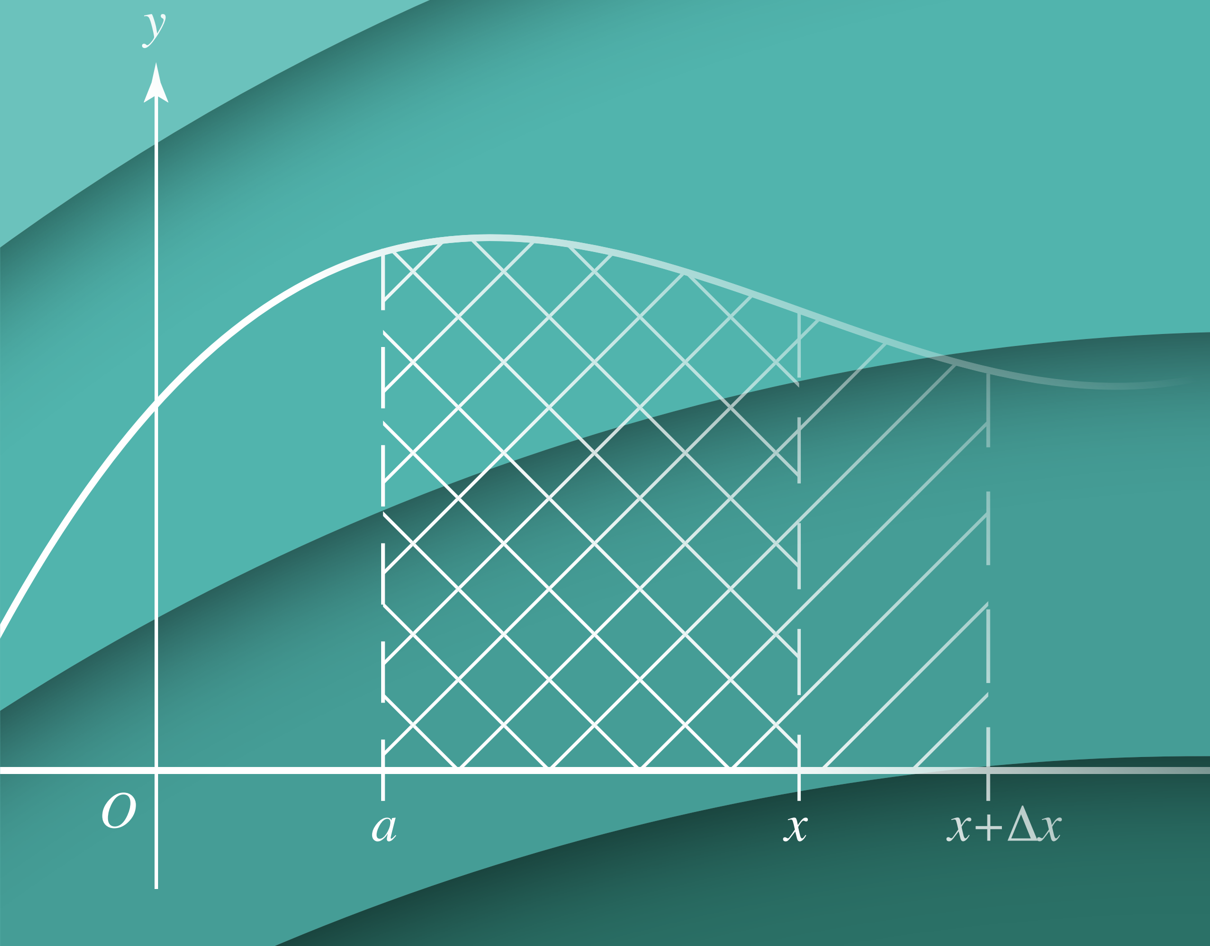
Enseignement des mathématiques

Philippe Kocian

Calcul infinitésimal

Calculs différentiel et intégral relatifs aux fonctions d'une variable



Enseignement des mathématiques

Calcul infinitésimal

Calculs différentiel et intégral relatifs aux fonctions d'une variable

Deux problèmes majeurs occupaient les mathématiciennes et mathématiciens du XVII^e^ siècle: la détermination de l'équation de la tangente à une courbe en un point donné, et le calcul de l'aire d'une surface non polygonale. L'étude du premier problème a donné naissance à ce que l'on appelle le calcul différentiel, le second, au calcul intégral. Si les problèmes des tangentes et des aires sont aujourd'hui maîtrisés, il n'en demeure pas moins que les calculs différentiel et intégral occupent une place importante dans le monde des sciences naturelles et de la technique.

Consacré aux calculs différentiel et intégral, le présent ouvrage s'adresse en priorité aux étudiantes et étudiants débutant une formation en ingénierie; il couvre l'essentiel de la matière traitée lors de la première année d'étude au sein d'une haute école d'ingénierie suisse (HES). La plupart des notions indispensables sont introduites avec le souci de les expliquer, tantôt par des éléments historiques, tantôt par des besoins provenant des sciences expérimentales ou de l'ingénierie.

Illustrations et exemples détaillés sont les atouts majeurs du présent ouvrage; ils permettent à chaque lectrice et lecteur de saisir rapidement les enjeux des différents concepts, et ainsi de s'approprier les outils des calculs différentiel et intégral utiles aux sciences expérimentales et à l'ingénierie.

Philippe Kocian, physicien et mathématicien, est maître d'enseignement à la haute école d'ingénierie HE-Arc à Neuchâtel. Il porte un intérêt tout particulier à l'ancrage historique des notions mathématiques et des modèles physiques.

ISBN 978-2-88915-578-1

9 782889 155781

haute école arc ingénierie
neuchâtel berne jura
www.he-arc.ch

Hes·so

EPFL PRESS

Calcul infinitésimal

Philippe Kocian

Calcul infinitésimal

Calculs différentiel et intégral relatifs aux fonctions d'une variable

EPFL PRESS

Ouvrage publié avec le soutien de la Haute école Arc Ingénierie.

La collection « Enseignement des mathématiques » est dirigée par
le professeur Robert C. Dalang

Direction générale : Lucas Giossi
Directions édioriale et commerciale : Sylvain Collette et May Yang
Responsable de production : Christophe Borlat
Éditorial : Alice Micheau-Thiébaud et Jean Rime
Graphisme : Kim Nanette
Promotion et diffusion : Manon Reber
Comptabilité : Daniela Castan

EPFL Press est une maison d'édition de la Fondation des Presses polytechniques
et universitaires romandes (PPUR), qui publie principalement les travaux d'enseignement
et de recherche de l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL),
des universités et des hautes écoles.

PPUR, EPFL-Rolex Learning Center, Station 20, CH-1015 Lausanne,
info@epflpress.org, tél.: +41 21 693 21 30.

www.epflpress.org

Première édition, 2025

ISBN 978-2-88915-578-1, version imprimée
ISBN 978-2-8323-2254-3, version ebook (pdf), doi.org/10.55430/3167CIPK

Imprimé en République tchèque

Préambule

Son qualificatif le suggère, le *calcul infinitésimal* est la branche des mathématiques qui traite des éléments infiniment petits. De tels éléments apparaissent essentiellement dans deux problèmes qui occupaient les mathématiciennes et mathématiciens au XVII^{e} siècle :

- la détermination de l'équation de la tangente à une courbe en un point donné,
- le calcul de quadrature, c'est-à-dire le calcul de l'aire d'une surface quelconque (non polygonale, en particulier).

L'étude et la résolution du premier problème ont donné naissance à ce que l'on appelle de nos jours le *calcul différentiel* ; le deuxième au *calcul intégral*.

Si le calcul infinitésimal a connu durant le XVIII^{e} siècle un succès notable, il a également été la proie d'un certain scepticisme, notamment à cause du concept même d'élément infiniment petit, qu'il était difficile de définir précisément. Les difficultés rencontrées n'ont cependant pas fait le poids par rapport aux nouvelles possibilités qui s'offraient ; loin de sombrer dans l'oubli, le calcul des infiniment petits a fait l'objet, durant plusieurs décennies, de nombreux travaux et remaniements, le conduisant à prendre, près de deux siècles après son élaboration, la forme qu'on lui connaît aujourd'hui.

Le présent ouvrage aborde le calcul infinitésimal sur un fond historique, mais avec un langage mathématique moderne, basé sur les notions rigoureuses de *fonction* et de *limite*. Les nombreuses références du passé que l'on peut y trouver ont pour but, non pas de présenter un cours d'histoire des mathématiques, mais de mettre en lumière les éléments qui ont motivé l'introduction d'une nouvelle notion, justifié le développement de nouveaux outils...

La matière présentée dans ce document s'adresse en priorité aux étudiantes et étudiants de première année d'études en ingénierie. Les différentes notions sont traitées de manière aussi simple que possible ; certains sujets, comme le calcul intégral ou les développements limités, nécessitent néanmoins des raisonnements parfois conséquents, demandant de la part de l'étudiante ou de l'étudiant passablement de persévérance.

La lecture et l'étude du présent travail requièrent une maîtrise du calcul littéral ainsi qu'une certaine culture en mathématiques (connaissance des fonctions trigonométriques, aptitude à la résolution de systèmes d'équations à plusieurs inconnues, etc.). Ce n'est qu'avec un tel bagage qu'il est possible d'aborder sereinement la matière présentée dans les pages qui suivent.

Le présent ouvrage peut être abordé sous différents angles. La lectrice ou le lecteur peut :

- simplement consulter certains chapitres, dans le but de se remémorer certaines notions,
- s'informer sur les principaux aboutissements, sans regarder les preuves,
- prendre connaissance des résultats, tout en parcourant rapidement les preuves (ce qui peut être fait grâce aux nombreuses figures présentes),
- étudier l'intégralité du contenu, en examinant minutieusement les raisonnements présentés.

La plupart des notions introduites dans le présent travail sont munies d'exemples ; en outre, certaines d'entre elles, les plus importantes, sont suivies d'illustrations. Exemple et illustration tiennent tous les deux le même rôle : celui de mettre un concept donné en situation ; mais alors que l'exemple traite le concept dans un cadre purement mathématique, l'illustration l'ancre dans un contexte technique et pratique.

À la fin du présent ouvrage, se trouve un recueil d'exercices qui couvre l'ensemble des sujets abordés dans les différents chapitres. Ce recueil permet à chaque instant de tester l'état de ses propres connaissances ; c'est en essayant de résoudre les problèmes proposés que l'on peut mieux se rendre compte de ce que l'on a déjà acquis et de ce que l'on ne maîtrise pas encore.

Table des matières

Chapitre 1

Corps des nombres réels

L'objectif majeur que visaient les savants, en développant au travers des siècles le calcul des éléments *infiniment petits*, c'était de pouvoir calculer des aires de surfaces non polygonales, ainsi que des volumes de solides non polyédriques. Si les mathématiciens grecs de l'Antiquité ont pu traiter avec succès plusieurs problèmes d'aires et de volumes, ils n'ont, cependant, pas été capables d'exhiber une méthode permettant d'aborder la question en toute généralité. Un obstacle probable à l'élaboration d'une théorie globale résidait, entre autres, dans la difficulté de concevoir l'idée de nombre réel. Sans la notion de nombre réel, il n'est pas envisageable de parler de *continuum* de nombres (*i.e.* d'intervalle), et encore moins de concepts de *limite*, de *continuité*, de *dérivée*, d'*intégrale*...

1.1 Ensembles de nombres

Un *nombre* est un objet mathématique qui, selon le contexte, est utilisé pour :

- compter, dénombrer, énumérer,
- caractériser une grandeur, une quantité,
- comparer des quantités entre elles.

Loin de faire partie de l'univers des mathématiciens uniquement, les nombres apparaissent dans toutes les sciences exactes (physique, chimie, biologie, branches appliquées de l'ingénierie), ainsi que dans le quotidien de tout un chacun.

Dans la présente étude, il sera essentiellement question des nombres dits *réels*. Cela sera détaillé par la suite, l'ensemble des nombres réels peut être vu comme un axe infini, sur lequel il est possible de s'approcher arbitrairement près d'un nombre donné sans devoir effectuer un quelconque saut. Cet ensemble offre, de ce fait, le cadre idéal pour le développement du calcul des éléments *infiniment petits* ; c'est, en effet, en ayant la possibilité de réduire constamment et surtout continûment des quantités finies, que l'on peut concevoir l'idée de *grandeur infiniment petite*.

L'*ensemble des nombres réels* peut être construit à partir d'une succession d'extensions de l'ensemble des nombres que l'on utilise quotidiennement pour compter : les *nombres naturels.*

- On appelle *ensemble des nombres naturels* l'ensemble :

$$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}\,.$$

  Ses dix premiers éléments sont les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9. En travaillant dans ce que l'on appelle la *base dix*[I], l'élément qui suit le 9 se note 10, qui est une combinaison des deux chiffres 0 et 1 ; et de manière générale, tous les éléments qui suivent le 9 se notent à l'aide d'une combinaison plus ou moins longue des dix chiffres donnés précédemment. L'ensemble des nombres naturels est *stable* sous l'opération d'addition : la somme de deux nombres naturels donne un nombre naturel. Par définition, le nombre 0 est l'unique nombre naturel pour lequel $n+0 = 0+n = n$, où n est un nombre naturel quelconque[II] ; il est, de ce fait, ce que l'on appelle l'*élément neutre* pour l'addition. Cela étant, aucun nombre naturel n, excepté 0, n'admet d'*opposé* n' : quel que soit le nombre naturel n non nul, il n'existe aucun nombre naturel n' tel que $n + n' = n' + n = 0$. Pour prendre en compte les nombres opposés, il est nécessaire d'étendre l'ensemble des nombres naturels.

- On appelle *ensemble des nombres entiers relatifs* l'ensemble :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}\,.$$

  Cet ensemble est également stable sous l'addition et admet 0 comme élément neutre de l'addition ; de plus, tout élément admet un opposé : l'opposé de n, noté $-n$, est dans $\mathbb{Z}$ dès lors que n l'est. $\mathbb{Z}$ est également stable sous l'opération de multiplication (comme $\mathbb{N}$, du reste) : le produit de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier relatif. Le nombre 1 est l'unique nombre entier relatif pour lequel $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$, où n est un nombre entier relatif ; il est, de ce fait, ce que l'on appelle l'*élément neutre* pour la multiplication. Cela étant, excepté le nombre 1, aucun élément n de $\mathbb{Z}$ n'admet d'*inverse* n' dans $\mathbb{Z}$: quel que soit le nombre entier $n \neq 1$, il n'existe aucun entier n' tel que $n \cdot n' = n' \cdot n = 1$. Pour prendre en compte les nombres inverses, il est nécessaire d'étendre l'ensemble des nombres entiers relatifs.

I. Dans le domaine des mathématiques, la base désigne un nombre dont les puissances servent à écrire n'importe quel nombre ; en base dix, les puissance de dix sont l'*unité*, la *dizaine*, la *centaine*, le *millier*, le *dixième*, *le centième*, etc.

II. Le nombre 0 n'existait pas dans l'Europe antique. Il n'a été introduit qu'au VII[e] siècle, au travers des échanges commerciaux avec l'Orient, en particulier l'Inde. Ne concevant pas le nombre 0, les Romains mentionnaient la première année d'une ère, d'une époque, etc. comme étant l'an 1. Cette façon de compter a induit une particularité dans la manière dont les siècles s'inscrivent dans les années : le début du XXI[e] (par exemple) n'a pas eu lieu en l'an 2000, mais en 2001.

- On appelle *ensemble des nombres rationnels* l'ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \tfrac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}^{\text{III}}.$$

  Cet ensemble est stable sous l'addition et la multiplication [IV], admet 0 comme élément neutre pour l'addition et 1 comme élément neutre pour la multiplication, respectivement. Tout élément r de $\mathbb{Q}$ admet un opposé, noté $-r$, ainsi qu'un inverse, noté $\frac{1}{r}$; à l'exception de 0 qui n'admet qu'un opposé [V]. Ces propriétés font de l'ensemble $\mathbb{Q}$ ce que l'on appelle un *corps* ; on le nomme *corps des nombres rationnels* et on le note $(\mathbb{Q}\,;\,+\,;\,\cdot)$.

Plaçons les nombres rationnels sur un axe (*i.e.* une droite) $\mathcal{A}$, en procédant comme suit.

(a) Le nombre $\frac{0}{1}$ est placé arbitrairement, en un point de $\mathcal{A}$; ce point est appelé 0.

(b) Le nombre $\frac{1}{1}$ est placé en un point de $\mathcal{A}$, qui se trouve d'un côté de 0, à une certaine distance non nulle ; le nombre $\frac{-1}{1}$ est placé en un point de $\mathcal{A}$ situé à la même distance du point 0 que le point représentant $\frac{1}{1}$, mais de l'autre côté ; les points de $\mathcal{A}$ représentant $\frac{1}{1}$ et $\frac{-1}{1}$ sont appelés respectivement 1 et -1.

(c) Le nombre $\frac{n}{1}$, où n est un nombre entier strictement positif, est placé en un point de $\mathcal{A}$ qui se trouve du même côté (par rapport à 0) que 1, et dont la distance par rapport à 0 est n fois plus grande que la distance entre 0 et 1 ; le nombre $\frac{n}{1}$, où n est un nombre entier strictement négatif, est placé en un point de $\mathcal{A}$ situé du même côté (par rapport à 0) que -1, et dont la distance par rapport à 0 est n fois plus grande que la distance entre 0 et -1 ; les points de $\mathcal{A}$ représentant $\frac{n}{1}$ sont appelés n.

(d) Les autres nombres rationnels sont placés sur $\mathcal{A}$ à la manière de l'exemple suivant. Soit le nombre $\frac{18}{7}$; ce nombre peut être noté sous la forme $\frac{18}{7} = \frac{14+4}{7} = \frac{14}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7}$. Le point sur l'axe correspondant au nombre $\frac{18}{7}$ se trouve alors entre le point

III. $\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ se lit ainsi : $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres r s'écrivant sous la forme $\frac{p}{q}$ (où l'entité p est divisée en q parties égales), tels que p et q sont entiers et q est non nul. Tout nombre rationnel de la forme $\frac{p}{1}$ s'identifie au nombre p.

IV. La stabilité sous l'addition est effective à condition d'admettre le fait suivant : deux nombres rationnels $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ sont considérés comme *égaux* (ou plus précisément *équivalents*) s'il existe un nombre entier m tel que $\frac{p_1}{q_1} = \frac{m \cdot p_2}{m \cdot q_2}$ ou $\frac{p_2}{q_2} = \frac{m \cdot p_1}{m \cdot q_1}$; c'est grâce à cette assertion qu'il est possible de définir l'opération dite de *mise au même dénominateur*, qui permet de réduire la somme de deux nombres rationnels en un seul nombre rationnel (par exemple $\frac{7}{3} + \frac{5}{4} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{28}{12} + \frac{15}{12} = \frac{43}{12}$). Pour ce qui est de la multiplication, la stabilité est manifeste : le produit de deux nombres rationnels $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, qui est par défintion :

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2},$$

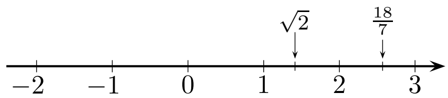
est aussi un nombre rationnel.

V. Concrètement, si $r = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p},$$

pour autant que $p \neq 0$, de sorte que $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} = \frac{1}{1} = 1$.

correspondant au 2 et le point correspondant au 3, à la distance $\frac{4}{7}\,d$ du 2 et la distance $\frac{3}{7}\,d$ du 3, où d est la longueur du segment qui relie le point correspondant au 2 et le point correspondant au 3. Pour placer ce point, il convient de diviser le segment qui relie le 2 et le 3 en sept segments égaux, d'en prendre quatre, puis de les mettre bout à bout depuis le 2.



Les points qu'occupent les nombres rationnels sur l'axe $\mathcal{A}$ sont en quantité infinie (vu qu'il y a une infinité de nombres rationnels différents) ; pourtant, ces points ne couvrent pas $\mathcal{A}$ dans son intégralité. Afin de se rendre compte de cette réalité, considérons par exemple le nombre $\sqrt{2}$. Ce nombre [VI] peut être interprété géométriquement comme étant la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes valent 1 toutes les deux. Avec cette interprétation, $\sqrt{2}$ peut être représenté par un point sur l'axe $\mathcal{A}$, en suivant la même procédure que celle adoptée pour représenter les nombres rationnels : $\sqrt{2}$ est le point de l'axe $\mathcal{A}$ qui se trouve du même côté de 0 que 1, et dont la distance par rapport à 0 correspond à la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle dont les cathètes valent 1 toutes les deux. Cela étant, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre rationnel. Pour le voir, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; noter que p et q peuvent être choisis de sorte qu'ils soient tous les deux positifs et qu'ils n'aient aucun diviseur commun, excepté 1 (*i.e.* il n'existe aucun nombre entier $m \neq 1$ pour lequel la division de p par m soit un nombre entier et la division de q par m soit aussi un nombre entier). Dans ce cas, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2\,q^2$, ce qui montre que p^2 est pair ; et comme p^2 est pair, alors nécessairement p est pair (en effet, si p était impair, p^2 serait impair aussi). Le nombre p peut donc s'écrire $p = 2\,k$, où k est un nombre entier positif ; k est même strictement positif, vu que $q \neq 0$ et que $p^2 = 2\,q^2$. Par conséquent :

$$p^2 = 2\,q^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2\,k)^2 = 2\,q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,k^2 = 2\,q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2\,k^2 .$$

Cette dernière équation montre que q^2 est pair ; et comme q^2 est pair, alors q est pair aussi. En résumé, p et q sont tous les deux pairs ; ce qui est alors contradictoire avec le fait que p et q n'ont aucun diviseur commun, excepté 1. Par conséquent, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre rationnel.

- Reprenons la correspondance entre les nombres rationnels et les points de l'axe $\mathcal{A}$, définie plus haut, et étendons-la aux points de $\mathcal{A}$ auxquels ne correspond aucun élément de $\mathbb{Q}$ (en imitant ce qui a été fait pour le nombre $\sqrt{2}$). Les points de $\mathcal{A}$ auxquels ne correspond aucun nombre rationnel définissent alors de nouveaux nombres. Notons $\mathbb{I}$ l'ensemble de ces nouveaux nombres. On appelle *ensemble des nombres réels* l'ensemble noté $\mathbb{R}$, qui résulte de la réunion des ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{I}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ portent le nom de *nombres réels*. Définir ce qu'est un *nombre réel* de manière formelle n'est pas des plus aisé ; le plus simple, peut-être, est de le faire au moyen de ce que l'on appelle le *développement décimal* : le

VI. Largement utilisé par les Grecs de l'Antiquité, le nombre $\sqrt{2}$ était vraisemblablement déjà connu des Babyloniens de la première moitié du II^e millénaire av. J.-C.

développement décimal d'un nombre (à supposer qu'il est possible) consiste en un ensemble de deux suites de chiffres séparées par une virgule, la première suite étant appelée *partie entière* du nombre, la deuxième *décimales*[VII]. Tout nombre rationnel possède un développement décimal ; par exemple $\frac{33}{10} = \frac{30}{10} + \frac{3}{10} = 3{,}3$ $(= 3{,}30 = 3{,}300 = \ldots)$, $\frac{10}{3} = 3{,}33333.....$ On définit alors le concept de *nombre réel* comme étant tout objet admettant un développement décimal (*i.e.* tout objet pouvant s'écrire sous la forme de deux suites de chiffres séparées par une virgule, la partie entière et les décimales).

- ◇ Le nombre réel en question est rationnel lorsque les décimales comportent un nombre fini de chiffres (comme par exemple dans 472,507003) ou lorsque les décimales comportent un nombre infini de chiffres, qui présentent une périodicité à partir d'une certaine position (comme par exemple dans 472,507507507..... ou dans 472,96482507507507..... (*cf.* sous-section 1.6.2 consacrée aux suites géométriques), ou encore dans 472,50700300000.....).
- ◇ Le nombre réel en question n'est pas rationnel lorsque les décimales comportent une infinité de chiffres, qui ne présentent aucune périodicité (comme par exemple dans $\sqrt{2} = 1{,}41421.....$).

On vérifie sans peine que l'ensemble des nombres réels est stable sous l'addition et la multiplication, que chaque élément admet un opposé, 0 y compris, ainsi qu'un inverse, à l'exception de 0. Cet ensemble a donc la structure d'un corps ; on l'appelle *corps des nombres réels* et on le note $(\mathbb{R}\,;\,+\,;\,\cdot\,)$. De par sa construction, $\mathbb{R}$ constitue une sorte de *continuum* d'éléments ; il peut être vu comme l'expression algébrique du concept géométrique de *droite* ; du reste, il n'est pas rare d'employer le terme de *droite réelle* pour désigner $\mathbb{R}$. Un nombre réel est dit *positif* (respectivement *strictement positif*) si sa partie entière est un nombre naturel (respectivement un nombre naturel, excepté 0) ; un nombre réel est dit *négatif* si sa partie entière est l'opposé d'un nombre naturel (respectivement l'opposé d'un nombre naturel, excepté 0). Noter, pour terminer, que les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels* ; l'ensemble $\mathbb{I}$ porte alors le nom d'*ensemble des nombres irrationnels*.

Si l'ensemble $\mathbb{R}$ contient l'ensemble $\mathbb{Q}$, qui contient l'ensemble $\mathbb{Z}$, qui contient l'ensemble $\mathbb{N}$, il n'en demeure pas moins que $\mathbb{R}$ n'est pas le plus grand ensemble de nombres existant. Plusieurs extensions de $\mathbb{R}$ peuvent être conçues ; l'une d'elles, appelée *ensemble des nombres complexes*, notée $\mathbb{C}$, est définie par :

$$\mathbb{C} \;=\; \left\{ z = a + b\,\mathrm{i} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1 \right\}^{\,\mathrm{VIII}}.$$

VII. Par exemple, le développement décimal 4238,47 a pour partie entière 4238 et pour décimales 47. La partie entière est constituée de quatre milliers, deux centaines, trois dizaines et huit unités ; les décimales sont formées de quatre dizièmes et de sept centièmes :

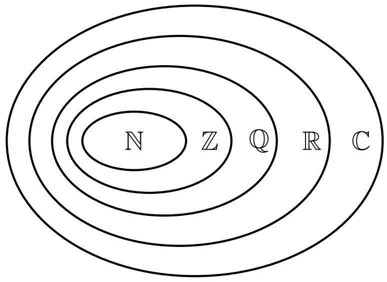
$$4238{,}47 \;=\; 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}01\,(+0 \cdot 0{,}001 + \ldots)\,,$$

où $0{,}1 = \frac{1}{10}$ et $0{,}01 = \frac{1}{100}$.

VIII. $\mathbb{C} = \{z = a + b\,\mathrm{i} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1\}$ se lit ainsi : $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres z s'écrivant sous la forme $a + b\,\mathrm{i}$, où a et b sont des nombres réels et i est l'élément tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est d'une importance primordiale, non seulement en mathématiques, mais également en physique et dans les sciences de l'ingénierie, en général. Il ne fera néanmoins pas l'objet d'une étude dans le présent ouvrage ; il apparaîtra tout au plus dans quelques rares situations.

