (8.266)$$

Ceci revient à imposer la condition sur le plan moyen $x_2 = 0$; d'où la nécessité de l'hypothèse $\varepsilon \alpha \ll 1$. En $x_2 \rightarrow \infty$, pour le cas subsonique, on imposera $v'_1 = v'_2 = 0$.

Ecoulement subsonique

On procède par séparation de variables en posant dans l'équation (8.263)

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \quad (8.267)$$

ce qui donne, avec $n^2 = 1 - M_\infty^2$

$$n^2 \frac{\varphi''_1}{\varphi_1} + \frac{\varphi''_2}{\varphi_2} = 0 . \quad (8.268)$$

La condition aux limites (8.266) devient

$$\frac{v'_2(x_1, 0)}{U} = \frac{1}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varepsilon \alpha \cos \alpha x_1 \quad (8.269)$$

d'où on a

$$\varphi_1(x_1)\varphi'_2(0) = U \varepsilon \alpha \cos \alpha x_1 . \quad (8.270)$$

On déduit que

$$\varphi_1(x_1) = A \cos \alpha x_1 . \quad (8.271)$$

Portant (8.271) dans (8.268), il vient

$$\frac{\varphi''_2}{\varphi_2} = n^2 \alpha^2 . \quad (8.272)$$

Par intégration (8.272), on obtient

$$\varphi_2(x_2) = B e^{-n \alpha x_2} + C e^{n \alpha x_2} . \quad (8.273)$$

La condition de vitesse nulle en $x_2 \rightarrow \infty$ impose $C = 0$, si on suppose $n > 0$. Avec (8.270), on a dès lors

$$\varphi_1(x_1) = -\frac{\varepsilon U}{B n} \cos \alpha x_1 \quad (8.274)$$

et finalement,

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{\varepsilon U}{n} \cos \alpha x_1 e^{-n\alpha x_2}. \quad (8.275)$$

On vérifie aisément que la condition $|v'_1/U| \ll 1$ implique

$$\frac{\varepsilon \alpha}{n} \ll 1. \quad (8.276)$$

Ce sera le cas lorsque $n \neq 0$, c'est-à-dire que l'on ne soit pas trop proche du domaine transsonique.

Ecoulement supersonique

Posons $M_\infty^2 - 1 = m^2$. L'équation (8.263) devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0. \quad (8.277)$$

D'après d'Alembert, cette équation d'ondes a pour solution générale la relation

$$\varphi = f(x_1 - mx_2) + g(x_1 + mx_2). \quad (8.278)$$

Le second terme g doit être négligé dans le cas où l'écoulement se situe dans le plan supérieur à la paroi dans la direction positive de l'axe des x_1 . La condition aux limites (8.269) donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, 0) = U\varepsilon \alpha \cos \alpha x_1 = -mf'(x_1). \quad (8.279)$$

Par intégration, il vient

$$\varphi = f(x_1 - mx_2) = -\frac{U\varepsilon}{m} \sin \alpha(x_1 - mx_2) \quad (8.280)$$

La condition de petites perturbations implique que $\varepsilon \alpha / m \ll 1$. Remarquons que le potentiel de perturbations garde les mêmes valeurs sur des droites inclinées de coefficient angulaire $dx_2/dx_1 = 1/m = \tan \alpha$ vers l'aval, avec α l'angle de Mach (8.4). La perturbation se propage donc à l'infini aval, alors que dans le cas subsonique, son amplitude décroissait rapidement lorsqu'on s'éloignait de la paroi.

8.17 Exercices

- [8.1]** A partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.96), établir les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux newtonien. Que deviennent ces équations lorsque les coefficients λ et μ sont constants ? Etudier le cas particulier d'un fluide incompressible (mouvement isochore).

8.2 On considère l'écoulement plan de Couette-Poiseuille obtenu par la superposition de l'écoulement de Couette induit par le mouvement de la paroi supérieure à vitesse constante U et celui de Poiseuille engendré par le gradient de pression dans la direction x_1 . On demande de calculer le profil de vitesse, la contrainte de cisaillement et le débit-volume.

8.3 On considère l'écoulement hélicoïdal d'un fluide visqueux incompressible entre deux cylindres circulaires en rotation relative comme dans l'écoulement de Couette circulaire. Les cylindres intérieur de rayon R_1 et extérieur de rayon R_2 ont une vitesse angulaire de rotation ω_1 et ω_2 , respectivement. Le fluide entre les cylindres est soumis également à un gradient de pression axial. On demande de calculer les composantes de vitesse non nulles v_θ, v_z . On calculera également le champ de pression $p = p(r, z)$.

8.4 Soit une sphère solide plongée dans un fluide visqueux newtonien incompressible qui remplit tout l'espace, et qui est au repos à l'infini. La sphère tourne autour d'un de ses diamètres à une vitesse angulaire constante Ω . On suppose le nombre de Reynolds inférieur à l'unité. On néglige les forces de volume. Les lignes de courant sont des circonférences centrées sur l'axe de rotation et situées dans des plans perpendiculaires à celui-ci. En travaillant en coordonnées sphériques, calculer le profil des vitesses.

8.5 Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice précédent, on étudie l'écoulement d'un fluide compris entre deux sphères de rayon R_1 et R_2 telles que $R_1 < R_2$, et qui tournent à des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 autour d'un diamètre commun fixe.

Calculer le profil des vitesses.

8.6 Par application du théorème de Bernoulli pour les fluides parfaits, montrer que la vitesse de sortie d'un jet par un orifice pratiqué dans une enceinte à la distance h de la surface libre du fluide est

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (8.281)$$

8.7 On considère l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite de section arbitraire. Faisant l'hypothèse que le champ de vitesse est de la forme

$$v_1 = v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_3 = 0 ,$$

montrer que le champ de vitesse satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx_1} = C = \text{cste}$$

Si la section est de forme elliptique de demi-axes a et b telle que

$$\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{b}\right)^2 = 1 ,$$

le champ de vitesse s'écrit

$$v_1 = A \left[\left(\frac{x_2}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{b} \right)^2 \right] + B .$$

Trouver les constantes A et B .

- [8.8]** Un cylindre de rayon R_1 se déplace parallèlement à son axe avec une vitesse constante U à l'intérieur d'un cylindre co-axial fixe de rayon R_2 .

Calculer le champ de vitesse du fluide visqueux qui remplit l'espace entre les deux cylindres. Trouver la force de frottement par unité de longueur qui s'exerce sur le cylindre mobile.

ANNEXE A

Coordonnées cylindriques

Nous donnons ci-dessous certains opérateurs différentiels ainsi que les principales équations dans un système de coordonnées cylindriques. On représente à la figure A.1 les composantes du tenseur des contraintes dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

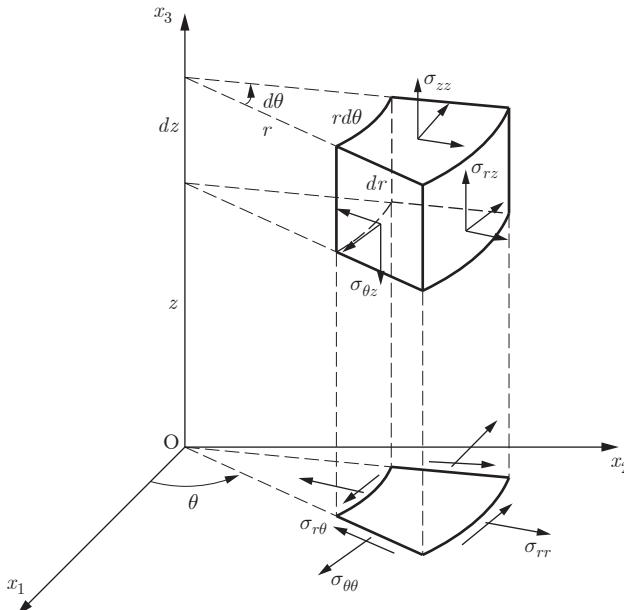


Fig. A.1 Composantes du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées cylindriques.

