Enseignement des mathématiques

Analyse avancée pour ingénieurs

4e édition

Bernard Dacorogna
Chiara Tanteri

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}\right)$$

Presses polytechniques et universitaires romandes

Enseignement des mathématiques

Analyse avancée pour ingénieurs

La matière traitée dans cet ouvrage comprend l'*analyse vectorielle* (théorèmes de Green, de la divergence, de Stokes), l'*analyse complexe* (fonctions holomorphes, équations de Cauchy-Riemann, séries de Laurent, théorème des résidus, applications conformes) ainsi que l'*analyse de Fourier* (séries de Fourier, transformée de Fourier, transformée de Laplace, applications aux équations différentielles) ■ Les définitions et les théorèmes principaux sont présentés sous forme d'aide-mémoire, ils sont donc énoncés avec clarté et précision mais sans commentaires ■ Des exemples significatifs sont ensuite discutés en détails ■ Enfin, de nombreux exercices sont proposés et ils sont intégralement corrigés ■ Ce livre s'adresse en premier lieu à des étudiants ingénieurs qui ont suivi un cours d'analyse de base (calcul différentiel et intégral). Il peut aussi être utile aux étudiants en mathématiques ou en physique comme complément à un cours plus théorique.

EPFL ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Bernard Dacorogna a obtenu sa licence ès sciences mathématiques à l'Université de Genève, son master of science à l'Université d'Aberdeen (Grande-Bretagne) et son doctorat à l'Université Heriot-Watt (Grande-Bretagne). Il rejoint l'EPFL en 1981 où il est maintenant professeur. Il est l'auteur de très nombreuses publications scientifiques et de quatre livres sur ses sujets de recherche qui sont le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles.

Chiara Tanteri a obtenu son diplôme de mathématiques à l'Université La Sapienza de Rome et son doctorat à l'EPFL dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Son enseignement s'inscrit dans le cadre de l'analyse mathématique.

ISBN 978-2-88915-262-9

9 782889 152629

Presses polytechniques et universitaires romandes

Analyse avancée pour ingénieurs

Illustration de couverture : Texte extrait de Leonhardi Euleri,
Institutionum calculi integralis, vol. 3, Petropoli, 1827.

Enseignement des mathématiques

Analyse avancée pour ingénieurs

4e édition

Bernard Dacorogna
Chiara Tanteri

Presses polytechniques et universitaires romandes

Les auteurs et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL)
pour le soutien apporté à la publication de cet ouvrage.

DANS LA COLLECTION «ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES»
DIRIGÉE PAR LE PROFESSEUR ROBERT C. DALANG

Calcul différentiel et intégral
Jacques Douchet et Bruno Zwahlen
Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Analyse complexe
Jacques Douchet

Applications des mathématiques: la boîte à outils
Amel Chaabouni, Arezki Mohammedi

Algèbre linéaire
Robert C. Dalang et Amel Chaabouni
Aide-mémoire, exercices et applications

Introduction à la statistique
Stephan Morgenthaler

Analyse, Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 1 et 2
Jacques Douchet

Introduction à l'analyse numérique
Jacques Rappaz et Marco Picasso

Introduction à l'optimisation différentiable
Michel Bierlaire

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross
Traduction de la neuvième édition américaine

La Fondation des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR)
publie principalement les travaux d'enseignement et de recherche
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL),
des universités et des hautes écoles francophones.

Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne,
ppur@epfl.ch, tél.: +41 21 693 21 30, fax: +41 21 693 40 27.

www.ppur.org

Quatrième édition, 2018
ISBN 978-2-88915-262-9

Première édition, 2002
Deuxième édition corrigée, 2006, 2010, 2011
Troisième édition, 2014, 2016, 2017

Imprimé en Italie

Préface

Ce livre s'adresse en premier lieu à des étudiants ingénieurs qui ont suivi un cours d'analyse de base (calcul différentiel et intégral). Il correspond à la deuxième année du cursus (à raison de deux heures de cours et deux heures d'exercices par semaine) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Nous pensons qu'il peut aussi être utile aux étudiants en mathématiques ou en physique comme complément à un cours plus théorique.

Il existe d'excellents livres sur les sujets traités ici (certains, que nous aimons particulièrement, sont mentionnés dans notre bibliographie). Notre approche est toutefois différente. Comme notre ouvrage s'adresse avant tout à des étudiants ingénieurs nous avons privilégié l'apprentissage de la matière par les exemples et les exercices. En effet nous avons réduit la partie théorique à une sorte d'aide mémoire, tout en essayant de ne pas sacrifier la précision et la rigueur des énoncés des théorèmes et des définitions. Par contre nous avons développé avec beaucoup de détails les exemples et les corrections des exercices. Pour rendre l'accès plus aisé aux étudiants ingénieurs nous avons surtout insisté sur l'applicabilité des méthodes, parfois au dépens d'un développement mathématique rigoureux (particulièrement en ce qui concerne l'analyse vectorielle et les problèmes de convergence dans l'analyse de Fourier). Toutefois les exemples et les exercices ont été choisis pour qu'un tel développement puisse se faire sans trop de difficultés, par un étudiant motivé. Nous espérons donc que ce choix d'organisation de la matière satisfera à deux besoins de nature différente. En premier lieu il devrait permettre à l'étudiant de se préparer efficacement aux examens. Mais il devrait aussi s'avérer utile, plus tard, pour retrouver rapidement et précisément les résultats théoriques importants.

L'organisation générale du livre a été légèrement modifiée dans cette quatrième édition. Les trois premières parties (analyse vectorielle, analyse complexe et analyse de Fourier) sont divisées en chapitres, qui se terminent par une section d'exercices et une section de corrigés détaillés. Les chapitres (à l'exception des deux derniers consacrés aux applications aux équations différentielles et du chapitre 8 *Appendice*) sont organisés comme suit.

1) Les définitions et les théorèmes sont énoncés avec précision mais sans commentaires. Par ailleurs nous mentionnons les pages exactes des livres de notre bibliographie où le lecteur intéréssé pourra poursuivre son étude.

2) Des exemples significatifs sont ensuite discutés en détails.

3) Enfin de nombreux exercices sont proposés (et comme déjà dit, ils sont corrigés intégralement dans la section suivante) et sont divisés en deux catégories. La première, la plus importante par le nombre, permettra à l'étudiant d'assimiler la technique et les concepts présentés dans le chapitre. La seconde (les exercices correspondants étant identifiés par un astérisque) présente des développements théoriques importants qui peuvent permettre aux étudiants les plus motivés d'approfondir le sujet. La quatrième édition contient de nombreux nouveaux exercices de ce second type.

Nous aimerions maintenant faire quelques commentaires sur la bibliographie. Nous avons sélectionné deux types de livres.

1) Nous avons choisi comme livres de références mathématiques les ouvrages suivants dont nous avons aimé la rigueur, la clarté et la profondeur :

- pour l'analyse vectorielle et les séries de Fourier le livre de M.H. Protter et C.B. Morrey ainsi que celui plus avancé de W. Fleming ;
- pour l'analyse complexe celui de L.V. Ahlfors qui est un grand classique ;
- pour la transformée de Laplace et de Fourier le livre de D.V. Widder ;
- les trois livres de E.M. Stein et R. Shakarchi sont aussi de très beaux livres et ils couvrent une bonne partie de la matière discutée dans notre livre (analyse complexe et analyse de Fourier) ;
- enfin les trois volumes de S.D. Chatterji couvrent le domaine entier du présent ouvrage.

2) En ce qui concerne les livres plus spécifiquement pour ingénieurs nous aimons particulièrement le livre de E. Kreyszig. Les deux ouvrages de K. Arbenz et A. Wohlhauser sont aussi, par leur concision, attrayants.

3) Par ailleurs le premier auteur a enseigné le même cours aux mathématiciens (à raison de quatre heures de cours et quatre heures d'exercices par semaine) et mettra à disposition sur le web dès la fin de 2018 ses notes de cours [7]. Elles peuvent permettre aux étudiants les plus motivés d'approfondir le sujet.

Enfin nous voudrions terminer cette brève préface en adressant nos plus vifs remerciements à tous ceux qui nous ont aidé à la réalisation de notre livre. En premier lieu nous pensons à tous les étudiants qui ont suivi notre cours et qui par leurs commentaires nous ont permis d'améliorer sensiblement diverses parties du présent livre. Nous avons bénéficié aussi de nombreux commentaires d'assistants et de collègues, lors des quatre éditions, notamment de S. Bandyopadhyay, M. Cibils, G. Croce, G. Csato, S. Dubuis, H. Gebran, O. Kneuss, P. Metzener, G. Pisante, A. Ribeiro, L. Rollaz, K.D. Semmler, S. Sil et D. Strütt. Lors de la troisième édition, J. Douchet nous a suggéré, par écrit, plusieurs modifications intéressantes.

La publication open de notre livre fait suite à une initiative de R. Dalang et D. Strütt.

Table des matières

Première partie

Analyse vectorielle

Chapitre 1

Opérateurs différentiels de la physique

1.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 1.1 *Par la suite* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sera un ouvert,* $n \geq 2$ *et on notera* $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

(i) *Si* $f \in C^1(\Omega)$ *on définit pour* $x \in \Omega$, $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f(x)$, *par*

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n}$$

appelé le ***gradient*** *de* f.

(ii) *Si* $f \in C^2(\Omega)$ *on définit, pour* $x \in \Omega$, *le* ***Laplacien*** *de* f, $\Delta f = \Delta f(x)$, *par*

$$\boxed{\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}.}$$

Si $\Delta f = 0$ *dans* Ω, *on dit alors que* f *est* ***harmonique*** *dans* Ω.

(iii) *Soit* $F = F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. *On définit pour* $x \in \Omega$, $\operatorname{div} F = \operatorname{div} F(x)$, *par*

$$\boxed{\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}}$$

appelé la ***divergence*** *de* F *(on note parfois* $\nabla \cdot F$*).*

(iv) *Si* $n = 2$ *et si* $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, *on définit pour* $x \in \Omega$, $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} F(x)$, *par*

$$\boxed{\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \in \mathbb{R}}$$

Si $n = 3$ *et si* $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, *on définit, pour* $x \in \Omega$, $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} F(x)$, *par*

$$\boxed{\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \in \mathbb{R}^3}$$

appelé le ***rotationnel*** *de* F *(on note parfois* $\nabla \wedge F$*). On note aussi symboliquement*

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Remarque *(i)* On peut aussi définir le rotationnel de F pour n'importe quelle dimension. Pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \Omega$, on définit, $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} F(x)$, par

$$\boxed{\operatorname{rot} F = \left((-1)^{i+j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \right)_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$$

(ii) On notera souvent les dérivées partielles sous la forme

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \cdots.$$

Théorème 1.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert.*

(i) *Soit* $f \in C^2(\Omega)$ *alors*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$

(ii) *Soient* $n = 3$, $f \in C^2(\Omega)$ *et* $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ *alors*

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

(iii) *Soient* $f \in C^1(\Omega)$ *et* $g \in C^2(\Omega)$ *alors*

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \, \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$

(où $x \cdot y$ *dénote le produit scalaire de deux vecteurs* $x, y \in \mathbb{R}^n$*).*

(iv) *Si* $f, g \in C^1(\Omega)$ *alors*

$$\operatorname{grad}(f\,g) = f\operatorname{grad} g + g\operatorname{grad} f.$$

(v) *Si* $f \in C^1(\Omega)$ *et* $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *alors*

$$\operatorname{div}(f\,F) = f\operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f.$$

(vi) *Si* $n = 3$ *et* $F \in C^2\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ *alors*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F$$

(où si $F = (F_1, F_2, F_3)$ *on a noté* $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$*).*

(vii) *Si* $n = 3,$ $f \in C^1(\Omega)$ *et* $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ *alors*

$$\operatorname{rot}(f\,F) = \operatorname{grad} f \wedge F + f\operatorname{rot} F$$

(où $x \wedge y$ *dénote le produit vectoriel de deux vecteurs* $x, y \in \mathbb{R}^3$*).*

(Pour plus de détails, cf. [2] 4-7, [4] 113-116, [7] chapitre 1, [8] 316-317, [11] 485-497, [12] 417-424).

1.2 Exemples

Exemple 1.3 *Soient* $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$ *et* r *tels que*

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}\,.$$

Soit $f(x) = 1/r$. *Calculer (sans se servir du théorème ci-dessus)*

$$F = \operatorname{grad} f, \quad \triangle f, \quad \operatorname{div} F.$$

Calculer, quand $n = 3$, $\operatorname{rot} F$.

Discussion Noter que le domaine de définition de f est $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. Commençons par calculer $\partial r / \partial x_i = r_{x_i}$. De la définition de r^2 on a, en dérivant des deux côtés de l'identité,

$$2\,r\,r_{x_i} = 2\,(x_i - a_i) \quad \Rightarrow \quad r_{x_i} = \frac{x_i - a_i}{r}\,.$$

(i) On a pour tout $i = 1, \cdots, n$

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(r^{-1}\right) = -r^{-2} r_{x_i} = -\frac{x_i - a_i}{r^3}$$

et donc

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) = -\frac{1}{r^3}(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) = -\frac{x-a}{r^3}.$$

(ii) Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} f_{x_i x_i} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i - a_i}{r^3}\right) = -\frac{r^3 - 3(x_i - a_i) r^2 r_{x_i}}{r^6} \\ &= -\frac{r - 3(x_i - a_i)\frac{x_i - a_i}{r}}{r^4} = \frac{3(x_i - a_i)^2 - r^2}{r^5}. \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i} = \frac{1}{r^5}\left[3\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} r^2\right] = \frac{1}{r^5}\left[3\,r^2 - n\,r^2\right] = \frac{3-n}{r^3}.$$

Noter que, quand $n = 3$, on a $\triangle f = 0$. (Ce résultat aurait pu se déduire à l'aide du théorème, du calcul précédent pour le gradient et de celui de la divergence qui suit).

(iii) Comme $F_i = f_{x_i}$, on déduit

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{x_i}) = f_{x_i x_i}$$

et on retrouve

$$\operatorname{div} F = \triangle f = \frac{3-n}{r^3}.$$

(iv) Par le théorème ci-dessus on doit avoir $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, mais vérifions-le directement

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_3 x_2} - f_{x_2 x_3} \\ f_{x_1 x_3} - f_{x_3 x_1} \\ f_{x_2 x_1} - f_{x_1 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4 *Soient* $F(x, y, z) = (x^2 - e^y, \sin z, y^2 + z)$. *Calculer* $\operatorname{div} F$ *et* $\operatorname{rot} F$.

Discussion On trouve

$$\operatorname{div} F = 2\,x + 0 + 1 = 2\,x + 1$$

et

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - e^y & \sin z & y^2 + z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y - \cos z \\ 0 - 0 \\ 0 + e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y - \cos z \\ 0 \\ e^y \end{pmatrix}.$$

1.3 Exercices

Exercice 1.1 *Soit*

$$F(x,y,z) = \left(y^2 \sin(x\,z), e^y \cos\left(x^2+z\right), \log(2+\cos(x\,y))\right) = (F_1, F_2, F_3).$$

Calculer les quantités suivantes.

(i) $\operatorname{grad} F_1$, $\operatorname{grad} F_2$, $\operatorname{grad} F_3$

(ii) $\operatorname{div} F$

(iii) $\operatorname{rot} F$.

Exercice 1.2 *Soient* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction* $C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ *et* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un champ vectoriel* $C^1\left(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3\right)$. *Dire parmi les expressions suivantes celles qui ont un sens*

(i) $\operatorname{grad} f$ *(ii)* $f \operatorname{grad} f$ *(iii)* $F \cdot \operatorname{grad} f$ *(iv)* $\operatorname{div} f$

(v) $\operatorname{div}(f\,F)$ *(vi)* $\operatorname{rot}(f\,F)$ *(vii)* $\operatorname{rot} f$ *(viii)* $f \operatorname{rot} F$

(ix) $\operatorname{rot} \operatorname{div} F$.

Exercice 1.3 *Soient* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

(i) *Montrer que si* $f(x) = \Psi(r)$ *alors, pour* $x \neq 0$,

$$\Delta f = \Psi''(r) + \frac{n-1}{r}\Psi'(r).$$

(ii) *Déduire une solution de* $\Delta f = 0$ *dans* $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Suggestion. Utiliser (cf. exemple 1.3) le fait que

$$r_{x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

Exercice 1.4 *Soient* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0\right\}$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, *une fonction* $C^2(\Omega)$. *Soit*

$$g = g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ou en d'autres termes

$$f(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y)).$$

Montrer que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

Calculer Δf *pour*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2.$$

Suggestion. Commencer par montrer que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

Exercice 1.5 *Montrer (i) et (ii) du théorème 1.2.*

Exercice 1.6 *Montrer (iii) et (iv) du théorème 1.2.*

Exercice 1.7 *Montrer (v), (vi) et (vii) du théorème 1.2.*

1.4 Corrigés

Exercice 1.1 *(i)* On calcule d'abord le gradient de F_1, F_2, F_3 et on trouve

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=y^2z\cos(x\,z) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}=2\,y\sin(x\,z) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}=x\,y^2\cos(x\,z)\\
\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=-2\,x\,e^y\sin\left(x^2+z\right) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}=e^y\cos\left(x^2+z\right) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}=-e^y\sin\left(x^2+z\right)\\
\dfrac{\partial F_3}{\partial x}=-\dfrac{y\sin(x\,y)}{2+\cos(x\,y)} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y}=-\dfrac{x\sin(x\,y)}{2+\cos(x\,y)} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z}=0.
\end{array}\right.$$

(ii) On a que

$$\operatorname{div}F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=y^2z\cos(x\,z)+e^y\cos\left(x^2+z\right).$$

(iii) Finalement

$$\operatorname{rot}F=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_3}{\partial y}-\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial F_1}{\partial z}-\dfrac{\partial F_3}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{x\sin(x\,y)}{2+\cos(x\,y)}+e^y\sin\left(x^2+z\right)\\[2mm] x\,y^2\cos(x\,z)+\dfrac{y\sin(x\,y)}{2+\cos(x\,y)}\\[2mm] -2\left(x\,e^y\sin\left(x^2+z\right)+y\sin(x\,z)\right)\end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2 Les expressions qui ont un sens sont les suivantes : (i) ; (ii) ; (iii) ; (v) ; (vi) et (viii).

Les expressions qui n'ont pas de sens sont les suivantes : (iv) ; (vii) et (ix).

Exercice 1.3 Tout d'abord on déduit de l'exemple 1.3 (en considérant $a=0$) que

$$r_{x_i}=\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}\,.$$

(i) On commence par écrire

$$f_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=\psi'(r)\,r_{x_i}=\psi'(r)\,\frac{x_i}{r}\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \psi''(r)\, r_{x_i} \frac{x_i}{r} + \psi'(r) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i r^{-1}\right) \\
&= \psi''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \psi'(r)\left[\frac{1}{r} - x_i \frac{1}{r^2}\, r_{x_i}\right] \\
&= \psi''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \psi'(r)\left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right].
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i} &= \frac{\psi''(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \psi'(r)\left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] \\
&= \psi''(r) + \psi'(r)\left[\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right] = \psi''(r) + \frac{n-1}{r}\, \psi'(r).
\end{aligned}$$

(ii) On trouve donc que si $\Delta f = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\psi''(r) = \frac{1-n}{r} \psi'(r) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\psi''(r)}{\psi'(r)} = \frac{1-n}{r} \quad \Rightarrow \\
\log \psi'(r) = (1-n) \log r \quad &\Rightarrow \quad \psi'(r) = r^{1-n}.
\end{aligned}$$

On déduit immédiatement que

$$\psi(r) = \begin{cases} \log r & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{r^{2-n}}{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercice 1.4 *(i)* Rappelons que comme $x, y > 0$ on a

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Par ailleurs, on a vu que (cf. exemple 1.3)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

On trouve que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\dfrac{-y}{x^2}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2}\, ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{r^2}.$$

(ii) On peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \theta}.$$

(iii) On a
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-2}\right)\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \frac{r - x\frac{x}{r}}{r^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}\right) + \frac{2\,x\,y}{r^4}\frac{\partial g}{\partial \theta}\\ &\quad - \frac{y}{r^2}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right)\end{aligned}$$

et ainsi
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2\,x\,y}{r^3}\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{2\,x\,y}{r^4}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

Un calcul similaire nous conduit à
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2\,x\,y}{r^3}\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} - \frac{2\,x\,y}{r^4}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

et donc
$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

(iv) En écrivant la fonction en coordonnées polaires, on obtient
$$f(x,y) = r + \theta^2$$
$$\Delta f = \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} = \frac{2 + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

Exercice 1.5 *(i)* On va montrer d'abord que $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \triangle f$. On peut écrire
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \triangle f.\end{aligned}$$

(ii) On va prouver maintenant que $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Comme

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} F &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 1.6 *(i)* On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) &= \operatorname{div}\left(f \frac{\partial g}{\partial x_1}, f \frac{\partial g}{\partial x_2}, \cdots, f \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(f \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right] \\ &= \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \, \Delta g. \end{aligned}$$

(ii) On obtient de même

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f\, g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} g + \frac{\partial g}{\partial x_1} f, \frac{\partial f}{\partial x_2} g + \frac{\partial g}{\partial x_2} f, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} g + \frac{\partial g}{\partial x_n} f\right) \\ &= g\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + f\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) \\ &= g \ \operatorname{grad} f + f \ \operatorname{grad} g. \end{aligned}$$

Exercice 1.7 *(i)* Comme $F = (F_1, \cdots, F_n)$, on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\, F) &= \operatorname{div}(f\, F_1, f\, F_2, \cdots, f\, F_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f\, F_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} F_i + f \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right] \\ &= F \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} F. \end{aligned}$$

(ii) Montrons maintenant que $\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F$. On a

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

et on obtient donc

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

i.e.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}.$$

Comme par ailleurs on a

$$\Delta F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

on déduit finalement que

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F + \Delta F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} F = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

on obtient bien

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F.$$

(iii) On veut montrer que $\operatorname{rot}(f\,F) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$. On a

$$\operatorname{rot}(f\,F) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f\,F_1 & f\,F_2 & f\,F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(f\,F_3) - \dfrac{\partial}{\partial z}(f\,F_2) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(f\,F_1) - \dfrac{\partial}{\partial x}(f\,F_3) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(f\,F_2) - \dfrac{\partial}{\partial y}(f\,F_1) \end{pmatrix}.$$

On déduit alors que

$$\operatorname{rot}(f\,F) = \begin{pmatrix} F_3\,\dfrac{\partial f}{\partial y} - F_2\,\dfrac{\partial f}{\partial z} + f\left(\dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\right) \\ F_1\,\dfrac{\partial f}{\partial z} - F_3\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x}\right) \\ F_2\,\dfrac{\partial f}{\partial x} - F_1\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + f\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right) \end{pmatrix}.$$

Par définition

$$\operatorname{grad} f \wedge F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_3\,\dfrac{\partial f}{\partial y} - F_2\,\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ F_1\,\dfrac{\partial f}{\partial z} - F_3\,\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ F_2\,\dfrac{\partial f}{\partial x} - F_1\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix},$$

et donc en combinant les résultats on trouve

$$\operatorname{rot}(f\,F) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F.$$

Chapitre 2

Intégrales curvilignes

2.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 2.1 *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *une courbe simple régulière (pour une définition précise cf. sect. 8.3) paramétrée par* $\gamma : [a, b] \to \Gamma,\ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$. *On notera*

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \cdots, \gamma_n'(t)) \quad \textit{et} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j'(t)\right)^2}.$$

(i) *Soit* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. L'intégrale de* f *le long de* Γ *est définie par*

$$\boxed{\int_\Gamma f\, dl = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt.}$$

(ii) *Soit* $F = (F_1, \cdots, F_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *un champ vectoriel continu. L'intégrale de* F *le long de* Γ *est définie par*

$$\boxed{\int_\Gamma F \cdot dl = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} F_j(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\, dt.}$$

(iii) *Si* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *est une courbe simple régulière par morceaux (cf. sect. 8.3; en particulier il existe* $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ *continue et* $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b$ *avec* $\gamma' \in C([a_i, a_{i+1}])$, $i = 1, \cdots, N$*) et si* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue* *et* $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *un champ vectoriel continu, alors*

$$\int_\Gamma f\, dl = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt$$

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F\left(\gamma\left(t\right)\right) \cdot \gamma'\left(t\right) dt.$$

Remarque *(i)* Toutes les courbes que nous rencontrerons dans ce livre seront des courbes simples régulières par morceaux et même, pour la plupart, régulières.

(ii) La *longueur* d'une courbe Γ est obtenue en prenant $f \equiv 1$ dans les définitions ci-dessus, c'est-à-dire

$$\boxed{\operatorname{long}\left(\Gamma\right) = \int_\Gamma dl.}$$

(iii) Les définitions sont indépendantes du choix de la paramétrisation (au signe près pour la deuxième).

(Pour plus de détails, cf. [2] 23, [4] 333-334, [7] chapitre 2, [8] 258, [11] 513, [12] 426).

2.2 Exemples

Exemple 2.2 *Calculer la longueur du cercle unité.*

Discussion On écrit

$$\Gamma = \left\{\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t\right)\right\},$$

alors

$$\gamma'\left(t\right) = \left(-\sin t, \cos t\right) \quad \text{et} \quad \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| = 1$$

et donc

$$\operatorname{long}\left(\Gamma\right) = \int_\Gamma dl = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Exemple 2.3 (i) *Calculer* $\int_\Gamma f\, dl$ *quand* $f\left(x, y\right) = \sqrt{x^2 + 4\,y^2}$ *et*

$$\Gamma = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : 2\,y = x^2, x \in [0, 1]\right\}.$$

(ii) *Calculer* $\int_\Gamma F \cdot dl$ *quand* $F\left(x, y\right) = \left(x^2, 0\right)$ *et*

$$\Gamma = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0, 1]\right\}.$$

Discussion *(i)* Une paramétrisation de la courbe est donnée par

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in [0,1].$$

Alors, comme $\gamma'(t) = (1,t)$, on trouve

$$\int_\Gamma f\, dl = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}\sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^1 t\left(1+t^2\right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(ii) Dans ce cas on peut prendre

$$\gamma(t) = (t, \cosh t) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (1, \sinh t).$$

On a donc

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_0^1 \left(t^2, 0\right) \cdot (1, \sinh t)\, dt = \frac{1}{3}.$$

2.3 Exercices

Exercice 2.1 (i) *Soit* $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ x \in [a,b]\right\}$. *Montrer que*

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2} dt.$$

(ii) *En déduire la longueur de la courbe*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0,1]\right\}.$$

(iii) *Soit*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = r(t)\cos t,\ y(t) = r(t)\sin t,\ t \in [a,b]\right\}.$$

Calculer la longueur de Γ *en fonction de* r.

Exercice 2.2 *Calculer* $\int_{\Gamma_i} F \cdot dl$ *quand* $F(x,y) = \left(x\,y, y^2 - x\right)$ *et*

$$\Gamma_1 = \{(t,t) : t \in [0,1]\}, \quad \Gamma_2 = \left\{\left(t, e^t\right) : t \in [0,1]\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{\left(\sqrt{t}, t^2\right) : t \in [1,2]\right\}.$$

Exercice 2.3 *Calculer* $\int_\Gamma F \cdot dl$ *quand*

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\right\} \quad \text{et} \quad F(x,y,z) = (x,z,y)$$

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^x,\ z = x,\ x \in [0,1]\right\} \quad \text{et} \quad F(x,y,z) = (x,y,z).$$

Exercice 2.4 *Calculer* $\int_\Gamma f\, dl$ *quand* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \sqrt{2\,z}$ *et*

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t^2}{2} \right) : t \in [0,1] \right\}.$$

On rappelle que

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right).$$

Exercice 2.5 *Soit* Γ *une courbe régulière de* $\mathbb{R}^3$ *joignant* A *et* B*. En utilisant la loi de Newton (Force = masse* $\times$ *accélération), calculer le travail nécessaire pour déplacer une particule de masse constante de* A *à* B *le long de* Γ.

Exercice 2.6 *Soient* $F(x,y) = (x + y, -x)$ *et*

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4\,x^4 - 4\,x^2 = 0,\ x \geq 0 \right\}.$$

(i) *Montrer que* $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2\,t))$ *avec* $t \in [0,\pi]$ *est une paramétrisation de* Γ.

(ii) *Calculer* $\int_\Gamma F \cdot dl$.

Exercice 2.7 ** On dit qu'une paramétrisation simple régulière*

$$\gamma : [a,b] \to \Gamma, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$$

est une paramétrisation par la longueur de l'arc*, si*

$$\|\gamma'(t)\| \equiv 1, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Montrer que si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *est une courbe simple régulière, alors il existe une paramétrisation par la longueur de l'arc.*

2.4 Corrigés

Exercice 2.1 *(i)* Une paramétrisation de Γ est donnée par

$$x = t \quad \text{et} \quad y = f(t)$$

c'est-à-dire,

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (1, f'(t))$$

et on obtient donc

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

(ii) On a maintenant $f(t) = \cosh t$ et donc

$$\sqrt{1 + (f'(t))^2} = \cosh t.$$

Le résultat suit alors immédiatement

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \sinh 1 - \sinh 0 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

(iii) On pose $\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$ et on déduit que

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t)\\ \Rightarrow \quad & \|\gamma'(t)\|^2 = (r')^2 + r^2.\end{aligned}$$

De la définition on déduit que

$$\operatorname{long}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}\, dt.$$

Exercice 2.2 *(i)* Dans ce cas comme

$$\gamma_1(t,t) = (t,t) \quad \Rightarrow \quad \gamma_1'(t) = (1,1),$$

on trouve immédiatement que

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^1 \left(t^2, t^2 - t\right) \cdot (1,1)\, dt = \int_0^1 \left(2\,t^2 - t\right) dt = \frac{1}{6}.$$

(ii) On choisit

$$\gamma_2(t,t) = \left(t, e^t\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma_2'(t) = \left(1, e^t\right)$$

et on obtient ainsi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^1 \left(t\, e^t, e^{2\,t} - t\right) \cdot \left(1, e^t\right) dt = \int_0^1 e^{3\,t} dt = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right).$$

(iii) Dans ce dernier cas on écrit

$$\gamma_3(t,t) = \left(\sqrt{t}, t^2\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma_3'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2\,t\right)$$

et on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= \int_1^2 \left(t^2\sqrt{t}, t^4 - \sqrt{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2\,t\right) dt\\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\,t^2 + 2\,t^5 - 2\,t\sqrt{t}\right) dt = \frac{689}{30} - \frac{16}{5}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2.3 *(i)* On choisit comme paramétrisation, pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

On trouve alors

$$\int_\Gamma F\cdot dl = \int_0^{2\pi} (\cos t, 0, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sin t\cos t\, dt = 0.$$

(ii) On note, pour $t\in[0,1]$,

$$\gamma(t) = (t, e^t, t) \quad\Rightarrow\quad \gamma'(t) = \left(1, e^t, 1\right).$$

On obtient

$$\int_\Gamma F\cdot dl = \int_0^1 \left(t, e^t, t\right)\cdot\left(1, e^t, 1\right) dt = \int_0^1 \left(2\,t + e^{2\,t}\right) dt$$
$$= t^2 + \frac{e^{2\,t}}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1+e^2}{2}.$$

(Noter que dans (i), contrairement à (ii), le sens de parcours de Γ n'est pas explicitement donné ; le choix du sens opposé aurait évidemment donné dans ce cas le même résultat, à savoir 0.)

Exercice 2.4 De la paramétrisation donnée on en déduit

$$\gamma'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ t) \quad\Rightarrow\quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} \quad \text{et} \quad f(\gamma(t)) = 1+t.$$

On a par conséquent

$$\int_\Gamma f\, dl = \int_0^1 (1+t)\sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt + \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\, dt$$
$$= \left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}\right]\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{-1}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Exercice 2.5 Soit $\gamma : [a,b]\to\Gamma$ une paramétrisation de Γ, on a $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$. Par ailleurs $F(\gamma(t)) = m\,\gamma''(t)$. On trouve donc

$$\int_\Gamma F\cdot dl = \int_a^b m\,\gamma''(t)\cdot\gamma'(t)\, dt = m\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|\gamma'(t)\|^2\right] dt$$
$$= \frac{m}{2}\|\gamma'(b)\|^2 - \frac{m}{2}\|\gamma'(a)\|^2,$$

ce qui n'est rien d'autre que la variation de l'énergie cinétique.

Exercice 2.6 La courbe est donnée par $y = \pm 2\,x\sqrt{1-x^2}$. Par exemple on peut choisir

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (\sin t, \sin(2\,t)),\ t\in[0,\pi]\}.$$

(Noter que le sens de parcours de Γ n'est pas explicitement donné dans le problème ; nous avons choisi le sens contraire du sens trigonométrique). On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot dl &= \int_0^\pi (\sin t + \sin(2\,t), -\sin t) \cdot (\cos t, 2\cos(2\,t))\, dt \\ &= \int_0^\pi \{-2\cos(2\,t)\ \sin t + \cos t\,[\sin t + \sin(2\,t)]\}\, dt = \frac{8}{3}\,.\end{aligned}$$

Exercice 2.7 * Soit δ une paramétrisation simple régulière de Γ

$$\delta : [a,b] \to \Gamma, \quad \delta(t) = (\delta_1(t), \cdots, \delta_n(t))$$

(en particulier $\|\delta'(t)\| \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$). On pose

$$y = \eta(x) = \int_a^x \|\delta'(t)\|\, dt$$

et on observe que

$$\eta : [a,b] \to [0, \operatorname{long}(\Gamma)]$$

et que η est inversible et $C^1([0, \operatorname{long}(\Gamma)])$. On pose alors

$$\gamma(y) = \delta\left(\eta^{-1}(y)\right)$$

et on vérifie que

$$\|\gamma'(y)\| \equiv 1, \quad \forall\, y \in [0, \operatorname{long}(\Gamma)]\,.$$

En effet

$$\gamma'(y) = \delta'\left(\eta^{-1}(y)\right)\left(\eta^{-1}\right)'(y) = \delta'\left(\eta^{-1}(y)\right)\frac{1}{\eta'\left(\eta^{-1}(y)\right)} = \frac{\delta'(x)}{\|\delta'(x)\|}\,.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 3

Champs qui dérivent d'un potentiel

3.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 3.1 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert et* $F = F(x) = (F_1, \cdots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *On dit que* F ***dérive d'un potentiel*** *sur* Ω *s'il existe* $f \in C^1(\Omega)$ *(*f *est appelé le* ***potentiel****) tel que*

$$\boxed{F(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right), \quad \forall\, x \in \Omega.}$$

Théorème 3.2 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert et* $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. *Si* F *dérive d'un potentiel sur* Ω *alors*

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = 0, \quad \forall\, i, j = 1, \cdots, n \ \textit{et}\ \forall\, x \in \Omega.} \tag{3.1}$$

Remarque *(i)* La condition ci-dessus s'écrit aussi

$$\operatorname{rot} F(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

(ii) La condition (3.1) n'est pas suffisante (cf. exemple 3.6 ci-après) pour garantir l'existence d'un tel potentiel, il faut pour cela des conditions sur le domaine Ω. Si le domaine Ω est convexe, ou plus généralement s'il est simplement connexe, la condition est bien suffisante. On rappelle que dans $\mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe est un domaine sans trou. Pour les notions précises d'ensemble connexe, convexe, simplement connexe nous référons au chapitre 8.

(iii) Dans un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe) le potentiel est unique à une constante près.

Théorème 3.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Les affirmations suivantes sont alors équivalentes.*

(i) *F dérive d'un potentiel sur Ω.*

(ii) *Pour toute courbe simple, fermée, régulière par morceaux, $\Gamma \subset \Omega$*

$$\int_\Gamma F \cdot dl = 0.$$

(iii) *Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ deux courbes simples régulières par morceaux joignant A à B alors*

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl.$$

(Pour plus de détails, cf. [4] 341-351, [7] chapitre 3, [8] 261-264, [11] 568-576, [12] 429-433).

3.2 Exemples

Exemple 3.4 *Soit $F(x,y) = \left(4\,x^3y^2, 2\,x^4y + y\right)$. Montrer que F dérive d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et trouver un tel potentiel.*

Discussion Le domaine de définition est $\Omega = \mathbb{R}^2$ qui est un ensemble convexe. En dérivant on obtient

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8\,x^3y - 8\,x^3y = 0.$$

Le théorème 3.2 et la remarque qui suit nous garantissent l'existence d'un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour trouver ce potentiel on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\,x^3y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,x^4y + y.$$

En intégrant la première équation par rapport à la variable x on obtient

$$f(x,y) = x^4y^2 + \alpha(y).$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à y et en remettant dans la deuxième équation on a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,x^4y + \alpha'(y) = 2\,x^4y + y.$$

Ceci implique que

$$\alpha'(y) = y \quad \Rightarrow \quad \alpha(y) = \frac{y^2}{2} + c,$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Finalement le potentiel cherché est donc

$$f(x,y) = x^4y^2 + \frac{y^2}{2} + c.$$

Exemple 3.5 *Soit* $F(x,y,z) = \left(2\,x\sin z, z\,e^y, x^2\cos z + e^y\right)$. *Montrer que* F *dérive d'un potentiel sur* $\Omega = \mathbb{R}^3$ *et trouver un tel potentiel.*

Discussion On vérifie si la condition nécessaire, i.e. $\operatorname{rot} F = 0$, est satisfaite. On a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2\,x\sin z & z\,e^y & x^2\cos z + e^y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} e^y - e^y \\ 2\,x\cos z - 2\,x\cos z \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\Omega = \mathbb{R}^3$ est convexe, F dérive d'un potentiel. On écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x\sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z\,e^y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2\cos z + e^y.$$

On intègre la première équation par rapport à x et on trouve

$$f(x,y,z) = x^2\sin z + \alpha(y,z)\,.$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à y et z et en remettant dans les deuxième et troisième équations on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = z\,e^y = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2\cos z + e^y = x^2\cos z + \dfrac{\partial \alpha}{\partial z}\,. \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à y on trouve

$$\alpha(y,z) = z\,e^y + \beta(z)\,.$$

Puis en remettant le résultat dans la deuxième équation on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = e^y + \beta'(z) = e^y \quad \Rightarrow \quad \beta'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(z) = \beta = \text{constante}.$$

Finalement en résumant on a obtenu

$$f(x,y,z) = x^2\sin z + z\,e^y + \beta.$$

Exemple 3.6 *Soit*

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(i) *Trouver le domaine de définition de* F.

(ii) *Soient*

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\} \\
\Omega_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\} \\
\Omega_3 &= \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ } et \text{ } y = 0\right\} \\
\Omega_4 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} .
\end{aligned}$$

F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$? Si oui trouver un tel potentiel, si non trouver $\Gamma \subset \Omega_i$ tel que $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$.

Discussion *(i)* Le domaine de définition de F est $\Omega_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $F \in C^\infty\left(\Omega_4; \mathbb{R}^2\right)$. On a par ailleurs

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega_4 .$$

(ii) Noter que $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4$ et Ω_1 et Ω_2 sont convexes, Ω_3 est simplement connexe (mais pas convexe) et Ω_4 n'est pas simplement connexe. On va d'abord trouver un potentiel quand $y > 0$ (et donc dans Ω_1) puis quand $y < 0$ (et donc dans Ω_2) et puis enfin on discutera le cas où $y = 0$.

Cas 1 : $(x,y) \in \Omega_1$. Cherchons donc un potentiel $f \in C^1(\Omega_1)$. Si un tel f existe on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \alpha_+(y) .$$

En remettant dans la deuxième équation on trouve $\alpha_+'(y) = 0$ et donc le potentiel cherché dans Ω_1 (c'est-à-dire lorsque $y > 0$) est

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \alpha_+ , \quad \forall\ (x,y) \in \Omega_1 ,$$

où $\alpha_+ \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Cas 2 : $(x,y) \in \Omega_2$. La même analyse que précédemment conduit à

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \alpha_- , \quad \forall\ (x,y) \in \Omega_2$$

où $\alpha_- \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Cas 3 : $(x,y) \in \Omega_3$. Par les cas 1 et 2, s'il existe un potentiel $f \in C^1(\Omega_3)$ alors il doit nécessairement être de la forme

$$f(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \alpha_+ & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ -\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \alpha_- & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il reste à savoir si on peut choisir les constantes α_+ et α_- de manière à prolonger continûment un tel f à la demi-droite $(x, 0)$ avec $x > 0$. Ceci est possible car (x étant positif)

$$\lim_{y \to 0^+} [f(x, y)] = -\frac{\pi}{2} + \alpha_+ \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0^-} [f(x, y)] = \frac{\pi}{2} + \alpha_- \,.$$

Il suffit donc de choisir $\alpha_+ = \alpha_- + \pi$ et on aura bien que

$$f(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + (\alpha_- + \pi) & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \alpha_- + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + \alpha_- & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est un potentiel $C^1(\Omega_3)$ de F, $\alpha_- \in \mathbb{R}$ étant une constante arbitraire.

Cas 4 : $(x, y) \in \Omega_4$. La même analyse que précédemment ne nous permet pas de définir continûment f sur $y = 0$ quand $x < 0$ car on aurait alors

$$\lim_{y \to 0^+} [f(x, y)] = \frac{\pi}{2} + \alpha_- + \pi = \alpha_- + \frac{3\pi}{2}$$
$$\lim_{y \to 0^-} [f(x, y)] = -\frac{\pi}{2} + \alpha_-$$

et ceci est impossible. Donc F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω_4 . Montrons ceci différemment. Soit $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \subset \Omega_4$. On a alors

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Au vu du théorème 3.3 on a ainsi montré que F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω_4 .

3.3 Exercices

Exercice 3.1 *Soient les champs vectoriels* $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F_1(x, y) = (y, x\,y - x)\,, \quad F_2(x, y) = \left(3\,x^2 y + 2\,x, x^3\right), \quad F_3(x, y) = \left(3\,x^2 y, x^2\right).$$

Le champ F_i *dérive-t-il d'un potentiel sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Si oui, trouver un potentiel duquel dérive F_i , *si non trouver un chemin fermé* Γ *tel que* $\displaystyle\int_\Gamma F_i \cdot dl \neq 0$.

Exercice 3.2 (i) *Soit* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un champ* C^1, $F = F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$. *Soit*

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 [x\,f(t\,x, t\,y) + y\,g(t\,x, t\,y)]\, dt.$$

Montrer que si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial v}$ *alors* $F(x,y) = \operatorname{grad} \varphi(x,y)$. *En déduire un potentiel pour* $F(x,y) = \left(2\,x\,y, x^2 + y\right)$.

(ii) *Généraliser ce résultat à* $\mathbb{R}^n$, *avec*

$$F(u) = (F_1(u), \ldots, F_n(u)), \quad \varphi(x) = \int_0^1 F(t\,x) \cdot x\, dt$$

et

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i}, \quad \forall\, i, j = 1, \cdots, n.$$

Exercice 3.3 *Soit*

$$F(x,y,z) = \left(2\,x\,y + \frac{z}{1+x^2}, x^2 + 2\,y\,z, y^2 + \operatorname{arctg} x\right).$$

Le champ F *dérive-t-il d'un potentiel sur* $\mathbb{R}^3$ *? Si oui trouver ce potentiel.*

Exercice 3.4 *Soient*

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\} \quad \textit{et} \quad F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Montrer (en exhibant un potentiel f*) que le champ* F *dérive d'un potentiel sur* Ω.

Suggestion. Procéder comme dans l'exemple 3.6.

Exercice 3.5 *Soient* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $F(x,y) = (\alpha(r)\,x, \beta(r)\,y)$ *avec* $\alpha, \beta \in C^1(0,\infty)$ *tels que*

$$\lim_{r \to 0} (r\,\alpha(r)) = \lim_{r \to 0} (r\,\beta(r)) = 0.$$

(i) *Trouver une condition nécessaire pour que* F *dérive d'un potentiel sur* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) *Montrer (comme dans l'exercice 3.2) que*

$$f(x,y) = \int_0^1 [F(t\,x, t\,y) \cdot (x,y)]\, dt$$

est un potentiel pour F *sur* Ω.

Exercice 3.6 *Soit l'équation différentielle*

$$F_2(t, u(t))\, u'(t) + F_1(t, u(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) *Soit* $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ *un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel* f *sur* $\mathbb{R}^2$. *Montrer qu'une solution* $u = u(t)$ *de l'équation différentielle est donnée, sous forme implicite, par*

$$f(t, u(t)) = \textit{constante}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Suggestion. Calculer $\dfrac{d}{dt}\left[f\left(t,u\left(t\right)\right)\right].$

(ii) *En déduire une solution de*

$$\begin{cases} u^2\left(t\right)u'\left(t\right)+\sin t=0 \\ u\left(0\right)=3. \end{cases}$$

Exercice 3.7 ***(Facteur intégrant)****. Soit l'équation différentielle*

$$F_2\left(t,u\left(t\right)\right)u'\left(t\right)+F_1\left(t,u\left(t\right)\right)=0, \quad t\in\mathbb{R}.$$

(i) *Montrer que s'il existe* $W:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *(avec* $W\left(x,y\right)\neq 0$, $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$, $W\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$*) tel que*

$$W\left(x,y\right)F\left(x,y\right)=\left(W\,F_1,W\,F_2\right)$$

dérive d'un potentiel Φ *sur* $\mathbb{R}^2$ *alors une solution* $u=u\left(t\right)$ *de l'équation différentielle est donnée, sous forme implicite, par*

$$\Phi\left(t,u\left(t\right)\right)=\textit{constante},\quad\forall\,t\in\mathbb{R}.$$

(ii) *En déduire une solution de*

$$4\,t\sin\left(t\,u\left(t\right)\right)+u\left(t\right)\left(t^2+1\right)\cos\left(t\,u\left(t\right)\right)+u'\left(t\right)\left[\left(t^2+1\right)t\cos\left(t\,u\left(t\right)\right)\right]=0.$$

Suggestion. Choisir $W\left(x,y\right)=1+x^2$.

Exercice 3.8 *Soient*

$$F\left(x,y\right)=\left(\frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),\quad G\left(x,y\right)=\left(\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{-x\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

et $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$. *Les champs* F *et* G *dérivent-ils d'un potentiel sur* Ω *? (Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse).*

Exercice 3.9 ** Soient* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *un ensemble convexe avec* $0\in\Omega$ *et* $F=\left(F^1,F^2,F^3\right)\in C^1\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ *tel que*

$$\operatorname{div}F=F^1_{x_1}+F^2_{x_2}+F^3_{x_3}=0\quad\textit{dans }\Omega.$$

Soit

$$\Phi\left(x\right)=\begin{pmatrix}\Phi^1\\ \Phi^2\\ \Phi^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^1\left[F^2\left(t\,x\right)x_3-F^3\left(t\,x\right)x_2\right]t\,dt\\ \displaystyle\int_0^1\left[F^3\left(t\,x\right)x_1-F^1\left(t\,x\right)x_3\right]t\,dt\\ \displaystyle\int_0^1\left[F^1\left(t\,x\right)x_2-F^2\left(t\,x\right)x_1\right]t\,dt\end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$F = \operatorname{rot} \Phi \quad \textit{dans } \Omega.$$

Indication et remarque. *S'inspirer de l'exercice 3.2. On pourra remarquer qu'une façon plus ramassée d'écrire* Φ *est donnée par*

$$\Phi(x) = \int_0^1 [F(t\,x) \wedge x]\, t\, dt, \quad x \in \Omega$$

où on a dénoté le produit vectoriel par $\wedge$*, ce qui veut dire que si* $x, y \in \mathbb{R}^3$*, alors*

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Corrigés

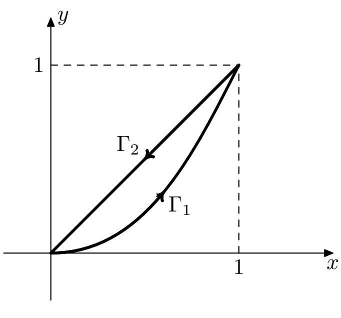
Exercice 3.1 *(i)* Comme

$$\operatorname{rot} F_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x\,y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) = y - 1 - 1 \neq 0,$$

le champ F_1 ne dérive pas d'un potentiel. On peut choisir $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1 = \left\{ \left(t, t^2\right) : t \in [0,1] \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \left\{ (2-t,\ 2-t) : t \in [1,2] \right\}.$$

On trouve alors que



$$\int_\Gamma F_1 \cdot dl$$
$$= \int_{\Gamma_1} F_1 \cdot dl + \int_{\Gamma_2} F_1 \cdot dl$$
$$= \int_0^1 \left(t^2, t^3 - t\right) \cdot (1, 2\,t)\, dt + \int_1^2 \left(2 - t, (2-t)^2 - (2-t)\right) \cdot (-1, -1)\, dt$$

et donc

$$\int_\Gamma F_1 \cdot dl = \frac{-4}{15} \neq 0.$$

(ii) Comme $\operatorname{rot} F_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2 y + 2\,x\right) = 3\,x^2 - 3\,x^2 = 0$ et que le domaine de définition de F_2 est $\mathbb{R}^2$, qui est convexe, on déduit que F_2 dérive d'un potentiel f. Ce potentiel satisfait donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 y + 2\,x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 \;\Rightarrow\; f(x,y) = x^3 y + h(x). \end{cases}$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à x et en la comparant à la première, on a

$$3\,x^2 y + h'(x) = 3\,x^2 y + 2\,x \quad\Rightarrow\quad h'(x) = 2\,x \quad\Rightarrow\quad h(x) = x^2 + \text{constante}.$$

Donc le potentiel est $f(x,y) = x^3 y + x^2 + \text{constante}$.

(iii) Comme

$$\operatorname{rot} F_3 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2 y\right) = 2\,x - 3\,x^2 \neq 0,$$

on trouve que F_3 ne dérive pas d'un potentiel. Choisissons $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ comme dans la question (i). On a

$$\int_\Gamma F_3 \cdot dl = \int_0^1 \left(3\,t^4, t^2\right) \cdot (1, 2\,t)\,dt + \int_1^2 \left(3\,(2-t)^3, (2-t)^2\right) \cdot (-1,-1)\,dt = \frac{1}{60}.$$

Exercice 3.2 *(i) Cas* $n = 2$. On commence par observer que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t\,f(t\,x, t\,y)\right] = f(t\,x, t\,y) + t\left[x\,\frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial u} + y\,\frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial v}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\,f(t\,x, t\,y) + y\,g(t\,x, t\,y)\right] = f(t\,x, t\,y) + t\,x\,\frac{\partial f(t\,x, t\,y)}{\partial u} + t\,y\,\frac{\partial g(t\,x, t\,y)}{\partial u}.$$

Comme $\partial f/\partial v = \partial g/\partial u$ on déduit que ces deux quantités sont égales. En revenant à la définition

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 \left[x\,f(t\,x, t\,y) + y\,g(t\,x, t\,y)\right] dt$$

et en utilisant l'observation précédente on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[x\,f(t\,x, t\,y) + y\,g(t\,x, t\,y)\right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,f(t\,x, t\,y)\right] dt = \left. t\,f(t\,x, t\,y)\right|_0^1 = f(x,y). \end{aligned}$$

Idem pour $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = g(x, y)$. Dans l'exemple on vérifie d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\,x\,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y\right)$$

et on calcule ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \int_0^1 \left(2\,t^2 x\,y, t^2 x^2 + t\,y\right) \cdot (x, y)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(3\,t^2 x^2 y + t\,y^2\right) dt = x^2 y + \frac{y^2}{2}\,.\end{aligned}$$

(ii) Cas $n \geq 2$. Comme précédemment on observe que, pour tout $j = 1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t\,F_j(t\,x)\right] = F_j(t\,x) + t\sum_{i=1}^{n} x_i\,\frac{\partial F_j}{\partial u_i}(t\,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\,F_i(t\,x)\right] = F_j(t\,x) + t\,\sum_{i=1}^{n} x_i\,\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(t\,x)\,.$$

Comme $\partial F_i/\partial u_j = \partial F_j/\partial u_i$ on trouve que ces deux quantités sont égales. De la définition

$$\varphi(x) = \int_0^1 F(t\,x) \cdot x\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i\,F_i(t\,x)\,dt$$

on obtient, en utilisant les identités précédentes, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\,F_i(t\,x)\right] dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,F_j(t\,x)\right] dt \\ &= t\,F_j(t\,x)\big|_0^1 = F_j(x)\,.\end{aligned}$$

Exercice 3.3 *(i)* On vérifie facilement que $\operatorname{rot} F = 0$. Si $F = \operatorname{grad} f$ on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x\,y + \frac{z}{1 + x^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\,y\,z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + \operatorname{arctg} x$$

et donc, en intégrant la première équation par rapport à x, on trouve que

$$f(x, y, z) = x^2 y + z\;\operatorname{arctg} x + \varphi(y, z)\,.$$

Dérivant f par rapport à y et z on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{arctg} x + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,y\,z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2.$$

De la première de ces deux équations, en intégrant par rapport à y, on a que

$$\varphi(y,z) = y^2 z + \phi(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2 + \phi'(z)$$

et de la deuxième équation on obtient

$$[\phi'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(z) = c] \quad \Rightarrow \quad \varphi(y,z) = y^2 z + c.$$

On a finalement

$$f(x,y,z) = x^2 y + z \operatorname{arctg} x + y^2 z + c.$$

Exercice 3.4 On vérifie facilement que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Essayons de trouver un potentiel. Rappelons que

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}.$$

Cas 1. Trouvons un potentiel dans $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$. On a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \alpha_+ \quad (\alpha_+ \in \mathbb{R}).$$

Cas 2. De même dans $\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\right\}$ on obtient que

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \alpha_- \quad (\alpha_- \in \mathbb{R}).$$

On a donc que le potentiel dans Ω, s'il existe, est donné par

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_+ & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \alpha_- & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il reste à choisir α_+ et α_- pour que ce potentiel soit bien défini en $(0,y)$ avec $y < 0$. Pour cela on observe que

$$\lim_{x \to 0^+} [f(x,y)] = -\frac{\pi}{2} + \alpha_+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} [f(x,y)] = \frac{\pi}{2} + \alpha_-.$$

On doit donc choisir $\alpha_+ = \alpha_- + \pi$. On vérifie alors facilement que le potentiel f cherché sur Ω est bien

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \alpha_- + \pi & \text{si } x > 0 \\ \alpha_- + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \alpha_- & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 3.5 Une condition nécessaire est $\operatorname{rot} F = 0$ c'est-à-dire

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(\beta(r)\,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha(r)\,x) = y\,\beta'(r)\,\frac{x}{r} - x\,\alpha'(r)\,\frac{y}{r}\,.$$

Et donc on déduit qu'il faut nécessairement que $\beta'(r) = \alpha'(r)$ ce qui entraîne que $\beta(r) = \alpha(r) + \alpha_0$. En s'inspirant de l'exercice 3.2, on trouve qu'un candidat à être le potentiel est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 [F(t\,x, t\,y)\cdot(x,y)]\,dt = \int_0^1 (\alpha(t\,r)\,t\,x, \beta(t\,r)\,t\,y)\cdot(x,y)\,dt \\ &= \int_0^1 t\left[\alpha(t\,r)\,x^2 + \beta(t\,r)\,y^2\right]dt = \int_0^1 t\left[\alpha(t\,r)\,r^2 + \alpha_0\,y^2\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\,\alpha_0\,y^2 + \int_0^1 t\,r^2\alpha(t\,r)\,dt. \end{aligned}$$

En posant $t\,r = s$ $(ds = r\,dt)$ on déduit que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\,\alpha_0\,y^2 + \int_0^r s\,\alpha(s)\,ds.$$

Comme $\lim\limits_{s\to 0}(s\,\alpha(s)) = 0$, l'intégrale est bien définie et donc f est candidat à être le potentiel. Pour en être sûr on vérifie que $f \in C^1(\Omega)$ et que $\operatorname{grad} f = F$.

Exercice 3.6 *(i)* Comme $F = \operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[f(t,u(t))\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t)) + u'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t,u(t)) \\ &= F_1(t,u(t)) + u'(t)\,F_2(t,u(t))\,. \end{aligned}$$

(ii) $F(x,y) = \left(\sin x, y^2\right)$ alors $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Comme F est définie sur tout $\mathbb{R}^2$ on peut trouver un potentiel

$$f(x,y) = -\cos x + \frac{y^3}{3}\,.$$

Donc une solution est donnée par ($c \in \mathbb{R}$ étant une constante)

$$\frac{1}{3}\, u^3(t) - \cos t = c\,.$$

Comme de plus $u(0) = 3$, on déduit que $c = 8$ et donc

$$u(t) = (3\cos t + 24)^{1/3}\,.$$

Exercice 3.7 *(i)* En procédant comme dans l'exercice précédent on constate que comme

$$W\,F = \operatorname{grad}\Phi,$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[\Phi(t, u(t))\right] = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + u'(t)\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} = W\,F_1 + u'(t)\,W\,F_2 \\ &= W\left(F_1 + u'(t)\,F_2\right). \end{aligned}$$

Comme $W \neq 0$ on déduit que toute solution de $\Phi(t, u(t)) = c$ satisfait

$$F_1(t, u(t)) + u'(t)\,F_2(t, u(t)) = 0.$$

(ii) On pose

$$F(x, y) = \left(4\,x\sin(x\,y) + y\left(x^2+1\right)\cos(x\,y)\,,\left(x^2+1\right)x\cos(x\,y)\right).$$

On ne peut pas appliquer l'exercice précédent car

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \neq 0.$$

Par contre si on considère

$$W\,F = \left(\left(x^2+1\right)\left[4\,x\sin(x\,y) + y\left(x^2+1\right)\cos(x\,y)\right],\left(x^2+1\right)^2 x\cos(x\,y)\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,(W\,F_2)}{\partial x} &= \frac{\partial\,(W\,F_1)}{\partial y} \\ &= \left(x^2+1\right)\left[\cos(x\,y) + 5\,x^2\cos(x\,y) - x\,y\sin(x\,y) - x^3 y\sin(x\,y)\right]. \end{aligned}$$

On trouve le potentiel

$$\Phi(x, y) = \left(x^2+1\right)^2 \sin(x\,y)\,.$$

On déduit qu'une solution est donnée, sous forme implicite, par

$$\left(t^2+1\right)^2 \sin\left[t\,u(t)\right] = c = \text{constante}.$$

Exercice 3.8 *(i)* On pose $F = (\alpha, \beta)$ et on trouve

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -x\left[-2\,(2\,y)\left(x^2+y^2\right)^{-3}\right] = 4\,x\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -y\left[-2\,(2\,x)\left(x^2+y^2\right)^{-3}\right] = 4\,x\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}$$

d'où $\operatorname{rot} F = 0$. Le candidat à être un potentiel doit satisfaire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha\,(x,y) = -x\left(x^2+y^2\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}{2} + a\,(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta\,(x,y) = -y\left(x^2+y^2\right)^{-2} \;\Rightarrow\; a'\,(y) - \frac{2\,y}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-2} = -y\left(x^2+y^2\right)^{-2}.$$

Par conséquent le potentiel est donné par

$$f\,(x,y) = \frac{1}{2\,(x^2+y^2)} + \text{constante}$$

qui est un champ C^1 sur Ω.

(ii) On pose $G = (a, b)$ et on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 3\,y^2\left(x^2+y^2\right)^{-2} + y^3[-4\,y\left(x^2+y^2\right)^{-3}] = \left(x^2+y^2\right)^{-3}\left(3\,x^2y^2-y^4\right)$$
$$\frac{\partial b}{\partial x} = -y^2\left(x^2+y^2\right)^{-2} - x\,y^2[-4\,x\left(x^2+y^2\right)^{-3}] = \left(x^2+y^2\right)^{-3}\left(3\,x^2y^2-y^4\right)$$

et ainsi $\operatorname{rot} G = 0$. Toutefois, si on prend $\Gamma = \{(\cos t, \sin t)\,, t \in (0, 2\pi)\}$ on trouve

$$\int_\Gamma G \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(\sin^3 t, -\cos t \sin^2 t\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = -\pi \neq 0.$$

Donc ce champ ne dérive pas d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 3.9 * On note $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\Phi = \Phi\,(x) = \left(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3\right) \quad \text{et} \quad F = F\,(y) = \left(F^1, F^2, F^3\right).$$

On rappelle que

$$\Phi\,(x) = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \left[F^2\,(t\,x)\,x_3 - F^3\,(t\,x)\,x_2\right] t\,dt \\ \int_0^1 \left[F^3\,(t\,x)\,x_1 - F^1\,(t\,x)\,x_3\right] t\,dt \\ \int_0^1 \left[F^1\,(t\,x)\,x_2 - F^2\,(t\,x)\,x_1\right] t\,dt \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rot}\Phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^3_{x_2} - \Phi^2_{x_3} \\ \Phi^1_{x_3} - \Phi^3_{x_1} \\ \Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_2} \end{pmatrix}.$$

On calcule la troisième composante de $\operatorname{rot}\Phi$

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 &= \Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_2} \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\left[F^3(t\,x)\,x_1 - F^1(t\,x)\,x_3\right] \\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[F^2(t\,x)\,x_3 - F^3(t\,x)\,x_2\right]\Big]\,t\,dt\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 &\big[t\,F^3_{y_1}(t\,x)\,x_1 + F^3(t\,x) - t\,F^1_{y_1}(t\,x)\,x_3 \\ &-t\,F^2_{y_2}(t\,x)\,x_3 + t\,F^3_{y_2}(t\,x)\,x_2 + F^3(t\,x)\big]\,t\,dt\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 &\big[2\,t\,F^3(t\,x) - t^2\left(F^1_{y_1}(t\,x) + F^2_{y_2}(t\,x)\right)x_3 \\ &+t^2\left(F^3_{y_1}(t\,x)\,x_1 + F^3_{y_2}(t\,x)\,x_2\right)\big]\,dt.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\operatorname{div} F = 0$ implique que

$$F^3_{y_3}(t\,x) = -\left(F^1_{y_1}(t\,x) + F^2_{y_2}(t\,x)\right)$$

et par conséquent

$$(\operatorname{rot}\Phi)^3 = \int_0^1 \left[2\,t\,F^3(t\,x) + t^2 F^3_{y_3}(t\,x)\,x_3 + t^2\left(F^3_{y_1}(t\,x)\,x_1 + F^3_{y_2}(t\,x)\,x_2\right)\right]dt$$

Ceci nous conduit finalement à (le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ est noté $\cdot$)

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\Phi)^3(x) &= \int_0^1 \left[2\,t\,F^3(t\,x) + t^2\left(\operatorname{grad} F^3(t\,x)\cdot x\right)\right]dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^2 F^3(t\,x)\right]dt = F^3(x).\end{aligned}$$

On montre de manière similaire que $(\operatorname{rot}\Phi)^1 = F^1$ et $(\operatorname{rot}\Phi)^2 = F^2$.

Chapitre 4

Théorème de Green

4.1 Définitions et résultats théoriques

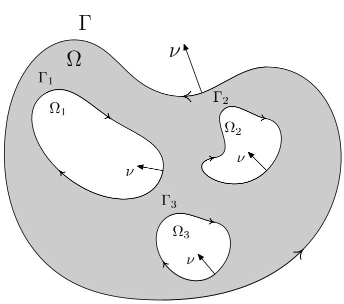
Définition 4.1 *(i) On dit que* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *est un* ***domaine régulier*** *s'il existe* $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^2$ *des ouverts bornés tels que*

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j \qquad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_0\,,\ \forall\, j = 1, 2, \cdots, m$$

$$\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, i, j = 1, \cdots, m \quad \partial\Omega_j = \Gamma_j\,,\ j = 0, 1, 2, \cdots, m$$

où les Γ_j *sont des courbes simples fermées régulières par morceaux.*

(ii) On dit que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$ *est* ***orienté positivement*** *si le sens de parcours sur chacun des* Γ_j *,* $j = 0, 1, \cdots, m$*, laisse le domaine* Ω *à gauche.*



Remarque La définition de l'orientation de $\partial\Omega$ est intuitive, une définition précise se trouve dans le chapitre 8. En particulier le sens de parcours de Γ_0 doit être le sens positif mais le sens de parcours sur $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ est le sens négatif.

Théorème 4.2 (Théorème de Green) *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un domaine régulier dont le bord* $\partial\Omega$ *est orienté positivement. Soit* $F \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2\right)$

$$F = F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

alors

$$\boxed{\iint_\Omega \operatorname{rot} F(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2 = \int_{\partial\Omega} F\cdot dl.}$$

Corollaire 4.3 (Théorème de la divergence dans le plan) *Soient Ω, $\partial\Omega$ et F comme dans le théorème. Soit ν un champ de normales extérieures unité à $\partial\Omega$, alors*

$$\boxed{\iint_\Omega \operatorname{div} F(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,dl.}$$

Corollaire 4.4 *Soient Ω et $\partial\Omega$ comme dans le théorème. Soient $F(x_1,x_2) = (-x_2,x_1)$, $G_1(x_1,x_2) = (0,x_1)$ et $G_2(x_1,x_2) = (-x_2,0)$ alors*

$$\boxed{\operatorname{aire}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_1\cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_2\cdot dl.}$$

(Pour plus de détails cf. [2] 43-44, [4] 363-364, [7] chapitre 4, [8] 360, [11] 528-532, [12] 436-445).

4.2 Exemples

Exemple 4.5 *Soient $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$ et $F(x,y) = \left(y^2,x\right)$. Vérifier le théorème de Green.*

Discussion *(i)* Calcul de $\iint_\Omega \operatorname{rot} F\,dx\,dy$. On vérifie facilement que $\operatorname{rot} F = 1-2\,y$. En posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on obtient

$$\iint_\Omega \operatorname{rot} F\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-2\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \pi.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Omega} F\cdot dl$. On pose $\gamma(\theta) = (\cos\theta,\sin\theta)$ et on a alors

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dl = \int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta,\cos\theta\right)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\;d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi.$$

Exemple 4.6 *Soient*

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\right\}$$

et $F(x,y) = \left(x^2y, 2\,x\,y\right)$. Vérifier le théorème de Green.