Dire que l'ensemble $\mathbb{C}$ est une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui est une extension de l'ensemble $\mathbb{Q}$, qui est une extension de l'ensemble $\mathbb{Z}$, qui est une extension de l'ensemble $\mathbb{N}$, revient à dire que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, qui est inclus dans $\mathbb{Q}$, qui est inclus dans $\mathbb{R}$, qui est inclus dans $\mathbb{C}$; on note :



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,,$$

en utilisant le symbole $\subset$, et on dit que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Le signe $\subset$, mentionné ci-dessus, est un symbole utilisé dans la théorie des ensembles. De nombreux autres symboles sont en vigueur dans cette théorie ; les principaux sont listés ci-dessous :

- notation d'un ensemble :
  - ◇ $\{a;\ b;\ c;\ \ldots\}$, où $a, b, c, \ldots$ sont les éléments qui constituent l'ensemble ; par exemple, $\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$;
  - ◇ $\{\text{objet} \mid \text{condition sur l'objet}\}$, où la barre verticale signifie *tel que* ; par exemple, $\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$;
- appartenance $\in$ et non appartenance $\notin$:
  par exemple, $2 \in \mathbb{N}$, $-3 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{7}{11} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$;
- inclusion $\subset$:
  par exemple, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; aussi, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; selon les circonstances, on note parfois aussi $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ et on dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$; ou $\mathbb{R} \supset \mathbb{I}$ et on dit que $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{I}$;
- intersection $\cap$:
  par exemple, $\{1;\ 2;\ 3\} \cap \{2;\ 3;\ 4;\ 5\} = \{2;\ 3\}$;
- réunion $\cup$:
  par exemple, $\{1;\ 2;\ 3\} \cup \{2;\ 3;\ 4;\ 5\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; aussi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$;
- exclusion $\smallsetminus$:
  par exemple, $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{I}$; aussi, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$;
- exclusion du zéro * :
  par exemple, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, $\ldots$
- complémentarité $\complement_A$ (où A indique l'ensemble général dans lequel on cherche le complémentaire) :
  par exemple, $\mathbb{Q} = \complement_{\mathbb{R}} \mathbb{I}$; aussi, $\mathbb{I} = \complement_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$;

- produit cartésien $\times$:
  si A et B sont deux ensembles, alors $A \times B = \{(a;\, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ [IX] ;
  par exemple :
  $$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x;\, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}\,.$$
  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ peut être interprété géométriquement comme étant un plan ; ce plan est appelé *plan euclidien* (*cf.* section 2.1 du chapitre 2) ;
- ensemble vide : $\varnothing$;
  c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

En outre, les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$ vont être fréquemment utilisés dans le présent ouvrage ; $\Rightarrow$ est une implication ($A \Rightarrow B$ signifie A implique B), $\Leftarrow$ une implication inverse ($A \Leftarrow B$ signifie B implique A) ; quant à $\Leftrightarrow$, il s'agit d'une double implication ($A \Leftrightarrow B$ signifie A implique B et B implique A) ; $\Leftrightarrow$ se traduit, en mots, par l'expression *si et seulement si.*

1.2 Opérations entre nombres réels

Grâce au concept de développement décimal, les opérations d'*addition* et de *multiplication*, que l'on utilise couramment dans le cadre des nombres entiers, se généralisent sans peine à l'ensemble des nombres réels. Des caractéristiques telles que l'*associativité* ou la *commutativité*, que l'on expérimente quotidiennement avec les nombres entiers, se transposent alors logiquement au monde des nombres réels.

Plusieurs autres opérations peuvent être définies à partir de l'addition et de la multiplication : la *soustraction*, la *division*, l'*élévation à une puissance*...

- L'addition (ou somme, notée avec le signe $+$) est :
  - ◇ commutative : $a + b \;=\; b + a\,,$
  - ◇ associative : $a + (b + c) \;=\; (a + b) + c\,,$

  où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- La soustraction $a - b$ de deux nombres réels a et b est définie comme étant la somme de a et de l'opposé $-b$ de b ($a - b = a + (-b)$).
- La multiplication (ou produit, noté avec le signe $\cdot$) est :
  - ◇ commutative : $a \cdot b \;=\; b \cdot a\,,$
  - ◇ associative : $a \cdot (b \cdot c) \;=\; (a \cdot b) \cdot c\,,$
  - ◇ distributive par rapport à l'addition : $a \cdot (b + c) \;=\; a \cdot b + a \cdot c\,,$

  où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Noter que le point symbolisant la multiplication est souvent ommis : on note souvent $a\,b$ au lieu de $a \cdot b$.
- La division $a \div b$ de deux nombres réels a et b, où $b \neq 0$, que l'on note aussi $\frac{a}{b}$, est définie comme étant le produit de a et de l'inverse $\frac{1}{b}$ de b ($a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$).

IX. $A \times B = \{(a;\, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ se lit ainsi : $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples $(a;\, b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.

- La puissance n-ième d'un nombre réel a se note a^n et est définie par l'égalité :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}, \qquad n \in \mathbb{N}^* .$$

  Propriétés :
  ◇ $a^m\, a^n = a^{m+n}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$,
  ◇ $a^0 = 1$, où $a \in \mathbb{R}^*$ (de sorte que $a^m\, a^0 = a^{m+0} = a^m$),
  ◇ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, où $a \in \mathbb{R}^*$ (de sorte que $a^n\, \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{n-n} = a^n\, a^{-n}$),
  ◇ $\big(a^m\big)^n = a^{m\,n}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$.

- La racine n-ième d'un nombre réel a se note $\sqrt[n]{a}$, ou $a^{\frac{1}{n}}$, et est définie par l'égalité :

$$\big(\sqrt[n]{a}\,\big)^n = \big(a^{\frac{1}{n}}\big)^n = a, \qquad n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0;\, 1\} .$$

  Si les nombres $n = 0$ et $n = 1$ sont exclus, c'est afin d'éviter de se retrouver en présence de l'expression a^∞, qui n'a pas de sens, ou de l'expression a^1, qui n'est pas une racine. Noter que si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe, quel que soit $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0;\, 1\}$, et est positive. Mais si $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ n'existe que si n est impair (si $a < 0$ et n est pair, alors $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ mais trouve sa place dans $\mathbb{C}$). La racine n-ième possède les propriétés suivantes :
  ◇ $\sqrt[n]{a\, b} = \sqrt[n]{a}\, \sqrt[n]{b}$,
  ◇ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Comme illustration du maniement de ces différentes opérations, citons ici certaines égalités, appelées *identités remarquables*.

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\, a\, b + b^2$,
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\, a^2\, b + 3\, a\, b^2 \pm b^3$,
- $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4\, a^3\, b + 6\, a^2\, b^2 \pm 4\, a\, b^3 + b^4$,
- ...

triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \\ &&&&\cdots&&&& \end{array}$$

où a, $b \in \mathbb{R}$. Dans ces formules, les coefficients s'obtiennent à l'aide de ce que l'on appelle le *triangle de Pascal*[X] (*cf.* figure ci-dessus) ; ce triangle se construit en observant les règles suivantes :

∴ le triangle est formé de lignes de nombres entiers, positifs ;
∴ la n-ième ligne possède n nombres ;
∴ les lignes sont disposées de sorte que le triangle soit isocèle, en quelque sorte ;

X. Blaise Pascal était notamment un mathématicien, physicien, inventeur et philosophe français, né en 1623 à Clermont-Ferrand et mort en 1662 à Paris. Il est demeuré célèbre pour ses nombreux travaux en mathématiques, ainsi que pour l'invention d'une machine arithmétique. Si Pascal a étudié et utilisé le triangle qui porte son nom, il ne l'a toutefois pas inventé ; le triangle en question était connu des mathématiciens chinois de la fin du XIII[e] siècle ; on le retrouve également dans les mathématiques de l'Islam du XV[e] siècle ; en Europe, il apparaît sur la page de titre d'un ouvrage d'arithmétique germanique de l'époque de la Renaissance.

$\therefore$ chaque ligne commence par le nombre 1 et se termine par le nombre 1 ;
$\therefore$ un nombre qui se trouve à l'intérieur d'une ligne s'obtient en sommant les deux nombres plus proches voisins qui se trouvent dans la ligne précédente.

Attention :

$$\boldsymbol{(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n}\,,$$

sauf si $n = 1$. Noter que, dans le cas $n = 3$:

- $a^3 + b^3 \;=\; (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)\,,$
- $a^3 - b^3 \;=\; (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)\,.$

Des formules similaires existent pour tout entier n positif et impair. Citons encore :

- $a^2 - b^2 \;=\; (a+b)(a-b)\,.$

1.3 Relation d'ordre dans les nombres réels

Reprenons la droite réelle, *i.e.* l'axe représentant le continuum des nombres réels. Considérons deux points quelconques sur cette droite ; appelons a et b les nombres réels associés à ces points. Sur l'axe :

- soit le point représentant a se trouve à gauche du point représentant b,
- soit le point représentant a se trouve à droite du point représentant b,
- soit le point représentant a et le point représentant b sont confondus.

Dans le langage des nombres réels, ces assertions se traduisent comme suit :

- soit le nombre réel a est strictement plus petit que le nombre réel b, ce qui se note $a < b$,
- soit le nombre réel a est strictement plus grand que le nombre réel b, ce qui se note $a > b$,
- soit le nombre réel a est égal au nombre réel b, ce qui se note $a = b$.

Ces caractéristiques font des nombres réels un ensemble dit *totalement ordonné* ; on dit alors qu'il existe une *relation d'ordre total* dans les nombres réels[XI]. Formellement, la relation d'ordre est définie comme suit : a est plus petit ou égal à b, ce qui se note $a \leqslant b$, si et seulement si $b - a$ est un nombre positif[XII].

XI. Le concept d'ordre (tout comme les aspects d'additivité et d'associativité de l'addition ou de la multiplication) se vit, s'expérimente au quotidien, notamment dans le cadre des nombres naturels : au marché, le panier de la personne qui a acheté 23 pommes est manifestement plus rempli que celui de la personne qui en a acheté 16 (à condition que toutes les pommes soient à peu près de tailles égales) ; on accepte donc, sans réticence, de dire que le nombre 23 est plus grand que le nombre 16 (et on note $23 > 16$).

XII. L'idée d'ordre n'est pas inhérente à tout ensemble de nombres. Si elle est présente dans l'ensemble des nombres réels, ainsi que dans n'importe lequel de ses sous-ensembles, elle n'existe cependant pas dans l'ensemble des nombres complexes, par exemple. On ne peut, en effet, pas dire qu'un nombre complexe est plus petit ou plus grand qu'un autre ; on ne peut que se contenter d'affirmer que les deux nombres sont égaux ou non. Cette réalité est due au fait que tout nombre complexe s'écrit comme la somme de deux éléments qui ne peuvent se mélanger.

L'ordre total régnant dans l'ensemble des nombres réels permet de définir les concepts d'*équation* et d'*inéquation*.

- On appelle *équation* toute relation d'*égalité* entre deux quantités A et B (chacune de ces quantités étant une expression algébrique pouvant comporter des grandeurs inconnues ou non) ; on note $A = B$ et on dit que les quantités A et B sont les mêmes.
- On appelle *inéquation* toute relation d'*inégalité* entre deux quantités A et B (chacune de ces quantités étant une expression algébrique pouvant comporter des grandeurs inconnues ou non) ; les inégalités sont de quatre types ; elles sont notées et définies comme suit :
  - ◇ $A \leqslant B$ et on dit que A est plus petite ou égale à B,
  - ◇ $A \geqslant B$ et on dit que A est plus grande ou égale à B,
  - ◇ $A < B$ et on dit que A est strictement plus petite que B,
  - ◇ $A > B$ et on dit que A est strictement plus grande que B.

Dans une équation, l'égalité va dans les deux sens (une quantité A est égale à une quantité B si et seulement si la quantité B est égale à la quantité A, *i.e.* $A = B \Leftrightarrow B = A$) ; alors que dans une inéquation, le sens de l'inégalité doit être minutieusement respecté (une quantité A est strictement plus petite qu'une quantité B si et seulement si la quantité B est strictement plus grande que la quantité A, *i.e.* $A < B \Leftrightarrow B > A$). En conséquence, les opérations habituelles effectuées dans la résolution des équations doivent être appliquées avec prudence dans le cas des inéquations. À ce propos, un certain nombre de règles méritent d'être rappelées.

Soient deux nombres réels x et y.

- *Addition d'un nombre réel* : quel que soit le nombre réel a :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + a < y + a \qquad \text{et} \qquad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x - a < y - a\,;$$

  de même :

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x + a \leqslant y + a \qquad \text{et} \qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x - a \leqslant y - a\,.$$

- *Multiplication par un nombre réel* : soit a un nombre réel ; si $a > 0$:

$$x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad a\,x < a\,y\,,$$

  mais si $a < 0$, alors :

$$x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad a\,x > a\,y\,;$$

  de même, si $a > 0$:

$$x \leqslant y \qquad \Leftrightarrow \qquad a\,x \leqslant a\,y\,,$$

  mais si $a < 0$, alors :

$$x \leqslant y \qquad \Leftrightarrow \qquad a\,x \geqslant a\,y\,.$$

- *Inverse* :
$$0 < x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0\,;$$
de même :
$$0 < x \leqslant y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} > 0\,.$$
- *Puissance n-ième*, où n un nombre entier strictement positif :
$$0 < x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x^n < y^n\,;$$
de même :
$$0 \leqslant x \leqslant y \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant x^n \leqslant y^n\,.$$
- *Racine n-ième*, où n un nombre entier strictement positif ; alors :
$$0 < x < y \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}\,;$$
de même :
$$0 \leqslant x \leqslant y \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant \sqrt[n]{x} \leqslant \sqrt[n]{y}\,.$$

1.3.1 Exemples : 1. Soit la double inéquation :
$$-5 \leqslant \frac{4-3\,x}{2} < 1\,.$$
Alors, en multipliant par 2, puis en soustrayant 4, il vient :
$$-5 \leqslant \frac{4-3\,x}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \leqslant 4-3\,x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -14 \leqslant -3\,x < -2\,;$$
pour isoler x, il convient de diviser par -3 ; lors de cette division, le sens des inégalités doit être inversé ; d'où le résultat :
$$\frac{14}{3} \geqslant x > \frac{2}{3}\,.$$

2. Soit l'inéquation :
$$x^2 - 10 > 3\,x\,.$$
Pour la résoudre, il convient de soustraire $3\,x$ des deux côtés, puis d'écrire l'expression $x^2 - 3\,x - 10$ sous la forme $(x+2)(x-5)$:
$$x^2 - 10 > 3\,x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3\,x - 10 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-5) > 0\,.$$

x		-2		5	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La dernière inégalité obtenue est satisfaite si et seulement si les deux parenthèses sont soit simultanément strictement positives, soit simultanément strictement négatives, de sorte que l'expression complète soit strictement positive. Le tableau du bas de la page précédente (appelé *tableau des signes*) permet d'identifier les valeurs de x correspondant à ces deux cas de figure. La solution est donc :

$$x < -2 \qquad \text{ou} \qquad x > 5 \,.$$

3. Soit l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, où :

$$f(x) \;=\; \frac{(x^2+x-6)(x^2+1)}{x^2-5\,x+4} \,.$$

Pour la résoudre, commençons par écrire la première parenthèse du numérateur, $x^2 + x - 6$, sous la forme $(x+3)(x-2)$, et le dénominateur $x^2 - 5\,x + 4$ sous la forme $(x-1)(x-4)$. L'expression $f(x)$ se récrit alors :

$$f(x) \;=\; \frac{(x+3)(x-2)(x^2+1)}{(x-1)(x-4)} \;;$$

du fait qu'elle ne s'annule pour aucune valeur de x, la parenthèse x^2+1 est laissée telle quelle. Dès lors que $f(x)$ est mise sous cette forme, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ se résout aisément ; il suffit, pour cela, de dresser un tableau des signes et de l'analyser.

x		-3		1		2		4	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

La solution de l'inéquation est donc :

$$x \leqslant -3 \quad \text{ou} \quad 1 < x \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad x > 4 \,.$$

Si 1 ne fait pas partie de l'ensemble des solutions de l'inéquation, c'est en raison du fait que l'expression $f(x)$ n'est pas définie en $x = 1$; il en est de même pour $x = 4$.

4. Soit l'inéquation :

$$|x-3| \;<\; \frac{1}{2} \;;$$

les barres verticales de part et d'autre de $x-3$ symbolisent ce que l'on appelle la *valeur absolue*. Avant de résoudre l'inéquation, rappelons la définition de la *valeur absolue* d'un nombre réel a :

$$|a| \;=\; \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \,,$$

et mentionnons les propriétés suivantes (dont les preuves sont laissées en exercice) :

◇ $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, quels que soient les nombres réels a et b ;

◇ $|a\,b| = |a|\,|b|$, quels que soient les nombres réels a et b ;

◇ $|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a < -b \quad \text{ou} \quad a > b$,
quels que soient le nombre réel a et le nombre réel b positif ;

◇ $|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$,
quels que soient le nombre réel a et le nombre réel b strictement positif ;

◇ $|a| = b \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \quad \text{ou} \quad a = b$,
quels que soient le nombre réel a et le nombre réel b positif.

Appliquons alors la quatrième propriété citée à l'inéquation donnée :

$$|x-3| < \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2}\,.$$

En additionnant 3, il vient :

$$\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}\,.$$

5. Soit l'inéquation :

$$|2\,x-7| > |4\,x+3|\,.$$

Commençons par remarquer que l'expression $4\,x+3$ change de signe lorsque x passe par la valeur $-\frac{3}{4}$; de même, $2\,x-7$ change de signe lorsque x passe par $\frac{7}{2}$. Pour traiter efficacement l'inéquation, il convient alors de séparer la résolution en trois cas : un premier cas, lorsque les expressions $2\,x-7$ et $4\,x+3$ sont toutes les deux strictement négatives, *i.e.* lorsque $x < -\frac{3}{4}$, un deuxième cas lorsque $4\,x+3$ est positive et $2\,x-7$ strictement négative, *i.e.* lorsque $-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{7}{2}$, et un troisième cas lorsque $4\,x+3$ et $2\,x-7$ sont toutes les deux positives, *i.e.* lorsque $x \geqslant \frac{7}{2}$.

- Supposons que $x < -\frac{3}{4}$. Alors, en tenant compte de la définition de la valeur absolue, l'inéquation devient :

$$-(2\,x-7) > -(4\,x+3) \quad \Leftrightarrow \quad -2\,x+7 > -4\,x-3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x > -10\,,$$

d'où :

$$x > -5\,.$$

Mais comme $x < -\frac{3}{4}$ par hypothèse, alors :

$$-5 < x < -\frac{3}{4}\,.$$

- Supposons que $-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{7}{2}$. Dans ce cas, l'inéquation devient :

$$-(2\,x-7) > 4\,x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -2\,x+7 > 4\,x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -6\,x > -4\,,$$

d'où :

$$x < \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}\,.$$

Mais comme $-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{7}{2}$ par hypothèse, alors :

$$-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{2}{3}\,.$$

- Supposons enfin que $x > \frac{7}{2}$. Dans ce cas :

$$2\,x - 7 > 4\,x + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2\,x > 10\,,$$

d'où :

$$x < -5\,,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse $x > \frac{7}{2}$. L'inéquation n'admet donc aucune solution dans ce dernier cas.

La solution générale de l'inéquation est donc :

$$-5 < x < -\frac{3}{4} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{2}{3}\,,$$

ce qui peut s'écrire de manière plus compacte :

$$-5 < x < \frac{2}{3}\,.$$

1.4 Sous-ensembles de nombres réels

Ce que l'on entend par *sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ (ou *sous-ensemble non vide de nombres réels*), c'est tout ensemble dont les éléments sont des nombres réels.

1.4.1 Sous-ensembles bornés

1.4.1 Définitions : Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que S est *minoré* s'il existe un nombre réel a tel que $x \geqslant a$ pour tout $x \in S$. Le nombre a est alors appelé *minorant* de S.
- On dit que S est *majoré* s'il existe un nombre réel b tel que $x \leqslant b$ pour tout $x \in S$. Le nombre b est alors appelé *majorant* de S.
- On dit que S est *borné* si S est à la fois minoré et majoré.

1.4.2 Exemple : Soit l'ensemble $S = \left\{x = \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Concrètement :

$$S = \left\{1\,;\, \frac{1}{2}\,;\, \frac{1}{3}\,;\, \frac{1}{4}\,;\, \dots\right\}.$$

N'étant constitué que de nombres rationnels (qui sont réels), cet ensemble peut être vu comme un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Ce sous-ensemble est borné ; en effet, il est minoré, un minorant étant par exemple -7, ainsi que majoré, un majorant étant par exemple 15.

1.4.3 Remarque : Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ qui n'est pas minoré, ou qui n'est pas majoré, ou encore qui n'est ni minoré ni majoré est dit *non borné*.

1.4.4 Définition : Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que S *admet une borne inférieure* s'il existe un nombre réel a qui satisfait les propriétés suivantes :
  - ◇ a est un minorant de S ;
  - ◇ pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ satisfaisant $x - a \leqslant \varepsilon$.

  Le nombre a est alors appelé *borne inférieure de* S.
- On dit que S *admet une borne supérieure* s'il existe un nombre réel b qui satisfait les propriétés suivantes :
  - ◇ b est un majorant de S ;
  - ◇ pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ satisfaisant $b - x \leqslant \varepsilon$.

  Le nombre b est alors appelé *borne supérieure de* S.

1.4.5 Remarques :

- Il existe des situations dans lesquelles la borne inférieure d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ appartient au sous-ensemble en question, et d'autres situations dans lesquelles la borne inférieure n'est pas dans le sous-ensemble en question. Il en est de même pour la borne supérieure.
- Si un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (respectivement supérieure), cette borne inférieure (respectivement supérieure) est unique. Pour s'en convaincre, il convient de supposer (par l'absurde) que le sous-ensemble en question admet deux bornes inférieures différentes, puis de montrer que cette supposition conduit à une contradiction. Soit donc S un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant deux bornes inférieures a_1 et a_2 différentes. Comme $a_2 \neq a_1$, alors soit $a_1 < a_2$, soit $a_2 < a_1$. Considérons que c'est a_1 qui est strictement plus petite que a_2 (l'autre situation se traitant de manière similaire). Le fait que le nombre réel a_1 est une borne inférieure permet d'affirmer qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un élément $x \in S$ tel que $x - a_1 \leqslant \varepsilon$. Le fait que l'assertion est valable pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ permet d'affirmer qu'il existe un élément de S, que l'on note $\tilde{x}$, tel que $\tilde{x} - a_1 \leqslant \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$ (le nombre ε valant ici $\frac{1}{2}(a_2 - a_1)$). Or :

$$\begin{aligned} \tilde{x} - a_1 \leqslant \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{x} \leqslant a_1 + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \\ &\Leftrightarrow \quad \tilde{x} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2) < \frac{1}{2}(a_2 + a_2) = a_2 \,, \end{aligned}$$

  ce qui est contradictoire avec le fait que a_2 est une borne inférieure ; d'où la conclusion. Un raisonnement similaire permet de prouver que la borne supérieure de S, dès lors qu'elle existe, est unique.
- La borne inférieure (respectivement supérieure) d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, à supposer qu'il y en ait une, peut être vue comme le *plus grand minorant* (respectivement *le plus petit majorant*) du sous-ensemble en question. Pour s'en

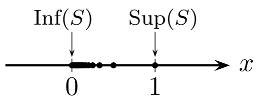
convaincre, il convient de supposer (par l'absurde) qu'il existe un minorant du sous-ensemble donné qui est plus grand que la borne inférieure, puis de montrer que cette supposition conduit à une contradiction. Soit donc S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, a sa borne inférieure et $\tilde{a}$ un minorant de S strictement supérieur à a. Le fait que le nombre réel a est la borne inférieure permet d'affirmer qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un élément $x \in S$ tel que $x - a \leqslant \varepsilon$. Le fait que l'assertion est valable pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ permet d'affirmer qu'il existe un élément de S, que l'on note $\tilde{x}$, tel que $\tilde{x} - a \leqslant \frac{1}{2}(\tilde{a} - a)$ (le nombre ε valant ici $\frac{1}{2}(\tilde{a} - a)$). Or :

$$\begin{aligned} \tilde{x} - a \leqslant \frac{1}{2}(\tilde{a} - a) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \tilde{x} \leqslant a + \frac{1}{2}(\tilde{a} - a) \\ &\Leftrightarrow \qquad \tilde{x} \leqslant \frac{1}{2}(a + \tilde{a}) < \frac{1}{2}(\tilde{a} + \tilde{a}) = \tilde{a}\,, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\tilde{a}$ est un minorant ; d'où la conclusion. Un raisonnement similaire permet de prouver que la borne supérieure de S, à supposer qu'il y en ait une, est le plus petit majorant de S.

1.4.6 Notation : Les bornes inférieure et supérieure d'un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{R}$, à supposer qu'elles existent, se notent généralement $\mathrm{Inf}(S)$ et $\mathrm{Sup}(S)$, respectivement.

1.4.7 Exemple : Reprenons l'ensemble S de l'exemple précédent. Cet ensemble admet pour borne supérieure le nombre 1 et pour borne inférieure le nombre 0.



- ◇ S admet pour borne supérieure le nombre réel 1. En effet, 1 est un majorant de S (vu que $\frac{1}{n} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) ; en outre, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ tel que $1 - x \leqslant \varepsilon$ (par exemple $x = 1$).
- ◇ S admet pour borne inférieure le nombre réel 0. En effet, 0 est un minorant de S (vu que $0 \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) ; en outre, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ tel que $x - 0 \leqslant \varepsilon$ (par exemple $x = 1/\big(\mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1\big)$, où $\mathrm{E}\big(\frac{1}{\varepsilon}\big)$ désigne la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$, *i.e.* la suite de chiffres placés avant la virgule, dans le nombre $\frac{1}{\varepsilon}$).

Remarquer que $1 \in S$, alors que $0 \notin S$.

1.4.8 Propriété : Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- S admet une borne inférieure si et seulement si S est minoré.
- S admet une borne supérieure si et seulement si S est majoré.

En effet, dès lors que le sous-ensemble S admet une borne inférieure (respectivement une borne supérieure), il est nécessairement minoré (respectivement majoré), la borne inférieure (respectivement supérieure) étant un minorant (respectivement un majorant) de S. Quant au fait que S admet une borne inférieure (respectivement supérieure) dès lors qu'il est minoré (respectivement majoré), il s'agit d'une conséquence directe de la structure même de l'ensemble des nombres réels : cet ensemble pouvant être vu comme une droite, un axe, il est possible de passer continûment d'un point à un autre sur cette droite ; il est donc possible, à partir d'un minorant de S qui n'est pas la borne inférieure, de passer continûment vers un autre minorant, jusqu'à arriver au plus grand minorant de S ; or, ce plus grand minorant n'est autre que la borne inférieure de S. Un raisonnement similaire s'applique dans le cas de la borne supérieure.

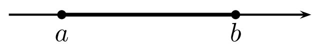
1.4.2 Intervalles

Une catégorie importante de sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ sont les *intervalles*. On en distingue plusieurs types.

1.4.9 Définitions :

- On appelle *intervalle fermé et borné* tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, de la forme :

  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b\right\},$$

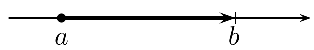
  où a et b sont deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. On le note $[a;\, b]$ et le représente comme indiqué sur la figure ci-dessus.
- On appelle *intervalle ouvert et borné* tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, de la forme :

  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\},$$

  où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On le note $]a;\, b[$ et le représente comme indiqué sur la figure ci-dessus.
- On appelle *intervalle semi-ouvert et borné* tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, de la forme :

  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leqslant x < b\right\}$$

  ou de la forme :

  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \leqslant b\right\},$$

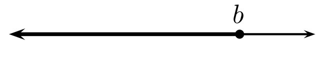
  

  où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On le note $[a;\, b[$ ou $]a;\, b]$, respectivement, et le représente comme indiqué sur les figures ci-dessus.
- On appelle *intervalle fermé et non borné* tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, de la forme :

  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant a\right\}$$

  ou de la forme :

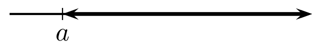
  $$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant b\right\},$$

  où a et b sont deux nombres réels. On le note $[a;\, \infty[$ ou $]-\infty;\, b]$, respectivement, et le représente comme indiqué sur les figures ci-dessus.

- On appelle *intervalle ouvert et non borné* tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



ou de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

où a et b sont deux nombres réels. On le note $]a; \infty[$ ou $]-\infty; b[$, respectivement, et le représente comme indiqué sur les figures ci-dessus.

1.4.10 Remarques :

- Si l'intervalle $[a; b]$, évoqué dans les définitions 1.4.9, est dit *borné*, c'est en raison du fait qu'il admet comme minorant le nombre réel a et comme majorant le nombre réel b. Noter que a est même la borne inférieure de l'intervalle et b la borne supérieure. Ces nombres a et b sont appelés *bords*, ou *bornes*, ou encore *extrémités* de l'intervalle en question. Il en est de même pour les intervalles $]a; b[$, $]a; b]$ et $[a; b[$.
- Si les intervalles $[a; \infty[$ et $]a; \infty[$, évoqués dans les définitions 1.4.9, sont dits *non bornés*, c'est en raison du fait qu'ils ne possèdent aucun majorant. Cette absence de majorant est exprimée à l'aide du symbole ∞ (ou $+\infty$), qui évoque ce que l'on appelle *l'infini* (ou *plus infini*)[XIII]. Aussi, si les intervalles $]-\infty; b]$ et $]-\infty; b[$ sont dits non bornés, c'est en raison du fait qu'ils ne possèdent aucun minorant ; cette absence de minorant est exprimée à l'aide du symbole $-\infty$, qui évoque ce que l'on appelle *moins l'infini*.
- Dans la notation utilisée pour décrire les intervalles, afin d'indiquer qu'une borne c d'un intervalle :
  - ◇ est dans l'intervalle en question, on utilise un crochet tourné vers l'intérieur : $[c$ ou $c]$,
  - ◇ n'est pas dans l'intervalle en question, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur : $]c$ ou $c[$.