Divergence d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

ou

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.2})$$

Divergence d'un champ tensoriel $\sigma(r, \theta, z)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \sigma &= \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) e_z.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Gradient d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z. \quad (\text{A.4})$$

Gradient d'un champ vectoriel $v(r, \theta, z)$:

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Rotationnel d'un champ vectoriel $v(r, \theta, z)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} v &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) e_z.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Laplacien d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.7})$$

ou

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{A.8})$$

Laplacien d'un champ vectoriel $v(r, \theta, z)$:

$$\begin{aligned}\nabla^2 v &= \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) e_r \\ &+ \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) e_\theta \\ &+ (\nabla^2 v_z) e_z.\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Dérivée matérielle d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (\text{A.10})$$

Accélération :

$$\frac{Dv_r}{Dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.13})$$

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\ = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho b_z. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho b_z = 0. \quad (\text{A.20})$$

Equations de Navier :

$$\begin{aligned} \mu & \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + f_r = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \mu & \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ & + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + f_\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + f_z = 0 \quad (\text{A.23})$$

Composantes de déformation en fonction du déplacement :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.24})$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right). \quad (\text{A.26})$$

Noter que les équations constitutives sont obtenues en remplaçant les composantes cartésiennes dans (7.3) et (7.4) par les composantes ci-dessus.

Equation biharmonique :

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (\text{A.27})$$

Composantes de la contrainte :

Via la fonction de contrainte d'Airy pour un état de contrainte plane

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}. \quad (\text{A.30})$$

Equations de Navier-Stokes incompressibles :

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.31})$$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho b_r \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \rho b_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z + \rho b_z \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

avec l'opérateur laplacien défini par (A.7) ou (A.8).

ANNEXE B

Coordonnées sphériques

Nous donnons ci-dessous certains opérateurs différentiels ainsi que les principales équations dans un système de coordonnées sphériques.

On représente à la figure B.1 les composantes du tenseur des contraintes dans le système de coordonnées sphériques r, θ, φ .

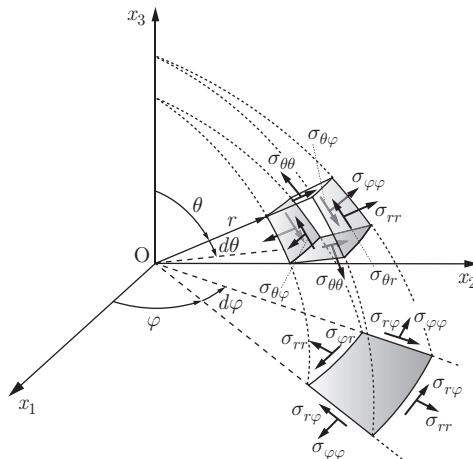


Fig. B.1 Composantes du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées sphériques.

Divergence d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, \varphi)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{B.1})$$

Divergence d'un champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta] \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta] \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta] \right) \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Gradient d'un champ scalaire $f(r, \theta, \varphi)$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{B.3})$$

Gradient d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, \varphi)$:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r \tan \theta} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right] \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Laplacien d'un champ scalaire $f(r, \theta, \varphi)$:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.6})$$

Laplacien d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{v} = & \left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Dérivée matérielle d'un champ scalaire $f(r, \theta, \varphi)$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \quad (\text{B.8})$$

Accélération :

$$a_r = \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \quad (\text{B.9})$$

$$a_\theta = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \quad (\text{B.10})$$

$$a_\varphi = \frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_r v_\varphi + v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r}. \quad (\text{B.11})$$

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \right) &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ &+ \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho b_r \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) &= \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \\ &+ \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}] + \rho b_\theta \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_r v_\varphi + v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} \right) &= \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \\ &+ \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) + \rho b_\varphi \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho b_r = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \\ + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}] + \rho b_\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \\ + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) + \rho b_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Equations de Navier :

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + f_r = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + f_\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ + (\lambda + \mu) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + f_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Composantes de déformation en fonction du déplacement :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \quad (\text{B.22})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \theta \right). \quad (\text{B.24})$$

Noter que les équations constitutives sont obtenues en replaçant les composantes cartésiennes dans (7.3) et (7.4) par les composantes ci-dessus.

Composantes du tenseur des taux de déformation :

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, \quad (\text{B.25})$$

$$d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}, \quad (\text{B.26})$$

$$d_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \right), \quad (\text{B.27})$$

$$d_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \quad (\text{B.28})$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (\text{B.29})$$

Équations de Navier-Stokes incompressibles :

Équation de conservation de la masse

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{B.30})$$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \mu \left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho b_r \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \mu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho b_\theta \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_r v_\varphi + v_\varphi v_\theta \cot \theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ &+ \mu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) + \rho b_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

avec l'opérateur laplacien définit par (B.6).

ANNEXE C

Glossaire français-anglais

Accélération, Acceleration	
Barocline, Baroclinic	
Acoustique (adj.), Acoustic	
– (nom), <i>Acoustics</i>	
Adiabatique, Adiabatic	
Aire, Area	
Allé de von Kármán, von Kármán street	
Anisotrope, Anisotropic	
Appui, Support	
Axe principal, Principal axis	
Base, Base	
Bord, Boundary	
Barocline, Baroclinic	
Barotrope, Barotropic	
Cartésien, Cartesian	
Chaleur, Heat	
Champ, Field	
– de contrainte, <i>Stress field</i>	
– de déformation, <i>Strain field</i>	
– de vitesse, <i>Velocity field</i>	
Charge, Load	
Cinématique, Kinematics	
Cinétique, Kinetic	
Cisaillement, Shear	
Coefficient de Poisson, Poisson's ratio	
Compatibilité, Compatibility	
Comportement (loi de), Constitutive law (equations)	
Composante, Component	
Condition aux limites,	
	<i>Boundary conditions</i>
	Conduite, Pipe
	Configuration, Configuration
	Contrainte(s), Stress(es)
– de compression, <i>Compressive stress</i>	
– de traction, <i>Tensile stress</i>	
– normale, <i>Normal stress</i>	
– plane, <i>Plane stress</i>	
– principales, <i>Principal stresses</i>	
– tangentielle, <i>Tangential stress</i>	
– de cisaillement, <i>Shear stress</i>	
Convexe, Convex	
Coordonnée, Coordinate	
Corps, Body	
Courbure, Curvature	
Critère, Criterion	
Cylindrique, Cylindrical	
	Débit, Flow rate
	Décharge, Unloading
	Décomposition polaire, Polar decomposition
	Déformation, Strain, Deformation
– plane, <i>Plane strain</i>	
Densité, Density	
Déplacement, Displacement	
Dérivée particulaire, Material derivative	
Déterminant, Determinant	
Déviateur, Deviatoric	
Différé, Delayed	
Dissipation, Dissipation	

Divergence, Divergence	– volumique, Body force
Dynamique (adj.), Dynamic	Galiléen, Galilean
– (nom), <i>Dynamics</i>	Gauchissement, Warping
Echelle, Scale	Gaz, Gas
Ecoulement, Flow	Glissement, Angular distortion
– stationnaire, Steady flow	Gradient, Gradient
Ecrouissage, Hardening	Grand, Large
Effort, Force	– déplacement, Large displacement
– extérieur, External force	– déformation, Large strain
– intérieur, Internal force	
– normal, Normal force	
– tranchant, Shearing force	
Elastique, Elastic	Homogène, Homogeneous
Elastoplastique, Elastoplastic	Hydrostatique, Hydrostatic
Encastrement, Fixed support	Hypersonique, Hypersonic
Energie, Energy	Incompressibilité, Incompressibility
Enthalpie, Enthalpy,	Incrément, Increment
Entropie, Entropy	Incrémental, Incremental
Equation, Equation	Infinitésimal, Infinitesimal
– de continuité, Continuity equation	Instantané, Instantaneous
– du mouvement, Equation of motion	Invariant, Invariant
Équilibre, Equilibrium	Isentropique, Isentropic
Espace, Space	Isobare, Isobaric
Essai, Test	Isopycne, Isopycnal
– de compression, Compression test	Isotrope, Isotropic
– de traction, Traction test	Jacobien, Jacobian
Etat, State	Lagrangien, Lagrangian
– de contrainte, Stress state	Laminaire, Laminar
– plan de contrainte, Plane stress state	Laplacien, Laplacian
Eulérien, Eulerian	Libre, Free
Fibre, Fiber	Liquide, Liquid
Flexion, Bending	Ligne, Line
Fluage, Creep	– d'émission, Streakline
Fonction, Function	– de courant, Streamline
– de charge, Loading function	Linéaire, Linear
– de fluage, Creep function	Loi, Law
– de relaxation, Relaxation function	– constitutive, Constitutive law
– seuil, Yield Function	– de comportement, Constitutive law
Force, Force	– de bilan, Balance law
– de masse, Body force per unit mass	Masse volumique, Density
– de volume, Body force per unit volume	Matériel, Material
– résultante, Resultant force	Matrice des contraintes, Stress matrix
	Mécanique, Mechanics
	Mémoire évanescante, Fading memory