Discussion *(i)* Calcul de $\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy$. On trouve que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2\, y - x^2$$

et donc, en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(2\, r \sin\theta - r^2 \cos^2\theta\right) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -r^3 \cos^2\theta\, dr d\,\theta = -\pi \int_1^2 r^3 dr = -\frac{15}{4}\pi.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. On pose

$$\Gamma_0 = \{\gamma_0(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

et on obtient

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Gamma_0} F \cdot dl - \int_{\Gamma_1} F \cdot dl.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left(8\cos^2\theta \sin\theta, 8\cos\theta \sin\theta\right) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta)\, d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta \sin^2\theta - \cos^2\theta \sin\theta\right) d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta = -4\pi\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta \sin\theta, \cos\theta \sin\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = -\frac{\pi}{4}$$

et donc finalement

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = -\frac{15}{4}\pi.$$

4.3 Exercices

Exercice 4.1 *Vérifier le théorème de Green pour*

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\} \quad \textit{et} \quad F(x, y) = \left(x\, y, y^2\right).$$

Exercice 4.2 *Vérifier le théorème de Green pour*

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\} \quad \textit{et} \quad F(x, y) = \left(x + y, y^2\right).$$

Exercice 4.3 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *le triangle de sommets* $(0,0)$, $(0,1)$ *et* $(1,0)$. *Soit* $u(x,y) = y + e^x$.

(i) *Calculer* $\iint_\Omega \Delta u(x,y)\, dx\, dy$.

(ii) *Calculer*

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \nu_2 \right) dl,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *est la normale extérieure unité à* $\partial\Omega$ *et le sens de parcours de* $\partial\Omega$ *est tel qu'il laisse* Ω *à gauche.*

Exercice 4.4 *Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants :*

(i) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1 \right\}$ *et* $F(x,y) = \left(-x^2 y, x\, y^2 \right)$;

(ii) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1 \right\}$ *et*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{2(1 + x^2 + y^2)}, \varphi(y) \right)$$

avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4.5 *Vérifier le théorème de Green pour* $F(x,y) = (x\, y, y)$ *et*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 - 4 < y < 2 \right\}.$$

Exercice 4.6 *Vérifier le théorème de Green pour*

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}.$$

Suggestion. Il vaut mieux considérer les coordonnées cartésiennes que les coordonnées polaires et écrire

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (-1,1) \text{ et } -\sqrt{1 - x_1^2} < x_2 < \sqrt{1 - x_1^2} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in (-1,1) \text{ et } -\sqrt{1 - x_2^2} < x_1 < \sqrt{1 - x_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 4.7 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un domaine régulier,* $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *la normale extérieure unité à* $\partial\Omega$ *(*$\partial\Omega$ *étant orienté positivement). Soient* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. *Montrer que*

$$\boxed{\iint_\Omega \Delta u\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \nu)\, dl}$$

et vérifier les ***idendités de Green***

$$\boxed{\iint_\Omega [v\, \Delta u + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v]\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} v\, (\operatorname{grad} u \cdot \nu)\, dl}$$

$$\boxed{\iint_{\Omega} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} [u\,(\operatorname{grad} v\cdot\nu) - v\,(\operatorname{grad} u\cdot\nu)]\,dl}$$

Suggestion. On utilisera d'abord le théorème 1.2, c'est-à-dire :

$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = u\,\Delta v + \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v.$$

On appliquera ensuite le théorème de la divergence (cf. Corollaire 4.3).

Exercice 4.8 *A l'aide du théorème de Green démontrer le théorème de la divergence.*

Exercice 4.9 (i) *Vérifier le corollaire 4.4.*

(ii) *En particulier si* $\partial\Omega = \Gamma$ *est une courbe simple fermée régulière de paramétrisation* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in [a,b]$, *en déduire que*

$$\begin{aligned}\operatorname{aire}(\Omega) &= \int_a^b \gamma_1(t)\,\gamma_2'(t)\,dt = -\int_a^b \gamma_1'(t)\,\gamma_2(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b [\gamma_1(t)\,\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\,\gamma_2(t)]\,dt.\end{aligned}$$

Exercice 4.10 * *Soient* $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *un domaine régulier et* $f,\varphi\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. *Montrer que le problème*

$$(D)\ \begin{cases}\Delta u(x,y) = f(x,y) & (x,y)\in\Omega\\ u(x,y) = \varphi(x,y) & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

admet au plus une solution $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Suggestion. Soient u, v *deux solutions de* (D). *Montrer, à l'aide de la première identité de Green (cf. exercice 4.7), que* $w = u - v \equiv 0$.

Exercice 4.11 * *Soit*

$$\Omega = \left\{x = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}.$$

Pour $x\in\partial\Omega$ *et* $u\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, *on dénote par*

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial\tau} = x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

(i) *Calculer*

$$\frac{d}{d\theta}\left\{[u(\cos\theta,\sin\theta)]^2\right\}.$$

En déduire que

$$\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\tau} = 0.$$

(ii) *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer, à l'aide du théorème de Green et de la question précédente, que $u \equiv$ *constante.*

4.4 Corrigés

Exercice 4.1 *(i)* Calcul de $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy$. On calcule d'abord le rotationnel de F, on trouve que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -x.$$

On passe en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, et le Jacobien de la transformation est égale à r. On a alors

$$\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = 0.$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. On obtient donc, si $\partial\Omega$ est paramétrée par $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta\sin\theta, \sin^2\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^2\theta\right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.2 *(i)* Calcul de $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy$. On a que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on peut écrire

$$\iint_\Omega \operatorname{rot} F\, dx\, dy = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (-1)\, r\, dr\, d\theta = -3\pi.$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. On a que

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Gamma_0} F \cdot dl - \int_{\Gamma_1} F \cdot dl,$$

où l'on a posé

$$\Gamma_0 = \{\gamma_0(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

On trouve respectivement que

$$\int_{\Gamma_0} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta + 2\sin\theta, 4\sin^2\theta\right) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta)\, d\theta = -4\pi$$

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + \sin\theta, \sin^2\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = -\pi.$$

On obtient par conséquent que

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = -3\pi.$$

Exercice 4.3 *(i)* On voit tout d'abord que $\Delta u(x, y) = e^x$. On a que

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\right\}$$

et donc

$$\iint_\Omega \Delta u\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^x\, dy\, dx = \int_0^1 (1 - x)\, e^x\, dx = \left[(2 - x)\, e^x\right]_0^1 = e - 2.$$

(ii) On a par ailleurs que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) = (t, 0) : t \in [0, 1]\} \;\Rightarrow\; \gamma_1'(t) = (1, 0) \;\Rightarrow\; \nu = (0, -1)$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(t) = (1 - t, t) : t \in [0, 1]\} \;\Rightarrow\; \gamma_2'(t) = (-1, 1) \;\Rightarrow\; \nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(t) = (0, 1 - t) : t \in [0, 1]\} \;\Rightarrow\; \gamma_3'(t) = (0, -1) \;\Rightarrow\; \nu = (-1, 0).$$

Comme $\operatorname{grad} u = (e^x, 1)$, on obtient (en posant $\operatorname{grad} u \cdot \nu = \partial u / \partial \nu$)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl = \int_0^1 \left(e^t, 1\right) \cdot (0, -1)\, dt = -1$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl = \int_0^1 \left(e^{1-t}, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2}\, dt = \int_0^1 \left(e^{1-t} + 1\right) dt = e$$

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl = \int_0^1 (1, 1) \cdot (-1, 0)\, dt = -1.$$

Le résultat suit alors immédiatement

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl = e - 2.$$

Remarque. Le théorème de la divergence (corollaire 4.3) donne immédiatement que

$$\iint_{\Omega} \Delta u = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \nu)\, dl = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl.$$

Exercice 4.4 *(a)* On vérifie d'abord le Théorème de Green pour $F(x,y) = \left(-x^2 y, x\, y^2\right)$ et $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1\right\}$.

(i) Calcul de $\iint_A \operatorname{rot} F\, dx\, dy$. On a que

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y^2 - \left(-x^2\right) = x^2 + y^2$$

et donc, en coordonnées polaires,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\theta,\ y = 1 + r\sin\theta \text{ avec } r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0, 2\pi)\right\}.$$

Le Jacobien de la transformation est r. Un calcul élémentaire donne

$$\iint_A \operatorname{rot} F\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[(r\cos\theta)^2 + (1 + r\sin\theta)^2\right] r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}\,.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial A} F \cdot dl$. La courbe est alors paramétrée par

$$\partial A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = \cos\theta,\ y = 1 + \sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left(-(1+\sin\theta)\cos^2\theta, (1+\sin\theta)^2 \cos\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

(b) On vérifie maintenant le théorème de Green pour

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\right\}$$

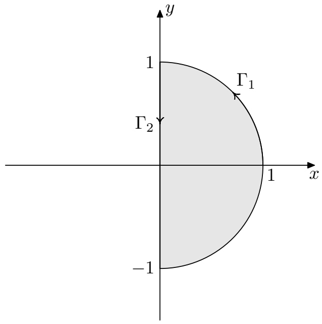
et $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{2\left(1 + x^2 + y^2\right)}, \varphi(y)\right)$ avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

(i) Calcul de $\iint_A \operatorname{rot} F\, dx\, dy$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 - \left(-\frac{x\, y}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}\right) = \frac{x\, y}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$$

et

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \text{ avec } r \in [0,1)\,,\ \theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$



On obtient facilement que

$$\iint_A \mathrm{rot} F \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \, \frac{r^2 \cos\theta \cdot \sin\theta}{\left(1+r^2\right)^2} \, dr \, d\theta = 0.$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial A} F \cdot dl$. On pose

$$\Gamma = \partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \,,$$

où

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos\theta \text{ et } y = \sin\theta \text{ avec } \theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ et } y = -t \text{ avec } t \in [-1,1]\right\}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta}{4}, \; \varphi(\sin\theta)\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin\theta) \cos\theta \, d\theta = \int_{-1}^{1} \varphi(t) \, dt \end{aligned}$$

et

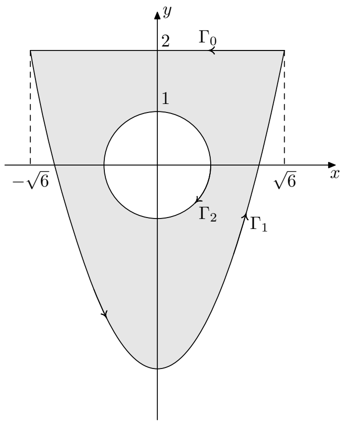
$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_{-1}^{1} (0, \varphi(-t)) \cdot (0,-1) \, dt = -\int_{-1}^{1} \varphi(-t) \, dt = -\int_{-1}^{1} \varphi(u) \, du \,.$$

Le résultat final est donc

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = 0.$$

Exercice 4.5 *(i)* Calcul de $\displaystyle\iint_A \mathrm{rot} F \, dx \, dy$. On trouve $\mathrm{rot}\, F = -x$ et $A = A_1 \setminus A_2$, où

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 < y < 2\right\}$$
$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$



et par conséquent

$$\iint_A \operatorname{rot} F\, dx\, dy = \iint_{A_1} \operatorname{rot} F\, dx\, dy - \iint_{A_2} \operatorname{rot} F\, dx\, dy.$$

Un calcul immédiat donne

$$-\iint_{A_2} \operatorname{rot} F\, dx\, dy = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = 0$$

et

$$\begin{aligned}\iint_{A_1} \operatorname{rot} F\, dx\, dy &= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{x^2-4}^{2} (-x)\, dx\, dy = -\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} x\left(2 - x^2 + 4\right) dx \\ &= -\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(6\,x - x^3\right) dx = -\left[3\,x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$\iint_A \operatorname{rot} F\, dx\, dy = 0.$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial A} F \cdot dl$. On trouve que

$$\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$$

où

$$\Gamma_0 = \left\{\alpha(t) = (-t, 2),\ t \in \left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)\right\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{\beta(t) = \left(t, t^2 - 4\right),\ t \in \left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in (0, 2\pi)\right\}.$$

Le calcul des intégrales curvilignes donne

$$\int_{\Gamma_0} F \cdot dl = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (-2\,t, 2) \cdot (-1, 0)\, dt = 0,$$

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(t\left(t^2 - 4\right), t^2 - 4\right) \cdot (1, 2\,t)\, dt = 0,$$

$$\int_{-\Gamma_2} F \cdot dl = -\int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = 0.$$

Le résultat final est donc

$$\int_{\partial A} F \cdot dl = \int_{\Gamma_0} F \cdot dl + \int_{\Gamma_1} F \cdot dl + \int_{-\Gamma_2} F \cdot dl = 0.$$

Exercice 4.6 *Etape 1. (i)* On commence par calculer pour

$$F = F(x_1, x_2) = \left(F^1(x_1, x_2), F^2(x_1, x_2)\right)$$

l'intégrale suivante (rappelons qu'on note $F^1_{x_2} = \partial F^1/\partial x_2$ et $F^2_{x_1} = \partial F^2/\partial x_1$)

$$\begin{aligned} -\iint_\Omega F^1_{x_2}\, dx_1 dx_2 &= -\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} F^1_{x_2}\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1}^{1} \left[F^1\left(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}\right) - F^1\left(x_1, \sqrt{1-x_1^2}\right)\right] dx_1 \,. \end{aligned}$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned} \iint_\Omega F^2_{x_1}\, dx_1 dx_2 &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} F^2_{x_1}\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1}^{1} \left[F^2\left(\sqrt{1-x_2^2}, x_2\right) - F^2\left(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2\right)\right] dx_2 \,. \end{aligned}$$

Etape 2. (i) On écrit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$\Gamma_1 = \left\{\left(t, -\sqrt{1-t^2}\right) : t : -1 \to 1\right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \left\{\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) : t : 1 \to -1\right\}.$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(F^1, 0\right) \cdot dl &= \int_{-1}^{1} \left(F^1\left(t, -\sqrt{1-t^2}\right), 0\right) \cdot \left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \left(F^1\left(t, \sqrt{1-t^2}\right), 0\right) \cdot \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt. \end{aligned}$$

(ii) On écrit ensuite $\partial\Omega = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ où

$$\Gamma_3 = \left\{ \left(\sqrt{1-t^2}, t \right) : t : -1 \to 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \left\{ \left(-\sqrt{1-t^2}, t \right) : t : 1 \to -1 \right\}.$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \left(0, F^2\right) \cdot dl = & \int_{-1}^{1} \left(0, F^2 \left(\sqrt{1-t^2}, t\right)\right) \cdot \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right) dt \\ & - \int_{-1}^{1} \left(0, F^2 \left(-\sqrt{1-t^2}, t\right)\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right) dt.\end{aligned}$$

(iii) Finalement, en regroupant les résultats, on a bien obtenu que

$$\iint_{\Omega} \left(F^2_{x_1} - F^1_{x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \left(F^1, F^2\right) \cdot dl.$$

Exercice 4.7 *(i)* On est dans les hypothèses du corollaire 4.3, il suffit donc d'écrire

$$\iint_{\Omega} \Delta u \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \nu) \, dl.$$

(ii) Comme (cf. théorème 1.2 (iii))

$$\operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = v\Delta u + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)$$

on trouve, grâce au corollaire 4.3, la première identité de Green

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega} [v\Delta u + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)] \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (v \operatorname{grad} u \cdot \nu) \, dl = \int_{\partial\Omega} v \, (\operatorname{grad} u \cdot \nu) \, dl.\end{aligned}$$

(iii) Par le théorème 1.2 (iii), on a que

$$u\Delta v - v\Delta u = \operatorname{div} (u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div} (v \operatorname{grad} u).$$

Par conséquent, en appliquant le corollaire 4.3, on trouve la deuxième identité de Green, à savoir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} [\operatorname{div}((u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div} (v \operatorname{grad} u)] \, dx \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega} [u \, (\operatorname{grad} v \cdot \nu) - v \, (\operatorname{grad} u \cdot \nu)] \, dl.\end{aligned}$$

Exercice 4.8 On va simplifier la démonstration en considèrant que Ω n'a pas de trous et que $\partial\Omega$ est une courbe régulière donnée par $\partial\Omega = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$.

On sait (cf. définition 8.9) que le vecteur normal unitaire extérieur à Ω, ν, est tel que

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

On pose $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ où

$$\Phi_1 = -F_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = F_1\,.$$

On observe qu'alors

$$\operatorname{rot}\Phi = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \operatorname{div} F$$

$$\Phi \cdot \gamma' = \Phi_1\, \gamma_1' + \Phi_2\, \gamma_2' = (F_1\, \nu_1 + F_2\, \nu_2)\, \|\gamma'(t)\| = (F \cdot \nu)\, \|\gamma'(t)\|\,.$$

En utilisant le théorème de Green on déduit le résultat, à savoir

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy &= \iint_\Omega \operatorname{rot}\Phi\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot dl = \int_a^b \Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (F \cdot \nu)\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, dl\,.\end{aligned}$$

Exercice 4.9 *(i)* On remarque que $\operatorname{rot}F = 2$ et que $\operatorname{rot}G_1 = \operatorname{rot}G_2 = 1$. Par conséquent, en utilisant le théorème de Green, on obtient le résultat souhaité car

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(\Omega) &= \iint_\Omega dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_\Omega \operatorname{rot}F\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F \cdot dl \\ &= \iint_\Omega \operatorname{rot}G_1\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl \\ &= \iint_\Omega \operatorname{rot}G_2\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl.\end{aligned}$$

(ii) Si $\partial\Omega = \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in [a,b]\}$, on a, d'après (i),

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(\Omega) &= \frac{1}{2}\int_a^b (-\gamma_2(t), \gamma_1(t)) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (\gamma_1(t)\, \gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\, \gamma_2(t))\, dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(\Omega) &= \int_a^b (0, \gamma_1(t)) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\, dt = \int_a^b \gamma_1(t)\, \gamma_2'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (-\gamma_2(t), 0) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\, dt = -\int_a^b \gamma_1'(t)\, \gamma_2(t)\, dt.\end{aligned}$$

Exercice 4.10 * Soient $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ deux solutions de (D). Soit $w = u - v$. On a alors

$$\begin{cases} \Delta w\,(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega \\ w\,(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Par la première identité de Green on a ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_\Omega w\,\Delta w\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} w(\operatorname{grad} w \cdot \nu)dl - \iint_\Omega \|\operatorname{grad} w\|^2\,dx\,dy \\ &= -\iint_\Omega \|\operatorname{grad} w\|^2\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{grad} w \equiv 0$ et comme Ω est un domaine, on déduit que w est constant dans Ω. Comme $w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et $w = 0$ sur $\partial\Omega$, on infère que $w \equiv 0$, c'est-à-dire $u = v$. On a donc bien montré que (D) admet au plus une solution.

Exercice 4.11 * *(i)* On a si $x_1 = \cos\theta$ et $x_2 = \sin\theta$ que

$$u\,\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sin\theta\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \cos\theta\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\theta}\left\{\left[u\,(\cos\theta, \sin\theta)\right]^2\right\}.$$

et par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\left\{\left[u\,(\cos\theta, \sin\theta)\right]^2\right\} d\theta = 0.$$

(ii) En multipliant l'équation par u et en utilisant la première identité de Green (avec $v = u$) et (i) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_\Omega u\,\Delta u = -\iint_\Omega \|\operatorname{grad} u\|^2 + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial \nu} \\ &= -\iint_\Omega \|\operatorname{grad} u\|^2 + \lambda\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\iint_\Omega \|\operatorname{grad} u\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{grad} u = 0$ et donc $u \equiv$ constante.

Chapitre 5

Intégrales de surfaces

5.1 Définitions et résultats théoriques

Rappel On rappelle ce qu'il faut absolument savoir sur les surfaces et nous référons pour de plus amples développements à la section 8.4.

(i) On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une ***surface régulière*** si (entre autres) il existe

- $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné dont le bord ∂A est une courbe simple fermée régulière par morceaux.

- Une paramétrisation

$$\sigma : \overline{A} \to \Sigma = \sigma\left(\overline{A}\right) \subset \mathbb{R}^3$$

injective, $\sigma \in C^1\left(\overline{A}; \mathbb{R}^3\right)$, $\sigma(u,v) = \left(\sigma^1(u,v), \sigma^2(u,v), \sigma^3(u,v)\right)$, telle que le vecteur normal satisfasse

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2\sigma_v^3 - \sigma_u^3\sigma_v^2 \\ \sigma_u^3\sigma_v^1 - \sigma_u^1\sigma_v^3 \\ \sigma_u^1\sigma_v^2 - \sigma_u^2\sigma_v^1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall\,(u,v) \in \overline{A}.$$

(ii) Une surface est dite ***régulière par morceaux*** si, intuitivement, elle est une union finie de surfaces régulières disjointes (cf. si nécessaire, définition 8.13).

Toutes les surfaces que nous considèrerons dans ce livre seront des surfaces régulières par morceaux qui seront de plus ***orientables*** (nous n'avons pas besoin de définir ici ce terme, cf. si nécessaire chap. 8). Par ailleurs dans tous les exemples étudiés (cf. en particulier ceux mentionnés ci-dessous) nous serons en mesure de traiter les surfaces régulières par morceaux comme si elles étaient régulières sans trop rentrer dans les détails.

Exemple 5.1 (i) *(**Sphère**) Soit*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

Une paramétrisation régulière par morceaux de Σ est donnée par

$$\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \quad (\theta,\varphi) \in \overline{A}$$

où $A = (0,2\pi) \times (0,\pi)$. La normale associée est

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi).$$

(ii) *(**Cylindre**) Soit*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \text{ et } 0 < z < 1\right\}.$$

On choisit comme paramétrisation régulière par morceaux

$$\sigma(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), \quad (\theta,z) \in \overline{A}$$

avec $A = (0,2\pi) \times (0,1)$. La normale associée est

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Définition 5.2 (i) *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière (avec $\sigma = \sigma(u,v) : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation) et $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors on définit l'intégrale du champ scalaire sur Σ comme*

$$\boxed{\iint_\Sigma f\,ds = \iint_A f(\sigma(u,v))\,\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|\,du\,dv.}$$

(ii) *Si Σ est une surface régulière par morceaux telle que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ avec Σ_i régulières alors*

$$\iint_\Sigma f\,ds = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} f\,ds.$$

Définition 5.3 (i) *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable (de paramétrisation $\sigma = \sigma(u,v) : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$). Soit $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu. On appelle intégrale du champ vectoriel F sur Σ dans la direction $\nu = \sigma_u \wedge \sigma_v$ la quantité*

$$\boxed{\iint_\Sigma F \cdot ds = \iint_A \left[F(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v\right]\,du\,dv.}$$

(ii) *Si $\Sigma = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ avec Σ_i régulières, alors*

$$\iint_\Sigma F \cdot ds = \sum_{i=1}^m \iint_{\Sigma_i} F \cdot ds.$$

Remarque *(i)* Si $f \equiv 1$, alors

$$\boxed{\text{aire}\,(\Sigma) = \iint_{\Sigma} ds.}$$

(ii) L'intégrale $\displaystyle\iint_{\Sigma} F{\cdot}ds$ est aussi appelée flux à travers Σ dans la direction ν.

(iii) Les définitions ci-dessus sont indépendantes du choix de la paramétrisation (au signe près pour la deuxième).

(Pour plus de détails, cf. [2] 29-31, [4] 376-389, [7] chapitre 5, [8] 334, [11] 540-550, [12] 452-459).

5.2 Exemples

Exemple 5.4 *Calculer l'aire de* Σ *où*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}.$$

Discussion On définit $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ et

$$\sigma(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi).$$

On a

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -R^2 \sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

et donc

$$\|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi\| = R^2 \sin\varphi.$$

L'aire de Σ est alors donnée par

$$\text{aire}\,(\Sigma) = \iint_{\Sigma} ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 4\pi R^2.$$

Exemple 5.5 *Calculer* $\displaystyle\iint_{\Sigma} f\, ds$ *où* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \le z \le 1\right\}.$$

Discussion On définit $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ et

$$\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z).$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

ce qui donne

$$\|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\| = 1.$$

Le résultat souhaité est donc

$$\iint_{\Sigma} f\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\,z)\, d\theta\, dz = 2\pi \int_0^1 (1 + 2\,z)\, dz = 4\pi.$$

Exemple 5.6 *Soient* $F(x,y,z) = \left(y, -x, z^2\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \le z \le 1\right\}.$$

Calculer le flux passant à travers Σ *dans la direction ascendante (c'est-à-dire dans la direction des* $z > 0$*).*

Discussion Dans ce cas on pose $A = (0, 2\pi) \times (0,1)$ et

$$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z).$$

On obtient

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}.$$

Comme $-z < 0$, on choisit comme normale $\nu = -(\sigma_\theta \wedge \sigma_z)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \cdot ds &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z\sin\theta, -z\cos\theta, z^2\right) \cdot (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\, dz\, d\theta \\ &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z^2\cos\theta\sin\theta - z^2\cos\theta\sin\theta - z^3\right) dz\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 z^3\, dz = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5.3 Exercices

Exercice 5.1 *Soient* $f(x,y,z) = x\,y + z^2$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \le z \le 1\right\}.$$

Calculer $\displaystyle\iint_{\Sigma} f\, ds$.

Exercice 5.2 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \le z \le 1\right\}.$$

Calculer le flux passant à travers Σ *dans la direction ascendante (c'est-à-dire dans la direction des* $z > 0$*).*

Exercice 5.3 *Soit*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Calculer la masse de la surface Σ *sachant que la densité est* $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 5.4 *Soient* $F(x, y, z) = (0, z, z)$ *et*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 6 - 3\,x - 2\,y,\ x, y, z \ge 0 \right\}.$$

Calculer le flux qui passe par cette surface et qui s'éloigne de l'origine.

Exercice 5.5 *Soit*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1 \right\}.$$

Calculer l'aire de $\partial\Omega$.

Exercice 5.6 *Soit* $0 < a < R$. *Soit le tore* Ω *obtenu par rotation du disque* $(x - R)^2 + z^2 \le a^2$ *autour de l'axe* Oz *(cf. le dessin de l'exemple 8.19).*

(i) *Montrer que*

$$x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \quad y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta \quad \text{et} \quad z = r\sin\varphi$$

avec $0 < r < a$ *et* $0 \le \theta, \varphi < 2\pi$ *est une paramétrisation de* Ω. *Faire un dessin et indiquer ce que représentent* r, θ *et* φ. *Calculer le Jacobien de la transformation puis calculer le volume de* Ω.

(ii) *Trouver une représentation paramétrique du bord de* Ω *(noté* $\partial\Omega$*) et exprimer une normale au bord de* Ω.

(iii) *Calculer l'aire de* $\partial\Omega$.

(iv) *Calculer* $\displaystyle\iiint_\Omega z^2 dx\, dy\, dz$.

Exercice 5.7 ** Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ouvert,* $\Gamma \subset \Omega$ *une courbe simple, régulière et* $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $f > 0$. *Considérons la surface*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma,\ 0 \le z \le f(x, y) \right\}.$$

Montrer que

$$\int_\Gamma f\, dl = \operatorname{Aire}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, ds.$$

5.4 Corrigés

Exercice 5.1 On pose

$$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z), \quad \text{avec } (\theta, z) \in A = (0, 2\pi) \times (0, 1).$$

La normale est alors donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z) \quad \Rightarrow \quad \|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\| = \sqrt{2}\, z.$$

On trouve donc

$$\iint_\Sigma f\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, z \left(z^2 \cos\theta \sin\theta + z^2\right) d\theta\, dz = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 z^3\, dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Exercice 5.2 On a

$$\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)\,, \quad \text{avec } (\theta, z) \in A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$$

et donc

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\,.$$

Noter que la normale pointe dans la direction des z négatifs. On a donc

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma F \cdot ds &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z^2 \cos^2\theta, z^2 \sin^2\theta, z^2\right) \cdot (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\, dz\, d\theta \\ &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(z^3 \cos^3\theta + z^3 \sin^3\theta - z^3\right) dz\, d\theta = 2\,\pi \int_0^1 z^3\, dz = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Exercice 5.3 Une paramétrisation de Σ est donnée par l'exercice précédent

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) : (\theta, z) \in A = (0, 2\pi) \times (0, 1)\right\}.$$

La normale est alors donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z) \quad \Rightarrow \quad \|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\| = \sqrt{2}\, z.$$

On trouve alors

$$\iint_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2}\, ds = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} z^2\, dz\, d\theta = \frac{2\,\pi}{3}\sqrt{2}.$$

Exercice 5.4 On a

$$\Sigma = \left\{\sigma(x, y) = (x, y, 6 - 3\,x - 2\,y) : \quad 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{6 - 3\,x}{2}\right\},$$

et la normale est alors (noter qu'elle pointe dans une direction qui s'éloigne de l'origine)

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds = \int_0^2 \int_0^{(6-3\,x)/2} (0, 6-3\,x-2\,y, 6-3\,x-2\,y) \cdot (3,2,1)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^2 \int_0^{(6-3\,x)/2} 3\,(6-3\,x-2\,y)\, dy\, dx = 18.$$

Exercice 5.5 On écrit $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ et } z \leq 1\right\}$$
$$= \left\{\alpha\,(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\right) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$= \{\beta\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}\,.$$

On calcule d'abord Aire (Σ_1) . On a

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\,r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,r^2\cos\theta \\ -2\,r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\|\alpha_r \wedge \alpha_\theta\| = r\sqrt{1+4\,r^2}\,.$$

On déduit alors que

$$\text{Aire}\,(\Sigma_1) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4\,r^2}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4\,r^2}\, dr$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(1+4\,r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right).$$

On détermine maintenant Aire (Σ_2) (on pourrait calculer l'aire de Σ_2 immédiatement en se rendant compte que Σ_2 est le disque unité). On trouve

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

et donc

$$\text{Aire}\,(\Sigma_2) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\theta = \pi.$$

Le résultat souhaité est alors

$$\text{Aire}\,(\partial\Omega) = \text{Aire}\,(\Sigma_1) + \text{Aire}\,(\Sigma_2)\,.$$

Exercice 5.6 *(i)* En ce qui concerne cet exercice on pourra tout d'abord se référer à l'Exemple 8.19. On a que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{u} \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = u(r, \theta, \varphi),$$

et ainsi

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -(R + r\cos\varphi)\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & (R + r\cos\varphi)\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est donc

$$|\det \nabla u| = r(R + r\cos\varphi).$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= 4\pi^2 R \int_0^a r\,dr = 2\,\pi^2 R\,a^2. \end{aligned}$$

(ii) $\partial\Omega$ est paramétré par

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((R + a\cos\varphi)\cos\theta, (R + a\cos\varphi)\sin\theta, a\sin\varphi), \quad \theta, \varphi \in [0, 2\pi].$$

On trouve que

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -(R + a\cos\varphi)\sin\theta & (R + a\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -a\sin\varphi\cos\theta & -a\sin\varphi\sin\theta & a\cos\varphi \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{pmatrix} a(R + a\cos\varphi)\cos\varphi\cos\theta \\ a(R + a\cos\varphi)\cos\varphi\sin\theta \\ a(R + a\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

et donc

$$\|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi\| = a(R + a\cos\varphi).$$

(iii) L'aire est alors donnée par

$$\mathrm{Aire}(\partial\Omega) = \iint_{\partial\Omega} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi = 4\,\pi^2 R\,a.$$

(iv) On a finalement

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r\left(r^2\sin^2\varphi\right)(R + r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= 2\,\pi\,R \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi^2 R\,a^4}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.7 * Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \Gamma$ une paramétrisation simple et régulière de la courbe Γ. Définissons $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ par

$$\sigma(t,h) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), h\, f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))\,.$$

Alors, σ est une paramétrisation de Σ, avec

$$\sigma_t \wedge \sigma_h = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \gamma_1' & \gamma_2' & h\left(\gamma_1' f_x + \gamma_2' f_y\right) \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t)\, f(\gamma(t)) \\ -\gamma_1'\, f(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\|\sigma_t \wedge \sigma_h\| = f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\| > 0.$$

En utilisant la définition de l'intégrale de surface, on obtient

$$\iint_\Sigma 1\, ds = \int_0^1 \int_0^1 \|\sigma_t \wedge \sigma_h\|\, dt\, dh = \int_0^1 f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_\Gamma f\, dl.$$

Chapitre 6

Théorème de la divergence

6.1 Définitions et résultats théoriques

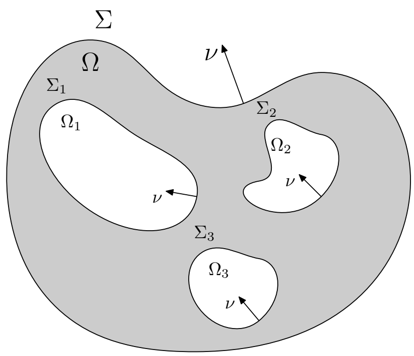
Définition 6.1 *On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un* ***domaine régulier*** *s'il existe des ouverts bornés tels que $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^3$*

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j \qquad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_0\,,\ \forall\, j = 1, 2, \cdots, m$$

$$\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, i, j = 1, \cdots, m \quad \partial\Omega_j = \Sigma_j\,,\ j = 0, 1, 2, \cdots, m$$

où Σ_j , $j = 0, 1, 2, \cdots, m$ sont des surfaces régulières par morceaux, orientables et telles que $\partial\Sigma_j = \emptyset$.

De plus il existe un champ continu (par morceaux) de ***normales extérieures unitaires*** *ν à Ω.*



Remarque La dernière condition se comprend comme : $\forall\, x \in \Sigma_j$, $j = 0, 1, 2, \cdots, m$, où le champ de normales est continu, $\forall\, \epsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $j = 1, 2, \cdots, m$

$$x + \epsilon\, \nu\,(x) \in \Omega_j\,, \quad x - \epsilon\, \nu\,(x) \in \overline{\Omega}_j^c\,,$$

$$x - \epsilon\, \nu\,(x) \in \Omega_0\,, \quad x + \epsilon\, \nu\,(x) \in \overline{\Omega}_0^c\,.$$

Théorème 6.2 (Théorème de la divergence) *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *et* ν *comme ci-dessus. Soit* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $F \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, *alors*

$$\boxed{\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds.}$$

Corollaire 6.3 *Si* Ω *et* ν *sont comme ci-dessus et si*

$$F(x,y,z) = (x,y,z), \quad G_1(x,y,z) = (x,0,0),$$
$$G_2(x,y,z) = (0,y,0), \quad G_3(x,y,z) = (0,0,z)$$

alors

$$\boxed{\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = \iint_{\partial\Omega} (G_i \cdot \nu)\, ds, \quad i = 1,2,3.}$$

(Pour plus de détails, cf. [2] 33-36, [4] 397-407, [7] chapitre 6, [8] 340-349, [11] 550-555, [12] 475-479).

6.2 Exemples

Exemple 6.4 *Vérifier le théorème de la divergence pour*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\} \quad \text{et} \quad F(x,y,z) = (x\,y, y, z).$$

Discussion *(i)* Calcul de $\displaystyle\iiint_\Omega \operatorname{div} F$. On trouve que

$$\operatorname{div} F = y + 2.$$

Donc, en passant en coordonnées sphériques $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (y+2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 + r\sin\theta\sin\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi 2\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. Une paramétrisation de la surface est alors donnée par

$$\partial\Omega = \Sigma = \{\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi), (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]\}.$$

Un calcul immédiat donne

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

qui est clairement une normale intérieure. En observant que sur $\partial\Omega$ on a

$$\begin{aligned}&F\cdot(-\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi)\\ &= \left(\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi\right)\cdot(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\sin\varphi\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta\sin\theta\sin^4\varphi + \sin^2\theta\sin^3\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi\,d\theta\\ &= \pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi + 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\\ &= \pi\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} - 2\pi\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

Exemple 6.5 *Vérifier le théorème de la divergence pour*

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1 \ \textit{et}\ 0<z<1\right\} \quad \textit{et} \quad F(x,y,z) = \left(x^2,0,0\right).$$

Discussion *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F$. On trouve que

$$\operatorname{div} F = 2\,x.$$

En passant aux coordonnées cylindriques, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, on obtient

$$\iiint_\Omega (2\,x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 (2\,r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta\,dz = 0.$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds$. On a que

$$\partial\Omega = \Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2$$

où

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1 \text{ et } z=0\right\}\\ \Sigma_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1 \text{ et } z=1\right\}\\ \Sigma_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \text{ et } 0<z<1\right\}\end{aligned}$$

dont les paramétrisations et les normales sont données respectivement par

$$\sigma^0(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma^0_r \wedge \sigma^0_\theta = (0,0,r)\,, \text{ (normale intérieure)}$$

$$\sigma^1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1) \quad \Rightarrow \quad \sigma^1_r \wedge \sigma^1_\theta = (0,0,r)\,, \text{ (normale extérieure)}$$

$$\sigma^2(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \Rightarrow \quad \sigma^2_\theta \wedge \sigma^2_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,, \text{ (normale extérieure).}$$

On obtient par conséquent

$$\iint_{\Sigma_0} (F\cdot\nu)\,ds = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta, 0, 0\right)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_1} (F\cdot\nu)\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta, 0, 0\right)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2} (F\cdot\nu)\;ds = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\cos^2\theta, 0, 0\right)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)\,d\theta\,dz = 0.$$

Finalement on a bien trouvé

$$\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds = 0.$$

6.3 Exercices

Dans les exercices 1 à 10 il s'agira de vérifier le Théorème de la divergence.

Exercice 6.1 *Soient* $F(x,y,z) = (x\,z, y, y)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\right\}.$$

Exercice 6.2 *Soient* $F(x,y,z) = (0,0,x\,y\,z)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z^2 \text{ et } 0 < z < 1\right\}.$$

Exercice 6.3 *Soient* $F(x,y,z) = (x\,y, y\,z, x\,z)$ *et le tétraèdre unité donné par*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1-x-y,\ 0 < y < 1-x,\ 0 < x < 1\right\}.$$

Exercice 6.4 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : b^2\left(x^2+y^2\right) < a^2z^2 \text{ et } 0 < z < b\right\}.$$

Exercice 6.5 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x^2, -y^2, z^2\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4 \text{ et } 0 < z < 2\right\}.$$

Exercice 6.6 *Soient* $F(x,y,z) = (x,y,z)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4 \text{ et } x^2+y^2 < 3\,z\right\}.$$

Exercice 6.7 *Soient* $F(x,y,z) = \left(0, \dfrac{3\,y}{1+z^2}, 5\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2} < z < 1,\ x^2+y^2 < \frac{\pi^2}{16} \text{ et } x < 0 < y\right\}.$$

Exercice 6.8 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2+y^2 < 1 \text{ et } z > 0\right\}.$$

Exercice 6.9 *Soient* $F(x,y,z) = \left(2, 0, x\,y^2 + z^2\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ 0 < z < 2 \text{ et } 4\left(x^2+y^2\right) < (z-4)^2\right\}.$$

Exercice 6.10 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x^2, 0, 0\right)$ *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4 \text{ et } x^2+y^2+(z-2)^2 < 1\right\}.$$

Exercice 6.11 *Montrer le corollaire 6.3.*

Exercice 6.12 (Identités de Green) * *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine régulier et* $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ *la normale extérieure unité. Soient* $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. *On dénote par* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad} u \cdot \nu$. *Montrer que*

$$\boxed{\iiint_\Omega [v\,\Delta u + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v]\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds.}$$

$$\boxed{\iiint_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds.}$$

Suggestion. On utilisera d'abord le théorème 1.2 (iii), à savoir

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u\,\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v.$$

On appliquera ensuite le théorème de la divergence.

Exercice 6.13 * *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine régulier,* ν *la normale extérieure unité à* $\partial\Omega$. *Soient* $f, \varphi \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *et soit le problème*

$$(N) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où on a noté $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad} u \cdot \nu$. *Trouver, à l'aide de l'exercice 6.12, des conditions nécéssaires sur* f *et* φ *pour que le problème* (N) *admette une solution* $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. *Que peut-on dire de l'unicité des solutions de* (N) ?

Exercice 6.14 ** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier et $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure unité en $x \in \partial\Omega$.*

- On dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par $\langle .; . \rangle$, c'est-à-dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,.$$

- On note

$$\mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ G \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right) : \left[\begin{array}{ll} \operatorname{div} G = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \operatorname{rot} G = 0 & \textit{dans } \Omega \\ \langle G; \nu \rangle = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}.$$

(i) *Montrer que, pour tout $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et $G \in \mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right)$,*

$$\operatorname{div}(f\, G) = \langle \operatorname{grad} f; G \rangle \,.$$

(ii) *Montrer, à l'aide du théorème de la divergence, que, pour tout $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et $G \in \mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right)$,*

$$\iiint_\Omega \langle \operatorname{grad} f(x); G(x) \rangle \, dx = 0.$$

(iii) *A l'aide de la question précédente, montrer que si Ω est simplement connexe alors*

$$G \in \mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \Leftrightarrow \quad G \equiv 0.$$

Exercice 6.15 ** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $a \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $u = (u_1, u_2, u_3) \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} u + \langle \operatorname{grad} a; u \rangle = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où $\langle .; . \rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. Montrer, à l'aide du théorème de la divergence, que

$$\iiint_\Omega e^{a(x)} f(x) \, dx = 0.$$

6.4 Corrigés

Exercice 6.1 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$. On a tout de suite que

$$\operatorname{div} F = z + 1.$$

On passe aux coordonnées sphériques

$$x = r \cos\theta \sin\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\varphi$$

on trouve alors

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r\cos\varphi + 1)\, r^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \left(r^3 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 \sin\varphi\right) d\varphi\, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi + \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On paramètre $\partial\Omega = \Sigma$ par

$$\sigma(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\,, \quad (\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]\,.$$

Le calcul de la normale donne

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\,,$$

qui est une normale intérieure. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\, ds \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left(\cos^2\theta \sin^3\varphi\cos\varphi + \sin^2\theta\sin^3\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\right) d\varphi\, d\theta \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\sin^3\varphi\cos\varphi + \sin^3\varphi\right) d\varphi \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\sin^3\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi\right) d\varphi\end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\, ds = \pi \int_0^\pi \left(\frac{\sin^4\varphi}{4} - \cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)' d\varphi = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Exercice 6.2 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$. On a que

$$\operatorname{div} F = x\, y.$$

On choisit les coordonées cylindriques (le Jacobien est alors r)

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z, \quad z\in(0,1)\,,\ \theta\in(0,2\pi)\,,\ r\in(0,z)\,.$$

On trouve que

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z \left(r^2\cos\theta\sin\theta\right) r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z r^3 \left[-\frac{\cos(2\,\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} dr\, dz = 0.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On pose

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2\,,$$

où

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z = 1\right\}$$
$$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } z \in [0,1]\right\}.$$

On paramètre Σ_1 par

$$\sigma^1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)\,, \quad \text{avec } (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

on trouve alors que

$$\sigma^1_r \wedge \sigma^1_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

qui est une normale extérieure, donc

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(0,0,r^2\cos\theta\sin\theta\right) \cdot (0,0,r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta = 0.\end{aligned}$$

On paramètre Σ_2 par

$$\sigma^2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)\,, \quad \text{avec } (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

on a alors que

$$\sigma^2_r \wedge \sigma^2_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{pmatrix},$$

qui est une normale intérieure. On déduit

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(0,0,r^3\cos\theta\sin\theta\right) \cdot (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-r^4\cos\theta\sin\theta\right) dr\, d\theta = 0\end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = 0.$$

Exercice 6.3 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$. On a immédiatement que

$$\operatorname{div} F = x + y + z.$$

On a que

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x - y,\ 0 < y < 1 - x,\ 0 < x < 1 \right\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + z)\, dz\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1 - (x + y)^2 \right) dy\, dx = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On a que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, où

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{ \alpha(x, z) = (x, 0, z) : 0 \le z \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1 \} \\ \Sigma_2 &= \{ \beta(x, y) = (x, y, 0) : 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1 \} \\ \Sigma_3 &= \{ \gamma(y, z) = (0, y, z) : 0 \le z \le 1 - y,\ 0 \le y \le 1 \} \\ \Sigma_4 &= \{ \delta(x, y) = (x, y, 1 - x - y) : 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1 \}\,. \end{aligned}$$

Les normales correspondantes sont

$$\alpha_x \wedge \alpha_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_x \wedge \beta_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_y \wedge \gamma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_x \wedge \delta_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui sont des normales extérieures pour la première et la dernière et intérieures pour les deux autres. Noter alors que

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds = \iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds = \iint_{\Sigma_3} (F \cdot \nu)\, ds = 0$$

et donc

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds &= \iint_{\Sigma_4} (F\cdot\nu)\,ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} ((x\,y,\ y\,(1-x-y)\,, x\,(1-x-y))\cdot(1,1,1)\,dy\,dx\end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds = \frac{1}{8}\,.$$

Exercice 6.4 *(i)* Calcul de $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$. On a que $\operatorname{div} F = 2\,(x+y+z)\,.$ On pose

$$x = a\,r\cos\theta,\ y = a\,r\sin\theta,\ z = b\,t,\quad \text{avec } 0<\theta<2\pi,\ 0<r<t<1$$

et on trouve donc

$$\text{Jacobien} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta & 0 \\ a\sin\theta & a\,r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2 b\,r.$$

Ceci nous permet de calculer

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz &= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dt \int_0^t a^2 b\,r\,(a\,r\cos\theta + a\,r\sin\theta + b\,t)\,dr \\ &= 4\pi\,a^2 b^2 \int_0^1 dt \int_0^t r\,t\,dr = \frac{\pi\,a^2 b^2}{2}\,.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds$. On a que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le a^2,\ z=b\right\} \\ &= \{\alpha\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, b) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : b^2\left(x^2+y^2\right) = a^2 z^2 \text{ et } 0\le z\le b\right\} \\ &= \{\beta\,(\theta,t) = (a\,t\cos\theta, a\,t\sin\theta, b\,t) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le t\le 1\}\,.\end{aligned}$$

On trouve

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_\theta \wedge \beta_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\,t\sin\theta & a\,t\cos\theta & 0 \\ a\cos\theta & a\sin\theta & b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a\,b\,t\cos\theta \\ a\,b\,t\sin\theta \\ -a^2 t \end{pmatrix}$$

qui sont toutes les deux des normales extérieures. On obtient donc

$$\iint_{\Sigma_1} (F\cdot\nu)\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta, b^2\right)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta = \pi\,a^2b^2.$$

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_2} (F\cdot\nu)\,ds \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(a^2t^2\cos^2\theta, a^2t^2\sin^2\theta, b^2t^2\right)\cdot\left(a\,b\,t\cos\theta, a\,b\,t\sin\theta, -a^2t\right)dt\,d\theta \\
&= -2\pi a^2b^2\int_0^1 t^3dt = -\frac{\pi}{2}\,a^2b^2
\end{aligned}$$

et finalement

$$\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds = \frac{\pi}{2}\,a^2b^2.$$

Exercice 6.5 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$. On obtient

$$\operatorname{div} F = 2\,x - 2\,y + 2\,z.$$

On pose

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z, \quad \text{avec } 0 < r, z < 2,\ 0 < \theta < 2\pi$$

et par conséquent

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^2 (2\,r\cos\theta - 2\,r\sin\theta + 2\,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz = 16\,\pi.$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\ ds$. On voit que $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$ où

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<4,\ z=0\right\} \\
&= \left\{\alpha\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4,\ 0<z<2\right\} \\
&= \left\{\beta\,(\theta,z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 2\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<4,\ z=2\right\} \\
&= \left\{\gamma\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2\right\}.
\end{aligned}$$

Les normales sont alors données par

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_\theta \wedge \beta_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_r \wedge \gamma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

qui sont des normales extérieures pour les deux dernières et une normale intérieure pour la première. Ceci nous conduit à

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2\cos^2\theta, -r^2\sin^2\theta, 0\right) \cdot (0,0,r)\, dr\, d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4\cos^2\theta, -4\sin^2\theta, z^2\right) \cdot (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)\, dz\, d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_3} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2\cos^2\theta, -r^2\sin^2\theta, 4\right) \cdot (0,0,r)\, dr\, d\theta = 16\,\pi$$

et donc à

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = 16\,\pi.$$

Exercice 6.6 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$. On trouve immédiatement que $\operatorname{div} F = 3$. On passe aux coordonnées cylindriques et on trouve

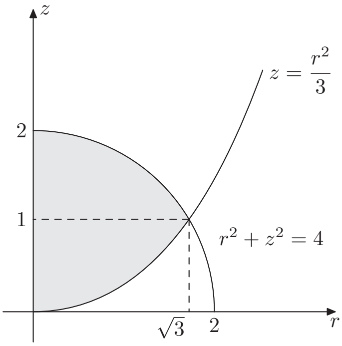
$$\Omega = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) : \theta \in (0, 2\pi)\,,\ r \in \left(0, \sqrt{3}\right),\ \frac{r^2}{3} < z < \sqrt{4 - r^2} \right\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= 3 \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dz\, dr \\ &= 6\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{3} \right) r\, dr = \frac{19\,\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. Noter que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où

$$\Sigma_1 = \left\{ \alpha(\theta, \varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi) : \theta \in [0, 2\pi]\,,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \right\}$$



(dessin dans le plan r, z)

$$\Sigma_2 = \left\{ \beta\,(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3} \right) : \theta \in [0, 2\pi]\,,\ r \in \left[0, \sqrt{3}\right] \right\}.$$

Le calcul des normales donne

$$\alpha_\theta \wedge \alpha_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cos\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\theta\sin^2\varphi \\ -4\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{2}{3}r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3}\,r^2\cos\theta \\ -\dfrac{2}{3}\,r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

qui sont toutes les deux des normales intérieures. On peut donc calculer les intégrales de surface

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} (F\cdot\nu)\,ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \left[(2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi)\,\cdot\right. \\ &\quad \left.\left(4\cos\theta\sin^2\varphi, 4\sin\theta\sin^2\varphi, 4\cos\varphi\sin\varphi\right)\right] d\theta\,d\varphi \\ &= 16\pi\int_0^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi = 16\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/3} = 8\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_2} (F\cdot\nu)\,ds \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{r^2}{3} \right)\cdot\left(\frac{2\,r^2\cos\theta}{3}\,, \frac{2\,r^2\sin\theta}{3}\,, -r \right) dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2\,r^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right) dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{12}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = 8\,\pi + \frac{3\,\pi}{2} = \frac{19\,\pi}{2}\,.$$

Exercice 6.7 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$. On trouve que

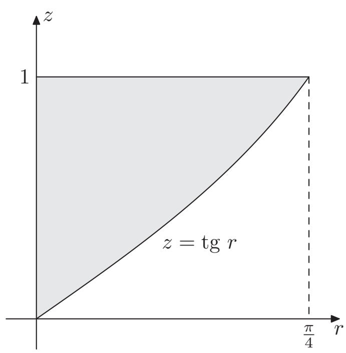
$$\operatorname{div} F = \frac{3}{1+z^2}\,.$$

En passant en coordonnées cylindriques on a que

$$\Omega = \left\{(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta, z) : \operatorname{tg} r < z < 1,\ 0 < r < \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right\}$$

et on déduit donc que

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\operatorname{tg} r}^{1} \frac{3}{1+z^2}\, r\, dz\, d\theta\, dr = \frac{3\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\operatorname{arctg} z]_{\operatorname{tg} r}^{1}\, r\, dr \\ &= \frac{3\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\pi}{4} - r\right] r\, dr = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4.\end{aligned}$$



(dessin dans le plan r, z avec angle de rotation $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$)

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\ ds$. On a que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, où

$$\Sigma_1 = \left\{(0, y, z) :\ \ \operatorname{tg} y \le z \le 1,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{(x, 0, z) :\ \ \operatorname{tg} |x| \le z \le 1,\ \ -\frac{\pi}{4} \le x \le 0\right\}$$

$$\Sigma_3 = \left\{\alpha\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)\,,\ 0 \le r \le \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}$$

$$\Sigma_4 = \left\{\beta\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \operatorname{tg} r) : 0 \le r \le \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}.$$

Les normales extérieures dans les deux premiers cas sont respectivement $(1,0,0)$ et $(0,-1,0)$. Les deux autres normales sont

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{1}{\cos^2 r} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-r\cos\theta}{\cos^2 r} \\ \dfrac{-r\sin\theta}{\cos^2 r} \\ r \end{pmatrix}$$

qui sont, respectivement des normales extérieure et intérieure. Par conséquent nous trouvons que

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\operatorname{tg} y}^1 \left(0, \frac{3\,y}{1+z^2}, 5\right) \cdot (1,0,0)\, dy\, dz = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \int_{\operatorname{tg}(-x)}^1 (0,0,5) \cdot (0,-1,0)\, dx\, dz = 0$$

$$\iint_{\Sigma_3} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(0, \frac{3\,r\sin\theta}{2}, 5\right) \cdot (0,0,r)\, d\theta\, dr = \frac{5\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_4} (F \cdot \nu)\, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(0, \frac{3\,r\sin\theta}{1+\operatorname{tg}^2 r}, 5\right) \cdot \left(\frac{r\cos\theta}{\cos^2 r}, \frac{r\sin\theta}{\cos^2 r}, -r\right) d\theta\, dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(3\,r^2\sin^2\theta - 5\,r\right) d\theta\, dr = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{5\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

et ainsi

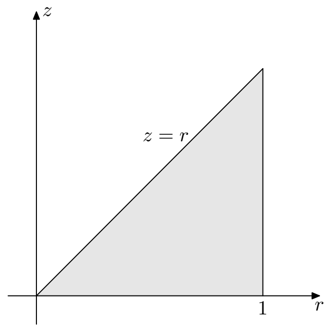
$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 .$$

Exercice 6.8 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$. On a que $\operatorname{div} F = 2\,(x+y+z)$. En passant en coordonnées cylindriques on trouve que

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 < z < r < 1,\ \theta \in (0, 2\pi)\}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^r 2\,(r\cos\theta + r\sin\theta + z)\, r\, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r\, dr \int_0^r 2\,z\, dz = 2\pi \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$



(dessin dans le plan r, z)

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On a que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ où

$$\Sigma_1 = \{\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$
$$\Sigma_2 = \{\beta(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) : 0 \le z \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$
$$\Sigma_3 = \{\gamma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Les normales sont alors

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_\theta \wedge \beta_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_r \wedge \gamma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

qui sont respectivement des normales extérieures pour les deux dernières et intérieure pour la première. On trouve alors

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta, 0\right) \cdot (0,0,-r)\, dr\, d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta, \sin^2\theta, z^2\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz = 0$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_3} (F \cdot \nu)\, ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta, r^2\right) \cdot (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

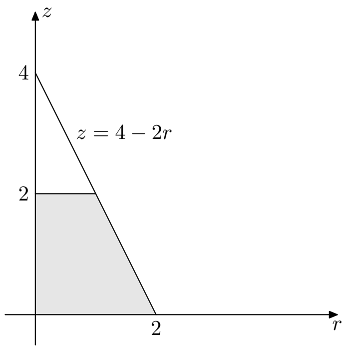
d'où le résultat.

Exercice 6.9 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$. On trouve $\operatorname{div} F = 2\,z$. On passe en coordonnées cylindriques et on déduit que

$$\Omega = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 < z < 2,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < 2\,r < 4 - z\right\}$$

et donc

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz &= \int_0^2 \int_0^{2-z/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\,z\,r\, d\theta\, dz\, dr \\ &= \pi \int_0^2 z\left(2 - \frac{z}{2}\right)^2 dz = \frac{11\,\pi}{3}\,.\end{aligned}$$



(dessin dans le plan r, z avec angle de rotation $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On voit que $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ avec

$$\Sigma_1 = \{\alpha\,(y, z) = (0, y, z) : z \in (0, 2)\ \text{ et } 2\,|y| \leq 4 - z\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{\beta\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ r \leq 2\right\}$$

$$\Sigma_3 = \left\{\gamma\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ r \leq 1\right\}$$

$$\Sigma_4 = \left\{\delta\,(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4 - 2\,r) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq r \leq 2\right\}.$$

Les normales sont alors

$$\alpha_y \wedge \alpha_z = (1, 0, 0)\,, \quad \beta_r \wedge \beta_\theta = (0, 0, r)$$

$$\gamma_r \wedge \gamma_\theta = (0, 0, r)\,, \quad \delta_r \wedge \delta_\theta = (2\,r\cos\theta, 2\,r\sin\theta, r)$$

et ce sont des normales intérieures pour les deux premières et extérieures pour les deux suivantes. On trouve en conséquence

$$\iint_{\Sigma_1} (F \cdot \nu)\, ds = \int_0^2 \int_{-2+z/2}^{2-z/2} \left(2, 0, z^2\right) \cdot (-1, 0, 0)\, dy\, dz = -12$$

$$\iint_{\Sigma_2} (F \cdot \nu)\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta\right) \cdot (0, 0, -r)\, dr\, d\theta = -\frac{64}{15}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_3} (F \cdot \nu)\, ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta + 4\right) \cdot (0, 0, r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \left(r^4 \cos\theta \sin^2\theta + 4\, r\right) dr\, d\theta = \frac{2}{15} + 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_4} (F \cdot \nu)\, ds \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 \left(2, 0, r^3 \cos\theta \sin^2\theta + (4 - 2\, r)^2\right) \cdot (2\, r \cos\theta, 2\, r \sin\theta, r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 \left(4\, r \cos\theta + r^4 \cos\theta \sin^2\theta + r\, (4 - 2\, r)^2\right) dr\, d\theta \\ &= 12 + \frac{62}{15} + \frac{5\,\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

On a ainsi le résultat souhaité

$$\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds = \sum_{i=1}^{4} \iint_{\Sigma_i} (F \cdot \nu)\, ds = \frac{11\,\pi}{3}\,.$$

Exercice 6.10 *(i)* Calcul de $\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$. On voit tout de suite que $\operatorname{div} F = 2\, x$. On passe en coordonnées cylindriques et on obtient

$$\Omega = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 < r < \frac{\sqrt{15}}{4}, 2 - \sqrt{1 - r^2} < z < \sqrt{4 - r^2}, 0 < \theta < 2\pi \right\}$$

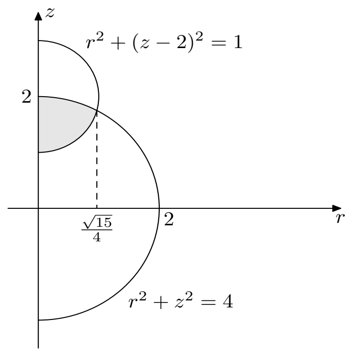
et donc

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \int_{2-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} (2\, r \cos\theta)\, r\, d\theta\, dz\, dr = 0.$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} (F \cdot \nu)\, ds$. On a $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où

$$\Sigma_1 = \left\{ \alpha\,(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{4 - r^2}\right),\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ \beta\,(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, 2 - \sqrt{1 - r^2}\right),\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}.$$



(dessin dans le plan r, z)

On trouve

$$\alpha_r \wedge \alpha_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{-r}{\sqrt{4-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}} \\ \dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}} \\ r \end{pmatrix}$$

$$\beta_r \wedge \beta_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ \dfrac{-r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ r \end{pmatrix}$$

la première est une normale extérieure alors que la seconde est intérieure. Ceci nous conduit à

$$\iint_{\Sigma_1} (F\cdot\nu)\,ds = \int_0^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \int_0^{2\pi} \big(r^2\cos^2\theta, 0, 0\big)\cdot\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right) d\theta\,dr = 0$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} (F\cdot\nu)\,ds &= \int_0^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \int_0^{2\pi} \big(r^2\cos^2\theta, 0, 0\big)\cdot\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r\right) d\theta\,dr \\ &= 0\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\iint_{\partial\Omega} (F\cdot\nu)\,ds = 0.$$

Exercice 6.11 On remarque tout d'abord que

$$\operatorname{div} F = 3 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} G_i = 1,\ i = 1, 2, 3.$$

Par conséquent, en apppliquant le théorème de la divergence, on obtient, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iiint_\Omega \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds\\ &= \iiint_\Omega \operatorname{div} G_i\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}(G_i\cdot\nu)\,ds.\end{aligned}$$

Exercice 6.12 * *(i)* Le théorème 1.2 (iii) donne

$$\operatorname{div}(v\operatorname{grad} u) = v\,\Delta u + (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)$$

$$\operatorname{div}(v\operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\operatorname{grad} v) = v\,\Delta u - u\,\Delta v.$$

(ii) Par le théorème de la divergence on a donc

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega [v\,\Delta u + (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)]\,dx\,dy\,dz\\ &= \iiint_\Omega \operatorname{div}(v\operatorname{grad} u)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}(v\operatorname{grad} u\cdot\nu)ds = \iint_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds.\end{aligned}$$

(iii) Par le théorème de la divergence on trouve ainsi

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz &= \iint_{\partial\Omega}(v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v)\cdot\nu\,ds\\ &= \iint_{\partial\Omega}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds.\end{aligned}$$

Exercice 6.13 * *(i)* Comme, par la première identité de Green (avec $v = 1$),

$$\iiint_\Omega \Delta u\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds$$

on a la condition nécéssaire

$$\iiint_\Omega f\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}\varphi\,ds.$$

Noter que si u est une solution de (N), alors $u + c$ est aussi une solution pour n'importe quel $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Soient u et v deux solutions et montrons que que $w = u - v = \text{constante}$. La fonction w satisfait

$$(N)\qquad\begin{cases}\Delta w = 0 & \text{dans } \Omega\\ \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

En multipliant l'équation par w et en utilisant la première identité de Green (avec $u = v = w$), on obtient

$$0 = \iiint_\Omega w\,\Delta w = -\iiint_\Omega \|\operatorname{grad} w\|^2 + \iint_{\partial\Omega} w\,\frac{\partial w}{\partial \nu} = -\iiint_\Omega \|\operatorname{grad} w\|^2 .$$

Par conséquent $\operatorname{grad} w = 0$ et donc $w \equiv$ constante. Il y a donc unicité des solutions à une constante près.

Exercice 6.14 * *(i)* On a

$$\operatorname{div}(f\,G) = f \operatorname{div} G + \langle \operatorname{grad} f; G\rangle = \langle \operatorname{grad} f; G\rangle .$$

(ii) Par le théorème de la divergence, comme $G \in \mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right)$,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(f\,G) = \iint_{\partial\Omega} f\ \langle G;\nu\rangle\, ds = 0.$$

Et donc, à l'aide de la question précédente

$$\iiint_\Omega \langle \operatorname{grad} f\,(x)\,; G\,(x)\rangle\, dx = 0.$$

(iii) Comme Ω est simplement connexe et $G \in \mathcal{H}\left(\overline{\Omega}\right)$, il existe g tel que

$$G = \operatorname{grad} g.$$

En choisissant $f = g$ dans la question précédente, on déduit que

$$\iiint_\Omega \|G\|^2 = 0$$

et donc le résultat.

Exercice 6.15 * On commence par multiplier l'équation par e^a et on observe que

$$e^a f = e^a \operatorname{div} u + e^a \langle \operatorname{grad} a; u\rangle = \operatorname{div}(e^a u) .$$

On applique alors le théorème de la divergence pour obtenir que (ν dénotant la normale extérieure unité à $\partial\Omega$)

$$\iiint_\Omega e^a f = \iiint_\Omega \operatorname{div}(e^a u) = \iint_{\partial\Omega} \langle e^a u;\nu\rangle .$$

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$ on a le résultat.

Chapitre 7

Théorème de Stokes

7.1 Définitions et résultats théoriques

Théorème 7.1 (Théorème de Stokes) *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *une surface régulière par morceaux et orientable. Soit* $F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, *où les* F_i *sont* C^1 *sur un ouvert contenant* $\Sigma \cup \partial\Sigma$, *alors*

$$\boxed{\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl.}$$

Rappel On rappelle uniquement ce qui est nécessaire pour vérifier le théorème de Stokes et pour plus de détails sur les surfaces nous référons au chapitre 5 et à la section 8.4.

(i) Pour toutes les surfaces régulières par morceaux $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, avec paramétrisation $\sigma = \sigma(u, v) : \overline{A} \to \Sigma$, que nous considérerons, le bord de Σ, noté $\partial\Sigma$, sera donné par $\sigma(\partial A)$ où on a enlevé les parties qui sont parcourues deux foix dans des sens opposés ainsi que les points (cf. les exemples plus bas).

(ii) Une fois choisie une paramétrisation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$, la normale $\sigma_u \wedge \sigma_v$ est donnée et l'intégrale de surface est donc comprise comme intégrale dans la direction $\sigma_u \wedge \sigma_v$ c'est-à-dire

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \iint_A (\operatorname{rot} F(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v) \, du \, dv.$$

Par ailleurs le sens de parcours de $\partial\Sigma$ est alors celui induit par la paramétrisation $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ et c'est donc celui obtenu en parcourant positivement ∂A.

Exemple 7.2 *(cf. sect. 8.4 pour plus de détails.)* (i) *(**Sphère**) Soit*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

alors $\partial\Sigma = \emptyset$ *(cf. dessin de l'exemple 8.16). Une paramétrisation régulière par morceaux de* Σ *est donnée par*

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \overline{A}$$

où $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

(ii) ***(Demi-sphère)*** *Si*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\right\}$$

alors

$$\partial\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\right\}$$

(cf. dessin de l'exemple 8.17) et le sens de parcours de $\partial\Sigma$ *induit par la paramétrisation*

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \overline{A}$$

(où $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$*) est le sens de parcours négatif (c'est-à-dire* $\theta : 2\pi \to 0$*). On a aussi que la normale est donnée par*

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi\,(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

On aurait aussi pu prendre une autre paramétrisation de Σ

$$\widetilde{\sigma}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right), \quad (x, y) \in B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$

et on aurait retrouvé que

$$\partial\Sigma = \widetilde{\sigma}(\partial B) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\right\}.$$

(iii) ***(Cylindre)*** *Si*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\right\}$$

alors (cf. dessin de l'exemple 8.18)

$$\partial\Sigma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

où

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\right\}$$
$$\Gamma_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 1\right\}.$$

Si on choisit comme paramétrisation

$$\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), \quad (\theta, z) \in \overline{A}$$

avec $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$, *alors le sens de parcours de* $\partial\Sigma$, *induit par la paramétrisation* σ, *est le sens positif sur* Γ_0 *(*$\theta : 0 \to 2\pi$*) et négatif sur* Γ_1 *(*$\theta : 2\pi \to 0$*). Par ailleurs le champ de normale unité (induit par la paramétrisation) est*

$$\nu = \sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

(Pour plus de détails, cf. [2] 41-49, [4] 410-417, [7] chapitre 7, [8] 362-366, [11] 562-567, [12] 470-474).