  Noter que, du fait qu'ils ne peuvent jamais être atteints, $-\infty$ et ∞ sont toujours accompagnés d'un crochet tourné vers l'extérieur.
- L'intervalle semi-ouvert $[a; b[$, évoqué dans les définitions 1.4.9, est parfois appelé *intervalle fermé en a et ouvert en b* ; ce afin de préciser en mots laquelle des deux bornes est comprise dans l'intervalle et laquelle ne l'est pas. Il en est de même pour l'intervalle semi-ouvert $]a; b]$, qui est parfois appelé *intervalle ouvert en a et fermé en b*.
- L'ensemble des nombre réels peut être vu, rappelons-le, comme une droite, un axe, qui n'a ni commencement ni fin ; il s'étend donc de $-\infty$ à ∞. Sur cette droite, les intervalles bornés ont l'allure de segments et les intervalles non bornés

XIII. Le symbole ∞ utilisé pour désigner l'infini est dû à John Wallis, mathématicien anglais né le 23 novembre 1616 à Ashford, dans le comté de Kent (en Angleterre) et mort le 28 octobre 1703 à Oxford. Les travaux de Wallis ont largement influencé la pensée de l'un des inventeurs du calcul infinitésimal : *Isaac Newton.*

correspondent à des demi-droites. Noter que l'intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a = b$, qui peut être vu comme un intervalle réduit à un seul élément, correspond à un point sur la droite réelle.

- Selon les propos tenus au point précédent, l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, peut s'écrire :
$$\mathbb{R} = \left]-\infty;\, \infty\right[\,.$$
- Les intervalles $]-\infty;\, 0]$, $]-\infty;\, 0[$, $[0;\, \infty[$ et $]0;\, \infty[$ sont fréquemment notés, de manière compacte, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$, respectivement. Les éléments de $\mathbb{R}_-$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$) sont les nombres négatifs (respectivement strictement négatifs) ; les éléments de $\mathbb{R}_+$ (respectivement $\mathbb{R}_+^*$) sont les nombres positifs (respectivement strictement positifs).

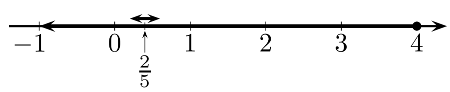
1.4.3 Concept de voisinage

1.4.11 Définitions : Soit a un nombre réel.

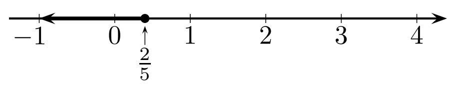
- On appelle intervalle ouvert *centré en a* tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a-\delta\,;\, a+\delta[$, où δ est un nombre réel strictement positif.
- On appelle *voisinage de a* tout sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en a.

1.4.12 Exemple : Soit le nombre réel $\frac{2}{5}$.

- L'intervalle $]-1\,;\, 4]$ est un voisinage de $\frac{2}{5}$; en effet, $]-1\,;\, 4]$ contient un intervalle ouvert centré sur $\frac{2}{5}$: l'intervalle $\left]\frac{1}{5}\,;\, \frac{3}{5}\right[$, par exemple.



- L'intervalle $\left]-1\,;\, \frac{2}{5}\right]$ n'est pas un voisinage de $\frac{2}{5}$, quand bien même il contient $\frac{2}{5}$; en effet, $\left]-1\,;\, \frac{2}{5}\right]$ ne contient aucun intervalle ouvert centré sur $\frac{2}{5}$; ceci est dû au fait que $\frac{2}{5}$ se trouve sur l'un de ses bords.



1.5 Polynômes

Les *polynômes* à coefficients réels sont des objets qui méritent une certaine attention, non seulement à cause de leur omniprésence dans le monde des mathématiques, mais également parce qu'ils présentent un large champ d'application en physique et dans les branches appliquées de l'ingénierie. Ils sont à la base de certaines courbes utilisées dans le design industriel (telles les courbes de Bézier[XIV], utilisées entre autres dans l'élaboration des formes de pièces d'automobiles ainsi que dans le rendu de certaines polices de caractères) et permettent, grâce à des techniques d'approximation, de simplifier l'étude de courbes dont la description et le tracé sont délicats.

XIV. Pierre Bézier, né le 1er septembre 1910 à Paris et mort le 25 novembre 1999 dans la même ville, était un ingénieur français qui a travaillé pour le groupe automobile *Renault*.

1.5.1 Généralités sur les polynômes à coefficients réels

1.5.1 Définition : On appelle *polynôme en l'indéterminée (ou variable)* x (ou simplement *polynôme*), et on note $P_n(x)$ toute expression de la forme :

$$P_n(x) \ = \ a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + a_1\, x + a_0 \,,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des nombres fixés, n un nombre entier positif et $x \in \mathbb{R}$. Si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont tous des nombres réels, on parle de *polynôme à coefficients réels*. La plus grande puissance de x apparaissant dans le polynôme définit ce que l'on appelle le *degré* du polynôme. Dans l'expression ci-dessus, le degré du polynôme est n pour autant que $a_n \neq 0$.

1.5.2 Remarque : Toutes les puissances de x apparaissant dans un polynôme sont entières et positives. Si une expression contient des puissances de x non entières ou négatives, il ne s'agit pas d'un polynôme.

1.5.3 Définitions :

- Un polynôme de degré $n \geqslant 2$ est dit *factorisable* s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes, chacun d'eux ayant un degré strictement inférieur à n.
- On appelle *factorisation* l'opération visant à écrire un polynôme de degré $n \geqslant 2$ sous la forme d'un produit de polynômes, chacun d'eux ayant un degré strictement inférieur à n.

1.5.4 Définition : Un polynôme à coefficients réels est dit *factorisable dans* $\mathbb{R}$ s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients réels, chacun de ces polynômes ayant un degré strictement inférieur à n. Le polynôme en question est dit *non factorisable dans* $\mathbb{R}$ s'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients réels, chacun de ces polynômes ayant un degré strictement inférieur à n.

1.5.5 Remarques :

- Dans l'ensemble des polynômes de degré $n = 2$ (appelés également *polynômes du deuxième degré*), à coefficients réels, certains polynômes sont factorisables dans $\mathbb{R}$, d'autres non.
- Les circonstances dans lesquelles un polynôme de degré 2, à coefficients réels, est factorisable dans $\mathbb{R}$ sont exposées dans la sous-section suivante.

1.5.6 Théorème : *Tout polynôme de degré* $n \geqslant 3$*, à coefficients réels, peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynôme(s) de degré* 1*, à coefficients réels, et/ou de polynôme(s) de degré* 2*, à coefficients réels, et non davantage factorisable(s) dans* $\mathbb{R}$*.*

Preuve : Ce résultat est une conséquence d'un théorème majeur des mathématiques : *le théorème fondamental de l'algèbre*[XV]. $\square$

XV. L'énoncé de ce théorème est le suivant : tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

1.5.7 Remarque : La factorisation est une opération d'une importance capitale dans la théorie des polynômes ; et pour cause : elle permet de cerner les caractéristiques d'un polynôme donné, notamment les éventuelles valeurs où il s'annule.

1.5.8 Définition : Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n, à coefficients réels. On appelle *zéro*, ou *racine* de $P_n(x)$ dans $\mathbb{R}$, tout nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ qui annule $P_n(x)$, *i.e.* tout nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P_n(x_0) = 0$.

1.5.9 Lemme : *Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, à coefficients réels. Un nombre réel x_0 est un zéro de $P_n(x)$ si et seulement si $P_n(x)$ peut s'écrire sous la forme $P_n(x) = (x-x_0)\,Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients réels. Autrement dit, si x_0 est un zéro de $P_n(x)$, alors $P_n(x)$ peut s'écrire sous la forme $P_n(x) = (x-x_0)\,Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients réels ; et si $P_n(x)$ peut s'écrire sous la forme $P_n(x) = (x-x_0)\,Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients réels, alors x_0 est un zéro de $P_n(x)$.*

Preuve : Soient $P_n(x)$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, à coefficients réels, et x_0 un nombre réel.

- Supposons que x_0 est un zéro de $P_n(x)$. Écrivons concrètement $P_n(x)$:

$$P_n(x) \;=\; a_n\,x^n + \ldots + a_1\,x + a_0\,,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels fixes. Alors :

$$P_n(x_0) \;=\; a_n\,{x_0}^n + \ldots + a_1\,x_0 + a_0\,.$$

Or, $P_n(x_0) = 0$, vu que x_0 est un zéro de $P_n(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x) - P_n(x_0) \\
&= a_n\,x^n + \ldots + a_1\,x + a_0 - (a_n\,{x_0}^n + \ldots + a_1\,x_0 + a_0) \\
&= a_n\,x^n + \ldots + a_1\,x + a_0 - a_n\,{x_0}^n - \ldots - a_1\,x_0 - a_0 \\
&= a_n\,(x^n - {x_0}^n) + \ldots + a_1\,(x - x_0) + (a_0 - a_0) \\
&= a_n\,(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}\,x_0 + \ldots + x\,{x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1}) + \ldots + a_1\,(x - x_0) \\
&= (x - x_0)\,\big(a_n\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,x_0 + \ldots + x\,{x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1}) + \ldots + a_1\big)\,,
\end{aligned}$$

du fait que :

$$x^n - {x_0}^n \;=\; (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}\,x_0 + \ldots + x\,{x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1})$$

dans le cas où $n \geqslant 2$, et $x^n - {x_0}^n = x - x_0$ dans le cas où $n = 1$. Or, l'expression $\big(a_n\,(x^{n-1}+x^{n-2}\,x_0+\ldots+x\,{x_0}^{n-2}+{x_0}^{n-1})+\ldots+a_1\big)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients réels. $P_n(x)$ peut donc s'écrire sous la forme $P_n(x) = (x - x_0)\,Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$, à coefficients réels.

- Réciproquement, supposons que $P_n(x)$ peut s'écrire $P_n(x) = (x - x_0)\,Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients réels, et x_0 un nombre réel. Alors :
$$P_n(x_0) \;=\; (x_0 - x_0)\,Q(x_0) \;=\; 0 \cdot Q(x_0) \;=\; 0\,,$$
ce qui montre que x_0 est un zéro de $P_n(x)$. □

Différentes techniques de factorisation existent ; elles s'appliquent plus ou moins bien selon les circonstances.

- *Mise en évidence* :
par exemple :
$$x^2 + 2\,x \;=\; x\,(x+2)\,.$$
- *Utilisation des identités remarquables* :
par exemple :
$$\begin{aligned} x^4 - 6\,x^2 + 9 \;&=\; \big(x^2 - 3\big)^2 \;=\; \big[\big(x - \sqrt{3}\,\big)\big(x + \sqrt{3}\,\big)\big]^2 \\ &=\; \big(x - \sqrt{3}\,\big)^2\big(x + \sqrt{3}\,\big)^2\,. \end{aligned}$$
- *Regroupement et mise en évidence* :
par exemple :
$$\begin{aligned} x^3 - 2\,x^2 - x + 2 \;&=\; (x^3 - 2\,x^2) - (x-2) \;=\; x^2\,(x-2) - (x-2) \\ &=\; (x^2 - 1)(x-2) \;=\; (x-1)(x+1)(x-2)\,. \end{aligned}$$
- *Recherche d'un zéro par tâtonnement puis division euclidienne* :
par exemple, le polynôme $x^3 - 2\,x^2 - x + 2$ s'annule lorsque $x = 1$; il doit donc pouvoir s'écrire sous la forme d'un produit de $(x-1)$ et d'un autre polynôme. Cet autre polynôme s'obtient en effectuant ce que l'on appelle une *division euclidienne* :
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2\,x^2 & -x & +2 & x-1 \\ \cline{5-5} -\underline{(x^3} & \underline{-x^2)} & & & x^2 - x - 2 \\ & -x^2 & -x & & \\ & -\underline{(-x^2} & \underline{+x)} & & \\ & & -2\,x & +2 & \\ & & -\underline{(-2\,x} & \underline{+2)} & \\ & & & 0 & \end{array}$$
Ainsi, $x^3 - 2\,x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$. Ensuite, en remarquant que $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, il vient finalement :
$$x^3 - 2\,x^2 - x + 2 \;=\; (x-1)(x+1)(x-2)\,.$$

1.5.2 Polynômes du deuxième degré

Selon la définition 1.5.1, un polynôme de degré 2, *i.e.* un polynôme du deuxième degré, à coefficients réels, est une expression de la forme $a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$, où a_0 et a_1 sont deux nombres réels quelconques, et a_2 un nombre réel non nul ; de manière compacte, on le note $P_2(x)$. Lorsque a_2 est rebaptisé en a, a_1 en b et a_0 en c, l'expression $a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ prend l'allure que l'on trouve habituellement dans la littérature :

$$P_2(x) \;=\; a\,x^2 + b\,x + c\,.$$

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni d'un *système de coordonnées cartésiennes* Oxy (*i.e.* un système de deux axes x et y, correspondant à deux copies de la droites réelle $\mathbb{R}$, perpendiculaires entre eux et se coupant au point O, appelé *origine*), l'ensemble des points de coordonnées $(x;\, y)$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y = P_2(x)$, forme ce que l'on appelle une *courbe* qui, dans le contexte présent, porte le nom de *parabole* (*cf.* section 2.1 du chapitre 2) ;

- si $a > 0$, la parabole est dite *convexe* (elle semble « sourire » : $\smile$) ;
- si $a < 0$, la parabole est dite *concave* (elle semble « malheureuse » : $\frown$).

Cherchons à écrire le polynôme du deuxième degré $a\,x^2 + b\,x + c$ sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients réels, chacun d'eux ayant un degré strictement inférieur à 2. Pour cela, commençons par mettre le nombre a en évidence, puis complétons l'expression $x^2 + \frac{b}{a}\,x$, afin d'obtenir une identité remarquable :

$$\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c \;&=\; a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) \\
&=\; a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2\,a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&=\; a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right) \\
&=\; a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right] \\
&=\; a\left[x + \left(\frac{b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right)\right]\left[x + \left(\frac{b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right)\right].
\end{aligned}$$

Dans les deux dernières lignes du calcul, les expressions entre crochets sont des polynômes à coefficients réels pour autant que la quantité $b^2 - 4\,a\,c$ soit positive ; en effet, $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$. En résumé, le polynôme $a\,x^2 + b\,x + c$ est factorisable dans $\mathbb{R}$ à condition que $b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$; dans ce cas :

$$a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a\,(x - x_1)(x - x_2)\,,$$

où :

$$x_1 \;=\; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad x_2 \;=\; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \in \mathbb{R}\,.$$

Les nombres x_1 et x_2 sont des zéros du polynôme. Leurs expressions, données ci-dessus, s'écrivent volontiers en une seule formule ; on l'appelle *formule du deuxième degré* :

$$x_{1,2} \,=\, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,.$$

1.5.10 Remarque : Les zéros x_1 et x_2 d'un polynôme du deuxième degré $a\,x^2 + b\,x + c$ (où $a \neq 0$), à coefficients réels, factorisable dans $\mathbb{R}$, satisfont les deux propriétés suivantes :

$$x_1 + x_2 \,=\, -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1\,x_2 \,=\, \frac{c}{a}\,.$$

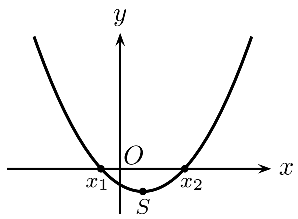
Ces deux expressions sont appelées *formules de Viète*[XVI] ; elles se déduisent directement de la formule du deuxième degré.

Cela a été mentionné précédemment, tout polynôme du deuxième degré $P_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, à coefficients réels, décrit une parabole dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni d'un système de coordonnées cartésiennes Oxy). Certaines caractéristiques de cette parabole peuvent être précisées grâce au calcul effectué ci-dessus.

- ◇ Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$, la parabole représentant $a\,x^2 + b\,x + c$ ne coupe jamais l'axe x ;
- ◇ si $b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$, la parabole représentant $a\,x^2 + b\,x + c$ coupe l'axe x en x_1 et en x_2.

En outre, le point le plus bas (respectivement le plus haut) de la parabole, dans le cas où elle « sourit » (respectivement dans le cas où elle est « malheureuse »), a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{b}{2\,a}\,;\,-\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}\right).$$



Ce point, noté S, est appelé *sommet* de la parabole. Sa première coordonnée peut être directement déduite de l'expression de la troisième ligne du calcul effectué plus haut :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right)\,;$$

dans cette expression, la quantité $\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2$ ne peut être que positive ; en outre, elle s'annule en $x = -\frac{b}{2\,a}$ uniquement ; $\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}$ est donc minimale lorsque $x = -\frac{b}{2\,a}$. Pour ce qui est de la deuxième coordonnée de S, elle s'obtient en remplaçant x par $-\frac{b}{2\,a}$ dans $a\big(\big(x + \frac{b}{2\,a}\big)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\big)$.

1.5.11 Remarque : Des considérations faites ci-dessus, il ressort que tout polynôme en x de degré 2 et à coefficients réels, $a\,x^2 + b\,x + c$, peut s'écrire sous la forme :

$$a\,x^2 + b\,x + c \,=\, a\,(x - x_S)^2 + y_S\,,$$

où $x_S = -\frac{b}{2\,a}$ et $y_S = -\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}$. L'expression $a\,(x - x_S)^2 + y_S$ est ce que l'on appelle la *forme canonique* du polynôme $a\,x^2 + b\,x + c$.

XVI. François Viète était un avocat et mathématicien français, né en 1540 à Fontenay-le-Comte, en Vendée (dans le royaume de France), et mort en 1603 à Paris.

1.5.12 Exemples : 1. Soit le polynôme du deuxième degré $6\,x^2+5\,x-6$. Ce polynôme peut être factorisé dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
6\,x^2+5\,x-6 &= 6\left(x^2+\frac{5}{6}\,x-1\right) = 6\left(x^2+2\cdot\frac{5}{12}\,x+\left(\frac{5}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{12}\right)^2-1\right)\\
&= 6\left(x^2+2\cdot\frac{5}{12}\,x+\left(\frac{5}{12}\right)^2-\frac{169}{144}\right) = 6\left(\left(x+\frac{5}{12}\right)^2-\left(\frac{13}{12}\right)^2\right)\\
&= 6\left[\left(x+\frac{5}{12}\right)-\frac{13}{12}\right]\left[\left(x+\frac{5}{12}\right)+\frac{13}{12}\right]\\
&= 6\left(x-\frac{8}{12}\right)\left(x+\frac{18}{12}\right) = 3\left(x-\frac{2}{3}\right)2\left(x+\frac{3}{2}\right)\\
&= (3\,x-2)(2\,x+3)\,.
\end{aligned}$$

Le même résultat peut être obtenu plus rapidement en utilisant la formule du deuxième degré :

$$6\,x^2+5\,x-6 = 6\,(x-x_1)(x-x_2)\,,$$

où :

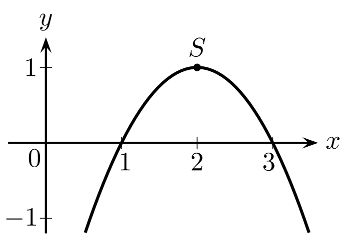
$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6\cdot(-6)}}{2\cdot 6} = \frac{-5\pm\sqrt{169}}{12} = \frac{-5\pm 13}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

2. Le polynôme du deuxième degré $x^2+2\,x+5$ ne peut pas être factorisé dans $\mathbb{R}$; en effet :

$$\begin{aligned}
x^2+2\,x+5 &= (x^2+2\,x+1-1+5) = (x^2+2\,x+1^2+4)\\
&= (x+1)^2+2^2\,,
\end{aligned}$$

ce qui ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes du premier degré à coefficients réels. Un tel constat peut être fait plus rapidement en analysant la quantité $b^2-4\,a\,c$ dans le cas présent, où $a=1$, $b=2$ et $c=5$: le fait que $b^2-4\,a\,c=2^2-4\cdot 1\cdot 5=-16<0$ montre que le polynôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

3. Dans le plan euclidien, muni d'un système de coordonnées cartésiennes Oxy, considérons une parabole coupant l'axe x en $x_1=1$ et $x_2=3$ et ayant pour sommet le point $S(2;\,1)$. Selon les considérations faites précédemment, le polynôme du deuxième degré $P_2(x)$ correspondant à cette parabole peut s'écrire



sous la forme :

$$P_2(x) \;=\; a\,(x-x_1)(x-x_2) \;=\; a\,(x-1)(x-3)\,.$$

Le coefficient a s'obtient en introduisant les coordonnées de S dans $P_2(x)$:

$$1 \;=\; P_2(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \;=\; a\,(2-1)(3-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \;=\; -a\,,$$

d'où $a = -1$. Le polynôme du deuxième degré associé à la parabole donnée est donc :

$$P_2(x) \;=\; -(x-1)(x-3)\,.$$

1.5.13 Remarques :

- Rechercher la ou les solution(s) de l'équation $P_n(x) = 0$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, revient à rechercher les zéros de $P_n(x)$, *i.e.* à factoriser au maximum $P_n(x)$.
- Dire que l'équation $P_2(x) = 0$ n'a pas de solution réelle, où $P_2(x)$ est un polynôme de degré 2, à coefficients réels, revient à dire que $P_2(x)$ n'a pas de zéro réel, *i.e.* qu'il n'est pas davantage factorisable dans $\mathbb{R}$.
- Un polynôme du deuxième degré, à coefficients réels, qui n'admet aucun zéro réel est dit *irréductible dans* $\mathbb{R}$.

1.5.14 Exemples :

1. Soit l'équation :

$$3\,x^2 + 2\,x - 5 \;=\; 0\,.$$

Les valeurs de x qui satisfont cette équation correspondent aux zéros du polynôme $3\,x^2 + 2\,x - 5$; ceux-ci s'obtiennent grâce à la formule du deuxième degré :

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} \;=\; \frac{-2 \pm 8}{6}\,.$$

Les solutions de l'équation sont donc $x_1 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{6}{6} = 1$. Pour présenter de manière compacte ces solutions, on écrit volontiers :

$$x \;\in\; \left\{-\frac{5}{3}\,;\,1\right\}\,.$$

2. Soit l'équation :

$$(x^2 - 5\,x + 6)(x^2 - 4) \;=\; 0\,.$$

Noter que $x^2 - 5\,x + 6 = (x-2)(x-3)$ et $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. L'équation se récrit alors :

$$(x-2)(x-3)(x-2)(x+2) \;=\; 0\,.$$

L'expression de gauche étant un polynôme (de degré 4) complètement factorisé (car écrit sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1), les solutions se déduisent immédiatement : $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = 2$ et $x_4 = 3$; de façon compacte :

$$x \;\in\; \{-2\,;\,2\,;\,3\}\,.$$

1.5.3 Décomposition d'une fraction polynomiale en éléments simples

La factorisation des polynômes trouve une application dans le processus de décomposition de fractions polynomiales (*i.e.* de fractions constituées d'un polynôme au numérateur ainsi que d'un polynôme au dénominateur) en fractions plus élémentaires appelées *éléments simples*. Correspondant en quelque sorte à l'opération inverse de la mise au même dénominateur, un tel mécanisme s'avère utile pour calculer certaines *intégrales* (*cf.* sous-section 4.5.3 de la section 4.5 du chapitre 4, consacrée aux méthodes d'intégration) ainsi que pour résoudre des équations dites *différentielles*, *via* ce que l'on appelle la *transformée de Laplace*.

Pour illustrer le processus de décomposition en éléments simples, considérons par exemple la fraction $\frac{1}{x^2+x}$; cette fraction peut être récrite comme suit :

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{1+x-x}{x\,(x+1)} = \frac{1+x}{x\,(x+1)} - \frac{x}{x\,(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,,$$

pour autant que $x \notin \{0\,;\,-1\}$, de sorte que la simplification dans la dernière étape soit possible. Les fractions $\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x+1}$ sont des spécimens d'*éléments simples*.

Par définition, les *éléments simples* d'une décomposition sont des fractions de la forme $\frac{J(x)}{(K(x))^n}$, où n est un nombre entier plus grand ou égal à 1, $K(x)$ un polynôme à coefficients réels, de degré 1 ou de degré 2 et irréductible, et $J(x)$ un polynôme à coefficients réels, de degré strictement inférieur à celui de $K(x)$.

La plupart des fractions de polynômes ne se décomposent pas de façon aussi évidente et rapide que celle donnée en exemple. Dans le cas général d'une fraction :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes réels en x, de degrés m et n respectivement, la procédure de décomposition s'avère souvent longue, car elle se compose de plusieurs étapes incontournables dont il s'agit de respecter l'ordre.

- Si $m \geqslant n$, il convient d'effectuer au préalable une division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$, afin d'obtenir :

  $$f(x) = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}\,,$$

  où $S(x)$ est le résultat de la division et correspond à un polynôme de degré $m-n$, et $T(x)$ le reste, qui est un polynôme de degré $n-1$ au maximum. La fraction $\frac{T(x)}{Q(x)}$ est ensuite décomposée en éléments simples selon les règles données au point suivant.

- Si $m < n$, il convient d'effectuer directement la décomposition en éléments simples. Les éléments simples sont de quatre types.
  - ◇ Si $Q(x)$ contient un zéro simple x_0, *i.e.* si $Q(x)$ contient l'expression $x - x_0$ lorsqu'il est complètement factorisé, et si cette expression n'apparaît qu'une seule fois, la décomposition contient l'*élément simple de première espèce* :

$$\frac{A}{x - x_0} \, ,$$

    où A un coefficient réel à déterminer.
  - ◇ Si $Q(x)$ contient un zéro x_0 d'ordre k (où $k = 2, 3, \ldots$), *i.e.* si $Q(x)$ contient l'expression $(x - x_0)^k$ lorsqu'il est complètement factorisé, la décomposition contient la somme suivante, appelée *élément simple de deuxième espèce* :

$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k} \, ,$$

    où $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des coefficients réels à déterminer.
  - ◇ Si $Q(x)$ contient, lorsqu'il est complètement factorisé, un polynôme du deuxième degré irréductible (dans $\mathbb{R}$), s'écrivant $a\,x^2 + b\,x + c$, et si ce polynôme du deuxième degré n'apparaît qu'une seule fois, la décomposition contient l'*élément simple de troisième espèce* :

$$\frac{A\,x + B}{a\,x^2 + b\,x + c} \, ,$$

    où A et B sont des coefficients réels à déterminer.
  - ◇ Si $Q(x)$ contient, lorsqu'il est complètement factorisé, un polynôme du deuxième degré irréductible (dans $\mathbb{R}$) élevé à la puissance k, s'écrivant $(a\,x^2+b\,x+c)^k$ (où $k = 2, 3, \ldots$), la décomposition contient la somme suivante, appelée *élément simple de quatrième espèce* :

$$\frac{A_1\,x + B_1}{a\,x^2 + b\,x + c} + \frac{A_2\,x + B_2}{(a\,x^2 + b\,x + c)^2} + \ldots + \frac{A_k\,x + B_k}{(a\,x^2 + b\,x + c)^k} \, ,$$

    où $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ sont des coefficients réels à déterminer.

Dans la plupart des cas, on est en présence d'un cas hybride, dans lequel la forme factorisée du dénominateur $Q(x)$ contient des polynômes de degré un (élevés à la puissance 1 et/ou à une puissance strictement supérieure à 1) et/ou des polynômes de degré deux irréductibles dans $\mathbb{R}$ (élevés à la puissance 1 et/ou à une puissance strictement supérieure à 1). La décomposition correspondante est alors une somme d'éléments de première (et/ou deuxième) espèce, et/ou d'éléments de troisième (et/ou quatrième) espèce. En ce qui concerne les coefficients à déterminer (présents dans les éléments simples), ils se déduisent des coefficients du polynôme présent au numérateur de la fraction que l'on cherche à décomposer ($P(x)$ ou $T(x)$, selon les situations).