Méthode des éléments finis,*Finite element method***Milieu continu, Continuous medium****Module, Modulus**– de cisaillement, *Shear modulus*– de déformation volumique, *Bulk modulus*– de Young, *Young's modulus***Moment, Moment**– cinétique, *Angular momentum*– de flexion, *Bending moment*– fléchissant, *Bending moment***Mouvement, Motion**– rigidifiant, *Rigid body motion***Newtonien, Newtonian****Normalité, Normality****Objectivité, Objectivity**– *Material frame indifference***Observateur, Observer****Ombroscopie, Shadowgraph****Origine, Origin****Orthotrope, Orthotropic****Orthogonal, Orthogonal****Paramètre de chargement,***Loading parameter***Particule, Particle****Permanent, Steady****Pertes de charges, Pressure drop****Petit(e), Small**– **déplacement, Small displacement**– **déformation, Small deformation****Plan principal, Principal plane****Plastique, Plastic****Plasticité, Plasticity****Polaire, Polar****Portance, Lift****Postulat de Cauchy, Cauchy's postulate****Poutre, Beam****Pression, Pressure****Principal, Principal****Principe, Principle**– du minimum, *Minimum principle***Produit, Product**– **Produit contracté, Contracted product**– **scalaire, Scalar product**– **tensoriel, Tensor product**– **vectoriel, Vector product****Puissance, Power, rate of work****Quantité de mouvement,***Linear momentum***Rampant, Creeping****Réciprocité, Reciprocity****Règle d'écoulement, Flow rule****Repère, Frame****Résistance des matériaux,***Strength of materials***Résultante, Resultant****Rigidifiant (mouvement),***Rigid-body (motion)***Rotationnel, Curl****Section droite, Cross section****Stabilité, Stability****Stationnaire, Steady****Statique (adj.), Static**– (nom), *Statics***Subsonique, Subsonic****Superposition, Superposition****Supersonique, Supersonic****Surface libre, Free surface****Symétrique, Symmetric****Système, System****Taux, Rate**– de contrainte, *Stress rate*– de déformation, *Rate of deformation***Température, Temperature****Tenseur, Tensor**– d'élongation, *Stretch tensor*– des contraintes, *Stress tensor*– de taux de déformation, *Rate-of-deformation tensor*– des taux de rotation, *Spin tensor***Tension superficielle, Surface tension****Tétraèdre, Tetrahedron****Théorème, Theorem****Thermique, Thermal**

Torsion, Torsion, Twisting	Vecteur, Vector
Tourbillon, Vortex, Vorticity,	– de position, Position vector
Trace, Trace	– de tourbillon, Vorticity vector
Traînée, Drag	Viscoélastique, Viscoelastic
Trajectoire, Trajectory,	Viscoélasticité, Viscoelasticity
<i>Particle path, Pathline</i>	Viscosité, Viscosity
Transformation (nom),	Visqueux, Viscous
<i>Transform</i>	Vitesse, Velocity
Transposé, Transpose	– de déformation, Strain rate
Turbulent, Turbulent	Voisinage, Neighborhood
Uniforme, Uniform	Volume, Volume
	Vorticité, Vorticity

Liste des symboles

Cette liste des symboles reprend les principales notations utilisées dans la monographie. Celles qui ne sont pas reprises ici, sont définies là où elles apparaissent et le contexte donne toutes les informations nécessaires pour leur compréhension et leur emploi.

Symbol	Description	Unité
Lettres romaines		
<i>a</i>	vitesse du son	m s^{-1}
<i>a_i</i>	aire de la face s_i	m^2
a	vecteur accélération (spatial)	m s^{-2}
A	tenseur d'ordre n	—
$A_{i_1 \dots i_n}$	composantes du tenseur d'ordre n	—
<i>A</i>	aire	m^2
A	vecteur accélération (matériel)	m s^{-2}
A_i	vecteurs propres unitaires matériels	—
b	densité massique de force volumique	N kg^{-1}
B	densité massique de force volumique	N kg^{-1}
<i>b_i</i>	vecteurs propres unitaires spatiaux	—
c	tenseur de déformation	—
	de Cauchy-Green gauche	
C	tenseur de déformation	—
	de Cauchy-Green droit	
<i>C</i>	coefficient de traînée	—
C_{ijk}	paramètres matériels	—
<i>c_p</i>	chaleur massique à pression constante	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
<i>c_v</i>	chaleur massique à volume constant	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
C	corps	—
d	tenseur des taux de déformation	s^{-1}
<i>d_i</i>	composantes du vecteur dual	—
<i>e</i>	épaisseur	m
e	tenseur de déformation	—
	d'Euler-Almansi	
<i>e_i</i>	vecteur de base	—
<i>E</i>	module de Young	Pa
<i>E_c</i>	énergie cinétique	J
<i>E_{int}</i>	énergie interne	J
E	tenseur de déformation	—
	de Green-Lagrange	
E^3	espace vectoriel	—
F	tenseur du gradient de déformation	—

Symbol	Description	Unité
f^b	force de volume	N
f^c	force de contact	N
f	énergie libre de Helmholtz	J kg ⁻¹
f	déflexion	m
f	fréquence	s ⁻¹
$f(T)$	fonction tensorielle du tenseur T	—
F^b	force de volume	N
Fr	nombre de Froude	—
\mathbf{g}_i	vecteurs de base en coordonnées curvilignes	—
g	accélération de la pesanteur	m s ⁻²
h	hauteur	m
h	densité d'enthalpie massique	J kg ⁻¹
H	tenseur du gradient de déplacement	—
I_i	invariants scalaires	—
I_3	moment d'inertie par rapport à x_3	m ⁴
I	tenseur identité	—
J	jacobien	—
k_B	constante de Boltzmann (= 1,381 10 ⁻²³)	JK ⁻¹
k	coefficient de conductibilité thermique	W m ⁻¹ K ⁻¹
K	module de rigidité	Pa
\mathbf{K}	second vecteur de contrainte de Piola-Kirchhoff	Pa
l	longueur	m
L	longueur	m
\mathbf{L}	tenseur du gradient de vitesses	s ⁻¹
m	masse	kg
\overline{m}	quantité de mouvement	kg m s ⁻¹
$\widehat{\mathbf{m}}$	moment cinétique	kg m ² s ⁻¹
M	nombre de Mach	—
\mathbf{M}	tenseur de déformation	—
\mathbf{N}	vecteur unitaire	—
\mathbf{n}	vecteur unitaire sortant d'un domaine	—
\mathbf{n}_i	vecteurs propres unitaires	—
O	tenseur orthogonal	—
p	pression	Pa
\mathbf{P}	premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff	Pa
P_0	densité initiale de masse	kg m ⁻³
P	densité de masse actuelle en description matérielle	kg m ⁻³
P_i	pression interne	Pa
P_e	pression externe	Pa
p_0	pression de référence	Pa
p_i	pression	Pa
p_i	probabilité	—
Pr	nombre de Prandtl	—
Q	débit-volume	m ³ s ⁻¹