7.2 Exemples

Exemple 7.3 *Vérifier le théorème de Stokes pour* $F(x,y,z) = (z,x,y)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 < z < 1\right\}.$$

Discussion *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On paramètre Σ comme suit

$$\sigma(\theta,z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z), \quad \text{avec } (\theta,z) \in A = (0,2\pi) \times (0,1).$$

et donc une normale est donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}.$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1,1,1)\cdot(z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\, dz\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (z\cos\theta + z\sin\theta - z)\, dz\, d\theta = -2\pi\int_0^1 z\, dz = -\pi. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Commençons par calculer

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta,0) = (0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(2\pi,z) = (z,0,z),\ z : 0 \to 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta,1) = (\cos\theta,\sin\theta,1),\ \theta : 2\pi \to 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(0,z) = (z,0,z),\ z : 1 \to 0\} = -\Gamma_2.$$

On s'aperçoit alors que

$$\partial\Sigma = \Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta,1) = (\cos\theta,\sin\theta,1),\ \theta : 2\pi \to 0\},$$

avec Γ_3 parcouru négativement. Comme

$$\gamma_3'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= -\int_0^{2\pi} (1, \cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = -\pi.\end{aligned}$$

Exemple 7.4 *Vérifier le théorème de Stokes pour* $F(x, y, z) = \left(0, 0, y^2\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \leq 0\right\}.$$

Discussion *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On voit que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit de paramétrer Σ comme suit

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

avec $(\theta, \varphi) \in A = (0, 2\pi) \times (\pi/2, \pi)$. Une normale est alors donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi\,(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

L'intégrale de surface nous donne donc

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= -\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin\theta \sin^2\varphi, 0, 0\right) \cdot (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi\, d\theta \\ &= -2 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta\, \sin^3\varphi\, d\varphi\, d\theta = 0.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observons que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, \pi/2) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),\ \theta : 0 \to 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\gamma_2(\varphi) = \sigma(2\pi, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi),\ \varphi : \frac{\pi}{2} \to \pi\right\}$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, \pi) = (0, 0, -1), \ \theta : 2\pi \to 0\} = \{(0, 0, -1)\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{\gamma_4(\varphi) = \sigma(0, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi), \ \varphi : \pi \to \frac{\pi}{2}\right\} = -\Gamma_2 .$$

On a donc que

$$\partial\Sigma = \Gamma_1$$

avec Γ_1 parcouru positivement. On a alors

$$\gamma_1'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

et donc

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \left(0, 0, \sin^2\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = 0.$$

7.3 Exercices

Dans les exercices suivants on vérifiera le théorème de Stokes.

Exercice 7.1 *Soient* $F(x, y, z) = \left(x^2 y, z^2, 0\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Exercice 7.2 *Soient* $F(x, y, z) = \left(x^2 y, z, x\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^4, \ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Exercice 7.3 *Soient* $F(x, y, z) = \left(x^2 y^3, 1, z\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z \ge 0\right\}.$$

Exercice 7.4 *Soient* $F(x, y, z) = (-2\,y, x\,z, y)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \ x \ge 0 \ \textit{et} \ \frac{4}{9} \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

Exercice 7.5 *Soient* $F(x, y, z) = \left(0, z^2, 0\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x, y \ge 0, \ 1 \le z \le \sqrt{3}\right\}.$$

Exercice 7.6 *Soient* $F(x, y, z) = \left(0, 0, y + z^2\right)$ *et*

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{r} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x, y, z \ge 0, \\ 0 \le \arccos\frac{z}{2} \le \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

Exercice 7.7 *Soient* $F(x, y, z) = \left(0, x^2, 0\right)$ *et* Σ *le triangle de sommets* $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 1, 0)$.

Exercice 7.8 *Soient* $F(x,y,z) = \left(x\,y, x\,z, x^2\right)$ *et* Σ *la surface obtenue en faisant l'intersection du cylindre* $x^2+y^2 \le 1$ *avec le plan* $x+z=1$.

Exercice 7.9 *Soient* $F(x,y,z) = (z,y,0)$ *et*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin(3\,x+2\,y)\,,\; x \ge 0,\; y \ge 0 \text{ et } x+y \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Exercice 7.10 ** Soient* $f \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$,

$$F(x,y,z) = (0, f(x,y,z), 0)$$

et

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\; 0 < x,y,z < 1\right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes.

7.4 Corrigés

Exercice 7.1 *(i)* Calcul de $\displaystyle\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,z \\ 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

et si $A = (0, 2\pi) \times (0,1)$, alors

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \text{ avec } (\theta, z) \in \overline{A}\right\}.$$

La normale est alors

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ -z \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-2\,z, 0, -z^2\cos^2\theta\right) \cdot (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\,dz\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 z^3\cos^2\theta\,dz\,d\theta = \pi\int_0^1 z^3 dz = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = (0,0,0)\}$$
$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, z) = (z, 0, z) : z : 0 \to 1\}$$
$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) : \theta : 2\pi \to 0\}$$
$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, z) = (z, 0, z) : z : 1 \to 0\} = -\Gamma_2\,.$$

On voit alors que $\partial\Sigma = \Gamma_3$ qui est parcouru négativement. On obtient par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F\cdot dl &= -\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta\sin\theta, 1, 0\right)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Exercice 7.2 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot ds$. On a que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 y & z & x\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ -x^2\end{pmatrix}$$

et si $A = (0,1)\times(0,2\pi)$ alors

$$\Sigma = \left\{\sigma(r,\theta) = \left(r^2\cos\theta, r^2\sin\theta, r\right) : (r,\theta)\in\overline{A}\right\}.$$

La normale est donnée par

$$\sigma_r\wedge\sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 2\,r\cos\theta & 2\,r\sin\theta & 1\\ -r^2\sin\theta & r^2\cos\theta & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\cos\theta\\ -r^2\sin\theta\\ 2\,r^3\end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot ds &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(-1, -1, -r^4\cos^2\theta\right)\cdot\left(-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, 2\,r^3\right) dr\, d\theta\\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} 2\,r^7\cos^2\theta\, dr\, d\theta = -\frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F\cdot dl$. On obtient par ailleurs que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \left\{\sigma(r, 0) = \left(r^2, 0, r\right) : r : 0\to 1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(1,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) : \theta : 0 \to 2\pi\}$$
$$\Gamma_3 = \left\{\sigma(r, 2\pi) = \left(r^2, 0, r\right) : r : 1 \to 0\right\} = -\Gamma_1$$
$$\Gamma_4 = \{\sigma(0,\theta) = (0,0,0) : \theta : 2\pi \to 0\}.$$

On déduit donc que $\partial\Sigma = \Gamma_2$ et qu'il est parcouru positivement. On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta\sin\theta, 1, \cos\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 7.3 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. Un calcul immédiat donne

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\, x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

De plus si on pose $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ on a

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta,\varphi) = R(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \text{ où } (\theta,\varphi) \in \overline{A}\right\}.$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = R^2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\sin\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

et on infère donc que

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= 3\, R^6 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^2\theta\sin^5\varphi\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi \\ &= \frac{R^6}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi\, R^6}{8}.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On trouve alors que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = R(0,0,1) : \theta : 0 \to 2\pi\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{\sigma(2\pi,\varphi) = R(\sin\varphi, 0, \cos\varphi) : \varphi : 0 \to \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = R\left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right) : \theta : 2\pi \to 0 \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \sigma\left(0, \varphi\right) = R\left(\sin\varphi, 0, \cos\varphi\right) : \varphi : \frac{\pi}{2} \to 0 \right\} = -\Gamma_2\,.$$

On conclut donc que $\partial\Sigma = \Gamma_3$ qui est parcouru négativement et ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= -\int_0^{2\pi} \left(R^5 \cos^2\theta \sin^3\theta, 1, 0\right) \cdot \left(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0\right) d\theta \\ &= R^6 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^4\theta \, d\theta = \frac{\pi\, R^6}{8}\,.\end{aligned}$$

Exercice 7.4 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On voit tout d'abord que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2\,y & x\,z & y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ 0 \\ z + 2 \end{pmatrix}.$$

En posant $A = \left(\frac{2}{3}, 2\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ on obtient

$$\Sigma = \left\{ \sigma\left(r, \theta\right) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, -\frac{3}{2}\,r + 3\right) \text{ où } \left(r, \theta\right) \in \overline{A} \right\}.$$

On obtient

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\dfrac{3}{2} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\,r\cos\theta \\ \dfrac{3}{2}\,r\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - r\cos\theta, 0, -\frac{3}{2}\,r + 5\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\,r\cos\theta, \frac{3}{2}\,r\sin\theta, r\right) dr\, d\theta \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}\,r\cos\theta - \frac{3}{2}\,r^2\cos^2\theta - \frac{3}{2}\,r^2 + 5\,r\right) d\theta\, dr = \frac{16}{3} + \frac{28\,\pi}{9}\,.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Noter que $\partial\Sigma = \sigma\left(\partial A\right) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ et

$$\Gamma_1 = \left\{ \sigma\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -r, -\frac{3}{2}\,r + 3\right) : r : \frac{2}{3} \to 2 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\sigma(2,\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) : \theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{\sigma\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, r, -\frac{3}{2}r + 3\right) : r : 2 \to \frac{2}{3}\right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{\sigma\left(\frac{2}{3}, \theta\right) = \left(\frac{2}{3}\cos\theta, \frac{2}{3}\sin\theta, 2\right) : \theta : \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}\right\}.$$

On a donc

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\frac{2}{3}}^{2} (2r, 0, -r) \cdot \left(0, -1, -\frac{3}{2}\right) dr = \frac{8}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-4\sin\theta, 0, 2\sin\theta) \cdot (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta = 4\pi$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = -\int_{\frac{2}{3}}^{2} (-2r, 0, r) \cdot \left(0, 1, -\frac{3}{2}\right) dr = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4} F \cdot dl &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{4}{3}\sin\theta, \frac{4}{3}\cos\theta, \frac{2}{3}\sin\theta\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\sin\theta, \frac{2}{3}\cos\theta, 0\right) d\theta \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8}{9}\sin^2\theta + \frac{8}{9}\cos^2\theta\right) d\theta = -\frac{8}{9}\pi.\end{aligned}$$

Par conséquent on a bien obtenu

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \frac{16}{3} + \frac{28\pi}{9}.$$

Exercice 7.5 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On passe en coordonnées sphériques et on écrit pour $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Sigma = \left\{\sigma(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi) \text{ avec } (\theta,\varphi) \in \overline{A}\right\}.$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cos\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\theta\sin^2\varphi \\ -4\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

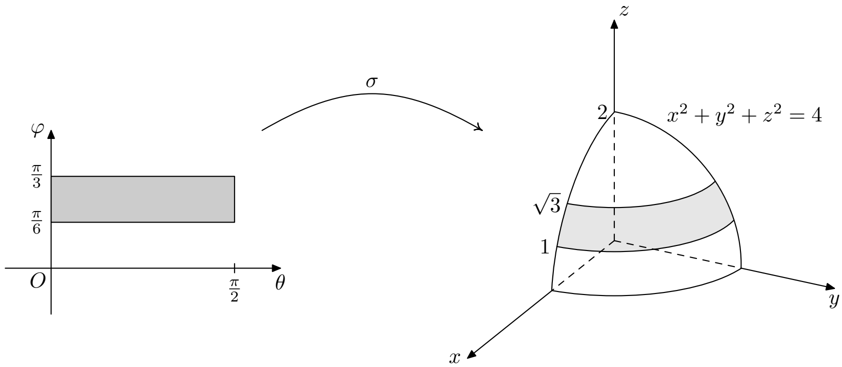
on obtient

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} F \cdot \sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi \\
&= (-4\cos\varphi, 0, 0) \cdot \left(-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\cos\varphi\sin\varphi\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos\varphi\sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\,.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a que $\partial\Sigma = \sigma(\partial A) = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$, où



$$\Gamma_1 = \left\{\sigma\left(\theta, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{3}\right) : \theta : 0 \to \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\sigma\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = (0, 2\sin\varphi, 2\cos\varphi) : \varphi : \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{\sigma\left(\theta, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, 1\right) : \theta : \frac{\pi}{2} \to 0\right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{\sigma(0, \varphi) = (2\sin\varphi, 0, 2\cos\varphi) : \varphi : \frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Un calcul immédiat conduit à

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 3, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos\theta \, d\theta = 3$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(0, 4\cos^2\varphi, 0\right) \cdot (0, 2\cos\varphi, -2\sin\varphi) \, d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 8\cos^3\varphi \, d\varphi = 3\sqrt{3} - \frac{11}{3}
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,1,0) \cdot \left(-\sqrt{3}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0\right) d\theta = -\sqrt{3}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(0, 4\cos^2\varphi, 0\right) \cdot (2\cos\varphi, 0, -2\sin\varphi)\, d\varphi = 0.$$

On a donc bien

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} F \cdot dl = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\,.$$

Exercice 7.6 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve tout de suite que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & y+z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on écrit

$$\begin{aligned} \Sigma \quad = \quad & \{\sigma(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi) : \\ & \qquad 0 \le \arccos\tfrac{z}{2} = \varphi \le \operatorname{arctg}\tfrac{y}{x} = \theta \le \frac{\pi}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

On a donc ici

$$A = \left\{(\theta,\varphi) : 0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

On obtient

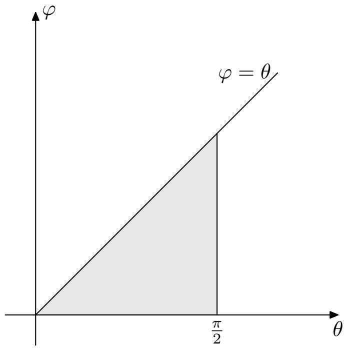
$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cos\theta\sin^2\varphi \\ -4\sin\theta\sin^2\varphi \\ -4\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} & \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds \\ & = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\theta (1,0,0) \cdot \left(\cos\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin^2\varphi, \cos\varphi\sin\varphi\right) d\theta\, d\varphi \end{aligned}$$

à savoir

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^\theta \sin^2\varphi\, d\varphi \\ &= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right] d\theta = \frac{8}{3} - \pi. \end{aligned}$$



(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

où

$$\Gamma_1 = \left\{ \sigma(\theta, 0) = (0,0,2) : \theta : 0 \to \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = (0, 2\sin\varphi, 2\cos\varphi) : \varphi : 0 \to \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma(\theta, \theta) = \left(2\cos\theta\sin\theta, 2\sin^2\theta, 2\cos\theta\right) : \theta : \frac{\pi}{2} \to 0 \right\}.$$

On trouve donc que $\partial\Sigma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0,0,2\sin\varphi + 4\cos^2\varphi\right) \cdot (0, 2\cos\varphi, -2\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^2\varphi + 8\cos^2\varphi\sin\varphi\right) d\varphi = -\left(\frac{8}{3} + \pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0,0,2\sin^2\theta + 4\cos^2\theta\right) \cdot (2\cos(2\theta), 4\sin\theta\cos\theta, -2\sin\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^3\theta + 8\cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu le résultat souhaité

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \frac{8}{3} - \pi.$$

Exercice 7.7 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

On trouve

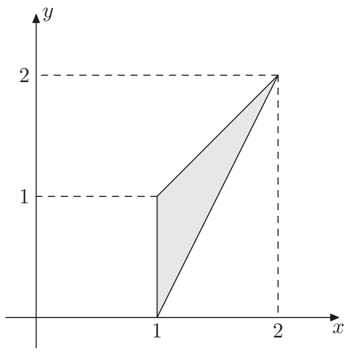
$$\Sigma = \left\{\sigma\left(x,y\right) = (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \overline{A}\right\}$$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1,2)\,,\ 2\,x - 2 < y < x\right\}$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_1^2 \int_{2\,x-2}^{x} 2\,x\,dy\,dx = \frac{4}{3}\,.$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On trouve que $\partial\Sigma = \sigma\left(\partial A\right) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où



$$\Gamma_1 = \{\sigma\left(x, 2\,x - 2\right) = (x, 2\,x - 2, 0) : x : 1 \to 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma\left(x,x\right) = (x,x,0) : x : 2 \to 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma\left(1,y\right) = (1,y,0) : y : 1 \to 0\}\,.$$

Le calcul donne alors

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_1^2 \left(0, x^2, 0\right) \cdot (1,2,0)\,dx = \frac{14}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = -\int_1^2 \left(0, x^2, 0\right) \cdot (1,1,0)\,dx = -\frac{7}{3}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = -\int_0^1 (0,1,0) \cdot (0,1,0)\,dy = -1.$$

Le résultat suit directement

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \frac{14}{3} - \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}\,.$$

Exercice 7.8 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve si $A = (0,1) \times (0, 2\pi)$ que

$$\Sigma = \left\{\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r\cos\theta) \text{ où } (r,\theta) \in \overline{A}\right\}.$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\,y & x\,z & x^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2\,x \\ z - x \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r\cos\theta, -2\,r\cos\theta, 1 - 2\,r\cos\theta) \cdot (r, 0, r)\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-3\,r^2\cos\theta + r\right) d\theta\, dr = \pi. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\sigma(r,0) = (r, 0, 1-r) : r : 0 \to 1\} \\ \Gamma_2 &= \{\sigma(1,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1 - \cos\theta) : \theta : 0 \to 2\pi\} \\ \Gamma_3 &= \{\sigma(r, 2\pi) = (r, 0, 1-r) : r : 1 \to 0\} = -\Gamma_1 \\ \Gamma_4 &= \{\sigma(0,\theta) = (0,0,1)\}. \end{aligned}$$

On a donc $\partial\Sigma = \Gamma_2$ qui est parcouru positivement et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta\sin\theta, \cos\theta\,(1 - \cos\theta), \cos^2\theta\right) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\sin^2\theta + \cos^2\theta - \cos^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Exercice 7.9 *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

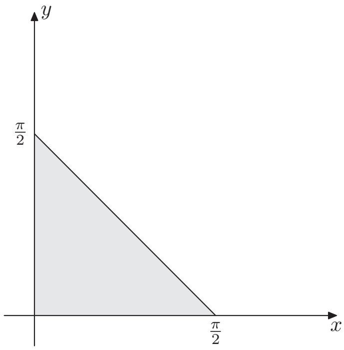
$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\Sigma = \left\{\sigma\left(x,y\right) = \left(x,y,\sin\left(3\,x+2\,y\right)\right) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \overline{A}\right\}$$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ x+y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

et on obtient



$$\sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 3\cos\left(3\,x+2\,y\right) \\ 0 & 1 & 2\cos\left(3\,x+2\,y\right) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos\left(3\,x+2\,y\right) \\ -2\cos\left(3\,x+2\,y\right) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} (0,1,0) \cdot \left(-3\cos\left(3\,x+2\,y\right), -2\cos\left(3\,x+2\,y\right), 1\right) dx\, dy$$

et donc

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sin\left(3\,x+2\,y\right)\right]_0^{-x+\frac{\pi}{2}}\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(3\,x\right) - \sin\left(x+\pi\right)\right) dx = \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On trouve que $\partial\Sigma = \sigma\left(\partial A\right) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où

$$\Gamma_1 = \left\{\sigma\left(x,0\right) = \left(x,0,\sin\left(3\,x\right)\right) : x : 0 \to \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\sigma\left(x, \frac{\pi}{2}-x\right) = \left(x, \frac{\pi}{2}-x, \sin\left(x+\pi\right)\right) : x : \frac{\pi}{2} \to 0\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{\sigma\left(0,y\right) = \left(0,y,\sin\left(2\,y\right)\right) : y : \frac{\pi}{2} \to 0\right\}.$$

Le calcul donne alors

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(3x), 0, 0) \cdot (1, 0, 3\cos(3x))\, dx = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x, \frac{\pi}{2} - x, 0\right) \cdot (1, -1, -\cos x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = 1 + \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2y), y, 0) \cdot (0, 1, 2\cos(2y))\, dy = -\frac{\pi^2}{8}$$

et on peut donc conclure que

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \frac{4}{3}\,.$$

Exercice 7.10 * *(i)* Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f_z \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) : (\theta, z) \in A = (0, \pi/2) \times (0, 1)\}$$

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-f_z(\cos\theta, \sin\theta, z), 0, f_x(\cos\theta, \sin\theta, z)) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\right] d\theta\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{d}{dz}\left[f(\cos\theta, \sin\theta, z)\right]\cos\theta\right] d\theta\, dz\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(\cos\theta, \sin\theta, 0) - f(\cos\theta, \sin\theta, 1)\right]\cos\theta\, d\theta.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),\ \theta : 0 \to \pi/2\}$$
$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(\pi/2, z) = (0, 1, z),\ z : 0 \to 1\}$$
$$\Gamma_3 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1),\ \theta : \pi/2 \to 0\}$$
$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (1, 0, z),\ z : 1 \to 0\}.$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec Γ_1 et Γ_2 parcourues positivement et Γ_3 et Γ_4 parcourues négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(0, f(\cos\theta, \sin\theta, 0), 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)]\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta, \sin\theta, 0) \cos\theta\, d\theta\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^1 [(0, f(0, 1, z), 0) \cdot (0, 0, 1)]\, dz = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(0, f(\cos\theta, \sin\theta, 1), 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)]\, d\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta, \sin\theta, 1) \cos\theta\, d\theta\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = -\int_0^1 [(0, f(1, 0, z), 0) \cdot (0, 0, 1)]\, dz = 0.$$

On a finalement

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\cos\theta, \sin\theta, 0) - f(\cos\theta, \sin\theta, 1)] \cos\theta\, d\theta$$

ce qui est le résultat souhaité.

Chapitre 8

Appendice

8.1 Quelques notations et notions élémentaires de topologie

Notation Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on note la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon R et centrée en x par

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < R\}$$

où, pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a défini la norme euclidienne par

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)^{1/2}.$$

Définition 8.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit alors que*

(i) *A est **ouvert** si $\forall\, x \in A$, $\exists\, \epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(x) \subset A$.*

(ii) *On définit le **complémentaire** de A, noté A^c, comme*

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}.$$

(iii) *A est **fermé** si A^c est ouvert.*

(iv) *On définit la **frontière** (ou **bord**) de A, noté ∂A, par*

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset,\ B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset,\ \forall\, \epsilon > 0\}.$$

(v) *On note $\overline{A}$, l'**adhérence** (ou **fermeture**) de A, qui est, par définition, le plus petit fermé qui contienne A.*

(vi) *On définit l'**intérieur** de A, qu'on note $\operatorname{int} A$ (parfois aussi $\mathring{A}$), comme le plus grand ouvert contenu dans A.*

Proposition 8.2 *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ les résultats suivants ont lieu*

$$\boxed{\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A} \quad \textit{et} \quad \overline{A} = A \cup \partial A.}$$

Exemple 8.3 Cas $n = 1$.

(i) $\mathbb{R}$ *est à la fois ouvert et fermé ($\mathbb{R}$ et l'ensemble vide sont les seuls ensembles à avoir cette propriété).*

(ii) *L'intervalle* $[a, b]$ *est fermé.*

(iii) *L'intervalle* (a, b), *parfois aussi noté* $]a, b[$, *est ouvert.*

(iv) *Les intervalles* $[a, b)$ *et* $(a, b]$, *parfois notés respectivement* $[a, b[$ *et* $]a, b]$, *ne sont ni ouverts ni fermés.*

(v) *Si* $-\infty < a < b < \infty$, *on a que le bord de* $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ *est dans tous les cas* $\{a, b\}$.

Cas $n \geq 2$.

(i) $\mathbb{R}^n$ *est à la fois ouvert et fermé.*

(ii) *Un point* $x \in \mathbb{R}^n$, *considéré comme un ensemble* $\{x\}$, *est un fermé.*

(iii) $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *sont ouverts.*

(iv) $\overline{B}_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq R\}$ *est fermé.*

(v) $\partial B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = R\}$ *et c'est la sphère de rayon* R.

Définition 8.4 (i) *On dit qu'un ensemble* $A \subset \mathbb{R}^n$ *est* ***convexe*** *si,* $\forall\, t \in [0, 1]$, $\forall\, x, y \in A$, *on a*

$$(1 - t)\, x + t\, y \in A$$

(en termes géométriques ceci se traduit par $\forall\, x, y \in A$, *alors le segment de droite, noté* $[x, y]$, *joignant* x *à* y *est entièrement contenu dans* A*);*

(ii) $A \subset \mathbb{R}^n$ *est dit* ***connexe*** *(par arcs) si,* $\forall\, x, y \in A$, *il existe une courbe* Γ, *paramétrée par* $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ *continue, joignant* $x = \gamma(a)$ *à* $y = \gamma(b)$ *qui est entièrement contenue dans* A.

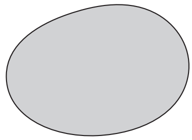
(iii) *On dit que* $A \subset \mathbb{R}^n$ *est un* ***domaine*** *s'il est à la fois ouvert et connexe.*

(iv) *On dit que* $A \subset \mathbb{R}^n$ *est* ***simplement connexe*** *s'il est connexe (par arcs) et si* Γ_0 *et* Γ_1 *sont deux courbes simples contenues dans* A *et ayant les mêmes extrémités alors elles peuvent être déformées continûment l'une en l'autre sans sortir du domaine* A. *Plus précisément si*

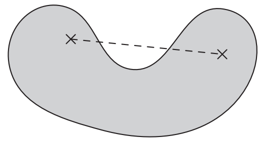
$$\gamma_0 : [a, b] \to \Gamma_0 \subset A \quad \text{et} \quad \gamma_1 : [a, b] \to \Gamma_1 \subset A$$

sont deux paramétrisations continues de Γ_0 *et* Γ_1 $(\gamma_0(a) = \gamma_1(a),\ \gamma_0(b) = \gamma_1(b))$, *alors il existe* $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to A$, *continue, tel que*

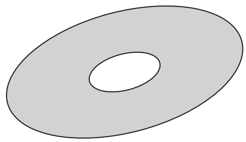
$$\begin{array}{cl} \gamma(t, 0) = \gamma_0(t),\ \gamma(t, 1) = \gamma_1(t) & \forall\, t \in [a, b] \\ \gamma(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) & \forall\, s \in [0, 1] \\ \gamma(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) & \forall\, s \in [0, 1] \\ \gamma(t, s) \in A & \forall\, t \in [a, b],\ \forall\, s \in [0, 1]. \end{array}$$



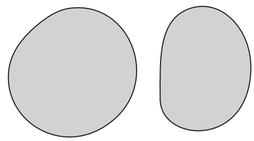
convexe



non convexe
connexe
simplement connexe



non convexe
connexe
non simplement connexe



non convexe
non connexe
non simplement connexe

Remarque *(i)* Le cas $n = 1$ est un peu différent des cas $n \geq 2$. En effet la notion de connexité et convexité sont les mêmes (cf. les exemples ci-dessous), alors que la notion de connexité simple n'a plus d'intérêt.

(ii) On a toujours

$$\boxed{A \text{ convexe} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad A \text{ simplement connexe} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad A \text{ connexe.}}$$

(Attention, certains auteurs ne requièrent pas dans la définition de connexité simple que l'ensemble considéré soit connexe. Dans ce cas on a que A simplement connexe n'implique plus que A soit connexe en général).

(iii) Classiquement il existe une notion d'ensemble connexe légèrement plus faible que la nôtre (qui est alors appelée "connexe par arcs"). On a toujours connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe et si, de plus, l'ensemble est ouvert alors ces deux notions sont équivalentes. Mais nous n'aurons pas besoin ici de la notion plus faible.

(iv) De façon intuitive un ensemble de $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe s'il n'a pas de trous (attention, dans $\mathbb{R}^3$ ce n'est plus le cas, cf. exemple 8.5 (v)).

Exemple 8.5 *Les exemples suivants sont les plus souvent utilisés.*

(i) $[a,b]\,,\ (a,b)\,,\ [a,b)\,,\ (a,b]$ *et* $\mathbb{R}$ *sont des ensembles convexes. Par contre* $[0,1] \cup [2,3]$ *n'est pas convexe.*

(ii) $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^n$ *sont convexes (et donc simplement connexes et connexes).*

(iii) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *n'est ni convexe, ni simplement connexe mais par contre il est connexe.*

(iv) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \leq 0\right\}$ *n'est pas convexe, mais il est simplement connexe (et donc connexe).*

(v) $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *n'est pas convexe mais il est simplement connexe (et donc connexe).*

(vi) $A = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\right\}$ *n'est ni convexe, ni simplement connexe, mais il est connexe.*

(Pour plus de détails, cf. [4] 53, 369, [7] chapitre 3, [8] 12, 56-58, 372, [11] 572, [12] 160, 373, 431).

8.2 Quelques notations et notions d'espaces de fonctions

Définition 8.6 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $k \geq 0$ un entier (éventuellement $k = \infty$).*

(i) $C^k(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont k fois continûment différentiables dans Ω. (Quand $k = 0$ on notera parfois $C(\Omega)$ au lieu de $C^0(\Omega)$; c'est donc l'ensemble des fonctions continues sur Ω).*

(ii) $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *est l'ensemble des champs vectoriels*

$$F = F(x) = (F_1(x), \cdots, F_m(x))$$

tels que $F_i \in C^k(\Omega)$, pour $i = 1, \cdots, m$.

(iii) *On dit que $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ si $f \in C^0(\Omega)$ et f se prolonge continument (et de manière bornée) à $\overline{\Omega}$.*

(iv) *Si $k \geq 1$ on dit que $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ s'il existe un ouvert $A \supset \overline{\Omega}$ et une fonction $g \in C^k(A)$ telle que la restriction de g à $\overline{\Omega}$ soit f (on note $g_{|\overline{\Omega}} = f$).*

(v) *On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$, s'il existe $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$ tels que, $\forall\, i = 0, 1, \cdots, n$, $f \in C^0(a_i, a_{i+1})$,*

$$\lim_{\substack{x \to a_i \\ x > a_i}} [f(x)] = f(a_i + 0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} [f(x)] = f(a_{i+1} - 0)$$

existent et sont finies.

Remarque Quand $k \geq 1$, la définition que nous adoptons de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ n'est pas la définition la plus couramment utilisée (elle l'est toutefois par [4] 172, [7] chapitre 1, et [8] 96). Plusieurs auteurs préfèrent dire (nous écrivons, pour simplifier, la définition seulement dans le cas $k = 1$) qu'une fonction $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ si $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ et s'il existe $F \in C^0\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ tel que $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. On peut montrer toutefois que si le domaine Ω est suffisamment régulier, par exemple convexe, alors ces deux définitions coïncident (cf. [8] 97).

On donne maintenant deux notions de convergence de fonctions.

Définition 8.7 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f_k, f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

(i) *On dit que f_k **converge** (point par point) vers f dans Ω (et on note $f_k \to f$) si $\forall\, \epsilon > 0$ et $\forall\, x \in \Omega$, $\exists\, k_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall\, k \geq k_{\epsilon,x}\,.$$

(ii) *On dit que f_k **converge uniformément** vers f dans Ω (et on note $f_k \to f$ uniformément) si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall\, k \geq k_\epsilon\,,\ \forall\, x \in \Omega.$$

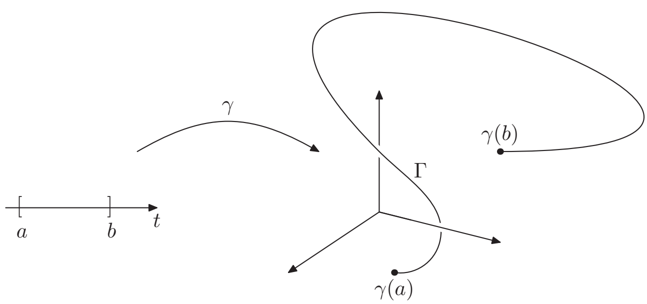
8.3 Courbes

Définition 8.8 *Soit $n \geq 2$.*

(i) *On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe **simple** s'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction continue $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (γ est appelée une **paramétrisation** de Γ) tels que*

$$\gamma(I) = \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in I \text{ tel que } x = \gamma(t)\}$$

et si $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ et au moins un des $t_i \in \operatorname{int} I$ alors $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (en particulier γ est injective sur $\operatorname{int} I$).



(ii) *Une courbe simple est dite **fermée**, si en outre l'intervalle I est de la forme $[a,b]$ (c'est-à-dire fermé et borné) et $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

(iii) *On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe **régulière** s'il existe une paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ telle que $\gamma \in C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$ et*

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1')^2 + \cdots + (\gamma_n')^2} \neq 0, \quad \forall\, t \in [a,b]\,.$$

(iv) *On dit que Γ est une **courbe régulière par morceaux** s'il existe*

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b$$

et $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ tel que $\gamma \in C([a,b])$, $\gamma' \in C([a_i, a_{i+i}])$ et $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \cdots, N$.

(v) *Si Γ est une courbe simple de paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, on définit la courbe*

$$-\Gamma = \{\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t) : t \in [a,b]\}\,.$$

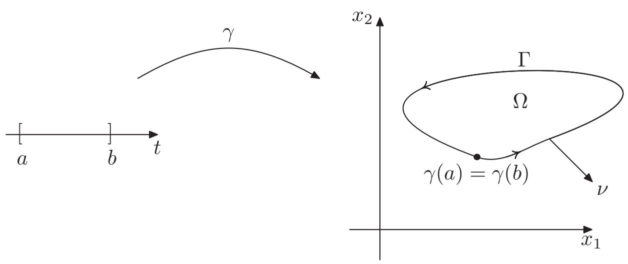
Notation (**Théorème de Jordan**) Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe simple fermée on notera par $\operatorname{int}\Gamma = \Omega$ l'ensemble ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\partial\Omega = \Gamma$.

Définition 8.9 *On dit qu'une courbe simple fermée régulière par morceaux $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, de paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \Gamma$, est* ***orientée positivement****, si en tout point $x \in \Gamma$, $x = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, où γ est C^1, le vecteur normal à la courbe en x,*

$$\nu(x) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

est une ***normale extérieure*** *à $\Omega = \operatorname{int}\Gamma$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est tel que $\partial\Omega = \Gamma$); c'est-à-dire que $\forall\,\epsilon > 0$ suffisamment petit*

$$x + \epsilon\,\nu(x) \in \overline{\Omega}^c \quad \text{et} \quad x - \epsilon\,\nu(x) \in \Omega.$$



Remarque Une façon plus simple, mais moins précise, de dire qu'une courbe Γ est orientée positivement c'est de dire qu'en se déplaçant sur Γ on doit avoir le domaine $\Omega = \operatorname{int}\Gamma$ à gauche.

Exemple 8.10 *Soit $I = [a,b]$ et $u \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ alors le* graphe de la fonction *u défini par*

$$\Gamma = \{(x, u(x)) : x \in I\}$$

est une courbe simple régulière.

Exemple 8.11 *Le cercle*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

est une courbe simple fermée régulière. En effet il suffit de choisir $I = [0, 2\pi]$ et $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

(Pour plus de détails, cf. [2] 13-15, [4] 334-335, 360-362 [8] 247, [11] 464-466, [12] 404-409, 436-438).

8.4 Surfaces

Définition 8.12 *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(i) *On dit que* Σ *est une (ou un élément de)* ***surface régulière*** *s'il existe un domaine* $A \subset \mathbb{R}^2$ *tel que* ∂A *soit une courbe simple fermée régulière par morceaux et* $\sigma : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ *(*σ *est appelée une* ***paramétrisation régulière*** *de* Σ*) tels que*

- $\sigma \in C^1\left(\overline{A};\mathbb{R}^3\right),\ \sigma = \sigma(u,v) = \left(\sigma^1(u,v), \sigma^2(u,v), \sigma^3(u,v)\right)$
- $\sigma\left(\overline{A}\right) = \Sigma$ *et* σ *est injective dans* $\overline{A}$
- *le vecteur*

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2\sigma_v^3 - \sigma_u^3\sigma_v^2 \\ \sigma_u^3\sigma_v^1 - \sigma_u^1\sigma_v^3 \\ \sigma_u^1\sigma_v^2 - \sigma_u^2\sigma_v^1 \end{pmatrix}$$

est tel que

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \neq 0, \quad \forall\ (u,v) \in \overline{A}.$$

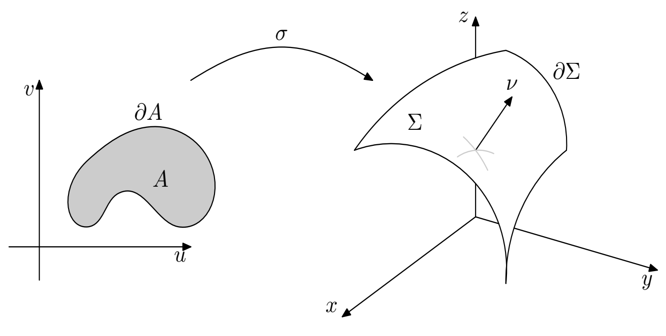
Le vecteur

$$\nu = \nu(u,v) = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

est appelé ***normale unité*** *à la surface* Σ *au point* $\sigma(u,v)$.

(ii) *Le* ***bord*** *d'une telle surface* Σ, *noté* $\partial\Sigma$, *est l'image par* σ *de* ∂A, *c'est-à-dire*

$$\partial\Sigma = \sigma(\partial A).$$



Remarque *(i)* Le vecteur normal unité est indépendant, au signe près, du choix de la paramétrisation. Si toutefois on prend les paramètres (u,v) dans l'ordre (v,u) on obtient une normale changée de signe (car $\sigma_v \wedge \sigma_u = -\sigma_u \wedge \sigma_v$).

(ii) Le bord $\partial\Sigma$ est aussi indépendant du choix de la paramétrisation.

Définition 8.13 *On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une* ***surface régulière par morceaux*** *s'il existe $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_m$ des surfaces régulières telles que*

(i) $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i$.

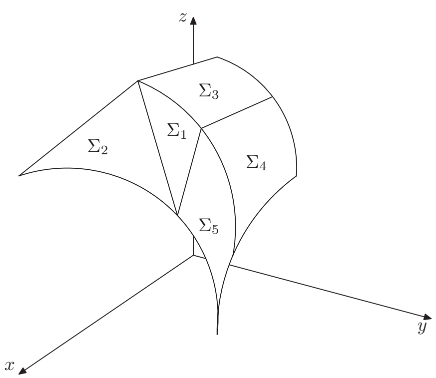
(ii) *Si $i \neq j$ alors $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ n'a pas de points intérieurs à Σ_i ou à Σ_j .*

(iii) *Si $i \neq j$ alors $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$ est soit vide, soit consiste en un seul point, soit en une courbe simple régulière par morceaux.*

(iv) *Si i, j, k sont tous différents, alors $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j \cap \partial\Sigma_k$ est soit vide, soit ne contient qu'un seul point.*

(v) *N'importe quels points $A, B \in \Sigma$ peuvent être joints par une courbe simple régulière par morceaux.*

(vi) *L'union de toutes les courbes qui appartiennent à seulement un des $\partial\Sigma_i$ consiste en un nombre fini disjoint de courbes simples fermées régulières par morceaux. Une telle union forme le* **bord** *de la surface Σ et est noté $\partial\Sigma$.*



Définition 8.14 (i) *Une surface régulière Σ est dite* ***orientable*** *s'il existe un champ de normales unitaires ν qui soit continu sur tout Σ. Un tel champ de normales est appelé une* ***orientation*** *de Σ. On dénote la surface orientée par (Σ, ν) .*

(ii) *Si (Σ, ν) est une telle surface, on peut trouver $A \subset \mathbb{R}^2$ et σ, une paramétrisation régulière de Σ, tels que*

$$\nu = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} .$$

Le ***sens de parcours*** *de $\partial\Sigma \, (= \sigma(\partial A))$ induit par l'orientation (on dit aussi induit par la paramétrisation σ) est celui obtenu en parcourant positivement la courbe simple fermée $\partial A \subset \mathbb{R}^2$.*

Remarque *(i)* On définit de manière analogue ce que l'on entend par surface régulière par morceaux orientable (Σ, ν) ainsi que le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par l'orientation ν. Il faut juste prêter attention qu'alors le champ de normales ν n'est pas nécessairement continu (il est par contre continu par morceaux, cf. exemple 8.21 ci-dessous). Pour plus de détails nous nous référons à [12] 464-465.

(ii) On peut énoncer une règle assez simple pour se souvenir du sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par l'orientation ν. Cette règle est la suivante : un observateur se déplaçant sur $\partial\Sigma$ et ayant sa tête dirigée dans le sens de la normale ν laisse la surface à sa gauche.

Nous aimerions maintenant présenter un "truc" qui est extrêmement utile pour déterminer le bord d'une surface et son sens de parcours. Il ne s'agit pas d'un procédé complètement rigoureux mais il s'applique et peut être justifié totalement dans tous les cas que nous considérons dans ce livre. En particulier tous les énoncés donnés dans les exemples ci-dessous sont corrects au sens des définitions données précédemment ; mais la discussion liée à chacun de ces exemples est moins rigoureuse et utilise très fortement la remarque intuitive suivante.

Remarque On a vu comment définir le bord d'une surface régulière Σ et le sens de parcours associé à une orientation ν de Σ. On va faire de même pour une surface Σ qui est seulement régulière par morceaux mais qui admet une paramétrisation globale

$$\sigma : \overline{A} \to \Sigma = \sigma\left(\overline{A}\right)$$

où ∂A est une courbe simple fermée de $\mathbb{R}^2$. On définit le bord de Σ, noté $\partial\Sigma$, comme étant $\sigma(\partial A)$ mais où on a pris la précaution d'enlever les morceaux de courbes qui sont parcourus deux fois (une fois dans un sens, une fois dans l'autre) ainsi que les points. De même le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est celui obtenu en parcourant positivement ∂A.

Exemple 8.15 (Graphe d'une fonction) *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un domaine tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière. Soit $f \in C^1\left(\overline{A}\right)$, alors la surface*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \overline{A}\right\}}$$

est une surface régulière et orientable. De plus son bord est donné par

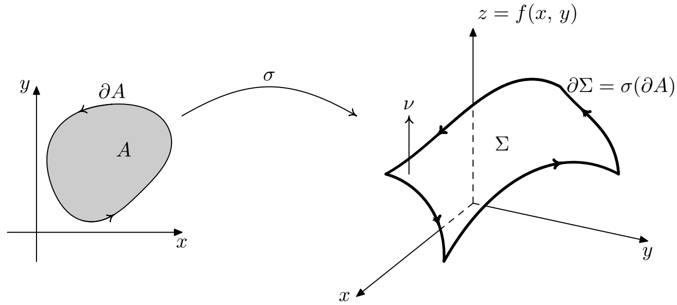
$$\partial\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \partial A\}.$$

Discussion On prend comme paramétrisation

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \overline{A}$$

qui a clairement toutes les propriétés requises pour être une paramétrisation régulière de la surface. De plus

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1)$$



et donc un champ de normale unité à Σ est donné par

$$\nu = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}} \,.$$

Le bord de Σ est par définition

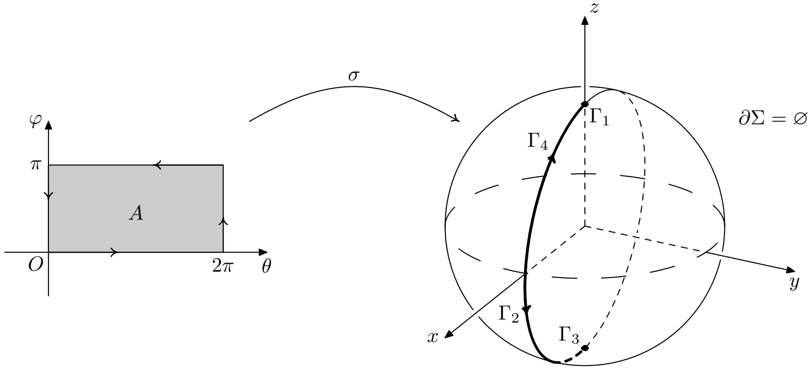
$$\partial\Sigma = \sigma\,(\partial A) = \{(x, y, f\,(x, y)) : (x, y) \in \partial A\}$$

et le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est le sens positif usuel.

Exemple 8.16 (Sphère) *Soit*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.}$$

C'est une surface régulière par morceaux et orientable. Son bord $\partial\Sigma = \emptyset$.



Discussion On paramètre Σ par $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ où $A = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ et

$$\sigma\,(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)\,, \quad (\theta, \varphi) \in \overline{A}.$$

Noter que cette paramétrisation n'est pas régulière sur $\overline{A}$ mais, au vu de la remarque ci-dessus, ceci ne nous causera pas de problème. Une normale calculée à l'aide de la paramétrisation est

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

et donc

$$\nu = \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi}{\|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi\|} = -\sigma\,(\theta, \varphi)$$

est une normale unité (intérieure au volume $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$). Calculons

$$\sigma\,(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma\,(\theta, 0) : \theta : 0 \to 2\pi\} = \{(0, 0, 1)\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma\,(2\pi, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi) : \varphi : 0 \to \pi\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma\,(\theta, \pi) : \theta : 2\pi \to 0\} = \{(0, 0, -1)\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma\,(0, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi) : \varphi : \pi \to 0\} = -\Gamma_2\,.$$

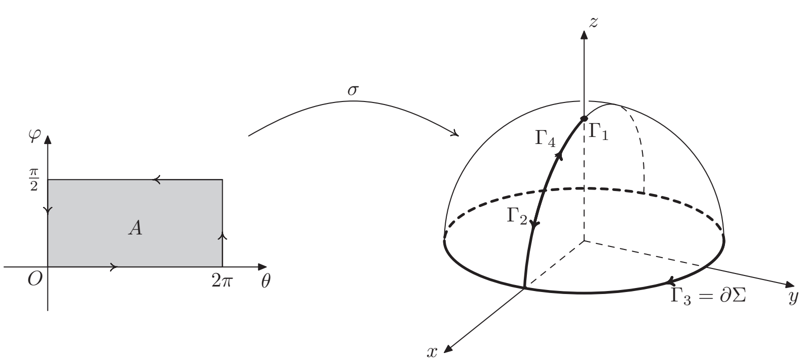
En conclusion et avec la convention que nous avons faite dans la remarque, on trouve $\partial\Sigma = \emptyset$.

Exemple 8.17 (Demi-sphère) *Soit*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\right\}.}$$

C'est une surface régulière par morceaux et orientable. Son bord $\partial\Sigma$ est donné par

$$\partial\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\right\}.$$



Discussion On prend $A = (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

et

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \,,$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\sigma(\theta, 0) : \theta : 0 \to 2\pi\} = \{(0,0,1)\} \\ \Gamma_2 &= \left\{\sigma(2\pi, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi) : \varphi : 0 \to \frac{\pi}{2}\right\} \\ \Gamma_3 &= \left\{\sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) : \theta : 2\pi \to 0\right\} \\ \Gamma_4 &= \left\{\sigma(0, \varphi) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi) : \varphi : \frac{\pi}{2} \to 0\right\} = -\Gamma_2 \,. \end{aligned}$$

Grâce à nos conventions on trouve que

$$\partial\Sigma = \Gamma_3$$

et que le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est le sens négatif (car $\theta : 2\pi \to 0$).

Note : On aurait pu prendre ici comme paramétrisation de Σ

$$\widetilde{\sigma}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right), \quad (x, y) \in B$$

où

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$

et on aurait retrouvé que

$$\partial\Sigma = \widetilde{\sigma}(\partial B) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\right\}.$$

Noter toutefois que $\widetilde{\sigma} \in C^1\left(B; \mathbb{R}^3\right)$ mais $\widetilde{\sigma} \notin C^1\left(\overline{B}; \mathbb{R}^3\right)$.

Exemple 8.18 (Cylindre) *Soit*

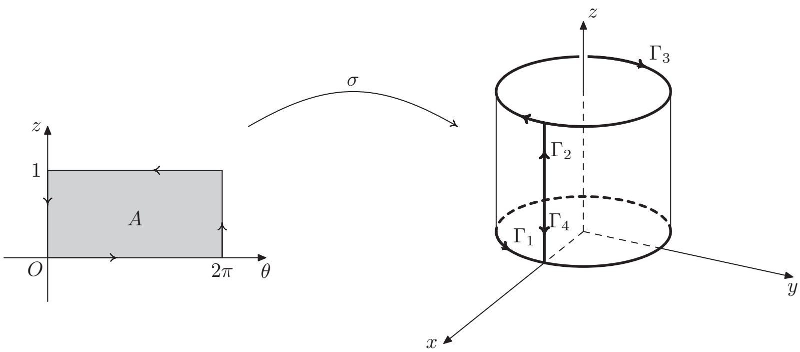
$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \;\textit{et}\; 0 \le z \le 1\right\}.}$$

C'est une surface régulière par morceaux et orientable dont le bord est

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \;\textit{et}\; z = 0\right\} \\ \Gamma_3 &= \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \;\textit{et}\; z = 1\right\}. \end{aligned}$$



Discussion On prend $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ et

$$\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z).$$

Le champ de normale unité induit par la paramétrisation est

$$\nu = \sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

On a de plus

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) : \theta : 0 \to 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, z) = (1, 0, z) : z : 0 \to 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) : \theta : 2\pi \to 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, z) = (1, 0, z) : z : 1 \to 0\} = -\Gamma_2.$$

On a donc

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

et le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétristion σ est positif sur Γ_1 et négatif sur Γ_3.

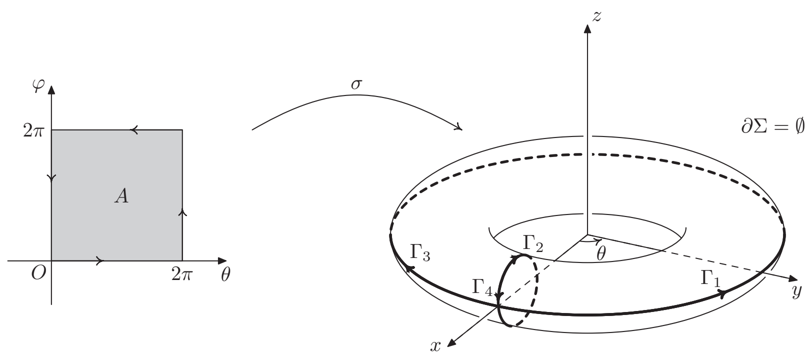
Exemple 8.19 (Tore) *Soit*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \sigma(\theta, \varphi),\ \theta, \varphi \in \overline{A}\right\}.}$$

où $A = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ *et*

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((R + a\cos\varphi)\cos\theta, (R + a\cos\varphi)\sin\theta, a\sin\varphi)$$

et $0 < a < R$ *sont des constantes. C'est une surface régulière par morceaux et orientable. Son bord* $\partial\Sigma$ *est vide.*



Discussion On trouve que le champ de normales induit par la paramétrisation est (cf. exercice 5.6)

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = a\,(R + a\cos\varphi)\,(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)\,.$$

On a aussi

$$\sigma\,(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{\sigma\,(\theta, 0) = ((R + a)\cos\theta, (R + a)\sin\theta, 0) : \theta : 0 \to 2\pi\}$$
$$\Gamma_2 = \{\sigma\,(2\pi, \varphi) = (R + a\cos\varphi, 0, a\sin\varphi) : \varphi : 0 \to 2\pi\}$$
$$\Gamma_3 = \{\sigma\,(\theta, 2\pi) = ((R + a)\cos\theta, (R + a)\sin\theta, 0) : \theta : 2\pi \to 0\} = -\Gamma_1$$
$$\Gamma_4 = \{\sigma\,(0, \varphi) = (R + a\cos\varphi, 0, a\sin\varphi) : \varphi : 2\pi \to 0\} = -\Gamma_2$$

d'où le résultat $\partial\Sigma = \emptyset$.

Exemple 8.20 (Cône) *Soit*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ } et \text{ } 0 \le z \le 1\right\}.}$$

C'est une surface régulière par morceaux et orientable. Son bord est

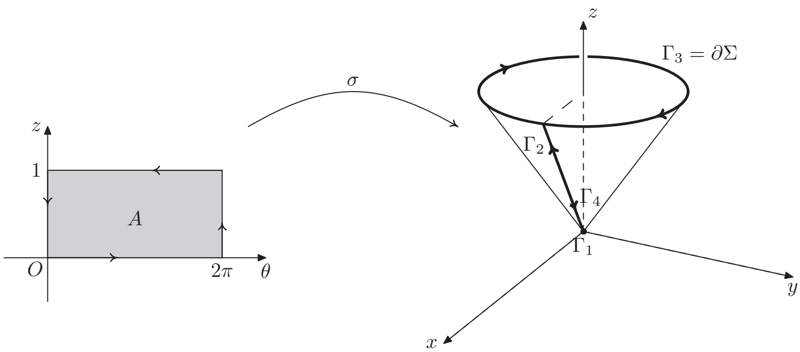
$$\partial\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ } et \text{ } z = 1\right\}.$$

Discussion On prend $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ et

$$\sigma\,(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)\,.$$

Le champ de normales induit par la paramétrisation est

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\,.$$



On trouve

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, z) = (z, 0, z) : z : 0 \to 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1) : \theta : 2\pi \to 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, z) = (z, 0, z) : z : 1 \to 0\} = -\Gamma_2\,.$$

On a bien le résultat voulu $\partial\Sigma = \Gamma_3$. Le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est le sens négatif.

On peut aussi prendre les coordonnées Cartésiennes comme paramétrisation

$$\widetilde{\sigma}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{et} \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

On trouve alors que $\widetilde{\sigma}(\partial B) = \partial\Sigma$ (noter que $\widetilde{\sigma}$ n'est pas différentiable en $(0, 0)$ et donc $\widetilde{\sigma} \notin C^1\left(B; \mathbb{R}^3\right)$).

Exemple 8.21 (Cube) *Soient*

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y, z \leq 1\right\}$$

et $\Sigma = \partial K$ la surface composée des faces du cube. C'est une surface régulière par morceaux, orientable et son bord $\partial\Sigma$ est vide.

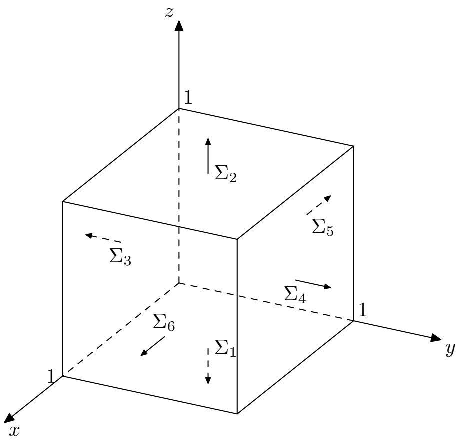
Discussion On a que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{6} \Sigma_i$ où

$$\Sigma_1 = \{(x, y, 0) : 0 < x, y < 1\}$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, 1) : 0 < x, y < 1\}$$

$$\Sigma_3 = \{(x, 0, z) : 0 < x, z < 1\}$$

$$\Sigma_4 = \{(x, 1, z) : 0 < x, z < 1\}$$



$$\Sigma_5 = \{(0, y, z) : 0 < y, z < 1\}$$
$$\Sigma_6 = \{(1, y, z) : 0 < y, z < 1\}$$

qui sont toutes des surfaces régulières. Un champ de normales unité C^1 par morceaux (et extérieure à K) est donné par

$$\nu = \begin{cases} (0, 0 - 1) & \text{sur } \Sigma_1 \\ (0, 0, 1) & \text{sur } \Sigma_2 \\ (0, -1, 0) & \text{sur } \Sigma_3 \\ (0, 1, 0) & \text{sur } \Sigma_4 \\ (-1, 0, 0) & \text{sur } \Sigma_5 \\ (1, 0, 0) & \text{sur } \Sigma_6\,. \end{cases}$$

On obtient facilement que $\partial\Sigma = \emptyset$.

Exemple 8.22 (Anneau de Moebius) *Soit*

$$\boxed{\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \sigma(\theta, r)\,, \quad (\theta, r) \in \overline{A}\right\}}$$

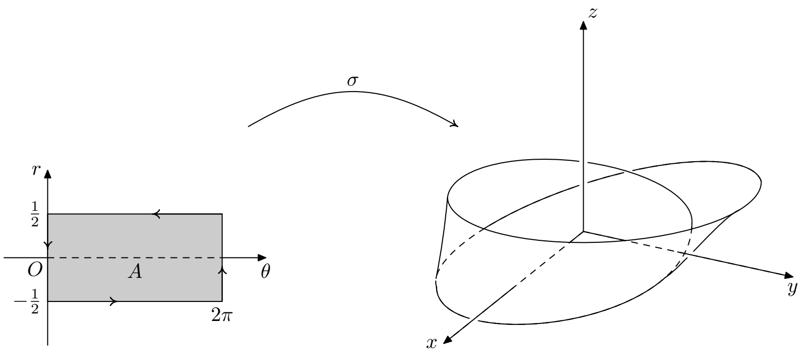
où $A = (0, 2\pi) \times (-1/2, 1/2)$ *et*

$$\sigma(\theta, r) = \left(\left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, r\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

C'est une surface régulière par morceaux mais non orientable.

Discussion Noter que

$$\sigma(0, r) = (1, 0, r) = \sigma(2\pi, -r)\,.$$



Par ailleurs la normale est donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_r = \begin{pmatrix} \left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \frac{r}{2}\sin\theta \\ \left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \frac{r}{2}\cos\theta \\ -\left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$\|\sigma_\theta \wedge \sigma_r\|^2 = \left(1 + r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4} > 0, \quad \forall\ (\theta, r) \in \overline{A}.$$

On a donc que

$$\nu(\theta, r) = \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_r}{\|\sigma_\theta \wedge \sigma_r\|} \text{ est continue}, \quad \forall\ (\theta, r) \in A.$$

Toutefois on remarque qu'elle n'est pas continue $\forall\ (\theta, r) \in \overline{A}$. En effet

$$\nu(0,0) = (1,0,0) \neq \nu(2\pi, 0) = (-1,0,0)$$

alors que le point $\sigma(0,0) = (1,0,0) = \sigma(2\pi,0)$. La surface n'est donc pas orientable.

(Pour la bilbliographie cf. [2] 25-29, [4] 373-376, [11] 534-538, [12] 445-466).

8.5 Changements de variables

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u : \overline{\Omega} \to u\left(\overline{\Omega}\right)$ avec $u \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$

$$u = u(x_1, \cdots, x_n) = \left(u^1(x), \cdots, u^n(x)\right)$$

injective et telle que (on rappelle que $u^i_{x_j} = \partial u^i / \partial x_j$)

$$\det \nabla u(x) = \begin{vmatrix} u^1_{x_1} & \cdots & u^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^n_{x_1} & \cdots & u^n_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{8.1}$$

La valeur absolue du déterminant, $|\det \nabla u(x)|$, est appelé le ***jacobien*** de la transformation. La ***formule de changement de variables*** (cf. [12] 357), valable pour une fonction $f \in C\left(u\left(\overline{\Omega}\right)\right)$, est alors donnée par

$$\boxed{\int_{u(\Omega)} f(y)\,dy = \int_{\Omega} f(u(x))\,|\det \nabla u(x)|\,dx.}$$

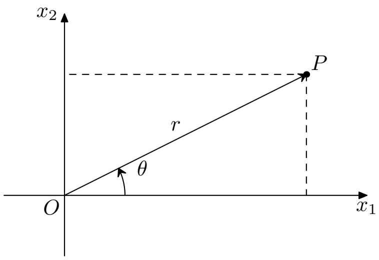
Les exemples ci-dessous ne satisfont pas toutes les propriétés requises pour appliquer la formule de changement de variables (notamment ils ne vérifient pas (8.1)), mais on peut toutefois montrer facilement que la formule est quand même valable pour de tels exemples.

Exemple 8.23 (Coordonnées polaires) *Si* $n = 2$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *et*

$$x_1 = u^1(r,\theta) = r\cos\theta \quad et \quad x_2 = u^2(r,\theta) = r\sin\theta$$

on déduit alors que

$$\det \nabla u = \begin{vmatrix} u_r^1 & u_\theta^1 \\ u_r^2 & u_\theta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \geq 0.$$

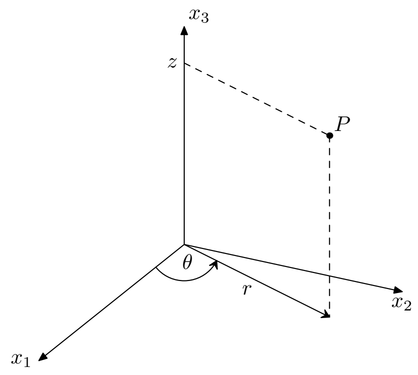


Exemple 8.24 (Coordonnées cylindriques) *Si* $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ *et*

$$x_1 = u^1(r,\theta,z) = r\cos\theta$$
$$x_2 = u^2(r,\theta,z) = r\sin\theta$$
$$x_3 = u^3(r,\theta,z) = z$$

on obtient

$$|\det \nabla u| = r.$$

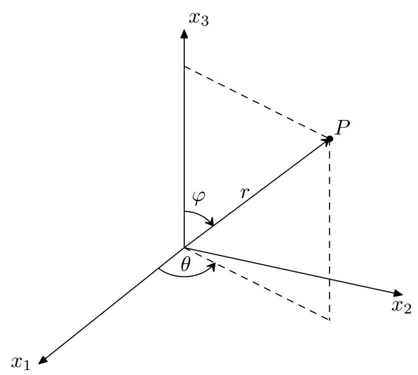


Exemple 8.25 (Coordonnées sphériques) *Si* $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ *et*

$$x_1 = u^1(r, \theta, \varphi) = r \cos\theta \sin\varphi$$
$$x_2 = u^2(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$x_3 = u^3(r, \theta, \varphi) = r \cos\varphi$$

on trouve

$$|\det \nabla u| = r^2 \sin\varphi.$$



Deuxième partie

Analyse complexe

Chapitre 9

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

9.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 9.1 *Soit $O \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $f : O \to \mathbb{C}$ est* ***holomorphe*** *(ou* ***analytique complexe****) dans O si f est dérivable $\forall\, z_0 \in O$, c'est-à-dire que*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et est finie. On note la dérivée par $f'(z_0)$.

Remarque *(i)* Toutes les règles de dérivation dans $\mathbb{R}$ (notamment la dérivée de la somme, du produit, du quotient et de la composition) sont valables dans $\mathbb{C}$.

(ii) Par abus de notations, l'ouvert O sera souvent identifié à un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (on écrira ainsi de façon équivalente $z = x + i\,y \in O$ ou $(x, y) \in O$).

Théorème 9.2 *Soient $O \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{C}$ telle que, si $z = x + i\,y$,*

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + i\,y) \quad \text{et} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + i\,y).$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *f est holomorphe dans O.*

(ii) *Les fonctions $u, v \in C^{\infty}(O)$ et satisfont, $\forall\, (x, y) \in O$, les* ***équations de Cauchy-Riemann***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.}$$

En particulier si f est holomorphe dans O, alors

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,.}$$

Notation Par la suite on notera $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(Pour plus de détails, cf. [1] 24-26, [3] 13-14, [5] 36-38, [7] chapitre 8, [11] 741-742).

9.2 Exemples

Exemple 9.3 *La fonction $f(z) = e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) = e^z$.*

Discussion En effet on a

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x \cos y + i\,e^x \sin y = u(x,y) + i\,v(x,y)\,,$$

où u et v sont $C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, i.e.

$$\begin{cases} u_x = v_y = e^x \cos y \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$$

et donc $f'(z) = u_x + i\,v_x = e^z$.

Exemple 9.4 *La fonction* $\sin z = \dfrac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}$ *est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et sa dérivée est* $\cos z = \dfrac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$.

Discussion *(i)* Les parties réelles et imaginaires sont données par

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{i\,x} - e^{y}e^{-i\,x}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= -\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\frac{\cos x}{i} + \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x \end{aligned}$$

et donc

$$\sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x.$$

(ii) Calcul des dérivées.

$$\begin{array}{ll} u_x = \cosh y \cos x & u_y = \sinh y \sin x \\ v_x = -\sinh y \sin x & v_y = \cosh y \cos x. \end{array}$$

On a bien $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. De plus (cf. exercice 9.1)

$$(\sin z)' = u_x + i\,v_x = \cosh y \cos x - i\,\sinh y \sin x = \cos z.$$

Exemple 9.5 *Soient* $z = x + i\,y$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *son module et* $\arg z$ *son argument. La fonction*

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\,(\arg z)\,, \quad \textit{avec} \; -\pi < \arg z \leq \pi}$$

où $\log|z|$ *est le logarithme naturel du nombre réel* $|z|$ *(en particulier* $\log e = 1$*), est définie pour tout* $z \neq 0$ *et est holomorphe dans*

$$O = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \;\; et \;\; \operatorname{Re} z \leq 0\}\,.$$

Sa dérivée est $f'(z) = \dfrac{1}{z}$, $\forall\, z \in O$.

Discussion *(i)* Tout d'abord on va préciser que dans la définition ci-dessus on a indiqué seulement la ***détermination principale*** de la fonction logarithme, car en général l'argument de z, $\arg z$, est détérminé à un multiple de 2π près, ce qui fait de $\log z$ une ***fonction multivoque***. Noter que si $z \in O$, $-\pi < \arg z < \pi$ et $z = x + i\,y$, alors on peut définir l'argument comme une fonction de l'arc tangente ; en effet

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

(ii) On va montrer que $f(z) = \log z$, définie pour tout $z \neq 0$, n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; pour que ce soit le cas il faut lui enlever le demi-axe réel négatif, c'est-à-dire la restreindre à O. En utilisant la définition on a que

$$\log(-1 + i\,t) = \log\sqrt{1 + t^2} + i \arg(-1 + i\,t)\,.$$

De la partie (i) on déduit que

$$\lim_{t \to 0^+} \log(-1 + i\,t) = \log 1 + i\pi = i\pi$$
$$\lim_{t \to 0^-} \log(-1 + i\,t) = \log 1 - i\pi = -i\pi.$$

Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (plus précisément on a montré que f n'est pas continue en $z = -1$).

(iii) Montrons maintenant que $f'(z) = 1/z$, $\forall\, z \in O$. On va prouver ceci par exemple dans le demi plan $\operatorname{Re} z > 0$, où $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$. On procède

de façon semblable dans les deux autres quarts de plan ($-\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$). On écrit $z = x + i\,y$ de façon que $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ et

$$\log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)\,.$$

On trouve que $u, v \in C^\infty\,(O)$ et

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2 + y^2} & u_y &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_x &= \frac{-y}{x^2 + y^2} & v_y &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et donc

$$(\log z)' = u_x + i\,v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - i\,y}{(x + i\,y)\,(x - i\,y)} = \frac{1}{z}\,.$$

(iv) On peut montrer (cf. exercice 9.13) de plus que

$$\log e^z = z,\ \text{si } \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad e^{\log z} = z,\ \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\log\,(z\,w) = \begin{cases} \log z + \log w & \text{si } \arg z + \arg w \in (-\pi, \pi] \\ \log z + \log w - 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w \in (\pi, 2\pi] \\ \log z + \log w + 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w \in (-2\pi, -\pi]\,. \end{cases}$$

Exemple 9.6 *Soient $\gamma \in \mathbb{C}$ et $f\,(z) = z^\gamma$. Alors f est holomorphe dans*

$$O = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \ \textit{et} \ \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

et sa dérivée est $f'\,(z) = \gamma\,z^{\gamma - 1}$.