1.5.15 Exemples : 1. Soit $f(x)$ la fraction polynomiale donnée par :

$$f(x) = \frac{2\,x^2 + 4\,x - 4}{x^3 + 4\,x^2 + 4\,x}\,.$$

Comme le degré du polynôme au numérateur est inférieur au degré du polynôme au dénominateur ($2 < 3$), il convient directement d'effectuer la décomposition en éléments simples. Les différentes espèces d'éléments simples se déduisent de la factorisation du dénominateur :

$$x^3 + 4\,x^2 + 4\,x = x\,(x^2 + 4\,x + 4) = x\,(x+2)^2\,.$$

Comme x est élevé à la puissance 1 et $x+2$ à la puissance 2, la décomposition est une somme d'éléments simples de première et de deuxième espèces :

$$\begin{aligned} \frac{2\,x^2 + 4\,x - 4}{x^3 + 4\,x^2 + 4\,x} &= \frac{2\,x^2 + 4\,x - 4}{x\,(x+2)^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}\,, \end{aligned}$$

où A, B et C sont des coefficients réels. Ces coefficients s'obtiennent en récrivant la somme des éléments simples sous la forme d'une unique fraction :

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} &= \frac{A\,(x+2)^2}{x\,(x+2)^2} + \frac{B\,x\,(x+2)}{x\,(x+2)^2} + \frac{C\,x}{x\,(x+2)^2} \\ &= \frac{A\,(x+2)^2 + B\,x\,(x+2) + C\,x}{x\,(x+2)^2} \\ &= \frac{A\,x^2 + 4\,A\,x + 4\,A + B\,x^2 + 2\,B\,x + C\,x}{x\,(x+2)^2} \\ &= \frac{(A+B)\,x^2 + (4\,A + 2\,B + C)\,x + 4\,A}{x\,(x+2)^2}\,, \end{aligned}$$

puis en comparant le numérateur de cette dernière expression avec le numérateur de $f(x)$:

- ◇ les coefficients devant x^2 doivent être égaux,
- ◇ les coefficients devant x doivent être égaux,
- ◇ les coefficients constants doivent être égaux.

De cette comparaison résulte un système de trois équations à trois inconnues, dont la solution se déduit presque immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} A + B & = & 2 \\ 4\,A + 2\,B + C & = & 4 \\ 4\,A & = & -4 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcr} B & = & 3 \\ C & = & 2 \\ A & = & -1 \end{array} \right. .$$

L'écriture de $f(x)$ en termes d'éléments simples est donc :

$$f(x) \;=\; \frac{2\,x^2+4\,x-4}{x^3+4\,x^2+4\,x} \;=\; -\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}\;.$$

2. Soit $f(x)$ la fraction polynomiale donnée par :

$$f(x) \;=\; \frac{x^4+3\,x^2-x}{x^3-1}\;.$$

Dans le cas présent, le degré du polynôme au numérateur est supérieur au degré du polynôme au dénominateur ($4>3$). Avant d'envisager la décomposition en éléments simples, il convient donc d'effectuer d'abord une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4\;+3\,x^2\;-x & x^3-1 \\ \cline{2-2} -(x^4\qquad\qquad -x) & x \\ \cline{1-1} 3\,x^2\qquad & \end{array}$$

Ainsi :

$$f(x) \;=\; x+\frac{3\,x^2}{x^3-1}\;.$$

Intéressons-nous alors à la fraction $\frac{3\,x^2}{x^3-1}$. Comme :

$$x^3-1 \;=\; (x-1)(x^2+x+1)$$

et comme x^2+x+1 est un polynôme irréductible (dans $\mathbb{R}$), la décomposition de $\frac{3\,x^2}{x^3-1}$ est une somme d'élément simples de première et de troisième espèces :

$$\frac{3\,x^2}{x^3-1} \;=\; \frac{3\,x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B\,x+C}{x^2+x+1}\;,$$

où A, B et C sont des coefficients réels. Ces coefficients s'obtiennent en récrivant la somme des éléments simples sous la forme d'une unique fraction :

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x-1}+\frac{B\,x+C}{x^2+x+1} \;&=\; \frac{A\,(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(B\,x+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&=\; \frac{A\,(x^2+x+1)+(B\,x+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&=\; \frac{A\,x^2+A\,x+A+B\,x^2-B\,x+C\,x-C}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&=\; \frac{(A+B)\,x^2+(A-B+C)\,x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}\;,
\end{aligned}$$

puis en comparant le numérateur de cette dernière expression avec la quantité $3\,x^2$ obtenue précédemment (qui peut être écrite sous la forme $3\,x^2+0\,x+0$). De cette comparaison résulte le système d'équations suivant, dont la résolution demande un certain nombre d'opérations (addition des deuxième et troisième équations, puis addition de la première et de la nouvelle deuxième équation) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 3 \\ A-B+C & = & 0 \\ A \quad\quad -C & = & 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 3 \\ 2\,A-B & = & 0 \\ A \quad\quad -C & = & 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 2 \\ C & = & 1 \end{array}\right. .$$

La décomposition de $f(x)$ est donc :

$$f(x) = \frac{x^4+3\,x^2-x}{x^3-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{2\,x+1}{x^2+x+1} .$$

1.6 Suites de nombres et séries numériques

Les ensembles de nombres évoqués précédemment ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) sont tous infinis, en ce sens qu'ils contiennent tous une infinité d'éléments. On peut toutefois observer certaines nuances dans le concept d'infini, selon les cas : alors que les éléments de certains ensembles peuvent être *énumérés* (comme ceux de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Q}$), ceux d'autres ensembles ne le peuvent pas (comme ceux de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

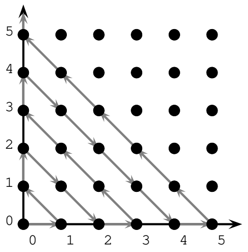
1.6.1 Définition : Un ensemble E est dit *dénombrable*, ou *infini dénombrable*, s'il existe une correspondance telle qu'à chaque élément de E est attribué un unique élément de l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, et qu'à chaque élément de $\mathbb{N}$ est attribué un unique élément de E.

1.6.2 Remarques :

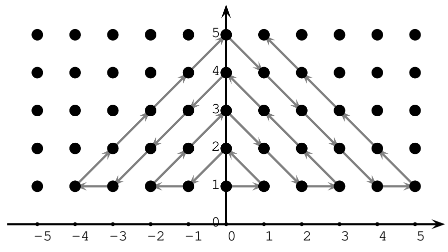
- Dire qu'un ensemble E est dénombrable revient à dire que ses éléments peuvent être *énumérés* : on peut dire qu'il y a un zéroième élément, un premier élément, un deuxième, un troisième... Le zéroième élément, le premier élément, le deuxième,... génèrent alors ce que l'on appelle une *liste* ; le fait même de parler de zéroième élément, de premier élément, de deuxième... indique qu'un ordre règne dans la liste.
- Dans un ensemble dénombrable E, dès lors qu'une liste est établie, il est possible de créer d'autre listes à partir de la première ; il suffit, pour cela, de changer l'ordre des éléments : le premier élément dans une liste peut être par exemple le quinzième dans une autre liste, ou le 324 896-ème dans une autre encore.
- Dans un ensemble dénombrable E, dès lors qu'une liste est établie, les éléments de E peuvent être *indexés* par les nombres naturels ; autrement dit, ils peuvent être notés a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ..., où les a sont des éléments de E.

1.6.3 Exemple : L'ensemble $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est également dénombrable ; ce qui permet de l'affirmer, c'est le fait que $\mathbb{Q}$

peut être identifié à un sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ [XVII], qui est dénombrable [XVIII]. Les diagrammes ci-dessous montrent qu'il est effectivement possible, dans chacun des cas, de suivre un chemin permettant d'énumérer les éléments sans en répéter ni en omettre.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

1.6.1 Généralités sur les suites

1.6.4 Définition : • On appelle *suite illimitée* toute famille d'éléments pouvant être indexée par les nombres naturels. Si les éléments sont tous des nombres réels, on parle de *suite de nombres réels*, ou simplement de *suite réelle.*

- Si la famille d'éléments est finie, les éléments sont indexés par des nombres naturels inférieurs ou égaux à un certain nombre naturel N ; on parle alors de *suite finie.* Le nombre $N+1$ est appelé *longueur de la suite* ; il s'agit du nombre d'éléments de la suite.

1.6.5 Notation : Une suite de nombres se note $(u_0\,;\,u_1\,;\,u_2\,;\,u_3\,;\,\dots)$, ou de manière plus compacte $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore simplement (u_n).

1.6.6 Définition : Dans toute suite de nombres (u_n), l'expression u_n est appelée *terme général* de la suite.

1.6.7 Remarques : • Pour des raisons de commodité, il arrive qu'une suite de nombres commence avec l'élément u_1 et non l'élément u_0. Dans un tel cas, la suite en question s'écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Les termes u_n d'une suite ne sont pas forcément tous différents les uns des autres. Par exemple, dans la suite donnée par :

$$u_0 = 0\,,\ \ u_1 = 1\,,\ \ u_2 = -1\,,\ \ u_3 = 2\,,\ \ u_4 = -2\,,\ \ u_5 = 3\,,\ \ u_6 = -3\,,\ \ \dots$$

XVII. Comme tout nombre rationnel r s'écrit sous la forme $r = \frac{p}{q}$, où p est un nombre entier et q un nombre entier non nul, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ peut être identifié à l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des valeurs possibles pour p et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des valeurs possibles pour q) ; pour obtenir un nombre rationnel négatif, il n'est cependant pas nécessaire d'exiger que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$; il suffit que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Enfin, comme tout nombre rationnel peut s'écrire d'une infinité de façons, par exemple $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{365}{730}$, il n'est pas nécessaire de prendre en compte chaque élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans le dénombrement de $\mathbb{Q}$.

XVIII. Un sous-ensemble A d'un ensemble E dénombrable ne peut qu'être dénombrable ou posséder un nombre fini d'éléments ; et pour cause : dans tout sous-ensemble de E contenant un nombre fini d'éléments, le nombre d'éléments qui sont dans A est inférieur ou égal au nombre d'éléments qui sont dans E.

qui est une suite permettant de montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable, les éléments sont tous différents les uns des autres ; alors que dans la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$, il n'y a que deux éléments différents, 1 et -1. L'ensemble des éléments de cette suite est donc fini. Dans ce dernier cas, à chaque élément de $\mathbb{N}$ correspond un unique élément de la suite ; mais à chaque élément de la suite ne correspond pas un unique élément de $\mathbb{N}$.

Intimement liées aux procédés illimités de calcul, les suites de nombres ont fait leur apparition dans l'Antiquité, notamment chez les Grecs et les Égyptiens, qui cherchaient à résoudre des problèmes à l'aide de méthodes d'approximation basées sur des processus itératifs (dans lesquelles une opération est répétée autant de fois que souhaité). Au Ier siècle après J.-C., le mathématicien et ingénieur grec *Héron d'Alexandrie* a exposé un procédé illimité de calcul permettant de trouver une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre A donné ; l'idée est la suivante : on prend un nombre a strictement positif quelconque et on calcule la moyenne arithmétique entre a et le nombre $\frac{A}{a}$; on recommence ensuite cette opération autant de fois que souhaité avec le nouveau résultat obtenu. Dans un langage plus formel, ce mécanisme se traduit par l'expression mathématique suivante, qui lie le résultat de l'étape n à celui de l'étape $n+1$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) , \qquad \text{avec } u_0 = a \in \mathbb{R}_+^* .$$

Du processus résulte une suite de nombres (u_n), où $u_0 = a$, $u_1 = \frac{1}{2}\big(a + \frac{A}{a}\big)$, $u_2 = \frac{1}{2}\big(u_1 + \frac{A}{u_1}\big)$, ..., dont les éléments se rapprochent toujours plus de $\sqrt{A}$ à mesure que le nombre naturel n augmente. La méthode est particulièrement efficace : pour $A = 5$ et en choisissant par exemple $a = u_0 = 2$, on obtient $u_1 = \frac{9}{4} = 2{,}25$ et $u_2 \approx 2{,}236$, qui correspond à $\sqrt{5}$ jusqu'à la troisième décimale ; seules deux étapes ont été nécessaires pour obtenir une telle précision.

1.6.8 Remarques :

- Lorsqu'une suite (u_n) est définie par une expression reliant l'élément u_{n+1} à l'élément précédent u_n (comme c'est le cas dans le procédé de Héron d'Alexandrie), on dit que la suite est définie par *récurrence.*
- Dans la méthode de Héron d'Alexandrie, visant à déterminer la racine carrée d'un nombre réel A, les éléments de la suite donnée s'approchent de plus en plus de $\sqrt{A}$ à mesure que n croît. On dit alors que la suite *converge* vers $\sqrt{A}$, ou que $\sqrt{A}$ est la *limite* de la suite. On note alors :

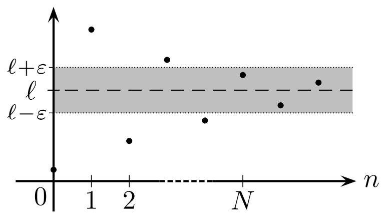
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{A} .$$

Remarquer que si A et $a = u_0$ sont tous les deux des nombres rationnels, alors tous les éléments de la suite sont rationnels. Mais la limite de la suite, elle, n'est pas forcément rationnelle (par exemple, $a = u_0 = 2 \in \mathbb{Q}$, $A = 5 \in \mathbb{Q}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$).

- L'élément ∞ n'a pas le statut de nombre réel. C'est un objet vers lequel on peut tendre, mais que l'on n'atteint jamais. De ce fait, son maniement est quelque peu délicat et peut, dans certains cas, conduire à des conclusions erronées si l'on n'applique pas les précautions adéquates ; voilà pourquoi on évite de l'employer tel quel dans les définitions mathématiques, y compris celles dans lesquelles il est question de *limite à l'infini* ou de *limite infinie*.

1.6.9 Définition : On dit qu'une suite de nombres réels (u_n) admet pour *limite* le nombre réel ℓ lorsque n tend vers l'infini, et on note :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell\,,$$



si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout nombre entier $n \geqslant N$:

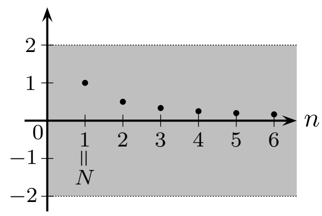
$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (\Leftrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)\,.$$

1.6.10 Exemple : Soit la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ (et non $\mathbb{N}$), vu que $\frac{1}{n}$ n'existe pas si $n = 0$). Cette suite admet pour limite :

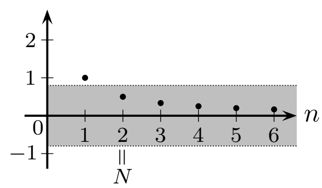
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

En effet, soit ε un nombre réel quelconque, strictement positif. Alors :

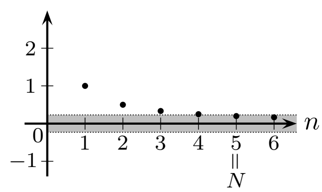
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\,.$$



Ainsi, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$, quel que soit le nombre naturel non nul n plus grand ou égal à N, où N est un nombre naturel supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$; par exemple $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, où $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$, *i.e.* la suite de chiffres placés avant la virgule, dans le nombre $\frac{1}{\varepsilon}$. Illustrons le raisonnement avec différentes valeurs de ε.



- Si $\varepsilon = 2$, alors $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$. L'expression $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ est effectivement plus petite ou égale à 2 quel que soit $n \geqslant 1$.
- Si $\varepsilon = \frac{8}{10}$, alors $N = \mathrm{E}\left(\frac{10}{8}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$. L'expression $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ est effectivement plus petite ou égale à $\frac{8}{10}$ quel que soit $n \geqslant 2$.



- Si $\varepsilon = \frac{23}{100}$, alors $N = \mathrm{E}\left(\frac{100}{23}\right) + 1 = 4 + 1 = 5$. L'expression $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ est effectivement plus petite ou égale à $\frac{23}{100}$ quel que soit $n \geqslant 5$.

En choisissant ε aussi petit que l'on veut, on trouve toujours un nombre naturel N pour lequel l'expression $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ est plus petite ou égale à ε, quel que soit $n \geqslant N$.

Tout nombre, autre que 0, ne peut pas faire office de limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour s'en convaincre, supposons par l'absurde que la limite vaille $\frac{1}{10}$, par exemple. Alors :

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{10}\right| \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{10} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon + \frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon + \frac{1}{10}\,.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{20}$, par exemple :

$$-\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{20} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{20} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{20}{3} \leqslant n \leqslant 20\,.$$

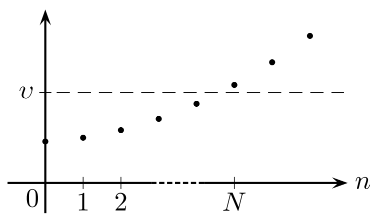
Ce n'est donc que pour les nombres entiers compris entre $\frac{20}{3}$ et 20 que l'expression $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{10}\right|$ est plus petite ou égale à $\frac{1}{20}$. Par conséquent, il n'existe aucun nombre $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{10}\right| \leqslant \frac{1}{20}$ quel que soit $n \geqslant N$. Le nombre $\frac{1}{10}$ ne peut donc pas être la limite de la suite.

1.6.11 Définition : On dit qu'une suite de nombres réels (u_n) tend vers ∞ (respectivement vers $-\infty$) lorsque n tend vers l'infini, et on note :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \qquad \text{(respectivement} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty\,)\,,$$

si pour tout nombre réel $v > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout nombre entier $n \geqslant N$:

$$u_n \geqslant v \qquad \text{(respectivement} \quad u_n \leqslant -v\,)\,.$$



1.6.12 Exemple : Soit la suite (n^2). Alors :

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty\,.$$

En effet, soit v un nombre réel quelconque, strictement positif. Alors :

$$n^2 \geqslant v \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant \sqrt{v}\,,$$

vu que n est un nombre entier positif. Ainsi, $n^2 \geqslant v$ pour tout $n \geqslant N$, où N est le nombre naturel donné par $N = \mathrm{E}\big(\sqrt{v}\big) + 1$ ($\mathrm{E}\big(\sqrt{v}\big)$ désignant la partie entière de $\sqrt{v}$).

1.6.13 Définitions :

- Une suite de nombres réels (u_n) est dite *convergente* (ou de manière équivalente, on dit que la suite (u_n) *converge*) s'il existe un nombre réel ℓ tel que $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Si un tel nombre réel n'existe pas, (u_n) est dite *divergente* (ou de manière équivalente, on dit que (u_n) *diverge*).
- On dit que la limite d'une suite de nombres réels (u_n) *existe* si $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ ou si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, ou encore si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Dans le cas contraire, on dit que la limite de (u_n) *n'existe pas*.

1.6.14 Remarque : Des définitions précédentes, on déduit immédiatement qu'une suite de nombre réels (u_n) diverge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, ou encore $\lim_{n\to\infty} u_n$ n'existe pas.

1.6.15 Exemple : Soit la suite $\big((-1)^n\big)$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{n'existe pas}\,,$$

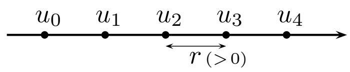
vu que $(-1)^n$ passe incessamment de -1 à 1 et de 1 à -1 à mesure que n augmente. En conséquence, $\big((-1)^n\big)$ diverge.

1.6.2 Suites arithmétiques

1.6.16 Définition : On appelle *suite arithmétique* toute suite de nombres réels (u_n) satisfaisant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + r \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \;=\; r\,, \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}\,.$$

Le nombre réel $r = u_{n+1} - u_n$, indépendant de n, est appelé *raison* de la suite arithmétique.



1.6.17 Remarque : Reprenons la définition précédente. De la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, on tire :

$$u_n \;=\; u_{n-1} + r \;=\; u_{n-2} + \underbrace{r + r}_{2\,r} \;=\; u_{n-3} + \underbrace{r + r + r}_{3\,r} \;=\; \ldots\,,$$

d'où, le terme général de la suite (u_n) :

$$u_n \;=\; u_0 + n\,r\,,$$

Une telle suite converge si $r = 0$ et diverge si $r \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to\infty} (u_0 + n\,r) \;=\; \begin{cases} -\infty & \text{si } r < 0 \\ \;\;u_0 & \text{si } r = 0 \\ \;\;\infty & \text{si } r > 0 \end{cases}\,.$$

Ce résultat se déduit directement des définitions 1.6.9 et 1.6.11.

1.6.18 Exemple : La suite $(-7\,;\,-4\,;\,-1\,;\,2\,;\,5\,;\,\ldots)$, dont le terme général s'écrit :

$$u_n \;=\; -7 + 3\,n\,,$$

est une suite arithmétique. En effet :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \;&=\; \big(-7 + 3\,(n+1)\big) - \big(-7 + 3\,n\big) \\ &=\; -7 + 3\,n + 3 + 7 - 3\,n \;=\; 3\,, \end{aligned}$$

qui est un nombre indépendant de n ; il correspond à la raison de la suite.

Un jour de la fin du XVIII[e] siècle, dans une classe d'une école primaire de Basse-Saxe, un enseignant a demandé à ses élèves de calculer la somme des cent premiers nombres naturels non nuls. Il pensait avoir ainsi occupé sa classe pour un certain temps. Mais peu après que le devoir a été posé, un élève a donné la réponse : 5050. Le nom de cet élève était *Carl Friedrich Gauß*[XIX]. Son raisonnement était le suivant : en additionnant le premier et le dernier terme de la somme, on obtient $1+100 = 101$; en additionnant le deuxième et l'avant-dernier terme de la somme, on obtient $2+99 = 101$; en additionnant le troisième et l'avant-avant-dernier terme de la somme, on obtient $3+98 = 101$; etc. ; en additionnant le cinquantième et le cinquante-et-unième terme de la somme on obtient $50+51 = 101$. La somme des nombres entiers compris entre 1 et 100 vaut donc 50 fois le nombre 101, soit :

$$50 \cdot 101 \;=\; 5050\,.$$

Si ce résultat peut être obtenu si rapidement, c'est grâce au fait que l'espacement entre deux nombres entiers consécutifs vaut toujours 1. Qu'en est-il alors dans le cas d'une suite finie de nombres réels, dont l'espacement entre deux nombres consécutifs demeure constant, mais est différent de 1 ? Peut-on exhiber une formule de sommation similaire ?

1.6.19 Proposition : *Soit (u_n) une suite arithmétique de terme général $u_n = u_0 + n\,r$, où u_0 et r sont des nombres réels donnés. Alors la somme des $N+1$ premiers termes de la suite, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_N$, est donnée par :*

$$\begin{aligned} S_N \;=\; \sum_{n=0}^{N} u_n \;&=\; \frac{N+1}{2}\,(u_0 + u_N) \\ &=\; \frac{N+1}{2}\,(2\,u_0 + N\,r)\,. \end{aligned}$$

Preuve : Soit (u_n) une suite arithmétique de terme général $u_n = u_0 + n\,r$ (où u_0 et r sont des nombres réels donnés) et $S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N$. Écrivons la somme S_N deux fois, une fois en commençant par les premiers termes et la deuxième fois par les derniers :

$$\begin{aligned} S_N \;&=\; u_0 \;+ u_1 \quad\; + u_2 \quad\; + \ldots + u_{N-2} + u_{N-1} + u_N\,, \\ S_N \;&=\; u_N + u_{N-1} + u_{N-2} + \ldots + u_2 \quad\; + u_1 \quad\; + u_0\,. \end{aligned}$$

XIX. Carl Friedrich Gauß était un mathématicien, physicien et astronome germanique, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen (en Basse-Saxe). Il est considéré comme une figure majeure du monde scientifique du début du XIX[e] siècle, tant son œuvre est riche, variée et aboutie. En mathématiques, on retrouve son nom dans de nombreux domaines : algèbre, théorie des nombres, géométrie, statistiques, analyse...

En sommant ces deux lignes colonne par colonne, il vient :

$$\begin{aligned}
2\,S_N &= (u_0 + u_N) + (u_1 + u_{N-1}) + \ldots + (u_{N-1} + u_1) + (u_N + u_0) \\
&= \big(u_0 + u_0 + N\,r\big) + \big(u_0 + r + u_0 + (N-1)\,r\big) + \ldots \\
&\qquad + \big(u_0 + (N-1)\,r + u_0 + r\big) + \big(u_0 + N\,r + u_0\big) \\
&= \big(u_0 + u_0 + N\,r\big) + \big(u_0 + u_0 + N\,r\big) + \ldots \\
&\qquad + \big(u_0 + u_0 + N\,r\big) + \big(u_0 + u_0 + N\,r\big) \\
&= (N+1)(u_0 + u_0 + N\,r) \;=\; (N+1)(u_0 + u_N) \;=\; (N+1)(2\,u_0 + N\,r)\,,
\end{aligned}$$

d'où le résultat donné dans la proposition. $\square$

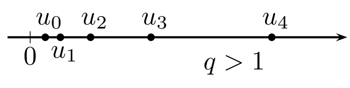
1.6.20 Exemple : Sommons tous les nombres entiers pairs allant de 0 à 250. Pour ce faire, remarquons que l'ensemble des nombres pairs positifs constitue une suite arithmétique de raison $r = 2$ et dont l'élément u_0 est nul. Sommer les nombres entiers pairs allant de 0 à 250 revient donc à additionner les 126 premiers termes de la suite arithmétique de terme général $u_n = 2\,n$, *i.e.* d'additionner les termes $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, \ldots, u_{125} = 250$. Avec la formule de sommation déduite plus haut, il vient :

$$\sum_{n=0}^{125} 2\,n \;=\; \sum_{n=0}^{125} u_n \;=\; \frac{125+1}{2}\,(u_0 + u_{125}) \;=\; 63 \cdot (0 + 250) \;=\; 15\,750\,.$$

1.6.3 Suites géométriques

1.6.21 Définition : On appelle *suite géométrique* toute suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 \neq 0$ et satisfaisant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} \;=\; q\,u_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; q\,, \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}\,,$$



où $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un nombre réel non nul, indépendant de n. Ce nombre est appelé *raison* de la suite géométrique.

1.6.22 Remarque : Reprenons la définition précédente. De la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n\,q$, on tire :

$$u_n \;=\; q\,u_{n-1} \;=\; \underbrace{q\,q}_{q^2}\,u_{n-2} \;=\; \underbrace{q\,q\,q}_{q^3}\,u_{n-3} \;=\; \ldots\,,$$

d'où, le terme général de la suite (u_n) :

$$u_n \;=\; u_0\,q^n\,.$$

Une telle suite converge si $-1 < q \leqslant 1$ et diverge si $q \leqslant -1$ ou $q > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to\infty} u_0\, q^n \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ u_0 & \text{si } q = 1 \\ \infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 < 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leqslant -1 \end{cases} .$$

Ce résultat se déduit directement des définitions 1.6.9 et 1.6.11.

1.6.23 Exemple : La suite $\left(4\,;\, -\frac{8}{3}\,;\, \frac{16}{9}\,;\, -\frac{32}{27}\,;\, \frac{64}{81}\,;\, \dots\right)$, dont le terme général s'écrit :

$$u_n \;=\; 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n ,$$

constitue une suite géométrique. En effet :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \;=\; \frac{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3}\right)}{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \;=\; -\frac{2}{3}$$

est un nombre indépendant de n ; il correspond à la raison de la suite.

Dans la sous-section précédente, a été établie une formule de sommation dans le cadre des suites arithmétiques. La proposition qui suit montre qu'une formule de sommation existe aussi dans le cadre des suites géométriques.

1.6.24 Proposition : *Soit* (u_n) *une suite géométrique de terme général* $u_n = u_0\, q^n$*, où* u_0 *est un nombre réel donné et* q *un nombre réel donné, différent de* 1*. Alors, la somme des* $N+1$ *premiers termes de la suite,* $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$*, est donnée par :*

$$S_N \;=\; \sum_{n=0}^{N} u_n \;=\; u_0\, \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} .$$

Preuve : Soit (u_n) une suite géométrique satisfaisant les hypothèses de la proposition. Écrivons S_N et $q\, S_N$ l'une sous l'autre, de façon judicieuse :

$$\begin{aligned} S_N \;&=\; u_0 + u_0\, q + u_0\, q^2 + \ldots + u_0\, q^{N-2} + u_0\, q^{N-1} + u_0\, q^N , \\ q\, S_N \;&=\; \qquad u_0\, q + u_0\, q^2 + \ldots + u_0\, q^{N-2} + u_0\, q^{N-1} + u_0\, q^N + u_0\, q^{N+1} . \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux lignes, la plupart des termes du côté droit de l'égalité disparaissent, si bien que :

$$S_N - q\, S_N \;=\; u_0 - u_0\, q^{N+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_N\, (1-q) \;=\; u_0 \left(1 - q^{N+1}\right) ;$$

le résultat donné dans la proposition s'ensuit. $\square$

1.6.25 Corollaire : *Soit (u_n) une suite géométrique de terme général $u_n = u_0\, q^n$, où u_0 est un nombre réel donné et q un nombre réel tel que $-1 < q < 1$. Alors, la somme de l'infinité de termes que contient la suite, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, n'est pas infinie ; elle est égale à un nombre réel S, qui est donné par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S = \frac{u_0}{1-q} \,.$$

Preuve : Soit (u_n) une suite géométrique satisfaisant les hypothèses du corollaire. Alors, selon la proposition précédente et en tenant compte du fait que q^{N+1} tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini (du fait que $-1 < q < 1$) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} u_0 \, \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{u_0}{1-q} \,,$$

ce qui montre, en outre, que la somme de l'infinité de termes que contient la suite n'est pas infinie. $\square$

1.6.26 Remarque : La formule du corollaire précédent s'avère particulièrement utile lorsque l'on cherche à exprimer sous forme rationnelle un nombre à décimales périodiques.