Symbole	Description	Unité
Q	tenseur orthogonal	—
\mathbf{q}	vecteur flux de chaleur	W m^{-2}
q	charge uniformément répartie	N m^{-2}
\mathcal{R}	configuration	—
\mathbf{R}	tenseur orthogonal	—
\mathbb{R}^3	espace euclidien	—
R	rayon	m
R	constante du gaz idéal	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Re	nombre de Reynolds	—
$\mathbf{R} = (0, \mathbf{x}, t)$	référentiel de l'observation	—
r	chaleur produite au sein du volume	W m^{-3}
r_i	rayon interne d'un cylindre	m
r_e	rayon externe d'un cylindre	m
\mathbf{S}	second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff	Pa
S_u	surface	m^2
S_t	surface	m^2
s	densité d'entropie	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
s	temps	s
dS	élément de surface	m^2
ds	élément de surface	m^2
s_i	face	m^2
t	temps	s
T	température	K
\mathbf{T}	tenseur des extra-contraintes	Pa
\mathbf{T}	premier vecteur de contrainte de Piola-Kirchhoff	Pa
\mathbf{t}	vecteur de contrainte	Pa
\mathbf{t}_{e_i}	vecteur de contrainte dans la direction e_i	Pa
t_N	composante normale du vecteur \mathbf{t}	Pa
t_T	composante tangentielle du vecteur \mathbf{t}	Pa
\mathbf{u}	vecteur déplacement (spatial)	m
u	densité d'énergie interne (spatial)	J kg^{-1}
\mathbf{U}	vecteur déplacement (matériel)	m
U	densité d'énergie interne (matériel)	J kg^{-1}
U	vitesse	ms^{-1}
\mathcal{V}	voisinage	—
\mathbf{v}	vecteur vitesse (spatial)	ms^{-1}
\mathbf{V}	vecteur vitesse (matériel)	ms^{-1}
V	fonction de potentiel	Pa
V	volume en coordonnées matérielles	m^3
v	volume en coordonnées spatiales	m^3
v_{moy}	vitesse moyenne	ms^{-1}
v_{max}	vitesse maximale	ms^{-1}
\mathbf{W}	vecteur déplacement	m
W	fonction d'énergie de déformation	J m^{-3}
\mathcal{W}	fonction scalaire d'un tenseur \mathbf{T}	—
$\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}$	fonction d'énergie de déformation	J m^{-3}

Symbol	Description	Unité
x	vecteur position (spatial)	m
X	vecteur position (matériel)	m
\mathcal{X}	système physique	—
Lettres grecques		
α	constante	—
α	angle	—
α	coefficient d'expansion thermique	K ⁻¹
α_i	paramètre matériel	—
β	angle	—
β_i	fonction scalaire	—
$\Gamma, \Gamma^-, \Gamma^+, \Gamma_1$	surface	m ²
γ	rapport calorifique	—
γ	déformation	—
γ_{12}	angle	—
γ_0	diffusivité thermique	m ² s ⁻¹
δ	symbole de Kronecker, composantes δ_{ij}	—
δ	accroissement	—
Δ	incrément	—
ε	tenseur de déformation infinitésimale, composantes ε_{ij}	—
ε_{ijk}	symbole de permutation	—
ε	nombre réel	—
θ	angle	—
Θ	angle	—
θ_i	coordonnées curvilignes	—
λ	valeur propre	—
λ	pertes de charges	—
λ_i	valeur propre	—
λ_N	dilatation	—
λ_i	élongations principales du tenseur U	—
λ_i^2	élongations principales du tenseur C	—
λ	coefficent de Lamé	Pa
λ	viscosité volumique	Pas
Λ	diffusivité thermique	m ² s ⁻¹
μ	coefficent de Lamé	Pa
μ	viscosité dynamique	Pas
μ	module de cisaillement ou de rigidité au glissement	Pa
μ_i	paramètre	—
ν	coefficent de Poisson	—
ν	viscosité cinématique (= μ/ρ)	m ² s ⁻¹
Π, Π^-, Π^+	parties du corps C	—
ρ	densité actuelle de masse ou masse volumique	kg m ⁻³
Σ	fonctionnelle de contrainte	Pa
Σ	fonctionnelle tensorielle	—

Symbole	Description	Unité
σ	tenseur de contrainte de Cauchy, composantes σ_{ij}	Pa
σ_i	contraintes principales de σ	Pa
σ	contrainte	Pa
σ	coefficient de tension superficielle	N m ⁻¹
σ_0	contrainte hydrostatique	Pa
τ	temps	s
τ	contrainte de cisaillement	Pa
φ	fonction	—
ϕ	fonction d'énergie de déformation	J m ⁻³
Φ	fonction d'Airy	Pa m ²
Φ	fonction d'énergie de déformation	J m ⁻³
Φ	fonction	—
χ	fonction vectorielle du mouvement	m
$\hat{\Omega}$	vecteur tourbillon	s ⁻¹
Ω	domaine dans la représentation matérielle	—
$\partial\Omega$	surface du domaine Ω	m ²
ω	domaine dans la représentation spatiale	—
ω_1, ω_2	vitesse de rotation angulaire	s ⁻¹
$\partial\omega$	surface du domaine ω	m ²
$\dot{\omega}$	tenseur des taux de rotation	s ⁻¹
ω	tenseur de rotation infinitésimale	—

Indices et exposants

i, j, k	indices des vecteurs et tenseurs valant 1, 2 ou 3
i	indice de face, de grandeur physique
0	initial ou de référence ou à l'état naturel
$*$	par rapport au référentiel R*
τ	ou adimensionnel
x, y, z	valeur imposée
r, θ, z	composantes cartésiennes
r, φ, θ	composantes en coordonnées cylindriques
	composantes en coordonnées sphériques

Notations

$[\cdot]$	matrice
$[\cdot]^T$	matrice transposée
$[\cdot]^{-1}$	matrice inverse
v, σ	vecteur ou tenseur
L^S	tenseur symétrique
L^A	tenseur antisymétrique
L^s	tenseur sphérique
L^d	tenseur déviateur
$0(\cdot)$	reste d'un développement

Symbol	Description	Unité
$\circ(\cdot)$	reste d'un développement tendant vers 0 lorsque son argument tend vers 0	
Opérateurs		
.	produit scalaire	
\otimes	produit tensoriel de deux vecteurs	
\times	produit vectoriel	
:	produit scalaire de deux tenseurs	
C^∞	classe des fonctions infiniment différentiables	
det	déterminant d'une matrice	
diag(a, b, c)	matrice diagonale de composantes a, b, c	
∇	gradient	
div	divergence d'un champ vectoriel	
div	divergence d'un champ tensoriel	
rot = $\nabla \times$	rotationnel d'un champ vectoriel	
$\ \cdot\ $	norme d'un vecteur ou d'un tenseur	
tr	trace d'un tenseur	
Δ	laplacien	
$\Delta\Delta$	opérateur biharmonique	
$\frac{D}{Dt}$	dérivée matérielle	
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps	
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	dérivée partielle par rapport à la coordonnée x_i	
$\sum_{i=1}^n$	somme pour i allant de 1 à n	

Suggestions pour la résolution des exercices

Chapitre 1

- [1.3]** Suivre la démarche de l'exemple 2 (§ 1.3.6).
- [1.4]** Suivre la démarche de l'exemple 2 (§ 1.2.5).
- [1.6]** Suivre la démarche des exemples des paragraphes 1.4.6-8.
- [1.7]** Suivre la démarche des exemples des paragraphes 1.4.6-8.
- [1.8]** Suivre la démarche des exemples des paragraphes 1.4.6-8.
- [1.15]** Suivre la démarche de l'exemple du paragraphe 1.3.8 pour un tenseur antisymétrique.
- [1.16]** Multiplier la relation (1.123) exprimée pour le tenseur \mathbf{T} par l'inverse du tenseur \mathbf{T} et remplacer \mathbf{T}^2 dans la relation (1.140).

Chapitre 2

- [2.4]** Eliminer le paramètre t des équations du mouvement.
- [2.8]** Utiliser (2.77), (2.91), (2.166) et (2.181).
- [2.11]** Utiliser (2.108), (2.111), (2.112) et (2.109).
- [2.12]** Exprimer des vecteurs $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ en fonction des ε_{ij} et utiliser l'approximation $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$, lorsque $\alpha \ll 1$.
- [2.15]** Utiliser (2.81) lorsque e_{ij} est remplacé par ε_{ij} et faire apparaître les définitions suivantes $\cos \theta = \frac{dx_1}{dS}, \sin \theta = \frac{dx_2}{dS}$.