Discussion *(i)* On définit (la détermination principale)

$$f\,(z) = e^{\gamma \log z}$$

qui, par composition, est une fonction holomorphe dans

$$O = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}\,.$$

On trouve que $f'\,(z) = e^{\gamma \log z} \cdot \gamma\,z^{-1} = \gamma\,z^{\gamma - 1}$. A relever que si $\gamma \in \mathbb{N}$, z^γ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et pas seulement dans O (la détermination principale de z^γ définie ici est alors la même que celle définie algébriquement).

(ii) On peut aussi montrer que si $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$$z^{\beta + \gamma} = z^\beta z^\gamma$$

$$z^\gamma w^\gamma = \begin{cases} (z\,w)^\gamma & \text{si } \arg z + \arg w \in (-\pi, \pi] \\ (z\,w)^\gamma\,e^{2\pi\gamma i} & \text{si } \arg z + \arg w \in (\pi, 2\pi] \\ (z\,w)^\gamma\,e^{-2\pi\gamma i} & \text{si } \arg z + \arg w \in (-2\pi, -\pi]\,. \end{cases}$$

(iii) Il faut toutefois être prudent dans les calculs (cf. exercice 9.14).

9.3 Exercices

Exercice 9.1 *Montrer que les fonctions*

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}\,, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\,, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ *et calculer leurs dérivées.*

Exercice 9.2 $f\,(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ *est-elle holomorphe ? Justifier votre réponse.*

Exercice 9.3 *Soit la fonction* $f\,(z) = \log\left(1 + z^2\right)$. *Trouver le plus grand domaine de* $\mathbb{C}$ *où la fonction* f *est holomorphe.*

Exercice 9.4 *Trouver une fonction holomorphe* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dont la partie réelle est*

$$u\,(x, y) = e^{\left(x^2 - y^2\right)} \cos\left(2\,x\,y\right).$$

Exercice 9.5 *Trouver une fonction holomorphe* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *telle que sa partie réelle soit*

$$u\,(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-x} \cos y.$$

Exercice 9.6 *Prouver que si* $z = x + i\,y$ *et* $f\,(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$ *est holomorphe dans un ouvert* Ω, *alors*

(i) u *et* v *sont harmoniques dans* Ω *(c'est-à-dire* $\triangle u = \triangle v = 0$*),*

(ii) $u_x v_x + u_y v_y = 0$

(iii) $\left|f'\,(z)\right|^2 = u_x v_y - u_y v_x$.

Exercice 9.7 *Montrer que si* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est constante.*

(ii) $\operatorname{Re}(f)$ *est constante.*

(iii) $\operatorname{Im}(f)$ *est constante.*

En déduire que $f\,(z) = |z|$ *n'est pas holomorphe.*

Exercice 9.8 *Montrer que les équations de Cauchy-Riemann, en coordonnées polaires, s'écrivent*

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{v_\theta}{r} \quad \text{et} \quad v_r = \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{u_\theta}{r}\,.$$

Exercice 9.9 *Soit* f *une fonction holomorphe dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $u_x + v_y = 0$. *Montrer qu'il existe une constante réelle* c *et une constante complexe* d *telles que* $f\,(z) = -i\,c\,z + d$.

Exercice 9.10 *Si* $g = g\,(x, y)$ *est harmonique dans* $\mathbb{R}^2$ *(i.e.* $\triangle g = 0$*) et* $f = u + i\,v$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C}$, *vérifier alors que* $h\,(x, y) = g\,(u\,(x, y)\,, v\,(x, y))$ *est harmonique dans* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.11 *Soient A un ouvert et $u \in C^{\infty}(A)$ une fonction telle que $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Soit*

$$f(z) = u_x - i\, u_y\,.$$

Montrer que f est une fonction holomorphe dans A.

Exercice 9.12 ** Montrer que si f est holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un ensemble ouvert, alors les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites dans Ω, i.e.*

$$u_x = v_y \quad et \quad u_y = -v_x\,.$$

Suggestion. Prendre dans la Définition 9.1 tout d'abord $z = z_0 + h$, puis $z = z_0 + i\,h$ avec $h \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.13 *** (i) *Montrer que*

$$\log e^z = z \quad si\ \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$$

$$e^{\log z} = z \quad si\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

(ii) *Montrer que*

$$\log(z\,w) = \begin{cases} \log z + \log w & si\ \arg z + \arg w \in (-\pi, \pi] \\ \log z + \log w - 2\pi i & si\ \arg z + \arg w \in (\pi, 2\pi] \\ \log z + \log w + 2\pi i & si\ \arg z + \arg w \in (-2\pi, -\pi]\,. \end{cases}$$

Exercice 9.14 ** Trouver et expliquer la faute dans la série d'égalités suivante :*

$$1 = 1^{1/2} = \left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i} = -1.$$

9.4 Corrigés

Exercice 9.1 *Etape 1.* Commençons par trouver les parties réelles et imaginaires. On trouve

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} = \frac{e^{-y} e^{i\,x} + e^{y} e^{-i\,x}}{2} \\ &= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \cos x - i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \sin x \\ &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x} e^{i\,y} + e^{-x} e^{-i\,y}}{2} \\ &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. \end{aligned}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{i\,y} - e^{-x} e^{-i\,y}}{2}$$
$$= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

Etape 2. Calcul des dérivées.

(i) On a immédiatement

$$u_x = -\cosh y \sin x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = \sinh y \cos x = -v_x$$

et ainsi

$$(\cos z)' = u_x + i\, v_x = -\left(\cosh y \sin x + i\ \sinh y \cos x\right) = -\sin z.$$

(ii) On obtient

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

et donc

$$(\cosh z)' = u_x + i\, v_x = \sinh z.$$

(iii) On déduit

$$u_x = \cosh x \cos y = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -\sinh x \sin y = -v_x$$

et par conséquent

$$(\sinh z)' = u_x + i\, v_x = \cosh z.$$

Exercice 9.2 La fonction $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ n'est pas holomorphe car les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées. On a en effet

$$u_x = 2\,x, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Exercice 9.3 La fonction $z \to 1 + z^2$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. On sait que la fonction $w \to \log w$ est holomorphe dans

$$D = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 0, \operatorname{Re} w \leq 0\}$$

par conséquent, en posant $w = 1 + z^2$ on va déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(w) \leq 0.$$

Si $z = x + i\,y$ et donc $z^2 = x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y$, on a alors

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(1 + z^2\right) = 2\,x\,y = 0 \\ \operatorname{Re}\left(1 + z^2\right) = 1 + x^2 - y^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{Re} z = 0 \\ y^2 \geq 1 \end{cases}$$

(le cas $y=0$ et $1+x^2 \leq 0$ est à exclure) et donc

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, \ \ |\operatorname{Im} z| \geq 1\}\,.$$

Exercice 9.4 On veut trouver une fonction holomorphe $f = u + i\,v$ telle que $u\,(x,y) = e^{\left(x^2-y^2\right)} \cos\left(2\,x\,y\right)$. On écrit les équations de Cauchy-Riemann pour déterminer v, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} v_y = 2\,e^{\left(x^2-y^2\right)}\left(x\cos\left(2\,x\,y\right) - y\sin\left(2\,x\,y\right)\right) \\ v_x = 2\,e^{\left(x^2-y^2\right)}\left(y\cos\left(2\,x\,y\right) + x\sin\left(2\,x\,y\right)\right). \end{array}\right.$$

En intégrant, par exemple, la deuxième équation on trouve

$$v\,(x,y) = e^{\left(x^2-y^2\right)} \sin\left(2\,x\,y\right) + \alpha\,(y)\,.$$

En remettant ce résultat dans la première équation on obtient

$$\alpha'\,(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\,(y) = \alpha_0 = \text{constante.}$$

On a donc

$$v\,(x,y) = e^{\left(x^2-y^2\right)} \sin\left(2\,x\,y\right) + \alpha_0$$

et, pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$,

$$f = u + i\,v = e^{x^2-y^2+i(2\,x\,y)} + i\,\alpha_0 = e^{z^2} + i\,\alpha_0\,.$$

Exercice 9.5 En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = 2\,x - e^{-x}\cos y = v_y \\ u_y = -2\,y - e^{-x}\sin y = -v_x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} v_y = 2\,x - e^{-x}\cos y \\ v_x = 2\,y + e^{-x}\sin y \end{array}\right.$$

d'où on déduit, de la deuxième équation,

$$v\,(x,y) = \alpha\,(y) + 2\,x\,y - e^{-x}\sin y.$$

Alors, en dérivant v par rapport à y on a, de la première équation,

$$\alpha'\,(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\,(y) = \alpha_0 = \text{constante}$$

et par conséquent

$$f = u + i\,v = \left(x^2 - y^2\right) + e^{-x}\cos y + i\left(2\,x\,y - e^{-x}\sin y\right) + i\,\alpha_0\,.$$

Comme

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y \quad \text{et} \quad \cos y - i\sin y = e^{-i\,y}$$

on trouve, pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = z^2 + e^{-z} + i\,\alpha_0\,.$$

Exercice 9.6 *(i)* Par le théorème 9.2 on sait que $u, v \in C^\infty(\Omega)$ (en particulier $v_{yx} = v_{xy}$). On peut donc dériver les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x$$

et on trouve

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{et} \quad u_{yy} = -v_{xy}\,.$$

On déduit immédiatement que

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{yx} = 0.$$

Un raisonnement totalement analogue conduit à

$$\triangle v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

(ii) Cette identité est une conséquence directe des relations de Cauchy-Riemann, en effet

$$u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0. \tag{9.1}$$

(Noter, en passant, que si $u(x,y) = C$ et $v(x,y) = C$ représentent les courbes de niveau des parties réelles et imaginaires de $f(z)$, pour $(x,y) \in \Omega$, alors la relation (9.1) implique que leurs gradients sont orthogonaux dans Ω. Comme, en général, le gradient est orthogonal aux courbes de niveau, il s'ensuit que les familles $u(x,y) = C$ et $v(x,y) = C$ sont deux à deux orthogonales).

(iii) On a que

$$f'(z) = u_x + i\,v_x$$

et donc, par les équations de Cauchy-Riemann,

$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - u_y v_x\,.$$

Exercice 9.7 *(i)⇒(ii)*. Comme $f = a + i\,b =$ constante on déduit que

$$\mathrm{Re}(f) = a = \text{constante}.$$

(ii)⇒(iii). Comme $\mathrm{Re}(f) = a$ et $f = a + i\,v(x,y)$ on infère (grâce aux équations de Cauchy-Riemann) que $v_x = v_y = 0$ et ainsi $v = b$. On a ainsi obtenu que

$$\mathrm{Im}(f) = b = \text{constante}$$

et donc $f =$ constante.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Par les équations de Cauchy-Riemann (comme précédemment)

$$\mathrm{Im}\,(f) = b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(f) = a$$

et donc f = constante. En particulier la fonction $f(z) = |z| \in \mathbb{R}$ n'est pas holomorphe.

Exercice 9.8 On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

En résolvant par rapport à $\partial u/\partial x$ et $\partial u/\partial y$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\,.$$

De façon similaire on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}\,.$$

Les équations de Cauchy-Riemann deviennent

$$\begin{aligned} u_x &= \cos\theta\,u_r - \frac{\sin\theta}{r}\,u_\theta = \sin\theta\,v_r + \frac{\cos\theta}{r}\,v_\theta = v_y \\ u_y &= \sin\theta\,u_r + \frac{\cos\theta}{r}\,u_\theta = -\cos\theta\,v_r + \frac{\sin\theta}{r}\,v_\theta = -v_x\,. \end{aligned}$$

On trouve facilement que ceci implique

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \quad \text{et} \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}\,.$$

Exercice 9.9 Des équations de Cauchy-Riemann on a $u_x = v_y$ et comme $u_x + v_y = 0$ on déduit que $u_x = v_y = 0$. Par conséquent u (et donc u_y) dépend seulement de y et v (et donc v_x) seulement de x. Comme $u_y = -v_x$ pour tout x et y, on déduit que $u_y = -v_x = c$, où c est une constante, et par conséquent

$$u = c\,y + d_1 \quad \text{et} \quad v = -c\,x + d_2\,.$$

On a alors (en posant $d_1 + i\,d_2 = d$)

$$f = u + i\,v = -i\,c\,(x + i\,y) + (d_1 + i\,d_2) = -i\,c\,z + d.$$

Exercice 9.10 Comme g est harmonique on a

$$\Delta g = g_{uu} + g_{vv} = 0.$$

Par ailleurs f étant holomorphe on obtient

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x \, .$$

En calculant les dérivées successives de h on trouve

$$h_x = g_u u_x + g_v v_x \quad \text{et} \quad h_y = g_u u_y + g_v v_y$$

$$\begin{aligned} h_{xx} &= g_{uu} u_x^2 + +2\, g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2 + g_u u_{xx} + g_v v_{xx} \\ h_{yy} &= g_{uu} u_y^2 + +2\, g_{uv} u_y v_y + g_{vv} v_y^2 + g_u u_{yy} + g_v v_{yy} \, . \end{aligned}$$

Par conséquent en se rappelant que (cf. exercice 9.6) les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\Delta u = \Delta v = 0, \quad u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 \, , \quad u_x v_x + u_y v_y = 0$$

on déduit

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_{xx} + h_{yy} \\ &= g_{uu} \left(u_x^2 + u_y^2\right) + 2\, g_{uv} \left(u_x v_x + u_y v_y\right) + g_{vv} \left(v_x^2 + v_y^2\right) + g_u \, \Delta u + g_v \, \Delta v \\ &= \Delta g \left(u_x^2 + u_y^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 9.11 On pose $f = U + i\, V$ où $U = u_x$ et $V = -u_y$. Par hypothèse $u \in C^\infty$ et donc

$$U_y = u_{xy} = u_{yx} = -V_x$$

soit une des équations de Cauchy-Riemann pour f. La deuxième découle du fait que $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$U_x = u_{xx} = -u_{yy} = V_y \, .$$

Donc f est holomorphe.

Exercice 9.12 * Soit $z_0 = x_0 + i\, y_0$. D'après la suggestion, on va considérer dans un premier temps $z = z_0 + h$, avec $h \in \mathbb{R}$. On écrit alors

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + i\, y_0) - f(x_0 + i\, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i\left[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)\right]}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = u_x + i\, v_x \, . \end{aligned}$$

En choisissant cette fois-ci $z = z_0 + i\, h$, avec $h \in \mathbb{R}$, et en faisant le même calcul qu'auparavant, on trouve

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = v_y - i\, u_y \, .$$

En combinant les deux expressions on obtient bien les équations de Cauchy-Riemann, i.e.

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x\,.$$

Exercice 9.13 * *(i)* Soit $z = x + i\,y$. On rappelle que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{et} \quad \log z = \log|z| + i \arg z,\ z \neq 0.$$

- Comme $y \in \left]-\pi, \pi\right]$, alors $\arg e^z = y$ et donc

$$\log e^z = \log|e^z| + i\, \arg e^z = x + i\,y = z.$$

- Par ailleurs, si $z \neq 0$, on trouve que

$$e^{\log z} = e^{\log|z|} e^{i \arg z} = |z|\, e^{i \arg z} = z.$$

(ii) On rappelle que l'argument de $z \in \mathbb{C}$ est le seul scalaire $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que l'on puisse écrire

$$z = |z|\, e^{i \arg z}.$$

On a donc

$$z\,w = |z|\, e^{i \arg z}\, |w|\, e^{i \arg w} = |z\,w|\, e^{i(\arg z + \arg w)}$$

et par conséquent, puisque la fonction $t \to e^{i\,t}$ est $2\pi-$périodique, on déduit que

$$\arg(z\,w) = \begin{cases} \arg z + \arg w & \text{si } \arg z + \arg w \in \left]-\pi, \pi\right] \\ \arg z + \arg w - 2\pi & \text{si } \arg z + \arg w \in \left]\pi, 2\pi\right] \\ \arg z + \arg w + 2\pi & \text{si } \arg z + \arg w \in \left]-2\pi, -\pi\right]. \end{cases}$$

En utilisant la définition du logarithme, à savoir

$$\log(z\,w) = \log|z\,w| + i\, \arg(z\,w) = \log|z| + \log|w| + i\, \arg(z\,w)\,,$$

on obtient directement le résultat.

Exercice 9.14 * La faute est manifestement dans l'égalité $\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i}$. Par définition on a que

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\frac{\log\left(e^{2\pi i}\right)}{2}} = e^{i\,\frac{\arg\left(e^{2\pi i}\right)}{2}}. \tag{9.2}$$

La fonction $\arg z$ prend ses valeurs dans $\left]-\pi, \pi\right]$ (la détermination principale), on trouve

$$\arg\left(e^{2\pi i}\right) = 0$$

et donc

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^0 = 1.$$

Par contre, si on fait la faute suivante

$$\arg\left(e^{2\pi i}\right) = 2\pi,$$

alors (9.2) donne la fausse égalité, à savoir

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i}.$$

On a donc que la propriété suivante, vraie dans $\mathbb{R}$, est fausse, en général, dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left(z^{\beta}\right)^{\gamma} \neq z^{\beta\gamma}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Chapitre 10

Intégration complexe

10.1 Définition et résultats théoriques

Si nécessaire on pourra se référer aux chapitres 2 et 8 pour des compléments et des définitions plus précises sur les courbes et les intégrales curvilignes.

Définition 10.1 (i) *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *une courbe régulière de paramétrisation* $\gamma : [a, b] \to \Gamma$. *Soit* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *une fonction continue. On note*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

(ii) *Si* Γ *est régulière par morceaux,* $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k$, Γ_k *des courbes régulières, alors*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

Théorème 10.2 (Théorème de Cauchy) *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *un domaine simplement connexe,* $f : D \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe et* γ *une courbe simple fermée et régulière par morceaux contenue dans* D. *Alors*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0.}$$

Théorème 10.3 (Formule intégrale de Cauchy) *Sous les mêmes hypothèses que le théorème ci-dessus, alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi, \quad \forall\, z \in \operatorname{int}\gamma.$$

De plus f est infiniment dérivable au sens complexe et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad \forall\, z \in \operatorname{int} \gamma.}$$

(Pour plus de détails, cf. [1] 102-123, 141, [3] 27-45, [5] 126-148, [7] chapitre 9, [11] 767-793).

10.2 Exemples

Exemple 10.4 *Soient $f(z) = z^2$, et γ_1, γ_2 respectivement le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en l'origine et le cercle de rayon 1 centré en l'origine. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_j} f(z)\, dz$, $j = 1, 2$.*

Discussion *(i)* $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, où $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$ et donc $\gamma_1'(\theta) = i\, e^{i\theta}$. On a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_0^\pi \left(e^{i\theta}\right)^2\ i\, e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta}\, d\theta = \left.\frac{e^{3i\theta}}{3}\right|_0^\pi = -\frac{2}{3}\,.$$

(ii) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, avec $\gamma_2(\theta) = e^{i\theta}$ et donc $\gamma_2'(\theta) = i\, e^{i\theta}$. On obtient

$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \left(e^{i\theta}\right)^2\ i\, e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta}\, d\theta = \left.\frac{e^{3i\theta}}{3}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Dans ce dernier cas on aurait pu appliquer le théorème de Cauchy et conclure immédiatement.

Exemple 10.5 *Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale suivante*

$$\int_\gamma \frac{\cos(2\, z)}{z}\, dz.$$

Discussion On observe que $\xi = 0$ est une singularité pour $f(\xi) = \cos(2\,\xi)/\xi$. On va distinguer plusieurs cas.

Cas 1 : $0 \in \operatorname{int}\gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $g(\xi) = \cos(2\,\xi)$ et on trouve

$$1 = g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cos(2\,\xi)}{\xi - 0}\, d\xi$$

et par conséquent

$$\int_\gamma \frac{\cos(2\, z)}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Remarque. La formule intégrale de Cauchy représente un instrument bien utile dans le calcul de certaines intégrales. Un calcul direct, dans notre cas

$$\int_\gamma \frac{\cos(2\,z)}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(2\,e^{i\,\theta}\right)}{e^{i\,\theta}}\, i\,e^{i\,\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \cos\left(2\,e^{i\,\theta}\right)d\theta,$$

n'est pas évident.

Cas 2 : $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy appliqué à f nous permet de conclure immédiatement que

$$\int_\gamma \frac{\cos(2\,z)}{z}\,dz = 0.$$

Cas 3 : $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exemple 10.6 *Soit* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$. *Calculer*

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}\,dz.$$

Discussion Soient $f(\xi) = e^{\xi+2}$, $z = 2$ et $n = 2$. Le théorème 10.3 nous donne

$$\int_\gamma \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\,f''(2) = \frac{2\pi i}{2}\,e^4 = \pi i\,e^4.$$

10.3 Exercices

Exercice 10.1 *Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, la valeur de l'intégrale suivante*

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{2\,z}\,dz.$$

Exercice 10.2 *Soit* $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = 1\right\}$. *Calculer*

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,dz.$$

Exercice 10.3 *Calculer*

(i) $\displaystyle\int_\gamma \left(z^2+1\right)dz$ *où* $\gamma = [1, 1+i]$ *(segment entre* 1 *et* $1+i$*).*

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz$ *où γ est le cercle unité centré en* 0.

Exercice 10.4 *Soient γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, la valeur de l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 10.5 *Discuter, en fonction de γ, une courbe simple, fermée et régulière par morceaux, la valeur de l'intégrale suivante*

$$\int_\gamma \frac{5\,z^2 - 3\,z + 2}{(z-1)^3}\,dz.$$

Exercice 10.6 *Calculer les intégrales suivantes*

$$\text{(i)} \quad \int_\gamma \frac{e^{2\,z}}{z}\,dz \quad \textit{et} \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}\,,$$

$$\text{(ii)} \quad \int_\gamma \frac{z^3 + 2\,z^2 + 2}{z - 2i}\,dz \quad \textit{et} \quad \gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = \frac{1}{4}\right\},$$

$$\text{(iii)} \quad \int_\gamma \frac{\sin\left(2\,z^2 + 3\,z + 1\right)}{z - \pi}\,dz \quad \textit{et} \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 1\}\,.$$

Exercice 10.7 *Déterminer la valeur des intégrales*

$$\text{(i)} \quad \int_\gamma \frac{3\,z^2 + 2\,z + \sin(z+1)}{(z-2)^2}\,dz \quad \textit{et} \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}\,,$$

$$\text{(ii)} \quad \int_\gamma \frac{e^z}{z\,(z+2)}\,dz \quad \textit{et} \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Exercice 10.8 *Calculer*

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2\,(z^2+4)}\,dz$$

dans les cas suivants

(i) γ *est le cercle centré en* $(1,0)$ *et de rayon* 1,

(ii) γ *est le bord du rectangle* $[-1/2, 1/2] \times [0,4]$,

(iii) γ *est le bord du rectangle* $[-2,0] \times [-1,1]$.

Exercice 10.9 *Montrer que*

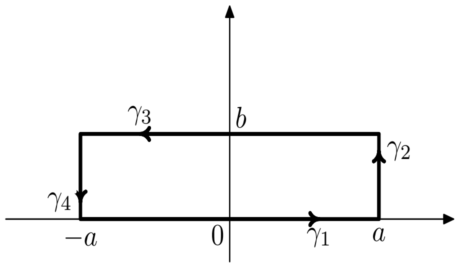
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\,b\,x)\,dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2} \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\,b\,x)\,dx = 0.$$

Suggestions. (i) *Montrer que* $f(z) = e^{-z^2}$ *est holomorphe.*

(ii) *Considérer le chemin* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ *où* γ *est le bord du rectangle* $[-a,a] \times [0,b]$ *(voir la figure) à savoir*

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [-a,a] \;\; \textit{et} \;\; \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a \;\; \textit{et} \;\; \operatorname{Im} z \in [0,b]\}$$



$$-\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [-a, a] \;\; et \;\; \operatorname{Im} z = b\}$$
$$-\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -a \;\; et \;\; \operatorname{Im} z \in [0, b]\}\,.$$

Montrer que

(a) $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz = 0.$

(b) $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, *(utiliser le fait que f est holomorphe).*

(c) *En utilisant le fait que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, *conclure.*

Exercice 10.10 *Soit f une fonction continue dans un domaine D simplement connexe. Soit $F : D \to \mathbb{C}$, holomorphe et telle que $F'(z) = f(z)$. Montrer que, pour toute courbe γ régulière, contenue dans D, avec $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$,*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

En particulier, si γ est fermée, déduire que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(Ceci est une version plus faible du théorème de Cauchy).

Exercice 10.11 *Soient $f(z) = 1/z$ et γ_1, γ_2 représentant respectivement le cercle de rayon 1 centré en $z = 2$ et le cercle de rayon 1 centré en l'origine. A l'aide de l'exercice 10.10, calculer, pour $j = 1, 2$,*

$$\int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Exercice 10.12 ** Montrer le théorème de Cauchy.*

Suggestion. (i) *Ecrire $f = u + i\, v$ et $\gamma = \alpha + i\, \beta : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = \gamma(t)$, et montrer que*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b [u(\alpha, \beta)\, \alpha' - v(\alpha, \beta)\, \beta']\, dt + i \int_a^b [v(\alpha, \beta)\, \alpha' + u(\alpha, \beta)\, \beta']\, dt.$$

(ii) *Appliquer le théorème de Green (cf. chap. 4) pour obtenir que*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \iint_{\operatorname{int}\gamma} (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_{\operatorname{int}\gamma} (u_x - v_y)\,dx\,dy$$

(iii) *Déduire le résultat à l'aide des équations de Cauchy-Riemann.*

Exercice 10.13 * *Montrer la généralisation suivante du théorème de Cauchy. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $O \subset \overline{O} \subset \Omega$ un domaine régulier au sens de la définition 4.1 rappelée ci-dessous. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Rappel. *Un ouvert $O \subset \mathbb{C}$ est dit* régulier, *s'il existe $O_0, O_1, \cdots, O_m \subset \mathbb{C}$ des ouverts bornés tels que*

$$\begin{aligned}
&O = O_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{O}_j\\
&\overline{O}_j \subset O_0\,, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m\\
&\overline{O}_j \cap \overline{O}_k = \emptyset \quad \textit{si } j \neq k,\ j, k = 1, \cdots, m\\
&\partial O_j = \gamma_j\,, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}$$

où les γ_j sont des courbes simples fermées régulières par morceaux.

Exercice 10.14 (Formule de la moyenne) * *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit pour que*

$$\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega.$$

Montrer que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\,e^{i\,t}\right) dt.$$

10.4 Corrigés

Exercice 10.1 On va considérer trois cas.

Cas 1 : $0 \in \operatorname{int}\gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $g(\xi) = e^{\xi^2}/2$ et on trouve

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^{\xi^2}}{\xi - 0}\,d\xi = 2\pi i\,g(0) = \pi i.$$

Cas 2 : $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy appliqué à $f(z) = e^{z^2}/2\,z$ nous permet de conclure immédiatement que

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{2\,z}\,dz = 0.$$

Cas 3 : $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 10.2 On applique la formule intégrale de Cauchy à $f(\xi) = \xi^2 \sin \xi$, $z = \pi/2$ et $n = 1$ (noter que $f'(z) = 2\, z \sin z + z^2 \cos z$). On trouve donc que

$$\int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!}\, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 i.$$

Exercice 10.3 *(i)* Soit $\gamma = [1, 1+i] = \{\gamma(t) = 1 + i\,t,\ t \in [0,1]\}$. On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(z^2 + 1\right) dz &= \int_0^1 \left((i\,t+1)^2 + 1\right) i\, dt = i \int_0^1 \left(-t^2 + 2i\,t + 2\right) dt \\ &= \frac{5i}{3} - 1.\end{aligned}$$

(ii) On paramètre le cercle unité centré en 0 par

$$\gamma : t \to e^{i\,t} \quad \text{avec} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

On trouve alors

$$\int_\gamma \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(e^{2i\,t}\right)\, i\, e^{i\,t}\, dt = i \int_0^{2\pi} \cos(2\,t)\,(\cos t + i \sin t)\, dt = 0.$$

Exercice 10.4 *Cas 1 :* $0 \in \operatorname{int}\gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $f(\xi) \equiv 1$, $z = 0$ et $n = 1$. On trouve que $f' \equiv 0$ et par conséquent

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = 0.$$

Cas 2 : $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy nous permet de conclure immédiatement que

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = 0.$$

Cas 3 : $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 10.5 *Cas 1 :* $1 \in \operatorname{int}\gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $f(\xi) = 5\,\xi^2 - 3\,\xi + 2$, $z = 1$ et $n = 2$. On trouve que $f''(1) = 10$. Par conséquent

$$\int_\gamma \frac{5\,z^2 - 3\,z + 2}{(z-1)^3}\, dz = 10\,\pi i.$$

Cas 2 : $1 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy nous permet de conclure immédiatement que

$$\int_\gamma \frac{5\,z^2 - 3\,z + 2}{(z-1)^3}\, dz = 0.$$

Cas 3 : $1 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 10.6 *(i)* On considère $f(\xi) = e^{2\xi}$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Donc, par la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi}\, d\xi = \int_\gamma \frac{e^{2\xi}}{\xi}\, d\xi = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i.$$

Noter qu'on pourrait essayer de calculer l'intégrale sans utiliser la formule de Cauchy, en choisissant par exemple la paramétrisation suivante

$$\gamma(t) = 2\, e^{i\,t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Dans ce cas

$$\int_\gamma \frac{e^{2\,z}}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{4\,e^{i\,t}}}{e^{i\,t}}\, i\, e^{i\,t} dt = i \int_0^{2\pi} e^{4\cos t} e^{4i\sin t} dt$$

et le calcul se révèlerait difficile.

(ii) En considèrant $f(\xi) = \xi^3 + 2\,\xi^2 + 2$, $z = 2i$, on trouve immédiatement, par la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - 2i}\, dz = 2\pi i\, f(2i) = 16\pi - 12\pi i.$$

Sans utiliser la formule intégrale de Cauchy on pourrait prendre

$$\gamma(t) = 2i + \frac{1}{4}\, e^{i\,t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

On retrouverait

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{z^3 + 2\,z^2 + 2}{z - 2i}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\left(2i + \frac{1}{4}\, e^{i\,t}\right)^3 + 2\left(2i + \frac{1}{4}\, e^{i\,t}\right)^2 + 2}{\frac{1}{4}\, e^{i\,t}}\, \frac{i}{4}\, e^{i\,t} dt \\ &= 16\pi - 12\pi i. \end{aligned}$$

(iii) Soient $f(\xi) = \sin\left(2\,\xi^2 + 3\,\xi + 1\right)$ et $z = \pi$. Alors, par la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(2\,z^2 + 3\,z + 1\right)}{z - \pi}\, dz = 2\pi i\, f(\pi) = 2\pi i \sin\left(2\pi^2 + 3\pi + 1\right).$$

Exercice 10.7 *(i)* Soient $f(\xi) = 3\,\xi^2 + 2\,\xi + \sin(\xi + 1)$, $z = 2$ et $n = 1$. On trouve que $f'(\xi) = 6\,\xi + 2 + \cos(\xi + 1)$. La formule intégrale de Cauchy donne donc

$$\int_\gamma \frac{3\,\xi^2 + 2\,\xi + \sin(\xi + 1)}{(\xi - 2)^2}\, d\xi = 2\pi i\, f'(2) = 2\pi i\,(14 + \cos 3).$$

(ii) On va considérer dans ce cas la fonction $f(\xi) = \dfrac{e^{\xi}}{\xi + 2}$ qui est holomorphe dans le domaine donné et $0 \in \operatorname{int} \gamma$. On trouve ainsi, par la formule intégrale de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)}\, dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\, \frac{1}{2} = \pi i.$$

Exercice 10.8 *(i)* Soit $f(\xi) = \dfrac{e^{\xi^2}}{\xi^2 + 4}$. Cette fonction est holomorphe dans $\overline{\operatorname{int} \gamma}$ alors que $1 \in \operatorname{int} \gamma$. La formule intégrale de Cauchy donne donc

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2 (z^2+4)}\, dz = 2\pi i\, f'(1).$$

On trouve

$$f'(\xi) = \frac{2\,\xi e^{\xi^2}\left(\xi^2 + 4\right) - 2\,\xi\, e^{\xi^2}}{\left(\xi^2+4\right)^2}$$

et ainsi $f'(1) = \dfrac{8e}{25}$. On a par conséquent

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2 (z^2+4)}\, dz = \frac{16\,\pi\, e}{25}\, i.$$

(ii) On considère dans ce cas

$$f(\xi) = \frac{e^{\xi^2}}{(\xi-1)^2(\xi+2i)}$$

qui est holomorphe dans $\overline{\operatorname{int} \gamma}$ alors que $2i \in \operatorname{int} \gamma$. Par la formule intégrale de Cauchy, on obtient

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2 (z^2+4)}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-2i)}\, dz = 2\pi i\, f(2i) = \frac{-\pi\, e^{-4}}{2\,(3+4i)}.$$

(iii) Dans ce dernier cas il est facile de voir que l'intégrande est holomorphe dans $\overline{\operatorname{int} \gamma}$, et donc, par le théorème de Cauchy, on trouve

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2 (z^2+4)}\, dz = 0.$$

Exercice 10.9 Tout d'abord on observe que $f(z) = e^{-z^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, car c'est une composition de fonctions holomorphes. Comme γ est une courbe fermée et f est holomorphe alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

On paramètre les γ_j (cf. dessin indiqué dans l'énoncé) par

$$\gamma_1 = \{\gamma_1(t) = t,\ t : -a \to a\} \qquad \gamma_2 = \{\gamma_2(t) = a + i\,t,\ t : 0 \to b\}$$
$$\gamma_3 = \{\gamma_3(t) = t + i\,b,\ t : a \to -a\} \qquad \gamma_4 = \{\gamma_4(t) = -a + i\,t,\ t : b \to 0\}.$$

On obtient par conséquent

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad \lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = i\int_0^b e^{-(a+i\,t)^2}dt = i\,e^{-a^2}\int_0^b e^{-2\,a\,i\,t+t^2}dt$$

ce qui implique (comme $\left|e^{-2\,a\,i\,t+t^2}\right| = e^{t^2}$)

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Par ailleurs

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-a}^{a} e^{-(t+i\,b)^2}dt = -\int_{-a}^{a} e^{-\left(t^2+2\,i\,b\,t-b^2\right)}\,dt$$
$$= -e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\left(\cos(2\,b\,t) - i\sin(2\,b\,t)\right)dt$$

et on a donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2\,b\,t)\,dt + i\,e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2\,b\,t)\,dt.$$

Enfin on trouve

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -\int_0^b e^{-(-a+i\,t)^2}i\,dt = -e^{-a^2}\int_0^b e^{2\,a\,i\,t+t^2}i\,dt$$

ce qui implique (comme $\left|e^{2\,a\,i\,t+t^2}\right| = e^{t^2}$)

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0.$$

En résumé comme $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ et, en laissant $a \to \infty$, on obtient

$$e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2\,b\,x)\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(2\,b\,x)\,dx = 0.$$

Exercice 10.10 Soient $f = u + i\,v$ et $F = U + i\,V$. Par hypothèse

$$F'(z) = U_x + i\,V_x = V_y - i\,U_y = u + i\,v.$$

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(t) = \alpha(t) + i\,\beta(t)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b (u + i\,v)\cdot(\alpha' + i\,\beta')\,dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t))\,\alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t))\,\beta'(t)]\,dt \\ &\quad + i\int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t))\,\beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t))\,\alpha'(t)]\,dt\end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [U_x\,\alpha' + U_y\,\beta']\,dt + i\int_a^b [V_y\,\beta' + V_x\,\alpha']\,dt.$$

En observant que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[U(\alpha(t), \beta(t))] &= U_x(\alpha(t), \beta(t))\,\alpha'(t) + U_y(\alpha(t), \beta(t))\,\beta'(t) \\ \frac{d}{dt}[V(\alpha(t), \beta(t))] &= V_x(\alpha(t), \beta(t))\,\alpha'(t) + V_y(\alpha(t), \beta(t))\,\beta'(t)\end{aligned}$$

on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$\begin{aligned}&\int_\gamma f(z)\,dz \\ &= \int_a^b \left\{\frac{d}{dt}[U(\alpha(t), \beta(t))] + i\,\frac{d}{dt}[V(\alpha(t), \beta(t))]\right\} dt \\ &= U(\alpha(b), \beta(b)) + i\,V(\alpha(b), \beta(b)) - [U(\alpha(a), \beta(a)) + i\,V(\alpha(a), \beta(a))]\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Si γ est une courbe fermée et donc $\gamma(b) = \gamma(a)$, on trouve bien

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Exercice 10.11 *(i)* A l'aide de l'exercice 10.10 et en considérant $\gamma(t) = 2 + e^{i\,t}$, avec $t \in (0, 2\pi)$, on trouve

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\,t}}{2 + e^{i\,t}}\,dt = \log(\gamma(2\pi)) - \log(\gamma(0)) = 0.$$

(On sait que $\log z$ est holomorphe dans $\operatorname{Re} z > 0$ et que $(\log z)' = 1/z$).

(ii) On remarque que la fonction $F(z) = \log z$ n'est pas holomorphe à l'intérieur du deuxième disque donné, donc le résultat établi dans l'exercice précédent ne peut s'appliquer. Par conséquent on choisit une paramétrisation, par exemple $\gamma(t) = e^{i\,t}$, avec $t \in (0, 2\pi)$, et on calcule l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\,t}\right)\left(i\, e^{i\,t}\right) dt = 2\pi i \neq 0.$$

Exercice 10.12 * *Etape 1.* On va montrer le théorème quand γ est une courbe régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(t) = \alpha(t) + i\,\beta(t)$ (si γ est seulement régulière par morceaux on procède de manière similaire). On écrit $f = u + i\,v$ et on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b (u + i\,v) \cdot (\alpha' + i\,\beta')\, dt \\ &= \int_a^b \left[u(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t)\right] dt \\ &\quad + i \int_a^b \left[u(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t)\right] dt.\end{aligned}$$

On pose ensuite

$$F(x, y) = (u(x, y), -v(x, y)) \quad \text{et} \quad G(x, y) = (v(x, y), u(x, y)).$$

Noter que

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot dl &= \int_a^b \left[u(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t)\right] dt \\ \int_\gamma G \cdot dl &= \int_a^b \left[v(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) + u(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t)\right] dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F \cdot dl + i \int_\gamma G \cdot dl.$$

Etape 2. On rappelle que le théorème de Green assure que si $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ $C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2\right)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement, alors

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

On pose $\Omega = \operatorname{int} \gamma$ et on applique le théorème de Green une première fois à $F = (F_1, F_2) = (u, -v)$ et une deuxième fois à $G = (G_1, G_2) = (v, u)$. Noter que comme f est holomorphe, u et v possèdent des dérivées partielles, du premier ordre, continues. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$), on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b [(u,-v)\cdot(\alpha',\beta') + i\,(v,u)\cdot(\alpha',\beta')]\,dt \\ &= \iint_{\operatorname{int}\gamma} (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_{\operatorname{int}\gamma} (u_x - v_y)\,dx\,dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 10.13 * La démonstration est presque la même que celle de l'exercice 10.12. On va par ailleurs supposer que toutes les courbes $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ sont régulières (si γ_j sont seulement régulières par morceaux on procède de manière similaire).

Etape 1. Comme dans l'étape 1 et avec les mêmes notations que dans l'exercice 10.12, on a pour $j = 0, 1, \cdots, m$,

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_j} F\cdot dl + i\int_{\gamma_j} G\cdot dl$$

où

$$F(x,y) = (u(x,y), -v(x,y)) \quad \text{et} \quad G(x,y) = (v(x,y), u(x,y)).$$

Etape 2. On applique alors le théorème de Green, noter que $F, G \in C^1\left(\overline{O};\mathbb{R}^2\right)$. On a donc que

$$\begin{aligned}\int_{\partial O} f(z)\,dz &= \int_{\partial O} F\cdot dl + i\int_{\partial O} G\cdot dl \\ &= \iint_O (\operatorname{rot} F)\,dx\,dy + i\iint_O (\operatorname{rot} G)\,dx\,dy \\ &= \iint_O (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_O (u_x - v_y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$), on en déduit que

$$0 = \int_{\partial O} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 10.14 * Ceci suit immédiatement de la formule intégrale de Cauchy avec $\gamma = \partial B_r(z_0)$ (paramétrée par $\gamma(t) = z_0 + r\,e^{i\,t}$). En effet

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + r\,e^{i\,t}\right)}{r\,e^{i\,t}}\,i\,r\,e^{i\,t}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\,e^{i\,t}\right)dt\end{aligned}$$

comme affirmé.

Chapitre 11

Séries de Laurent

11.1 Définitions et résultats théoriques

Théorème 11.1 *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $z_0 \in D$. Soient $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $N \in \mathbb{N}$ et*

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n (z - z_0)^n \\ &= c_N (z - z_0)^N + \cdots + c_1 (z - z_0) + c_0 + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \cdots + \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N}, \end{aligned}$$

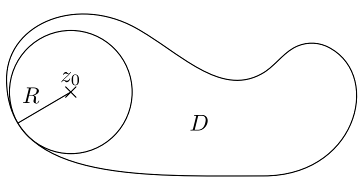
où

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi}$$

(en particulier $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)\, d\xi$) et où γ est une courbe simple fermée, régulière par morceaux, contenue dans D ($z_0 \in \operatorname{int} \gamma$). Soit enfin $R > 0$ tel que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D.$$

Alors, $\forall\, z : 0 < |z - z_0| < R$, $\lim_{N \to \infty} L_N f(z) = Lf(z)$ existe et est finie et



de plus

$$\boxed{Lf(z) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}\,.}$$

Conformément aux notations du théorème, nous introduisons maintenant les définitions suivantes.

Définition 11.2 (i) *L'expression $Lf(z)$ est appelée* ***série de Laurent*** *de f au voisinage de z_0 .*

(ii) *On appelle* ***partie régulière*** *de la série de Laurent l'expression*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

et ***partie singulière*** *(ou principale) de la série de Laurent la quantité*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}\,.$$

(iii) *On dit que z_0 est un* ***point régulier*** *pour f si la partie singulière de la série de Laurent est zéro.*

(iv) *On dit que z_0 est un* ***pôle d'ordre*** **m** *pour f si $c_{-m} \neq 0$ et $c_{-k} = 0$, $\forall\, k \geq m + 1$. On a alors*

$$\begin{aligned} Lf(z) &= \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n\,. \end{aligned}$$

(v) *On dit que z_0 est une* ***singularité essentielle isolée*** *pour f si $c_{-k} \neq 0$, pour une infinité de k. Dans ce cas*

$$Lf(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n\,.$$

(vi) *On appelle* ***résidu de f en*** *z_0 et on note $\mathrm{Rés}_{z_0}(f)$, la valeur c_{-1} .*

(vii) *Le* ***rayon de convergence*** *de la série est le plus grand $R > 0$ tel que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$.*

Remarque Si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors le développement de Laurent coïncide avec la ***série de Taylor***, c'est-à-dire que $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ et

$$\boxed{Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n .}$$

Proposition 11.3 *Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0. Soient*
- z_0 un zéro d'ordre k de p, i.e. (si $p(z_0) \neq 0$ on pose $k = 0$)

$$p(z_0) = \cdots = p^{(k-1)}(z_0) = 0,\ \text{mais } p^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

- z_0 un zéro d'ordre l de q, i.e. (si $q(z_0) \neq 0$ on pose $l = 0$)

$$q(z_0) = \cdots = q^{(l-1)}(z_0) = 0,\ \text{mais } q^{(l)}(z_0) \neq 0.$$

(i) *Si $l > k$ alors z_0 est un pôle d'ordre $l-k$ de f.*

(ii) *Si $l \leq k$ alors z_0 est un point régulier de f (où on a posé $f(z_0) = \lim_{z \to z_0}[p(z)/q(z)]$, cf. exemple 11.12).*

Proposition 11.4 *Si z_0 est un pôle d'ordre m, alors*

$$\boxed{\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right\}.}$$

Proposition 11.5 *Soit $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ et telles que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ mais $q'(z_0) \neq 0$. Alors*

$$\boxed{\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} .}$$

(Pour plus de détails, cf. [1] 184-186, [3] 62, [5] 155-159, [7] chapitre 10, [11] 842-844).

11.2 Exemples

Dans les exemples qui suivent on trouvera la série de Laurent pour une fonction f donnée. On spécifiera de plus la nature des singularités, ainsi que le rayon de convergence de la série et le résidu.

Exemple 11.6 $f(z) = 1/z$ *et* $z_0 = 0$.

Discussion On a immédiatement que

$$Lf(z) = \frac{1}{z} + 0$$

i.e. les parties régulière et singulière sont respectivement 0 et $1/z$. De plus $\text{Rés}_0(f) = 1$ et $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1. La série de Laurent converge $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$.

Exemple 11.7 $f(z) = 1/z$ *et* $z_0 = 1$.

Discussion Avant de répondre à la question rappelons la formule de la *série géométrique* à savoir que si $q \in \mathbb{C}$ et $|q| < 1$ alors

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Dans notre cas on a donc

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

c'est-à-dire que la série de Laurent de f coïncide avec la série de Taylor et $z_0 = 1$ est un point régulier. La convergence a lieu dans $|z-1| < 1$, i.e. $R = 1$, et le résidu est zéro.

Exemple 11.8 $f(z) = 1/z^2$ *et* $z_0 = 0$.

Discussion Il est facile de voir que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2 et que

$$Lf(z) = \frac{1}{z^2}\,.$$

Le résidu est zéro et la convergence a lieu $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$.

Exemple 11.9 $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$ *et* $z_0 = 0$.

Discussion On remarque que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3, $\text{Rés}_0(f) = 2$ et que la convergence a lieu $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$.

Exemple 11.10 $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ *et* $z_0 = 0$.

Discussion On écrit (à l'aide de la série géométrique)

$$\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = Lf(z)$$

pour tout z tel que $0 < |z| < 1$ (i.e. $R = 1$). De plus $\text{Rés}_0(f) = 1$ et $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1.

Exemple 11.11 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *et* $z_0 = 0$.

Discussion En posant $y = \frac{1}{z}$ on a

$$e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$$

et donc

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = Lf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}\,.$$

On voit que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée de f, $\text{Rés}_0(f) = 1$ et que la convergence a lieu $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$.

Exemple 11.12 *Une fonction f peut sembler avoir une singularité en z_0 qui n'en est pas une si on redéfinit proprement la fonction en z_0. On dit alors que z_0 est une* ***singularité éliminable****. Par exemple $z_0 = 0$ est une singularité éliminable pour $f(z) = \sin z/z$ car il suffit de poser*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & si\ z \neq 0 \\ 1 = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} & si\ z = 0. \end{cases}$$

Conclusion : $z_0 = 0$ est un point régulier et la fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Exemple 11.13 *Montrer que toutes les singularités d'une fonction ne sont pas nécéssairement des pôles ou des singularités essentielles isolées.*

Discussion Une telle fonction est, par exemple, $f(z) = \text{tg}\,(1/z)$, en $z_0 = 0$. On a en effet

$$\text{tg}\, y = \infty \quad \Leftrightarrow \quad y = y_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$\text{tg}\left(\frac{1}{z}\right) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{y_k} = \frac{2}{(2k+1)\,\pi}\ (\to z_0 = 0,\ \text{quand } k \to \infty)\,.$$

Donc f n'admet pas de série de Laurent en $z_0 = 0$ car alors on devrait avoir $R = 0$. Conclusion. $z_0 = 0$ ***n'est pas une singularité isolée***.

11.3 Exercices

Dans les exercices 11.1 à 11.13, il s'agira de trouver la série de Laurent de f (ou en tous cas quelques-uns de ses termes) en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

Exercice 11.1

(i)	$\sin z$	*en* $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$	(ii)	$\dfrac{\sin z}{z^3}$	*en* $z_0 = 0$
(iii)	$\dfrac{z}{1+z^2}$	*en* $z_0 = 1$	(iv)	$\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$	*en* $z_0 = 0$
(v)	$\dfrac{z^2+2\,z+1}{z+1}$	*en* $z_0 = -1$	(vi)	$\dfrac{1}{(1-z)^3}$	*en* $z_0 = 1$
(vii)	$\dfrac{z^2+z+1}{z^2-1}$	*en* $z_0 = 1$	(viii)	$\dfrac{1}{\sin z}$	*en* $z_0 = 0$

Exercice 11.2 $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$ *en* $z_1 = 0,\ z_2 = -2$. *(Ecrire au moins les 4 premiers termes).*

Exercice 11.3

(i)	$\dfrac{\cos z}{(z-\pi)}$	*en* $z_0 = \pi$	(ii)	$z^2 e^{1/z}$	*en* $z_0 = 0$
(iii)	$\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$	*en* $z_0 = 1.$			

Exercice 11.4 $f(z) = z^2\ e^{(z-1)^{-2}}$ *en* $z_0 = 1.$

Exercice 11.5 $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ *en* $z_0 = 0.$

Exercice 11.6 $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ *en* $z_0 = 1.$

Exercice 11.7 $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{(z-1)^2}$ *en* $z_0 = 1.$

Exercice 11.8 $f(z) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,z\right)}$ *en* $z_0 = 1.$

Exercice 11.9 $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{\sin(z^2)}$ *en* $z_0 = 0.$

Exercice 11.10 $f(z) = e^{(1/z)}\sin(1/z)$ *en* $z_0 = 0.$

Exercice 11.11 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(e^z-1)}$ *en* $z_0 = 0.$

Exercice 11.12 $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ *en* $z_0 = \pi.$

Suggestion. *Observer que* $\sin z = -\sin(z-\pi)\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}.$

Exercice 11.13 $f(z) = \dfrac{\sin z}{\sin(z^2)}$ *en* $z_0 = 0$ *(il suffira de calculer les deux premiers termes de la série de Laurent).*

Exercice 11.14 *Soit la fonction* $f(z) = \log(1+z)$.

(i) *Trouver le plus grand domaine de* $\mathbb{C}$ *où la fonction* f *est holomorphe.*

(ii) *Trouver son développement de Taylor en* $z_0 = 0$ *et* $z_0 = i$. *Donner dans chaque cas son rayon de convergence.*

Exercice 11.15 *Soit* $f(z) = \dfrac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^2}$.

(i) *Trouver les singularités de* f *et déterminer la nature de ces singularités.*

(ii) *Calculer le résidu en ces points.*

(iii) *Calculer le rayon de convergence de la série de Laurent en ces points.*

Exercice 11.16 *Soit* $f(z) = \log\left(1+z^2\right)$.

(i) *Trouver le plus grand domaine où la fonction est holomorphe (justifier votre réponse).*

(ii) *Trouver son développement de Taylor en* $z_0 = 0$ *(on précisera le rayon de convergence ainsi que les termes en* z^n *pour* $n = 0, 1, 2, 3$*).*

Exercice 11.17 (Règle de l'Hôpital) ** Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes au voisinage de* z_0 *telles que* $f(z_0) = g(z_0) = 0$ *mais* $g'(z_0) \neq 0$. *Montrer que*

$$\boxed{\lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.}$$

Exercice 11.18 (Théorème de Liouville) *** (i) *Montrer que si* f *est holomorphe dans* $\mathbb{C}$ *et* f *est bornée, alors* f *est constante.*

(ii) *Donner un exemple d'une fonction analytique réelle de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

qui soit bornée mais pas constante.

Suggestion. *1) Appliquer la remarque (suivant la définition 11.2) pour déduire que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

2) Ecrire la formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n)}(0)$ *sur un cercle de rayon* R *centré en* 0.

3) A l'aide de la question précédente montrer que

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left|f\left(Re^{i\,t}\right)\right| dt.$$

4) Conclure que $f^{(n)}(0) = 0$, *pour tout* $n \geq 1$.

Exercice 11.19 ** Montrer la proposition 11.3.*

Exercice 11.20 ** Montrer la proposition 11.4.*

Exercice 11.21 ** Montrer la proposition 11.5.*

11.4 Corrigés

Exercice 11.1 *(i)* Considérons $f(z) = \sin z$, en $z_0 = \pi/4$. On a que

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient donc

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n$$

avec $\alpha_{4n} = \alpha_{4n+1} = -\alpha_{4n+2} = -\alpha_{4n+3} = 1$. On trouve donc que $z_0 = \pi/4$ est un point régulier et que $\text{Rés}_{\pi/4}(f) = 0$. De plus, la série converge vers $f(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(ii) Soit $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$, en $z_0 = 0$. On sait que

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^3} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = z^{-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2(n-1)} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} z^{2n}.\end{aligned}$$

Donc $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2, $\text{Rés}_0(f) = 0$ et la série converge $\forall\, z \neq 0$.

(iii) Soit $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, en $z_0 = 1$. Comme la fonction $h(z) = z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et que la fonction $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ est holomorphe sauf en $z_\pm = \pm i$ on déduit immédiatement que $z_0 = 1$ est un point régulier et donc la

série de Laurent est en fait une série de Taylor, par conséquent $\text{Rés}_0(f) = 0$. Par ailleurs par le théorème 11.1 on a que la série converge pour autant que

$$|z-1| < \min\{|i-1|, |i+1|\} = \sqrt{2}.$$

On pourrait donc trouver le développement de Taylor en calculant $f^{(n)}(1)$; il s'agit là d'un calcul fastidieux et nous proposons un calcul plus rapide qui utilise la série géométrique appliquée à g. On commence d'abord par écrire

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{1+z^2} = \frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z}\right) \\ &= \frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{(i-1)-(z-1)} + \frac{1}{(i+1)+(z-1)}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$g(z) = \frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}} + \frac{1}{i+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{i+1}}\right].$$

On pose alors une fois $q = (z-1)/(i-1)$ et une autre fois $q = -(z-1)/(i+1)$ dans la formule de la série géométrique et on obtient

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{-1}{2i}\left[\frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(i-1)^n}(z-1)^n + \frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(i+1)^n}(z-1)^n\right] \\ &= \frac{-1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(i-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(i+1)^{n+1}}\right)(z-1)^n \end{aligned}$$

et donc

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

Posons pour simplifier

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] = (-1)^n\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{4}\right]}{2^{\frac{n+1}{2}}};$$

la deuxième expression étant obtenue en se rappelant que

$$1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On revient maintenant à l'étude de f. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1+1)\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-1)^n \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}c_{m-1}(z-1)^m + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}c_n(z-1)^n \end{aligned}$$

et finalement

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{n-1} + c_n)(z-1)^n .$$

(iv) Soit $f(z) = \sin(1/z)$, en $z_0 = 0$. On développe $\sin y$ en série de Taylor et on pose $y = 1/z$ pour obtenir

$$\sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} .$$

On trouve alors que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée et le résidu $\text{Rés}_0(f) = 1$. De plus la convergence a lieu $\forall\, z \neq 0$.

(v) On observe que

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z+1} = \frac{(z+1)^2}{z+1} = z+1$$

et donc, contrairement aux apparences, $z_0 = -1$ est un point régulier (autrement dit c'est une singularité éliminable) et par conséquent son résidu $\text{Rés}_{-1}(f) = 0$. Son développement de Taylor en $z_0 = -1$ est donc trivialement $z+1$. De plus la convergence a lieu $\forall\, z$.

(vi) On a tout de suite que

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{-1}{(z-1)^3}$$

est la série de Laurent en $z_0 = 1$ et donc 1 est un pôle d'ordre 3, $\text{Rés}_1(f) = 0$. La convergence a lieu si $|z-1| > 0$ (i.e. $\forall\, z \neq 1$).

(vii) Considérons

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1} = 1 - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{3}{2(z-1)}$$

en $z_0 = 1$. La seule autre singularité de f est en $z = -1$, et par conséquent la convergence a lieu pour autant que $0 < |z-1| < 2$. Pour trouver la série de Laurent on utilise à nouveau la série géométrique (où on a posé $q = -(z-1)/2$ et donc $|q| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2$) pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n . \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{2}\,\frac{1}{z-1} + 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n \\ &= \frac{3}{2}\,\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n . \end{aligned}$$

On a alors que $z_0 = 1$, est un pôle d'ordre 1 et que $\text{Rés}_1(f) = \dfrac{3}{2}$.

(viii) Soit $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$, en $z_0 = 0$. On écrit

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{z}{\sin z}.$$

On remarque que $g(z) = z/\sin z$ est holomorphe en $z_0 = 0$ (qui est donc une singularité éliminable pour g). On peut donc calculer sa série de Taylor dont voici les premiers termes

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = \frac{1}{3}, \quad g'''(0) = 0, \quad g^{(iv)}(0) = \frac{7}{15}.$$

En revenant à f on a

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7\,z^3}{360} + \cdots$$

Donc $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 et $\text{Rés}_0(f) = 1$. La convergence a lieu si $0 < |z| < \pi$ (car les autres singularités de f sont en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 11.2 *Cas 1 :* $z_1 = 0$. On écrit, en développant en série de Taylor la fonction $(1 + z/2)^{-3}$,

$$\frac{1}{z\,(z+2)^3} = \frac{1}{8\,z\,(1+z/2)^3}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z\,(z+2)^3} \\ &= \frac{1}{8\,z}\left\{1 + (-3)\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{8\,z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}\,z - \frac{5}{32}\,z^2 + \cdots \end{aligned}$$

Donc $z_1 = 0$ est un pôle d'ordre 1, $\text{Rés}_0(f) = 1/8$ et la série converge pour $0 < |z| < 2$.

Cas 2 : $z_2 = -2$. Cette fois-ci on pose $z + 2 = u$ (et on utilise la formule de la série géométrique) de façon que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z\,(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)\,u^3} &= \frac{1}{-2\,u^3\,(1-u/2)} \\ &= -\frac{1}{2\,u^3}\left\{1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \cdots\right\}\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{z\,(z+2)^3} &= -\frac{1}{2\,u^3} - \frac{1}{4\,u^2} - \frac{1}{8\,u} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{2^{n+4}} \\ &= -\frac{1}{2\,(z+2)^3} - \frac{1}{4\,(z+2)^2} - \frac{1}{8\,(z+2)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2)^n}{2^{n+4}}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, $z_2 = -2$ est un pôle d'ordre 3, $\text{Rés}_{-2}(f) = -1/8$ et la série converge pour $0 < |z+2| < 2$.

Exercice 11.3 *(i)* Soit $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \pi}$, $z_0 = \pi$. Observer tout d'abord que $\cos z = -\cos(z - \pi)$. Par ailleurs, le développement de $\cos z$ en série de Taylor donne

$$\cos z = -\cos(z-\pi) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi)^{2n}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi)} &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi)^{2n-1} \\ &= \frac{-1}{(z-\pi)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!}(z-\pi)^{2m+1}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent $z_0 = \pi$ est un pôle d'ordre 1, le rayon de convergence est infini (c'est-à-dire qu'on a convergence $\forall\, z \neq \pi$) et $\text{Rés}_\pi(f) = -1$.

(ii) Soit $z^2 e^{1/z}$, $z_0 = 0$. On trouve immédiatement que

$$\begin{aligned}z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots\right) &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!\,z} + \cdots \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/(n+2)!}{z^n}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée, $\text{Rés}_0(f) = 1/3!$ et on a convergence $\forall\, z \neq 0$.

(iii) Soit $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$, $z_0 = 1$. On pose

$$g(z) = \frac{z^2}{(z+3)}$$

et on observe que g est une fonction holomorphe au voisinage de $z_0 = 1$. Comme

$$g(1) = 1/4, \quad g'(1) = 7/16, \quad g''(1) = 9/32 \quad \text{et} \quad g'''(1) = -27/128$$

on trouve donc que les premiers termes de la série de Taylor de g sont

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{7}{16}(z-1) + \frac{9}{64}(z-1)^2 - \frac{9}{256}(z-1)^3 + \cdots$$

et par conséquent

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2} = \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{7}{16(z-1)} + \frac{9}{64} - \frac{9}{256}(z-1) + \cdots$$

On a donc que $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 2, $\text{Rés}_1(f) = 7/16$ et la convergence a lieu pour $0 < |z-1| < 4$.

Exercice 11.4 On utilise le développement de Taylor de e^y et on remplace y par $(z-1)^{-2}$, on a ainsi

$$f(z) = z^2 e^{(z-1)^{-2}} = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} = ((z-1)+1)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!(z-1)^{2n-2}} + \frac{2}{n!(z-1)^{2n-1}} + \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} \right).$$

On peut alors écrire

$$f(z) = \left[(z-1)^2 + 1 + \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^4} + \cdots \right]$$
$$+ \left[2(z-1) + \frac{2}{(z-1)} + \frac{2}{2!(z-1)^3} + \cdots \right]$$
$$+ \left[1 + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)^4} + \cdots \right]$$

et donc

$$f(z) = (z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \frac{2}{(z-1)} + \frac{3}{2(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots.$$

On obtient finalement

$$f(z) = (z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \frac{2}{n!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \right).$$

On peut en déduire que 1 est une singularité essentielle isolée, $\text{Rés}_1(f) = 2$ et la convergence a lieu pour $0 < |z-1|$ (i.e. $\forall\, z \neq 1$).

Exercice 11.5 Du développement en série de Taylor de la fonction $\cos y$, on peut écrire, après avoir posé $y = 1/z$,

$$z \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-1}} .$$

On s'aperçoit que 0 est une singularité essentielle isolée, $\text{Rés}_0(f) = -1/2$ et que la convergence a lieu $\forall\, z \neq 0$.

Exercice 11.6 On trouve que (en utilisant le développement de Taylor de e^y avec $y = z - 1$)

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{z-1+1}}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)} + e \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^m}{(m+2)!}\end{aligned}$$

donc $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 2, $\text{Rés}_1(f) = e$ et la convergence a lieu pour tout $z \neq 1$.

Exercice 11.7 La fonction $g(z) = \sqrt{z} = e^{(1/2)\log z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, où

$$\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\} .$$

Par ailleurs

$$g'(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2}, \quad g''(z) = -\frac{1}{4} z^{-3/2},$$
$$g'''(z) = \frac{3}{8} z^{-5/2}, \quad g^{(iv)}(z) = -\frac{15}{16} z^{-7/2}, \cdots$$

ou encore pour $n = 2, 3, 4, \cdots$

$$g^{(n)}(z) = c_n\, z^{-\frac{2n-1}{2}}, \quad \text{où } c_n = (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n}$$

et donc, au voisinage de 1 on a

$$g(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} (z-1)^n .$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{z}}{(z-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} (z-1)^{n-2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{k+2}}{(k+2)!} (z-1)^k\end{aligned}$$

donc $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 2, son résidu est $1/2$ et la série de Laurent converge dans $0 < |z-1| < 1$.

Exercice 11.8 On écrit

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{(z-1)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{(z-1)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)}.$$

En utilisant la règle de l'Hôpital on obtient

$$g(1) = \lim_{z \to 1} \left[\frac{(z-1)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right] = \left(\lim_{z \to 1} \left[\frac{(z-1)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right] \right)^2 = \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} \right)^2 = \frac{4}{\pi^2}. \tag{11.1}$$

Par conséquent $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 2 et de plus

$$\begin{aligned} \text{Rés}_1(f) &= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{2(z-1)\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right) + \pi (z-1)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{(z-1)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right] \lim_{z \to 1} \left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) + \pi (z-1) \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)} \right]. \end{aligned}$$

La première limite vaut $-2/\pi$ par (11.1) alors que la deuxième à l'aide de la règle de l'Hôpital donne 0, on trouve ainsi

$$\text{Rés}_1(f) = 0.$$

Par conséquent, la série de Laurent de f est

$$\frac{4}{\pi^2 (z-1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-1)^n.$$

On remarque aussi que les autres singularités de f se trouvent en $\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) = 0$, c'est à dire quand $z = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. La convergence a donc lieu quand $0 < |z-1| < 2$.

Exercice 11.9 On écrit

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{\sin(z^2)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

avec $p(z)$, $q(z)$ holomorphes en $z_0 = 0$. On a que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour f. En effet 0 est un zéro d'ordre 1 de p (car $p(0) = 0$ et $p'(0) = 1 \neq 0$) alors que 0 est un zéro d'ordre 2 de q (car $q(0) = q'(0) = 0$ mais $q''(0) = 2 \neq 0$).

On déduit donc que la fonction $g(z) = z\, f(z)$ est holomorphe en $z_0 = 0$, par conséquent grâce à la règle de l'Hôpital

$$g(0) = \lim_{z\to 0}[g(z)] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\log(1+z) + \frac{z}{1+z}}{2\,z\cos(z^2)}\right]$$

et donc

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\log(1+z)}{2\,z\cos(z^2)}\right] + \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{2(1+z)\cos(z^2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{\log(1+z)}{z}\right] + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

(la première limite étant obtenue par une nouvelle application de la règle de l'Hôpital). Le résidu de f en $z_0 = 0$ est alors 1 car

$$f(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,z^n = \frac{1}{z} + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!}\,z + \cdots$$

La convergence a lieu quand $0 < |z| < 1$ (car la singularité la plus proche de $\log(1+z)$ se trouve quand $1+z=0$ alors que le zéro le plus proche de $\sin\left(z^2\right)$ est en $\sqrt{\pi}$).

Exercice 11.10 Il est facile de voir que

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Donc $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée pour f, son résidu est 1 et son rayon de convergence infini.

Exercice 11.11 Tout d'abord on observe que (par la règle de l'Hôpital ou en écrivant le développement de Taylor de $\sin z$ et de $e^z - 1$)

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin z}{e^z - 1}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{e^z}\right] = 1.$$

Par conséquent on obtient

$$f(z) = \frac{\sin z}{z\,(e^z - 1)} = \frac{1}{z} + \cdots .$$

Donc $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1, le résidu est 1 et la série de Laurent converge pour autant que $0 < |z| < 2\pi$ ($e^z - 1 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z \neq 2n\pi i$).

Exercice 11.12 Comme $\sin z = -\sin(z-\pi)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sin z = -\sin(z-\pi) &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(z-\pi)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\,(z-\pi)^{2n+1} . \end{aligned}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z-\pi)^{2n-1} \\
&= \frac{-1}{(z-\pi)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z-\pi)^{2n-1}
\end{aligned}
$$

On déduit ainsi que $z_0 = \pi$ est un pôle d'ordre 1, le rayon de convergence est infini (c'est-à-dire qu'on a convergence $\forall\, z \neq \pi$) et $\text{Rés}_\pi(f) = -1$.