1.6.27 Exemples : 1. Écrivons le nombre $5{,}4\overline{27}$ sous forme rationnelle :

$$\begin{aligned}
5{,}4\overline{27} &= 5{,}4272727..... = 5{,}4 + 0{,}0272727..... \\
&= 5{,}4 + 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \dots \\
&= 5{,}4 + 0{,}027 \cdot (1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots) \\
&= \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \dots\right) \\
&= \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \left[\left(\frac{1}{100}\right)^0 + \left(\frac{1}{100}\right)^1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\
&= \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{54}{10} + \frac{27}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{54}{10} + \frac{27}{990} \\
&= \frac{54}{10} + \frac{3}{110} = \frac{594}{110} + \frac{3}{110} = \frac{597}{110} \,,
\end{aligned}$$

du fait que $\frac{27}{1000} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$ peut être vue comme la somme d'une infinité d'éléments constituant une suite géométrique, dont le terme général est $u_n = \frac{27}{1000} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$ et dont la raison est comprise strictement entre -1 et 1.

2. Écrivons le nombre $0{,}\overline{9}$ sous forme rationnelle :

$$\begin{aligned} 0{,}\bar{9} &= 0{,}999\ldots\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots = 0{,}9 \cdot (1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots) \\ &= \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right) = \frac{9}{10} \cdot \left[\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots\right] \\ &= \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1\,, \end{aligned}$$

du fait que $\frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ peut être vue comme la somme d'une infinité d'éléments constituant une suite géométrique, dont le terme général est $u_n = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ et dont la raison est comprise strictement entre -1 et 1.

1.6.4 Critères de convergence relatifs aux séries numériques

La somme de l'infinité des éléments qui constituent une suite arithmétique est infinie, du fait que l'écart entre deux éléments consécutifs est constant. La somme de l'infinité des éléments qui constituent une suite géométrique de raison $q \geqslant 1$ est également infinie. Qu'en est-il dans le cas d'une suite de nombres quelconque, qui n'est ni arithmétique, ni géométrique ? Les résultats qui suivent permettent de répondre en partie à cette question.

1.6.28 Définitions : Soit $(u_n) = (u_0;\, u_1;\, u_2;\, u_3;\, u_4;\, \ldots)$ une suite de nombres réels (contenant une infinité d'éléments).

- On appelle *somme partielle d'indice* N*, de terme général* u_n, la quantité S_N donnée par :

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n\,.$$

- On appelle *série numérique* (ou simplement *série*), *de terme général* u_n, la somme de l'infinité des éléments qui constituent la suite (u_n) :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

1.6.29 Remarques :

- Selon leurs définitions, certaines suites de nombres (u_n) n'ont pas d'élément u_0, elles débutent avec l'élément u_1. Les séries numériques associées à de telles suites n'ont donc pas de terme u_0 ; dans de telles circonstances, l'indice n, dans le signe $\sum$, va de 1 à ∞ (et non de 0 à ∞).
- Dans la définition précédente, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est la limite de la somme partielle S_N lorsque N tend vers l'infini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N \to \infty} S_N\,.$$

- L'ensemble (S_N) (qui se note aussi, en écriture longue, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$), formé des sommes partielles de terme général u_n (où (u_n) est une suite de nombres réels), peut être lui-même vu comme une suite de nombres :

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{n=0}^{0} u_n = u_0\,, \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{1} u_n = u_0 + u_1\,, \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{2} u_n = u_0 + u_1 + u_2\,, \\ S_3 &= \sum_{n=0}^{3} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3\,, \\ \vdots\ & \ \vdots \quad\ \ \vdots \end{aligned}$$

On dit que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge* si la suite (S_N) converge, *i.e.* si la suite (S_N) admet pour limite un nombre réel S. Dans le cas contraire, on dit que la série numérique *diverge*.

1.6.30 Exemples : 1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 1$. La série numérique associée à cette suite est appelée *série harmonique* ; elle s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Dans la sous-section 4.6.4 du chapitre 4, il est montré que cette série diverge. La somme partielle d'indice N est donnée par :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\ ;$$

et alors :

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \infty\,.$$

2. On appelle *série harmonique alternée* la somme de l'infinité de termes de la suite (u_n), de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, avec $n \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

Contrairement à la série harmonique, la série harmonique alternée converge. Une preuve de ce résultat se trouve dans l'annexe A du présent ouvrage (*cf.* proposition A.2.6 de la section A.2).

3. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$, avec $n \geqslant 1$. Alors la somme de l'infinité de ses termes :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$
est une série convergente. Ce résultat est prouvé dans la sous-section 4.6.4 du chapitre 4.

1.6.31 Proposition : *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. Pour que la série numérique* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge, il faut que* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombres réels. Considérons les sommes partielles S_{n-1} et S_n, d'indice $n-1$ et n respectivement :

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}\,,$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n\,.$$

Alors :

$$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = u_n\,.$$

Dire que la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} u_n$ converge revient à dire que la limite $\lim_{n\to\infty} S_n$ est égale à un certain nombre réel S. Or, si $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, alors évidemment $S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Par conséquent, si la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_n$ converge, alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, il faut que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Noter qu'il conviendrait, pour compléter la preuve, de montrer que la différence de limites $\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ est égale à la limite $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$. Une telle propriété n'est pas prouvée ici ; une démonstration est donnée dans la partie annexe du présent ouvrage (*cf.* proposition A.1.6 de l'annexe A). □

1.6.32 Remarque : La proposition précédente est une condition nécessaire pour qu'une série numérique converge, mais pas une condition suffisante. Il existe, en effet, des suites de nombres qui tendent vers 0 et dont la somme de l'infinité de termes diverge ; la série harmonique en est un exemple : elle diverge, quand bien même $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, pour savoir si une série numérique converge ou non, il est nécessaire de faire appel à d'autres critères. Deux d'entre eux sont présentés ici.

1.6.33 Proposition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Supposons que :*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell\,,$$

où ℓ est un nombre réel.

- *Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.*
- *Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.*
- *Si $\ell = 1$, il n'est pas possible de conclure, dans le cadre de la proposition présente, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ou diverge.*

Ce résultat est connu sous le nom de ***critère de d'Alembert***[XX]*, ou* ***critère du quotient****.*

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombre réels pour laquelle $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

- Supposons que :

  $$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1\,.$$

  Par définition de la notion de limite d'une suite, il existe alors un nombre réel r compris strictement entre ℓ et 1 (*i.e.* $\ell < r < 1$) tel que :

  $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < r\,,$$

  pour tout nombre entier n supérieur ou égal à un certain nombre $N \in \mathbb{N}$. Autrement écrit :

  $$\left|\frac{u_{N+m+1}}{u_{N+m}}\right| < r\,,$$

  pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or :

  $$\begin{aligned}\left|\frac{u_{N+m+1}}{u_{N+1}}\right| &= \left|\frac{u_{N+m+1}}{u_{N+m}}\,\frac{u_{N+m}}{u_{N+m-1}}\cdots\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}}\,\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right| \\ &= \left|\frac{u_{N+m+1}}{u_{N+m}}\right|\left|\frac{u_{N+m}}{u_{N+m-1}}\right|\cdots\left|\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\;;\end{aligned}$$

  et comme chacun des facteurs, dans la dernière expression, est strictement plus petit que r, alors :

  $$\left|\frac{u_{N+m+1}}{u_{N+1}}\right| < r^m \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{|u_{N+m+1}|}{|u_{N+1}|} < r^m\,.$$

XX. Jean Le Rond d'Alembert était un mathématicien et encyclopédiste français, né le 16 novembre 1717 à Paris et mort le 29 octobre 1783 dans la même ville. Il est demeuré célèbre notamment pour son étude sur la vibration d'une corde fixée en ses deux extrémités.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$0 \; < \; |u_{N+m+1}| \; < \; |u_{N+1}| \, r^m .$$

Noter que $|u_{N+m+1}|$ peut être vu comme le terme général d'une suite de nombres. Il en est de même pour $|u_{N+1}| \, r^m$; c'est même le terme général d'une suite géométrique de raison r. Comme $-1 < r < 1$, la somme de l'infinité de ses éléments $\sum_{m=0}^{\infty} |u_N| \, r^m$ converge (*cf.* sous-section 1.6.3 consacrée aux suites géométriques). En résumé, $\big(|u_{N+m+1}|\big)$ et $\big(|u_{N+1}| \, r^m\big)$ sont deux suites pour lesquelles $|u_{N+m+1}| < |u_{N+1}| \, r^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; de plus, $\sum_{m=0}^{\infty} |u_N| \, r^m$ converge. Selon le critère de comparaison relatif aux séries numériques (*cf.* proposition A.2.1 de l'annexe A), qui est applicable ici, la série numérique $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m+1}|$ converge donc. Et vu que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \; = \; \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \sum_{n\,=\,N+1}^{\infty} |u_n| \; = \; \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m+1}| \, ,$$

où $\sum_{n=0}^{N} |u_n|$ est une somme contenant un nombre fini de termes, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge également. Enfin, dès lors que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge aussi (*cf.* proposition A.2.2, section A.2 de l'annexe A).

- Supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \; > \; 1 \, .$$

Par définition de la notion de limite d'une suite, il existe alors un nombre réel r compris strictement entre 1 et ℓ (*i.e.* $1 < r < \ell$) tel que :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \; > \; r \, ,$$

pour tout n supérieur ou égal à un certain nombre $N \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \; = \; \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \; > \; r \; > \; 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |u_{n+1}| > |u_n| \, ,$$

ce qui implique que :

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}| \; \neq \; 0 \qquad \text{et donc que :} \qquad \lim_{n\to\infty} u_{n+1} \; \neq \; 0 \, ,$$

ou encore que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n \; \neq \; 0 \, .$$

La proposition 1.6.31 permet alors de conclure que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

- Si :
$$\ell \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \;=\; 1\,,$$
il n'est pas possible de dire si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ou diverge : la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et satisfait :
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| \;=\; 1\,;$$
la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et satisfait également :
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right| \;=\; 1\,.$$

1.6.34 Proposition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Supposons que :*
$$\ell \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \;=\; \ell\,,$$
où ℓ est un nombre réel.

- *Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.*
- *Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.*
- *Si $\ell = 1$, il n'est pas possible de conclure, dans le cadre de la proposition présente, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ou diverge.*

Ce résultat est connu sous le nom de ***critère de la racine****.*

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombres réels pour laquelle la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

- Supposons que :
$$\ell \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \;<\; 1\,.$$
Par définition de la notion de limite d'une suite, il existe alors un nombre réel r compris strictement entre ℓ et 1 (*i.e.* $\ell < r < 1$), tel que :
$$\sqrt[n]{|u_n|} \;<\; r\,,$$
pour tout n supérieur ou égal à un certain nombre naturel N. Autrement écrit :
$$|u_n| \;<\; r^n\,,$$
pour tout $n \geqslant N$; ou, de manière équivalente, pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$$|u_{N+m}| \;<\; r^{N+m}\,;$$
et vu que $|u_{N+m}| \geqslant 0$ et que $r^{N+m} = r^N\, r^m$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$$0 \;\leqslant\; |u_{N+m}| \;<\; r^N\, r^m\,.$$

Noter que $|u_{N+m}|$ peut être vu comme le terme général d'une suite de nombres. Il en est de même pour $r^N\, r^m$; c'est même le terme général d'une suite géométrique de raison r. Comme $-1 < r < 1$, la somme de l'infinité de ses éléments $\sum_{m=0}^{\infty} r^N\, r^m$ converge. En résumé, $\big(|u_{N+m}|\big)$ et $\big(r^N\, r^m\big)$ sont deux suites pour lesquelles $0 \leqslant |u_{N+m}| < r^N\, r^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; de plus, $\sum_{m=0}^{\infty} r^N\, r^m$ converge. Selon le critère de comparaison relatif aux séries numériques, qui est applicable ici, la série numérique $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m}|$ converge donc ; $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m+1}|$ converge donc évidemment aussi (du fait qu'il s'agit de la série $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m}|$ de laquelle a été oté le terme u_N). Et vu que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \;=\; \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \sum_{n\,=\,N+1}^{\infty} |u_n| \;=\; \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \sum_{m=0}^{\infty} |u_{N+m+1}|\,,$$

où $\sum_{n=0}^{N} |u_n|$ est une somme contenant un nombre fini de termes, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge également. Enfin, dès lors que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge aussi (*cf.* proposition A.2.2, section A.2 de l'annexe A).

- Supposons que :

$$\ell \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \;>\; 1\,.$$

Par définition de la notion de limite d'une suite, il existe alors un nombre réel r compris strictement entre 1 et ℓ (*i.e.* $1 < r < \ell$), tel que :

$$\sqrt[n]{|u_n|} \;>\; r\,,$$

pour tout n supérieur ou égal à un certain nombre naturel N ; autrement écrit :

$$|u_n| \;>\; r^n\,,$$

pour tout $n \geqslant N$. Ainsi :

$$|u_n| \;>\; 1\,,$$

pour tout $n \geqslant N$, ce qui implique que :

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| \;\neq\; 0 \qquad \text{et donc que :} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n \;\neq\; 0\,.$$

La proposition 1.6.31 permet alors de conclure que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

- Si :

$$\ell \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \;=\; 1\,,$$

il n'est pas possible de dire si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ou diverge : la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge (vu que $1-1+1-1+1-1+\ldots$ « oscille » entre 0 et 1) et satisfait :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \;=\; 1\,;$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et satisfait également :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1\,.$$

Une preuve de ce dernier résultat est donnée dans la section 3.9 du chapitre 3 (*cf.* deuxième des exemples 3.9.13). □

1.6.35 Exemple : La série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$$

diverge ; pour le voir, appliquons le critère de d'Alembert. Notons $u_n = \frac{3^n}{n^2}$; alors $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3 \cdot 3^n\, n^2}{3^n\,(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3\,n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,n^2}{(n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\,n^2}{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 3\,.
\end{aligned}$$

Le fait que ℓ est un nombre réel strictement supérieur à 1 permet de conclure.

Chapitre 2

Fonctions réelles

L'idée de relation entre deux grandeurs peut être déjà entrevue dans les écrits mathématiques des Babyloniens et des anciens Égyptiens. Longtemps, elle a été affiliée exclusivement (ou presque) à l'arithmétique ; ce n'est que vers la fin de la Renaissance, en Europe, qu'elle a commencé à se manifester dans d'autres contextes.

Dans la première moitié du XVII[e] siècle, le concept de relation entre deux grandeurs a commencé à être utilisé en géométrie, pour décrire différents objets du plan euclidien : chaque point du plan pouvant être caractérisé par deux nombres réels x et y, appelés coordonnées du point, une ligne (courbe ou non) peut être vue comme un ensemble de points dont les coordonnées sont liées entre elles par une équation donnée.

Si une relation entre deux grandeurs permet de décrire une courbe, elle ne fournit toutefois pas explicitement les caractéristiques permettant d'en faire rapidement une bonne esquisse ; comment, en effet, tracer une ligne dans le plan à partir d'une expression dans laquelle deux variables sont interdépendantes ? Une telle question a pu être résolue dans le courant du XVIII[e] siècle, lorsqu'a été précisée, petit à petit, la notion de *fonction*. L'adoption d'un tel concept a conduit à un véritable changement de paradigme : deux grandeurs réelles x et y, qui auparavant étaient traitées comme des *variables interdépendantes* entre elles *via* une équation, sont devenues *variable indépendante* pour l'une, par exemple x, et *variable dépendante* pour l'autre, par exemple y, cette dernière dépendant alors explicitement de la première.

Du concept de fonction, ressort le fait qu'à chaque valeur d'une variable indépendante x donnée, n'est affiliée qu'une unique valeur de la variable dépendante y associée. Grâce à ce concept, il devient alors envisageable d'étudier la variation de y à mesure que x augmente ; autrement dit, il devient possible de s'imaginer l'allure de la courbe plane qui résulte du lien entre x et y. La figure obtenue est à l'image de ce qu'un enregistreur de température trace dans un diagramme : la température augmente, diminue ou demeure constante à mesure que le temps s'écoule. Le fait que l'aiguille du traceur ne revient jamais en arrière, ni ne se sépare en plusieurs parties, exprime bien le fait qu'à chaque instant, la température ne prend qu'une seule valeur.

2.1 Relation entre deux grandeurs réelles

S'il est vrai que l'idée de relation entre deux grandeurs réelles, et plus particulièrement la notion de fonction, occupe une place centrale dans l'étude du calcul infinitésimal, il n'en demeure pas moins vrai que de tels concepts se retrouvent également dans d'autres domaines des mathématiques, en géométrie notamment, ainsi que dans les sciences physiques et en ingénierie. En géométrie, par exemple, les fonctions sont fréquemment utilisées pour décrire ce que l'on appelle des *courbes planes*.

Vu le nombre d'applications géométriques qui vont être exposées dans le présent ouvrage (dans les chapitres 3 et 8 notamment), il convient de revenir, en premier lieu, sur certaines notions fondamentales de la géométrie dans le plan et dans l'espace. Toute personne pour qui de telles notions sont suffisamment familières peut se rendre directement à la section 2.2.

2.1.1 Plan euclidien

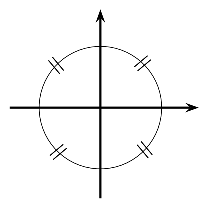
2.1.1 Définition : On appelle *plan euclidien* l'ensemble :

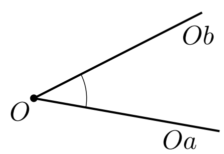
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x;\, y) \,\big|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\big\}$$

constitué de deux copies de la droite réelle $\mathbb{R}$ se coupant à *angle droit*.

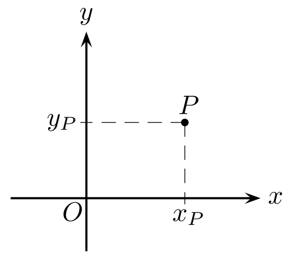
2.1.2 Remarques :

- Ce qui caractérise deux droites qui s'intersectent à angle droit, c'est qu'elles découpent tout cercle, dont le centre se trouve sur le point d'intersection, en quatre arcs de longueurs égales. L'idée de cercle est essentielle dans la définition d'angle droit, et plus généralement d'angle : la mesure d'un angle entre deux demi-droites Oa et Ob, de même sommet O, est définie comme étant la longueur d'un arc de cercle de rayon unité, délimité par les deux demi-droites en question ; noter que les deux demi-droites définissent systématiquement deux angles, l'un plus petit et l'autre plus grand que π. Deux demi-droites, de même sommet, forment un angle droit entre elles si l'un des deux angles qu'elles définissent vaut $\frac{\pi}{2}$. Deux droites qui se coupent à angle droit sont dites *perpendiculaires*, ou *orthogonales*.

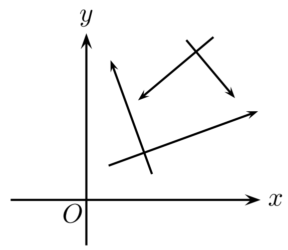




- Les deux copies de la droite réelle, mentionnées dans la définition de $\mathbb{R}^2$, sont fréquemment appelées *axe x*, ou *axe des abscisses*, et *axe y*, ou *axe des ordonnées*.
- Parler d'un point P dans le plan euclidien, c'est faire référence à un couple de nombres réels $(x_P;\, y_P) \in \mathbb{R}^2$ qui caractérise P. Ce couple $(x_P;\, y_P)$ est appelé *coordonnées cartésiennes* de P. La coordonnée x_P est souvent appelée *abscisse* de P, la coordonnée y_P *ordonnée* de P. Pour indiquer qu'un couple de nombres réels $(x_0;\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ correspond à un point A, on adopte la notation $A(x_0;\, y_0)$. Parfois, on écrit $A \in \mathbb{R}^2$; par cette écriture, on sous-entend $(x_0;\, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

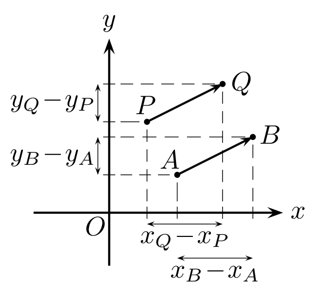


- Le point $O(0;\,0) \in \mathbb{R}^2$, dont les coordonnées sont $(0;\,0)$, est appelé *origine*. Sauf indication contraire, il est supposé que les axes x et y (*i.e.* les deux copies de la droite réelle constituant le plan euclidien) se coupent en l'origine O. Dans ce cas, les axes x et y se notent Ox et Oy. L'ensemble de ces axes Ox et Oy constitue ce que l'on appelle un *système de coordonnées cartésiennes* ; on le note Oxy.
- La coordonnée x_P d'un point $P(x_P;\,y_P)$ dans le plan euclidien correspond à l'intersection de la droite parallèle à l'axe Oy et passant par P, et de l'axe Ox ; la coordonnée y_P correspond à l'intersection de la droite parallèle à l'axe Ox et passant par P, et de l'axe Oy.



- Dans $\mathbb{R}^2$, il n'existe pas un unique système de coordonnées cartésiennes ; on peut imaginer une infinité de systèmes de deux axes orthogonaux (*i.e.* perpendiculaires entre eux), tous différents les uns des autres. Dans cette infinité de systèmes, l'un d'eux se distingue des autres : c'est Oxy, dont la définition est intimement liée à la construction même de $\mathbb{R}^2$. Ce système, naturellement affilié au plan euclidien, est appelé *système de coordonnées cartésiennes canonique* de $\mathbb{R}^2$; il est généralement tracé de la manière suivante : l'axe Ox est horizontal et pointe vers la droite, l'axe Oy est verticale et pointe vers le haut.

2.1.2 Vecteurs dans le plan euclidien



Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, à tout couple de points $P(x_P;\,y_P)$ et $Q(x_Q;\,y_Q)$ peut être associée une flèche, notée $\overrightarrow{PQ}$, allant de P à Q. Une telle flèche est complètement caractérisée par deux nombres, appelés *composantes* selon x et selon y et donnés par $x_Q - x_P$ et $y_Q - y_P$ respectivement ; on note alors :

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}.$$

Soient $A(x_A;\,y_A)$ et $B(x_B;\,y_B)$ deux autres points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Si la flèche $\overrightarrow{AB}$ a les mêmes composantes selon x et selon y que $\overrightarrow{PQ}$, on dit qu'il s'agit d'une même et unique flèche : $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont les mêmes longueurs, directions et sens ; la seule différence réside dans le fait que $\overrightarrow{PQ}$ commence en P, alors que $\overrightarrow{AB}$ débute en A.

2.1.3 Remarques :

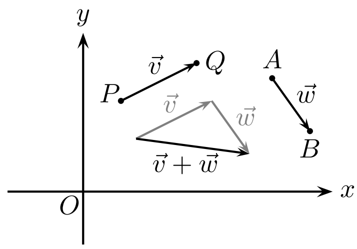
- L'ensemble des flèches du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de la loi d'*addition des flèches* et de *multiplication des flèches par un scalaire réel*, constitue ce que l'on appelle un *espace vectoriel*. Les éléments de cet espace, les flèches, sont alors appelées *vecteurs*. Les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont définies comme suit.

◇ *Addition des flèches* :
Soient $\overrightarrow{PQ}$ une flèche, reliant deux points $P(x_P;\, y_P)$ et $Q(x_Q;\, y_Q)$ dans $\mathbb{R}^2$, et $\overrightarrow{AB}$ une autre flèche, reliant les points $A(x_A;\, y_A)$ et $B(x_B;\, y_B)$, dans $\mathbb{R}^2$ aussi. On définit la somme $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB}$ par :

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AB} \;=\; \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_Q - x_P + x_B - x_A \\ y_Q - y_P + y_B - y_A \end{pmatrix};$$

en notant $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, $v_x = x_Q - x_P$, $v_y = y_Q - y_P$, $w_x = x_B - x_A$ et $w_y = y_B - y_A$, la somme ci-dessus s'écrit :

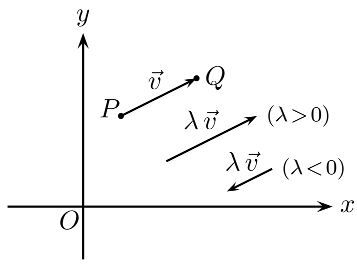
$$\vec{v} + \vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$$



◇ *Multiplication d'une flèche par un scalaire réel* :
Soient $\overrightarrow{PQ}$ une flèche reliant deux points $P(x_P;\, y_P)$ et $Q(x_Q;\, y_Q)$ du plan euclidien, et λ un nombre réel. On définit la multiplication $\lambda\,\overrightarrow{PQ}$ par :

$$\lambda\,\overrightarrow{PQ} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\,(x_Q - x_P) \\ \lambda\,(y_Q - y_P) \end{pmatrix};$$

en notant $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, $v_x = x_Q - x_P$ et $v_y = y_Q - y_P$, l'opération ci-dessus s'écrit :



$$\lambda\,\vec{v} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\,v_x \\ \lambda\,v_y \end{pmatrix}.$$

- Soient $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ une flèche dans $\mathbb{R}^2$, reliant deux points $P(x_P;\, y_P)$ et $Q(x_Q;\, y_Q)$, et $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ une autre flèche dans $\mathbb{R}^2$, reliant les points $A(x_A;\, y_A)$ et $B(x_B;\, y_B)$. Notons :

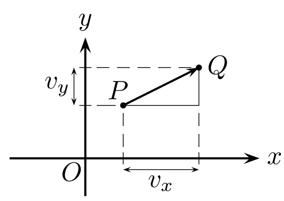
$$\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}.$$

◇ On appelle *produit scalaire euclidien* de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ la quantité $\vec{v}\cdot\vec{w}$ définie par la relation suivante :

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \;=\; v_x\,w_x + v_y\,w_y\,.$$

◇ On appelle *norme euclidienne* de $\vec{v}$ la quantité $\|\vec{v}\,\|$ définie par la relation suivante :

$$\|\vec{v}\,\| \;=\; \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}\,.$$

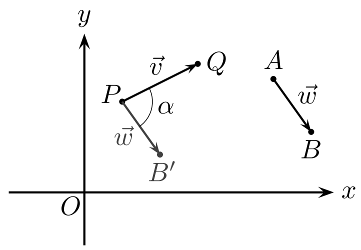


Le *théorème de Pythagore*[I] permet d'affirmer que $\|\vec{v}\|$ correspond à la longueur de la flèche $\vec{v}$. De fait, $\|\vec{v}\|$ est égale à la distance entre les points P et Q (vu que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$).

◇ Le produit scalaire euclidien satisfait la propriété suivante (qui se déduit de la définition même du produit scalaire euclidien, ainsi que du *théorème du cosinus*[II]) :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \;=\; \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos(\alpha)\,,$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, *i.e.* et $\cos(\alpha)$ le cosinus de α. Une définition précise du cosinus est donnée à la fin du présent ouvrage, dans la section C.8 de l'annexe C



2.1.3 Espace euclidien

2.1.4 Définition : On appelle *espace euclidien* l'ensemble :

$$\mathbb{R}^3 \;=\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;=\; \big\{(x;\, y;\, z)\,\big|\, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\big\}$$

constitué de trois copies de la droite réelle $\mathbb{R}$ se coupant deux à deux à angle droit.

2.1.5 Remarques :

- Les trois copies de la droite réelle, mentionnées dans la définition de $\mathbb{R}^3$, sont fréquemment appelées *axe x*, *axe y* et *axe z*.
- Parler d'un point P dans l'espace euclidien, c'est faire référence à un triplet de nombres réels $(x_P;\, y_P;\, z_P) \in \mathbb{R}^3$ qui caractérise P. Ce triplet $(x_P;\, y_P;\, z_P)$ est appelé *coordonnées cartésiennes* de P. Pour indiquer qu'un triplet de nombres réels $(x_0;\, y_0;\, z_0) \in \mathbb{R}^3$ correspond à un point A de l'espace euclidien, on adopte la notation $A(x_0;\, y_0;\, z_0)$.
- Le point $O(0;\, 0;\, 0)$, dont les coordonnées sont $(0;\, 0;\, 0)$, est appelé *origine*. Sauf indication contraire, il est supposé que les axes x, y et z (*i.e.* les trois copies de la droite réelle constituant l'espace euclidien) se coupent en l'origine O. Dans ce cas, les axes x, y et z se notent Ox, Oy et Oz respectivement. L'ensemble de ces trois axes Ox, Oy et Oz constitue ce que l'on appelle un *système de coordonnées cartésiennes*.