Chapitre 3

[3.2] Appliquer l'équation de conservation de la masse au champ de vitesse donné ; en déduire une relation sur la masse volumique ρ . Calculer les trajectoires et obtenir l'égalité de l'exercice.

[3.4] (2) Trouver le vecteur normal sur le plan et la sphère en utilisant le gradient et utiliser (3.76).

[3.6] Considérer les composantes des forces et des moments comme composantes de vecteurs. Exprimer l'équilibre de la force et du moment sur la surface et utiliser le théorème de la divergence.

[3.9] Par le théorème de la divergence, convertir l'intégrale de surface en intégrale de volume. Ensuite utiliser le principe de conservation de la quantité de mouvement.

[3.11] Utiliser (3.141) et (3.152) ; (3.149), (2.205) et (3.152).

Chapitre 4

[4.4] (1) Pour le fluide parfait, le terme $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ devient $-p \operatorname{tr} \mathbf{d} = -p \nabla \cdot \mathbf{v}$.

[4.4] (2) La relation à établir s'écrit $\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r$.

Chapitre 5

[5.2] Utiliser les relations (2.213), (2.181), (2.183) et (2.56)

[5.3] Noter que $D/Dt^* = D/Dt$.

[5.4] Utiliser les résultats des exercices 5.2 et 5.3.

[5.5] La relation (5.64) est celle résultant de l'exercice 5.3 pour $\mathbf{T} = \mathbf{d}$.

Chapitre 6

[6.1] Utiliser (2.77) et (2.179).

[6.2] Insérer (6.14) dans (4.23).

[6.4] Utiliser (2.88), (2.108) et (2.110) ; utiliser (6.61).

[6.6] Exprimer \mathbf{C}^{-1} en utilisant (1.123) pour modifier (6.172) ; exprimer \mathbf{c}^2 en utilisant (1.123) pour modifier (6.173).

[6.10] Utiliser (6.78) dans (6.86) pour l'état de contrainte plane et suivre la démarche du paragraphe 6.5.3.

[6.11] Simplifier (6.159)₁ pour la traction simple et utiliser (6.110)₁.

[6.14] (1) Introduire (6.175) et (6.176) dans (6.174) et prendre la trace de l'équation résultante.

[6.14] (2) Utiliser (1.109), (6.175)-(6.177) pour montrer que les axes principaux de $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^d, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^d$ coïncident.

[6.14] (3) Introduire (6.176) dans la première partie de (6.178).

[6.15] Modifier la partie gauche selon (4.23), et utiliser la relation (3.76) et le théorème de la divergence.

[6.16] (2) Introduire (6.182) dans (6.104).

[6.16] (3) Introduire (6.184) dans (6.106).

Chapitre 7

[7.1] Insérer (7.18) dans (7.21)-(7.23) et utiliser (7.20).

[7.2] Insérer (7.18) dans (7.43) et utiliser (7.20).

[7.3] Insérer (7.317) dans (7.7).

[7.4] (1) Utiliser (1.190) pour modifier (7.7).

[7.4] (2) Utiliser (6.109)₂ pour modifier (7.7).

[7.4] (3) Utiliser (1.190) pour modifier (7.7).

[7.5] Suivre la démarche du problème du cylindre creux avec des extrémités fixes (p. 228).

[7.6] Prendre la divergence de (7.209) et utiliser (1.191).

[7.7] Prendre le rotationnel de (7.205) et utiliser (1.237).

[7.8] Démontrer (7.38) et suivre la démarche du problème de charge linéique (p. 239).

[7.9] Démontrer (7.38) et suivre la démarche du problème de charge linéique (p. 239).

Chapitre 8

[8.2] La solution s'obtient par combinaison de l'écoulement plan de Couette et celui de Poiseuille plan.

[8.3] Montrer d'abord que v_r est nulle. Pour le calcul de la pression, on se rappellera que l'intégration de

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}$$

donne

$$p = \rho \int_{R_1}^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr' + f(z)$$

avec r' une variable de travail.

[8.4] Montrer qu'en tenant compte des symétries du problème, la seule composante de vitesse non nulle est $v_\varphi = v_\varphi(r, \theta)$. La condition imposée à cette composante sur la sphère dépend de l'angle de colatitude. On intègre la relation (B.33) par séparation des variables telle que $v_\varphi = f(r)g(\theta)$. Il faut aussi tenir compte de la condition aux limites à l'infini.

[8.5] Même démarche qu'au problème 8.4. Dans ce cas, on impose une condition aux limites sur la sphère extérieure.

[8.7] On impose la condition sur le bord à la vitesse v_1 et on tient compte de la relation qui lie le champ de vitesse au gradient de pression.

[8.8] On exprime le problème en coordonnées cylindriques. On montre que la seule composante de vitesse est $v_z = v_z(r)$ où l'axe de la géométrie est repéré par la coordonnée z . Pour calculer la force de frottement, on utilise la composante de la contrainte σ_{rz} .

Bibliographie

- [1] J.-Ph. ANSERMET, *Mécanique*, PPUR, Lausanne, 2009.
- [2] R. ARIS, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover, New York, 1989.
- [3] M. AZAÏEZ, M. O. DEVILLE, E. H. MUND, *Eléments finis pour les fluides incompressibles*, PPUR, Lausanne, 2011.
- [4] G. K. BATCHELOR, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [5] M. F. BEATTY, Topics in Finite Elasticity : Hyperelasticity of Rubber, Elastomers and Biological Tissues, with examples, *Appl. Mech. Rev.*, 40, 1997.
- [6] R. BERKER, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, *Handbuch der Physik*, VIII/3, pp. 1-384, Springer, Berlin, 1963.
- [7] L. BOREL, D. FAVRAT, *Thermodynamique et énergétique*, PPUR, Lausanne, 2005.
- [8] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, New York, 1981.
- [9] F. CHARRU, *Instabilités hydrodynamiques*, CNRS éditions, EDP Sciences, Paris, 2007.
- [10] P. CHASSAING, *Mécanique des fluides : éléments d'un premier parcours*, Cépaduès, Toulouse, 1997.
- [11] P. CHASSAING, *Turbulence en mécanique des fluides*, Cépaduès, Toulouse, 2000.
- [12] P. C. CHOU, N. J. PAGANO, *Elasticity : Tensor, Dyadic and Engineering Approaches*, Dover, New York, 1992.
- [13] P. G. CIARLET, *Mathematical Elasticity : Three-dimensional Elasticity*, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [14] J. COIRIER, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris, 2001.
- [15] D. A. DANIELSON, *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*, 2^e édition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1997.
- [16] M. O. DEVILLE, T. B. GATSKI, *Mathematical Modeling for Complex Fluids and Flows*, Springer, Berlin, 2012.
- [17] P. G. DRAZIN, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [18] P. G. DRAZIN, W. H. REID, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [19] A. C. ERINGEN, *Mechanics of Continua*, J. Wiley, New York, 1967.
- [20] R. A. EUBANKS, E. STERNBERG, On the Completeness of the Boussinesq-Papkovich Stress Functions, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5, pp. 735–746, 1956.
- [21] L. EULER, *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, PPUR, Lausanne, 2003.
- [22] Y. C. FUNG, P. TONG, *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific, New Jersey, 1994.
- [23] P. GERMAIN, *Cours de mécanique des milieux continus, tome I, Théorie générale*, Masson, Paris, 1973.
- [24] P. GERMAIN, P. MULLER, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1995.
- [25] T. GMÜR, *Méthode des éléments finis*, PPUR, Lausanne, 2000.
- [26] K. F. GRAFF, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York, 1991.
- [27] C. GRUBER, *Mécanique générale*, PPUR, Lausanne, 1988.
- [28] M. E. GURTIN, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
- [29] E. GUYON, J.-P. HULIN, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences/CNRS Editions, Paris, 2001.
- [30] P. HAUPT, *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer, Berlin, 2000.
- [31] J.-P. HENRY, F. PARSY, *Cours d'élasticité*, Dunod Université, Paris, 1993.
- [32] G. A. HOLZAPFEL, *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*, J. Wiley, UK, 2000.
- [33] K. HUTTER, K. JÖHNK, *Continuum Methods of Physical Modeling*, Springer, Berlin, 2004.
- [34] K. L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [35] W. M. LAI, D. RUBIN, E. KREMPL, *Introduction to Continuum Mechanics*, 4^e édition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2010.
- [36] SIR H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [37] L. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Butterworth Heinemann, Oxford, 1997.
- [38] W. E. LANGLOIS, M. O. DEVILLE, *Slow Viscous Flow*, 2^{de} édition, Springer, 2014.
- [39] C. C. LIN, L. A. SEGEL, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [40] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4^{me} édit., Dover, New York, 1944.