Exercice 11.13 On pose

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sin(z^2)} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

On voit immédiatement que $p(z)$ et $q(z)$ sont holomorphes en $z_0 = 0$. On a que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour $f(z)$. En effet 0 est un zéro d'ordre 1 de p (car $p(0) = 0$ et $p'(0) = 1 \neq 0$) alors que 0 est un zéro d'ordre 2 de q (car $q(0) = q'(0) = 0$ mais $q''(0) = 2 \neq 0$). Il suffit donc d'écrire

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{z \sin z}{\sin(z^2)} = \frac{1}{z} g(z)$$

où g est holomorphe en $z = 0$ (i.e. $g(z) = g(0) + g'(0)z + \cdots$) et ainsi

$$f(z) = \frac{g(0)}{z} + g'(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} z^{n+1} = \frac{g(0)}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} z^n$$

Il nous faut donc calculer $g(0)$. On utilise la règle de l'Hôpital et on obtient ainsi

$$g(0) = \lim_{z\to 0} \left[\frac{z \sin z}{\sin(z^2)}\right] = \lim_{z\to 0} \left[\frac{z^2}{\sin(z^2)}\right] \lim_{z\to 0} \left[\frac{\sin z}{z}\right] = 1$$

Un calcul un peu plus difficile, utilisant un développement limité (ce qui est équivalent mais plus rapide à appliquer que la règle de l'Hôpital plusieurs fois), donnerait $g'(0) = 0$. On a donc obtenu

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} z^n$$

et donc $\text{Rés}_0(f) = 1$. De plus

$$\sin\left(z^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad z = \begin{cases} \sqrt{k\pi} & \text{si } k \geq 0 \\ i\sqrt{|k|\,\pi} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

et ainsi la série de Laurent converge quand $0 < |z| < \sqrt{\pi}$.

Exercice 11.14 *(i)* La fonction $w \to \log w$ est holomorphe dans

$$\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 0,\ \ \operatorname{Re} w \leq 0\}.$$

Si $w = 1 + z$, on trouve donc que le domaine d'holomorphie de f est

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ \ \operatorname{Re} z \leq -1\}.$$

(ii) $f(z) = \log(1+z)$, alors

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}.$$

Plus généralement on a

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Alors, en $z_0 = 0$ et $z_0 = i$, on a respectivement

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!,\ \forall n \geq 1$$

$$f(i) = \log(1+i) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(i) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+i)^n},\ \forall n \geq 1.$$

Par conséquent, si $z_0 = 0$, on obtient

$$f(z) = \log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

et le rayon de convergence est $R = 1$ (i.e. la série converge vers la fonction pour $|z| < 1$). Si, par ailleurs, $z_0 = i$, on déduit

$$f(z) = \log(1+z) = \log(1+i) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-i)^n}{n(1+i)^n}$$

et le rayon de convergence est $R = \sqrt{2}$ (i.e. la convergence a lieu pour $|z-i| < \sqrt{2}$).

Exercice 11.15 *(i)* $z = \pm i$ sont clairement les seules singularités de f et ce sont des pôles d'ordre 1. En effet

$$f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{(z^2+1)} \cdot \frac{1}{(z^2+1)} = g(z) \cdot \frac{1}{(z^2+1)}$$

et $g(z)$ est holomorphe (les singularités $\pm i$ de g sont éliminables).

(ii) La règle de l'Hôpital nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\text{Rés}_i\,(f) &= \lim_{z\to i}\left[(z-i)\,\frac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)}\cdot\frac{1}{(z+i)\,(z-i)}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\,\lim_{z\to i}\left[\frac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)}\right]=\frac{1}{2i}\,\lim_{z\to i}\left[\frac{2\,z\cos\left(z^2+1\right)}{2\,z}\right]=\frac{1}{2i}\end{aligned}$$

$$\text{Rés}_{-i}\,(f)=\lim_{z\to -i}\left[\frac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)}\cdot\frac{1}{(z-i)}\right]=-\frac{1}{2i}\,\lim_{z\to -i}\left[\frac{\sin\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)}\right]=-\frac{1}{2i}\,.$$

(iii) Le rayon de convergence est dans les deux cas 2, i.e. on a convergence quand, respectivement, $0<|z-i|<2$ et $0<|z+i|<2$.

Exercice 11.16 *(i)* Tout d'abord on remarque que $z\to 1+z^2$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. La fonction $w\to\log w$ est holomorphe dans

$$\mathbb{C}\setminus\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}w=0,\;\operatorname{Re}w\le 0\}\,.$$

Si $w=1+z^2$, on trouve

$$w=\left(1+x^2-y^2\right)+2\,i\,x\,y$$

et

$$\begin{cases}\operatorname{Im}w=0\quad\Leftrightarrow\quad x\,y=0\quad\Leftrightarrow\quad x=0\text{ ou }y=0\\ \qquad\operatorname{Re}w\le 0\quad\Leftrightarrow\quad 1+x^2\le y^2.\end{cases}$$

Il est facile de voir que $y=0$ n'est pas admissible, alors que si $x=0$ on a $y^2\ge 1$. En résumant, le domaine d'holomorphie de f est

$$D=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=0,\;|\operatorname{Im}z|\ge 1\}\,.$$

(ii) On a que $f\,(0)=0$ et

$$f'\,(z)=\frac{2\,z}{1+z^2}\quad\Rightarrow\quad f'\,(0)=0$$

$$f''\,(z)=\frac{2-2\,z^2}{\left(1+z^2\right)^2}\quad\Rightarrow\quad f''\,(0)=2$$

$$f'''\,(z)=-4\,\frac{z}{\left(1+z^2\right)^2}-4\,z\,\frac{2-2\,z^2}{\left(1+z^2\right)^3}\quad\Rightarrow\quad f'''\,(0)=0$$

et par conséquent

$$f\,(z)=\log\left(1+z^2\right)=z^2+\cdots$$

Le rayon de convergence est 1, i.e. la série de Taylor converge vers la fonction si $|z|<1$.

Exercice 11.17 * Comme f est holomorphe au voisinage de z_0, on a, comme z_0 est un zéro de f,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= (z-z_0)\left[f'(z_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}\right] \\ &= (z-z_0)\, f'(z_0) + (z-z_0)\, F(z) \end{aligned}$$

où

$$F(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}.$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-z_0)\left[g'(z_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}\right] \\ &= (z-z_0)\, g'(z_0) + (z-z_0)\, G(z). \end{aligned}$$

où

$$G(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}.$$

Donc, comme $F(z_0) = G(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f'(z_0)+F(z)}{g'(z_0)+G(z)}\right] = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Exercice 11.18 * *(i)* Comme f est holomorphe en tout point du plan complexe, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Par la formule intégrale de Cauchy on a

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Si $\gamma(t) = R\,e^{i\,t}$on a

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(R\,e^{i\,t}\right)}{\left(R\,e^{i\,t}\right)^{n+1}}\, i\,R\,e^{i\,t}dt = \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} e^{-int} f\left(R\,e^{i\,t}\right)dt$$

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} \left|e^{-int}\right|\left|f\left(R\,e^{i\,t}\right)\right|dt = \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} \left|f(R\,e^{i\,t})\right|dt.$$

Comme f est bornée, disons $|f(z)| \leq M$, on a

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{Mn!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{R^n}$$

et si $R \to \infty$ on déduit

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall\, n \geq 1.$$

On a bien obtenu que f est constante car

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0), \quad \forall\, z.$$

(ii) La fonction

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ mais pas constante.

Exercice 11.19 * Comme z_0 est un zéro d'ordre k de p et l de q, on peut écrire

$$p(z) = (z - z_0)^k P(z) \quad \text{et} \quad q(z) = (z - z_0)^l Q(z)$$

où P et Q sont holomorphes et $P(z_0), Q(z_0) \neq 0$. On a donc que

$$f(z) = (z - z_0)^{k-l} F(z)$$

où $F(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe en z_0 et $F(z_0) \neq 0$.

(i) Si $l > k$, alors

$$f(z)(z - z_0)^{l-k} = F(z)$$

qui est holomorphe et ne s'annule pas en z_0, par conséquent, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f.

(ii) Si $k \geq l$, alors $z \to (z - z_0)^{k-l}$ et F sont holomorphes en z_0 et donc z_0 est un point régulier de f.

Exercice 11.20 * Par définition d'un pôle d'ordre m, on a que

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{avec} \quad c_{-m} \neq 0$$

et par conséquent la fonction F définie par

$$F(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k$$

est holomorphe. On a donc

$$F(z) = c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0, k\neq m-1}^{+\infty} c_{k-m}(z - z_0)^k$$

et ainsi (comme, par définition $\text{Rés}_{z_0}(f) = c_{-1}$)

$$\left.\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[F(z)]\right|_{z=z_0} = (m-1)!\, c_{-1} = (m-1)!\,\text{Rés}_{z_0}(f)$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 11.21 * Par la proposition 11.3, z_0 est un pôle d'ordre 1 de f. Par la proposition 11.4, le résidu est donné par

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}[(z - z_0) f(z)] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z-z_0}}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}}\right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Chapitre 12

Théorème des résidus et applications

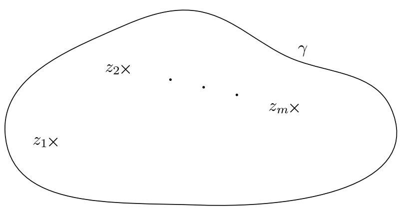
12.1 Partie I : Théorème des résidus

12.1.1 Définitions et résultats théoriques

Théorème 12.1 (Théorème des résidus) *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, γ une courbe simple fermée et régulière par morceaux contenue dans D. Soient $z_1, \cdots, z_m \in \operatorname{int}\gamma$ ($z_j \neq z_k$, si $j \neq k$) et $f : D\backslash\{z_1, \cdots, z_m\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rés}_{z_k}(f)}$$

où $\operatorname{Rés}_{z_k}(f)$ est le résidu de la fonction f au point z_k.



(Pour plus de détails, cf. [1] 150-151, [3] 64-65, [5] 201-202, [7] chapitre 11, [11] 865-866).

12.1.2 Exemples

Exemple 12.2 *Soit D comme dans le théorème précédent. Si f est holomorphe dans D, par le théorème de Cauchy, on peut en déduire que*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Exemple 12.3 *Soient D et γ comme dans le théorème précédent et $f(z) = 1/z$. Calculer $\int_\gamma f(z)\,dz$.*

Discussion *Cas 1 :* $0 \in \operatorname{int}\gamma$. On a

$$\text{Rés}_0(f) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$

Cas 2 : $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy implique

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Cas 3 : $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exemple 12.4 *Soient D et γ comme dans le théorème précédent et*

$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}.$$

Calculer $\int_\gamma f(z)\,dz$.

Discussion On remarque tout d'abord que les singularités de f sont en $z = 0$ et $z = 1$. Il est facile de voir que $\text{Rés}_0(f) = 2$ et $\text{Rés}_1(f) = 3$. On va distinguer les cas suivants :

Cas 1 : $0, 1 \in \operatorname{int}\gamma$. On trouve alors que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(2+3) = 10\pi i.$$

Cas 2 : $0 \in \operatorname{int}\gamma$ et $1 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Dans ce cas nous avons

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 4\pi i.$$

Cas 3 : $1 \in \operatorname{int}\gamma$ et $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On obtient

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 6\pi i.$$

Cas 4 : $0, 1 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Cas 5 : $0 \in \gamma$ ou $1 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

12.2 Partie II : Applications au calcul des intégrales réelles

Application 1 *Calcul des intégrales de la forme*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est telle que* $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ *et où* P *et* Q *sont des polynômes avec* $Q(\cos\theta, \sin\theta) \neq 0$, $\forall\, \theta$.

Discussion On pose $z = e^{i\,\theta}$. On a alors

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

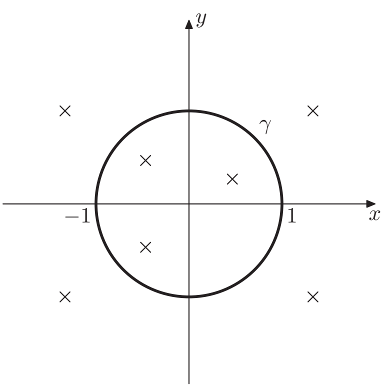
Noter qu'on a aussi $d\theta = \dfrac{1}{i}\dfrac{dz}{z}$. Par conséquent, si γ dénote le cercle unité et si on pose

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{i\,z} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right),$$

on déduit du théorème des résidus que

$$\int_\gamma \widetilde{f}(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \widetilde{f}\left(e^{i\,\theta}\right)\left(i\, e^{i\,\theta}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}\left(\widetilde{f}\right)$$

où z_k sont les singularités de $\widetilde{f}$ à l'intérieur du cercle unité γ.



(Pour plus de détails, cf. [1] 155, [3] 65-66, [5] 203-205, [7] chapitre 11, [11] 868-869).

Exemple 12.5 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Discussion $f(\cos\theta, \sin\theta) = \dfrac{1}{2+\cos\theta}$ et, en posant $z = e^{i\,\theta}$,

$$\widetilde{f}(z) = \frac{2}{i\,(z^2+4\,z+1)} = \frac{2}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)}.$$

Les singularités de $\widetilde{f}$ sont $z_1 = -\left(2+\sqrt{3}\right)$, $z_2 = \sqrt{3}-2$, mais seulement z_2, qui est un pôle d'ordre 1, se trouve à l'intérieur du cercle unité. On obtient

$$\text{Rés}_{\sqrt{3}-2}\left(\widetilde{f}\right) = \lim_{z\to\sqrt{3}-2}\left[\frac{2\left(z+2-\sqrt{3}\right)}{i\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)}\right] = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

et ainsi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi i\,\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Application 2 *Calcul des intégrales de la forme*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{i\,a\,x}\,dx}$$

avec $a \geq 0$, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *où* P et Q *sont des polynômes tels que*
(i) $Q(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
(ii) $\deg Q - \deg P \geq 2$ (deg *dénotant le degré des polynômes).*
Sous ces hypothèses l'intégrale ci-dessus existe et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{i\,a\,x}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}\left(\widetilde{R}\right),$$

où z_k *sont les singularités de* $\widetilde{R}(z) = R(z)\,e^{i\,a\,z}$ *appartenant au demi-plan supérieur (i.e.* $\operatorname{Im} z \geq 0$*).*

Remarque Le résultat ci-dessus s'applique au calcul des transformées de Fourier, lorsque R est donné sous forme de quotient de polynômes, satisfaisant aux conditions (i) et (ii). On trouve

$$\widehat{R}(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,e^{i\,a\,x}\,dx = i\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}\left(\widetilde{R}\right).$$

(Pour plus de détails, cf. [1] 156, [3] 69-71, [5] 208-212, [7] chapitre 11, [11] 873-877).

Exemple 12.6 *Calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4}\, dx.$

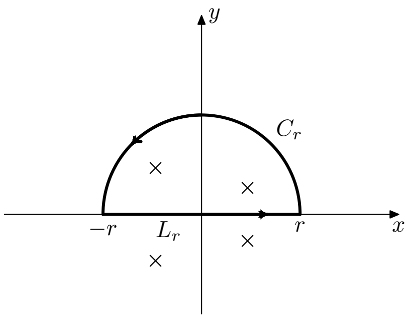
Discussion On divise la discussion en deux parties (la première s'applique au cas général alors que la deuxième s'applique à l'exemple).

Etape 1. Soir $r>0$ et $\Gamma_r = C_r \cup L_r$ où

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

$$L_r = \{z \in \mathbb{C} : -r < \operatorname{Re} z < r \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\}.$$

On choisit r suffisamment grand pour que toutes les singularités de R situées



dans le demi plan supérieur soient dans l'intérieur de Γ_r (noter que, comme $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction R n'a aucune singularité sur l'axe réel). Le théorème des résidus s'applique et on trouve

$$\int_{\Gamma_r} R(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}\left(\widetilde{R}\right),$$

où z_k sont les singularités de $\widetilde{R}(z) = R(z)\, e^{i\,a\,z}$ à l'intérieur de Γ_r. Par ailleurs les hypothèses (i) et (ii) impliquent que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} R(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} \int_{L_r} R(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{i\,a\,x}\, dx.$$

De la combinaison de ces résultats on obtient bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{i\,a\,x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Rés}_{z_k}\left(\widetilde{R}\right).$$

Etape 2. Si on revient à l'exemple (ici $a=0$), on notera que les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites. On va chercher maintenant les zéros (complexes) de Q. On trouve

$$16 + z^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = 16\, e^{i(\pi+2n\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2\, e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}}, \quad n = 0,1,2,3,$$

i.e.

$$z_1 = 2\,e^{i\,\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2} \qquad z_2 = 2\,e^{i\,\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2\,e^{i\,\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\,\sqrt{2} \qquad z_4 = 2\,e^{i\,\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\,\sqrt{2}.$$

Ce sont des pôles simples de $R(z) = \dfrac{z^2}{16 + z^4}$. Seuls z_1 et z_2 appartiennent au demi-plan supérieur, par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4}\, dx = 2\pi i \left(\text{Rés}_{z_1}(R) + \text{Rés}_{z_2}(R)\right).$$

On va maintenant calculer les deux résidus, à l'aide de la proposition 11.5, on a

$$\text{Rés}_{z_1}(R) = \frac{z_1^2}{4\,z_1^3} = \frac{1}{4\,z_1} = \frac{1}{4\,(1+i)\,\sqrt{2}} = \frac{1+i}{8i\,\sqrt{2}}$$

$$\text{Rés}_{z_2}(R) = \frac{z_2^2}{4\,z_2^3} = \frac{1}{4\,z_2} = \frac{1}{4\,(-1+i)\,\sqrt{2}} = \frac{1-i}{8i\,\sqrt{2}}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4}\, dx = 2\pi i \left(\text{Rés}_{z_1}(R) + \text{Rés}_{z_2}(R)\right) = \frac{\pi\,\sqrt{2}}{4}.$$

(L'exemple aurait aussi pu être traité par un calcul direct sans l'aide du théorème des résidus.)

12.3 Exercices

Exercice 12.1 *Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple fermée et régulière par morceaux. Calculer en fonction de γ*

$$\int_\gamma e^{\frac{1}{z^2}}\, dz.$$

Exercice 12.2 *Soit γ une courbe simple fermée régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur des intégrales suivantes*

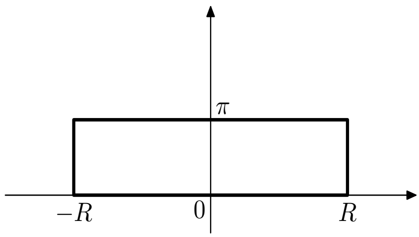
(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-i)\,(z+2)^2\,(z-4)}\, dz,$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 + 2\,z + 1}{(z-3)^3}\, dz,$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}\, dz.$

Exercice 12.3 *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}.$$



Suggestion. (i) *Soient* $R > 0$ *et* γ_R *le bord du rectangle* $(-R, R) \times (0, \pi)$ *(voir figure). Calculer, à l'aide du théorème des résidus,*

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{\cosh z}\,.$$

(ii) *En supposant que* $\displaystyle\lim_{L \to \pm\infty} \int_0^\pi \frac{dy}{\cosh(L + i\,y)} = 0$, *conclure.*

Exercice 12.4 *Soit* γ *une courbe simple fermée et régulière par morceaux. Calculer en fonction de* γ

$$\int_\gamma \frac{1 - e^{i\pi\, z}}{z\,(z+i)\,(z-1)^2}\,dz.$$

Exercice 12.5 *Soit* γ *une courbe simple fermée régulière contenue dans le disque centré en* $z = 0$ *et de rayon* 2. *Calculer*

$$\int_\gamma \operatorname{tg} z\, dz.$$

Exercice 12.6 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin\theta}\,.$

Exercice 12.7 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin(2\,\theta)}{5 + 3\cos(2\,\theta)}\,d\theta.$

Exercice 12.8 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{13 - 5\cos(2\,\theta)}\,d\theta.$

Exercice 12.9 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\,\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\,d\theta.$

Exercice 12.10 (i) *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit la fonction*

$$h(z) = \frac{(z-1)^{2n}\left(z^{2n}+1\right)}{z^{2n+1}}\,.$$

Quelle est la nature du point $z = 0$ *(point régulier, pôle et de quel ordre, singularité essentielle) ? Montrer que* $\text{Rés}_0(h) = 2$.

(ii) *Evaluer, à l'aide du théorème des résidus et de la première question, l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^n \cos(n\,\theta)\,d\theta.$$

Exercice 12.11 *Soit* $p \in (0,1)$. *Calculer*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\,p\cos\theta+p^2}\,.$$

Exercice 12.12 (i) *Soit* $z = r\,e^{i\,\theta}$, *montrer que*

$$\left|1+z^6\right| \geq \left|r^6-1\right|.$$

(ii) *Soit* C_r *le demi cercle centré en* 0, *de rayon* $r>1$ *et situé dans le demi plan supérieur. Montrer, à l'aide de la question précédente, que*

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{1+z^6}\,dz\right| = 0.$$

(iii) *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$$

Exercice 12.13 (i) *Soient* $\theta \in [0,\pi]$, $r>0$ *et* $z = r\,e^{i\,\theta}$. *Montrer que* $\left|e^{i\,z}\right| \leq 1$.

(ii) *Soit* $z = r\,e^{i\,\theta} \in \mathbb{C}$. *Montrer que*

$$r^4 - 16 \leq \left|16+z^4\right|.$$

(iii) *A l'aide des deux questions précédentes, montrer que si* $\theta \in [0,\pi]$, $r>2$ *et* $z = r\,e^{i\,\theta}$ *alors*

$$\left|\frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\right| \leq \frac{1}{r^4-16}\,.$$

(iv) *Soit* C_r *le demi cercle centré en* 0, *de rayon* $r>2$ *et situé dans le demi plan supérieur. Déduire de la question précédente que*

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r} \frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\,dz\right| = 0.$$

(v) *A l'aide de la quatrième question, calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{16+x^4}\,dx \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{16+x^4}\,dx.$$

Exercice 12.14 ** Montrer, à l'aide du théorème de Cauchy (cf. exercice 10.13), le théorème des résidus,*

12.4 Corrigés

Exercice 12.1 *Cas 1 :* $0 \in \operatorname{int}\gamma$. On a

$$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^{2n}} + 1.$$

On déduit donc que $\text{Rés}_0(f) = 0$ et donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(Noter que la fonction n'est pas holomorphe à l'intérieur de γ).

Cas 2 : $0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy implique $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Cas 3 : $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 12.2 *(i)* Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z+2)^2(z-4)}$. On commence par calculer les résidus en i, 4 et -2 qui sont des pôles d'ordre 1 pour les deux premiers et d'ordre 2 pour le troisième.

$$\text{Rés}_i(f) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)f(z)\right] = \frac{1}{(i+2)^2(i-4)}$$

$$\text{Rés}_4(f) = \lim_{z\to 4}\left[(z-4)f(z)\right] = \frac{1}{36(4-i)}$$

$$\begin{aligned}\text{Rés}_{-2}(f) &= \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[(z+2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-i)(z-4)}\right)\\ &= \lim_{z\to -2}\left(\frac{-2z+4+i}{(z-i)^2(z-4)^2}\right) = \frac{8+i}{36(i+2)^2}.\end{aligned}$$

On distingue ensuite différents cas.

Cas 1 : $i, -2, 4 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Alors par le théorème de Cauchy on déduit que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Cas 2 : Un des points $i, -2, 4$ appartient à $\operatorname{int}\gamma$.

Cas 2.a : $i \in \operatorname{int}\gamma$ mais $-2, 4 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_i(f) = \frac{2\pi i}{(i+2)^2(i-4)}.$$

Cas 2.b : $-2 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $i, 4 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, et donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_{-2}(f) = \frac{\pi i(8+i)}{18(i+2)^2}.$$

Cas 2.c : $4 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $i, -2 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, ainsi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Rés}_4(f) = \frac{\pi i}{18(4-i)}.$$

Cas 3 : Deux des points $i, -2, 4$ appartiennent à $\operatorname{int}\gamma$.

Cas 3.a : $i, -2 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $4 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}_i(f) + \text{Rés}_{-2}(f)\right) = \frac{2\pi i}{(i+2)^2}\left(\frac{1}{i-4} + \frac{8+i}{36}\right).$$

Cas 3.b : $i, 4 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $-2 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, par conséquent

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}_i(f) + \text{Rés}_4(f)\right) = \frac{2\pi i}{(i-4)}\left(\frac{1}{(i+2)^2} - \frac{1}{36}\right).$$

Cas 3.c : $-2, 4 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $i \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$, on obtient

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}_{-2}(f) + \text{Rés}_4(f)\right) = \frac{\pi i}{18}\left(\frac{8+i}{(i+2)^2} - \frac{1}{(i-4)}\right).$$

Cas 4 : $i, -2, 4 \in \operatorname{int}\gamma$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= 2\pi i\left(\text{Rés}_i(f) + \text{Rés}_{-2}(f) + \text{Rés}_4(f)\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{(i-4)(i+2)^2} + \frac{8+i}{36(i+2)^2} - \frac{1}{36(i-4)}\right) = 0.\end{aligned}$$

Cas 5 : $i \in \gamma$ ou $-2 \in \gamma$ ou $4 \in \gamma$, l'intégrale n'est alors pas définie.

(ii) Soit $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{(z-3)^3}$. Tout d'abord on observe que $z = 3$ est un pôle d'ordre 3 et que

$$\text{Rés}_3(f) = \frac{1}{2}\lim_{z \to 3}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(z^2 + 2z + 1\right)\right] = 1.$$

On distingue ensuite trois cas.

Cas 1 : $3 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. Le théorème de Cauchy nous donne

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cas 2 : $3 \in \operatorname{int}\gamma$. Le théorème des résidus conduit à

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Rés}_3(f) = 2\pi i.$$

Cas 3 : $3 \in \gamma$. L'intégrale n'est alors pas bien définie.

(iii) Soit $f(z) = \dfrac{e^{(1/z)}}{z^2}$. On a que

$$f(z) = \frac{e^{(1/z)}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n+2}},$$

donc 0 est une singularité essentielle isolée et

$$\text{Rés}_0(f) = 0$$

Cas 1 : $0 \notin \overline{\text{int}\,\gamma}$. Par le théorème de Cauchy on déduit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Cas 2 : $0 \in \text{int}\,\gamma$. On trouve, par le théorème des résidus, que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\text{Rés}_0(f) = 0.$$

Cas 3 : $0 \in \gamma$. L'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 12.3 *(i)* Les singularités de $f(z) = (\cosh z)^{-1}$ sont quand $\cosh z = 0$, i.e. quand

$$e^z + e^{-z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2z} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{i(2k+1)\pi}{2}.$$

La seule singularité de f à l'intérieur de γ_R est donc $i\pi/2$ et c'est un pôle d'ordre 1. Le résidu est alors

$$\text{Rés}_{i\frac{\pi}{2}}(f) = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \left[\frac{z - i\frac{\pi}{2}}{\cosh z}\right] = \frac{1}{\sinh\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{i}$$

et par conséquent

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \,\text{Rés}_{i\frac{\pi}{2}}(f) = 2\pi.$$

(ii) On va maintenant calculer l'intégrale sur chaque segment du rectangle. On a en effet que

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz,$$

où

$$\gamma_1 = \{x : x : -R \to R\}, \quad \gamma_2 = \{R + iy : y : 0 \to \pi\},$$

$$\gamma_3 = \{x + i\pi : x : R \to -R\}, \quad \gamma_4 = \{-R + iy : y : \pi \to 0\}.$$

On obtient ainsi

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh x} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_3} \frac{dz}{\cosh z} = -\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh(x+i\pi)}$$

Comme

$$\cosh(x+i\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{x+i\pi} + e^{-(x+i\pi)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = -\cosh x$$

on déduit que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \frac{dz}{\cosh z} = 2\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh x}.$$

Par ailleurs, quand $R \to +\infty$, on a

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{0}^{\pi} \frac{i\,dy}{\cosh(R+i\,y)} \to 0$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{dz}{\cosh z} = -\int_{0}^{\pi} \frac{i\,dy}{\cosh(-R+i\,y)} \to 0.$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \pi.$$

Exercice 12.4 Les singularités possibles de

$$f(z) = \frac{1-e^{i\pi z}}{z(z+i)(z-1)^2}$$

sont $z=0$, $z=-i$, et $z=1$. Or, en utilisant la règle de L'Hôpital, on obtient

$$\lim_{z\to 0}\left[f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1-e^{i\pi z}}{z}\right] \cdot \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{(z+i)(z-1)^2}\right] = \frac{-i\pi}{i} = -\pi$$

on trouve donc que 0 est un point régulier (i.e. une singularité éliminable). Par ailleurs $z=-i$ est clairement un pôle d'ordre 1 alors que $z=1$ est un pôle d'ordre 2. On trouve donc

$$\text{Rés}_{-i}(f) = \lim_{z\to -i}\left[\frac{1-e^{i\pi z}}{z(z-1)^2}\right] = \frac{1-e^{\pi}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_1(f) &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1-e^{i\pi z}}{z(z+i)}\right] \\
&= \lim_{z\to 1}\left[\frac{-i\pi\, e^{i\pi z}\,(z(z+i)) - \left(1-e^{i\pi z}\right)(2z+i)}{z^2(z+i)^2}\right] \\
&= \frac{i\pi(1+i) - 2(2+i)}{2i} = \frac{\pi-2}{2} + i\,\frac{\pi+4}{2}.
\end{aligned}$$

On distingue alors différents cas.

Cas 1 : $1, -i \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On trouve grâce au théorème de Cauchy

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cas 2 : $1 \in \operatorname{int}\gamma$ mais $-i \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On obtient, du théorème des résidus, que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_1(f) = -\pi(\pi+4) + i\pi(\pi-2).$$

Cas 3 : $-i \in \operatorname{int}\gamma$ mais $1 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On infère, du théorème des résidus, que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_{-i}(f) = i\pi(1-e^\pi).$$

Cas 4 : $1, -i \in \operatorname{int}\gamma$. On déduit, du théorème des résidus, que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}_1(f) + \text{Rés}_{-i}(f)\right) = -\pi(\pi+4) + i\pi(\pi-1-e^\pi).$$

Cas 5 : $1 \in \gamma$ ou $-i \in \gamma$. L'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 12.5 Les seules singularités de $f(z) = \operatorname{tg} z$ à l'intérieur du disque donné sont $z = \pm\pi/2$. Ce sont clairement des pôles d'ordre 1. On a donc à l'aide de la proposition 11.5

$$\text{Rés}_{\frac{\pi}{2}}(f) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 \quad \text{et} \quad \text{Rés}_{-\frac{\pi}{2}}(f) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

Cas 1 : $\pm\dfrac{\pi}{2} \in \operatorname{int}\gamma$. On a donc

$$\int_\gamma \operatorname{tg} z\,dz = 2\pi i\left(\text{Rés}_{\frac{\pi}{2}}(f) + \text{Rés}_{-\frac{\pi}{2}}(f)\right) = -4\pi i.$$

Cas 2 : $\dfrac{\pi}{2} \in \operatorname{int}\gamma$, $-\dfrac{\pi}{2} \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On trouve ainsi

$$\int_\gamma \operatorname{tg} z\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_{\frac{\pi}{2}}(f) = -2\pi i.$$

Cas 3 : $-\dfrac{\pi}{2} \in \operatorname{int}\gamma$, $\dfrac{\pi}{2} \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On infère que

$$\int_\gamma \operatorname{tg} z\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_{-\frac{\pi}{2}}(f) = -2\pi i$$

Cas 4 : $\pm\dfrac{\pi}{2} \notin \overline{\operatorname{int}\gamma}$. On déduit du théorème de Cauchy que

$$\int_\gamma \operatorname{tg} z\,dz = 0$$

Cas 5 : $\frac{\pi}{2} \in \gamma$ ou $-\frac{\pi}{2} \in \gamma$. L'intégrale n'est pas bien définie.

Exercice 12.6 On a $f(\cos\theta, \sin\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sin\theta}$ et, en posant $z = e^{i\,\theta}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z) &= \frac{1}{i\,z\left(\sqrt{5} - \frac{z-1/z}{2i}\right)} = \frac{2}{-z^2 + 2i\,z\,\sqrt{5} + 1} \\ &= \frac{-2}{\left(z - i\left(\sqrt{5}+2\right)\right)\left(z - i\left(\sqrt{5}-2\right)\right)}.\end{aligned}$$

Les singularités de $\widetilde{f}(z)$ sont $z_1 = i\left(\sqrt{5}+2\right)$, $z_2 = i\left(\sqrt{5}-2\right)$, mais seulement z_2, qui est un pôle d'ordre 1, se trouve à l'intérieur du cercle unité. On obtient

$$\text{Rés}_{i(\sqrt{5}-2)}\left(\widetilde{f}\right) = \lim_{z\to i\left(\sqrt{5}-2\right)}\left[\frac{-2}{z - i\left(\sqrt{5}+2\right)}\right] = \frac{1}{2i}$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \sin\theta} = 2\pi i\,\text{Rés}_{i(\sqrt{5}-2)}\left(\widetilde{f}\right) = \pi.$$

Exercice 12.7 On pose $z = e^{i\,\theta}$ et on trouve

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2\,z}$$

$$\cos(2\,\theta) = \frac{e^{2i\,\theta} + e^{-2i\,\theta}}{2} = \frac{z^4+1}{2\,z^2} \quad \text{et} \quad \sin(2\,\theta) = \frac{e^{2i\,\theta} - e^{-2i\,\theta}}{2i} = \frac{z^4-1}{2i\,z^2}\,.$$

Puis on définit pour $f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\sin(2\,\theta)\left(5 + 3\cos(2\,\theta)\right)^{-1}$

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{i\,z}\,f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{-\left(z^2+1\right)\left(z^4-1\right)}{6\,z^2\left(z^2+3\right)\left(z^2+\frac{1}{3}\right)}\,.$$

On trouve alors que les seules singularités à l'intérieur du cercle unité sont 0 qui est un pôle d'ordre 2 et $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$ qui sont des pôles d'ordre 1. Leurs résidus sont donc

$$\text{Rés}_{\frac{i}{\sqrt{3}}}\left(\widetilde{f}\right) = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{3}}}\left[\frac{-\left(z^2+1\right)\left(z^4-1\right)}{6\,z^2\left(z^2+3\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}\right] = \frac{i}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{Rés}_{\frac{-i}{\sqrt{3}}}\left(\widetilde{f}\right) = \lim_{z\to\frac{-i}{\sqrt{3}}}\left[\frac{-\left(z^2+1\right)\left(z^4-1\right)}{6\,z^2\left(z^2+3\right)\left(z-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)}\right] = -\frac{i}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^6+z^4-z^2-1}{3\,z^4+10\,z^2+3}\right] = 0.$$

On trouve ainsi que si γ est le cercle unité, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin(2\,\theta)}{5+3\cos(2\,\theta)}\,d\theta &= \int_\gamma \widetilde{f}(z)\,dz \\ &= 2\pi i\left[\text{Rés}_{\frac{i}{\sqrt{3}}}\left(\widetilde{f}\right)+\text{Rés}_{\frac{-i}{\sqrt{3}}}\left(\widetilde{f}\right)+\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

Ce résultat aurait pu être déduit immédiatement par raison de symétrie.

Exercice 12.8 Posons $z = e^{i\,\theta}$ et déduisons que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \cos(2\,\theta) = \frac{e^{2i\,\theta}+e^{-2i\,\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right).$$

Par ailleurs on définit pour $f(\cos\theta, \sin\theta) = (13-5\cos(2\,\theta))^{-1}\cos^2\theta$

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{i\,z}\,f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{-\left(z^2+1\right)^2}{10\,i\,z\,(z^2-5)\left(z^2-\dfrac{1}{5}\right)}.$$

Les singularités de $\widetilde{f}$ sont $z=0$, $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\pm\sqrt{5}$, et ce sont des pôles d'ordre 1, seules les trois premières sont à l'intérieur du cercle unité γ. Les résidus correspondants sont

$$\begin{aligned}\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right) &= \lim_{z\to 0}\left[z\,\widetilde{f}(z)\right] = \frac{-1}{10\,i} \\ \text{Rés}_{1/\sqrt{5}}\left(\widetilde{f}\right) &= \lim_{z\to 1/\sqrt{5}}\left[\left(z-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\widetilde{f}(z)\right] = \frac{3}{40\,i} \\ \text{Rés}_{-1/\sqrt{5}}\left(\widetilde{f}\right) &= \lim_{z\to -1/\sqrt{5}}\left[\left(z+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\widetilde{f}(z)\right] = \frac{3}{40\,i}\end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{13-5\cos(2\,\theta)}\,d\theta &= \int_\gamma \widetilde{f}(z)\,dz \\ &= 2\pi i\left[\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right)+\text{Rés}_{1/\sqrt{5}}\left(\widetilde{f}\right)+\text{Rés}_{-1/\sqrt{5}}\left(\widetilde{f}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

Exercice 12.9 On commence par noter que

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{5\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\dfrac{e^{i\,\frac{5\,\theta}{2}}-e^{-i\,\frac{5\,\theta}{2}}}{2\,i}}{\dfrac{e^{i\,\frac{\theta}{2}}-e^{-i\,\frac{\theta}{2}}}{2\,i}}\right)^2 = \left(\frac{\left(e^{i\,5\,\theta}-1\right)e^{-i\,\frac{5\,\theta}{2}}}{\left(e^{i\,\theta}-1\right)e^{-i\,\frac{\theta}{2}}}\right)^2$$

et donc, si on pose $z = e^{i\,\theta}$, on obtient

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{5\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{z^5-1}{(z-1)\,z^2}\right)^2 = \frac{\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)^2}{z^4}\,.$$

En posant

$$\widetilde{f}\,(z) = \frac{\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)^2}{i\,z^5}$$

on trouve que $z=0$ est la seule singularité de $\widetilde{f}$ et que c'est un pôle d'ordre 5. Son résidu est donné par

$$\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}\left[\frac{\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)^2}{i}\right] = \frac{5}{i}\,.$$

On a finalement, si γ est le cercle unité, que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{5\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi}\widetilde{f}\left(e^{i\,\theta}\right) i\,e^{i\,\theta}d\theta = \int_\gamma \widetilde{f}\,(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right)\\ &= 10\,\pi.\end{aligned}$$

Remarque. On peut montrer de manière analogue que

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 d\theta = 2\,n\,\pi,$$

après avoir calculé que $\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}\right) = n/i$, cf. exercice 11.7 dans [7].

Exercice 12.10 *(i)* On commence par écrire

$$(z-1)^{2n} = z^{2n} - \binom{2n}{1}z^{2n-1} + \cdots - \binom{2n}{2n-1}z + 1 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}z^k$$

et on trouve ainsi

$$\begin{aligned}(z-1)^{2n}\left(z^{2n}+1\right) &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}z^{k+2n} + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}z^k\\ &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}z^{k+2n} + 2\,z^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}z^k\end{aligned}$$

et par conséquent

$$h\,(z) = \frac{(z-1)^{2n}\left(z^{2n}+1\right)}{z^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}z^{k-1} + \frac{2}{z} + \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k\binom{2n}{k}}{z^{2n+1-k}}\,.$$

On voit donc que $z = 0$ est un pôle d'ordre $2n+1$ de h et que son résidu est 2.

(ii) On pose, comme à l'accoutumée, $z = e^{i\,\theta}$ et on trouve

$$\cos\theta = \frac{z + \dfrac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2\,z} \quad \text{et} \quad \cos(n\,\theta) = \frac{z^n + \dfrac{1}{z^n}}{2} = \frac{z^{2n}+1}{2\,z^n}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}(1-\cos\theta)^n \cos(n\,\theta) &= \left(1 - \frac{z^2+1}{2\,z}\right)^n \frac{z^{2n}+1}{2\,z^n} \\ &= \frac{(-1)^n (z-1)^{2n} \left(z^{2n}+1\right)}{2^{n+1} z^{2n}}\,.\end{aligned}$$

Posons

$$\widetilde{f}(z) = \frac{(-1)^n (z-1)^{2n} \left(z^{2n}+1\right)}{i\,2^{n+1} z^{2n+1}}$$

et observons que

$$\widetilde{f}(z) = \frac{(-1)^n}{i\,2^{n+1}}\,h(z)$$

par conséquent

$$\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}(z)\right) = \frac{(-1)^n}{i\,2^n}\,.$$

Si γ est le cercle unité on a donc

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^n \cos(n\,\theta)\,d\theta = \int_\gamma \widetilde{f}(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_0\left(\widetilde{f}(z)\right) = \frac{(-1)^n\,\pi}{2^{n-1}}\,.$$

Exercice 12.11 On pose $z = e^{i\,\theta}$ de façon que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. On a

$$f(z) = \frac{1}{1 - p\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + p^2} = \frac{-z}{(p\,z-1)(z-p)}\,.$$

Soit

$$\widetilde{f}(z) = \frac{-1}{i\,(p\,z-1)(z-p)}$$

et γ le cercle unité. La fonction $\widetilde{f}$ a des singularités (en fait des pôles d'ordre 1) en $z = p$ et $z = \dfrac{1}{p}$. Comme $p < 1$ seul $z = p$ est à l'intérieur de γ. Son résidu est alors

$$\text{Rés}_p\left(\widetilde{f}\right) = \lim_{z\to p}\left[\frac{-(z-p)}{i\,(p\,z-1)(z-p)}\right] = \frac{-1}{i\,(p^2-1)}$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\,p\cos\theta + p^2} = \int_\gamma \widetilde{f}(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Rés}_p\left(\widetilde{f}\right) = \frac{2\pi}{1-p^2}\,.$$

Exercice 12.12 *(i)* Par l'inégalité du triangle on a, si $z = r\, e^{i\,\theta}$,

$$\left|z^6+1\right| \geq \left|\left|z^6\right|-1\right| = \left|r^6-1\right|.$$

(ii) On écrit si $r > 1$

$$\left|\int_{C_r} \frac{z^2}{1+z^6}\, dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\left(r\, e^{i\,\theta}\right)^2}{1+\left(r\, e^{i\,\theta}\right)^6}\, i\, r\, e^{i\,\theta}\, d\theta\right|$$
$$\leq \int_0^\pi \frac{r^3}{r^6-1}\, d\theta = \frac{\pi\, r^3}{r^6-1} \to 0 \quad \text{si} \quad r \to \infty.$$

(iii) Soient $r > 1$ et $\gamma_r = C_r \cup L_r$ où C_r est défini dans la deuxième question et L_r est le segment de droite $[-r, r]$ sur l'axe réel. Les singularités de $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^6}$ sont les zéros de $1+z^6$. Or

$$1+z^6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^6 = -1 = e^{i(\pi+2n\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad z_n = e^{\frac{i\pi(2n+1)}{6}},\ n = 0, \cdots, 5.$$

Seuls $z_0,\ z_1$ et z_2 sont à l'intérieur de γ_r et ce sont des pôles d'ordre 1. On a donc que leurs résidus sont donnés à l'aide de la proposition 11.5 (poser $p(z) = z^2$ et $q(z) = 1+z^6$ ce qui implique $q'(z) = 6\, z^5$) par

$$\text{Rés}_{z_n}\left(\frac{z^2}{1+z^6}\right) = \frac{1}{6\, z_n^3} = \frac{1}{6}\, e^{-\frac{i(2n+1)\pi}{2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{6}\, i, \quad n = 0, 1, 2.$$

Le théorème des résidus nous permet donc d'écrire

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_{C_r} f(z)\, dz + \int_{L_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{2} \text{Rés}_{z_n}(f) = \frac{\pi}{3}\,.$$

Comme

$$\int_{L_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{1+x^6}\, dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\, dx \quad \text{quand} \quad r \to \infty$$

$$\int_{C_r} f(z)\, dz \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to \infty\ ,$$

(cf. la deuxième question) on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \frac{\pi}{3}\,.$$

Exercice 12.13 *(i)* Soit $z = r\, e^{i\,\theta} = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$, on obtient alors

$$\left|e^{i\,z}\right| = \left|e^{i\, r\cos\theta - r\sin\theta}\right| = e^{-r\sin\theta} \leq 1$$

car $r\sin\theta \geq 0$ $(r > 0$ et $\theta \in [0,\pi])$.

(ii) Par l'inégalité du triangle on a

$$\left|16 + z^4\right| \geq \left|z^4\right| - 16 = r^4 - 16.$$

(iii) En combinant les deux premières questions on déduit, si $r > 2$, que

$$\left|\frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\right| \leq \frac{1}{r^4 - 16}\,.$$

(iv) Soit $f\left(z\right) = \dfrac{e^{i\,z}}{16+z^4}$, alors si $r \to \infty$ on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_r} f\left(z\right)dz\right| &= \left|\int_0^\pi f\left(re^{i\,\theta}\right) i\,r\,e^{i\,\theta}\,d\theta\right| \\ &\leq \int_0^\pi \left|f\left(re^{i\,\theta}\right)\right| r\,d\theta \leq \frac{r}{r^4-16}\int_0^\pi d\theta \to 0.\end{aligned}$$

(v) Soit $r > 2$ et $\gamma_r = C_r \cup L_r$ où C_r est comme dans (iv) et L_r est le segment de droite $[-r,r]$ sur l'axe réel. On cherche ensuite les singularités de f, elles sont données par

$$z^4+16 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad z^4 = -16 = 16\,e^{i(\pi+2k\pi)} \quad\Leftrightarrow\quad z_k = 2\,e^{\frac{i\pi(2k+1)}{4}},\ k = 0,1,2,3.$$

Ce sont clairement des pôles d'ordre 1 et les seules qui soient à l'intérieur de γ_r sont z_0 et z_1. Leurs résidus sont calculés à l'aide de la proposition 11.5 (poser $p\left(z\right) = e^{i\,z}$ et $q\left(z\right) = 16 + z^4$ ce qui implique $q'\left(z\right) = 4\,z^3$)

$$\begin{aligned}\text{Rés}_{z_0}\left(f\right) &= \frac{e^{i\,z_0}}{4\,z_0^3} = \frac{e^{i\sqrt{2}(1+i)}}{4\left(\sqrt{2}\left(1+i\right)\right)^3} = \frac{e^{\sqrt{2}(-1+i)}}{16\sqrt{2}\left(1+i\right)i} \\ \text{Rés}_{z_1}\left(f\right) &= \frac{e^{i\,z_1}}{4\,z_1^3} = \frac{e^{i\sqrt{2}(-1+i)}}{4\left(\sqrt{2}\left(-1+i\right)\right)^3} = \frac{e^{\sqrt{2}(-1-i)}}{16\sqrt{2}\left(1-i\right)i}\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\text{Rés}_{z_0}\left(f\right) + \text{Rés}_{z_1}\left(f\right) &= \frac{e^{-\sqrt{2}}}{16\,i\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\sqrt{2} + i\sin\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\cos\sqrt{2} - i\sin\sqrt{2}}{1-i}\right) \\ &= \frac{e^{-\sqrt{2}}}{16\,i\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

On a donc par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r}\frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\,dz &= \int_{C_r}\frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\,dz + \int_{L_r}\frac{e^{i\,z}}{16+z^4}\,dz \\ &= 2\pi i\left(\text{Rés}_{z_0}\left(f\right) + \text{Rés}_{z_1}\left(f\right)\right) = \pi\,\frac{e^{-\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{r\to\infty}\int_{L_r} f(z)\,dz = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{e^{i\,x}}{16+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{16+x^4}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{16+x^4}\,dx$$

on a que l'identité précédente combinée au résultat de la quatrième question nous permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{16+x^4}\,dx = \pi\,\frac{e^{-\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2}+\sin\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{16+x^4}\,dx = 0.$$

Exercice 12.14 * Comme $z_1,\cdots,z_m \in \operatorname{int}\gamma \subset D$ et $\operatorname{int}\gamma$ est ouvert on peut trouver $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$\overline{B_\epsilon(z_k)} \subset \operatorname{int}\gamma \quad \text{et} \quad \overline{B_\epsilon(z_k)} \cap \overline{B_\epsilon(z_j)} = \emptyset,\ j,k = 1,\cdots,m,\ j \neq k$$

où on a noté

$$\overline{B_\epsilon(z_k)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_k| \leq \epsilon\}.$$

On applique alors le théorème de Cauchy (sous la version donnée dans l'exercice 10.13) à

$$O = (\operatorname{int}\gamma) \setminus \bigcup_{k=1}^{m}\overline{B_\epsilon(z_k)}.$$

On trouve, en notant $\gamma_k = \partial B_\epsilon(z_k)$, que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Comme, par définition du résidu et grâce au théorème 11.1, on a

$$\text{Rés}_{z_k}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

on obtient immédiatement le théorème.

Chapitre 13

Applications conformes

13.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 13.1 *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert on dit que $f : D \to f(D) = D^* \subset \mathbb{C}$ est une **application conforme** de D sur D^* si*

(i) *f est bijective de D sur D^**

(ii) *f est holomorphe dans D*

(iii) *$f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in D$.*

Remarque La définition d'application conforme que nous adoptons ici n'est pas la définition usuelle (cf. [1] 67-76, [3] 20-22, [5] 427-434, [11] 882-886), mais elle est équivalente. Toutefois, dans [5] page 432 et dans [7] chapitre 12 on trouve la même définition et on montre (page 429 dans [5] et exercice 11.3 dans [7]) que (i) et (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Définition 13.2 (Transformation de Moebius) *Une **transformation de Moebius** est une application*

$$\boxed{z \to f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Proposition 13.3 *Soient $a\,d - b\,c \neq 0$ et*

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,.$$

(i) *Si $c \neq 0$,*

$$D = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \quad \text{et} \quad D^* = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,,$$

alors la transformation de Moebius est une application conforme de D sur D^*.

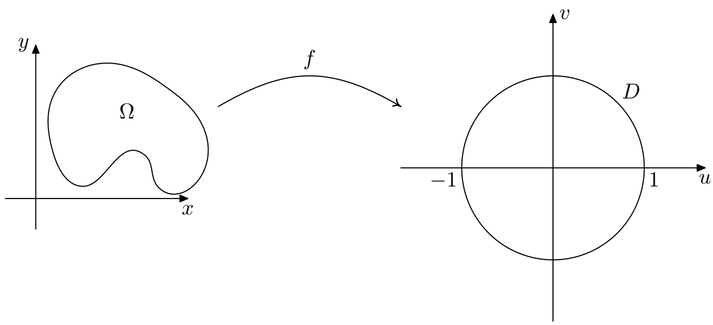
(ii) *Si $c = 0$ ($\Rightarrow d \neq 0$), alors f est conforme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.*

Remarque Du point de vue géométrique, la transformation de Moebius peut être vue comme une combinaison de dilatations, rotations et de translations.

Proposition 13.4 *Toute transformation de Moebius transforme des cercles et des droites en des cercles et des droites.*

(Pour plus de détails, cf. [1] 76-89, [3] 8, [5] 436-459, [7] chapitre 12, [11] 887-896).

Théorème 13.5 (Théorème de Riemann) *Soit $\Omega \neq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe. Alors il existe une application conforme de Ω sur D, le disque unité. De plus si on fixe l'image d'un point $z_0 \in \Omega$, par exemple $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) > 0$ (c'est à dire $\operatorname{Re} f'(z_0) > 0$ et $\operatorname{Im} f'(z_0) = 0$), alors un tel f est unique.*



(Pour plus de détails, cf. [1] 229-249, [5] 485-504, [7] chapitre 12).

13.2 Exemples

Exemple 13.6 *La fonction $f(z) = z$ est manifestement conforme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 13.7 *$f(z) = \overline{z}$ n'est pas une application conforme.*

Discussion Il suffit d'observer que $f(z) = \overline{z}$ n'est pas une fonction holomorphe.

Exemple 13.8 (i) *Soient $z_j, w_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$, avec $z_j \neq z_k$, $w_j \neq w_k$, si $j \neq k$. Trouver une transformation de Moebius f telle que $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$ (i.e. les transformations de Moebius sont caractérisées par la donnée de 3 points différents et de leurs images différentes).*

(ii) *Trouver une transformation de Moebius de*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Discussion *(i)* Si $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$, alors nécessairement

$$\frac{f(z) - w_1}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{f(z) - w_3} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z - z_3}\,. \tag{13.1}$$

Posons

$$\alpha = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2}\,;$$

on déduit alors de (13.1) que

$$\beta\,[f(z) - w_1]\,(z - z_3) = \alpha\,[f(z) - w_3]\,(z - z_1)$$

ce qui implique

$$f(z)\,[(\beta - \alpha)\,z - \beta\,z_3 + \alpha\,z_1] = \beta\,w_1\,(z - z_3) - \alpha\,w_3\,(z - z_1)$$

i.e.

$$f(z) = \frac{(\beta\,w_1 - \alpha\,w_3)\,z + (\alpha\,w_3 z_1 - \beta\,w_1 z_3)}{(\beta - \alpha)\,z + \alpha\,z_1 - \beta\,z_3}\,.$$

Il suffit alors de poser

$$a = \beta\,w_1 - \alpha\,w_3 \qquad b = \alpha\,w_3 z_1 - \beta\,w_1 z_3$$

$$c = \beta - \alpha \qquad d = \alpha\,z_1 - \beta\,z_3\,.$$

(ii) On cherche une application de la forme

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,.$$

On utilise la première partie et on choisit, par exemple, les points $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 0$ qui appartiennent tous à $\operatorname{Re} z = 0$ et on leur associe trois points sur $|w| = 1$ arbitraires, par exemple i, $-i$ et 1. On a

$$\begin{cases} f(i) = i = \dfrac{a\,i + b}{c\,i + d} \\ f(-i) = -i = \dfrac{-a\,i + b}{-c\,i + d} \\ f(0) = 1 = \dfrac{b}{d} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\,b = -2\,c \\ 2\,a\,i = 2\,b\,i \\ b = d. \end{cases}$$

On trouve alors $a = b = -c = d$ et donc

$$f(z) = \frac{z + 1}{1 - z}\,.$$

Il reste encore à savoir si f a envoyé Ω sur D ou sur l'extérieur de D. On prend alors un point appartenant à Ω, par exemple $z = 1$, et on trouve que $f(z) = \infty \notin D$. Alors l'application requise, disons g, n'est rien d'autre que l'inverse de celle obtenue (car l'application $h(\zeta) = \zeta^{-1}$ envoie l'intérieur du disque unité sur l'extérieur et réciproquement), i.e.

$$g(z) = \frac{1 - z}{z + 1}\,.$$

13.3 Exercices

Exercice 13.1 *Soit* $z = x + i\,y$ *et*

$$f(z) = \frac{1}{z}\,.$$

(i) *Trouver* $u = \operatorname{Re}(f)$ *et* $v = \operatorname{Im}(f)$ *en fonction de* x *et* y.

(ii) *Trouver* x *et* y *en fonction de* u *et* v *(c'est-à-dire trouver la fonction inverse de* f*).*

(iii) *Soient*

(a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$ $\quad$ (b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}$

(c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ $\quad$ (d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$

Trouver l'image par f *de ces ensembles (dire ce que représentent géométriquement* A_j *et* $f(A_j)$.

(iv) *Montrer plus généralement que la transformation* $z \to 1/z$ *envoie des cercles ou des droites sur des cercles et des droites (ce qui n'est rien d'autre que la proposition 13.4 quand* $f(z) = z^{-1}$*).*

Exercice 13.2 *Trouver une transformation de Moebius qui*

(i) *envoie* $0 \to -1,\ 1+i \to 1,\ 1-i \to -1+2i$;

(ii) *envoie le disque unité sur l'extérieur du disque ouvert de rayon* 2.

Exercice 13.3 *Trouver une transformation de Moebius qui envoie*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

sur

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,.$$

Exercice 13.4 (i) *Trouver une transformation de Moebius qui envoie*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2(i+1)| > 2\}$$

sur

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,.$$

(ii) *Trouver son inverse.*

Exercice 13.5 (i) *Montrer la proposition 13.3. En particulier montrer que*

$$f^{-1}(w) = \frac{-d\,w + b}{c\,w - a}\,.$$

(ii) *Qu'arrive-t-il à une transformation de Moebius si* $a\,d = b\,c$?

Exercice 13.6 *Soit la transformation de Joukowski donnée par*

$$f(z) = z + \frac{1}{z}\,.$$

(i) *Calculer* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$.
(ii) *Calculer l'image par* f *du cercle* $|z| = a$, $a > 0$.

Exercice 13.7 (i) *Montrer que la fonction* $f(z) = e^z$ *est conforme de*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

sur

$$\Omega = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

(ii) *En utilisant l'exercice 13.3 et la question précédente, trouver une application conforme de* A *sur le disque unité* D.

Exercice 13.8 (i) *Montrer que si* u *est harmonique (i.e.* $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ *avec* $\Delta u = 0$*), alors il existe* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe telle que* $\operatorname{Re} g = u$.

(ii) *En utilisant la première question, prouver que si* u *est harmonique et si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est conforme, alors* $u \circ f$ *est harmonique (où il est entendu que* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\alpha, \beta)$ *est conforme si* $\widetilde{f}(x + i\,y) = \alpha + i\,\beta$ *est conforme). (On pourra comparer ce résultat à celui de l'exercice 9.10.)*

Exercice 13.9 *Soient*

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\right\}$$

$$O = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

(i) *Montrer que l'application*

$$h(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

est conforme de O *sur* D. *Trouver les parties réelle et imaginaire de* h^{-1}.

(ii) *Montrer que l'application* $g(z) = z^2$ *est conforme de* Ω *sur* O. *Trouver les parties réelle et imaginaire de* g^{-1}.

(iii) *Trouver une application conforme* f *de* Ω *sur* D.

Exercice 13.10 ** Montrer, à l'aide du théorème de Liouville (cf. exercice 11.18) qu'il n'existe pas d'application conforme de* $\mathbb{C}$ *sur le disque unité.*

13.4 Corrigés

Exercice 13.1 *(i)* On écrit pour $z = x + i\,y$

$$f(z) = \frac{x - i\,y}{(x + i\,y)(x - i\,y)} = u + i\,v$$

et on trouve donc

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

(ii) On a

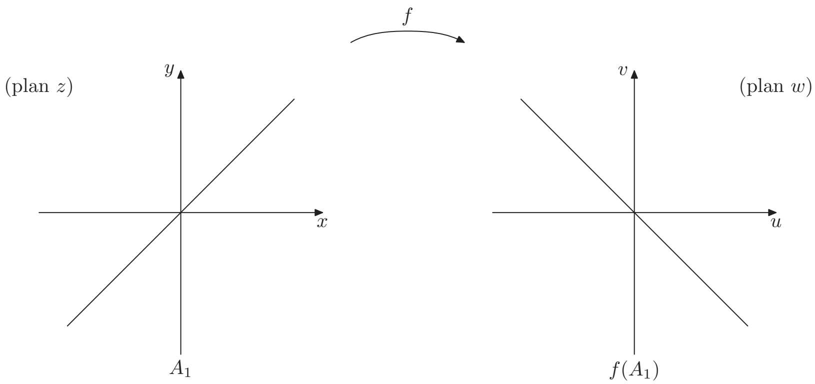
$$w = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{w}$$

et donc, comme précédemment,

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}\,.$$

(On peut procéder aussi en éliminant x puis y dans les équations $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$).

(iii) a) A_1 représente la droite $x = y$. En remplaçant dans les expressions de u et de v, on obtient



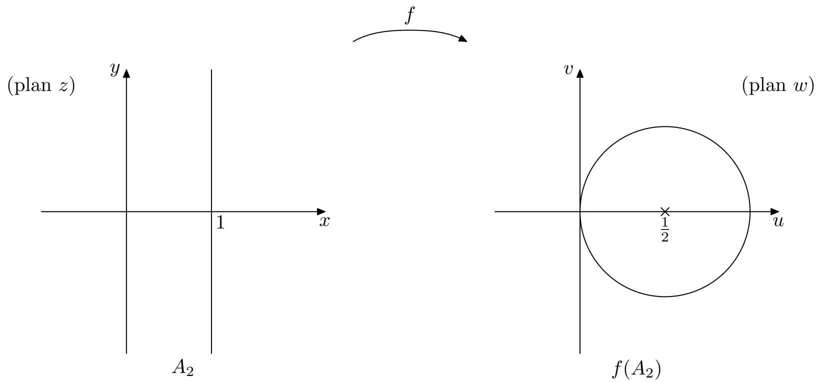
$$u = \frac{x}{2\,x^2} = \frac{1}{2\,x} \quad \text{et} \quad v = \frac{-x}{2\,x^2} = \frac{-1}{2\,x} \quad \Rightarrow \quad u + v = 0.$$

On a ainsi que $f(A_1)$ est une droite passant par l'origine,

$$f(A_1) = \{w = u + i\,v : \operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(w)\}\,.$$

b) A_2 est une droite dont l'équation est $\operatorname{Re}(z) = x = 1$. On trouve donc

$$x = 1 = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = u \quad \Rightarrow \quad \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$



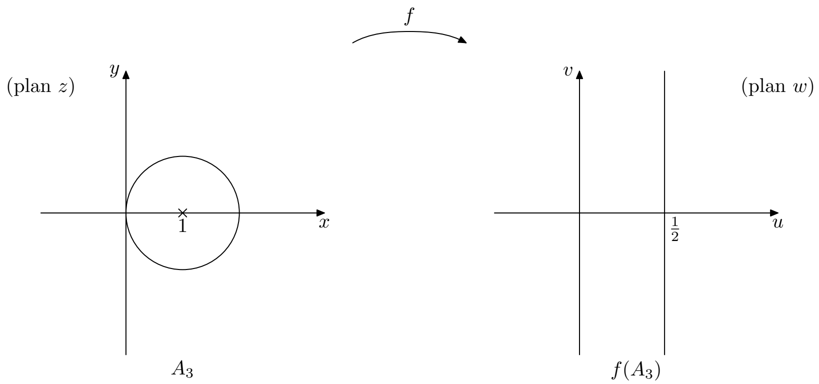
et par conséquent $f(A_2)$ est un cercle passant par l'origine,

$$f(A_2) = \left\{ w = u + i\,v : \left| w - \frac{1}{2} \right|^2 = \left(u - \frac{1}{2} \right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

c) A_3 est un cercle, passant par l'origine, défini par l'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ($\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2\,x$), et on obtient donc

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2} \right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2} \right)^2 = \frac{2\,u}{u^2+v^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}$$

et ainsi $f(A_3)$ est une droite ne passant pas par l'origine,



$$f(A_3) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(w) = \frac{1}{2} \right\}.$$

d) A_4 est un cercle, ne passant pas par l'origine, défini par l'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$. On déduit donc que

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2} - 1 \right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} = 4$$

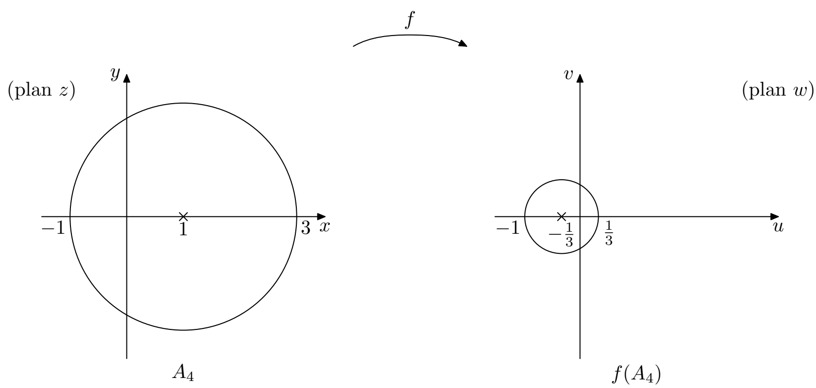
et, par conséquent

$$u^2 - 2\,u\left(u^2+v^2\right) + \left(u^2+v^2\right)^2 + v^2 = 4\left(u^2+v^2\right)^2.$$

Finalement on obtient ainsi

$$3\left(u^2+v^2\right) + 2\,u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(u+\frac{1}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{4}{9}\,.$$

Ainsi $f\left(A_4\right)$ est un cercle ne passant pas par l'origine



$$f\left(A_4\right) = \left\{w \in \mathbb{C} : \left|w+\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}\right\}.$$

(iv) On a vu que si $f(z) = 1/z$, alors

$$x + i\,y \xrightarrow{f} u + i\,v = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

et réciproquement

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}\,.$$

On va distinguer différents cas.

Cas 1. L'image d'une droite passant par l'origine est une droite passant par l'origine, en effet

$$\alpha\,x + \beta\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\,u - \beta\,v = 0.$$

Cas 2. L'image d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle passant par l'origine. Plus précisément si $\gamma \neq 0$ et si

$$\alpha\,x + \beta\,y = \frac{\gamma}{2}\,,$$

alors

$$\frac{\alpha\,u}{u^2+v^2} - \frac{\beta\,v}{u^2+v^2} = \frac{\gamma}{2}$$

et donc

$$\gamma\left(u^2+v^2\right)-2\,\alpha\,u+2\,\beta\,v=0$$

soit finalement

$$\left(u-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+\left(v+\frac{\beta}{\gamma}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}\,.$$

Cas 3. L'image d'un cercle passant par l'origine

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$$

est une droite ne passant pas par l'origine. Ceci suit de

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}-\alpha\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}-\beta\right)^2=\gamma^2$$

qui implique

$$\gamma^2\left(u^2+v^2\right)^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(u^2+v^2\right)^2+u^2+v^2-2\left(\alpha\,u-\beta\,v\right)\left(u^2+v^2\right)$$

à savoir

$$2\,\beta\,v-2\,\alpha\,u+1=0.$$

Cas 4. L'image d'un cercle ne passant pas par l'origine

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

(avec $\gamma^2\neq\alpha^2+\beta^2$) est un cercle qui ne passe pas par l'origine. Plus précisément on trouve à l'aide du cas précédent

$$\left(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2\right)\left(u^2+v^2\right)^2=\left(u^2+v^2\right)\left(1-2\,\alpha\,u+2\,\beta\,v\right)$$

et donc

$$u^2+\frac{2\,\alpha\,u}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}+v^2-\frac{2\,\beta\,v}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}$$

ou encore

$$\left(u+\frac{\alpha}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}\right)^2+\left(v-\frac{\beta}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\left(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2\right)^2}\,.$$

Exercice 13.2 *(i)* On cherche une application du type

$$w\,(z)=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}\,.$$

En imposant les conditions données on trouve

$$w\,(0)=\frac{b}{d}=-1,\quad w\,(1+i)=\frac{a\,(1+i)+b}{c\,(1+i)+d}=1,$$

$$w\,(1-i) = \frac{a\,(1-i)+b}{c\,(1-i)+d} = -1+2i,$$

c'est-à-dire,

$$b = -d, \quad b = \frac{c-a}{2}\,(1+i)\,, \quad c = a\,\frac{1-i}{1+i} = -a\,i,$$

d'où, en prenant $c = 1$,

$$a = i, \quad b = 1, \quad d = -1.$$

On a ainsi

$$w\,(z) = \frac{i\,z+1}{z-1}\,.$$

(ii) Soient

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad \text{et} \quad O = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 2\}\,.$$

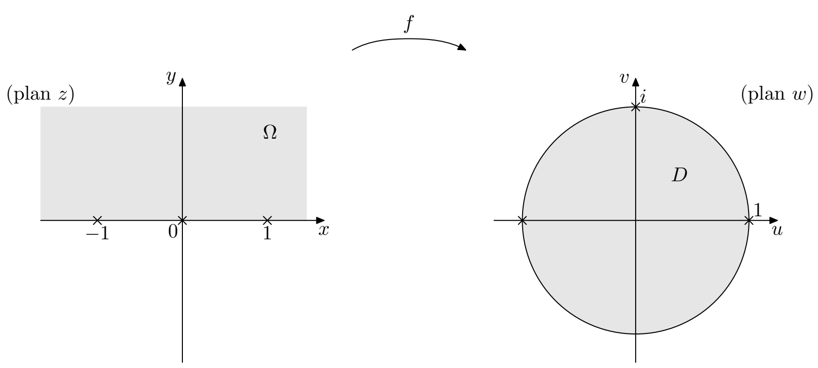
On voit tout de suite que l'application $w = f\,(z) = 2/z$ est l'application cherchée car

$$|w| = |f\,(z)| = \frac{2}{|z|} > 2, \quad \forall\, z \in \Omega.$$

Si on ne s'en rend pas compte tout de suite on procède comme dans l'exercice 13.1.