I. Le théorème de Pythagore s'énonce comme suit : dans tout triangle rectangle (*i.e.* dans tout triangle possédant un angle droit), le carré de la longueur du côté opposé à l'angle droit est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. Le théorème doit son nom au savant grec *Pythagore* (né dans la première moitié du VI^e siècle av. J.-C., à Samos (île du sud-est de la mer Égée), et mort au début du V^e siècle av. J.-C.). Le résultat semble toutefois ne pas avoir été découvert par Pythagore même, puisqu'il était connu plus de mille ans auparavant chez les Mésopotamiens.

II. Le théorème du cosinus peut être considéré comme une généralisation du théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Il s'énonce comme suit : $c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)$, où a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle et γ l'angle opposé au côté de longueur c.

- Ce qui caractérise un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace euclidien, c'est la donnée de trois axes, gradués de la même manière et orthogonaux deux à deux. Dans $\mathbb{R}^3$, il n'existe pas un unique système de coordonnées cartésiennes ; on peut imaginer une infinité de systèmes de trois axes orthogonaux deux à deux, tous différents les uns des autres. Dans cette infinité de systèmes, l'un d'eux se distingue des autres : c'est $Oxyz$, dont la définition est intimement liée à la construction même de $\mathbb{R}^3$. Ce système, naturellement affilié au plan euclidien, est appelé *système de coordonnées cartésiennes canonique* de $\mathbb{R}^3$.
- Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, dans lequel on considère le système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, le plan généré par les axes Ox et Oy constitue une copie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Il en est de même pour le plan généré par Oy et Oz, et le plan généré par Ox et Oz. Dans le cas où l'on est amené à travailler simultanément dans le plan et l'espace euclidiens (comme ce sera le cas dans le chapitre 8), on suppose que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est le plan généré par les axes Ox et Oy, où $Oxyz$ est le système de coordonnées cartésiennes canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Les considérations faites précédemment sur les flèches dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ se transposent sans difficulté à l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Les détails ne sont pas présentés ici.

2.1.4 Relations implicites et explicites

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et $(x;\, y)$ un élément (*i.e.* un point) de $\mathbb{R}^2$.

- Si les grandeurs x et y ne sont liées par aucune expression, elles peuvent prendre, indépendamment l'une de l'autre, toutes les valeurs réelles possibles. Dans ce cas, l'ensemble de tous les couples $(x;\, y)$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, correspond au plan euclidien dans son intégralité.
- Si x et y sont liées entre elles, que ce soit par une équation ou même une inéquation, elles ne peuvent en général pas prendre, indépendamment l'une de l'autre, toutes les valeurs réelles possibles. Dans ce cas, l'ensemble de tous les couples $(x;\, y)$, où x et y sont liées entre elles par une expression donnée, ne correspond en général pas au plan euclidien dans son intégralité ; selon l'expression qui relie x et y, on peut *a priori* être en présence d'une *surface*, d'une *ligne*, d'un point, de l'ensemble vide ou encore d'une réunion de plusieurs de ces éléments cités.

2.1.6 Exemples : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

1. Soit l'équation :

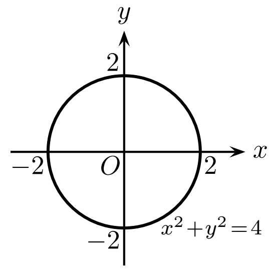
$$x^2 + y^2 \;=\; 4\,.$$

   L'ensemble des couples (*i.e.* des points) $P(x;\, y)$ du plan euclidien satisfaisant cette équation forme ce que l'on appelle un *cercle*. Par définition, un cercle est le lieu géométrique de tous les points qui se trouvent à la même distance d'un point particulier, appelé *centre* du cercle ; et la distance entre chacun des points du cercle et le centre porte le nom de *rayon*. Dans le cas présent, le centre du cercle est le point $O(0;\,0)$ (*i.e.* l'origine du système Oxy) et son rayon vaut 2. En effet, tout point $P(x;\,y)$ obéissant à l'équation $x^2+y^2=4$ satisfait également la relation :

$$\sqrt{x^2+y^2} \;=\; 2\,,$$

vu que $\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)^2 = 4$. Or, $\sqrt{x^2+y^2}$ n'est rien d'autre que la norme $\|\overrightarrow{OP}\|$ du vecteur $\overrightarrow{OP}$, où :

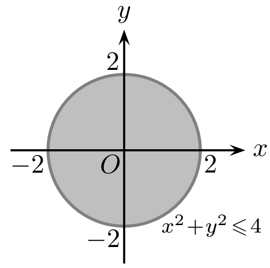
$$\overrightarrow{OP} \;=\; \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\;;$$

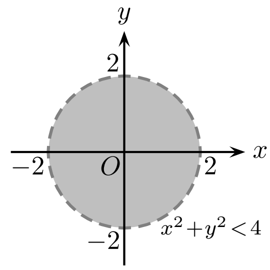


comme $\|\overrightarrow{OP}\|$ correspond, par définition, à la distance entre O et P, on conclut que l'ensemble des points $P(x;\,y)$ tels que $x^2+y^2=4$ constitue bien un cercle de centre $O(0;\,0)$ et de rayon $r=2$.

2. Soit l'inéquation :

$$x^2+y^2 \;\leqslant\; 4\,.$$





Tout point $P(x;\,y)$ du plan euclidien satisfaisant cette inéquation se trouve sur ou à l'intérieur d'un cercle de centre $O(0;\,0)$ et de rayon 2 ; en effet, selon les considérations faites au point précédent, tout point $P(x;\,y)$ satisfaisant $x^2+y^2\leqslant 4$ est tel que la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est inférieure ou égale à 2 (et aussi supérieure ou égale à 0, vu qu'une racine est toujours positive ou nulle). L'ensemble de tous les points qui se trouvent sur ou à l'intérieur d'un cercle est appelé *disque fermé*. Dans le cas où $x^2+y^2<4$, seuls les points $P(x;\,y)$ qui sont à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2 satisfont l'inégalité stricte ; on parle alors de *disque ouvert*. Disques ouvert et fermé sont tous les deux des *surfaces*.

3. Soit l'équation :

$$x^2+y^2 \;=\; 0\,.$$

Le fait que $x^2\geqslant 0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$, et $y^2\geqslant 0$ quel que soit $y\in\mathbb{R}$ (vu que tout nombre élevé au carré est positif ou nul), implique $x^2+y^2\geqslant 0$ quel que soit $(x;\,y)\in\mathbb{R}^2$. En conséquence, il n'existe qu'un seul point de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait l'équation ci-dessus : c'est l'origine $O(0;\,0)$.

4. Soit l'inéquation :

$$x^2+y^2 \;\leqslant\; 0\,.$$

Un raisonnement similaire à celui du point précédent permet d'affirmer que seule l'origine $O(0;\, 0)$ satisfait cette expression. La conclusion diffère toutefois si l'inégalité est stricte (*i.e.* si $x^2+y^2<0$) ; dans ce cas, aucun point, pas même l'origine $O(0;\, 0)$, ne remplit la condition donnée.

5. Soit l'équation :

$$x^2 + y^2 \;=\; -4\,.$$

Aucun point de $\mathbb{R}^2$ ne peut satisfaire cette équation. L'ensemble de tous les points $P(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $x^2 + y^2 = -4$ est donc vide.

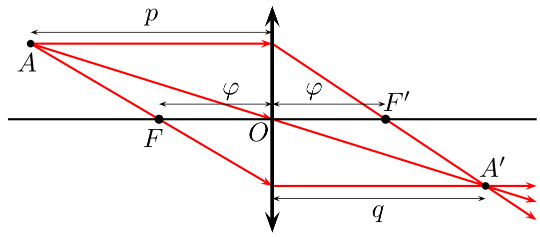
2.1.7 Remarques :

- Dans le propos tenu précédemment, ont été évoqués, entre autres, les notions de *réunion de points* et de *ligne*, sans en donner une définition précise. On pourrait légitimement penser que les deux concepts n'en sont qu'un seul : une ligne peut être vue comme une réunion de points. Une définition rigoureuse de *ligne* sera donnée à la fin du présent chapitre (*cf.* section 2.11). Retenons à ce stade l'idée suivante : une *ligne* est une figure géométrique que l'on peut tracer sur une feuille plane en une fois, sans devoir lever le crayon ; une réunion de points peut, selon les circonstances, correspondre à :
  - ◇ une ligne,
  - ◇ un ensemble de points tel qu'il n'est pas possible de passer d'un point à un autre sans devoir lever le crayon,
  - ◇ une figure hybride entre les deux qui viennent d'être évoquées.
- On peut se demander dans quelles circonstances une équation liant deux grandeurs réelles x et y décrit une ligne dans le plan euclidien. Plusieurs théorèmes, tous moins banals les uns que les autres, traitent de cette question ; le présent ouvrage n'en retient qu'un seul : le *théorème des fonctions implicites*. Il sera discuté dans la section 3.6 du prochain chapitre.

Toute équation liant les grandeurs x et y porte le nom d'*équation cartésienne*. Considérons une telle équation.

- Si l'équation est de la forme $F(x;\, y) = 0$, où $F(x;\, y)$ est une expression algébrique dans laquelle apparaissent à la fois x et y, on parle de *forme implicite*. Dans une telle situation, à une valeur de x peuvent correspondre plusieurs valeurs différentes de y (et vice versa). L'expression $F(x;\, y) = 0$ est parfois appelée *équation de contrainte*, ou simplement *contrainte*.
- Si l'équation est de la forme $y = f(x)$, où f est une expression dépendant uniquement de x, telle qu'à chaque valeur de x ne correspond qu'une seule valeur de y, on parle de *forme explicite*.

2.1.8 Illustration : On appelle *lentille optique* tout volume formé d'une substance réfringente, délimité par deux surfaces, dont l'une au moins est courbe, souvent de forme sphérique. Toute lentille optique est caractérisée par une grandeur φ, appelée distance focale[III]. Les lentilles pour lesquelles $\varphi > 0$ sont dites *convergentes* ; les lentilles pour lesquelles $\varphi < 0$ sont dites *divergentes*. Lorsqu'un objet lumineux, noté A, est placé devant une lentille, à une distance d, celle-ci produit une image de l'objet, notée A', à une distance q. Dans le cas où la lentille est suffisamment mince (*i.e.* son épaisseur est négligeable par rapport à p), il peut être établi que p et q sont liés par l'expression suivante :



$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} .$$

Une telle relation est appelée *loi des lentilles minces* ; elle peut être déduite de schémas du genre de celui de la figure ci-dessus. Dans de tels schémas :

- ◇ la lentille est symbolisée par $\updownarrow$ si elle est convergente, et par $\wr$ si elle est divergente ;
- ◇ F et F' sont des points qui se trouvent à la distance φ du centre O de la lentille ;
- ◇ les traits rouges symbolisent des rayons lumineux issus de l'objet A ; appelés *rayons principaux*, ils obéissent à des règles de construction particulières (telles que suggérées sur le schéma ci-dessus).

Par exemple, pour une lentille de distance focale $\varphi = 200\,\text{mm}$, l'équation des lentilles minces s'écrit :

$$\frac{1}{200\,\text{mm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{2.1.1}$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{200\,\text{mm}} = 0 .$$

Cette dernière équation peut être vue comme une équation de contrainte pour les grandeurs p et q : lorsque l'on fait varier p, alors nécessairement q varie selon la relation ci-dessus ; et *vice versa*. Si l'on cherche à isoler q dans l'équation, on obtient :

$$\frac{1}{200\,\text{mm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p}} .$$

La dernière expression est la forme explicite de l'équation 2.1.1 ; on y voit explicitement la dépendance de q par rapport à p. Noter que l'on pourrait également exprimer p en fonction de q ; on obtiendrait alors :

$$p = \frac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{q}} .$$

2.1.9 Exemples : 1. Soit l'équation :

$$2\,x - y + 2 = 0 .$$

III. La distance focale d'une lentille se note généralement f ; si elle est notée φ ici, c'est afin de ne pas la confondre avec le symbole général d'une fonction mathématique.

Cette équation est une forme implicite, vu qu'elle a l'allure $F(x;\,y) = 0$, où $F(x;\,y) = 2\,x - y + 2$. Lorsque la quantité y est passée du côté droit de l'égalité, l'équation devient une forme explicite (dans laquelle, à chaque valeur de x correspond une unique valeur de y) :

$$2\,x + 2 = y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 2\,x + 2\,.$$

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, ces équations décrivent ce que l'on appelle une *droite*. Pour s'en convaincre, il suffit de revenir à la définition de ce qu'est une *droite* : un ensemble de points, dans $\mathbb{R}^2$, forme une *droite* si le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de n'importe quel point $P(x;\,y)$ de l'ensemble peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, avec $\overrightarrow{AP} = t\,\vec{v}$, $A(x_0;\,y_0)$ étant un point de l'ensemble, $\vec{v}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^2$, fixe, non nul, et t un nombre réel ; $\vec{v}$ est ce que l'on appelle un *vecteur directeur* de la droite en question et t un *paramètre* ; l'équation $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ se note concrètement :

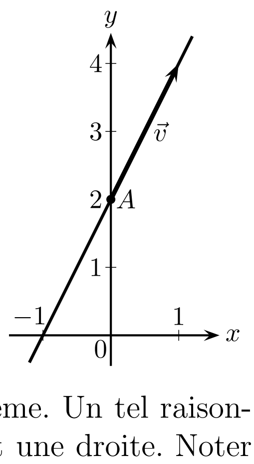
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

expression qui peut être récrite sous la forme d'un système de deux équations :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x\,t \\ y = y_0 + v_y\,t \end{cases},$$

où v_x et v_y sont les composantes selon x et selon y, respectivement, de $\vec{v}$. Revenons maintenant à la forme explicite $y = 2\,x + 2$; tout couple $(x;\,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant cette forme obéit également à l'équation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$



pour le voir, il suffit de récrire cette dernière expression sous la forme d'un système de deux équations :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2\,t \end{cases},$$

puis d'injecter la première équation du système dans la deuxième. Un tel raisonnement montre que la relation $y = 2\,x + 2$ décrit effectivement une droite. Noter que :

◇ les équations du système ci-dessus, dans lesquelles apparaît le paramètre t, portent le nom d'*équations paramétriques* de la droite,

◇ les équations $y = 2\,x + 2$ et $2\,x - y + 2 = 0$ sont appelées *équations cartésiennes*.

Observer, pour terminer, les éléments plus généraux suivants :

- ◇ une même droite peut être décrite au moyen de différents points et différents vecteurs directeurs : la droite générée par le point $A'(-1;\,0)$ et le vecteur directeur $\vec{w}$, ayant pour composantes $w_x = -2$ et $w_y = -4$, est exactement la même que celle générée par le point $A(0;\,2)$ et le vecteur $\vec{v}$, ayant pour composantes $v_x = 1$ et $v_y = 2$;
- ◇ le rapport $\frac{v_y}{v_x}$ porte le nom de *pente* de la droite ; il se note généralement m ; il ne dépend pas du choix du vecteur directeur de la droite en question ; dans la forme cartésienne explicite de la droite, il apparaît comme facteur multiplicatif de x.

Dans la situation présente, $m = \frac{2}{1} = 2$; ce nombre correspond effectivement au facteur devant x dans l'équation cartésienne $y = 2\,x + 2$.

2. Considérons à nouveau l'équation :

$$x^2 + y^2 \;=\; 4\,,$$

qui, rappelons-le, décrit un cercle, dans $\mathbb{R}^2$, de rayon 2 et dont le centre est à l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy. En passant le nombre 4 du côté gauche de l'égalité, il vient :

$$x^2 + y^2 - 4 \;=\; 0\;;$$

cette expression est une forme implicite, vu qu'elle a l'allure $F(x;\,y) = 0$, où $F(x;\,y) = x^2 + y^2 - 4$. Cherchons maintenant à isoler y :

$$x^2 + y^2 \;=\; 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 \;=\; 4 - x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; \pm\sqrt{4 - x^2}\;;$$

il y a manifestement non pas une forme explicite, mais deux :

$$y \;=\; \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{et} \qquad y \;=\; -\sqrt{4 - x^2}\;;$$

la première correspond au demi-cercle qui se trouve au-dessus de l'axe Ox, la deuxième au demi-cercle qui se trouve en dessous ; deux formes explicites sont donc nécessaires pour décrire le cercle dans son intégralité. Noter que le cercle en question peut aussi être caractérisé par le système d'équations suivant, dans lequel interviennent des fonctions trigonométriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\cos(t) \\ y &=& 2\sin(t) \end{array}\right.,$$

t étant un nombre réel appelé *paramètre*. En effet, comme $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$ (*cf.* section C.8 de l'annexe C), alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \;&=\; \big(2\cos(t)\big)^2 + \big(2\sin(t)\big)^2 \;=\; 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) \\ &=\; 4\,\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) \;=\; 4\,, \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la forme implicite donnée plus haut.

2.1.10 Remarques : • Lorsqu'une ligne est décrite par un ensemble d'équations dans lesquelles intervient un paramètre, on dit que la ligne en question est donnée sous *forme paramétrique* ; les équations en question sont appelées *équations paramétriques*.

- Les formes paramétriques sont fréquemment utilisées en mécanique, dans la description de la trajectoire d'un point matériel ; le paramètre correspond généralement au temps qui s'écoule.
- Parmi les lignes de $\mathbb{R}^2$ données par une équation de la forme $F(x;\, y) = 0$, toutes ne peuvent pas être décrites par une seule forme explicite $y = f(x)$: si l'on privilégie la forme explicite, on se retrouve avec plusieurs expressions, et si l'on cherche à n'avoir qu'une seule équation, on se retrouve avec une forme implicite. Dans certains cas, la réduction à une seule forme explicite est néanmoins possible ; et ce en introduisant un nouveau système de coordonnées.

2.1.11 Définition : Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $P(x_P;\, y_P)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Appelons r_P la distance entre l'origine O et le point P, et θ_P l'angle entre la demi-droite partant de O et suivant l'axe x en direction de l'infini (et non moins l'infini), et le segment $\overline{OP}$. Les nombres r_P et θ_P sont appelés *coordonnées polaires* du point P. La demi-droite commençant en O et suivant l'axe x en direction de l'infini est notée Or et est appelée *axe polaire* ; l'angle θ_P porte le nom d'*angle polaire*.

2.1.12 Remarques : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et Or l'axe polaire associé à Oxy (*i.e.* l'axe confondu avec la droite Ox).

- Soit $(x;\, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$, r sa distance par rapport à O et θ son angle polaire. En faisant varier θ entre 0 compris et 2π non compris, on couvre toutes les directions possibles ; aussi, en faisant varier r entre 0 compris et ∞ non compris, on couvre toutes les distances possibles. L'ensemble :

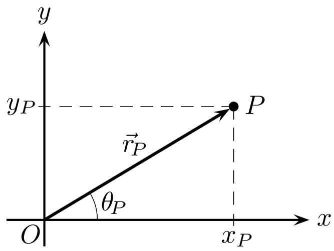
  $$\big\{(r;\, \theta) \,\big|\, 0 \leqslant r < \infty,\, 0 \leqslant \theta < 2\pi\big\}$$

  correspond donc au plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dans son intégralité. Ainsi, tout point $P \in \mathbb{R}^2$ est complètement caractérisé par la donnée des deux grandeurs réelles $r_P \in [0;\, \infty[$ et $\theta_P \in [0;\, 2\pi[$, où r_P est la distance entre O et P et θ_P l'angle polaire de P. Noter que r_P ne peut de toute façon jamais être négative, vu qu'elle correspond à une distance.
- Dans le système des coordonnées polaires, l'origine O est un point particulier ; il s'agit de l'unique point de $\mathbb{R}^2$ qui peut être décrit au moyen de plusieurs (et en fait d'une infinité d') angles polaires différents. S'il en est ainsi, c'est en raison du fait que sa distance par rapport à l'origine, *i.e.* par rapport à lui-même, est nulle.
- Soit P un point de $\mathbb{R}^2$ différent de l'origine $O(0;\, 0)$. Si l'on connaît son angle polaire θ_P et sa distance r_P par rapport à l'origine, il est possible de retrouver

ses coordonnées cartésiennes x_P et y_P, grâce aux équations trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} x_P &= r_P \cos(\theta_P) \\ y_P &= r_P \sin(\theta_P) \end{cases} ,$$

où $\sin(\theta_P)$ et $\cos(\theta_P)$ désignent respectivement le sinus et le cosinus de l'angle θ_P (*cf.* section C.8 de l'annexe C). En effet, en regardant la figure ci-contre, on voit que $\frac{x_P}{r_P} = \cos(\theta_P)$ et $\frac{y_P}{r_P} = \sin(\theta_P)$, où $r_P = \|\vec{r}_P\|$. Réciproquement, si l'on connaît les coordonnées cartésiennes x_P et y_P de P, il est possible de trouver ses coordonnées polaires, grâce aux équations suivantes :



$$\begin{cases} r_P &= \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2} \\ \operatorname{tg}(\theta_P) &= \frac{y_P}{x_P} \end{cases} ,$$

où $\operatorname{tg}(\theta_P)$ désigne la tangente de l'angle θ_P ; elle est définie par la relation $\operatorname{tg}(\theta_P) = \frac{\sin(\theta_P)}{\cos(\theta_P)}$. La première équation du système, $r_P = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}$, n'est rien d'autre qu'une application du théorème de Pythagore ; quant à la deuxième, $\operatorname{tg}(\theta_P) = \frac{y_P}{x_P}$, elle se déduit du premier système d'équations, mentionné plus haut, en divisant $y_P = \sin(\theta_P)$ par $x_P = \cos(\theta_P)$. Noter les deux faits suivants :

◇ Si la coordonnée x_P de P est nulle, alors $\operatorname{tg}(\theta_P)$ n'est pas définie. L'angle θ_P cependant existe : il vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, vu que P se trouve alors sur l'axe Oy.

◇ Deux angles θ et ϑ tels que $\vartheta = \theta + \pi$ ont la même tangente. De fait, deux points distincts, ayant des angles polaires θ et ϑ distincts, peuvent être tels que $\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\vartheta)$; les deux points $P(x_P = 1\,;\ y_P = 2)$ et $Q(x_Q = -1\,;\ y_Q = -2)$ sont dans cette situation : $\operatorname{tg}(\theta_P) = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \operatorname{tg}(\theta_Q)$. Lors de la recherche de l'angle polaire θ_P d'un point P à partir de la relation $\operatorname{tg}(\theta_P) = \frac{y_P}{x_P}$, il convient alors d'observer une certaine vigilance : la valeur que donne la machine à calculer, grâce à la touche « $\tan^{-1}$ » (qui est la *fonction* Arctg, *cf.* section C.9 de l'annexe C), est toujours comprise dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; à cette valeur, qui ne correspond pas forcément à l'angle correct, il est nécessaire d'ajouter éventuellement π ou même $2\,\pi$, afin que l'angle cherché soit dans l'intervalle $[0\,;\,2\,\pi[$ d'une part, et qu'il soit compatible avec les signes des coordonnées cartésiennes x_P et y_P de P d'autre part.

2.1.13 Exemples : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et Or l'axe polaire associé à Oxy.

1. Soit $P(x_P = -1\,;\ y_P = \sqrt{3}\,)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Ses coordonnées polaires sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} r_P &= \sqrt{\big(-1\big)^2 + \big(\sqrt{3}\,\big)^2} \\ \operatorname{tg}(\theta_P) &= \frac{\sqrt{3}}{-1} \end{cases} .$$

Comme la coordonnée x_P est négative et la coordonnée y_P positive, alors $\theta_P = \operatorname{Arctg}\big(-\sqrt{3}\big) + \pi = \frac{2\pi}{3}$ (et non $\operatorname{Arctg}\big(-\sqrt{3}\big) + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$). Ainsi :

$$P\big(r_P = 2\,;\ \theta_P = \tfrac{2\pi}{3}\big)\,.$$

2. Soit $Q\big(r_Q = 3\,;\ \theta_Q = \frac{7\pi}{4}\big)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Ses coordonnées cartésiennes sont données par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_Q & = & 3\cos\big(\frac{7\pi}{4}\big) \\ y_Q & = & 3\sin\big(\frac{7\pi}{4}\big) \end{array}\right. .$$

Comme $\cos\big(\frac{7\pi}{4}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\big(\frac{7\pi}{4}\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors :

$$Q\big(x_Q = \tfrac{3}{\sqrt{2}}\,;\ y_Q = -\tfrac{3}{\sqrt{2}}\big)\,.$$

Les considérations faites précédemment sur les grandeurs x et y, en particulier sur les différents types d'expressions qui les lient, ainsi que les figures géométriques qui en résultent, s'appliquent également aux grandeurs polaires r et θ : l'ensemble de tous les couples $(r;\, \theta)$, où les grandeurs r et θ sont liées par une relation (une équation ou une inéquation), ne correspond pas au plan euclidien dans son intégralité ; selon le type de relation, on a affaire à un domaine de $\mathbb{R}^2$, à une ligne, à un point, etc.

Toute équation liant les grandeurs r et θ est appelée *équation polaire*. Considérons une telle équation.

- Si l'équation a l'allure $F(r;\, \theta) = 0$, on parle de *forme polaire implicite*.
- Si l'équation a l'allure $r = f(\theta)$, où $f(\theta)$ est une expression dépendant uniquement de θ, telle qu'à chaque valeur de θ ne corresponde qu'une seule valeur de r, on parle de *forme polaire explicite*.

2.1.14 Exemples : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et Or l'axe polaire associé à Oxy.

1. Reprenons l'équation $y = 2\,x + 2$, décrivant une droite de pente $m = 2$ et passant par le point $(0;\, 2)$. En remplaçant y par $r\sin(\theta)$ et x par $r\cos(\theta)$, il vient :

$$r\sin(\theta) \;=\; 2\,r\cos(\theta) + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad r\sin(\theta) - 2\,r\cos(\theta) - 2 \;=\; 0\,,$$

cette dernière équation est la forme polaire implicite de la droite. La forme polaire explicite s'obtient en isolant r :

$$\begin{aligned} r\sin(\theta) - 2\,r\cos(\theta) - 2 \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad r\,\big(\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\big) \;=\; 2 \\ &\Leftrightarrow \qquad r \;=\; \frac{2}{\sin(\theta) - 2\cos(\theta)}\,. \end{aligned}$$

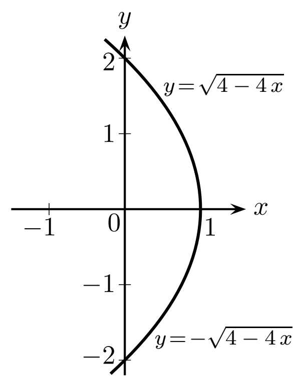
2. Reprenons l'équation $x^2 + y^2 = 4$, décrivant le cercle centré en O et de rayon 2. Le côté gauche de l'égalité n'est rien d'autre que r^2 ; en effet, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2$, vu que r est une grandeur toujours positive. L'équation $x^2 + y^2 = 4$ devient alors $r^2 = 4$, ce qui est équivalent à :
$$r = 2\,;$$
cette expression est la forme polaire explicite du cercle. Pour ce qui est de la forme implicite, elle se déduit immédiatement de la forme explicite :
$$r - 2 = 0\,.$$
Manifestement, ce qui n'est pas possible en coordonnées cartésiennes devient possible en coordonnées polaires : une unique forme explicite pour décrire le cercle en question. Noter que dans cette forme, θ n'intervient pas ; r demeure constant quel que soit θ.