- [41] L. E. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [42] J. MANDEL, *Cours de Mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [43] J. E. MARSDEN, T. J. R. HUGHES, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, New York, 1994.
- [44] G. E. MASE, *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's outline series, McGraw Hill, New York, 1970.
- [45] G. THOMAS MASE, G. E. MASE, *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [46] J. OBALA, *Exercices et problèmes de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1997.
- [47] R. W. OGDEN, *Non Linear Elastic Deformations*, Dover, New York, 1997.
- [48] C. W. OSEEN, Über die Stokes'sche formel, und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, vi, No. 29, 1910.
- [49] R. L. PANTON, *Incompressible Flow*, J. Wiley, New York, 1984.
- [50] S. B. POPE, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [51] M. RIEUTORD, *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson, Paris, 1997.
- [52] R. S. RIVLIN, Large deformations of isotropic materials, IV. Further developments of the general theory, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, A241, pp. 379-397, 1948.
- [53] R. S. RIVLIN, *Collected Papers*, Vol. I et II, Eds. G. I. Barenblatt et D. D. Joseph, Springer, New York, 1996.
- [54] I. L. RYHMING, *Dynamique des fluides*, PPUR, Lausanne, 2004.
- [55] J. SALENÇON, *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*, Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [56] P. J. SCHMID, D. S. HENNINGSON, *Stability and Transition in Shear Flows*, Springer, Berlin, 2001.
- [57] L. A. SEGEL, *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*, Dover, New York, 1987.
- [58] J. SERRIN, Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. VIII/1, Ed. S. Flügge, Springer, Berlin, pp. 125–263, 1959.
- [59] W. SLAUGHTER, *The Linearized Theory of Elasticity*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [60] R. W. SOUTAS-LITTLE, *Elasticity*, Dover, Mineola, New York, 1973.
- [61] A. J. M. SPENCER, *Continuum Mechanics*, Dover, New York, 2004.
- [62] E. STERNBERG, On Some Recent Developments in Linear Theory of Elasticity, Proc. 1st Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, New York, 1960.

- [63] S. SUCCI, I. V. KARLIN, H. CHEN, Colloquium: Role of the H -Theorem in Lattice Boltzmann Hydrodynamic Simulations, *Rev. Modern Phys.*, 74, pp. 1203-1220, 2002.
- [64] H. TENNEKES, J. H. LUMLEY, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Boston, 1972.
- [65] S. P. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Auckland, 1988.
- [66] L. R. G. TRELOAR, *The Physics of Rubber Elasticity*, 3^e édition, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [67] C. TRUESDELL, *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Masson, Paris, 1974.
- [68] C. TRUESDELL, *Rational Thermodynamics*, Springer, 2^e éd., New York, 1984.
- [69] C. TRUESDELL, K. R. RAJAGOPAL, *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [70] C. TRUESDELL, R.A. TOUPIN, The Classical Field Theories, In *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/1, Ed. by S. Flügge, Springer, Berlin, pp. 226-793, 1960.
- [71] A. C. UGURAL, S. K. FENSTER, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 3^{me} édit., Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [72] M. VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford, 1983.
- [73] TH. VON KÁRMÁN, Supersonic Aerodynamics—Principles and Applications, *J. Aero. Sc.*, 14, pp. 373-402, 1947.
- [74] M. WESTERGAARD, *Theory of Elasticity and Plasticity*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952 et Dover Publications, New York, 1952.
- [75] C. H. K. WILLIAMSON, Vortex Dynamics in Cylinder Wake, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28, pp. 477-539, 1996.
- [76] H. ZIEGLER, *An introduction to Thermomechanics*, North Holland, Amsterdam, 1977.

Index

- accélération, 5, 66
 de Coriolis, 100
- Airy (fonction de -), 219
- allée de von Kármán , 276
- angle
 de glissement, 89
 de Mach, 279
- axe principal de contrainte, 128
- base
 canonique, 5
 orthogonale, 5
- Beltrami-Michell (équation de -), 213
- Boltzmann (théorie de -), 157
- Boussinesq (problème de -), 234
- Cauchy
 (équation du mouvement de -), 126
 (lemme de -), 120
 (matériau élastique de -), 184
 (postulat de -), 116
 (tenseur de -), 124, 137, 188
 (tenseur de déformation de -), 98
 (tétraèdre de -), 123
 (théorème de -), 122, 135, 148
- Cauchy, Augustin Louis, 75
- Cauchy-Green (tenseur de déformation de -), 74–76, 98
- Cayley-Hamilton (théorème de -), 30
- Cerruti (problème de -), 232
- chaleur
 déagée, 147
 massique, 207
 reçue, 147
- champ
 irrotationnel, 39
 solénoïdal, 38
- charge linéaire, 239
- choc, 280
- cinématique, 55
 des milieux continus, 55
- circulation de la vitesse, 315
- cisaillement, 198
 simple, 84
- Clausijs, Rudolf, 159
- Clausijs-Duhem (inégalité de -), 160, 170, 200, 204
- coefficient
 d'élasticité de Lamé, 196
 d'expansion thermique, 206
 de frottement, 303
 de Lamé, 192
 de Poisson, 196
- compression, 125, 133
 uniforme, 83, 133
- concept de mémoire évanescante, 175
- condition
 aux limites, 214, 244
 d'incompressibilité, 112, 189
 de surface libre, 290
- conduction de la chaleur, 199
- configuration, 55, 77
- conservation
 de l'énergie, 145
 de l'énergie mécanique, 151
 de la masse, 109, 153, 284
 de la quantité de mouvement, 153
 du moment cinétique, 153
- contrainte
 de cisaillement, 125
 de comparaison, 131
 de contact matérielle, 117
 de contact nominale, 117
 de von Mises, 131
 normale, 125
 octaédrique, 131
 plane, 134, 241, 244
 principale, 128
 uniforme de cisaillement, 133
- convention de sommation, 7
- coordonnées, 6
 cartésiennes, 6

- curvilignes, 42, 43
- cylindriques, 43, 45
- sphériques, 45
- sphériques, 43
- corde
 - élastique, 257
 - infinie, 256
- corps, 55
- corps rigide
 - (mouvement d'un -), 69, 71, 83
 - (rotation du -), 70, 155
 - (translation du -), 70
- cosinus directeur, 6
- Couette (écoulement plan de -), 297
- cylindre creux sous pression, 228, 241
- d'Alembert (solution de -), 254
- débit-volume, 294
- décomposition
 - polaire, 33, 74
 - spectrale d'un tenseur, 30
- définition
 - d'un fluide, 174
 - d'un solide, 174
- déflexion maximale de la poutre, 246
- déformation, 56
 - homogène, 82
 - pure, 74
- densité
 - initiale de masse, 109
 - massique spatiale de force volumique, 115
- déplacement
 - \mathbf{u} , 57
 - matériel, 61
 - spatial, 61
- déplacement (petit -), 86, 139
- dérivée
 - d'une fonction tensorielle, 35
 - d'une fonction vectorielle, 35
 - matérielle, 64, 65
 - matérielle de l'énergie interne, 152
 - matérielle temporelle, 105
- description
 - eulérienne, 58
 - lagrangienne, 58
 - matérielle, 58, 60
 - spatiale, 58, 60
- déterminant, 15
- diffusivité thermique, 287
- dilatation, 77
- direction
 - d'élongation principale matérielle, 80
 - principale, 27, 188
- divergence
 - d'un tenseur, 38, 39
 - d'un vecteur, 38
- Duhem, Pierre, 160
- dynamique des gaz, 278
- écoulement
 - de Couette circulaire, 300
 - de Couette plan, 291
 - de Poiseuille plan, 293
 - hypersonique, 280
 - irrotationnel, 314
 - isentropique, 203
 - laminaire, 275
 - plan de Couette d'un fluide compressible, 297
 - subsonique, 279
 - supersonique, 279
 - sur un plan incliné, 295
- effet Weissenberg, 274
- élasticité linéaire infinitésimale, 195
- élastodynamique, 249
- élastostatique linéaire, 212
- élongation
 - principale, 80, 191
- enceinte sous pression à paroi mince, 243
- énergie
 - cinétique, 146
 - de déformation, 186, 205, 207
 - de propagation des ondes, 260
 - interne, 146
 - libre, 184, 205
 - libre spécifique de Helmholtz, 160
 - totale, 146
- enthalpie massique, 202
- entropie d'un système, 156
- équation
 - de diffusion de Beltrami, 317
 - biharmonique, 219, 243, 245
 - caractéristique, 27, 85
 - constitutive, 182, 186
 - d'équilibre, 126, 132, 212
 - déformation-déplacement, 212
 - de Bernoulli, 322
 - de Boltzmann, 158
 - de compatibilité, 91, 213, 243