Exercice 13.3 Soit $f\,(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$. Choisissons les points $-1, 0, 1$ de $\partial\Omega$ et associons leur par f les points $-1, i, 1$ de ∂D. On a donc

$$f\,(-1) = \frac{-a+b}{-c+d} = -1, \quad f\,(0) = \frac{b}{d} = i, \quad f\,(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1.$$



On trouve facilement que

$$c = b = a\,i \quad \text{et} \quad d = a.$$

Ceci nous conduit à

$$f\,(z) = \frac{a\,z + a\,i}{a\,i\,z + a} = \frac{z + i}{i\,z + 1}\,.$$

Il reste à vérifier si l'intérieur de Ω est envoyé sur l'intérieur de D. Par exemple

$$2\,i \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f\,(2\,i) = \frac{3\,i}{-1} = -3\,i \notin D.$$

Par conséquent la bonne transformation est (car on sait que $f\,(z) = 1/z$ envoie l'extérieur du disque unité sur son intérieur, et réciproquement)

$$g\,(z) = \frac{i\,z + 1}{z + i}\,.$$

Exercice 13.4 On peut procéder de deux façons.

I) *(i)* On va écrire $f = f_2 \circ f_1$ où

$$f_1 : \Omega \to A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \quad \text{et} \quad f_2 : A \to D.$$

On a vu que $f_2\,(z) = 1/z$ est bien une application qui envoie A sur D. De même on voit immédiatement que $f_1\,(z) = \dfrac{z - 2\,(1 + i)}{2}$ envoie Ω sur A. Par conséquent

$$f\,(z) = f_2\,(f_1\,(z)) = \frac{2}{z - 2\,(1 + i)}\,.$$

(ii) Son inverse est donnée par

$$w = \frac{2}{z - 2\,(1 + i)} \quad \Rightarrow \quad z\,w = 2\,(1 + i)\,w + 2$$

et donc

$$z = \frac{2\,(1 + i)\,w + 2}{w}\,.$$

II) *(i)* Si on n'a pas vu la décomposition immédiate, on se fixe trois points quelconques de $\partial\Omega$ et on leur associe trois points de ∂D. Puis on vérifie si on a bien envoyé un point de l'intérieur de Ω sur un point de l'intérieur de D (si ce n'est pas le cas il suffit alors d'inverser). On cherche donc

$$g\,(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

tel que

$$g\,(2\,i) = -1, \quad g\,(2) = -i, \quad g\,(4 + 2\,i) = 1.$$

On a alors, après calcul,

$$g(z) = \frac{a\,z - 2\,(1+i)\,a}{2\,a} = \frac{z - 2\,(1+i)}{2}\,.$$

On constate que $0 \in \Omega$ et $g(0) = -(1+i) \notin D$ car $|g(0)| = \sqrt{2} > 1$. Donc la bonne transformation est

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{2}{z - 2\,(1+i)}\,.$$

On retrouve ici la même que précédemment, mais on aurait clairement pu en trouver une autre si par exemple on avait choisi

$$f(2\,i) = -1, \quad f(2) = i, \quad f(4 + 2\,i) = 1$$

(il y a une infinité de possibilités).

(ii) La fonction inverse est à déterminer de cas en cas.

Exercice 13.5 *(i)* Tout d'abord on va montrer que f est bijective. On va commencer par montrer l'injectivité. On a que

$$f(z_1) = f(z_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a\,z_1 + b}{c\,z_1 + d} = \frac{a\,z_2 + b}{c\,z_2 + d}$$

qui est équivalent à

$$a\,c\,z_1 z_2 + a\,d\,z_1 + b\,c\,z_2 + b\,d = a\,c\,z_1 z_2 + b\,c\,z_1 + a\,d\,z_2 + b\,d$$

et aussi à

$$(a\,d - b\,c)\,z_1 = (a\,d - b\,c)\,z_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2\,.$$

(Noter qu'on a utilisé l'hypothèse $a\,d - b\,c \neq 0$). On va ensuite prouver que f est surjective. On a

$$f(z) = w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \quad \Leftrightarrow \quad (a\,z + b) = w\,(c\,z + d)$$

qui est équivalent à

$$(c\,w - a)\,z = b - d\,w \quad \Leftrightarrow \quad z = f^{-1}(w) = \frac{-d\,w + b}{c\,w - a}$$

qui (comme $a\,d - b\,c \neq 0$) appartient à D et par conséquent

$$f(D) = D^* = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,.$$

De plus f est holomorphe car c'est le quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. Finalement la dérivée est donnée par

$$f'(z) = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,z + d)^2} \neq 0.$$

(ii) Lorsque $a\,d - b\,c = 0$, on s'aperçoit immédiatement que $f'(z) = 0$ et donc f est constante, en effet

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{b\,(c\,z + d)}{d\,(c\,z + d)} = \frac{b}{d}\,.$$

Exercice 13.6 *(i)* Soit $f(z) = u + i\,v$. On va déterminer u et v. On trouve

$$u + i\,v = x + i\,y + \frac{1}{x + i\,y} = x + i\,y + \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$$

et donc

$$u = x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{et} \quad v = y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

(ii) On distingue deux cas.

Cas 1 : $a = 1$. Dans ce cas $u = 2\,x$ et $v = 0$ et comme $|z| = a$ implique que $-a \leq x \leq a$, on déduit que l'image par f du cercle donné est le segment (sur l'axe réel) $[-2\,a, 2\,a]$.

Cas 2 : $a \neq 1$. On a que

$$u = x\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \quad \text{et} \quad v = y\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

donc

$$\frac{a^4 u^2}{(a^2 + 1)^2} + \frac{a^4 v^2}{(a^2 - 1)^2} = x^2 + y^2 = a^2$$

i.e. l'ellipse d'équation

$$\frac{u^2}{(a^2 + 1)^2} + \frac{v^2}{(a^2 - 1)^2} = \frac{1}{a^2}\,.$$

Exercice 13.7 *(i)* On doit vérifier que $f : A \to \Omega$ a les propriétés suivantes.

- f injective. Soient $z_1, z_2 \in A$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$ alors $e^{z_1} = e^{z_2}$ et donc

$$z_2 = z_1 + 2in\pi \quad \Rightarrow \quad [\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_1 + 2n\pi]\,.$$

Comme $0 < \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 < \pi$ on déduit que $z_1 = z_2$ et donc f est injective.

- f surjective. Soit $w \in \Omega$, on veut trouver $z \in A$ tel que $f(z) = w$. Il suffit de prendre $z = \log w$. On a bien

$$\operatorname{Im} w > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} z \in (0, \pi)\,.$$

- f holomorphe. On sait que $f(z) = e^z$ est holomorphe $\forall\, z \in \mathbb{C}$ et que

$$f'(z) \neq 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Par conséquent $f : A \to \Omega$ est bien conforme.

(ii) On a donc en combinant l'exercice 13.3 (en posant $g(z) = \frac{i\,z+1}{z+i}$) et la question précédente que

$$h = g \circ f : A \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{g} D$$

i.e.

$$h(z) = g(f(z)) = \frac{i\,e^z + 1}{e^z + i}$$

est conforme.

Exercice 13.8 *(i)* On cherche $g = u + i\,v$ holomorphe. Pour qu'un tel g existe il faut que u et v satisfassent les équations de Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ et $v_y = u_x$ ou, en d'autres termes,

$$\operatorname{grad} v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) = \Phi = (\varphi, \psi)\,.$$

Or, comme $\mathbb{R}^2$ est convexe et donc simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel v existe est que $\operatorname{rot}\Phi = \psi_x - \varphi_y = 0$, ce qui est bien le cas car u est harmonique et donc

$$\operatorname{rot}\Phi = (u_x)_x + (u_y)_y = u_{xx} + u_{yy} = \triangle u = 0.$$

On a ainsi trouvé v et donc une fonction holomorphe g telle que $u = \operatorname{Re} g$.

(ii) Comme u est harmonique, on a, par la première question, qu'il existe g holomorphe telle que $u = \operatorname{Re} g$. Par conséquent

$$u \circ f = \operatorname{Re}(g \circ f)\,.$$

et $g \circ f$ est holomorphe et ainsi $u \circ f$ est harmonique (cf. exercice 9.6).

Exercice 13.9 *(i)* On peut invoquer le fait que $h(O) = D$ (cf. plus bas), la proposition 13.3 et remarquer que

$$O = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{-i\} \quad \text{et} \quad D = \{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

pour obtenir le résultat, à savoir que h est conforme de O sur D. Nous allons toutefois le remontrer une fois de plus et donc établir les quatre assertions suivantes.

- h est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et par conséquent dans O.
- h est injective car

$$h(z_1) = h(z_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2\,.$$

- h est surjective car

$$w = \frac{z - i}{z + i} \quad \Rightarrow \quad z\,w + i\,w = z - i$$

et donc

$$z\,(w-1) = -i\,(w+1) \quad \Rightarrow \quad z = -i\,\frac{w+1}{w-1} = h^{-1}\,(w)\,.$$

De plus

$$\begin{aligned} h^{-1}\,(w) = h^{-1}\,(\alpha + i\,\beta) &= -i\,\frac{(\alpha+1)+i\,\beta}{(\alpha-1)+i\,\beta} = \frac{\beta - i\,(\alpha+1)}{(\alpha-1)+i\,\beta} \\ &= \frac{-2\,\beta}{(\alpha-1)^2+\beta^2} + i\,\frac{\left(1-\alpha^2-\beta^2\right)}{(\alpha-1)^2+\beta^2} = \operatorname{Re} h^{-1} + i\,\operatorname{Im} h^{-1}. \end{aligned}$$

Observer que comme $\alpha^2+\beta^2<1$ (car $w \in D$) on a bien $\operatorname{Im} h^{-1}\,(w) > 0$ et donc $h^{-1}\,(w) \in O$.

- $h'\,(z) = 2\,i/\,(z+i)^2 \neq 0$.

(ii) Pour vérifier que $g : \Omega \to O$ est conforme, il nous faut vérifier les quatre propriétés suivantes.

- $g\,(z) = z^2$ est évidemment holomorphe.

- g est injective dans Ω. Pour cela on doit montrer que si $z_1, z_2 \in \Omega$ et si $g\,(z_1) = g\,(z_2)$ alors $z_1 = z_2$. En effet

$$g\,(z_1) = g\,(z_2) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2 \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \end{array} \right.$$

comme $x_j, y_j > 0$ (et donc $\neq 0$) on a

$$\left\{ \begin{array}{c} y_2 = \frac{x_1 y_1}{x_2} \\ x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - \left(\frac{x_1 y_1}{x_2}\right)^2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y_2 = \frac{x_1 y_1}{x_2} \\ x_2^4 - x_1^2 x_2^2 = x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_1^2 \end{array} \right.$$

ce qui implique

$$\left\{ \begin{array}{c} y_2 = \frac{x_1 y_1}{x_2} \\ x_2^2\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -y_1^2\left(x_2^2 - x_1^2\right) \end{array} \right. \quad \underset{\substack{x_2 \neq 0 \\ y_1 \neq 0}}{\Rightarrow} \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \underset{x_1, x_2 > 0}{\Rightarrow} \quad x_1 = x_2$$

et ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2\,.$$

- g est surjective. En effet soient $w = \alpha + i\,\beta \in O$, i.e. $\beta > 0$, et $z = x + i\,y$, on déduit alors

$$w = z^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha + i\,\beta = x^2 - y^2 + i\,2\,x\,y \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha = x^2 - y^2 \\ \beta = 2\,x\,y \end{array} \right.$$

et par conséquent

$$x = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2} \right)^{1/2} .$$

On aurait pu aussi écrire, si $z = |z| \, e^{i\,\theta}$ et si $w = |w| \, e^{i\,\varphi}$, que

$$w = z^2 \quad \Rightarrow \quad |w| \, e^{i\,\varphi} = |z|^2 \, e^{2\,i\,\theta} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} |w| = |z|^2 \\ \varphi = 2\,\theta + 2\,k\,\pi \end{array} \right.$$

puis calculer et on aurait retrouvé

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} g^{-1}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2} \right)^{1/2} \\ \operatorname{Im} g^{-1}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2} \right)^{1/2} . \end{array} \right.$$

On a bien que $g^{-1}(w) \in \Omega$.

- $g'(z) = 2\,z \neq 0$ si $z \in \Omega$.

(iii) Il suffit de prendre

$$f = h \circ g : \Omega \xrightarrow{g} O \xrightarrow{h} D$$

i.e.

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i} .$$

Exercice 13.10 * Si une telle application f existait, alors f serait holomorphe et bornée (puisque $|f(z)| < 1$). Par le théorème de Liouville, f serait alors constante, ce qui est absurde.

Troisième partie

Analyse de Fourier

Chapitre 14

Séries de Fourier

14.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 14.1 *On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** (cf. aussi définition 8.6) si pour tout $a < b$, il existe une partition*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$$

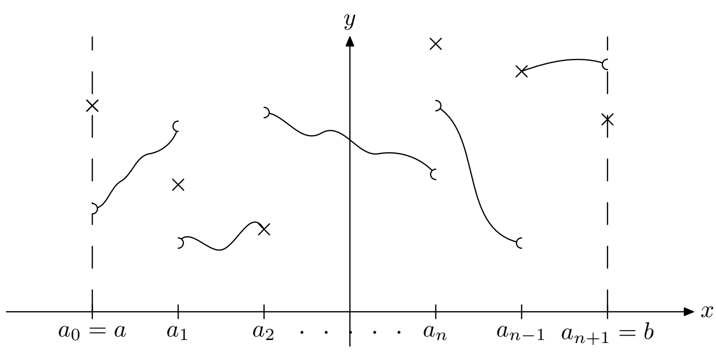
telle que, $\forall\, i = 0, 1, \cdots, n,\ f \in C^0\left(a_i, a_{i+1}\right),$

$$\lim_{\substack{x \to a_i \\ x > a_i}} \left[f\left(x\right)\right] = f\left(a_i + 0\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} \left[f\left(x\right)\right] = f\left(a_{i+1} - 0\right)$$

existent et sont finies. Si de plus $f \in C^1\left(a_i, a_{i+1}\right),$

$$\lim_{\substack{x \to a_i \\ x > a_i}} \left[f'\left(x\right)\right] = f'\left(a_i + 0\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} \left[f'\left(x\right)\right] = f'\left(a_{i+1} - 0\right)$$

*existent et sont finies, on dit que f est **régulière par morceaux**.*



Définition 14.2 *Soient* $N \geq 1$ *un entier et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $T > 0$ *périodique (i.e.* $f(x+T) = f(x)\,,\ \forall\, x$*) et intégrable sur* $[0,T]$ *(c'est à dire que* $\displaystyle\int_0^T |f(x)|\, dx < \infty$*). Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,x\right) dx, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}}$$

(i) *On appelle* ***série de Fourier partielle d'ordre N*** *de* f *et on note*

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right)\right\}.$$

(ii) *On appelle* ***série de Fourier*** *de* f *la limite, quand elle existe, de* $F_N f(x)$. *On la note*

$$\boxed{Ff(x) = \lim_{N\to\infty} F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right)\right\}.}$$

Théorème 14.3 (Théorème de Dirichlet) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* T *périodique, régulière par morceaux. Soient* a_n*,* b_n *et* $F_N f$ *comme dans la définition précédente. Alors la limite* $Ff(x)$ *existe pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et*

(i)

$$\boxed{Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

(où $f(x+0) = \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y>x}} f(y)$ *et* $f(x-0) = \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y<x}} f(y)$*). Donc, en particulier, si* f *est continue en* x*, alors*

$$Ff(x) = f(x)\,.$$

(ii) *De plus si* f *est continue, alors la convergence de la série ci-dessus vers la fonction* f *est uniforme.*

Corollaire 14.4 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* T *périodique, régulière par morceaux. Alors* Ff *est* T *périodique et de plus*

(i) *Si f est* ***paire*** *(i.e. $f(x) = f(-x)$, $\forall x$), alors $b_n = 0$ et*

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right).$$

(ii) *Si f est* ***impaire*** *(i.e. $f(x) = -f(-x)$, $\forall x$), alors $a_n = 0$ et*

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right).$$

(iii) *En* ***notations complexes***

$$\boxed{Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\,\frac{2\pi n}{T}\,x} \quad \text{où } c_n = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\,\frac{2\pi n}{T}\,x}\, dx.}$$

Théorème 14.5 (Différentiation terme à terme) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique, continue et telle que f' est régulière par morceaux. Soit*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) \right\}$$

sa série de Fourier. Alors la série obtenue par la différentiation terme à terme de la série de Fourier de f converge et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{f'(x+0) + f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{T} \left\{ b_n \cos\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,x\right) - a_n \sin\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,x\right) \right\}.}$$

Théorème 14.6 (Intégration terme à terme) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique, régulière par morceaux. Soit*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\,x\right) \right\}$$

sa série de Fourier. Alors, pour tout $x_0, x \in [0, T]$ on a

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \left\{ a_n \cos\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,t\right) + b_n \sin\left(\tfrac{2\pi n}{T}\,t\right) \right\} dt.}$$

De plus, pour x_0 fixé, la convergence est uniforme.

Théorème 14.7 (Identité de Parseval) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique, régulière par morceaux. Alors*

$$\boxed{\frac{2}{T}\int_0^T (f(x))^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).}$$

Corollaire 14.8 (Série de Fourier en cosinus) *Soit $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série suivante converge*

$$F_c f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

où

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{\pi n}{L}y\right) dy.$$

De plus en tous points $x \in (0, L)$ où f est continue l'égalité suivante a lieu

$$F_c f(x) = f(x).$$

Corollaire 14.9 (Série de Fourier en sinus) *Soit $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série suivante converge*

$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

où

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right) dy.$$

De plus en tous points $x \in (0, L)$ où f est continue l'égalité suivante a lieu

$$F_s f(x) = f(x).$$

(Pour plus de détails, cf. [2] 61-73, [6] 239-293, [7] chapitre 17, [10] 53-69, [11] 582-605, [12] 262-281, [13] chapitres 1 à 4).

14.2 Exemples

Remarque Nous utiliserons souvent l'observation élémentaire suivante. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et intégrable sur $[0, T]$ et soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

Exemple 14.10 *Trouver la série de Fourier de $f(x) = \cos x$ avec $T = 2\pi$.*

Discussion On remarque immédiatement que, la fonction donnée étant paire, $b_n = 0$, $\forall\, n$. De même on observe que $a_n = 0$, $\forall\, n \neq 1$ et que

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos x \, dx = 1.$$

Par conséquent

$$F_0 f = 0, \quad F_1 f = \cos x, \quad F_N f = F_1 f = Ff = \cos x, \quad \forall\, N.$$

Exemple 14.11 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, \pi) \\ 0 & si\ x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

et étendue par 2π périodicité à $\mathbb{R}$. Trouver la série de Fourier de f, comparer Ff et f. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Discussion On détermine tout d'abord les coefficients de Fourier. On trouve

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1, \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\,x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n\,x)}{n} \right]_0^{\pi} = 0, \ \forall\, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\,x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n\,x)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} \left[1 - (-1)^n \right]$$

et donc

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On obtient ainsi, par le théorème de Dirichlet,

$$Ff(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\,x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{si } x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

et en particulier, si $x = \pi/2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 14.12 *Trouver la série de Fourier de*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = -\pi \\ x/2 & si\ x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & si\ x = \pi \end{cases}$$

pour $x \in (-\pi, \pi]$ *et étendue par* 2π *périodicité. Comparer* Ff *et* f*. Calculer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Discussion *(i)* Tout d'abord on observe que, comme la fonction donnée est impaire, tous les coefficients $a_n = 0$. Par contre on a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(n\,x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin(n\,x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x}{n} \cos(n\,x) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\,x)}{n}\, dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,. \end{aligned}$$

Comme les hypothèses du théorème 14.3 sont satisfaites, on trouve

$$Ff(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\,x)\,, \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi]\,.$$

(ii) L'idéntité de Parseval donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} \quad dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Exemple 14.13 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & si\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Trouver sa série de Fourier en sinus. Comparer $F_s f$ *et* f*. Peut-on dériver terme à terme la série obtenue ?*

Discussion On applique le corollaire 14.9 avec $L = \pi$. Par conséquent on a, pour $n = 1, 2, \cdots$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\, dx = \frac{4}{n^2 \pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

On trouve en particulier, $b_{2n} = 0$ et

$$b_{2n+1} = \frac{4\,(-1)^n}{(2n+1)^2\, \pi}\,.$$

On obtient donc

$$F_s f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\,(-1)^n}{(2n+1)^2\, \pi} \sin((2n+1)\,x)\,.$$

Par ailleurs, la fonction f étant continue sur $[0,\pi]$ et $f(0) = f(\pi) = 0$, elle peut donc être étendue par imparité à $[-\pi, 0]$, puis par 2π périodicité à $\mathbb{R}$. La fonction ainsi obtenue est continue et sa dérivée est régulière par morceaux et donc par le théorème 14.5 on peut dériver terme à terme sa série de Fourier. Par conséquent, pour tout $x \in (0,\pi)$, excepté $x = \pi/2$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)x).$$

Exemple 14.14 *Soit la fonction 4π périodique f telle que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = -2\pi \\ -(\pi + x)/2 & si\ -2\pi < x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ (\pi - x)/2 & si\ 0 < x < 2\pi \\ 0 & si\ x = 2\pi. \end{cases}$$

Trouver sa série de Fourier. Comparer Ff et f. Peut-on dériver terme à terme la série obtenue ?

Discussion Comme f est impaire on a que $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$Ff(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad \forall x \in [-2\pi, 2\pi].$$

Si on différentiait terme à terme cette série on trouverait pour $x \in (-2\pi, 2\pi)$

$$\frac{d}{dx}[Ff(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \quad \text{alors que} \quad f'(x) = \frac{-1}{2} \text{ si } x \neq 0$$

ce qui est absurde, car la série ci-dessus diverge pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas en effet on ne peut pas appliquer le théorème 14.5 car f n'est pas continue en $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

14.3 Exercices

Exercice 14.1 (i) *Calculer la série de Fourier de $f(x) = e^{(x-\pi)}$ sur $[0, 2\pi)$ et étendue par 2π périodicité.*

(ii) *A l'aide du théorème de Dirichlet comparer* Ff *et* f *sur* $(0, 2\pi)$.

(iii) *A l'aide des deux questions précédentes montrer que*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

Exercice 14.2 (i) *Calculer la série de Fourier de* $f(x) = (x-\pi)^2$ *sur* $[0, 2\pi)$ *et étendue par* 2π *périodicité.*

(ii) *A l'aide du théorème de Dirichlet comparer* Ff *et* f *sur* $[0, 2\pi]$.

(iii) *En déduire que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14.3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 2π *périodique définie par*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & si\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & si\ \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin t & si\ \frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Calculer sa série de Fourier.

Exercice 14.4 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par périodicité de période* 2 *telle que*

$$f(t) = t \quad si\ t \in [0, 2).$$

Trouver son développement de Fourier en notation complexe.

Exercice 14.5 (i) *Ecrire la série de Fourier pour la fonction périodique (de période* 2π*) impaire qui coïncide avec* $x(\pi - x)$ *sur* $[0, \pi]$.

(ii) *En utilisant la partie* (i) *et l'identité de Parseval, en déduire la somme de la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}.$$

Exercice 14.6 *A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3}{4}\pi.$$

Exercice 14.7 (i) *Ecrire la série de Fourier de la fonction* 2π *périodique définie par*

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

(ii) *En déduire les valeurs des séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad et \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 14.8 *Trouver la série de Fourier de* $f(x) = |\cos x|$ *et calculer*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Exercice 14.9 *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π *périodique et paire telle que*

$$f(t) = \sin(3\,t), \quad t \in [0, \pi].$$

Trouver sa série de Fourier.

Exercice 14.10 (i) *Pour* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *donner le développement en série de Fourier de la fonction* 2π *périodique définie, pour* $x \in [-\pi, \pi)$, *par* $f(x) = \cos(\alpha\, x)$.

(ii) *En déduire la formule*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\,\alpha^2} - \frac{\pi}{2\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha\,\pi)}.$$

Exercice 14.11 (i) *En utilisant les notations complexes, développer en série de Fourier la fonction,* 2π *périodique et impaire donnée sur* $[0, \pi]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & si\ \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(ii) *En déduire, pour* $a > 0$, *l'égalité suivante,* $\forall\, x \in [-a, a]$,

$$x = \frac{4}{\pi^2}\, i\, a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\, e^{\frac{i\pi(2k-1)x}{2\,a}}.$$

(iii) *Calculer*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Exercice 14.12 *Soit la fonction* 2π *périodique définie par*

$$f(x) = x + \pi, \quad si\ -\pi \leq x < \pi.$$

Evaluer les différences suivantes

$$|f(x) - F_3 f(x)| \quad en \quad x = -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

et, à l'aide de la formule donnée dans l'exercice 14.13, évaluer

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - F_3 f(x)|^2\, dx.$$

Exercice 14.13 ** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique et régulière par morceaux. Soient a_n et b_n ses coefficients de Fourier et*

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x) \right).$$

(i) *Montrer que*

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - F_N f(x) \right|^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right].$$

(ii) *En déduire l'**inégalité de Bessel***

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx.}$$

Suggestions. 1) Montrer que, $\forall\, k = 0, 1, \ldots, N$,

$$\int_0^{2\pi} F_N f(x) \cos(k\,x)\, dx = \pi\, a_k \quad \textit{et} \quad \int_0^{2\pi} F_N f(x) \sin(k\,x)\, dx = \pi\, b_k\,.$$

2) En observant que

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F_N f(x) \cos(k\,x)\, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k\,x)\, dx \\ &+ \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos(n\,x) \cos(k\,x)\, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(n\,x) \cos(k\,x)\, dx \right\} \end{aligned}$$

en déduire que

$$\int_0^{2\pi} \left(F_N f(x) \right)^2 dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right\}.$$

3) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right\}.$$

4) Déduire le résultat des deux dernières questions.

Exercice 14.14 * *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T périodique. Soient a_n , b_n ses coefficients de Fourier.*

(i) *Montrer que si $f \in C^1$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

(ii) *Plus généralement si $k \geq 1$ et si f est C^k, montrer alors qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{c}{n^k}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Exercice 14.15 * *Montrer (iii) du corollaire 14.4.*

Exercice 14.16 * *Montrer le corollaire 14.8.*

14.4 Corrigés

Exercice 14.1 *(i)* On trouve après calcul

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{(x-\pi)} \cos(n\,x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^y \cos(n\,y + n\pi)\,dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^y \cos(n\,y)\,dy = \frac{2\sinh\pi}{(1+n^2)\,\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{(x-\pi)} \sin(n\,x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^y \sin(n\,y + n\pi)\,dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^y \sin(n\,y)\,dy = \frac{-2\,n\sinh\pi}{(1+n^2)\,\pi}. \end{aligned}$$

(ii) Grâce au théorème de Dirichlet on a que si

$$Ff(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cos(n\,x)}{1+n^2} - \frac{2\,n\sin(n\,x)}{1+n^2} \right)$$

alors

$$Ff(x) = f(x) \quad \text{si } x \in (0, 2\pi).$$

(iii) En particulier si $x = \pi$ on a

$$1 = \frac{\sinh\pi}{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n}{1+n^2} \right)$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} = \frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,.$$

Exercice 14.2 On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\,dy = \frac{2}{3}\,\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(n\,x)\,dx = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos(n\,y)\,dy = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin(n\,x)\,dx = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\sin(n\,y)\,dy = 0.$$

La série de Fourier est donc

$$Ff(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(n\,x)}{n^2}\,.$$

Le théorème de Dirichlet nous assure (noter que f est continue en $x=0$ et $x=2\pi$) alors que

$$Ff(x) = f(x) \quad \text{si } x\in[0,2\pi]$$

et donc, quand on prend respectivement $x=0$ ($f(0)=\pi^2$) et $x=\pi$ ($f(\pi)=0$), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\,\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Exercice 14.3 On observe que f est une fonction impaire et donc $a_n=0$. On trouve par contre, comme f est 2π périodique, que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n\,x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin(n\,x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin(n\,x)\,dx = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n=1 \\ -\frac{2n}{\pi}\,\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1} & \text{si } n\geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc dès que $n\geq 2$ ($b_1=1/2$) que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k+1 \text{ (i.e. impair)} \\ \dfrac{-2n}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n=4k \text{ (i.e. un multiple de 4)} \\ \dfrac{2n}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n=4k+2 \text{ (i.e. pair mais pas un multiple de 4).} \end{cases}$$

Exercice 14.4 On a par définition

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\, e^{-i\pi n\, x}\, dx.$$

Si $n = 0$ on trouve $c_0 = 1$ alors que si $n \neq 0$ on obtient après intégration

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x\, e^{-i\pi n\, x}}{-i\pi n}\right]_0^2 + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^2 e^{-i\pi n\, x}\, dx = \frac{i}{\pi n}$$

et par conséquent

$$Ff\,(x) = 1 + \frac{i}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{i\pi n\, x}}{n}\,.$$

Remarque. Comme n peut être négatif on constate que le membre de droite de $Ff\,(x)$ est bien une fonction réelle.

Exercice 14.5 *(i)* Comme f est impaire on a

$$f\,(x) = \begin{cases} x\,(\pi - x) & \text{si } x \in (0,\pi) \\ x\,(\pi + x) & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

et donc $a_k = 0$ et

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,(x)\sin(k\,x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,(\pi - x)\sin(k\,x)\,dx.$$

On a alors que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\,(\pi - x)\sin(k\,x)\,dx &= \left[-x\,(\pi - x)\,\frac{\cos(k\,x)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(k\,x)}{k}\,(\pi - 2\,x)\,dx \\ &= \left[(\pi - 2\,x)\,\frac{\sin(k\,x)}{k^2}\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(k\,x)}{k^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{k^3}\cos(k\,x)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{k^3}\,(-1)^k + \frac{2}{k^3}\,.\end{aligned}$$

On trouve donc

$$b_k = \frac{4}{\pi\,k^3}\left[1 - (-1)^k\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{8}{\pi\,k^3} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et on obtient alors

$$Ff\,(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)\,x)}{(2k-1)^3}\,.$$

(ii) En utilisant l'idendité de Parseval on trouve

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi-x)^2\,dx=\frac{\pi^4}{15}$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\,.$$

Exercice 14.6 Cet exercice peut, évidemment, être résolu de manière plus élémentaire. Comme $f(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\,x)$, ce qui implique que les coefficients de Fourier sont

$$a_0=1,\quad a_2=\frac{1}{2}\,,\quad a_n=0 \text{ si } n\neq 0,2\quad\text{et}\quad b_n=0\;\forall\,n.$$

On a donc par 2π périodicité et par l'identité de Parseval que

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx=\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{3\pi}{4}\,.$$

Exercice 14.7 *(i)* Tout d'abord on remarque que la fonction est paire, par conséquent $b_k=0$. On trouve que

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi.$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(k\,x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(k\,x)\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin(k\,x)\right]_0^{\pi}-\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(k\,x)\,dx=\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right].\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$a_k=\begin{cases}0 & \text{si } k \text{ est pair}\\ \dfrac{-4}{\pi\,k^2} & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$$

et donc finalement

$$Ff(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\,x)}{(2k+1)^2}.$$

(ii) En utilisant l'identité de Parseval on obtient

$$\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

et on en déduit donc

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^2}{6}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\,.$$

En utilisant le résultat précédent on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}+\frac{\pi^4}{96}\,,$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

Exercice 14.8 *(i)* On observe que la fonction donnée est paire, par conséquent $b_n=0$. On trouve que

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\cos x|\cos(n\,x)\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(n\,x)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\cos(n\,x)\,dx.\end{aligned}$$

Faisons un changement de variable et posons $y=x-\pi$ dans la deuxième intégrale (on rappelle que $\cos(z+n\pi)=(-1)^n\cos z$) on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\cos(n\,x)\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(y+\pi)\cos(n\,(y+\pi))\,dy\\&=(-1)^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(n\,y)\,dy.\end{aligned}$$

Par conséquent en revenant à a_n on a

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(n\,y)\,dy$$

et on déduit immédiatement que si n est impair alors $a_n=0$. Par conséquent en posant $n=2k$ et en utilisant le fait que

$$2\cos y\cos(2k\,y)=\cos((2k+1)\,y)+\cos((2k-1)\,y)$$

on obtient

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((2k+1)\,y)}{2k+1}+\frac{\sin((2k-1)\,y)}{2k-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\,.$$

On a ainsi la série de Fourier

$$Ff(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos(2k\,x)$$

(ii) En prenant $x = \pi/2$, on a $\cos(2k\,x) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et $f(\pi/2) = 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 14.9 Comme f est 2π périodique et paire on a que $b_n = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n\,t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(3\,t) \cos(n\,t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin((3-n)\,t) + \sin((3+n)\,t)\right] dt. \end{aligned}$$

Si $n \neq 3$ (si $n = 3$ on a immédiatement $a_3 = 0$) on obtient alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((3-n)\,t)}{3-n} - \frac{\cos((3+n)\,t)}{3+n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(-1)^{3-n}}{3-n} - \frac{(-1)^{3+n}}{3+n} + \frac{1}{3-n} + \frac{1}{3+n} \right] \end{aligned}$$

et donc

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{2}{3-n} + \dfrac{2}{3+n} \right] = \dfrac{12}{\pi(9-n^2)} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier est alors donnée par

$$Ff(t) = \frac{2}{3\,\pi} + \frac{12}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\,k\,t)}{9 - 4\,k^2}\,.$$

Exercice 14.10 *(i)* Tout d'abord on remarque que la fonction est paire, par conséquent $b_k = 0$. On trouve que

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha\,x) \cos(k\,x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha\,x) \cos(k\,x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos((\alpha+k)\,x) + \cos((\alpha-k)\,x)\right] dx \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+k)\pi)}{\alpha+k}+\frac{\sin((\alpha-k)\pi)}{\alpha-k}\right] \\ &= \frac{(-1)^k \sin(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right] = \frac{(-1)^k \sin(\alpha\pi)}{\pi}\,\frac{2\,\alpha}{\alpha^2-k^2}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall\, x \in [-\pi, \pi)\,,$

$$Ff\,(x) = \frac{\sin(\alpha\,\pi)}{\alpha\,\pi} + \frac{2\,\alpha \sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\alpha^2}\cos(k\,x)\,.$$

(ii) Comme f est continue, on obtient en prenant $x = \pi$

$$\cos(\alpha\,\pi) = \frac{2\,\alpha\sin(\alpha\,\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2\,\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-1)^k}{k^2-\alpha^2}\right],$$

d'où, pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\,\alpha^2} - \frac{\pi}{2\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha\,\pi)}\,.$$

Exercice 14.11 *(i)* En utilisant la notation complexe on trouve

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,n\,x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,e^{-i\,n\,x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}dx\right). \end{aligned}$$

On effectue les changements de variable respectifs, $u = x+\pi$ et $v = x-\pi$, et on obtient

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -u\,e^{i\,n\,\pi}e^{-i\,n\,u}\,du = (-1)^{n+1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u\,e^{-i\,n\,u}\,du$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -v\,e^{-i\,n\,\pi}e^{-i\,n\,v}\,dv = (-1)^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} v\,e^{-i\,n\,v}\,dv$$

et ainsi

$$c_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,e^{-i\,n\,x}\,dx = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2\pi}\left[\left(\frac{i\,x}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-i\,n\,x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,.$$

On trouve immédiatement que si n est pair $c_n = 0$, alors que si n est impair ($n = 2k-1$, alors $e^{-i(2k-1)\pi/2} = -e^{i(2k-1)\pi/2} = (-1)^k\,i$) on obtient

$$c_{2k-1} = \frac{(-1)^k\,2i}{\pi\,(2k-1)^2}\,.$$

Comme f est continue on a pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}.$$

(ii) Si on prend $x \in [-a, a]$, on a que $(\pi/2a)\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$, et par conséquent

$$x = \frac{4ia}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} e^{\frac{i\pi(2k-1)x}{2a}}.$$

(iii) En particulier, pour $x = a$, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 14.12 *(i)* On trouve après calcul que

$$F_3 f(x) = \pi + 2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x)$$

et par conséquent

$$\begin{array}{llll}
F_3 f(-\pi) = \pi & f(-\pi) = 0 & \Rightarrow & f(-\pi) - F_3 f(-\pi) = -\pi \\
F_3 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{4}{3} & f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow & f\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F_3 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \\
F_3 f(0) = \pi & f(0) = \pi & \Rightarrow & f(0) - F_3 f(0) = 0 \\
F_3 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \frac{4}{3} & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} & \Rightarrow & f\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_3 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \\
F_3 f(\pi) = \pi & f(\pi) = 0 & \Rightarrow & f(\pi) - F_3 f(\pi) = -\pi.
\end{array}$$

Remarque. On a $f(\pi) = f(-\pi)$ par 2π périodicité et donc $f(\pi) = 0$ mais $f(\pi - 0) = 2\pi$ alors que $f(-\pi + 0) = f(-\pi) = 0$.

(ii) Par 2π périodicité et par l'exercice 14.13, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(x) - F_3 f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{3} \left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)^2 dx - \pi \left[\frac{(2\pi)^2}{2} + 4 + 1 + \frac{4}{9}\right] \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 - \frac{49}{9}\pi \approx 3.567.
\end{aligned}$$

Exercice 14.13 * *(i)* Appelons

$$I_{N,k} = \int_0^{2\pi} F_N f(x) \cos(k\,x)\, dx \quad \text{et} \quad J_{N,k} = \int_0^{2\pi} F_N f(x) \sin(k\,x)\, dx$$

et calculons

$$\begin{aligned} I_{N,k} &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k\,x)\, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\cos(k\,x)\, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(n\,x)\cos(k\,x)\, dx \right\} \end{aligned}$$

(et idem pour $J_{N,k}$) ce qui donne, $\forall\, k = 0, 1, \cdots, N$,

$$I_{N,k} = \pi\, a_k \quad \text{et} \quad J_{N,k} = \pi\, b_k\,.$$

En utilisant à nouveau la définition de $F_N f$ et le résultat précédent on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (F_N f(x))^2\, dx &= \frac{a_0}{2} I_{N,0} + \sum_{k=1}^{N} (a_k\, I_{N,k} + b_k\, J_{N,k}) \\ &= \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right\}. \end{aligned}$$

On obtient de manière semblable

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} f(x)\cos(n\,x)\, dx + b_n \int_0^{2\pi} f(x)\sin(n\,x)\, dx \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition des a_n et b_n on déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

En combinant tous ces résultats on déduit que

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N f(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)\, F_N f(x)\, dx + \int_0^{2\pi} (F_N f(x))^2\, dx \end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N f(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \right].$$

(ii) Il suffit d'observer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N f(x)|^2 \, dx \geq 0$$

donc, de l'égalité précédente, on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx.$$

On obtient l'inégalité voulue en passant à la limite lorsque $N \to \infty$, i.e.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx.$$

Exercice 14.14 * *(i)* Soit $n \geq 1$. En utilisant la définition de a_n et en intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[f(t) \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)}{\frac{2n\pi}{T}} \right]_0^T - \frac{1}{n\pi} \int_0^T f'(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt \end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_0^T f'(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt \,.$$

On obtient ainsi

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^T |f'(t)| \left|\sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)\right| dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^T |f'(t)| \, dt = \frac{c}{n}$$

avec (se rappeler que f est C^1 et donc f' est bornée)

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^T |f'(t)| \, dt.$$

On procède de manière analogue pour b_n .

(ii) La démonstration de cette dernière partie est très semblable à la précédente. Le résultat est obtenu en intégrant par parties k fois.

Exercice 14.15 * Faisons pour simplifier la démonstration seulement dans le cas $T = 2\pi$.

(i) Commençons par montrer que pour tout $n > 0$

$$c_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}\,, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\, b_n}{2}\,.$$

Observer que, par définition de a_n, b_n et c_n , on peut écrire

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n\,x)\, dx - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n\,x)\, dx \end{aligned}$$

et par conséquent

$$c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}\,.$$

Les deux autres égalités étant montrées de la même façon.

(ii) Par ailleurs, comme

$$\cos(n\,x) = \frac{e^{i\,n\,x} + e^{-i\,n\,x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\,x) = \frac{e^{i\,n\,x} - e^{-i\,n\,x}}{2\,i}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} F_N f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\{a_n\cos(n\,x) + b_n\sin(n\,x)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{a_n - i\,b_n}{2}\, e^{i\,n\,x} + \frac{a_n + i\,b_n}{2}\, e^{-i\,n\,x}\right\}. \end{aligned}$$

(iii) En combinant (i) et (ii) on obtient

$$F_N f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left\{c_n\, e^{i\,n\,x} + c_{-n}\, e^{-i\,n\,x}\right\} = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\,x}$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 14.16 * Soit $\widetilde{f}$ la fonction $2L$ périodique telle que sur $[-L, L]$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0)\,. \end{cases}$$

En faisant un changement de variable $z = -y$ et en utilisant la parité de $\widetilde{f}$, on déduit que

$$\int_{-L}^{0} \widetilde{f}(z)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, z\right) dz = \int_0^L f(y)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, y\right) dy$$

et, par conséquent en utilisant la $2L$ périodicité de $\widetilde{f}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_0^{2L} \widetilde{f}(z)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, z\right) dz &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \widetilde{f}(z)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, z\right) dz \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, y\right) dy. \end{aligned}$$

De même, en invoquant la parité et la $2L$ périodicité de $\widetilde{f}$, on obtient que

$$\frac{1}{L}\int_0^{2L} \widetilde{f}(z)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\, z\right) dz = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \widetilde{f}(z)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\, z\right) dz = 0.$$

Noter que $\widetilde{f}$ satisfait les hypothèses du théorème 14.3 (avec $T = 2L$) et on déduit donc que

$$F\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{2L}\, x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{2L}\, x\right)\right\}$$

où, pour $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$a_n = \frac{2}{2L}\int_0^{2L} \widetilde{f}(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{2L}\, x\right) dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(y)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, y\right) dy$$

$$b_n = \frac{2}{2L}\int_0^{2L} \widetilde{f}(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{2L}\, x\right) dx = 0.$$

Comme $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in (0, L)$, on a que

$$F_c f(x) = F\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}\, x\right)$$

où

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(y)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\, y\right) dy$$

ce qui est le résultat souhaité.

Chapitre 15

Transformées de Fourier

15.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 15.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux (cf. définition 14.1) et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. La* ***transformée de Fourier*** *de f est définie par*

$$\boxed{\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\,\alpha\, y}\, dy.}$$

Remarque Certains auteurs définissent la transformée de Fourier en remplaçant le coefficient $1/\sqrt{2\pi}$ par 1 ou par $1/2\pi$ et parfois $e^{-i\,\alpha\, y}$ par $e^{-2\pi i\,\alpha\, y}$.

Théorème 15.2 *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx < \infty$. Les propriétés suivantes ont lieu.*

(i) ***Continuité.*** *La fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est alors continue et*

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} \left| \widehat{f}(\alpha) \right| = 0.$$

(ii) ***Linéarité.*** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

$$\boxed{\mathfrak{F}(a\, f + b\, g) = a\, \mathfrak{F}(f) + b\, \mathfrak{F}(g)\,.}$$

(iii) ***Dérivées***. *Si de plus* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$, *alors*

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = i\,\alpha\, \mathfrak{F}(f)(\alpha), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^{(k)}(x)\right| dx < \infty$, *pour* $k = 1, 2, \cdots, n$, *alors*

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(f^{(n)}\right)(\alpha) = (i\,\alpha)^n\ \mathfrak{F}(f)(\alpha), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.}$$

(iv) ***Dérivée de la transformée***. *Si de plus* $h_n(x) = x^n f(x)$ *est telle que* $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(x)|\, dx < \infty$, *alors*

$$\boxed{\mathfrak{F}(h_n)(\alpha) = i^n\, \mathfrak{F}^{(n)}(f)(\alpha) = i^n\, \tfrac{d^n}{d\alpha^n}\left[\widehat{f}(\alpha)\right].}$$

(v) ***Décalage***. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *et*

$$g(x) = e^{-i\,b\,x} f(a\,x)$$

alors

$$\boxed{\mathfrak{F}(g)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\, \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha + b}{a}\right).}$$

(vi) ***Convolution***. *Si on définit le produit de convolution par*

$$f * g\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)\, g(t)\, dt$$

alors

$$\boxed{\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathfrak{F}(f)\ \mathfrak{F}(g).}$$

(vii) ***Identité de Plancherel***. *Si en outre* $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx < \infty$, *alors*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right|^2 d\alpha.}$$

Théorème 15.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right| d\alpha < \infty.$$

(i) ***Formule d'inversion****. L'identité suivante a lieu*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{i\,\alpha\,x}\, d\alpha.}$$

(ii) ***Transformée en cosinus****. Si f est paire, alors*

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos(\alpha\, y)\, dy$$

et

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\alpha) \cos(\alpha\, x)\, d\alpha.$$

(iii) ***Transformée en sinus****. Si f est impaire, alors*

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \sin(\alpha\, y)\, dy$$

et

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\alpha) \sin(\alpha\, x)\, d\alpha.$$

(Pour plus de détails, cf. [2] 79-89, [6] 467-484, 503, [7] chapitre 18, [11] 617-635, [13] 246-264, [14] 1-9, [18] 202-204).

15.2 Exemples

Exemple 15.4 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ |x| \le 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Trouver la transformée de Fourier de f.

Discussion Tout d'abord on observe que f est continue par morceaux et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < \infty.$$

On a par définition

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\,\alpha\, y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\,\alpha\, y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{e^{-i\,\alpha\, y}}{i\,\alpha}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{i\,\alpha} - e^{-i\,\alpha}}{2i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,.\end{aligned}$$

Exemple 15.5 *Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Déterminer la transformée de Fourier de f. Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

Discussion *(i)* On a que $f \in C^1$ sauf en 0. En effet f est continue en 0 et

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux. On a également

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2 < \infty.$$

On peut donc calculer $\widehat{f}$ donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\,\alpha\, y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} e^{-i\,\alpha\, y}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{y(1-i\,\alpha)}\, dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-y(1+i\,\alpha)}\, dy\end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{e^{y(1-i\,\alpha)}}{(1-i\,\alpha)}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-y(1+i\,\alpha)}}{(1+i\,\alpha)}\right]_{0}^{+\infty}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\,.$$

(En effet, comme $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to+\infty}\left|e^{-(1+i\,\alpha)y}\right| = \lim_{y\to+\infty}\left|e^{-y}\right| = 0$, idem pour $\lim_{y\to-\infty}\left|e^{(1-i\,\alpha)y}\right| = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$).

(ii) Noter que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right| d\alpha < \infty$$

donc le théorème 15.3 (i) nous assure que

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\,\alpha\, x}}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,\alpha\, x}}{1+\alpha^2}\, d\alpha.$$

En particulier, si $x = 0$, on a que $f(0) = 1$ et ainsi

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}\,.$$

Si $x = 1$, on a

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,\alpha}}{1+\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

On déduit alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

15.3 Exercices

Exercice 15.1 *Trouver la transformée de Fourier de la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 15.2 *Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x) = e^{-x} \cos x.$$

(i) *Calculer la transformée de Fourier en cosinus de f (étendue par parité à $\mathbb{R}$).*

(ii) *Calculer la transformée de Fourier en sinus de f (étendue par imparité à $\mathbb{R}$).*

Exercice 15.3 *Montrer (iii) du théorème 15.2 sous l'hypothèse supplémentaire que*

$$\lim_{|y|\to\infty} \left| f^{(k)}(y) \right| = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Exercice 15.4 *Montrer (v) du théorème 15.2.*

Exercice 15.5 *Montrer (ii) et (iii) du théorème 15.3.*

Exercice 15.6 *Sous les hypothèses du théorème 15.3, montrer que si f est continue et paire, alors*

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f))(t) = \mathfrak{F}\left(\hat{f}\right)(t) = \hat{\hat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Suggestion. Observer que si f est paire, alors $\hat{f}$ est paire.

Exercice 15.7 *Montrer (iv) du théorème 15.2.*

Exercice 15.8 ** Montrer (vi) du théorème 15.2.*

Exercice 15.9 ** Montrer que si*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

alors $\widehat{f}(\alpha) = f(\alpha)$.

15.4 Corrigés

Exercice 15.1 Comme $f = 0$ pour $x < 0$, on a

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x-i\,\alpha\,x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-i\,\alpha}{1+\alpha^2}\,.$$

Exercice 15.2 *(i)* On calcule d'abord

$$\mathfrak{F}_c(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha\,x)\, dx.$$

On trouve, comme $f(x) = e^{-x} \cos x$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_c(f)(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[\frac{\cos((\alpha+1)\,x) + \cos((\alpha-1)\,x)}{2} \right] dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{e^{-x}\left[\cos((\alpha-1)\,x) - (\alpha-1)\sin((\alpha-1)\,x)\right]}{2\left(1+(\alpha-1)^2\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-x}\left[(\alpha+1)\sin((\alpha+1)\,x) - \cos((\alpha+1)\,x)\right]}{2\left(1+(\alpha+1)^2\right)} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathfrak{F}_c(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2+\alpha^2}{(2-2\,\alpha+\alpha^2)(2+2\,\alpha+\alpha^2)}\,.$$

(ii) On détermine maintenant

$$\mathfrak{F}_s(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha\,x)\, dx.$$

On obtient, comme $f(x) = e^{-x}\cos x$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_s(f)(\alpha) &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left[\frac{\sin((\alpha+1)x)+\sin((\alpha-1)x)}{2}\right]dx \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{e^{-x}\left[-(\alpha-1)\cos((\alpha-1)x)-\sin((\alpha-1)x)\right]}{2\left(1+(\alpha-1)^2\right)}\right. \\
&\qquad \left.-\frac{e^{-x}\left[(\alpha+1)\cos((\alpha+1)x)+\sin((\alpha+1)x)\right]}{2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathfrak{F}_s(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha^3}{(2-2\alpha+\alpha^2)(2+2\alpha+\alpha^2)}\,.$$

Exercice 15.3 On écrit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f')(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(y)\,e^{-i\alpha y}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ f(y)\,e^{-i\alpha y}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-i\alpha y}\,dy\right\}.
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse on a que $\lim_{|y|\to\infty}|f(y)| = 0$ et que par ailleurs $\left|e^{-i\alpha y}\right| = 1$, on obtient

$$f(y)\,e^{-i\alpha y}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

et donc

$$\mathfrak{F}(f')(\alpha) = \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-i\alpha y}\,dy = i\alpha\,\mathfrak{F}(f)(\alpha)\,.$$

En itérant le processus on montre également que

$$\mathfrak{F}(f^{(n)})(\alpha) = (i\alpha)^n\,\mathfrak{F}(f)(\alpha)\,,\quad \forall\,\alpha\in\mathbb{R} \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 15.4 Soit

$$g(x) = e^{-ibx}f(ax)$$

on a alors, en posant $z = a\,y$, que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iby}f(ay)\,e^{-i\alpha y}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a}\,e^{-i\,\frac{\alpha+b}{a}\,z}f(z)\,dz = \frac{1}{a}\,\mathfrak{F}(f)\left(\frac{\alpha+b}{a}\right).
\end{aligned}$$

(On a considéré ici que le cas $a > 0$; lorsque $a < 0$ il suffit d'inverser les bornes d'intégration).

Exercice 15.5 *(i)* On écrit

$$\sqrt{2\pi}\,\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos(\alpha\, y)\,dy - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\sin(\alpha\, y)\,dy.$$

Or, comme f est paire

$$y \to f(y)\cos(\alpha\, y) \;\text{ est paire }\quad\text{et}\quad y \to f(y)\sin(\alpha\, y) \;\text{ est impaire}$$

on déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos(\alpha\, y)\,dy = 2\int_{0}^{+\infty} f(y)\cos(\alpha\, y)\,dy$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\sin(\alpha\, y)\,dy = 0.$$

On obtient finalement

$$\widehat{f}(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(y)\cos(\alpha\, y)\,dy$$

(on notera en particulier que $\widehat{f}$ est paire). En procédant de la même façon on déduit également, dans le cas où f est impaire,

$$\widehat{f}(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(y)\sin(\alpha\, y)\;dy$$

(on notera en particulier que $\widehat{f}$ est impaire).

(ii) La formule d'inversion donne

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\,e^{i\,\alpha\,x}\,d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\cos(\alpha\, y)\,dy + i\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\sin(\alpha\, y)\,dy.\end{aligned}$$

On a vu ci-dessus que lorsque f est paire $\widehat{f}$ est paire et donc le même raisonnement que précédemment conduit à

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\cos(\alpha\, x)\,d\alpha.$$

De façon analogue on déduit que si f est impaire $\widehat{f}$ est impaire et donc

$$f(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\sin(\alpha\, x)\,d\alpha.$$

Exercice 15.6 Cet exercice est essentiellement contenu dans le précédent. Utilisons la définition

$$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\,\alpha\, y} dy$$

pour déduire

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f))(t) = \mathfrak{F}\left(\widehat{f}\right)(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{-i\,\alpha\, t} d\alpha.$$

Par hypothèse f est paire et, par la suggestion (cf. aussi l'exercice précédent), on déduit que $\widehat{f}$ aussi est paire, i.e. $\widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}(-\alpha)$. Alors, en utilisant la formule d'inversion, on obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f))(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{-i\,\alpha\, t} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-\alpha)\, e^{-i\,\alpha\, t} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{i\,\alpha\, t} d\alpha = f(t).\end{aligned}$$

Exercice 15.7 On discute seulement le cas $n = 1$, la même démarche donne le cas général $n \geq 1$. Rappelons que $h_1(x) = x\, f(x)$. On suppose aussi que tous les calculs formels ci dessous sont permis

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}'(f)(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,\alpha\, x} dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{d}{d\alpha}\left[e^{-i\,\alpha\, x}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)\, f(x)\, e^{-i\,\alpha\, x} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, e^{-i\,\alpha\, x} dx \\ &= -i\,\mathfrak{F}(h_1)(\alpha)\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathfrak{F}(h_1)(\alpha) = i\,\mathfrak{F}'(f)(\alpha).$$

Exercice 15.8 * On a (les hypothèses nous permettent de permuter les intégrales)

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-t)\, g(t)\; dt\right] e^{-i\,\alpha\, y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y-t)\, e^{-i\,\alpha\, y} dy\right] g(t)\, dt.\end{aligned}$$

On pose $y - t = z$ et on trouve

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-i\,\alpha(t+z)} dz\right] g(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-i\,\alpha\, z} dz\; \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\,\alpha\, t} dt\end{aligned}$$

à savoir

$$\mathfrak{F}(f * g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\, \mathfrak{F}(f)(\alpha)\ \mathfrak{F}(g)(\alpha)\ .$$

Exercice 15.9 * On a clairement que f satisfait les hypothèses du théorème 15.2 et donc

$$\widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-i\,\alpha\, y} dy$$

est bien définie. De plus $\widehat{f}(0) = 1$, car on sait (facile à voir et classique) que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 1.$$

Par la propriété (iv) du théorème 15.2 (on a clairement que $h_1(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(x)|\, dx < \infty$) on déduit que

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\widehat{f}(\alpha)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\, x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\,\alpha\, x} dx.$$

En observant que

$$f'(x) = -x\, f(x)$$

on obtient

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\widehat{f}(\alpha)\right] = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\,\alpha\, x} dx.$$

Par la propriété (iii) du théorème 15.2 (noter que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$) on a donc que

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\widehat{f}(\alpha)\right] = i\,(i\,\alpha)\, \widehat{f}(\alpha) = -\alpha\, \widehat{f}(\alpha)\,.$$

Une intégration immédiate donne que

$$\widehat{f}(\alpha) = \widehat{f}(0)\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

Comme $\widehat{f}(0) = 1$, on a bien montré que

$$\widehat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = f(\alpha)$$

ce qui est le résultat souhaité.

15.5 Table de transformées de Fourier

	$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\lvert b\rvert\,\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-i\,b\,\alpha} - e^{-i\,c\,\alpha}}{i\,\alpha\,\sqrt{2\pi}}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega\,y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(\omega + i\,\alpha)}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega\,y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-(\omega+i\,\alpha)b} - e^{-(\omega+i\,\alpha)c}}{(\omega + i\,\alpha)}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-i\,\omega\,y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-i(\omega+\alpha)b} - e^{-i(\omega+\alpha)c}}{\omega + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-\lvert\omega\,\alpha\rvert}}{\lvert\omega\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert\omega\,y\rvert}}{\lvert\omega\rvert} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$
8	$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\lvert\omega\rvert}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\,\omega^2}}$
9	$f(y) = y\,e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\,\alpha}{2\,\sqrt{2}\,\lvert\omega\rvert^3}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\,\omega^2}}$
10	$f(y) = \frac{4\,y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\lvert\omega\rvert} - \lvert\alpha\rvert\right)e^{-\lvert\omega\,\alpha\rvert}$

Chapitre 16

Transformées de Laplace

16.1 Définitions et résultats théoriques

Définition 16.1 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux (étendue à* $\mathbb{R}$ *de manière que* $f(x) = 0$, $\forall\, x < 0$*) et* $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty$$

(γ_0 *est appelée l'**abscisse de convergence** de* f*). La **transformée de Laplace** de* f *est définie par*

$$\boxed{\mathfrak{L}(f)(z) = F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t z}\, dt, \quad \forall\, z \in \overline{O},}$$

où

$$O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma_0\} \quad \text{et} \quad \overline{O} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \gamma_0\}.$$

Théorème 16.2 *Soient* f, γ_0 *et* O *comme dans la définition précédente. Soit* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (*$g(x) = 0$, $\forall\, x < 0$*) telle que*

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes ont lieu.

(i) ***Holomorphie***. *La transformée de Laplace de* f, F, *est holomorphe dans* O *et si* $g(t) = t\, f(t)$,

$$\boxed{F'(z) = -\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, e^{-t z}\, dt = -\mathfrak{L}(g)(z), \quad \forall\, z \in O.}$$

(ii) ***Linéarité.*** *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\boxed{\mathfrak{L}(a\,f + b\,g) = a\,\mathfrak{L}\,(f) + b\,\mathfrak{L}\,(g)\,.}$$

(iii) ***Dérivées.*** *Si de plus* $f \in C^1\left(\mathbb{R}_+\right)$ *et* $\int_0^{+\infty} \left|f'\left(t\right)\right| e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$, *alors*

$$\mathfrak{L}\left(f'\right)(z) = z\,\mathfrak{L}\left(f\right)(z) - f\left(0\right), \quad \forall\, z \in O.$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n\left(\mathbb{R}_+\right)$ *et* $\int_0^{+\infty} \left|f^{(k)}\left(t\right)\right| e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty$, *pour* $k = 0, 1, 2, \cdots, n$, *alors*

$$\boxed{\mathfrak{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n\,\mathfrak{L}\left(f\right)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k\, f^{(n-k-1)}\left(0\right), \quad \forall\, z \in O.}$$

(iv) ***Intégration.*** *Si* $f \in C\left(\mathbb{R}\right)$, $\gamma_0 \geq 0$ *et*

$$\varphi\left(t\right) = \int_0^t f\left(s\right) ds$$

alors

$$\boxed{\mathfrak{L}\left(\varphi\right)(z) = \frac{\mathfrak{L}\left(f\right)(z)}{z}\,, \quad \forall\, z \in O.}$$

(v) ***Décalage.*** *Si* $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ *et*

$$\varphi\left(t\right) = e^{-b\,t} f\left(a\,t\right)$$

alors

$$\boxed{\mathfrak{L}\left(\varphi\right)(z) = \frac{1}{a}\,\mathfrak{L}\left(f\right)\left(\frac{z+b}{a}\right), \quad \forall\, z \text{ tel que } \operatorname{Re}\left(\frac{z+b}{a}\right) \geq \gamma_0\,.}$$

(vi) ***Convolution.*** *Soit*

$$\left(f * g\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-s\right) g\left(s\right) ds = \int_0^t f\left(t-s\right) g\left(s\right) ds$$

alors

$$\boxed{\mathfrak{L}\left(f * g\right)(z) = \mathfrak{L}\left(f\right)(z)\ \mathfrak{L}\left(g\right)(z)\,, \quad \forall\, z \in \overline{O}.}$$

Théorème 16.3 (Formule d'inversion) *Soient f une fonction continue telle que $f(0) = 0$ ($f(t) \equiv 0$ si $t < 0$) et $F(z) = \mathfrak{L}(f)(z)$ sa transformée de Laplace satisfaisant les conditions suivantes*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\gamma t}\, dt < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + i\, s)|\, ds < \infty$$

pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + i\, s)\, e^{(\gamma + i\, s)t}\, ds = f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.}$$

(Pour plus de détails, cf. [2] 91-109, [3] 75-83, [6] 529-549, [7] chapitre 18, [11] 242-300, [18] 35-70).

16.2 Exemples

Exemple 16.4 *Soit $f(t) \equiv 1$ pour $t \geq 0$. Calculer la transformée de Laplace de f.*

Discussion Tout d'abord on observe que n'importe quel $\gamma_0 > 0$ est abscisse de convergence car

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma_0 t} = -\left.\frac{e^{-\gamma_0 t}}{\gamma_0}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\gamma_0} < \infty.$$

On trouve alors

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t\, z}\, dt = -\left.\frac{e^{-t\, z}}{z}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{z}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0.$$

Exemple 16.5 *Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = e^{a\, t}$ si $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$.*

Discussion On trouve immédiatement que

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{(a-z)t}\, dt = \left.\frac{e^{(a-z)t}}{a - z}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{z - a}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z > a.$$

Exemple 16.6 *Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = t^2$, pour $t \geq 0$.*

Discussion On note que comme $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(t) = 2$, alors

$$\mathfrak{L}(f'')(z) = z^2\, \mathfrak{L}(f)(z) - z\, f(0) - f'(0).$$

En utilisant l'exemple 16.4 qui nous donne

$$\mathfrak{L}(2)(z) = \mathfrak{L}(f'')(z) = \frac{2}{z},$$

on déduit

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{2}{z^3}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0.$$

Exemple 16.7 *Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $z_1, \cdots z_n \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\operatorname{Re} z_j < \gamma, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Soit $F : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Supposons de plus qu'il existe $a, R > 0$, $k > 1$ des constantes telles que

$$|F(z)| \leq \frac{a}{|z|^k}, \quad \forall\, |z| \geq R. \tag{16.1}$$

Trouver, à l'aide du théorème des résidus (cf. théorème 12.1), une fonction f dont la transformée de Laplace est F. On traitera, en particulier, le cas où

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}.$$

Discussion *Etape 1.* Soit la fonction qui pour $t > 0$ fixé est donnée par

$$\widetilde{F}(z) = F(z)\, e^{t\, z}.$$

On calcule alors $\text{Rés}_{z_j}\left(\widetilde{F}\right)$, $j = 1, \cdots, n$. Dans le cas particulier on a $z_1 = -1$ (pôle d'ordre 1) et $z_2 = -2$ (pôle d'ordre 2). On trouve

$$\text{Rés}_{z_1}\left(\widetilde{F}\right) = \lim_{z \to -1}\left[(z+1)\,\widetilde{F}(z)\right] = \lim_{z \to -1}\left[\frac{e^{t\, z}}{(z+2)^2}\right] = e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_2}\left(\widetilde{F}\right) &= \lim_{z \to -2} \frac{d}{dz}\left[(z+2)^2\,\widetilde{F}(z)\right] = \lim_{z \to -2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{t\, z}}{z+1}\right)\right] \\ &= \lim_{z \to -2}\left[\frac{t\, e^{t\, z}(z+1) - e^{t\, z}}{(z+1)^2}\right] = -t\, e^{-2\, t} - e^{-2\, t}. \end{aligned}$$

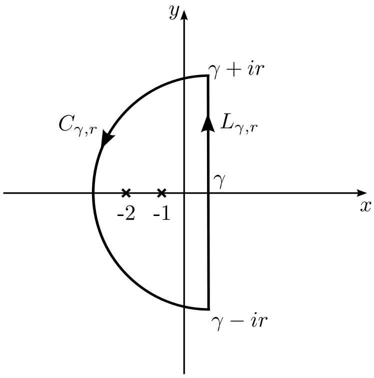
Etape 2. Soient $r > 0$ et $\Gamma_{\gamma,r} = C_{\gamma,r} \cup L_{\gamma,r}$, où

$$C_{\gamma,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \gamma| = r \text{ et } \operatorname{Re} z < \gamma\}$$

$$L_{\gamma,r} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \gamma \text{ et } -r < \operatorname{Im} z < r\}.$$

Dans le cas particulier on peut prendre, par exemple, $\gamma = 0$. On choisit ensuite $r > 0$ suffisamment grand pour que toutes les singularités de F soient à l'intérieur de $\Gamma_{\gamma,r}$. Le théorème des résidus donne

$$\int_{\Gamma_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{z_j}\left(\widetilde{F}\right).$$



Etape 3. En paramétrant $C_{\gamma,r}$ par $\varphi(\theta) = \gamma + r\,e^{i\,\theta}$ avec $\theta \in [\pi/2, 3\,\pi/2]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{C_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\,dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\,\pi}{2}} \widetilde{F}\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right) i\,r\,e^{i\,\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\,\pi}{2}} F\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right) e^{t\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right)} i\,r\,e^{i\,\theta} d\theta.\end{aligned}$$

On observe ensuite que

$$\left| F\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right) e^{t\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right)} i\,r\,e^{i\,\theta} \right| = r\,\left| F\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right) \right| e^{t(\gamma + r\cos\theta)}$$

et donc en invoquant l'hypothèse (16.1) (qui dans le cas particulier a lieu pour $k = 3$) on a, comme $t > 0$ et $\theta \in [\pi/2, 3\,\pi/2]$ (et donc $\cos\theta \leq 0$), que, pour $r > 0$ suffisamment grand,

$$\left| F\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right) e^{t\left(\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right)} i\,r\,e^{i\,\theta} \right| \leq \frac{a\,r\,e^{\gamma\,t}}{\left|\gamma + r\,e^{i\,\theta}\right|^k} \leq \frac{a\,r\,e^{\gamma\,t}}{|r - \gamma|^k}.$$

De ceci on déduit immédiatement que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\,dz = 0.$$

En combinant le calcul précédent et l'étape 2 on obtient

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{L_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\,dz = \lim_{r \to +\infty} \int_{\Gamma_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{z_j}\left(\widetilde{F}\right).$$

On remarque aussi que l'hypothèse (16.1) assure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + i\,s)|\,ds < \infty$.