3. Soit l'équation polaire :
$$r + r\cos(\theta) = 2\,.$$
En passant le 2 du côté gauche de l'égalité, il vient :
$$r + r\cos(\theta) - 2 = 0\,,$$
ce qui est la forme polaire implicite. La forme polaire explicite s'obtient en isolant r dans la forme polaire implicite :
$$r + r\cos(\theta) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad r\big(1 + \cos(\theta)\big) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{2}{1 + \cos(\theta)}\,.$$
Cherchons à présent l'expression $F(x; y) = 0$ associée à l'équation polaire donnée ; à cet effet, utilisons les égalités $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $x = r\cos(\theta)$:
$$r + r\cos(\theta) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x\,;$$
élevons cette dernière équation au carré :
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x \quad\Rightarrow\quad x^2 + y^2 = (2 - x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + y^2 = 4 - 4\,x + x^2\,,$$
puis simplifions l'expression obtenue :
$$x^2 + y^2 = 4 - 4\,x + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = 4 - 4\,x \quad\Leftrightarrow\quad 4\,x + y^2 - 4 = 0\,;$$
cette dernière équation est l'expression cherchée ; il s'agit d'une forme implicite. Pour éviter toute confusion avec la forme polaire implicite, on parle volontiers de *forme cartésienne implicite*, ou d'*équation cartésienne implicite*. En isolant y dans cette expression, il vient :
$$4\,x + y^2 - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = 4 - 4\,x \quad\Leftrightarrow\quad y = \pm\sqrt{4 - 4\,x}\,.$$

Comme dans le cas du cercle, il y a non pas une forme explicite, mais deux :

$$y = \sqrt{4-4\,x} \qquad \text{et} \qquad y = -\sqrt{4-4\,x}\,.$$

Pour éviter toute confusion avec la forme polaire explicite, on parle volontiers de *formes cartésiennes explicites*, ou d'*équations cartésiennes explicites*. La figure correspondant à ces expressions est une parabole ; elle est dite *couchée*, en raison du fait que son axe de symétrie est parallèle à l'axe Ox (et même confondu avec Ox dans le cas présent).



2.2 Notion de fonction

Toute ligne dans $\mathbb{R}^2$ peut être décrite de multiples façons, à l'aide de différentes expressions algébriques liant deux grandeurs réelles (*cf.* section précédente). Parmi ces expressions, s'il y en a une (au moins) qui est une forme explicite (*i.e.* s'il y en a une dans laquelle l'une des grandeurs impliquées dépend explicitement de l'autre), c'est en général elle qui est plébiscitée ; et pour cause : la dépendance concrète d'une des grandeurs par rapport à l'autre facilite considérablement l'étude et la caractérisation de la ligne en question.

Dire qu'une ligne dans $\mathbb{R}^2$ est décrite au moyen d'une forme explicite, c'est dire qu'elle est donnée par une *fonction.* Étudier les caractéristiques de la ligne en question revient donc à étudier la fonction qui la décrit. Parmi les objectifs du présent ouvrage, l'un d'eux consiste précisément à fournir les outils permettant de caractériser une fonction donnée.

2.2.1 Définition : Soient D et E deux ensembles non vides. On appelle *fonction* de D dans E toute correspondance f qui, à chaque élément x de D fait correspondre exactement un (*i.e.* un et un **unique**) élément y de E. On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

D est appelé *ensemble de départ* ou *domaine de définition* de f, E porte le nom d'*ensemble d'arrivée* ; x est appelé *variable indépendante* et y *variable dépendante*. Dans le cas où D et E sont des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, on dit que f est une *fonction réelle.*

2.2.2 Exemple : La correspondance :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \end{array}$$

assigne à chaque élément $x \in \mathbb{R}$ un unique élément $y \in \mathbb{R}$. Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longmapsto & 0^2 = 0 \\ 1 & \longmapsto & 1^2 = 1 \\ -\frac{3}{2} & \longmapsto & \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ \sqrt{3} & \longmapsto & \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \\ \pi & \longmapsto & \pi^2 \\ & \vdots & \end{array}$$

2.2.3 Illustrations : 1. Reprenons l'illustration 2.1.8, traitant de la loi des lentilles minces. La forme explicite qui y a été obtenue, dans laquelle q dépend explicitement de p, peut être vue comme une fonction réelle ; elle peut être notée comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} f \ : &]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}[\smallsetminus\{0\,\text{mm}\,;\,200\,\text{mm}\} & \longrightarrow &]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}[\\ & p & \longmapsto & q = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

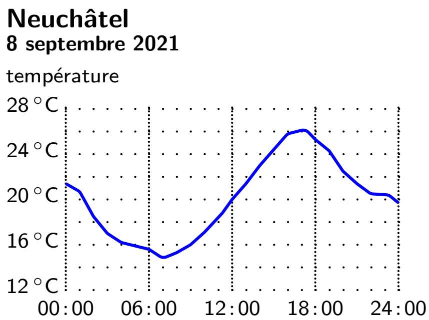
À chaque élément p de l'ensemble de départ correspond exactement un unique élément q dans l'ensemble d'arrivée. Noter que p et q peuvent être aussi bien des grandeurs positives que négatives.

◇ Dans le cas où p est positive, l'objet est dit *réel*,

◇ Dans le cas où p est négative, l'objet est dit *virtuel* ; une telle situation se produit lorsque des rayons lumineux semblent converger vers un point qui se trouve derrière la lentille, mais en réalité n'y convergent pas en raison du fait qu'ils sont déviés par la lentille.

Les observations qui viennent d'être formulées s'appliquent aussi à la grandeur q ; dans ce cas, on parle d'image *réelle* ou d'image *virtuelle*.

2. La figure ci-contre illustre la température de l'air en ville de Neuchâtel (en Suisse) durant la journée du 8 septembre 2021. Cette température, qui évolue au cours de la journée, peut être vue comme une fonction du temps. En notant T la température et t le temps qui s'écoule, on peut écrire :



$$\begin{array}{rrcl} f : & [0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[& \longrightarrow & [12\,^\circ\text{C}\,;\,28\,^\circ\text{C}] \\ & t & \longmapsto & T = f(t) \end{array}$$

où f est la fonction du temps t décrivant la température T. À chaque instant t de l'ensemble de départ correspond exactement une unique température T dans l'ensemble d'arrivée. Noter que l'ensemble d'arrivée a été choisi ici par rapport aux valeurs extrêmes données verticalement sur le diagramme ci-dessus.

2.2.4 Remarques :

- Dans la définition 2.2.1, la quantité $f(x)$ désigne une expression qui dépend de la variable x. Cette variable est fréquemment appelée *argument* de f.
- Le domaine de défintion D d'une fonction réelle f est fréquemment noté D_f. Sauf indication spécifique, D_f est le sous-ensemble de tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) \in \mathbb{R}$. Si une fonction réelle est définie comme étant une somme, différence, produit, quotient, *composition*... de plusieurs fonctions réelles plus élémentaires, son domaine de définition dépend des domaines de définition de chacune des fonctions plus élémentaires (*cf.* section 2.5 du présent chapitre).
- Écrire $f\colon D \to E$, c'est dire que f est une fonction définie dans l'ensemble D et qui prend ses valeurs dans l'ensemble E.
- Dire qu'une fonction réelle f est définie dans un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ revient à dire que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in D$. En particulier, dire qu'une fonction réelle $f : D \to E$ est définie dans un voisinage V d'un point $a \in D$ revient à dire que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$. Il va alors sans dire que $V \subset D$.
- Afin de bénéficier d'un cadre suffisamment large, l'ensemble d'arrivée E d'une fonction réelle f sera souvent considéré comme étant $\mathbb{R}$ dans son intégralité.
- Toute suite de nombres (u_n) peut être vue comme une fonction f dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$; le terme général de la suite peut alors s'écrire $u_n = f(n)$.

2.2.5 Définition : Soit $f\colon D \to E$ une fonction réelle. On appelle *ensemble image* de f, et on note I_f, l'ensemble de toutes les valeurs $y \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$:

$$I_f \;=\; \big\{ y \in \mathbb{R} \,\big|\, \text{il existe } x \in D \text{ tel que } y = f(x) \big\}\,.$$

2.2.6 Exemples :

1. Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = x^3$. Son domaine de définition est :

   $$D_f \;=\; \mathbb{R}\,;$$

   en effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la grandeur $y = x^3$ est un nombre réel. L'ensemble image de f est :

   $$I_f \;=\; \mathbb{R}\,;$$

   en effet, $y = x^3$ balaie toutes les valeurs réelles à mesure que x balaie toutes les valeurs de $D_f = \mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Son domaine de définition est :

   $$D_f \;=\; \mathbb{R}\smallsetminus\{0\} \;=\; \mathbb{R}^*\,;$$

   en effet, la grandeur $y = \frac{1}{x^2}$ est un nombre réel quel que soit $x \in \mathbb{R}$, sauf lorsque x est nulle. L'ensemble image de f est :

   $$I_f \;=\; \mathbb{R}_+^* \;\; (= \,]0;\, \infty[\,)\,;$$

en effet, x^2 ne balaie que les valeurs réelles strictement positives (*i.e.* les valeurs de $\mathbb{R}^*_+$) à mesure que x balaie toutes les valeurs de $D_f = \mathbb{R}^*$; de fait, $\frac{1}{x^2}$ balaie toutes les valeurs strictement positives à mesure que x balaie toutes les valeurs de $D_f = \mathbb{R}^*$.

2.2.7 Illustrations : 1. Reprenons la première des illustrations 2.2.3. La fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\,\smallsetminus\{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\} & \longrightarrow &]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\\ & & p & \longmapsto & q = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

admet pour domaine de définition l'ensemble D_f donné par :

$$D_f = \,]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\,\smallsetminus\{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\}\ ;$$

si l'élément 200 mm ne peut pas être pris en compte, c'est en raison du fait qu'il annule le dénominateur $\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}$ dans l'expression de q ; aussi, si l'élément 0 mm n'est pas admis, c'est en raison de la fraction $\frac{1}{p}$ présente au dénominateur de cette même expression ; noter, du reste, qu'il n'est techniquement pas possible de placer un objet à l'endroit même où se trouve la lentille (à moins que cet objet soit en fait une image produite par une autre lentille placée devant la lentille dont il est question). Pour ce qui est de l'ensemble image (à ne pas confondre ici avec l'image de l'objet), il s'agit de l'ensemble I_f donné par :

$$I_f = \,]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\,\smallsetminus\{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\}\ ;$$

ce dernier se déduit du fait que la relation entre p et q est parfaitement symétrique : l'expression de q en fonction de p a exactement la même allure que l'expression de p en fonction de q (*cf.* illustration 2.1.8).

2. Reprenons la deuxième des illustrations 2.2.3. La fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,\mathrm{h}\,00\,;\,24\,\mathrm{h}\,00[& \longrightarrow & [12\,^\circ\mathrm{C}\,;\,28\,^\circ\mathrm{C}] \\ & t & \longmapsto & T = f(t) \end{array}$$

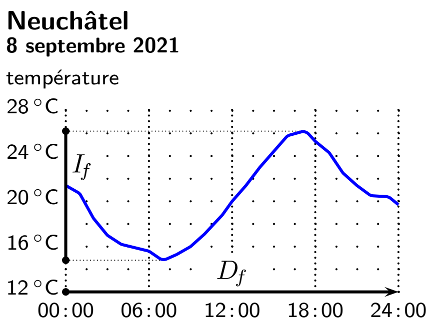
admet pour domaine de définition l'ensemble D_f donné par :

$$D_f = [0\,\mathrm{h}\,00\,;\,24\,\mathrm{h}\,00[\,,$$

et pour ensemble image l'ensemble I_f donné par :

$$I_f = [14{,}8\,^\circ\mathrm{C}\,;\,26{,}2\,^\circ\mathrm{C}]\,.$$

Ces ensembles se déduisent directement du diagramme ci-contre.

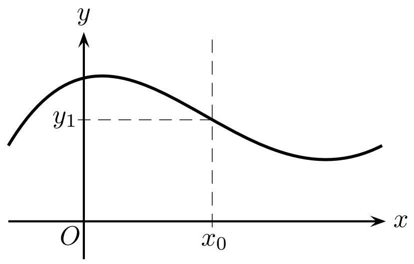


2.2.8 Remarque : L'ensemble image d'une fonction réelle $f\colon D \to E$ peut dépendre de l'ensemble de départ D, mais pas forcément systématiquement. Par exemple, la fonction réelle f, donnée par $f(x) = \sin(x)$ (*cf.* section C.8 de l'annexe C), a le même ensemble image $[-1;\, 1]$ que le domaine de départ soit $\mathbb{R}$ ou $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$; mais dans le cas où l'ensemble de départ est $\left[0\,;\, \frac{\pi}{6}\right]$, l'ensemble image correspondant est seulement $\left[0\,;\, \frac{1}{2}\right]$.

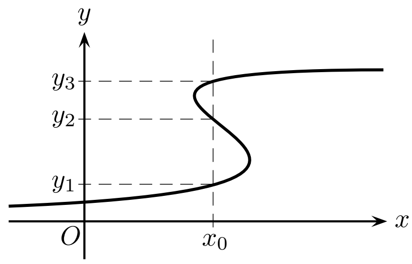
2.2.9 Définition : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et $f\colon D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, une fonction réelle. On appelle *graphe* de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué de tous les couples $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $y = f(x)$ et $x \in D$.

2.2.10 Remarques :

- Le graphe d'une fonction réelle f peut être une ou plusieurs lignes, un ensemble de points... mais pas un domaine (*i.e.* une surface) de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat, si intuitif soit-il, ne se démontre pas aisément ; la preuve nécessite des outils dont la complexité sort du cadre de la présente étude.
- Le graphe d'une fonction réelle peut avoir l'allure de la figure de gauche ci-dessous, mais aucunement celle de la figure de droite ; et pour cause : dans la figure de droite, à une valeur donnée de x peuvent correspondre plusieurs valeurs différentes de y, ce qui n'est pas compatible avec la définition d'une fonction.



ligne correspondant à une fonction

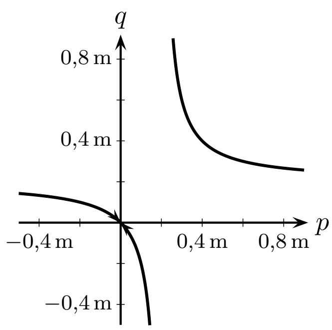


ligne ne correspondant pas à une fonction

2.2.11 Illustrations :

1. Reprenons la première des illustrations 2.2.3. Un échantillon du graphe de la fonction f, dont l'expression est (rappelons-le) :

$$q = \frac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p}}\,,$$



est représenté sur la figure ci-contre. Les flèches autour de l'origine servent à indiquer que la fonction est définie autour de 0, mais pas en 0.

2. Reprenons la deuxième des illustrations 2.2.3. Dans cette illustration, le diagramme donné n'est rien d'autre que le graphe de la fonction donnée par $T = f(t)$.

2.3 Fonctions particulières

2.3.1 Définition : On appelle *fonction identiquement nulle* toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$.

2.3.2 Définition : On appelle *partie entière*, et on note E, la fonction réelle qui, à chaque $x \in \mathbb{R}$, assigne l'unique nombre entier n satisfaisant $x - 1 < n \leqslant x$. Cette fonction admet pour domaine de définition l'ensemble $\mathbb{R}$ et pour ensemble image l'ensemble $\mathbb{Z}$.

2.3.3 Notation : La partie entière d'un nombre réel x se note $\mathrm{E}(x)$. Une telle écriture a déjà pu être observée dans le chapitre précédent.

2.3.4 Exemple :

- $\mathrm{E}(2) = 2$
- $\mathrm{E}\big(\frac{9}{4}\big) = 2$
- $\mathrm{E}\big(\sqrt{2}\,\big) = 1$
- $\mathrm{E}(\pi) = 3$
- $\mathrm{E}\big(-\frac{16}{5}\big) = -4$
- $\mathrm{E}(-14{,}3) = -15$

2.4 Caractéristiques d'une fonction réelle

2.4.1 Injectivité, surjectivité et bijectivité

2.4.1 Définitions : Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$).

- La fonction f est dite *injective* si pour tous $x_1, x_2 \in D$:

$$x_1 \neq x_2 \qquad \text{implique} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)\,,$$

  ou, de manière équivalente :

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{implique} \qquad x_1 = x_2\,.$$

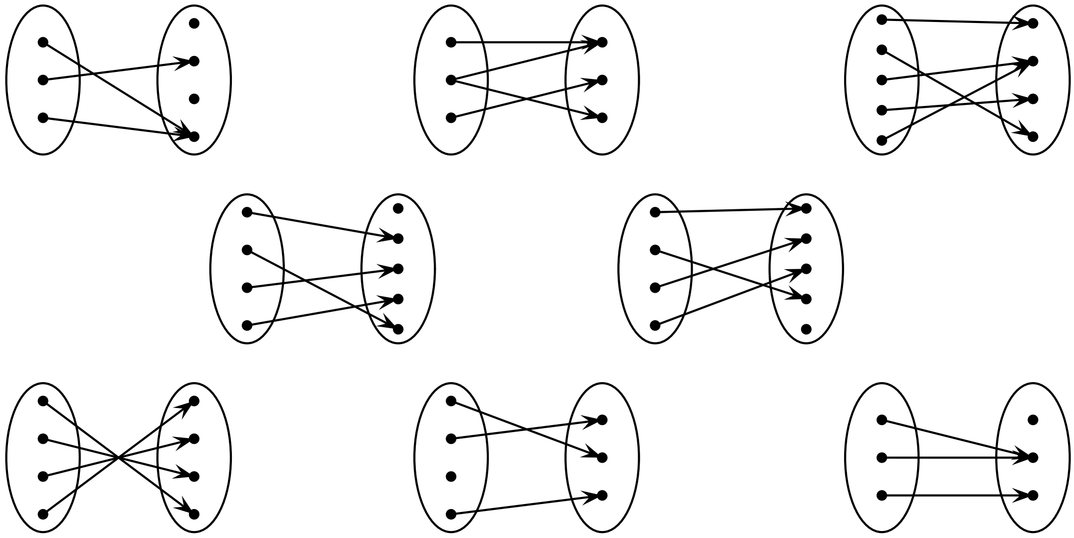
- La fonction f est dite *surjective* si :

$$f(D) = I_f = E\,,$$

  c'est-à-dire si l'ensemble d'arrivée correspond à l'ensemble image I_f de f.
- La fonction f est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, *i.e.* si pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

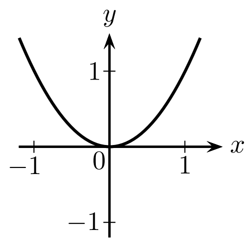
2.4.2 Remarque : Toute fonction réelle $f : D \to I_f$ dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble image (*i.e.* pour laquelle $f(D) = I_f$) est surjective. Pour qu'elle soit bijective, il suffit donc qu'elle soit injective.

2.4.3 Exercice : Dans chacun des cas suivants, déterminer si la correspondance indiquée représente une fonction ou non. Si tel est le cas, préciser si la fonction est injective, surjective, bijective, ou ni injective ni surjective[IV].



2.4.4 Exemples : 1. Soit :

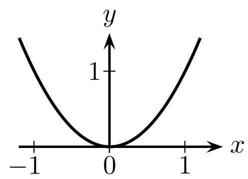
$$\begin{array}{rccl} f_1 \colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \,. \end{array}$$



f_1 n'est pas injective ; en effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \neq x$; et pourtant $f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$. f_1 n'est pas surjective non plus, car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $f_1(x) = x^2 \in \mathbb{R}_-^*$; autrement dit, les valeurs négatives de y ne sont pas atteintes par f.

2. Soit :

$$\begin{array}{rccl} f_2 \colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \,. \end{array}$$



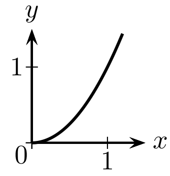
f_2 n'est pas injective, vu que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \neq x$ et pourtant $f_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x)$. f_2 est surjective, car $f_2(\mathbb{R}) = I_{f_2} = \mathbb{R}_+$; tous les nombres réels positifs (y compris le nombre zéro) sont atteints par f.

3. Soit :

$$\begin{array}{rccl} f_3 \colon & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \,. \end{array}$$

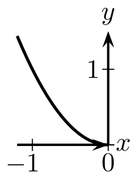
IV. *Réponses* : Première ligne, de gauche à droite : fonction ni injective ni surjective, pas une fonction, fonction surjective uniquement ; deuxième ligne, de gauche à droite : fonction injective uniquement, fonction injective uniquement ; troisième ligne, de gauche à droite : fonction bijective, pas une fonction, fonction ni injective ni surjective.

f_3 est injective, vu que $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$. f_3 est également surjective, car $f_3(\mathbb{R}_+) = I_{f_3} = \mathbb{R}_+$.



4. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f_4 \colon & \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & y = x^2 \,. \end{array}$$



f_4 est injective, vu que $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$. f_4 est également surjective, car $f_4(\mathbb{R}_-) = I_{f_4} = \mathbb{R}_+$.

2.4.5 Illustrations : 1. Reprenons la fonction f de la première des illustrations 2.2.3 :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \left]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}\right[\smallsetminus \{0\,\text{mm}\,;\,200\,\text{mm}\} & \longrightarrow & \left]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}\right[\\ & & p & \longmapsto & q = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas bijective. Certes, elle est injective (vu que $f(x_1) \neq f(x_2)$ si $x_1 \neq x_2$, où $x_1, x_2 \in D_f$ (*cf.* graphe de f dans la première des illustrations 2.2.11)) ; elle n'est toutefois pas surjective, vu que son ensemble d'arrivée ne coïncide pas avec son ensemble image. Pour la rendre surjective, et ainsi bijective, il suffit de restreindre son ensemble d'arrivée à son ensemble image.

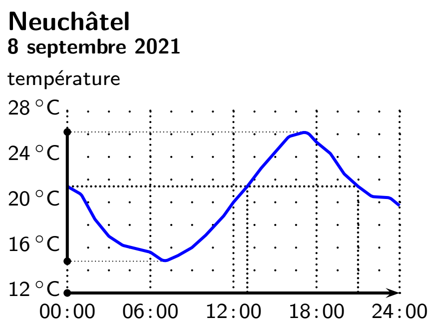
2. Reprenons la fonction f de la deuxième des illustrations 2.2.3.

$$\begin{array}{rccc} f : & [0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[& \longrightarrow & [12\,^\circ\text{C}\,;\,28\,^\circ\text{C}] \\ & t & \longmapsto & T = f(t) \end{array}$$

Cette fonction f n'est pas bijective. Et pour cause :

▷ f n'est pas injective ; en effet, dans la journée du 8 septembre 2021, il existe plusieurs instants différents auxquels correspond une seule et même température (par exemple 21,4 °C à 0 h 00, 13 h 00 et 21 h 00) ;

▷ f n'est pas surjective ; en effet, son ensemble d'arrivée ne coïncide pas avec son ensemble image.



2.4.2 Parité

2.4.6 Définitions : Soit $f \colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle.

- f est dite *paire* si :

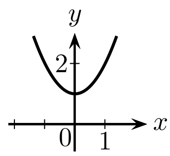
$$f(-x) = f(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in D\,.$$

- f est dite *impaire* si :

$$f(-x) = -f(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in D\,.$$

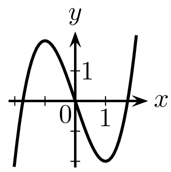
2.4.7 Remarques :
- Le domaine de départ D de toute fonction f paire est nécessairement symétrique par rapport à 0 : si $x_0 \in D$, alors nécessairement $-x_0 \in D$; si $x_0 \notin D$, alors nécessairement $-x_0 \notin D$. Il en est de même dans le cas de toute fonction impaire.
- Le graphe d'une fonction paire présente une symétrie axiale d'axe Oy (où Oy est l'un des axes du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy de $\mathbb{R}^2$) ; le graphe d'une fonction impaire présente une symétrie centrale, de centre O (l'origine).
- L'étude d'une fonction f paire peut être limitée à l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$, où D_f est le domaine de définition de f ; la propriété $f(-x) = f(x)$ permet, en effet, de retrouver toutes les caractérisitiques de f dans $D_f \cap \mathbb{R}_-$ à partir des caractéristiques présentes dans $D_f \cap \mathbb{R}_+$. Une telle observation s'applique également au cas d'une fonction impaire.
- Aucune fonction paire ne peut être bijective, à moins que son domaine de départ ne se limite à $\{0\}$; la propriété $f(-x) = f(x)$ rend, en effet, toute fonction paire non injective.

2.4.8 Exemples :
1. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^2 + 1$ est paire ; en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:



$$f(-x) \;=\; (-x)^2 + 1 \;=\; x^2 + 1 \;=\; f(x)\,.$$

2. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^3 - 3\,x$, est impaire ; en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:



$$f(-x) \;=\; (-x)^3 - 3\,(-x) \;=\; -x^3 + 3\,x \;=\; -(x^3 - 3\,x) \;=\; -f(x)\,.$$

2.4.9 Illustrations :
1. La fonction f donnée dans la première des illustrations 2.2.3 n'est ni paire, ni impaire ; en effet, son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.
2. La fonction f donnée dans la deuxième des illustrations 2.2.3 n'est ni paire, ni impaire ; en cause : son domaine de définition qui n'est pas symétrique par rapport à 0.

2.4.3 Croissance et décroissance

2.4.10 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, définie dans un ensemble $H \subset D$ qui n'est pas réduit à un seul point.

- La fonction f est dite *croissante* (respectivement *strictement croissante*) dans H si, quels que soient $x_1, x_2 \in H$ tels que $x_1 < x_2$:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad \text{(respectivement } f(x_1) < f(x_2)\text{)}.$$

- La fonction f est dite *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) dans H si, quels que soient $x_1, x_2 \in H$ tels que $x_1 < x_2$:

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \qquad \text{(respectivement } f(x_1) > f(x_2)\text{)}.$$

- La fonction f est dite *constante* dans H si, quels que soient $x_1, x_2 \in H$:

$$f(x_1) = f(x_2)\,.$$

2.4.11 Exemples :

1. La fonction réelle f, donnée par $f(x) = x^3$, est strictement croissante dans $\mathbb{R}$; en effet, ${x_1}^3 < {x_2}^3$ quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.
2. La fonction réelle f, donnée par $f(x) = x^2$, est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$. En effet, ${x_1}^2 > {x_2}^2$ quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ tels que $x_1 < x_2$; et ${x_1}^2 < {x_2}^2$ quels que soient $x_1,x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $x_1 < x_2$.

2.4.4 Extrema

2.4.12 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, définie dans un ensemble $H \subset D$ qui n'est pas vide.

- On dit que f *atteint, dans H, son minimum* s'il existe un élément dans H, que l'on note x_m, tel que pour tout $x \in H$:

$$f(x) \geqslant f(x_m)\,.$$

  On dit alors que f *atteint, dans H, son minimum en x_m*. Le nombre réel $m = f(x_m)$ est appelé le *minimum* de f dans H. Quant au couple $(x_m\,;\,m) \in \mathbb{R}^2$, il s'agit des coordonnées du minimum, sur le graphe de f.
- On dit que f *atteint, dans H, son maximum* s'il existe un élément dans H, que l'on note x_M, tel que pour tout $x \in H$:

$$f(x) \leqslant f(x_M)\,.$$

  On dit alors que f *atteint, dans H, son maximum en x_M*. Le nombre réel $M = f(x_M)$ est appelé le *maximum* de f dans H. Quant au couple $(x_M\,;\,M) \in \mathbb{R}^2$, il s'agit des coordonnées du maximum, sur le graphe de f.

2.4.13 Exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^2$, atteint dans $\mathbb{R}$ son minimum en 0 ; en effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \;=\; x^2 \;\geqslant\; 0^2 \;=\; f(0)\,.$$

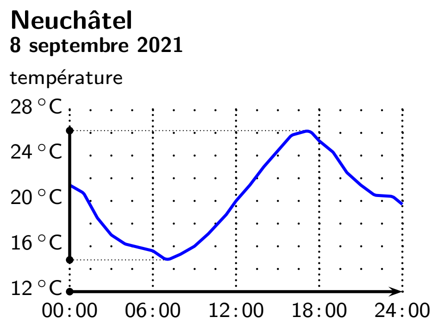
Le nombre $0 = f(0)$ est le minimum de f dans $\mathbb{R}$.

2.4.14 Illustration : Reprenons la fonction f de la deuxième des illustrations 2.2.3.

$$\begin{array}{rcl} f:\ [0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[& \longrightarrow & [12\,°\text{C}\,;\,28\,°\text{C}] \\ t & \longmapsto & T \;=\; f(t) \end{array}$$

Comme le montre son graphe (*cf.* figure ci-dessous), cette fonction atteint, dans l'intervalle $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[$, son minimum et son maximum.

- ◇ Le minimum est atteint aux alentours de 7 h 00 ; la température minimale est alors de 14,8 °C.
- ◇ Le maximum est atteint aux alentours de 17 h 00 ; la température maximale est alors de 26,2 °C.



En outre, la fonction f est :

- ◇ décroissante (et même strictement décroissante) entre 0 h 00 et 7 h 00, ainsi qu'entre 17 h 00 et 24 h 00 (y compris entre 22 h 00 et 23 h 00),
- ◇ croissante (et même strictement croissante) entre 7 h 00 et 17 h 00.