- de compatibilité de Beltrami-Michell, 213, 223, 237
 de comportement, 164, 212
 de constitution, 164, 200
 de continuité, 112, 114
 de Laplace, 40
 de Liouville, 158
 de Navier, 213, 223, 269
 de Navier-Stokes, 159, 284, 287, 297
 de Newton-Hamilton, 158
 de Poisson, 40
 de propagation d'onde, 258
 de Saint-Venant-Kirchhoff, 196
 de Stokes, 289
 des ondes, 325
 du mouvement, 136, 247
 du mouvement de Cauchy, 126
 du mouvement en termes de potentiels, 249
 équation de Navier-Stokes (forme réduite de $-$), 289
 espace
 ponctuel euclidien, 4
 vectoriel, 4
 état
 de contrainte, 124
 de contrainte bidimensionnel, 129
 de contrainte homogène, 132
 de contrainte hydrostatique pure, 130
 de contrainte plane, 219
 de contrainte tridimensionnel, 129
 de contrainte unidimensionnel, 129
 de déformation plane, 215
 Euler-Almansi (tenseur de déformation de $-$), 75, 76, 98
 évolution adiabatique, 148
 expansion uniforme, 83
 extension
 équibiaxiale, 193
 biaxiale, 193
 relative, 88
 uniaxiale, 193
 flexion pure, 134
 fluide
 barotrope, 203, 319
 classique, 179
 de Rivlin-Ericksen, 179
 incompressible, 178, 179, 288
 non newtonien, 179
 non visqueux, 179
 parfait, 179
 simple, 177
 visqueux newtonien, 200
 flux de chaleur, 148, 199, 298
 fonction
 d'énergie, 184, 187, 190
 d'énergie de déformation (forme de la $-$), 190
 d'Airy, 240
 de contrainte, 236, 243
 de contrainte pour des problèmes de contrainte plane, 221
 de contrainte pour des problèmes de déformation plane, 218
 de déformation de Love, 230
 de déplacement, 223
 de Maxwell, 237
 de Morera, 237
 des contraintes d'Airy, 219
 scalaire d'un tenseur, 34
 tensorielle isotrope, 33, 183
 force, 114
 de contact, 115, 152
 de Coriolis, 155
 de volume, 152
 volumique, 115, 132
 forme
 de la fonction d'énergie de déformation, 190
 locale du second principe, 160
 matérielle de conservation de la masse, 109
 matérielle globale de conservation de la masse, 111
 réduite des équations de Navier-Stokes, 289
 spatiale de la conservation de la masse, 112
 formule
 de Nanson, 79, 135
 de Stokes, 312
 Fourier (loi de $-$), 199
 Fourier, Joseph, 199
 fréquence
 circulaire, 259
 de l'onde, 261
 Galerkin (vecteur de $-$), 229
 Gauss (théorème de $-$), 49

- Gauss, Carl Friedrich, 50
- gaz idéal, 202
- gradient
 - d'un champ scalaire, 36
 - d'un champ scalaire en coordonnées curvilignes orthogonales, 46
 - d'un vecteur, 37
 - d'un vecteur en coordonnées curvilignes orthogonales, 46
- d'une fonction tensorielle à valeur scalaire, 38
- d'une fonction tensorielle à valeur tensorielle, 38
- de déformation, 98
- de vitesse, 92
- Green (matériau élastique de -), 184
- Green, George, 75
- Green-Lagrange (tenseur de déformation de -), 75, 76, 98
- Helmholtz
 - (énergie libre de -), 160
 - (théorème de -), 223
- Hooke (loi de -), 196, 206, 216
- Hooke, Robert, 196
- hyperélasticité, 184
- hypothèse
 - de causalité, 166
 - de déterminisme, 166
 - de Stokes, 285
 - de Valanis-Lander, 191
- inégalité
 - de Clausius-Duhem, 160, 170, 200, 204
- inflation d'un ballon, 193
- invariant
 - principal, 129, 186
- irréversibilité locale, 202
- jacobien, 73, 106
- Kelvin (problème de -), 230
- Kirchhoff, Gustav, 135
- Kronecker (symbole de -), 8, 13
- Lagrange, Joseph-Louis de, 57
- Lamé
 - (potentiel de déformation de -), 224
 - (coefficient de -), 192, 196
- Lamé, Gabriel, 192
- laplacien
 - d'un champ scalaire, 40
 - d'un champ vectoriel, 41
- Leibnitz (théorème de -), 108
- lemme de Cauchy, 120
- ligne
 - d'émission, 67
 - de courant, 67
 - tourbillon, 315
- linéarisation
 - cinématique, 87
 - des tenseurs de contraintes, 138
- Liouville (équation de -), 158
- loi
 - de comportement classique, 177
 - de conservation de l'énergie interne, 149
 - de Fourier, 199
 - de Hooke, 196, 206, 216
 - de transformation, 17
- longueur d'onde, 262
- Lord Rayleigh, 250
- mécanique newtonienne, 158
- mémoire évanescante (concept de -), 175
- méthode
 - de séparation des variables, 258
 - des éléments finis, 223, 278
 - des potentiels, 222
 - des variables complexes, 222
 - inverse, 222
 - semi-inverse, 222, 239
 - variationnelle, 222
- Mach (nombre de -), 286–288
- masse, 109
 - volumique, 5
- matériau
 - de Saint-Venant-Kirchhoff, 192
 - élastique de Cauchy, 184
 - élastique de Green, 184
 - élastique linéaire, 185
 - homogène, 170
 - hyperélastique isotrope, 186
 - incompressible, 189, 190
 - isotrope, 170
 - simple, 171
- matrice
 - associée au tenseur, 15
 - orthogonale, 8
- milieu