Etape 4. Des considérations précédentes on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + i\,s)\,e^{(\gamma + i\,s)t}\,ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to +\infty} \int_{L_{\gamma,r}} \widetilde{F}(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{z_j}\left(\widetilde{F}\right).$$

Par conséquent, grâce au théorème 16.3, on trouve que

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{z_j}\left(\widetilde{F}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier on trouve que

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = \begin{cases} e^{-t} - t\,e^{-2\,t} - e^{-2\,t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est la fonction cherchée. A posteriori on peut aussi observer, dans le cas particulier, que la fonction trouvée f satisfait les hypothèses du théorème 16.3 (avec $\gamma = 0$).

16.3 Exercices

Exercice 16.1 *Trouver la transformée de Laplace des fonctions suivantes.*

(i) $f(t) = \cos(k\,t)\,,\ k \in \mathbb{N}$.

(ii) $f(t) = t\,e^{\alpha\,t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) *Impulsion de Dirac*

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \textit{si } t \in [0, \alpha] \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha > 0$. *Calculer* $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathfrak{L}(f_\alpha)\,.$

Exercice 16.2 *Trouver la fonction f telle que sa transformée de Laplace soit*

$$F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,, \quad a \neq b.$$

(On peut, ici, faire un calcul direct sans utiliser le théorème des résidus).

Exercice 16.3 *Trouver la transformée de Laplace de*

$$f(t) = e^{-2\,t}\left(3\cos(6\,t) - 5\sin(6\,t)\right).$$

Exercice 16.4 *Trouver la transformée de Laplace inverse (sans utiliser le théorème des résidus) de*

$$F(z) = \frac{4\,z}{z^2 + 64} \quad \textit{et} \quad F(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}\,.$$

Exercice 16.5 *Trouver, en utilisant le théorème des résidus, la transformée de Laplace inverse de*

$$F(z) = \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\,.$$

Exercice 16.6 *Montrer (i) du théorème 16.2.*

Exercice 16.7 *Montrer (iii) du théorème 16.2, sous l'hypothèse supplémentaire que*

$$\left|f^{(k)}(t)\right| e^{-\gamma_0 t} \leq c, \quad \forall\, t \geq 0 \;\; et \;\forall\, k = 0, \cdots, n-1$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Exercice 16.8 *Montrer (iv) du théorème 16.2 sous l'hypothèse supplémentaire que*

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty.$$

Exercice 16.9 *Montrer (v) du théorème 16.2.*

Exercice 16.10 *Soit* f *satisfaisant les hypothèses du théorème 16.2 et*

$$|f(t)|\, e^{-\gamma_0 t} \leq c, \quad \forall\, t \geq 0$$

pour une certaine constante $c > 0$. *Si* $\mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$, *montrer que*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} [F(z)] = 0.$$

Exercice 16.11 *Soit* f *satisfaisant les hypothèses du théorème 16.2 (iii) et soit* $\mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$. *Montrer que*

(i) *(**Valeur initiale**) Si de plus*

$$|f'(t)|\, e^{-\gamma_0 t} \leq c, \quad \forall\, t \geq 0$$

pour une certaine constante $c > 0$ *alors*

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} [z\, F(z)] = f(0).$$

(ii) *(**Valeur finale**) Si de plus* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt < \infty$ *et* $\lim_{t \to +\infty} [f(t)]$ *existe, alors*

$$\lim_{z \to 0} [z\, F(z)] = \lim_{t \to +\infty} [f(t)].$$

Exercice 16.12 ** Montrer (vi) du théorème 16.2.*

Exercice 16.13 *** (i) *Soit* f *satisfaisant les hypothèses du théorème 16.2. Si de plus on suppose que* f *est périodique de période* $T > 0$, *montrer alors que*

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-T z}} \int_0^T f(t)\, e^{-t z}\, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(ii) *A l'aide de la question précédente, déterminer la transformée de Laplace de la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & si\ 0 \le t < \pi \\ 0 & si\ \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

étendue périodiquement à $\mathbb{R}_+$ *avec période* $T = 2\pi$.

Suggestion. On rappelle que si $|q| < 1$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,.$$

Exercice 16.14 ** Montrer, à l'aide de la formule d'inversion des transformées de Fourier (cf. théorème 15.3), le théorème 16.3.*

16.4 Corrigés

Exercice 16.1 *(i)* D'après la définition, on obtient pour $\operatorname{Re} z > 0$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} \cos(k\,t)\, e^{-t\,z} dt = \left[\frac{\cos(k\,t)\, e^{-t\,z}}{-z}\right]_0^{+\infty} - \frac{k}{z}\int_0^{+\infty} \sin(k\,t)\, e^{-t\,z} dt \\
&= \frac{1}{z} - \frac{k}{z}\left[\left[\frac{\sin(k\,t)\, e^{-t\,z}}{-z}\right]_0^{+\infty} + \frac{k}{z}\int_0^{+\infty} \cos(k\,t)\, e^{-t\,z} dt\right] \\
&= \frac{1}{z} - \frac{k^2}{z^2}\,\mathfrak{L}(f)(z)
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} \cos(k\,t)\, e^{-t\,z} dt = \frac{z}{z^2 + k^2}\,.$$

(ii) On a directement

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} t\, e^{\alpha\,t} e^{-t\,z} dt = \int_0^{+\infty} t\, e^{(\alpha - z)t} dt \\
&= \left[\frac{t\, e^{(\alpha-z)t}}{\alpha - z}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha - z}\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-z)t} dt \\
&= -\frac{1}{\alpha - z}\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-z)t} dt = -\frac{1}{(\alpha - z)^2}\left[e^{(\alpha-z)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(z-\alpha)^2}
\end{aligned}$$

(valable pour $\operatorname{Re}(\alpha - z) < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) > \alpha$).

(iii) On trouve immédiatement que

$$\mathfrak{L}(f_\alpha)(z) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\alpha}\, e^{-t\,z} dt = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{e^{-t\,z}}{-z}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1 - e^{-\alpha\,z}}{z}\right].$$

Par la règle de l'Hôpital on a

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{L}(f_\alpha)(z) = 1.$$

Exercice 16.2 On commence par décomposer F en éléments simples

$$F(z) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right].$$

Comme

$$\mathfrak{L}\left(e^{a\,t}\right)(z) = \frac{1}{z-a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}\left(e^{b\,t}\right)(z) = \frac{1}{z-b}\,,$$

on trouve

$$\frac{1}{b-a}\left[\mathfrak{L}\left(e^{b\,t}\right) - \mathfrak{L}\left(e^{a\,t}\right)\right] = F(z)$$

et donc

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{b\,t} - e^{a\,t}\right].$$

Exercice 16.3 On utilise d'abord la propriété de linéarité de la transformée de Laplace (puis le formulaire) pour écrire

$$\mathfrak{L}(3\cos(6\,t) - 5\sin(6\,t)) = 3\,\mathfrak{L}(\cos(6\,t)) - 5\,\mathfrak{L}(\sin(6\,t)) = \frac{3\,z}{z^2+36} - \frac{30}{z^2+36}\,.$$

Finalement, comme

$$\mathfrak{L}\left(e^{-2\,t}\right)(z) = \frac{1}{z+2}$$

on a par la formule du décalage (avec $a = 1$ et $b = 2$)

$$\mathfrak{L}\left(e^{-2\,t}\left[3\cos(6\,t) - 5\sin(6\,t)\right]\right) = \frac{3\,(z+2) - 30}{(z+2)^2 + 36} = \frac{3\,z - 24}{z^2 + 4\,z + 40}\,.$$

Exercice 16.4 *(i)* En utilisant l'exercice 16.1 on a

$$\mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = 4\,\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{z}{z^2+64}\right)(t) = 4\cos(8\,t)\,.$$

(ii) On écrit

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z+2)(z+1)}\right)(t) &= 2\,\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+2}\right)(t) - \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)(t)\\ &= 2\,e^{-2\,t} - e^{-t}.\end{aligned}$$

Exercice 16.5 On procède comme dans l'exemple 16.7.

Etape 1. On définit

$$\widetilde{F}(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} e^{tz}.$$

Les singularités de $\widetilde{F}$ sont en $z = \pm i$ et ce sont des pôles d'ordre 2. On trouve après un calcul élémentaire, que nous ne détaillons pas, que

$$\text{Rés}_i\left(\widetilde{F}\right) = \lim_{z\to i}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 e^{tz}}{(z+i)^2}\right)\right] = \frac{t\,e^{it} - i\,e^{it}}{4}$$
$$\text{Rés}_{-i}\left(\widetilde{F}\right) = \lim_{z\to -i}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 e^{tz}}{(z-i)^2}\right)\right] = \frac{t\,e^{-it} + i\,e^{-it}}{4}.$$

Etape 2. On procède ensuite exactement comme dans l'exemple (ici on doit prendre $\gamma > 0$, par exemple $\gamma = 1$) avec $\Gamma_r = C_r \cup L_r$ et

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = r \text{ et } \operatorname{Re} z < 1\}$$

$$L_r = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1 \text{ et } -r < \operatorname{Im} z < r\}.$$

Le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\widetilde{F}(z)\,dz &= \frac{t\,e^{it} - i\,e^{it}}{4} + \frac{t\,e^{-it} + i\,e^{-it}}{4} \\ &= \frac{t}{2}\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.\end{aligned}$$

Etape 3. Comme dans l'exemple on a

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r}\widetilde{F}(z)\,dz = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(1+is)\,e^{(1+is)t}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to+\infty}\int_{L_r} F(z)\,e^{tz}\,dz \\ &= \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.\end{aligned}$$

Finalement, grâce au théorème 16.3, on trouve que

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0\end{cases}$$

est la fonction cherchée.

Exercice 16.6 On remarque tout d'abord que la fonction $g(t) = t\,f(t)$ est continue par morceaux ($g(t) \equiv 0$ si $t < 0$) et si $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ (i.e. $z \in O$) alors

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} |g(t)\, e^{-t\,z}|\, dt < \infty$$

(noter en passant que cette implication n'est pas nécessairement vraie si $\operatorname{Re} z = \gamma_0$). Le calcul suivant peut alors facilement être rendu rigoureux

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t\,z}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, \frac{d}{dz}\left(e^{-t\,z}\right) dt \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-t\,z}\, t\, f(t)\, dt = -\mathfrak{L}(g)(z)\,, \quad \forall\, z \in O. \end{aligned}$$

Exercice 16.7 *(i)* On a que

$$\mathfrak{L}(f')(z) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-t\,z}\, dt = \left[f(t)\, e^{-t\,z}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\left(-z\, e^{-t\,z}\right) dt.$$

Comme $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ on déduit que

$$\left|f(t)\, e^{-t\,z}\right| = |f(t)|\, e^{-t\operatorname{Re} z} = |f(t)|\, e^{-\gamma_0 t} e^{-(\operatorname{Re} z - \gamma_0)t} \le c\, e^{-(\operatorname{Re} z - \gamma_0)t}$$

et donc

$$\left|f(t)\, e^{-t\,z}\right| \to 0 \quad \text{si } t \to +\infty.$$

On obtient par conséquent

$$\mathfrak{L}(f')(z) = z \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t\,z}\, dt - f(0) = z\, \mathfrak{L}(f)(z) - f(0)\,.$$

(Noter que l'hypothèse $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, e^{-\gamma_0 t}\, dt < \infty$ a été utilisée pour s'assurer que $\mathfrak{L}(f')$ est bien définie si $\operatorname{Re} z > \gamma_0$).

(ii) Pour montrer le cas général, on procède par induction (le cas $n = 1$ vient d'être démontré). On suppose que le résultat est vrai pour $n - 1$, on va le prouver pour n. On a (comme précédemment $\left|f^{(k)}(t)\, e^{-t\,z}\right| \to 0$, si $t \to +\infty$ et $\operatorname{Re} z > \gamma_0$)

$$\mathfrak{L}(f^{(n)})(z) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-t\,z}\, dt$$

qui nous conduit à

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(f^{(n)})(z) &= \left[f^{(n-1)}(t)\, e^{-t\,z}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f^{(n-1)}(t)\left(-z\, e^{-t\,z}\right) dt \\ &= z\left\{z^{n-1}\, \mathfrak{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-2} z^k\, f^{(n-k-2)}(0)\right\} - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f^{(n)})(z) &= z^n\,\mathfrak{L}(f)(z) - \sum_{k=1}^{n-1} z^k\, f^{(n-k-1)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z^n\,\mathfrak{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k\, f^{(n-k-1)}(0)\,.\end{aligned}$$

Exercice 16.8 Comme $\varphi(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ alors $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)\,, \varphi(0) = 0, \varphi'(t) = f(t)\,$, et de plus par hypothèse

$$\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,e^{-\gamma_0 t}\,dt < \infty\,.$$

Par ailleurs comme $z \in O$ et $\gamma_0 \geq 0$ on déduit que $z \neq 0$. On est donc en mesure d'appliquer (iii) du théorème 16.2

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \mathfrak{L}(\varphi')(z) = z\,\mathfrak{L}(\varphi)(z) - \varphi(0) = z\,\mathfrak{L}(\varphi)(z)$$

et ainsi

$$\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \frac{\mathfrak{L}(f)(z)}{z}\,, \quad \forall\, z \in O.$$

Exercice 16.9 On a immédiatement que si $\varphi(t) = e^{-b\,t} f(a\,t)\,$, alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\varphi)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-b\,t} f(a\,t)\,e^{-t\,z}\,dt = \int_0^{+\infty} f(a\,t)\,e^{-t(z+b)}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a}\,f(s)\,e^{-s\,\frac{(z+b)}{a}}\,ds = \frac{1}{a}\,\mathfrak{L}(f)\left(\frac{z+b}{a}\right)\end{aligned}$$

qui est bien définie pour $\operatorname{Re}\left(\frac{z+b}{a}\right) \geq \gamma_0\,$.

Exercice 16.10 On commence par observer que comme

$$|f(t)|\,e^{-\gamma_0 t} \leq c, \quad \forall\, t \geq 0$$

on a, si $\operatorname{Re} z > \gamma_0\,$, que

$$\begin{aligned}|F(z)| &= \left|\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t\,z}\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)}\,dt\right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-t\operatorname{Re} z}\,dt \leq c\int_0^{+\infty} e^{-t(\operatorname{Re} z - \gamma_0)}\,dt = \frac{c}{\operatorname{Re} z - \gamma_0}\,.\end{aligned}$$

Le résultat découle en laissant tendre $\operatorname{Re} z \to +\infty$.

Exercice 16.11 On a vu (cf. théorème 16.2 (iii)), que

$$z\,F\,(z) - f\,(0) = \mathfrak{L}\,(f')\,(z) = \int_0^{+\infty} f'\,(t)\,e^{-t\,z}\,dt\,.$$

(i) Par ailleurs de l'exercice 16.10, appliqué à f', on déduit que

$$\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} [\mathfrak{L}\,(f')\,(z)] = \lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} \int_0^{+\infty} f'\,(t)\,e^{-t\,z}\,dt = 0.$$

Le résultat suit alors immédiatement, i.e.

$$\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} [z\,F\,(z)] = f\,(0)\,.$$

(ii) On commence par observer que les hypothèses nous assurent que

$$\lim_{z\to 0} \int_0^{+\infty} f'\,(t)\,e^{-t\,z}\,dt = \int_0^{+\infty} f'\,(t)\,dt = \lim_{t\to+\infty} [f\,(t)] - f\,(0)\,,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{z\to 0} [z\,F\,(z)] = \lim_{t\to+\infty} [f\,(t)]\,.$$

Exercice 16.12 * Tout d'abord on remarque que, comme $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$ si $t < 0$,

$$(f * g)\,(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t-s)\,g\,(s)\,ds = \int_0^t f\,(t-s)\,g\,(s)\,ds = \int_0^t f\,(s)\,g\,(t-s)\,ds\,.$$

On a en permutant les intégrales (les hypothèses nous le permettent)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\,(f * g)\,(z) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f\,(s)\,g\,(t-s)\,ds\right] e^{-t\,z}dt \\ &= \int_0^{+\infty} ds \left[\int_s^{+\infty} f\,(s)\,g\,(t-s)\,e^{-t\,z}dt\right].\end{aligned}$$

On pose $t - s = x$ et donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\,(f * g)\,(z) &= \int_0^{+\infty} f\,(s) \left[\int_0^{+\infty} g\,(x)\,e^{-(x+s)z}dx\right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} f\,(s)\,e^{-s\,z}ds \int_0^{+\infty} g\,(x)\,e^{-x\,z}dx \\ &= \mathfrak{L}\,(f)\,(z)\;\mathfrak{L}\,(g)\,(z)\,.\end{aligned}$$

Exercice 16.13 * *(i)* On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t\,z} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\,T}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-t\,z} dt \\ &= \int_0^T f(t)\, e^{-t\,z} dt + \int_T^{2\,T} f(t)\, e^{-t\,z} dt + \int_{2\,T}^{3\,T} f(t)\, e^{-t\,z} dt + \cdots\end{aligned}$$

Si on pose $t = u + n\,T$, on trouve (en utilisant la périodicité de f à savoir $f(u + n\,T) = f(u)$)

$$\int_{n\,T}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-t\,z} dt = \int_0^T f(u + n\,T)\, e^{-(u+n\,T)z} du = e^{-n\,T\,z} \int_0^T f(u)\, e^{-u\,z} du.$$

On obtient ainsi

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\,T\,z}\right) \int_0^T f(u)\, e^{-u\,z} du.$$

Comme par ailleurs $\operatorname{Re} z > 0$ on a que $\left|e^{-T\,z}\right| = e^{-T \operatorname{Re} z} < 1$ et on utilise la suggestion pour déduire le résultat

$$\mathfrak{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-T\,z}} \int_0^T f(t)\, e^{-t\,z} dt.$$

(ii) On va utiliser le résultat de la partie *(i)* avec $T = 2\pi$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f)(z) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi\,z}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-t\,z} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\,z}} \int_0^{\pi} e^{-t\,z} \sin t\, dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi\,z}} \left[\frac{e^{-t\,z}(-z \sin t - \cos t)}{z^2 + 1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi\,z})(z^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Exercice 16.14 * Rappelons que f est continue, $f(0) = 0$ (et $f \equiv 0$ si $t < 0$). Posons $g(t) = f(t)\, e^{-\gamma\,t}$ et observons que pour $s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(g)(s) = \widehat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i\,s\,t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-(\gamma + i\,s)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\gamma + i\,s).\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du théorème 15.3 sur la formule d'inversion de la transformée de Fourier sont satisfaites et on obtient donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(s)\, e^{i\,s\,t} ds = g(t)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\gamma+i\,s)\,e^{i\,s\,t}ds=e^{-\gamma\,t}f(t)\,.$$

On déduit donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\gamma+i\,s)\,e^{(\gamma+i\,s)t}ds=f(t)\,.$$

16.5 Table de transformées de Laplace

	$f(t)$	$\mathfrak{L}(f)(z)=F(z)$	
1	$f_\alpha(t)=\begin{cases}1/\alpha & \text{si } t\in[0,\alpha]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ (impulsion de Dirac)	$F_\alpha(z)=\dfrac{1-e^{-\alpha\,z}}{\alpha\,z}\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}1\quad\forall\,z$	
2	$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$	$F(z)=\dfrac{1}{z}$	$\operatorname{Re}z>0$
3	$f(t)=e^{-\alpha\,t}$	$F(z)=\dfrac{1}{z+\alpha}$	$\operatorname{Re}z>-\alpha$
4	$f(t)=\dfrac{t^n}{n!}$	$F(z)=\dfrac{1}{z^{n+1}}$	$\operatorname{Re}z>0$
5	$f(t)=t\,e^{-\alpha\,t}$	$F(z)=\dfrac{1}{(z+\alpha)^2}$	$\operatorname{Re}z>-\alpha$
6	$f(t)=\sin(\omega\,t)$	$F(z)=\dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re}z>0$
7	$f(t)=\cos(\omega\,t)$	$F(z)=\dfrac{z}{z^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re}z>0$
8	$f(t)=e^{\alpha\,t}\sin(\omega\,t)$	$F(z)=\dfrac{\omega}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re}z>\alpha$
9	$f(t)=e^{\alpha\,t}\cos(\omega\,t)$	$F(z)=\dfrac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re}z>\alpha$

	$f(t)$	$\mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$	
10	$f(t) = \sinh(\omega t)$	$F(z) = \dfrac{\omega}{z^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Re} z > \lvert\omega\rvert$
11	$f(t) = \cosh(\omega t)$	$F(z) = \dfrac{z}{z^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Re} z > \lvert\omega\rvert$
12	$f(t) = e^{\alpha t} \sinh(\omega t)$	$F(z) = \dfrac{\omega}{(z-\alpha)^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Re} z > \alpha + \lvert\omega\rvert$
13	$f(t) = e^{\alpha t} \cosh(\omega t)$	$F(z) = \dfrac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2 - \omega^2}$	$\operatorname{Re} z > \alpha + \lvert\omega\rvert$
14	$f(t) = t \cos(\omega t)$	$F(z) = \dfrac{z^2 - \omega^2}{(z^2 + \omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} z > 0$

Chapitre 17

Applications aux équations différentielles ordinaires

Tout au cours de ce chapitre et du suivant nous allons montrer comment appliquer les résultats des trois chapitres précédents aux équations différentielles. La façon de procéder pour trouver des solutions ne sera pas rigoureuse, le résultat obtenu sera par contre correct et peut être justifié sans trop de difficultés.

17.1 Problème de Cauchy

Exemple 17.1 *La question est de trouver une solution $y = y(t)$ de*

$$\boxed{\begin{cases} a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = f(t) \quad t > 0 \\ y(0) = y_0 \quad et \quad y'(0) = y_1 \end{cases}} \tag{17.1}$$

où $a_0,\ a_1,\ a_2,\ y_0,\ y_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes données ($a_2 \neq 0$) et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donnée ($f(t) \equiv 0$, si $t < 0$) avec une certaine régularité. On traitera en particulier le cas où $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $f(t) = \sin t$, $y_0 = y_1 = 1$, i.e. le problème

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \quad t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Discussion On procèdera à la discussion de ce problème par étapes.

Etape 1. On appelle

$$F(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \quad \text{et} \quad Y(z) = \mathfrak{L}(y)(z)$$

les transformées de Laplace de f et de y respectivement. On utilise ensuite les propriétés de cette transformation (cf. théorème 16.2) pour obtenir

$$\mathfrak{L}(y')(z) = z\,\mathfrak{L}(y)(z) - y(0) = z\,Y - y_0$$

$$\mathfrak{L}\left(y''\right)(z) = z^2\,\mathfrak{L}\left(y\right)(z) - z\,y\left(0\right) - y'\left(0\right) = z^2 Y - z\,y_0 - y_1\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y\right) &= a_2\left(z^2 Y - z\,y_0 - y_1\right) + a_1\left(z\,Y - y_0\right) + a_0 Y \\ &= \mathfrak{L}\left(f\right)(z) = F\left(z\right).\end{aligned}$$

On obtient

$$Y\left(z\right) = \frac{F\left(z\right) + a_2\,y_0\,z + a_2\,y_1 + a_1\,y_0}{a_2\,z^2 + a_1\,z + a_0} = H\left(z\right).$$

Dans le cas particulier $F\left(z\right) = \dfrac{1}{z^2+1}$ (cf. formulaire) et donc

$$H\left(z\right) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{z+1}{z^2+1}\,.$$

Etape 2. La solution est alors donnée en prenant la transformée de Laplace inverse des deux membres de l'idéntité ci-dessus, i.e.

$$y\left(t\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(Y\right)(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(H\right)(t)\,.$$

Dans l'exemple présenté

$$\begin{aligned}y\left(t\right) &= \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{z+1}{z^2+1}\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{3}{2}\,\frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{z^2-1}{\left(z^2+1\right)^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\sin t + \cos t - \frac{1}{2}\,t\cos t.\end{aligned}$$

Etape 3. On vérifie que la méthode heuristique ci-dessus nous a bien permis d'obtenir une solution de (17.1) ; ceci dépend des conditions sur f et sur les coefficients. On remarque aussi qu'en général le problème de Cauchy admet une et une seule solution et donc on a trouvé en fait *la* solution de (17.1).

Exemple 17.2 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, trouver toutes les solutions de*

$$\boxed{\begin{cases} y''\left(t\right) + \lambda\,y\left(t\right) = 0, \quad t > 0 \\ y\left(0\right) = y_0\,, \quad y'\left(0\right) = y_1 \end{cases}}$$

avec $y_0\,, y_1$ arbitraires.

Discussion On distingue différents cas.

Cas 1 : $\lambda = 0$. Le problème devient alors

$$\begin{cases} y''\left(t\right) = 0 \\ y\left(0\right) = y_0\,, \quad y'\left(0\right) = y_1\,. \end{cases}$$

Ici on trouve immédiatement, sans avoir besoin de recourir à la transformation de Laplace,

$$y(t) = y_0 + y_1 t.$$

Cas 2 : $\lambda < 0$. On trouve, à l'aide de l'exemple précédent, que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{y_0 z + y_1}{z^2 + \lambda} = y_0 \frac{z}{z^2 + \lambda} + \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \frac{\sqrt{-\lambda}}{z^2 + \lambda} \\ &= y_0 \, \mathfrak{L}\left(\cosh\left(t\sqrt{-\lambda}\right)\right)(z) + \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \mathfrak{L}\left(\sinh\left(t\sqrt{-\lambda}\right)\right)(z) \end{aligned}$$

et donc

$$y(t) = y_0 \cosh\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh\left(t\sqrt{-\lambda}\right).$$

Cas 3 : $\lambda > 0$. On a, en invoquant à nouveau l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{y_0 z + y_1}{z^2 + \lambda} = y_0 \frac{z}{z^2 + \lambda} + \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\lambda}}{z^2 + \lambda} \\ &= y_0 \, \mathfrak{L}\left(\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right)(z) + \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \mathfrak{L}\left(\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right)(z) \end{aligned}$$

et donc

$$y(t) = y_0 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right).$$

17.2 Problème de Sturm-Liouville

Exemple 17.3 *Soit* $L > 0$*. Trouver* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $y = y(x)$, $y \not\equiv 0$*, solution de*

$$\boxed{\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in (0, L) \\ y(0) = y(L) = 0. \end{cases}} \tag{17.2}$$

(Noter que $y \equiv 0$ *est solution triviale de (17.2)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$*.)*

Discussion On va d'abord étudier, à l'aide de l'exemple 17.2 pour λ fixé, le problème

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{17.3}$$

Puis pour résoudre (17.2) il faudra encore imposer $y(L) = 0$ et examiner pour quelles valeurs de λ nous pourrons trouver des solutions non triviales. Pour cela on est amené à distinguer trois cas.

Cas 1 : $\lambda = 0$. On observe tout d'abord que toute solution de (17.3) est de la forme, y_1 étant arbitraire,

$$y(x) = y_1 x.$$

Comme on veut aussi que $y(L) = 0$, on trouve $y_1 L = 0$ et donc $y_1 = 0$. On en déduit que seule la solution triviale $y \equiv 0$ satisfait (17.2) avec $\lambda = 0$.

Cas 2 : $\lambda < 0$. On a alors que toute solution de (17.3) est de la forme

$$y(x) = \frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh\left(x\sqrt{-\lambda}\right).$$

Si on veut aussi $y(L) = 0$, on doit avoir

$$\frac{y_1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh\left(L\sqrt{-\lambda}\right) = 0,$$

ce qui n'est possible qu'avec $y_1 = 0$. Donc à nouveau, si $\lambda < 0$, il n'y a pas de solution non triviale de (17.2).

Cas 3 : $\lambda > 0$. On a dans ce cas que toute solution de (17.3) s'écrit

$$y(x) = \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(x\sqrt{\lambda}\right).$$

Comme on doit encore imposer $y(L) = 0$ et si on veut une solution non triviale ($\Rightarrow y_1 \neq 0$), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(L\sqrt{\lambda}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(L\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad L\sqrt{\lambda} = n\,\pi, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

En conclusion (pour $\lambda > 0$) il existe des solutions non triviales de (17.2) si $\lambda = (n\pi/L)^2$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. De plus les solutions sont alors données par

$$y(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$$

où α_n est une constante arbitraire.

Exemple 17.4 *Soit* $L > 0$. *Trouver* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $y = y(x)$, $y \not\equiv 0$, *solution de*

$$\boxed{\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in (0, L) \\ y'(0) = y'(L) = 0. \end{cases}} \tag{17.4}$$

Discussion Ce problème est très semblable au précédent (on utilise aussi l'exemple 17.2). On commence par considérer le système

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in (0, L) \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{17.5}$$

On distingue alors les différents cas.

Cas 1 : $\lambda = 0$. On trouve immédiatement que toute solution de (17.5) est de la forme

$$y(x) = y_0 .$$

En particulier pour n'importe quel $y_0 \neq 0$ on a trouvé une solution non triviale de (17.4) avec $\lambda = 0$ (et ceci contrairement à l'exemple précédent).

Cas 2 : $\lambda < 0$. On a alors que la solution générale de (17.5) est donnée par

$$y(x) = y_0 \cosh\left(x\sqrt{-\lambda}\right).$$

Comme $y'(L) = y_0\sqrt{-\lambda}\sinh\left(L\sqrt{-\lambda}\right) = 0$ ne peut être satisfaite que si $y_0 = 0$, on déduit que, quand $\lambda < 0$, il n'y a pas de solution non triviale de (17.4).

Cas 3 : $\lambda > 0$. Cette fois-ci on a que les solutions sont de la forme

$$y(x) = y_0 \cos\left(x\sqrt{\lambda}\right).$$

Si on veut aussi $y'(L) = 0$, on obtient des solutions non triviales ($\Rightarrow y_0 \neq 0$) pour autant que

$$\begin{aligned} y_0 \sin\left(L\sqrt{\lambda}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(L\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad L\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

En conclusion (pour $\lambda > 0$) on a des solutions non triviales de (17.4) lorsque $\lambda = (n\pi/L)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les solutions sont alors données par

$$y(x) = \beta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

où β_n est une constante arbitraire.

17.3 Autres problèmes résolus par l'analyse de Fourier

Exemple 17.5 *Soit f une fonction C^1 et 2π périodique. Soient $m, k \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Trouver une solution $y = y(t)$ du problème suivant*

$$\begin{cases} m\,y''(t) + k\,y(t) = f(t), & t \in (0, 2\pi) \\ y(0) = y(2\pi), & y'(0) = y'(2\pi). \end{cases}$$

Traiter le cas particulier où $f(t) = \cos t$.

Discussion On commence par développer f en série de Fourier

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\,t) + \beta_n \sin(n\,t)).$$

(Dans le cas $f(t) = \cos t$, on a évidemment $\beta_n = 0\ \forall n$ et $\alpha_n = 0\ \forall n \neq 1$ et $\alpha_1 = 1$). Comme on cherche une fonction y qui soit 2π périodique, on postule qu'elle s'écrit

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,t) + b_n \sin(n\,t)).$$

Notre problème consiste donc à déterminer les coefficients a_n et b_n (en fonction des α_n et β_n qui sont connus). En dérivant formellement deux fois $y(t)$ on obtient

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-n^2 a_n\right)\cos(n\,t) + \left(-n^2 b_n\right)\sin(n\,t)\right].$$

Puis on écrit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} m\,y'' + k\,y &= \frac{k\,a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(k - m\,n^2\right) a_n \cos(n\,t) + \left(k - m\,n^2\right) b_n \sin(n\,t)\right] \\ &= f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\,t) + \beta_n \sin(n\,t)). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{k}, \quad a_n = \frac{\alpha_n}{k - m\,n^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\beta_n}{k - m\,n^2}.$$

Dans le cas $f(t) = \cos t$ on trouve $a_n = b_n = 0$ sauf pour $a_1 = \alpha_1/(k-m) = 1/(k-m)$. Donc la solution dans ce cas est

$$y(t) = \frac{\cos t}{k - m}.$$

(Evidemment nous avons supposé dans toute cette analyse que $k/m \neq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exemple 17.6 *Soient $\alpha \neq \pm 1$ et f une fonction C^1 et 2π périodique. Trouver une solution $x = x(t)$ de*

$$\begin{cases} x(t) + \alpha\,x(t - \pi) = f(t), \quad t \in (0, 2\pi) \\ x(0) = x(2\pi). \end{cases}$$

Traiter le cas particulier $f(t) = \cos t + 3\sin(2\,t) + 4\cos(5\,t)$.

Discussion On commence par développer f en série de Fourier

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\,t)+\beta_n\sin(n\,t)\right).$$

(Dans le cas particulier $f(t)=\cos t+3\sin(2\,t)+4\cos(5\,t)$, on trouve $\alpha_1=1$, $\alpha_5=4$, $\beta_2=3$ et tous les autres coefficients sont nuls). Comme on cherche une fonction x qui soit 2π périodique, on l'écrit

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,t)+b_n\sin(n\,t)\right).$$

Il s'agit donc de déterminer les coefficients a_n et b_n (en fonction des α_n et β_n qui sont connus). On a aussi

$$\begin{aligned}x(t-\pi)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,t-n\,\pi)+b_n\sin(n\,t-n\,\pi)\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n a_n\cos(n\,t)+(-1)^n b_n\sin(n\,t)\right].\end{aligned}$$

En revenant à l'équation aux différences on trouve

$$\begin{aligned}&x(t)+\alpha\,x(t-\pi)\\&=\frac{a_0}{2}(1+\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1+\alpha(-1)^n)\,a_n\cos(n\,t)+(1+\alpha(-1)^n)\,b_n\sin(n\,t)\right]\\&=f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\,t)+\beta_n\sin(n\,t)\right).\end{aligned}$$

En égalant les coefficients on obtient (en se rappelant que $\alpha\neq\pm1$)

$$a_0=\frac{\alpha_0}{1+\alpha},\quad a_n=\frac{\alpha_n}{1+\alpha(-1)^n}\quad\text{et}\quad b_n=\frac{\beta_n}{1+\alpha(-1)^n}.$$

Dans l'exemple on trouve donc $a_1=1/(1-\alpha)$, $a_5=4/(1-\alpha)$, $b_2=3/(1+\alpha)$ et tous les autres coefficients sont nuls ; ce qui conduit à

$$x(t)=\frac{\cos t}{1-\alpha}+\frac{4\cos(5\,t)}{1-\alpha}+\frac{3\sin(2\,t)}{1+\alpha}.$$

Exemple 17.7 *Trouver une solution de*

$$x(t)+3\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\tau|}x(t-\tau)\,d\tau=e^{-|t|},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Discussion On divise la discussion en deux étapes.

Etape 1. On calcule pour $\alpha \in \mathbb{R}$ la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$, i.e.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\,\alpha\, t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\,\alpha)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\,\alpha)t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i\,\alpha} + \frac{1}{1-i\,\alpha}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}\,.
\end{aligned}$$

Etape 2. On note tout d'abord que l'équation peut se réécrire ($f * x$ dénotant le produit de convolution)

$$x(t) + 3\,(f * x)(t) = f(t)\,.$$

On applique alors la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation, dénotant $\mathfrak{F}(x)(\alpha) = \hat{x}(\alpha)$, on a

$$\hat{x}(\alpha) + 3\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\alpha)\;\hat{x}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

ce qui nous conduit à

$$\hat{x}(\alpha) = \frac{\hat{f}(\alpha)}{1 + 3\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\alpha^2+7} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+7}\,.$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse et en utilisant le formulaire on trouve

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}(x)(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2+7}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}\, e^{-\sqrt{7}\,|t|}.$$

17.4 Exercices

Exercice 17.1 *Soient* $n \geq 1,\ a_0, a_1, \cdots, a_n,\ y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,$ *et* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction donnée suffisamment régulière. Résoudre*

$$\begin{cases} a_n\, y^{(n)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = f(t)\,, \quad t > 0 \\ y^{(k)}(0) = y_k\,, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{cases}$$

Exercice 17.2 *Trouver des solutions non triviales de*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \quad x \in (0, 2\pi) \\ y(0) = y(2\pi) \quad \textit{et} \quad y'(0) = y'(2\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 17.3 *Trouver $\mu \in \mathbb{R}$ et $v = v(x)$, $v \not\equiv 0$, solution de*

$$\begin{cases} v''(x) + 2\,v'(x) + (1+\mu)\,v(x) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

Exercice 17.4 *Montrer que les solutions de l'équation*

$$r^2 f''(r) + r\,f'(r) - n^2 f(r) = 0, \quad r > 0$$

sont données par ($n \in \mathbb{N}$)

$$f(r) = \begin{cases} a_n\,r^n + a_{-n}\,r^{-n} & si\ n > 0 \\ a_0 + b_0 \log r & si\ n = 0 \end{cases}$$

où a_n et b_0 sont des constantes.

Exercice 17.5 *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique telle que*

$$f(x) = |x|, \quad si\ x \in [-\pi, \pi].$$

(i) *Trouver son développement de Fourier.*

(ii) *Trouver une solution (discuter pour quelles valeurs de α la méthode s'applique) de*

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 y(x)}{dx^4} - \alpha\,y(x) = f(x) \\ y(x+2\pi) = y(x). \end{cases}$$

Exercice 17.6 *Trouver une solution de*

$$\begin{cases} x'\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) + x(t) = 1 + 2\cos t + \sin(2\,t) \\ x(t+2\pi) = x(t). \end{cases}$$

Suggestion. On pourra commencer par écrire $\sin\left(n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $\cos\left(n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ *quand $n = 4k$, $4k-1$, $4k-2$, $4k-3$ où $k \geq 1$ est un entier.*

Exercice 17.7 *Trouver une fonction $x = x(t)$ telle que, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, on ait*

$$\begin{cases} x''(t) + 5\,x'(t-\pi) - x(t) = \cos t - 3\sin(2\,t) + 2 \\ x(t+2\pi) = x(t). \end{cases}$$

Exercice 17.8 (i) *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique et paire telle que*

$$f(t) = \sin(3\,t), \quad t \in [0, \pi].$$

Trouver sa série de Fourier.

(ii) *Trouver une fonction 2π périodique et paire telle que*

$$x(t) - 2\,x(t-\pi) = \sin(3\,t), \quad t \in [0, \pi].$$

Exercice 17.9 (i) *Soit f une fonction 2π périodique et C^1. Trouver des solutions 2π périodiques $x = x(t)$ (en fonction de f) de*

$$x'(t) + 2\,x(t-\pi) = f(t)$$

(ii) *Ecrire explicitement $x(t)$ quand $f(t) = 1 + 4\sin(6\,t)$.*

Exercice 17.10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique et C^1. Soit $\alpha \neq 0$ et soit l'équation différentielle*

$$x'(t) + \alpha\,x(t) = f(t).$$

Trouver une solution T périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous forme de séries de Fourier. Appliquer ce résultat au cas où $\alpha = 1$, $T = 2\pi$ et f est la fonction suivante (écrire les premiers termes)

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & si\ 0 \leq t < \pi \\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & si\ \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 17.11 *Soient*

$$f(t) = e^{-|t|} \quad et \quad g(t) = t\,e^{-t^2}.$$

Résoudre

$$3\,y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y''(\tau) - y(\tau)\right] f(t-\tau)\,d\tau = g(t).$$

Exercice 17.12 ** Cet exercice propose, sur un exemple, une autre manière de résoudre un problème du type de l'exemple 17.1 (cf. chapitre 22 dans [7]). Soit le problème*

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0 \quad t > 0 \\ y(0) = y_0 \quad et \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

où

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n \quad et \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,t^n$$

L'idée est de chercher des solutions de la forme

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,t^n$$

où $y_2, y_3, \cdots$ sont à déterminer. Traiter le cas de l'équation d'Airy donnée par

$$\begin{cases} y''(t) + t\,y(t) = 0, \quad si\ t > 0 \\ y(0) = y_0 \quad et \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

17.5 Corrigés

Exercice 17.1 On procède formellement (pour que le calcul suivant soit rigoureux il faut des hypothèses appropriées sur les coefficients et sur f). On appelle

$$F(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \quad \text{et} \quad Y(z) = \mathfrak{L}(y)(z)$$

les transformées de Laplace de f et de y respectivement. On utilise ensuite les propriétés de cette transformation pour avoir

$$\mathfrak{L}\left(y^{(n)}\right)(z) = z^n \mathfrak{L}(y)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k y^{(n-k-1)}(0) = z^n Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k y_{n-k-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{L}(y')(z) = z\,\mathfrak{L}(y)(z) - y(0) = zY(z) - y_0\,.$$

On a par ailleurs

$$\mathfrak{L}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\, y^{(l)}\right)(z) = \sum_{l=0}^{n} a_l\, \mathfrak{L}\left(y^{(l)}\right)(z) = \mathfrak{L}(f)(z) = F(z)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{n} a_l \left[z^l\, Y(z) - \sum_{k=0}^{l-1} z^k\, y_{l-k-1} \right] + a_0 Y(z) \\ &= \sum_{l=0}^{n} a_l\, z^l\, Y(z) - \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{l-1} a_l\, z^k\, y_{l-k-1} = F(z)\,. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$Y(z) = \frac{F(z) + \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{l-1} a_l\, z^k\, y_{l-k-1}}{\sum\limits_{l=0}^{n} a_l\, z^l}\,.$$

La solution du système donné est obtenue en appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, i.e.

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}(Y)(t)\,.$$

Exercice 17.2 *Méthode 1.* On résoud par la transformée de Laplace

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0 \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Soit donc $Y(z) = \mathfrak{L}(y)(z)$. On sait que $\mathfrak{L}(y'')(z) = z^2\, Y(z) - z\, y_0 - y_1$. On a donc

$$z^2\, Y - z\, y_0 - y_1 + \lambda\, Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{z\, y_0 + y_1}{z^2 + \lambda}\,.$$

On étudie séparément les cas $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ et $\lambda > 0$. On applique ici les résultats établis dans l'exemple 17.2.

Cas 1 : $\lambda = 0$. On a alors que la solution est trivialement donnée par

$$y(x) = y_0 + y_1\, x.$$

Comme par ailleurs on veut que $y(0) = y(2\pi)$ et $y'(0) = y'(2\pi)$ on trouve $y_1 = 0$. En conclusion, si $\lambda = 0$ on a bien une solution non triviale et elle est de la forme

$$y(x) = \alpha_0\,.$$

Cas 2 : $\lambda < 0$. C'est-à-dire $\lambda = -\mu^2$. On a vu dans l'exemple que

$$y(x) = y_0 \cosh(\mu\, x) + \frac{y_1}{\mu} \sinh(\mu\, x)\,.$$

Par ailleurs on veut $y(0) = y(2\pi)$ et $y'(0) = y'(2\pi)$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_0 \cosh(2\pi\,\mu) + \dfrac{y_1}{\mu} \sinh(2\pi\,\mu) = y_0 \\ y_0\,\mu \sinh(2\pi\,\mu) + y_1 \cosh(2\pi\,\mu) = y_1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible à moins que $y_0 = y_1 = 0$ (ce qui nous donne la solution triviale). En conclusion, il n'y a pas de solution non triviale du problème si $\lambda < 0$.

Cas 3 : $\lambda > 0$. C'est-à-dire $\lambda = \mu^2$. On trouve comme dans l'exemple que

$$y(x) = y_0 \cos(\mu\, x) + \frac{y_1}{\mu} \sin(\mu\, x)\,.$$

Par ailleurs on voudrait que $y(0) = y(2\pi) = y_0$ et $y'(0) = y'(2\pi) = y_1$, ce qui donne

$$\begin{cases} y_0 \cos(2\pi\,\mu) + \dfrac{y_1}{\mu} \sin(2\pi\,\mu) = y_0 \\ -y_0\,\mu \sin(2\pi\,\mu) + y_1 \cos(2\pi\,\mu) = y_1 \end{cases}$$

Ceci n'est possible que si $\mu = n \in \mathbb{Z}$ et donc $\lambda = n^2$. En conclusion : si $\lambda = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, le problème a une solution qui est de la forme

$$y(x) = \alpha_n \cos(n\, x) + \beta_n \sin(n\, x)\,.$$

Méthode 2. On procède par calcul formel. On cherche des solutions de la forme

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\alpha_n\, x) + b_n \sin(\alpha_n\, x)\right)$$

$\alpha_n > 0$. En dérivant on obtient

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = \lambda\, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda - \alpha_n^2\right) \left(a_n \cos(\alpha_n\, x) + b_n \sin(\alpha_n\, x)\right) = 0.$$

On distingue alors différents cas.

Cas 1 : $\lambda = 0$. Dans ce cas on déduit que $a_n = b_n = 0$, $\forall\, n \geq 1$ et donc $y\,(x) = a_0/2$. Comme
$$y\,(0) = y\,(2\pi)$$
on a qu'il existe une solution non triviale et elle satisfait
$$y\,(x) \equiv a = \text{constante}.$$

Cas 2 : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq (\alpha_n)^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n = b_n = 0$, et par conséquent il n'existe pas de solution non triviale, i.e.
$$y\,(x) \equiv 0.$$

Cas 3 : $\lambda \neq 0$ et $\exists\, \overline{n} : \lambda = (\alpha_{\overline{n}})^2$. Alors $a_n = b_n = 0$, $\forall\, n \neq \overline{n}$, tandis que pour $n = \overline{n}$,
$$y\,(x) = a_{\overline{n}} \cos\left(\alpha_{\overline{n}}\, x\right) + b_{\overline{n}} \sin\left(\alpha_{\overline{n}}\, x\right).$$
Si on veut de plus
$$y\,(0) = y\,(2\pi) \quad \text{et} \quad y'\,(0) = y'\,(2\pi)$$
on trouve
$$\begin{cases} a_{\overline{n}} = a_{\overline{n}} \cos\left(2\pi\, \alpha_{\overline{n}}\right) + b_{\overline{n}} \sin\left(2\pi\, \alpha_{\overline{n}}\right) \\ b_{\overline{n}}\, \alpha_{\overline{n}} = -a_{\overline{n}}\, \alpha_{\overline{n}} \sin\left(2\pi\, \alpha_{\overline{n}}\right) + b_{\overline{n}}\, \alpha_{\overline{n}} \cos\left(2\pi\, \alpha_{\overline{n}}\right). \end{cases}$$
Ceci n'est possible que si $\alpha_{\overline{n}} = n \in \mathbb{Z}$ et donc $\lambda = n^2$. Par conséquent, le problème donné a une solution de la forme
$$y\,(x) = a_n \cos\left(n\, x\right) + b_n \sin\left(n\, x\right).$$

Exercice 17.3 On commence par résoudre le problème
$$\begin{cases} v''\,(x) + 2\, v'\,(x) + (1+\mu)\, v\,(x) = 0 \\ v\,(0) = 0 \quad \text{et} \quad v'\,(0) = \alpha. \end{cases} \tag{17.6}$$
On trouve par l'exemple 17.1, si V est la transformée de Laplace de v, que
$$V\,(z) = \frac{\alpha}{z^2 + 2\,z + 1 + \mu} = \frac{\alpha}{\sqrt{|\mu|}}\, \frac{\sqrt{|\mu|}}{(z+1)^2 + \mu}\,.$$
On trouve donc que les solutions de (17.6) sont données par
$$v\,(x) = \begin{cases} \alpha\, x\, e^{-x} & \text{si } \mu = 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{|\mu|}}\, e^{-x} \sin\left(x\,\sqrt{|\mu|}\right) & \text{si } \mu > 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{|\mu|}}\, e^{-x} \sinh\left(x\,\sqrt{|\mu|}\right) & \text{si } \mu < 0. \end{cases}$$

Pour résoudre notre problème il faut encore que $v(\pi) = 0$. Pour cela seul le cas $\mu > 0$ peut se présenter et on trouve donc

$$\sin\left(\pi\sqrt{|\mu|}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = n^2.$$

En conclusion les solutions non triviales de notre problème sont données par $\mu = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et (α_n étant des constantes)

$$v_n(x) = \alpha_n e^{-x} \sin(n x)\ .$$

Exercice 17.4 Il suffit de vérifier que la solution donnée satisfait bien l'équation. Nous allons expliquer toutefois une méthode heuristique pour trouver cette solution (voir aussi l'exercice 17.12). On commence par considérer le cas $n \geq 1$. On cherche des solutions de la forme

$$f_n(r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k r^k.$$

En dérivant (deux fois) $f_n(r)$ et en introduisant son expression dans l'équation donnée ($r^2 f''(r) + r f'(r) - n^2 f(r) = 0$), on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left(k^2 - n^2\right) r^k = 0.$$

Comme l'équation doit être satisfaite pour tout $r > 0$ on déduit que si $n \neq |k|$, alors $a_k = 0$. Si $n = k$, alors une solution non triviale de l'équation est donnée par

$$a_n r^n + a_{-n} r^{-n}\ .$$

Quand $n = 0$, la méthode ci-dessus ne donne que la solution a_0. Toutefois une intégration immédiate de l'équation $r f'' + f' = 0$ donne la solution

$$a_0 + b_0 \log r.$$

En résumant on a bien

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n r^n + a_{-n} r^{-n} & \text{si } n = 1, 2, 3 \cdots \\ a_0 + b_0 \log r & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Exercice 17.5 *(i)* Comme f est paire et 2π périodique on trouve $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(n x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(n x)\,dx$$

ce qui donne $a_0 = \pi$ et quand $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(n\,x)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n\,x)}{n}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(n\,x)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi\,n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi\,n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$Ff(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\,x)}{(2k+1)^2}\,.$$

(ii) On cherche des solutions de la forme

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,x) + b_n\sin(n\,x)\right).$$

On a que

$$y^{(iv)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(a_n\cos(n\,x) + b_n\sin(n\,x)\right).$$

En retournant à l'équation on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^4y(x)}{dx^4} - \alpha\,y(x) &= -\alpha\,\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4-\alpha\right)\left(a_n\cos(n\,x) + b_n\sin(n\,x)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\,x)}{(2k+1)^2}\,. \end{aligned}$$

On identifie les coefficients (ceci n'est possible que si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq (2k+1)^4$, $k \in \mathbb{N}$) et on trouve

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\pi}{\alpha}\,, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = b_{2k+1} = 0 \\ a_{2k+1} &= -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2k+1)^2\left((2k+1)^4-\alpha\right)}\,. \end{aligned}$$

La solution correspondante est donnée par

$$y(x) = -\frac{\pi}{2\,\alpha} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\,x)}{(2k+1)^2\left((2k+1)^4-\alpha\right)}\,.$$

Exercice 17.6 On cherche une solution de la forme

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,t) + b_n\sin(n\,t)\right).$$

En dérivant on trouve

$$x'\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n\,a_n\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+n\,b_n\cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right].$$

Comme

$$\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin(n\,t)\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)-\cos(n\,t)\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos(n\,t)\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)+\sin(n\,t)\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

il nous faut distinguer quatre cas : $n=4k$, $n=4k-1$, $n=4k-2$ et $n=4k-3$. On a respectivement

$$\begin{array}{ll}
\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin(4k\,t) & \cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos(4k\,t)\\
\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos((4k-1)\,t) & \cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sin((4k-1)\,t)\\
\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sin((4k-2)\,t) & \cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\cos((4k-2)\,t)\\
\sin\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\cos((4k-3)\,t) & \cos\left(n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin((4k-3)\,t)\ .
\end{array}$$

On a ainsi

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{4k}+A_{4k-1}+A_{4k-2}+A_{4k-3}\right]$$

où

$$A_{4k}=a_{4k}\cos(4k\,t)+b_{4k}\sin(4k\,t)$$
$$A_{4k-1}=a_{4k-1}\cos((4k-1)\,t)+b_{4k-1}\sin((4k-1)\,t)$$
$$A_{4k-2}=a_{4k-2}\cos((4k-2)\,t)+b_{4k-2}\sin((4k-2)\,t)$$
$$A_{4k-3}=a_{4k-3}\cos((4k-3)\,t)+b_{4k-3}\sin((4k-3)\,t)$$

De même

$$x'\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_{4k}+B_{4k-1}+B_{4k-2}+B_{4k-3}\right]$$

où

$$B_{4k}=-4k\,a_{4k}\sin(4k\,t)+4k\,b_{4k}\cos(4k\,t)$$
$$B_{4k-1}=-(4k-1)\,a_{4k-1}\cos((4k-1)\,t)-(4k-1)\,b_{4k-1}\sin((4k-1)\,t)$$
$$B_{4k-2}=(4k-2)\,a_{4k-2}\sin((4k-2)\,t)-(4k-2)\,b_{4k-2}\cos((4k-2)\,t)$$
$$B_{4k-3}=(4k-3)\,a_{4k-3}\cos((4k-3)\,t)+(4k-3)\,b_{4k-3}\sin((4k-3)\,t)$$

L'équation donnée devient

$$
\begin{aligned}
&x'\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+x(t)\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{4k}+B_{4k}+A_{4k-1}+B_{4k-1}+A_{4k-2}+B_{4k-2}+A_{4k-3}+B_{4k-3}\right]\\
&=1+2\cos t+\sin(2\,t)\,.
\end{aligned}
$$

En identifiant les coefficients on trouve $a_0=2$ et

$$
\begin{gathered}
a_{4k}+4k\,b_{4k}=b_{4k}-4k\,a_{4k}=0,\quad \forall\,k\geq 1\\
(2-4k)\,a_{4k-1}=(2-4k)\,b_{4k-1}=0,\quad \forall\,k\geq 1\\
b_{4k-2}+(4k-2)\,a_{4k-2}=\begin{cases}1 & \text{si } k=1\\ 0 & \text{si } k\geq 2\end{cases}\\
a_{4k-2}-(4k-2)\,b_{4k-2}=0,\quad \forall\,k\geq 1\\
(4k-2)\,a_{4k-3}=\begin{cases}2 & \text{si } k=1\\ 0 & \text{si } k\geq 2\end{cases}\qquad \text{et}\quad (4k-2)\,b_{4k-3}=0,\ \forall\,k\geq 1.
\end{gathered}
$$

On en déduit $a_0=2$ et

$$
\begin{gathered}
a_{4k}=b_{4k}=0,\ \forall\,k\geq 1\quad \text{et}\quad a_{4k-1}=b_{4k-1}=0,\ \forall\,k\geq 1\\
a_2=\frac{2}{5}\,,\quad b_2=\frac{1}{5}\,,\quad a_{4k-2}=b_{4k-2}=0,\ \forall\,k\geq 2\\
a_1=1,\quad a_{4k-3}=0,\ \forall\,k\geq 2,\quad b_{4k-3}=0,\ \forall\,k\geq 1
\end{gathered}
$$

et finalement

$$x(t)=1+\cos t+\frac{2}{5}\cos(2\,t)+\frac{1}{5}\sin(2\,t)\ .$$

Exercice 17.7 On cherche une solution de la forme

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,t)+b_n\sin(n\,t)\right).$$

En dérivant on obtient

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\sin(n\,t)+n\,b_n\cos(n\,t)\right)$$

$$
\begin{aligned}
x'(t-\pi)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\sin(n\,t-n\,\pi)+n\,b_n\cos(n\,t-n\,\pi)\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\,(-1)^n\sin(n\,t)+n\,b_n\,(-1)^n\cos(n\,t)\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n\left(b_n\cos(n\,t)-a_n\sin(n\,t)\right)
\end{aligned}
$$

$$x''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2a_n\cos(n\,t)-n^2b_n\sin(n\,t)\right).$$

En revenant à l'équation on déduit

$$\begin{aligned}&x''(t)+5\,x'(t-\pi)-x(t)\\&=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[-a_n+5\,n\,(-1)^n\,b_n-n^2a_n\right]\cos(n\,t)\right.\\&\left.+\left[-b_n-5\,n\,(-1)^n\,a_n-n^2b_n\right]\sin(n\,t)\right\}.\end{aligned}$$

Comme on veut que

$$x''(t)+5\,x'(t-\pi)-x(t)=2+\cos t-3\sin(2\,t),$$

on trouve que $a_n=b_n=0$, $\forall\,n\geq 3$ et

$$a_0=-4,\ \left\{\begin{array}{l}-a_1-5\,b_1-a_1=1\\-b_1+5\,a_1-b_1=0\end{array}\right.,\ \left\{\begin{array}{l}-a_2+10\,b_2-4\,a_2=0\\-b_2-10\,a_2-4\,b_2=-3.\end{array}\right.$$

On a ainsi

$$a_0=-4,\quad a_1=-\frac{2}{29},\quad b_1=-\frac{5}{29},\quad a_2=\frac{6}{25},\quad b_2=\frac{3}{25}$$

et donc

$$x(t)=-2-\frac{2}{29}\cos t-\frac{5}{29}\sin t+\frac{6}{25}\cos(2\,t)+\frac{3}{25}\sin(2\,t).$$

Exercice 17.8 *(i)* On a vu dans l'exercice 14.9 que (f est continue)

$$f(t)=Ff(t)=\frac{2}{3\,\pi}+\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k\,t)}{9-4\,k^2}.$$

(ii) On cherche donc une solution de la forme

$$x(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\,t)+\beta_n\sin(n\,t)\right)$$

(comme on veut que $x(t)$ soit paire il faut que $\beta_n=0$) et par conséquent

$$x(t-\pi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\,\alpha_n\cos(n\,t)\right].$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}x(t)-2\,x(t-\pi)&=-\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\left(1-2\,(-1)^n\right)\cos(n\,t)\right]\\&=\frac{2}{3\,\pi}+\frac{12}{\pi}\sum_{n\ pair}\frac{\cos(n\,t)}{9-n^2}.\end{aligned}$$

On déduit donc que $\alpha_n = 0$ si n est impair et si n est pair

$$\alpha_0 = -\frac{4}{3\pi} \quad \text{et} \quad \alpha_n = -\frac{12}{\pi\,(9-n^2)}\,.$$

La solution est donc donnée par

$$x(t) = -f(t) = -\frac{2}{3\pi} - \frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k\,t)}{9-4\,k^2}\,.$$

Exercice 17.9 *(i)* On cherche à nouveau des solutions de la forme

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,t) + b_n\sin(n\,t)\right).$$

On déduit ainsi que

$$\begin{aligned} x(t-\pi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,(-1)^n\cos(n\,t) + b_n\,(-1)^n\sin(n\,t)\right) \\ x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-a_n\sin(n\,t) + b_n\cos(n\,t)\right). \end{aligned}$$

On développe f en série de Fourier

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\,t) + \beta_n\sin(n\,t)\right).$$

En revenant à l'équation donnée on peut écrire

$$\begin{aligned} &x'(t) + 2\,x(t-\pi) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n\,b_n + 2\,(-1)^n\,a_n\right)\cos(n\,t) + \left(-n\,a_n + 2\,(-1)^n\,b_n\right)\sin(n\,t)\right] \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\,t) + \beta_n\sin(n\,t)\right) = f(t)\,. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients on trouve

$$\alpha_0 = 2\,a_0\,, \quad \alpha_n = n\,b_n + 2\,(-1)^n\,a_n \quad \text{et} \quad \beta_n = -n\,a_n + 2\,(-1)^n\,b_n$$

soit

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2}\,, \quad a_n = \frac{2\,(-1)^n\,\alpha_n - n\,\beta_n}{4+n^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{n\,\alpha_n + 2\,(-1)^n\,\beta_n}{4+n^2}\,.$$

(ii) Si $f(t) = 1 + 4\sin(6\,t)$, alors on a que $\alpha_i = 0$, $\forall\, i \neq 0$, $\alpha_0 = 2$, $\beta_i = 0$, $\forall\, i \neq 6$, $\beta_6 = 4$. La solution est alors

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\cos(6\,t) + \frac{1}{5}\sin(6\,t)\,.$$

Exercice 17.10 On développe f en série de Fourier (les coefficients a_n et b_n sont alors connus)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) \right]$$

puis on cherche une solution de la forme (les coefficients A_n et B_n sont inconnus)

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) \right]$$

et donc

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi n}{T}\, B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) - \frac{2\pi n}{T}\, A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) \right].$$

En revenant à l'équation on a

$$\begin{aligned} x'(t) + \alpha\, x(t) = \frac{\alpha\, A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[& \left(\frac{2\pi n}{T}\, B_n + \alpha\, A_n \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) \\ & + \left(\alpha\, B_n - \frac{2\pi n}{T}\, A_n \right) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\, t\right) \Bigg]. \end{aligned}$$

On égale les coefficients et on déduit ainsi

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{a_0}{\alpha} \\ \dfrac{2\pi n}{T}\, B_n + \alpha\, A_n = a_n \\ \alpha\, B_n - \dfrac{2\pi n}{T}\, A_n = b_n \end{cases}$$

et donc

$$A_0 = \frac{a_0}{\alpha}\,, \quad A_n = \frac{\alpha\, a_n - \frac{2\pi n}{T}\, b_n}{\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \alpha^2} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{\frac{2\pi n}{T}\, a_n + \alpha\, b_n}{\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \alpha^2}\,.$$

On va maintenant appliquer ce résultat au cas où $T = 2\pi$, $\alpha = 1$ et f est la fonction donnée. Tout d'abord on détermine les coefficients de Fourier de f

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[-\left(x - \frac{3\pi}{2} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} \right] dx = \frac{\pi^2}{2}$$

et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(n\,x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[-\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] \cos(n\,x)\,dx \\ &= \frac{1 - \cos(n\pi)}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(n\,x)\,dx \end{aligned}$$

et donc

$$a_n = \frac{1 - \cos(n\pi)}{\pi} \, \frac{(1 + \cos(n\pi))\,\pi}{n^2} = 0.$$

De même

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(n\,x)\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left[-\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] \sin(n\,x)\,dx \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(n\,x)\,dx + \frac{\pi}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\,x)\,dx \end{aligned}$$

et par conséquent

$$b_n = \frac{-4\,(1 - (-1)^n)}{\pi\, n^3}\,.$$

On trouve ainsi

$$A_0 = \frac{\pi^2}{2}\,, \quad A_{2k} = B_{2k} = 0,$$

$$A_{2k+1} = \frac{8}{\pi\,(2k+1)^2 \left((2k+1)^2 + 1\right)} \quad \text{et} \quad B_{2k+1} = \frac{-8}{\pi\,(2k+1)^3 \left((2k+1)^2 + 1\right)}\,.$$

Exercice 17.11 A l'aide du formulaire on trouve

$$\widehat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \widehat{g}(\alpha) = \frac{-i\,\alpha}{2\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\,.$$

Si on dénote par $\widehat{y}(\alpha)$ la transformée de Fourier de la fonction inconnue y on obtient

$$\mathfrak{F}(y'')(\alpha) = -\alpha^2\, \widehat{y}(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} [y''(\tau) - y(\tau)]\, f(t - \tau)\, d\tau\right)(\alpha) &= \mathfrak{F}\left((y'' - y) * f\right)(\alpha) \\ &= \sqrt{2\pi}\, \mathfrak{F}(y'' - y)(\alpha)\ \mathfrak{F}(f)(\alpha) \\ &= \sqrt{2\pi}\left(-\alpha^2 - 1\right) \widehat{y}(\alpha)\, \widehat{f}(\alpha) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathfrak{F}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} [y''(\tau) - y(\tau)]\, f(t - \tau)\, d\tau\right)(\alpha) = -2\, \widehat{y}(\alpha)\,.$$

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation on trouve

$$3\,\widehat{y}\,(\alpha) - 2\,\widehat{y}\,(\alpha) = \widehat{y}\,(\alpha) = \widehat{g}\,(\alpha) = \frac{-i\,\alpha}{2\sqrt{2}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

En utilisant à nouveau le formulaire on trouve

$$y\,(t) = g\,(t) = t\,e^{-t^2}.$$

Exercice 17.12 * On cherche des solutions de la forme $y\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$. On obtient

$$\begin{aligned} y''\,(t) + t\,y\,(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,y_n\,t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,t^{n+1} \\ &= 2\,y_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)\,(n+2)\,y_{n+3} + y_n\right] t^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

On trouve donc $y_2 = 0$ et

$$y_{n+3} = -\frac{y_n}{(n+3)\,(n+2)}\,, \quad n \geq 0.$$

Par induction, on infère que

$$y_{3k} = \alpha_k\,y_0\,, \quad y_{3k+1} = \beta_k\,y_1 \quad \text{et} \quad y_{3\,k+2} = 0$$

où on a posé $\alpha_0 = \beta_0 = 1$,

$$\alpha_k = (-1)^k\,\frac{\prod_{l=1}^{k} (3\,l-2)}{(3\,k)!} \quad \text{et} \quad \beta_k = (-1)^k\,\frac{\prod_{l=1}^{k} (3\,l-1)}{(3\,k+1)!}\,.$$

Pour finir, on a donc que

$$y\,(t) = y_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\,t^{3k} \right) + y_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\,t^{3k+1} \right).$$

On peut montrer, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge pour tout t.

Chapitre 18

Applications aux équations aux dérivées partielles

Nous allons expliquer sur plusieurs exemples la méthode de *séparation des variables*. Comme déjà dit notre façon de procéder n'est pas rigoureuse. Le résultat, qui sera exprimé sous forme de somme infinie, est pourtant correct et peut être justifié sans trop de difficultés, même si nous n'en discuterons pas les détails. En effet les hypothèses imposées aux données du problème assurent la convergence des séries obtenues. Il est aussi intéressant de noter que toutes les équations que nous résoudrons grâce aux séries de Fourier admettent une solution unique et c'est donc nécéssairement celles que nous trouvons, même si d'autres méthodes (par exemple pour l'équation des ondes) peuvent donner en apparence d'autres résultats. Comme référence pour ce chapitre, on pourra consulter le chapitre 19 dans [7].

18.1 Equation de la chaleur

Exemple 18.1 (Barre de longueur finie) *Soient $a \neq 0$, $L > 0$, $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, une fonction C^1, telle que $f(0) = f(L) = 0$. Trouver $u = u(x,t)$ solution de*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0, L)\,. \end{cases}} \tag{18.1}$$

On traitera en particulier le cas où $f(x) = 2\sin(\pi x/L) - \sin(3\pi x/L)$.