- élastique isotherme, 181
- continu, 55
- modèle
 - de Mooney-Rivlin, 191, 193
 - de Valanis-Lander, 191
 - néo-hookéen, 190, 193
- mode principal, 262
- module
 - de cisaillement, 198
 - de compressibilité, 198
 - de rigidité à la dilatation, 198
 - de rigidité au glissement, 198
 - de Young, 196
- moment cinétique, 118
- Mooney-Rivlin (modèle de -), 191, 193
- mouvement, 56
 - du corps rigide, 69, 71, 83
 - isochore, 111, 112
 - rigidifiant (notion de -), 99
- mur du son, 280
- Nanson (formule de -), 79, 135
- Navier (équation de -), 213
- Navier-Stokes (équation de -), 284, 287, 289, 297
- Newton-Hamilton (équation de -), 158
- nombre
 - de Froude, 289
 - de Knudsen, 1
 - de Mach, 286–288
 - de Prandtl, 286, 287
 - de Reynolds, 275, 286, 287
 - de Strouhal, 276
- norme d'un vecteur, 4
- notion de flux, 48
- objectivité
 - de l'accélération, 98
 - de la conservation de l'énergie, 154
 - de la vitesse, 98
 - des quantités cinématiques, 95
 - et mouvement rigidifiant, 99
 - (notion d'-), 99
- observateur, 56
 - galiléen, 120
- onde
 - élastique plane, 254
 - de choc, 280
 - de dilatation, 247, 248, 253
 - de distorsion, 247–249, 253
 - de surface de Rayleigh, 250
- longitudinale dans une poutre, 267
- stationnaire, 262
- opérateur
 - laplacien, 40
 - linéaire, 15
- Papkovich-Neuber (présentation de -), 233
- paramètres conjugués, 153
- période de l'onde, 261
- pertes de charges, 303
- Piola-Kirchhoff
 - (premier tenseur de contrainte de -), 136
 - (premier vecteur contrainte de -), 135
 - (second tenseur de contrainte de -), 137
 - (second vecteur de contrainte de -), 137
 - (tenseur de contrainte de -), 182, 188
- plan principal, 128
- point
 - fixe, 70
 - matériel, 55
- Poisson (coefficient de -), 196
- postulat de Cauchy, 116
- potentiel de déformation de Lamé, 224
- poutre
 - courte, 246
 - longue, 246
 - longue et mince, 244
 - longue et mince sous charge
 - uniforme q , 244
- présentation de Papkovich-Neuber, 233
- Prandtl (nombre de -), 286, 287
- premier
 - principe de la thermodynamique, 148, 154
 - tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff, 136
 - tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, 153
 - vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff, 135
- pression hydrostatique, 130, 133, 189
- principe
 - d'action locale, 167, 173
 - d'admissibilité, 170

- d'équiprésence, 173
- d'invariance matérielle, 169, 183
- d'objectivité, 167, 174, 179, 182, 196
 - de conservation de l'énergie mécanique, 152
 - de conservation de la masse, 110
 - de conservation de la quantité de mouvement, 119, 125
 - de conservation du moment cinétique, 119, 126, 137
 - de déterminisme, 173
 - de mémoire, 170
 - de mémoire régulière, 175
 - de Saint-Venant, 214, 239
 - (premier – de la thermodynamique), 148
 - (second – de la thermodynamique), 159
 - de superposition, 215
- problème
 - de Boussinesq, 234
 - de Cerruti, 232
 - de Kelvin, 230
- produit
 - extérieur de deux tenseurs, 18
 - scalaire, 11
 - scalaire de deux tenseurs, 24
 - scalaire de deux vecteurs, 4, 11, 13
 - tensoriel de deux vecteurs, 16
 - vectoriel, 12
 - vectoriel de deux vecteurs, 12
- profondeur de pénétration, 305, 307
- puissance, 146
 - des forces, 149
 - des forces de contact, 150
 - mécanique, 153
- quantité
 - de mouvement, 117
 - objective, 97
 - physique, 95
 - tensorielle matériellement objective, 98
 - tensorielle spatialement objective, 98
 - vectorielle matériellement objective, 97
 - vectorielle spatialement objective, 97
- référentiel, 56
 - galiléen, 100
- rapport calorifique, 203
- Rayleigh(onde de surface –), 250
- relation constitutive, 185
- Reynolds
 - (nombre de –), 286, 287
 - (théorème de –), 107, 108, 112, 118
- Reynolds, Osborne, 108
- Rivlin-Ericksen (théorème de –), 33
- rotation, 83
 - angulaire, 72
 - de corps rigide, 155
 - de corps rigide autour d'un point fixe, 70
- rotationnel d'un champ vectoriel, 39
- Saint-Venant
 - (équation de compatibilité de –), 91
 - (principe de –), 214
- Saint-Venant-Kirchhoff
 - (équation de –), 196
 - (matériau de –), 192
- scalaire, 9
- second principe de la thermodynamique, 159
- solution
 - autosmilaire, 305
 - d'une corde élastique, 264
 - de d'Alembert, 254, 331
 - en élasticité linéaire, 222
 - somme de tenseurs, 20
 - sphère creuse sous pression, 226
- Stokes
 - (équation de –), 289
 - (hypothèse de –), 285
 - (théorème de –), 51
- Stokes, George Gabriel, 51
- symbole
 - de Kronecker, 8, 13
 - de permutation, 12
- tenseur, 3, 17
 - antisymétrique, 22, 72
 - (composantes du –), 15
 - (contraction d'un –), 19
 - d'ordre n , 17
 - d'ordre 2, 14
 - d'ordre quelconque, 17

- (décomposition spectrale d'un $-$),
30
de contrainte de Cauchy, 124, 188
de contrainte de Piola-Kirchhoff,
182
de déformation de Cauchy, 98
de déformation de Cauchy-Green,
98
de déformation de Cauchy-Green
droit, 74, 76
de déformation de Cauchy-Green
gauche, 75
de déformation de Cauchy-Green
gauche et son inverse, 76
de déformation de Euler-Almansi,
75, 76, 98
de déformation de Green-
Lagrange, 75, 76, 98
de déformation infinitésimale, 87,
195
défini positif, 30
de rotation, 71
de rotation infinitésimale, 90
des contraintes, 122
des contraintes de Cauchy, 137, 153
des taux de déformation, 93
des taux de déformation de Green-
Lagrange, 153
des taux de rotation, 93
déviateur, 23
déviateur des contraintes, 130
(divergence d'un $-$), 39
du gradient de déformation, 73, 171
(fonction scalaire d'un $-$), 34
(invariant scalaire d'un $-$), 28
inverse, 22
(matrice du $-$), 15
nul, 14, 18
objectif, 97
orthogonal, 24, 97
(premier – de contrainte de Piola-
Kirchoff), 153, 188
(produit de $-$), 18
(second – de contrainte de Piola-
Kirchhoff), 137, 153
(second – de Piola-Kirchhoff), 185
singulier, 15
symétrique, 22
(trace d'un $-$), 23
transposé, 21
unité, 14, 26
- (valeur propre d'un $-$), 26
(vecteur dual d'un $-$), 25
- tenseurs
égaux, 18
(produit intérieur de deux $-$), 20
(somme de $-$), 20
tension superficielle, 290
tétraèdre de Cauchy, 123
théorème
de l'énergie cinétique, 150
de Cauchy, 122, 135, 148
de Cayley-Hamilton, 30
de Crocco, 322
de décomposition polaire, 32, 74,
172, 182
de Gauss, 49
de Helmholtz, 223
de Kelvin, 322
de la divergence, 49, 109, 125, 147
de la racine carrée, 30
de Leibnitz, 108
de localisation, 111
de représentation de Rivlin-
Ericksen, 33
de Stokes, 51
du transport de Reynolds, 107,
108, 112, 118, 149
 H , 159
- théorie
cinétique des gaz, 285
de Boltzmann pour l'hydrodynamique, 157
de l'élasticité, 184
de l'élasticité linéaire, 211
thermoélasticité, 205
thermodynamique du gaz idéal, 202
tourbillon, 93, 275, 313, 316, 319, 321
traction, 125, 133
simple, 197
uniforme, 133
trajectoire, 67
transformation affine, 82
translation, 83
de corps rigide, 70
uniforme, 154
tube tourbillon, 315
- Valanis-Lander
(hypothèse de $-$), 191
(modèle de $-$), 191

- valeur
 principale, 188
 propre, 79
 propre d'un tenseur, 26
- variable
 matérielle, 60
 spatiale, 60
- vecteur, 3, 10
 (second – de contrainte de Piola-Kirchhoff, 137
 contrainte, 128
 contrainte spatiale, 116
 de traction surfacique, 116
 dual, 72, 155
 objectif, 97
 propre, 31
 propre unitaire, 26, 79
- tourbillon, 93
- vecteur de Galerkin, 229, 232
- vibration d'une corde élastique, 261
- viscosité
 cinématique, 180
 dynamique, 179
 volumique, 179
- vitesse, 64
 d'onde dans des solides élastiques, 268
 débitante, 303
 de l'onde de surface, 251, 253
 du son, 326
- von Helmholtz, Hermann, 161
- vorticité, 93
- Young (module de -), 196