Remarque Les conditions aux limites, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, sont appelées conditions de Dirichlet. La méthode présentée ici permet de traiter de manière analogue d'autres conditions aux limites comme, par exemple, celles de Neumann, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. Nous référons pour de plus amples détails aux exercices.

Discussion. On va procéder à la discusssion de ce problème par étapes.

Etape 1 (Séparation des variables). On commence par résoudre le même problème mais en ignorant la condition initiale $(u(x,0) = f(x))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,L)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases} \tag{18.2}$$

On cherche alors des solutions ayant une forme particulière

$$u(x,t) = v(x)\, w(t)\,.$$

Les conditions aux limites $(u(0,t) = u(L,t) = 0)$ pour être satisfaites pour tout $t > 0$ deviennent donc des conditions sur v, plus précisément

$$u(0,t) = v(0)\, w(t) = u(L,t) = v(L)\, w(t) = 0, \quad \forall\, t$$

ce qui implique

$$v(0) = v(L) = 0.$$

L'équation différentielle proprement dite nous permet de séparer les variables

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v(x)\, w'(t) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)\, w(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v(x)\, w'(t) = a^2 v''(x)\, w(t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'où

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{a^2 w(t)}\,.$$

Pour que ces quantités puissent être égales $\forall\, t$, $\forall\, x$, il faut que chacun des membres de l'équation soit égale à une même constante que nous noterons $-\lambda$. Les problèmes qu'on va résoudre deviennent alors

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 & x \in (0,L) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \tag{18.3}$$

et

$$w'(t) + a^2 \lambda\, w(t) = 0. \tag{18.4}$$

On a vu (cf. exemple 17.3) que les solutions de (18.3) sont données par

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right).$$

Les solutions de (18.4), pour $\lambda = (n\pi/L)^2$, sont obtenues facilement par intégration et sont données par

$$w_n(t) = e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Donc, $\forall\, n = 1, 2, 3, \cdots$ on a que

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

est solution de (18.2).

On remarque maintenant le résultat suivant.

Lemme 18.2 *Si φ et ψ sont solutions de (18.2) et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\,\varphi + \beta\,\psi$ est encore solution de (18.2).*

A l'aide du lemme (dont la démonstration est immédiate) ci-dessus, on a que si $\alpha_n \in \mathbb{R}$, alors

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

est encore solution de (18.2). En faisant un raisonnement abusif (car on ne discute pas la convergence de la série), on trouve que la *solution générale* de (18.2) est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

où α_n sont des constantes "quelconques".

Etape 2 (Condition initiale). On va maintenant choisir ces constantes α_n de manière à satisfaire la condition initiale, $u(x,0) = f(x)$, dans (18.1). On doit donc avoir

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) = f(x).$$

Il suffit alors de choisir α_n comme les coefficients de Fourier de la série en sinus, i.e.

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,y\right) dy.$$

Donc la solution de (18.1) est

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\,y\right) dy.}$$

On peut montrer que dès que $t > 0$ la présence du terme $e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ et le fait que f soit C^1 assurent que la série et toutes ses dérivées, en t et en x, convergent. La fonction u est ainsi C^∞ (dès que $t > 0$). Pour la même raison on voit aussi que $u(x,t) \to 0$ si $t \to \infty$. Dans le cas particulier, les coefficients α_n sont donnés par

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_n = 0 \text{ sinon.}$$

Par conséquent la solution du cas particulier est

$$u(x,t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} - \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) e^{-a^2\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Exemple 18.3 (Barre de longueur infinie) *Soient $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right| d\alpha < \infty.$$

Le problème est de trouver $u = u(x,t)$ solution de

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}} \tag{18.5}$$

On traitera en particulier le cas où $f(x) = e^{-x^2}$.

Discussion On procède de nouveau par étapes.

Etape 1 (Transformée de Fourier en x). On appelle

$$v(\alpha,t) = \mathfrak{F}(u)(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y,t)\, e^{-i\alpha y}\, dy$$

(c'est-à-dire qu'on considère t comme un paramètre et on applique la transformée de Fourier en x). On a (en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,t) = (i\alpha)^2\, \mathfrak{F}(u)(\alpha,t) = -\alpha^2\, v(\alpha,t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\, e^{-i\alpha y}\, dy = \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha,t).$$

On pose

$$\widehat{f}(\alpha) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\alpha y}\, dy.$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membres de l'équation, on a que (18.5) est devenue une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans la variable t (α jouant le rôle de paramètre)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(\alpha,t) = -a^2\, \alpha^2\, v(\alpha,t), & t > 0 \\ v(\alpha,0) = \widehat{f}(\alpha). \end{cases} \tag{18.6}$$

Le problème (18.6) a comme solution évidente

$$v(\alpha, t) = \widehat{f}(\alpha)\, e^{-a^2\alpha^2 t}.$$

Etape 2 (Solution de (18.5)). On applique à la fonction ci-dessus la transformée de Fourier inverse (en x), ce qui nous donne comme solution de (18.5)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{i\,\alpha\, x - a^2\,\alpha^2\, t}\, d\alpha.}$$

(On notera en passant que, contrairement au cas de la barre de dimension finie, le problème admet ici d'autres solutions, celle que nous trouvons est la "meilleure" du point de vue tant mathématique que physique). Dans l'exemple particulier on a que $\widehat{f}(\alpha) = \left(1/\sqrt{2}\right) e^{-\alpha^2/4}$. Alors

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\,\alpha\, x - \alpha^2\left(\frac{1}{4}+a^2 t\right)}\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{F}\left(e^{-\alpha^2\left(\frac{1}{4}+a^2 t\right)}\right)(-x)\,. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire conduit à

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4\,a^2\,t}}}{\sqrt{1+4\,a^2\,t}}\,, \quad t \geq 0.$$

18.2 Equation des ondes

Exemple 18.4 *Soient c, $L > 0$, $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$, des fonctions C^3, telles que $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$. Il s'agit de trouver $u = u(x,t)$ solution de*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in (0,L)\,. \end{array}\right.} \tag{18.7}$$

Discuter en particulier le cas où $f = 0$ et $g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{L}\, x\right) - \sin\left(\dfrac{2\pi}{L}\, x\right)$.

Discussion On procède par séparation des variables (cf. aussi pour une autre méthode exercice 18.17).

Etape 1 (Séparation des variables). On commence par résoudre le problème en ignorant les conditions initiales ($u(x,0) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,L)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases} \tag{18.8}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. Comme précédemment on est amené à résoudre (λ étant une constante)

$$\begin{cases} \dfrac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \dfrac{w''(t)}{c^2 w(t)} \\ v(0)\,w(t) = v(L)\,w(t) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 & x \in (0,L) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \tag{18.9}$$

$$w''(t) + c^2 \lambda\, w(t) = 0. \tag{18.10}$$

On a vu (cf. exemple 17.3) que les solutions non triviales de (18.9) sont données par $\lambda = (n\pi/L)^2$ où $n = 1, 2, \cdots$ et $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$. Par ailleurs les solutions de (18.10), pour $\lambda = (n\pi/L)^2$, sont données, si $n \geq 1$ par (cf. exemple 17.2)

$$w_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}\, t\right).$$

La solution générale de (18.8) est alors donnée par

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}\, t\right)\right] \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\, x\right).} \tag{18.11}$$

Etape 2 (Conditions initiales). Il s'agit maintenant de déterminer les constantes a_n et b_n pour que les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ soient satisfaites. Ceci nous conduit pour la première à

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right) = f(x)$$

et donc il suffit de prendre pour a_n les coefficients de Fourier de la série en sinus de f, i.e.

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\, y\right) dy.} \tag{18.12}$$

La deuxième condition initiale (en dérivant la série par rapport à t puis en posant $t = 0$) nous conduit à

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x).$$

Il suffit donc de choisir b_n de la manière suivante

$$b_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy,$$

i.e.

$$\boxed{b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(y)\sin\left(\tfrac{n\pi}{L}y\right)dy.} \tag{18.13}$$

Finalement la solution de (18.7) est donnée par (18.11) avec a_n et b_n satisfaisant (18.12) et (18.13).

On peut montrer que les hypothèses sur f et g assurent la convergence de la série (18.11) ainsi que celles de ses dérivées $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial x \partial t$ et $\partial^2 u/\partial t^2$. La fonction u ainsi obtenue est donc C^2. Toutefois contrairement au cas de l'équation de la chaleur, à moins que f et g ne soient plus régulières, les séries formelles exprimant les dérivées d'ordre supérieur ne convergent plus en général.

Dans le cas particulier on trouve

$$a_n = 0 \;\forall\, n, \quad b_n = 0 \;\forall\, n \geq 3, \quad b_1 \frac{\pi c}{L} = 1 \quad \text{et} \quad b_2 \frac{2\pi c}{L} = -1$$

et donc

$$u(x,t) = \frac{L}{\pi c}\sin\left(\frac{\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{L}{2\pi c}\sin\left(\frac{2\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right).$$

18.3 Equation de Laplace dans un rectangle

Exemple 18.5 *Soient* $L, M > 0$, $\alpha, \beta : [0, L] \to \mathbb{R}$, $\gamma, \delta : [0, M] \to \mathbb{R}$, *des fonctions* C^1 *telles que*

$$\alpha(0) = \alpha(L) = \beta(0) = \beta(L) = \gamma(0) = \gamma(M) = \delta(0) = \delta(M) = 0.$$

Trouver $u = u(x,y)$ *solution de*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in (0,L),\; y \in (0,M) \\ u(x,0) = \alpha(x),\; u(x,M) = \beta(x) & x \in (0,L) \\ u(0,y) = \gamma(y),\; u(L,y) = \delta(y) & y \in (0,M). \end{array}\right.} \tag{18.14}$$

On traitera le cas particilier où $\gamma = \delta \equiv 0$,

$$\alpha(x) = 4\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \textit{et} \quad \beta(x) = -\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

Discussion En fait il faut résoudre deux problèmes

$$\begin{cases} \triangle v = 0 \\ v(x,0) = 0, \quad v(x,M) = 0 \\ v(0,y) = \gamma(y), \quad v(L,y) = \delta(y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \triangle w = 0 \\ w(x,0) = \alpha(x), \quad w(x,M) = \beta(x) \\ w(0,y) = w(L,y) = 0. \end{cases}$$

La solution du problème (18.14) est alors donnée par

$$u = v + w.$$

Comme les deux problèmes sont résolus de la même façon, on ne traitera que le deuxième (c'est-à-dire (18.14) avec $\gamma = \delta \equiv 0$).

Etape 1 (Séparation des variables). On va résoudre tout d'abord le problème (en ignorant les conditions $w(x,0) = \alpha(x)$, $w(x,M) = \beta(x)$)

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in (0,L), \; y \in (0,M) \\ w(0,y) = w(L,y) = 0 & y \in (0,M) \end{cases} \tag{18.15}$$

et en cherchant des solutions de la forme

$$w(x,y) = f(x)\, g(y).$$

Comme dans les deux sections précédentes (λ étant une constante) on trouve

$$\begin{cases} f''(x)\, g(y) + f(x)\, g''(y) = 0 \\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda = -\frac{g''(y)}{g(y)} \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}$$

On déduit alors les deux systèmes

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 & x \in (0,L) \\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \tag{18.16}$$

et

$$g''(y) - \lambda\, g(y) = 0. \tag{18.17}$$

On a vu (cf. exemple 17.3) que les solutions non triviales de (18.16) sont données par

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

tandis que (cf. exemple 17.2) les solutions de (18.17) sont données par

$$g_n(y) = a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}\, y\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}\, y\right).$$

Comme l'équation (18.15) est linéaire, on a que sa solution générale est donnée par

$$\boxed{w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cosh\left(\tfrac{n\pi}{L}\, y\right) + b_n \sinh\left(\tfrac{n\pi}{L}\, y\right)\right] \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\, x\right).}$$

Etape 2 (Conditions aux limites). Pour résoudre (18.14) il faut encore satisfaire aux deux conditions aux limites

$$w(x,0) = \alpha(x) \quad \text{et} \quad w(x,M) = \beta(x).$$

On choisit alors les constantes a_n et b_n de la manière suivante

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

et donc pour les premières

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(t) \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}\, t\right) dt.}$$

Les coefficients b_n sont obtenus en écrivant

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}\, M\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}\, M\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right) \end{aligned}$$

où on a posé $c_n = a_n \cosh(n\pi M/L) + b_n \sinh(n\pi M/L)$. On choisit donc

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \beta(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, t\right) dt$$

et on trouve b_n par la formule

$$\boxed{b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) = c_n - a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L} M\right).}$$

On peut aussi montrer que si $0 < y < M$, la série converge de même que toutes ses dérivées d'ordre supérieur (on a donc le même phénomène que pour l'équation de la chaleur). La fonction $w \in C^{\infty}\left((0, L) \times (0, M)\right)$.

Dans l'exemple $a_1 = 4$, $a_n = 0$, $\forall\, n \geq 2$ et $c_2 = -1$, $c_n = 0$, $\forall\, n \neq 2$, i.e. $b_1 = -4 \coth\left(\pi M / L\right)$ et $b_2 = -1/\sinh\left(2\pi M/L\right)$. Par conséquent la solution est donnée par

$$w\left(x, y\right) = 4\left[\cosh\left(\frac{\pi}{L}\, y\right) - \coth\left(\frac{\pi M}{L}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{L}\, y\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{L}\, x\right) - \frac{1}{\sinh\left(\frac{2\pi M}{L}\right)}\sinh\left(\frac{2\pi}{L}\, y\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}\, x\right).$$

18.4 Equation de Laplace dans un disque

Exemple 18.6 *Trouver $u\left(x, y\right)$ solution de*

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u\left(x, y\right) = \varphi\left(x, y\right) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}} \tag{18.18}$$

où $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}$ et φ est une fonction C^1. On traitera en particulier le cas où $\varphi = x^2 + y$.

Discussion On va utiliser à nouveau la méthode de séparation de variables mais après être passé aux coordonnées polaires.

Etape 1 (Coordonnées polaires). On pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$v\left(r, \theta\right) = u\left(x, y\right) = u\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right).$$

On trouve (cf. exercice 1.4) que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Le problème devient alors

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0, R)\,,\ \theta \in (0, 2\pi) \\ v\left(R, \theta\right) = \varphi\left(R\cos\theta, R\sin\theta\right) = \psi\left(\theta\right) & \theta \in (0, 2\pi)\,. \end{cases}} \tag{18.19}$$

Noter que comme nous travaillons en coordonnées polaires il faut aussi imposer que

$$v(r,0) = v(r,2\pi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,2\pi).$$

Dans le cas particulier, on a

$$\psi(\theta) = \varphi(R\cos\theta, R\sin\theta) = R^2\cos^2\theta + R\sin\theta = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}\cos(2\theta) + R\sin\theta.$$

Etape 2 (Séparation des variables). On va commencer par ignorer la condition aux limites $(v(R,\theta) = \psi(\theta))$ et résoudre l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,R),\ \theta \in (0,2\pi) \\ v(r,0) = v(r,2\pi) & r \in (0,R) \\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,0) = \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r,2\pi) & r \in (0,R). \end{cases}$$

On cherche alors une fonction $v(r,\theta)$, solution du problème donné, de la forme

$$v(r,\theta) = f(r)\,g(\theta).$$

On trouve donc pour l'équation

$$f''(r)\,g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)\,g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)\,g''(\theta) = 0$$

qui est équivalente à

$$\frac{r^2 f''(r) + r\,f'(r)}{f(r)} = \lambda = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

et pour les conditions de périodicité

$$g(0) = g(2\pi) \quad \text{et} \quad g'(0) = g'(2\pi).$$

On obtient donc

$$\begin{cases} g''(\theta) + \lambda\,g(\theta) = 0 \\ g(0) = g(2\pi) \quad \text{et} \quad g'(0) = g'(2\pi) \end{cases} \tag{18.20}$$

et

$$r^2 f''(r) + r\,f'(r) - \lambda\,f(r) = 0. \tag{18.21}$$

On a que (cf. exercice 17.2) les solutions non triviales de (18.20) sont données, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad g_n(\theta) = \alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta).$$

Les solutions de (18.21) avec $\lambda = n^2$ sont données (cf. exercice 17.4) par

$$f_n(r) = \begin{cases} \gamma_n\, r^n + \delta_n\, r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \\ \gamma_0 + \delta_0 \log r & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La solution générale s'écrit alors

$$v(r,\theta) = \alpha_0 (\gamma_0 + \delta_0 \log r) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \left(\gamma_n\, r^n + \delta_n\, r^{-n}\right)$$

qui peut être réécrite, en renommant les constantes

$$a_0 = 2\,\alpha_0\,\gamma_0 \quad \text{et} \quad c_0 = \alpha_0\,\delta_0$$

et si $n \neq 0$ (et $n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = \alpha_n\,\gamma_n\,, \quad b_n = \beta_n\,\gamma_n\,, \quad c_n = \alpha_n\,\delta_n\,, \quad d_n = \beta_n\,\delta_n\,,$$

sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))\, r^n \\ &+ c_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta))\, r^{-n}. \end{aligned}} \tag{18.22}$$

Comme on est intéressé à des solutions définies dans le disque centré en 0, les solutions de la forme r^{-n} et $\log r$ ne sont pas admises car elles tendent vers l'infini quand r tend vers 0, on en déduit que

$$c_n = d_n = 0$$

par conséquent la solution générale v de notre problème est la suivante

$$\boxed{v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))\, r^n.}$$

(Noter que si le domaine Ω était un anneau au lieu d'être un disque la solution générale serait bien de la forme (18.22), cf. exercices 18.10 et 18.11).

Etape 3 (Conditions aux limites). Il nous reste donc à déterminer les coefficients a_n et b_n pour que

$$v(R,\theta) = \varphi(R\cos\theta, R\sin\theta) = \psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))\, R^n.$$

Ceci nous conduit à

$$\boxed{a_n\, R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi\,(\theta)\cos\,(n\,\theta)\,d\theta}$$

et

$$\boxed{b_n\, R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi\,(\theta)\sin\,(n\,\theta)\,d\theta.}$$

On pourrait aussi démontrer que la fonction v ainsi obtenue est C^∞ dès que $r < R$.

Dans le cas particulier, i.e.

$$\psi\,(\theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2}\cos\,(2\,\theta) + R\sin\theta$$

on trouve que

$$a_0 = R^2, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_n = 0,\ \forall\, n \geq 3$$

$$b_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_n = 0,\ \forall\, n \geq 2$$

d'où

$$v\,(r,\theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2}\cos\,(2\,\theta) + r\sin\theta = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2}\cos^2\theta - \frac{r^2}{2}\sin^2\theta + r\sin\theta.$$

Finalement en écrivant le résultat en coordonnées Cartésiennes on obtient

$$u\,(x,y) = \frac{R^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} + y.$$

18.5 Equation de Laplace dans un domaine simplement connexe

Exemple 18.7 *On veut trouver une fonction* $u = u\,(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *solution de*

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \Omega \\ \quad u\,(x,y) = \varphi\,(x,y) & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}}$$

où $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ *est un domaine simplement connexe (il faut comprendre par là que le domaine n'a pas de trous, la définition précise d'un tel domaine est donnée* *dans la définition 8.4 (iv)) dont le bord est suffisamment régulier et φ est une fonction C^1. On traitera en particulier le cas où*

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x > 1,\ y \in \mathbb{R} \\ u\,(1, y) = \varphi\,(1, y) = \dfrac{2}{1+y^2} & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Discussion L'idée est de se ramener après une transformation conforme au cas du disque.

Etape 1. Par le théorème de Riemann (cf. théorème 13.5), il existe une application conforme

$$f = \alpha + i\,\beta : \Omega \to D.$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. L'inverse de la fonction f s'écrit

$$f^{-1} = a + i\,b : D \to \Omega.$$

Dans le cas particulier on a $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ et on trouve facilement que

$$f\,(z) = \frac{2}{z} - 1 \quad \text{et} \quad f^{-1}(w) = \frac{2}{1+w}$$

ce qui en termes de coordonnées donne

$$f\,(x, y) = \alpha\,(x, y) + i\,\beta\,(x, y) = \frac{2}{x + i\,y} - 1 = \frac{2\,x}{x^2+y^2} - 1 + i\,\frac{-2\,y}{x^2+y^2}$$

$$f^{-1}\,(\alpha, \beta) = a\,(\alpha, \beta) + i\,b\,(\alpha, \beta) = \frac{2}{1+\alpha+i\,\beta} = \frac{2\,(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{-2\,\beta}{(1+\alpha)^2+\beta^2}\,.$$

Etape 2. On pose $\psi\,(\alpha, \beta) = \varphi \circ f^{-1} = \varphi\,(a\,(\alpha, \beta)\,, b\,(\alpha, \beta))$ et on résoud, comme dans la section 18.4, le problème

$$\begin{cases} \Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = 0 & \alpha^2 + \beta^2 < 1 \\ v\,(\alpha, \beta) = \psi\,(\alpha, \beta) & \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{cases}$$

Dans l'exemple on a, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (et donc $(1+\alpha)^2 + \beta^2 = 2\,(1+\alpha)$), que

$$\psi\,(\alpha, \beta) = \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\,\beta}{(1+\alpha)^2+\beta^2}\right)^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\,\beta}{2(1+\alpha)}\right)^2} = \frac{2\,(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2+\beta^2} = 1 + \alpha.$$

On trouve alors que la solution est trivialement

$$v\,(\alpha, \beta) = 1 + \alpha.$$

Etape 3. La solution est alors donnée par $u = v \circ f$, c'est à dire

$$u\,(x, y) = v\,(\alpha\,(x, y)\,, \beta\,(x, y))\,.$$

En effet par l'exercice 9.10 on a $\Delta u = 0$ alors que comme $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ on a aussi $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$.

Pour l'exemple traité on a donc

$$u(x,y) = v(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = v\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - 1, \frac{-2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Exemple 18.8 *Résoudre*

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = f(x) = \dfrac{8x^2}{(1+x^2)^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,y) \to 0 & y \to +\infty \end{cases}$$

où $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$.

Discussion On peut résoudre ce problème par la méthode développée précédemment (cf. exercice 18.15 ci-dessous). Nous proposons ici une autre façon de procéder, semblable à celle de l'exemple 18.3. Comme d'habitude le procédé développé ici ne se justifie qu'a posteriori.

Etape 1 (Transformée de Fourier). On dénote par $v(\alpha, y)$ la transformée de Fourier en x (y jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x,y)$, par abus de notations on écrira $\mathfrak{F}(u)$, i.e.

$$v(\alpha,y) = \mathfrak{F}(u)(\alpha,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-i\alpha x}\, dx.$$

On trouve (cf. formulaire) que

$$v(\alpha,0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = 2\sqrt{2\pi}\,(1-|\alpha|)\, e^{-|\alpha|}.$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,y) = (i\alpha)^2\, \mathfrak{F}(u)(\alpha,y) = -\alpha^2\, v(\alpha,y) \\ \mathfrak{F}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(\alpha,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\alpha,y). \end{cases}$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\alpha,y) - \alpha^2\, v(\alpha,y) = 0 & \alpha \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ v(\alpha,0) = \hat{f}(\alpha) & \alpha \in \mathbb{R} \\ v(\alpha,y) \to 0 & \alpha \in \mathbb{R},\ y \to +\infty \end{cases}$$

En considérant α comme un paramètre (ici on suppose que $\alpha \neq 0$) et en utilisant le résultat du cas 2 de l'exemple 17.2, on trouve

$$\begin{aligned} v(\alpha, y) &= \hat{f}(\alpha) \cosh(|\alpha| y) + \frac{\gamma}{|\alpha|} \sinh(|\alpha| y) \\ &= \hat{f}(\alpha) \frac{e^{|\alpha| y} + e^{-|\alpha| y}}{2} + \frac{\gamma}{|\alpha|} \frac{e^{|\alpha| y} - e^{-|\alpha| y}}{2} \end{aligned}$$

où γ est une constante à déterminer pour satisfaire à la condition $v(\alpha, y) \to 0$ si $y \to +\infty$. Pour cela on choisit

$$\gamma = -|\alpha| \, \hat{f}(\alpha).$$

La solution est alors

$$v(\alpha, y) = \hat{f}(\alpha) e^{-|\alpha| y} = 2\sqrt{2\pi} (1 - |\alpha|) e^{-|\alpha|(1+y)}.$$

Etape 2. La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse et en utilisant le formulaire

$$u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\alpha, y))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{-|\alpha| y} \, e^{i \alpha x} \, d\alpha$$

ou encore

$$\begin{aligned} u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} &\left(2\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{1+y} - |\alpha| \right) e^{-|\alpha|(1+y)} \right)(x) \\ &+ \mathfrak{F}^{-1} \left(2\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{1+y} \right) e^{-|\alpha|(1+y)} \right)(x) \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} u(x, y) = 2\,\mathfrak{F}^{-1} &\left(\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{1+y} - |\alpha| \right) e^{-|\alpha|(1+y)} \right)(x) \\ &+ 4\,y\,\mathfrak{F}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\alpha|(1+y)}}{1+y} \right)(x). \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le formulaire on trouve

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2 \frac{4x^2}{\left((1+y)^2 + x^2 \right)^2} + 4\,y \frac{1}{(1+y)^2 + x^2} \\ &= 4 \frac{y(1+y)^2 + x^2(2+y)}{\left((1+y)^2 + x^2 \right)^2}. \end{aligned}$$

18.6 Exercices

Exercice 18.1 *Résoudre pour* $u = u\,(x,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,\pi)\,, \;\; t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = \cos x - \cos(3\,x) & x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.2 *Trouver* $u = u\,(x,t)$ *solution de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,\pi)\,, \;\; t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = \cos(2\,x) & x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.3 *Trouver une fonction* $u = u\,(x,t)$ *qui satisfasse à*

$$\begin{cases} (2+t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,\pi)\,, \;\; t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = \sin x + 4\sin(2\,x) & x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.4 *Résoudre*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,1)\,, \;\; t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = 0 & x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 + \cos^2(\pi\,x) & x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.5 *Trouver une solution* $u = u\,(x,t)$ *de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & x \in (0,\pi)\,, \;\; t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = 2\sin x + \sin(3\,x) & x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.6 *Trouver* $u = u\,(x,t)$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,u & x \in (0,\pi)\,, \;\; t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = e^{-x}\sin(2\,x) & x \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

Exercice 18.7 *Trouver $u = u(x, y)$ solution de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x, y \in (0, \pi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = \cos(2y), \quad u(\pi, y) = 0 & y \in (0, \pi). \end{cases}$$

Exercice 18.8 *Trouver $u = u(x, y)$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 4 \\ u(x, y) = 1 + x^2 + y^3 & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Exercice 18.9 *Trouver $u = u(x, y)$ solution de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 - \dfrac{1}{2} & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

On pourra commencer par écrire $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et puis calculer $\dfrac{\partial v}{\partial r}$ en fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Exercice 18.10 *Soit*

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Trouver $u = u(x, y)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = x & x^2 + y^2 = 1 \\ u(x, y) = x - y & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Exercice 18.11 *Soient $u = u(x, y)$ et $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

(i) *Calculer $\dfrac{\partial v}{\partial r}$ en fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.*

(ii) *Résoudre*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u(x, y) = 0 & x^2 + y^2 = 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + u = \dfrac{1}{2} + \log 2 + x - \dfrac{y}{2} & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Exercice 18.12 *Soit*

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Trouver une fonction $u = u(x, y)$ *telle que*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x, y) = y^2 & y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Suggestion. Passer aux coordonnées polaires.

Exercice 18.13 *Trouver, à l'aide de la transformée de Fourier, une fonction* $u = u(x, y)$ *qui soit solution de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \to 0 & y \to +\infty. \end{cases}$$

Suggestions. (i) *On pourra rendre le résultat sous forme d'intégrale.*

(ii) *On rappelle que, si* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$, *alors la solution* $\varphi = \varphi(y)$ *de*

$$\begin{cases} \varphi''(y) - \alpha^2 \varphi(y) = 0 & y > 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 & \\ \varphi(y) \to 0 & y \to +\infty \end{cases}$$

est donnée par $\varphi(y) = \varphi_0\, e^{-|\alpha| y},\ y > 0.$

Exercice 18.14 *Résoudre*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & y \in \mathbb{R},\ x > 0 \\ u(0, y) = \dfrac{1}{(1 + y^2)^2} & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 18.15 *Traiter l'exemple 18.8 (qui a été résolu à l'aide de la transformée de Fourier) par la méthode utilisant les applications conformes.*

Exercice 18.16 *Soit*

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 4 \right\}.$$

Résoudre

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = x^2 + 2\, y^2 & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercice 18.17 (Méthode de d'Alembert) *Soient* $c \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ *et* $g \in C^1(\mathbb{R})$. *Vérifier que*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x + c\, t) + f(x - c\, t) \right] + \frac{1}{2\, c} \int_{x - c\, t}^{x + c\, t} g(s)\, ds$$

est solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

18.7 Corrigés

Exercice 18.1 *Etape 1 (Séparations des variables).* Cet exercice correspond à l'exemple 18.1, avec $L = \pi$, $a = 1$ et $f(x) = \cos x - \cos(3x)$. On a vu que la solution générale de l'équation est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)\, e^{-n^2 t}.$$

Etape 2 (Condition initiale). Il nous faut encore choisir les α_n pour que

$$u(x,0) = f(x) = \cos x - \cos(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx).$$

On doit alors avoir

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos x \sin(nx) - \cos(3x)\sin(nx)]\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x) - \sin((n+3)x) - \sin((n-3)x)]\, dx. \end{aligned}$$

Si $n \neq 1$ et $n \neq 3$, alors

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} + \frac{\cos((n+3)x)}{n+3} + \frac{\cos((n-3)x)}{n-3} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1-(-1)^{n+3}}{n+3} - \frac{1-(-1)^{n-3}}{n-3} \right]. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_n = 0$ si n est impair ($n \neq 1$ et $n \neq 3$). Si n est pair alors

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-3} \right] \\ &= \frac{4n}{\pi} \left[\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-9} \right] = \frac{-32n}{\pi(n^2-1)(n^2-9)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(2x) - \sin(4x) + \sin(2x)]\, dx = 0 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(4x) + \sin(2x) - \sin(6x)]\, dx = 0. \end{aligned}$$

On a donc que la solution est donnée par

$$u(x,t) = \frac{-64}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4\,k^2-1)(4\,k^2-9)} \sin(2\,k\,x)\, e^{-4\,k^2 t}.$$

Exercice 18.2 *Etape 1 (Séparations des variables).* On cherche des solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,\pi)\,,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t>0 \end{cases} \tag{18.23}$$

de la forme $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. On a

$$\begin{cases} v(x)\,w'(t) = v''(x)\,w(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \dfrac{w'(t)}{w(t)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = v'(0)\,w(t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = v'(\pi)\,w(t) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 \\ v'(0) = v'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{18.24}$$

et

$$w'(t) + \lambda\, w(t) = 0. \tag{18.25}$$

Les solutions non triviales de (18.24) sont données (cf. exemple 17.4) par $\lambda = n^2$ avec $n = 0, 1, 2, \cdots$ et

$$v_0(x) = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad v_n(x) = a_n \cos(n\,x)\,,\ \forall\, n \geq 1.$$

Les w correspondant, solutions de (18.25) sont donnés par $w_n(t) = e^{-n^2 t}$. En résumant les solutions de (18.23) sont

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,x)\, e^{-n^2 t}.$$

Etape 2 (Condition initiale). On veut de plus

$$u(x,0) = \cos(2\,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,x)$$

ce qui implique que $a_n = 0$, $\forall\, n \neq 2$ et $a_2 = 1$. Par conséquent la solution est donnée par

$$u(x,t) = \cos(2\,x)\ e^{-4\,t}.$$

Exercice 18.3 *Etape 1 (Séparation de variables).* On cherche des solutions de la forme

$$u(x,t) = v(x)\, w(t)$$

satisfaisant

$$\begin{cases} (2+t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} (2+t)\dfrac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda = \dfrac{v''(x)}{v(x)} \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

Il faut donc résoudre les deux problèmes

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

et

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -\frac{\lambda}{(2+t)}\,.$$

On trouve que le premier problème a des solutions non triviales si $\lambda = n^2$ et ces solutions sont données par

$$v(x) = a_n \sin(n\,x)\,.$$

Une solution de la deuxième équation est alors

$$w(t) = (2+t)^{-n^2}\,.$$

La solution générale est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\,x)\ (2+t)^{-n^2}\,.$$

Etape 2 (Conditions initiales). On veut par ailleurs que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n^2} \sin(n\,x) = \sin x + 4\sin(2\,x)$$

ce qui implique $a_1 = 2$, $a_2 = 2^6$ et $a_n = 0$, si $n \neq 1, 2$. On a donc trouvé que la solution du problème est

$$u(x,t) = \frac{2\sin x}{2+t} + \frac{2^6 \sin(2\,x)}{(2+t)^4}\,.$$

Exercice 18.4 *Etape 1 (Séparation des variables).* On cherche des solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,1)\,,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

de la forme $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. On trouve

$$\begin{cases} \dfrac{w''(t)}{w(t)} = -\lambda = \dfrac{v''(x)}{v(x)} \\ v'(0)\,w(t) = v'(1)\,w(t) = 0\,. \end{cases}$$

Les deux systèmes à résoudre sont donc

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 \\ v'(0) = v'(1) = 0 \end{cases} \tag{18.26}$$

et

$$w''(t) + \lambda\, w(t) = 0. \tag{18.27}$$

On a vu (cf. exemple 17.4) que les solutions non triviales de (18.26) sont données par $\lambda = (n\pi)^2$ où $n = 0,1,2,\cdots$ et $v_n = \cos(n\pi\, x)$. Par ailleurs les solutions de (18.27), pour $\lambda = (n\pi)^2$, sont données par

$$w_n(t) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{b_0}{2}\,t & \text{si } n=0 \\ a_n \cos(n\pi\, t) + b_n \sin(n\pi\, t) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

La solution générale est alors

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}\,t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\pi\, t) + b_n \sin(n\pi\, t)\right] \cos(n\pi\, x)\,.$$

Etape 2 (Conditions initiales). Comme $u(x,0) = 0$ ceci implique que $a_n = 0$, $\forall\, n \geq 0$. Par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n\pi\, a_n \sin(n\pi\, t) + n\pi\, b_n \cos(n\pi\, t)\right] \cos(n\pi\, x)$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\, b_n \cos(n\pi\, x) &= 1 + \cos^2(\pi\, x) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi\, x)\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi\, x) \end{aligned}$$

ce qui implique $b_0 = 3,\ b_1 = 0,\ 2\pi\, b_2 = \dfrac{1}{2}$ et $b_n = 0,\ \forall\, n \geq 3$. La solution du problème est ainsi donnée par

$$u\,(x,t) = \frac{3}{2}\,t + \frac{1}{4\pi}\sin\left(2\pi\, t\right)\cos\left(2\pi\, x\right).$$

Exercice 18.5 *Etape 1 (Séparation des variables).* On cherche des solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0 \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

de la forme

$$u\,(x,t) = v\,(x)\,w\,(t)\,.$$

Comme $u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(\pi,t) = 0$ on obtient

$$v\,(0) = v\,(\pi) = v''\,(0) = v''\,(\pi) = 0.$$

Par ailleurs comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad v\,(x)\,w'\,(t) + w\,(t)\,\frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

on déduit

$$\frac{d^4 v/dx^4}{v} = \lambda = -\frac{w'\,(t)}{w\,(t)}\,.$$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 v\,(x)}{dx^4} - \lambda\, v\,(x) = 0 \\ v\,(0) = v\,(\pi) = v''\,(0) = v''\,(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w'\,(t) + \lambda\, w\,(t) = 0.$$

On montre facilement que le premier problème a des solutions non triviales seulement si $\lambda = n^4$ et elles sont données par $v\,(x) = \alpha_n \sin\left(n\,x\right)$. La deuxième équation a alors comme solution $w\,(t) = e^{-n^4 t}$. La solution générale est donc

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n\,x\right) e^{-n^4 t}.$$

Etape 2 (Condition initiale). On veut aussi

$$u\,(x,0) = 2\sin x + \sin\left(3\,x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n\,x\right)$$

ce qui implique $\alpha_1 = 2$, $\alpha_3 = 1$ et $\alpha_n = 0$, sinon. La solution cherchée est alors

$$u(x,t) = 2\,e^{-t}\sin x + e^{-81\,t}\sin(3\,x)\,.$$

Exercice 18.6 *Etape 1 (Séparation des variables).* On commence par résoudre seulement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,u & x \in (0,\pi)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

On cherche des solutions de la forme $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. On a donc

$$u(0,t) = v(0)\,w(t) = u(\pi,t) = v(\pi)\,w(t) = 0 \quad \forall\, t.$$

On en déduit $v(0) = v(\pi) = 0$. Par ailleurs l'équation devient

$$v(x)\,w'(t) = \left(v''(x) + 2\,v'(x) + 2\,v(x)\right)w(t)$$

ce qui donne, en séparant les variables,

$$\frac{v'' + 2\,v' + 2\,v}{v} = -\lambda = \frac{w'}{w}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v''(x) + 2\,v'(x) + (2+\lambda)\,v(x) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w'(t) + \lambda\,w(t) = 0.$$

Le premier problème a été discuté dans l'exercice 17.3 (avec $\mu = 1 + \lambda$) et a des solutions non triviales seulement quand $\lambda = n^2 - 1$ et elles sont données par

$$v_n(x) = \alpha_n\,e^{-x}\sin(n\,x)\,.$$

En revenant à l'équation en w on trouve $w_n(t) = e^{-\left(n^2-1\right)t}$. Donc la solution générale de l'équation est

$$u(x,t) = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin(n\,x)\ e^{-\left(n^2-1\right)t}.$$

Etape 2 (Condition initiale). Il nous faut encore choisir les α_n pour que

$$u(x,0) = e^{-x}\sin(2\,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,e^{-x}\sin(n\,x)\,.$$

On voit donc immédiatement que $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_n = 0$, $\forall\ n \neq 2$. La solution est ainsi

$$u(x,t) = e^{-3\,t-x}\sin(2\,x)\,.$$

Exercice 18.7 *Etape 1 (Séparation des variables).* On commence par trouver des solutions de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x, y \in (0, \pi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = 0 & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

de la forme $u(x, y) = v(x)\, w(y)$. On a

$$\begin{cases} v''(x)\, w(y) + v(x)\, w''(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \dfrac{w''(y)}{w(y)} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = v(x)\, w'(0) = \dfrac{\partial}{\partial y} u(x, \pi) = v(x)\, w'(\pi) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} w''(y) + \lambda\, w(y) = 0 \\ w'(0) = w'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{18.28}$$

et

$$v''(x) - \lambda\, v(x) = 0. \tag{18.29}$$

On a vu (cf. exemple 17.4) que les solutions non triviales de (18.28) sont données par $\lambda = n^2$ avec $n = 0, 1, 2, \cdots$ et $w_n(y) = a_n \cos(n\, y)$ (si $n = 0$, $w_0(y) = a_0/2$). L'équation (18.29) devient alors

$$v_n''(x) - n^2 v_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n(x) = \begin{cases} b_1\, x + b_0 & \text{si } n = 0 \\ b_n \cosh(n\, x) + c_n \sinh(n\, x) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Donc la solution générale de l'équation donnée est

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2}(b_1\, x + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(b_n \cosh(n\, x) + c_n \sinh(n\, x)\right) \cos(n\, y),$$

ou, en écrivant $\dfrac{a_0}{2} b_1 = \alpha$, $\dfrac{a_0}{2} b_0 = \dfrac{\beta}{2}$, $a_n\, b_n = A_n$, $a_n\, c_n = B_n$,

$$u(x, y) = \alpha\, x + \frac{\beta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh(n\, x) + B_n \sinh(n\, x)\right) \cos(n\, y).$$

Etape 2 (Conditions aux limites). On veut de plus que

$$u(0, y) = \cos(2\, y) \quad \text{et} \quad u(\pi, y) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\beta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\, y) = \cos(2\, y).$$

$$\alpha\,\pi + \frac{\beta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh(n\pi) + B_n \sinh(n\pi)\right) \cos(n\,y) = 0.$$

La première équation donne tout de suite $\beta = 0$ et $A_n = 0$ si $n \neq 2$ et $A_2 = 1$. En remettant ce résultat dans la deuxième on a $\alpha = 0$ et

$$A_n \cosh(n\pi) + B_n \sinh(n\pi) = 0.$$

On en déduit que si $n \neq 2$, alors $A_n = B_n = 0$, par contre si $n = 2$ on a

$$B_2 = -\frac{\cosh(2\pi)}{\sinh(2\pi)}\,.$$

La solution du problème est donc

$$u(x, y) = \left[\cosh(2\,x) - \frac{\cosh(2\pi)}{\sinh(2\pi)} \sinh(2\,x)\right] \cos(2\,y)\,.$$

Exercice 18.8 *Etape 1 (Séparation des variables).* Cet exercice correspond à l'exemple 18.6 avec

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\}$$

et $\varphi(x, y) = 1 + x^2 + y^3$. On a vu (cf. exemple 18.6) que la solution générale est

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta)\right) r^n.$$

Etape 2 (Conditions aux limites). Comme $2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\,\theta)$ et

$$\begin{aligned}
4\sin^3\theta &= 4\sin\theta\left(1 - \cos^2\theta\right) = 4\sin\theta - 4\sin\theta\cos^2\theta \\
&= 4\sin\theta - 2\sin\theta\left(\cos(2\,\theta) + 1\right) = 2\sin\theta - \left(-\sin\theta + \sin(3\,\theta)\right) \\
&= 3\sin\theta - \sin(3\,\theta)
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
v(2, \theta) = \Psi(\theta) &= 1 + 4\cos^2\theta + 8\sin^3\theta \\
&= 3 + 2\cos(2\,\theta) + 6\sin\theta - 2\sin(3\,\theta)\,.
\end{aligned}$$

Les coefficients sont alors donnés par

$$\frac{a_0}{2} = 3, \quad a_2 = \frac{1}{2}\,, \quad a_n = 0,\ \text{si } n \neq 0, 2$$

$$b_1 = 3, \quad b_3 = -\frac{1}{4}\,, \quad b_n = 0,\ \text{si } n \neq 1, 3$$

et la solution, en coordonnées polaires, est donc

$$v(r, \theta) = 3 + 3\,r\sin\theta + \frac{r^2}{2}\cos(2\,\theta) - \frac{r^3}{4}\sin(3\,\theta)\,.$$

Comme $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ on trouve

$$v(r,\theta) = 3 + 3r\sin\theta + \frac{r^2}{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \frac{3}{4}r^3\sin\theta + r^3\sin^3\theta.$$

La solution de notre problème est ainsi

$$u(x,y) = 3 + 3y + \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{3}{4}y\left(x^2 + y^2\right) + y^3.$$

Exercice 18.9 *Etape 1 (Coordonnées polaires).* On écrit notre problème en coordonnées polaires en observant que

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

On peut noter que si $x^2 + y^2 = 1$ on a

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}(1,\theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{\cos(2\theta)}{2}\,.$$

Donc le problème devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0,2\pi) \\ \quad \dfrac{\partial v}{\partial r}(1,\theta) = \dfrac{\cos(2\theta)}{2} & \theta \in (0,2\pi)\,. \end{cases}$$

Etape 2 (Séparations de variables). On procède alors comme dans l'exemple 18.6 et on trouve que la solution générale est donnée par

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right)r^n.$$

Etape 3 (Conditions aux limites). On veut par ailleurs que

$$\frac{\partial v}{\partial r}(1,\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2}\,.$$

En dérivant v par rapport à r on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right)r^{n-1}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial r}v(1,\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right).$$

On en déduit que a_0 est arbitraire et que

$$b_n = 0,\ \forall\, n, \quad a_n = 0,\ \forall\, n \neq 2 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{4}$$

et par conséquent

$$v\,(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{r^2}{4}\cos\,(2\,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{4}\,.$$

La solution cherchée est par conséquent

$$u\,(x,y) = \frac{a_0}{2} + \frac{x^2 - y^2}{4}\,.$$

Exercice 18.10 *Etape 1 (Coordonnées polaires).* On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $v\,(r,\theta) = u\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$ Le problème devient ainsi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (1,2)\,,\ \theta \in (0,2\pi) \\ v\,(1,\theta) = \cos\theta & \theta \in (0,2\pi) \\ v\,(2,\theta) = 2\cos\theta - 2\sin\theta & \theta \in (0,2\pi)\,. \end{cases}$$

Etape 2 (Séparations de variables). Le développement effectué dans l'exemple 18.6 nous donne la solution générale

$$\begin{aligned} v\,(r,\theta) = \frac{a_0}{2} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos\,(n\,\theta) + b_n\sin\,(n\,\theta)\right) r^n \\ &+ c_0\log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n\cos\,(n\,\theta) + d_n\sin\,(n\,\theta)\right) r^{-n}. \end{aligned}$$

Etape 3 (Conditions aux limites). On veut par ailleurs que

$$v\,(1,\theta) = \cos\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n + c_n)\cos\,(n\,\theta) + (b_n + d_n)\sin\,(n\,\theta)\right]$$

et

$$\begin{aligned} v\,(2,\theta) &= 2\cos\theta - 2\sin\theta \\ &= \frac{a_0}{2} + c_0\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(2^n a_n + \frac{c_n}{2^n}\right)\cos\,(n\,\theta) + \left(2^n b_n + \frac{d_n}{2^n}\right)\sin\,(n\,\theta)\right]. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 + c_1 = 1 \\ a_n + c_n = 0,\ \forall\, n \geq 2 \\ b_n + d_n = 0,\ \forall\, n \geq 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{a_0}{2} + c_0 \log 2 = 0 \\ 2\, a_1 + \dfrac{c_1}{2} = 2 \\ 2^n a_n + \dfrac{c_n}{2^n} = 0,\ \forall\, n \geq 2 \\ 2\, b_1 + \dfrac{d_1}{2} = -2 \\ 2^n b_n + \dfrac{d_n}{2^n} = 0,\ \forall\, n \geq 2 \end{array}\right.$$

et par conséquent

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = c_0 = 0 \\ a_1 = 1 \quad \text{et} \quad c_1 = 0 \\ d_1 = -b_1 = \dfrac{4}{3} \\ a_n = c_n = b_n = d_n = 0, \quad \forall\, n \geq 2. \end{array}\right.$$

La solution en coordonnées polaires est donc

$$v\,(r, \theta) = r \cos\theta + \left(-\frac{4}{3}\, r + \frac{4}{3\, r}\right) \sin\theta.$$

En revenant aux coordonnées Cartésiennes, on obtient

$$u\,(x, y) = x - \frac{4}{3}\, y + \frac{4\, y}{3\,(x^2 + y^2)}\,.$$

Exercice 18.11 *Etape 1 (Coordonnées polaires).* On écrit le problème donné en coordonnées polaires en remarquant que

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta\, \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{r}\, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{r}\, \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Le problème à résoudre est alors le suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\, \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\, \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (1, 2)\,,\ \theta \in (0, 2\pi) \\ v\,(1, \theta) = 0 & \theta \in (0, 2\pi) \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\,(2, \theta) + v\,(2, \theta) = \frac{1}{2} + \log 2 + 2\cos\theta - \sin\theta & \theta \in (0, 2\pi)\,. \end{array}\right.$$

Etape 2 (Séparations de variables). En procédant comme dans l'exemple 18.6 on trouve la solution générale qui est de la forme

$$v\,(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta)\right) r^n$$
$$+ c_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(n\,\theta) + d_n \sin(n\,\theta)\right) r^{-n}.$$

Etape 3 (Conditions aux limites). On veut par ailleurs que

$$v(1,\theta) = 0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n + c_n)\cos(n\,\theta) + (b_n + d_n)\sin(n\,\theta)\right]$$

ce qui nous conduit à

$$a_0 = 0, \quad c_n = -a_n\,, \quad d_n = -b_n\,.$$

En revenant à v on a

$$v(r,\theta) = c_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta))\left(r^n - r^{-n}\right)\right].$$

et

$$v_r(r,\theta) = \frac{c_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\,(a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta))\left(r^{n-1} + r^{-n-1}\right)\right].$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
&v_r(2,\theta) + v(2,\theta) \\
&= c_0 \left(\frac{1}{2} + \log 2\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\,2^{n-1} + n\,2^{-n-1} + 2^n - 2^{-n}\right)(a_n \cos(n\,\theta) + b_n \sin(n\,\theta))\,.
\end{aligned}$$

Comme on veut que $v_r(2,\theta) + v(2,\theta) = \left(\frac{1}{2} + \log 2\right) + 2\cos\theta - \sin\theta$, on obtient

$$c_0 = 1, \quad a_1 = \frac{8}{11}\,, \quad b_1 = -\frac{4}{11}\,, \quad a_n = b_n = 0,\ \forall\, n \neq 0, 1$$

et ainsi la solution en coordonnées polaires est

$$v(r,\theta) = \log r + \frac{8}{11}\,r\cos\theta - \frac{4}{11}\,r\sin\theta - \frac{8}{11}\,\frac{\cos\theta}{r} + \frac{4}{11}\,\frac{\sin\theta}{r}\,,$$

alors qu'en coordonnées Cartésiennes elle s'écrit

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{8}{11}\,x - \frac{4}{11}\,y - \frac{8}{11}\,\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{4}{11}\,\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Exercice 18.12 *Etape 1 (Coordonnées polaires).* On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Le problème se transforme ainsi en

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0,\pi) \\
v(r,0) = v(r,\pi) = 0 & r \in (0,1) \\
v(1,\theta) = \sin^2\theta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2\,\theta) & \theta \in (0,\pi)\,.
\end{cases}$$

Etape 2 (Séparations des variables). On considère tout d'abord le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0,\pi) \\ v(r,0) = v(r,\pi) = 0 & r \in (0,1)\,. \end{cases}$$

et on cherche une solution de ce problème de la forme $v(r,\theta) = f(r)\,g(\theta)\,.$ L'équation devient ainsi

$$f''g + \frac{1}{r}\,f'g + \frac{1}{r^2}\,f\,g'' = 0$$

ce qui nous conduit à

$$\frac{r^2\,f'' + r\,f'}{f} = \lambda = -\frac{g''}{g}\,.$$

On obtient donc

$$\begin{cases} g''(\theta) + \lambda\,g(\theta) = 0 \\ g(0) = g(\pi) = 0 \end{cases}$$

et

$$r^2\,f''(r) + r\,f'(r) - \lambda\,f(r) = 0.$$

Les solutions non triviales du premier système sont données par $\lambda = n^2$ et

$$g_n(\theta) = \alpha_n \sin(n\,\theta)\,.$$

Les solutions de la deuxième équation sont, pour $n > 0$

$$f_n(r) = \beta_n\,r^n.$$

(Attention il y a aussi des solutions r^{-n} mais, comme $(0,0) \in \overline{\Omega}$, ces solutions sont singulières et par conséquent nous les ignorerons). La solution générale est donc (en dénotant $a_n = \alpha_n\beta_n$)

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,r^n \sin(n\,\theta)\,.$$

Etape 3 (Conditions aux limites). On va déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $\psi(\theta) = (1 - \cos(2\,\theta))/2$. Commençons par le cas $n = 2$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,\theta)\right]\sin(2\,\theta)\,d\theta = 0.$$

De même, si $n \neq 2$, on trouve

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,\theta)\right]\sin(n\,\theta)\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(n\,\theta)}{2\,n} + \frac{\cos((n+2)\,\theta)}{4\,(n+2)} + \frac{\cos((n-2)\,\theta)}{4\,(n-2)}\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\left(1-\cos\left(n\pi\right)\right)}{n}+\frac{\cos\left(n\pi\right)-1}{n+2}+\frac{\cos\left(n\pi\right)-1}{n-2}\right] \\ &= \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos\left(n\pi\right)-1}{n\left(n^2-4\right)}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, si n est pair, on a que $a_n = 0$, alors que si n est impair on obtient

$$a_n = -\frac{8}{\pi\, n\left(n^2-4\right)}\,.$$

La solution, en coordonnées polaires, s'écrit donc

$$v\left(r,\theta\right) = -\frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n\mathit{impair}}}^{\infty}\frac{r^n\sin\left(n\,\theta\right)}{n\left(n^2-4\right)}\,.$$

Exercice 18.13 *Etape 1 (Transformée de Fourier).* On dénote par $v\left(\alpha,y\right)$ la transformée de Fourier (en x) de $u\left(x,y\right)$, i.e.

$$v\left(\alpha,y\right) = \mathfrak{F}\left(u\right)\left(\alpha,y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(x,y\right)e^{-i\,\alpha\,x}\,dx.$$

(Par abus de notation on a dénoté cette transformation en x, $\mathfrak{F}\left(u\right)$). On trouve (cf. formulaire)

$$v\left(\alpha,0\right) = \mathfrak{F}\left(f\right)\left(\alpha\right) = \hat{f}\left(\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\,.$$

Observer que

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)\left(\alpha,y\right) &= \left(i\,\alpha\right)^2\mathfrak{F}\left(u\right)\left(\alpha,y\right) = -\alpha^2v\left(\alpha,y\right) \\ \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\left(\alpha,y\right) &= \frac{\partial^2v}{\partial y^2}\left(\alpha,y\right). \end{aligned}\right.$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène à

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}\left(\alpha,y\right)-\alpha^2v\left(\alpha,y\right)=0 & \alpha\in\mathbb{R},\ y>0 \\ v\left(\alpha,0\right)=\hat{f}\left(\alpha\right) & \alpha\in\mathbb{R} \\ v\left(\alpha,y\right)\to 0 & \alpha\in\mathbb{R},\ y\to+\infty. \end{array}\right.$$

En considérant α comme un paramètre et en utilisant la suggestion, on trouve

$$v\left(\alpha,y\right) = \hat{f}\left(\alpha\right)e^{-\left|\alpha\right|y}$$

et par conséquent

$$v(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y}.$$

Etape 2. La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse, i.e.

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y} e^{i\alpha x} \, d\alpha$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y} \cos(\alpha x) \, d\alpha \\ & + i \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y} \sin(\alpha x) \, d\alpha. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\alpha \to e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y} \sin(\alpha x)$ est impaire et $\alpha \to e^{-\frac{\alpha^2}{4} - |\alpha| y} \cos(\alpha x)$ est paire, on déduit que

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4} - \alpha y} \cos(\alpha x) \, d\alpha.$$

Exercice 18.14 *Etape 1 (Application conforme).* On cherche une application conforme

$$f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}.$$

On trouve facilement qu'une telle application et son inverse sont données par

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta+1}{1-\zeta}.$$

Par conséquent, si $z = x + i y$ et $\zeta = \alpha + i \beta$,

$$f(x + i y) = \frac{x + i y - 1}{x + 1 + i y} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$f^{-1}(\alpha + i \beta) = \frac{\alpha + 1 + i \beta}{1 - \alpha - i \beta} = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2} + i \frac{2\beta}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}.$$

Les conditions aux limites deviennent donc (se rappeler que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta) &= \varphi\left(f^{-1}(\alpha, \beta)\right) = \varphi\left(\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}, \frac{2\beta}{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}\right) \\ &= \varphi\left(0, \frac{\beta}{1 - \alpha}\right) = \left(1 + \frac{\beta^2}{(1 - \alpha)^2}\right)^{-2} \\ &= \frac{(1 - \alpha)^4}{\left((1 - \alpha)^2 + \beta^2\right)^2} = \frac{(1 - \alpha)^4}{(1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha)^2} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2. \end{aligned}$$

On doit donc trouver une solution de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{si } \alpha^2+\beta^2<1 \\ v(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{4}(1-\alpha)^2 & \text{si } \alpha^2+\beta^2=1. \end{cases}$$

Etape 2 (Coordonnées polaires). On pose $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$ et $w(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$. La condition aux limites devient alors

$$\begin{aligned} w(1,\theta) &= \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta \\ &= \frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos(2\,\theta) - \frac{1}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

et donc le problème à résoudre est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = 0 & r\in(0,1)\,,\ \theta\in(0,2\pi) \\ w(1,\theta) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{8}\cos(2\,\theta) & \theta\in(0,2\pi)\,. \end{cases}$$

On trouve alors (cf. exemple 18.6) que la solution générale est

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,\theta) + b_n\sin(n\,\theta)\right)r^n.$$

La condition aux limites $w(1,\theta) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{8}\cos(2\,\theta)$ nous permet alors de déterminer les coefficients

$$\frac{a_0}{2} = \frac{3}{8}\,,\quad a_1 = -\frac{1}{2}\,,\quad a_2 = \frac{1}{8}\,,\quad a_n = 0\ \forall\, n\geq 3 \quad \text{et} \quad b_n = 0\ \forall\, n.$$

La solution en coordonnées polaires est donc

$$w(r,\theta) = \frac{3}{8} - \frac{r}{2}\cos\theta + \frac{r^2\cos(2\,\theta)}{8} = \frac{3}{8} - \frac{r}{2}\cos\theta + \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{8}$$

et par conséquent celle en coordonnées Cartésiennes est

$$v(\alpha,\beta) = \frac{3}{8} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}\left(\alpha^2-\beta^2\right).$$

Etape 3 (Solution du problème donné). En revenant au problème initial on a que sa solution est donnée par la relation $u = v\circ f$, c'est à dire

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v\left(\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}\,, \frac{2\,y}{(x+1)^2+y^2}\right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{1}{8}\,\frac{\left(x^2+y^2-1\right)^2 - 4\,y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 18.15 *Etape 1 (Application conforme).* Soit f une application qui envoie Ω sur le disque unité D. Puisque la frontière de Ω est une droite et celle de D un cercle, f est ainsi une transformation de Moebius. Il suffit donc de se donner trois points de $\partial\Omega$ et leurs images sur ∂D pour caractériser une telle transformation (à une inversion près). On se donne, par exemple, $f(0) = -1$, $f(1) = -i$ et $f(-1) = i$. On trouve que l'application est alors donnée par

$$f(z) = \zeta = \alpha + i\,\beta = \frac{z-i}{z+i}$$

et

$$f^{-1}(\zeta) = z = x + i\,y = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,.$$

Ceci nous conduit à

$$\alpha = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} \qquad \beta = \frac{-2\,x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$x = \frac{-2\,\beta}{(\alpha-1)^2+\beta^2} \qquad y = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}\,.$$

La condition aux limites

$$\varphi(x,y) = \frac{8\,x^2}{(1+x^2)^2}$$

devient ainsi (se rappeler que sur le bord de D on a $\alpha^2+\beta^2=1$)

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha,\beta) &= \varphi\left(f^{-1}(\alpha,\beta)\right) = \varphi\left(\frac{-2\,\beta}{(\alpha-1)^2+\beta^2}\,,\,\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\,,0\right) = \frac{8\,\dfrac{\beta^2}{(\alpha-1)^2}}{\left[1+\dfrac{\beta^2}{(\alpha-1)^2}\right]^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\psi(\alpha,\beta) = \frac{8\,\beta^2(\alpha-1)^2}{\left[(\alpha-1)^2+\beta^2\right]^2} = 2\,\beta^2.$$

On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{si } \alpha^2+\beta^2<1 \\ v(\alpha,\beta) = 2\,\beta^2 & \text{si } \alpha^2+\beta^2=1. \end{cases}$$

Etape 2 (Coordonnées polaires). On pose $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$ et $w(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0, 2\pi) \\ w(1,\theta) = 2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta) & \theta \in (0, 2\pi)\,. \end{cases}$$

Par séparation de variables on a (cf. exemple 18.6) que la solution générale est

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) r^n.$$

Comme $w(1,\theta) = 1 - \cos(2\theta)\,,$ on en déduit que tous les coefficients sont nuls exceptés $a_0 = 2$ et $a_2 = -1$. La solution en coordonnées polaires est donc

$$w(r,\theta) = 1 - r^2\cos(2\theta) = 1 - r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

et celle en coordonnées Cartésiennes est ainsi

$$v(\alpha,\beta) = 1 - \alpha^2 + \beta^2.$$

Etape 3 (Solution du problème donné). Comme la solution du problème est donnée par $u(x,y) = v(f(x,y))$, on déduit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 1 - \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}\right)^2 \\ &= 4\,\frac{y(y+1)^2 + x^2(y+2)}{\left(x^2+(y+1)^2\right)^2}\,. \end{aligned}$$

Exercice 18.16 *Etape 1 (Application conforme).* On trouve facilement que l'application

$$f(z) = \frac{2}{z-(2+2i)} : \Omega \to D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}\,.$$

En effet comme $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-(2+2i)| > 2\}$ on a immédiatement que

$$|\zeta| = |f(z)| = \frac{2}{|z-(2+2i)|} < 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x,y) = \zeta = \alpha + i\beta &= \frac{2}{x+iy-2-2i} = \frac{2}{(x-2)+i(y-2)} \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+(y-2)^2} + i\,\frac{-2(y-2)}{(x-2)^2+(y-2)^2} \end{aligned}$$

et

$$f^{-1}(\alpha,\beta) = z = x + i\,y = 2 + 2\,i + \frac{2}{\zeta}$$
$$= 2\,\frac{\alpha + \left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\alpha^2+\beta^2} + 2\,i\,\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,.$$

La condition aux limites $\varphi(x,y) = x^2 + 2\,y^2$ s'écrit alors (se rappeler que sur ∂D on a $\alpha^2+\beta^2=1$)

$$\psi(\alpha,\beta) = \varphi\left(f^{-1}(\alpha,\beta)\right) = \varphi\left(\frac{2\,\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + 2, 2 - \frac{2\,\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$
$$= \varphi(2\,\alpha+2, 2-2\,\beta) = (2+2\,\alpha)^2 + 2\,(2-2\,\beta)^2$$
$$= 4\left[1 + 2\,\alpha + \alpha^2 + 2 - 4\,\beta + 2\,\beta^2\right] = 4\left[4 + 2\,\alpha - 4\,\beta + \beta^2\right].$$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{si } \alpha^2+\beta^2 < 1 \\ v(\alpha,\beta) = 4\left[4 + 2\,\alpha - 4\,\beta + \beta^2\right] & \text{si } \alpha^2+\beta^2 = 1. \end{cases}$$

Etape 2 (Coordonnées polaires). On pose $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$ et $w(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$. La condition aux limites s'écrit

$$w(1,\theta) = 4\left(4 + 2\cos\theta - 4\sin\theta + \sin^2\theta\right)$$
$$= 4\left(4 + 2\cos\theta - 4\sin\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,\theta)\right)$$
$$= 18 + 8\cos\theta - 2\cos(2\,\theta) - 16\sin\theta.$$

et le système devient donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0,1)\,,\ \theta \in (0,2\pi) \\ w(1,\theta) = 18 + 8\cos\theta - 2\cos(2\,\theta) - 16\sin\theta & \theta \in (0,2\pi)\,. \end{cases}$$

Par séparation de variables on a (cf. exemple 18.6) que la solution générale est donnée par

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\,\theta) + b_n\sin(n\,\theta)\right)r^n.$$

En utilisant la condition aux limites, $w(1,\theta)$, on en déduit que tous les coefficients sont nul mis à part

$$\frac{a_0}{2} = 18, \quad a_1 = 8, \quad a_2 = -2, \quad b_1 = -16.$$

La solution en coordonnées polaires est ainsi

$$w(r,\theta) = 18 + 8\,r\cos\theta - 16\,r\sin\theta - 2\,r^2\cos(2\,\theta)$$
$$= 18 + 8\,r\cos\theta - 16\,r\sin\theta - 2\,r^2\cos^2\theta + 2\,r^2\sin^2\theta$$

et donc elle s'écrit en coordonnées Cartésiennes

$$v(\alpha,\beta) = 18 + 8\,\alpha - 16\,\beta + 2\,\beta^2 - 2\,\alpha^2.$$

Etape 3 (Solution du problème donné). Comme la solution est donnée par $u(x,y) = v(f(x,y))$, on a que

$$\begin{aligned} u(x,y) = 18 &+ \frac{16(x-2)}{(x-2)^2+(y-2)^2} + \frac{32(y-2)}{(x-2)^2+(y-2)^2} \\ &+ \frac{8(y-2)^2}{\left((x-2)^2+(y-2)^2\right)^2} - \frac{8(x-2)^2}{\left((x-2)^2+(y-2)^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 18.17 En dérivant deux fois par rapport à t on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{c}{2}\left[f'(x+c\,t) - f'(x-c\,t)\right] + \frac{1}{2}\left[g(x+c\,t) + g(x-c\,t)\right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{2}\left[f''(x+c\,t) + f''(x-c\,t)\right] + \frac{c}{2}\left[g'(x+c\,t) - g'(x-c\,t)\right]. \end{aligned}$$

En faisant un calcul similaire on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[f''(x+c\,t) + f''(x-c\,t)\right] + \frac{1}{2\,c}\left[g'(x+c\,t) - g'(x-c\,t)\right],$$

i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On voit de plus que

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}\left[f(x) + f(x)\right] = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{1}{2}\left[g(x) + g(x)\right] = g(x). \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] L. V. Ahlfors : *Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] K. Arbenz - A. Wohlhauser : *Compléments d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), 1981.

[3] K. Arbenz - A. Wohlhauser : *Variables complexes*, PPUR, 1981.

[4] S. D. Chatterji : *Cours d'Analyse 1, Analyse vectorielle*, PPUR, 1997.

[5] S. D. Chatterji : *Cours d'Analyse 2, Analyse complexe*, PPUR, 1997.

[6] S. D. Chatterji : *Cours d'Analyse 3, Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, PPUR, 1998.

[7] B. Dacorogna : *Analyse avancée pour mathématiciens*, à l'adresse électronique : http ://caa.epfl.ch/livres.html (2018).

[8] W. Fleming : *Functions of several variables*, Second edition, Springer-Verlag (1977).

[9] N. Fusco - P. Marcellini - C. Sbordone : *Analisi Matematica 2*, Liguori Editore, 1996.

[10] E. Giusti : *Analisi Matematica 2,* Bollati Boringhieri, 1992.

[11] E. Kreyszig : *Advanced engineering mathematics*, Sixth edition, Wiley, 1988.

[12] M. H. Protter - C. B. Morrey : *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, First edition, 1977.

[13] C. S. Rees - S. M. Shah - Č. V. Stanojević : *Theory and applications of Fourier analysis*, Dekker, 1981.

[14] C. D. Sogge : *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[15] E. M. Stein - R. Shakarchi : *Fourier analysis,* Princeton University Press, 2003.

[16] E. M. Stein - R. Shakarchi : *Complex analysis,* Princeton University Press, 2003.

[17] E. M. Stein - R. Shakarchi : *Real analysis,* Princeton University Press, 2005.

[18] D. V. Widder : *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946.

Index