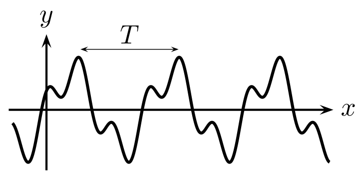
2.4.15 Remarques :

- Il existe des fonctions réelles, définies dans un certain ensemble H, qui atteignent leur minimum (respectivement leur maximum) non pas en un, mais en plusieurs éléments de H (*cf.* illustration précédente).
- Les concepts de croissance, décroissance, minimum et maximum seront illustrés et davantage détaillés dans le chapitre 7.

2.4.5 Périodicité

2.4.16 Définition : Une fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$ est dite *périodique* s'il existe un nombre réel c non nul tel que :

$$f(x+c) \;=\; f(x)\,, \qquad \text{quel que soit } x \in D\,,$$



Le plus petit nombre réel $c > 0$ satisfaisant cette condition, pour autant qu'il existe, est appelé *période* ; il se note généralement T. On dit alors que f est *T-périodique*.

2.4.17 Remarques :

- Le nombre T, évoqué dans la définition précédente, n'existe pas forcément : une fonction réelle f peut être périodique sans qu'elle admette un plus petit nombre $T > 0$ pour lequel $f(x+T) = f(x)$. Comme exemple, prenons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Cette fonction est périodique ; en effet, il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x+c) = f(x)$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par exemple $c = 1$, du fait que $x + 1 \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x + 1 \notin \mathbb{Q}$ si $x \notin \mathbb{Q}$) ; mais il n'existe aucun plus petit nombre $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions *sinus* et *cosinus* (*cf.* section C.8 de l'annexe C) sont toutes les deux 2π-périodique. La fonction *tangente*, elle, est π-périodique.
- Revenons à la définition précédente. S'il existe, le nombre T est lié au nombre c par la relation $c = k\,T$, où $k \in \mathbb{Z}$. En effet, tout $c = k\,T$, où $k \in \mathbb{Z}$, satisfait $f(x + c) = f(x)$:
  - ◇ dans le cas où $k > 0$:

$$\begin{aligned} f(x+c) \;&=\; f(x + k\,T) \;=\; f\big((x + (k-1)\,T) + T\big) \\ &=\; f(x + (k-1)\,T) \;=\; \ldots \;=\; f(x)\,; \end{aligned}$$

  - ◇ dans le cas où $k < 0$:

$$f(x + k\,T) \;=\; f(x + (k+1)\,T) \;=\; \ldots \;=\; f(x)\,;$$

  aussi, si $c \neq k\,T$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors il existe un nombre réel a compris strictement entre 0 et T (*i.e.* $0 < a < T$) tel que $c = m\,T + a$, où $m \in \mathbb{Z}$; dans ce cas, pour au moins un $x \in D$:

$$f(x+c) \;=\; f(x + m\,T + a) \;=\; f\big((x+a) + m\,T\big) \;=\; f(x+a) \;\neq\; f(x)\,,$$

  vu que $0 < a < T$.
- Du point précédent, on déduit immédiatement que le domaine de départ D d'une fonction réelle T-périodique est forcément T-périodique : si x_0 est dans D, alors nécessairement $x_0 + n\,T$, où $n \in \mathbb{Z}$, est dans D aussi ; et si x_0 n'est pas dans D, alors nécessairement $x_0 + n\,T$, où $n \in \mathbb{Z}$, n'est pas dans D également.

2.4.18 Exemples : 1. Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \sin(3\,x)$, où sin désigne la fonction *sinus*. Cette fonction est une fonction T-périodique, de période $T = \frac{2\pi}{3}$. Pour le voir, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x+T) \;=\; f(x) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \sin\big(3\,(x+T)\big) \;=\; \sin(3\,x) \\ &\Leftrightarrow \qquad \sin(3\,x + 3\,T) \;=\; \sin(3\,x)\,, \end{aligned}$$

et de raisonner comme suit : la fonction sinus est 2π-périodique, le plus petit nombre réel $c > 0$ pour lequel $\sin(\alpha + c) = \sin(\alpha)$ existe et vaut $c = 2\,\pi$. Ainsi, par identification, $3\,T = 2\,\pi$, d'où $T = \frac{2\pi}{3}$.

2. Soit f la fonction réelle donnée par $f(t) = A\cos(\omega\,t + \varphi) + b$, où cos désigne la fonction *cosinus*, et $A \neq 0$, $\omega > 0$, φ et b sont des nombres réels fixés. Cette

fonction, appelée communément *fonction cosinus généralisé*, est une fonction T-périodique, où $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pour le voir, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} f(t+T) \;=\; f(t) \quad &\Leftrightarrow \quad A\cos\big(\omega\,(t+T)+\varphi\big)+b \;=\; A\cos(\omega\,t+\varphi)+b \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\big(\omega\,(t+T)+\varphi\big) \;=\; \cos(\omega\,t+\varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\omega\,t+\omega\,T+\varphi) \;=\; \cos(\omega\,t+\varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\omega\,t+\varphi+\omega\,T) \;=\; \cos(\omega\,t+\varphi)\,, \end{aligned}$$

et de raisonner comme suit : la fonction cosinus étant 2π-périodique, le plus petit nombre réel $c > 0$ tel que $\cos(\alpha + c) = \cos(\alpha)$ existe et vaut $c = 2\,\pi$; ainsi, par identification, $\omega\,T = 2\,\pi$, d'où $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2.4.6 Prolongement

2.4.19 Définition : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$, où $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, deux fonctions réelles. Supposons que $D_1 \subset D_2$ et que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_1$. Alors f est appelée *restriction de* g à D_1 ; et g porte le nom de *prolongement de* f.

2.4.7 Définition par morceaux

Considérons une voiture se déplaçant sur une longue route rectiligne. Supposons qu'elle est à l'arrêt, à un feu rouge, jusqu'au temps t_0, et qu'à partir de t_0 elle suit un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Plaçons un axe z le long de la route rectiligne. Comme il n'est pas possible de remonter le temps et que la voiture ne se dédouble pas, sa position sur la route, *i.e.* sur l'axe z, peut être décrite par une fonction réelle f du temps t qui s'écoule : à chaque instant t correspond une unique position $z = f(t)$. Pour écrire cette fonction, une expression ne suffit pas, deux sont nécessaires : une pour les instants antérieurs à t_0, lorsque la voiture se trouve immobile au feu rouge, et occupe donc une certaine position fixe z_0 de l'axe z, et une deuxième pour les instants postérieurs à t_0, lorsque le véhicule subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré, se traduisant par l'expression $z = \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + z_0$, où a est l'accélération de l'automobile. On écrit alors :

$$z \;=\; f(t) \;=\; \begin{cases} z_0 & \text{si } t < t_0 \\ \frac{1}{2}\,a\,(t-t_0)^2 + z_0 & \text{si } t \geqslant t_0 \end{cases},$$

et dit que f est *définie par morceaux.* Il n'est pas rare de rencontrer de telles fonctions dans différents domaines de la physique ainsi que dans les sciences appliquées de l'ingénierie.

2.5 Opérations entre fonctions réelles

2.5.1 Définitions : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Soit aussi H un sous-ensemble non vide de $D_1 \cap D_2$.

- Les fonctions f et g sont dites *égales* dans H si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in H$.

- La fonction f est dite *supérieure* (respectivement *strictement supérieure*) à la fonction g dans H si $f(x) \geqslant g(x)$ (respectivement $f(x) > g(x)$) pour tout $x \in H$.
- La fonction f est dite *inférieure* (respectivement *strictement inférieure*) à la fonction g dans H si $f(x) \leqslant g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$) pour tout $x \in H$.

2.5.2 Définitions : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Soient aussi α et β deux nombres réels.

- On définit la *combinaison linéaire* de f et g par :

$$(\alpha f + \beta g)(x) \;=\; \alpha f(x) + \beta g(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in D_1 \cap D_2\,;$$

on parle de *somme* de fonctions lorsque $\alpha = \beta = 1$ et de *différence* de fonctions lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = -1$.
- On définit le *produit* de f et g par :

$$(f\,g)(x) \;=\; f(x)\,g(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in D_1 \cap D_2\,.$$

- On définit l'*inverse* de g par :

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) \;=\; \frac{1}{g(x)}\,, \qquad \text{pour tout } x \in D_2 \text{ tel que } g(x) \neq 0\,.$$

- On définit le *quotient* de f et g par :

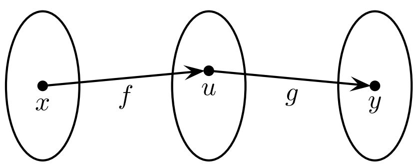
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \;=\; \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \text{pour tout } x \in D_1 \cap D_2 \text{ tel que } g(x) \neq 0\,.$$

2.5.3 Définition : Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On appelle *composition* des fonctions f et g la fonction $g \circ f$ donnée par :

$$(g \circ f)(x) \;=\; g\big(f(x)\big)\,.$$

Un élément $x \in D_f$ est envoyé sur un élément $u = f(x)$ qui est lui-même envoyé, à supposer que cela soit possible, sur un élément $y = g(u)$:

$$g \circ f \;:\; x \longmapsto u = f(x) \longmapsto y = g(u) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)\,.$$



Le domaine de définition $D_{g\circ f}$ de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les $x \in D_f$ pour lesquels $u = f(x) \in D_g$.

2.5.4 Remarque : En général, $g \circ f \neq f \circ g$, où f et g sont deux fonctions réelles.

2.5.5 Exemple : Soient f et g les deux fonctions réelles données par $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Alors :

$$\big(g \circ f\big)(x) \;=\; g(x^2+2) \;=\; \sqrt{x^2+2}\ ;$$

$D_{g\circ f} = \mathbb{R}$, du fait que $D_f = \mathbb{R}$ et que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'élément $u = f(x)$ se trouve dans l'intervalle $[2; \infty[$, qui est inclus dans $D_g = \mathbb{R}_+$. Aussi :

$$\big(f \circ g\big)(x) \;=\; f(\sqrt{x}\,) \;=\; (\sqrt{x}\,)^2 + 2 \;=\; x + 2\ ;$$

$D_{f\circ g} = \mathbb{R}_+$, du fait que $D_g = \mathbb{R}_+$ et que quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$, l'élément $u = g(x)$ se trouve dans $\mathbb{R}_+$, qui est inclus dans $D_f = \mathbb{R}$.

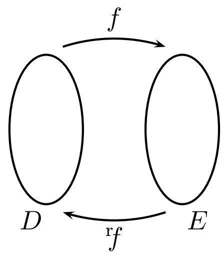
2.5.6 Remarque : Nombre de fonctions réelles peuvent être vues comme une composition de fonctions réelles plus élémentaires. Par exemple, la fonction de la première des illustrations 2.2.3 peut être vue comme une composition des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - x$ et à nouveau $x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} p \longmapsto u = \tfrac{1}{p} \longmapsto v &= \frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - u \\ &= \frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p} \longmapsto q = \frac{1}{v} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - u} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}}\ . \end{aligned}$$

2.6 Réciproque d'une fonction réelle

2.6.1 Définition : Soit $f\colon D \to E$ une fonction réelle bijective. On appelle *fonction réciproque* [a] de f la fonction réelle ${}^{r}\!f : E \to D$ telle que pour tout $x \in D$:

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = {}^{r}\!f(y)\,, \quad \text{où } y \in E\,.$$



a. Dans la littérature en rapport avec le sujet, la fonction réciproque d'une fonction f se note généralement f^{-1} ; si la notation f^{-1} n'a pas été retenue ici, c'est afin d'éviter toute confusion entre fonction réciproque et fonction inverse $(\frac{1}{f})$.

2.6.2 Remarques :

- Dès lors qu'une fonction réelle $f : D \to E$ est bijective, sa réciproque ${}^{r}\!f : E \to D$ est bien définie ; en effet, le fait que f est bijective implique qu'à chaque élément $y \in E$ correspond un et un unique élément $x \in D$; ce qui est la condition requise pour que ${}^{r}\!f$ soit une fonction.

- Si une fonction réelle $f\colon D \to E$ n'est pas bijective, alors ${}^{r}\!f$ n'est pas définie. En effet :
  - ◇ si f n'est pas injective, à un certain élément dans E correspondent plusieurs éléments dans D ; ce qui n'est pas cohérent avec la définition d'une fonction ;
  - ◇ si f n'est pas surjective, à un élément dans E, au moins, ne correspond aucun élément dans D ; ce qui n'est pas cohérent avec la définition d'une fonction.
- Soit $f : D \to E$ une fonction réelle bijective. Alors ${}^{r}\!f : E \to D$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$({}^{r}\!f \circ f)(x) = {}^{r}\!f\big(f(x)\big) = x\,, \qquad \text{pour tout } x \in D$$

et :

$$(f \circ {}^{r}\!f)(y) = f\big({}^{r}\!f(y)\big) = y\,, \qquad \text{pour tout } y \in E\,.$$

2.6.3 Procédure pour déterminer la réciproque ${}^{r}\!f$ d'une fonction réelle $f\colon D \to E$.

(a) Vérifier que f est bijective. Si f ne l'est pas, elle n'admet pas de réciproque ; cela étant, en restreignant suffisamment son domaine de départ, ou son domaine d'arrivée, ou encore les deux, il est possible de définir la réciproque d'une restriction de f (aux domaines restreints).

(b) Dans le cas où f n'est pas bijective, restreindre le domaine de départ, ou d'arrivée, ou les deux, en adéquation avec le problème à résoudre, de sorte que la fonction f restreinte à ces nouveaux domaines soit bijective.

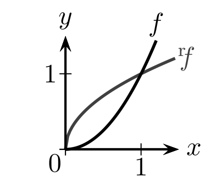
(c) Écrire l'équation $y = f(x)$ et la résoudre par rapport à x, de sorte à obtenir $x = \dots$

(d) Échanger y et x dans l'expression obtenue.

Si cela ne représente pas un travail trop important, vérifier que l'on a bien $({}^{r}\!f \circ f)(x) = {}^{r}\!f\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in D$ et $(f \circ {}^{r}\!f)(y) = f\big({}^{r}\!f(y)\big) = y$ pour tout $y \in E$.

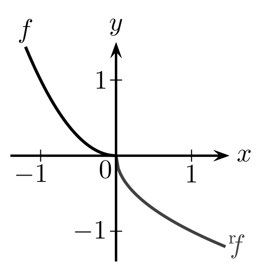
2.6.4 Exemples : 1. La fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$



n'est pas bijective. Pour qu'elle le soit, il est nécessaire de restreindre son ensemble de départ ainsi que son ensemble d'arrivée. Il vient, par exemple, $f_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f_1(x) = x^2$; et alors :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}\!f_1 : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

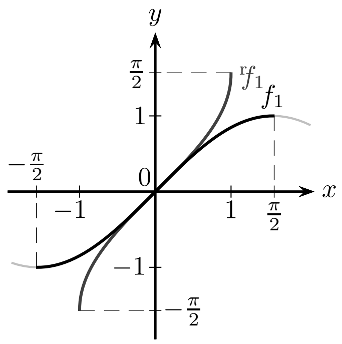


Ou également $f_2\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = x^2$; et alors :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}\!f_2 : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{x} \end{array}$$

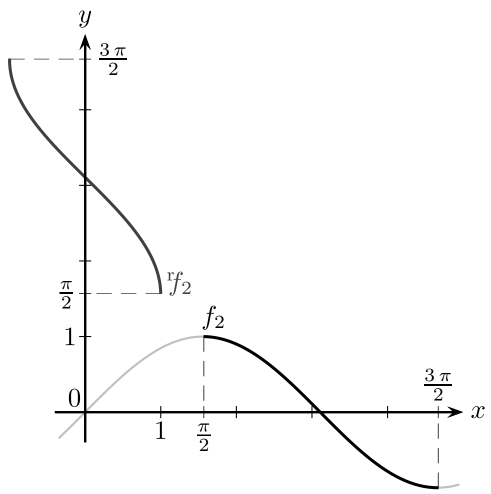
2. La fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$



n'est pas bijective (*cf.* section C.8 de l'annexe C), sa nature périodique lui empêchant d'être injective ($f(x+2\,\pi\,k) = f(x)$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors que $x+2\,\pi\,k \neq x$, sauf si $k = 0$). Pour définir une fonction réciproque, il est nécessaire de restreindre les ensembles de départ et d'arrivée. Le nombre de possibilités est infini. L'une d'elles est $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;\,1]$, $f(x) = \sin(x)$; et alors :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}\!f_1: & [-1\,;\,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & {}^{r}\!f_1(x) \end{array}$$



Parmi l'infinité de possibilités, une autre est $f_2 : \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right] \to [-1;\,1]$, $f_2(x) = \sin(x)$; et alors :

$$\begin{array}{rccc} {}^{r}\!f_2: & [-1\,;\,1] & \longrightarrow & \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & {}^{r}\!f_2(x) \end{array}$$

Noter que la réciproque ${}^{r}\!f_1$ n'est rien d'autre que la fonction Arcsin (*cf.* section C.9 de l'annexe C) ; c'est cette réciproque que l'on trouve sur les machines à calculer.

2.6.5 Remarque : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, le graphe de la fonction réciproque ${}^{r}\!f$ d'une fonction réelle f donnée s'obtient en prenant le graphe de f et en lui appliquant une symétrie axiale d'axe d, où d est la *diagonale principale* du système Oxy, *i.e.* la droite d'équation $y = x$.

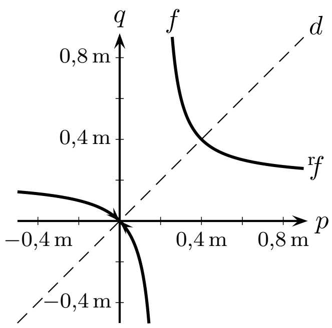
2.6.6 Illustration : Reprenons la fonction f de la première des illustrations 2.2.3. Cette fonction est injective, rappelons-le, mais pas surjective ; pour qu'elle le soit, il suffit de restreindre son ensemble d'arrivée à son ensemble image. Il vient alors :

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}[\,\setminus\{0\,\text{mm}\,;\,200\,\text{mm}\} & \longrightarrow &]-\infty\,\text{mm}\,;\,\infty\,\text{mm}[\,\setminus\{0\,\text{mm}\,;\,200\,\text{mm}\} \\ & p & \longmapsto & q = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\text{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

La fonction f, telle qu'elle vient d'être écrite, est bijective. Elle admet donc une réciproque ; cette réciproque s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} {}^{\mathrm{r}}\!f\,:\ \left]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}\right[\setminus\{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\} & \longrightarrow & \left]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}\right[\setminus\{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\} \\ q & \longmapsto & p = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{q}} \end{array}$$

Noter que l'expression de p peut être déduite de celle de q ; elle peut également être obtenue à partir de la loi des lentilles minces (*cf.* illustration 2.1.8, section 2.1). Observer, en outre, que les grandeurs p et q n'ont pas été interverties dans la formulation de ${}^{\mathrm{r}}\!f$; ceci afin d'éviter toute confusion entre objet et image (au sens optique des termes). Remarquer enfin que les fonctions f et ${}^{\mathrm{r}}\!f$ sont exactement les mêmes ; la figure ci-contre l'illustre : le graphe de f étant parfaitement symétrique par rapport à la diagonale principale d, son graphe est confondu avec celui de ${}^{\mathrm{r}}\!f$.



2.7 Limite d'une fonction réelle

Soient f et g les deux fonctions réelles données respectivement par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}\,.$$

Si ces deux expressions partagent la caractéristique de ne pas être définies en $x = 1$, elles n'ont, pour autant, pas du tout le même comportement autour de $x = 1$: $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus extrêmes à mesure que x s'approche de 1, ce qui n'est pas le cas de $g(x)$ (vu que $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ si $x \neq 1$).

Comment caractériser le comportement d'une fonction réelle f dans le voisinage d'un point donné de l'axe x ? Une réponse satisfaisante à cette question peut être obtenue en introduisant le concept de *limite*.

- Soit u une variable réelle quelconque. On dit que u tend vers le nombre réel a, et on note $u \to a$, si u s'approche arbitrairement près de a sans pour autant l'atteindre (u reste donc différente de a).
- Soient x une variable réelle indépendante et y une variable réelle dépendante, qui dépend de x selon la relation $y = f(x)$, où f est une fonction réelle. Si $y = f(x)$ tend vers le nombre réel ℓ ou est égal au nombre réel ℓ lorsque x tend vers le nombre réel a, on dit que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a ; on note :

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\,.$$

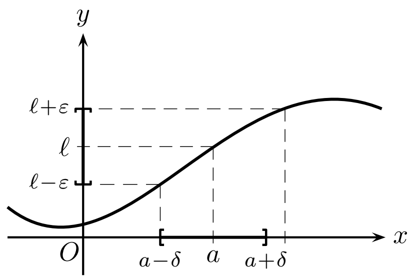
Mathématiquement parlant, l'expression « s'approcher toujours plus de » manque de rigueur ; raison pour laquelle il convient d'introduire la définition suivante.

2.7.1 Définition : Soient a un nombre réel et $f\colon D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie dans un voisinage de a (*i.e.* dans un sous-ensemble de D contenant un intervalle ouvert de la forme $]a-\gamma\,;\,a+\gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif), sauf éventuellement en a. On dit que f admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$, si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations :

$$0 < |x-a| \leqslant \delta\,,$$

où $x \in D$, impliquent :

$$\big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon\,.$$



2.7.2 Remarques :

- Les inégalités $0 < |x-a| \leqslant \delta$, évoquées dans la définition précédente, sont équivalentes aux relations :

$$a-\delta \leqslant x < a \qquad \text{ou} \qquad a < x \leqslant a+\delta\,;$$

aussi, l'inéquation $|f(x) - \ell\,| \leqslant \varepsilon$ est équivalente à la double inéquation :

$$\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon\,.$$

- La précédente définition s'applique aussi bien dans le cas où $a \in D$ que dans le cas où $a \notin D$.
- Comme l'illustre la figure ci-dessus, le nombre δ, évoqué dans la définition précédente, peut dépendre de ε et de a, mais en aucun cas de la variable x.
- Si une fonction réelle f de la variable réelle x admet pour limites les nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 lorsque x tend vers le nombre réel a, alors forcément $\ell_1 = \ell_2$ (*cf.* proposition B.1.4 de l'annexe B).
- Si une fonction réelle f admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque la variable réelle de laquelle f dépend tend vers un nombre réel a, ce nombre réel ne dépend pas du nom de la variable :

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{u\to a} f(u) = \lim_{t\to a} f(t) = \ldots$$

2.7.3 Exemples : 1. Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dans le cas où l'on cherche la limite de f en un point a appartenant au domaine de définition de f, le calcul de limite revient à remplacer x par a dans l'expression de f. Présentement, la limite de f lorsque x tend vers 2 vaut :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\,.$$

Vérifions maintenant, à l'aide de la définition de limite, que $\frac{1}{4}$ est bien la limite de f lorsque x tend vers 2. Pour cela, prenons un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque (strictement positif). Le but est de trouver un nombre réel $\delta > 0$ (qui, selon la définition, peut dépendre de ε, mais pas de x) tel que $0 < |x-2| \leqslant \delta$ implique $\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| \leqslant \varepsilon$. Pour y parvenir, commençons par développer l'expression $\left|f(x)-\frac{1}{4}\right|$:

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-x^2}{4\,x^2}\right| = \frac{|4-x^2|}{4\,x^2} \\ &= \frac{|2-x|\,|2+x|}{4\,x^2} = \frac{|x-2|\,|x+2|}{4\,x^2} \leqslant \frac{\delta\,|x+2|}{4\,x^2}\,,\end{aligned}$$

du fait que, selon la définition, $|x-2| \leqslant \delta$, où δ est un nombre réel strictement positif. Or, toujours selon la définition, on cherche à avoir $\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| \leqslant \varepsilon$. On serait donc tenté d'écrire $\frac{\delta\,|x+2|}{4\,x^2} = \varepsilon$, de sorte que $\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{\delta\,|x+2|}{4\,x^2} = \varepsilon$. Mais dans ce cas, l'expression de δ dépendrait non seulement de ε, mais également de x, ce qui n'est pas cohérent avec la définition de limite. Ce souci peut être écarté en fixant momentanément la valeur de δ ; en choisissant par exemple $\delta = 1$, il vient $|x-2| \leqslant \delta = 1$, ce qui peut se récrire sous la forme $-1 \leqslant x-2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3$, ou encore sous la forme $x \in [1;\,3]$; et alors :

$$\left|f(x)-\frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{\delta\,|x+2|}{4\,x^2} \leqslant \frac{\delta\,|3+2|}{4\cdot 1^2} = \frac{5}{4}\,\delta\,.$$

Pour maximiser la fraction dans ce calcul, on a pris la plus grande valeur possible de x dans l'intervalle $[1;\,3]$ au numérateur et sa plus petite valeur (dans le même intervalle) au dénominateur. Comme $\frac{5}{4}\,\delta$ ne dépend plus de x, on peut poser :

$$\frac{5}{4}\,\delta = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \frac{4}{5}\,\varepsilon\,.$$

Et ainsi, en considérant $\delta = \min\left\{1\,;\,\frac{4}{5}\,\varepsilon\right\}$, *i.e.* la plus petite valeur entre 1 et $\frac{4}{5}\,\varepsilon$, on peut conclure :

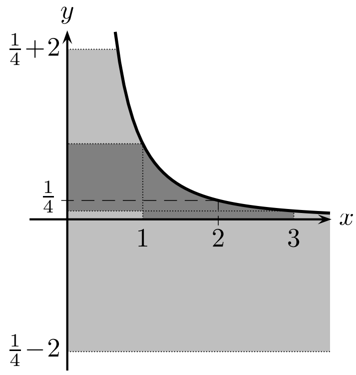
$$0 < |x-2| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right| \leqslant \varepsilon\,;$$

le nombre $\frac{1}{4}$ est donc la limite de f lorsque x tend vers 2.

Note :

- ◇ L'inégalité $0 < |x-2|$ n'a pas d'impact sur le fait que $\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right| \leqslant \varepsilon$; elle indique simplement que $x \neq 2$.
- ◇ Dans le choix momentané de δ, on peut considérer n'importe quel nombre strictement positif, pour autant que celui-ci soit strictement inférieur à 2. Cette condition a toute son importance : si elle n'était pas remplie, la valeur $x = 0$ se trouverait dans l'intervalle $[2-\delta\,;\,2+\delta]$, ce qui poserait problème dans les calculs ci-dessus, f n'étant pas définie en 0.

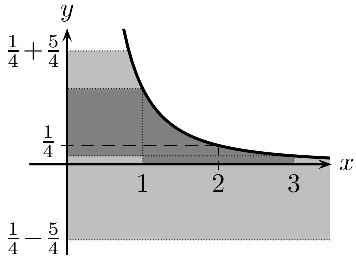
Afin de bien saisir le raisonnement qui vient d'être fait, illustrons-le dans trois situations concrètes.



- Si $\varepsilon = 2$, par exemple, alors :

$$\delta \;=\; \min\left\{1\,;\,\frac{4}{5}\cdot 2\right\} \;=\; \min\left\{1\,;\,\frac{8}{5}\right\} \;=\; 1\,.$$

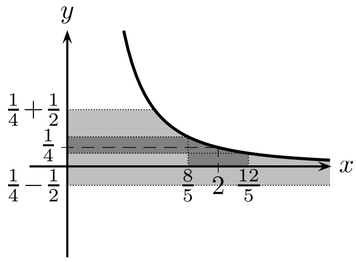
En fait, pour tout $\varepsilon \geqslant \frac{5}{4}$, le nombre δ est égal à 1. Quel que soit $x \in [1;\, 3]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{4} - \varepsilon\,;\, \frac{1}{4} + \varepsilon\right]$.



- Si $\varepsilon = \frac{5}{4}$, alors :

$$\delta \;=\; \min\left\{1\,;\,\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\right\} \;=\; \min\{1\,;\,1\} \;=\; 1\,.$$

Pour cette valeur particulière de ε, le nombre δ vaut encore 1.



- Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, par exemple, alors :

$$\delta = \min\left\{1\,;\,\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right\} = \min\left\{1\,;\,\frac{4}{10}\right\} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\,.$$

Pour tout $\varepsilon \leqslant \frac{5}{4}$, le nombre δ est proportionnel à ε. Plus ε est petit, plus δ est petit aussi, de sorte que $|x-2| \leqslant \delta$ implique toujours $|f(x) - \frac{1}{4}| \leqslant \varepsilon$.

En résumé, quelle que soit l'épaisseur de la bande gris clair horizontale, la bande gris foncé horizontale, image par f de la bande gris foncé verticale, est contenue dans la bande gris clair. Plus la bande gris clair est mince, plus la bande gris foncé est mince aussi.

2. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) \;=\; \frac{2\,x^2 - 2}{x-1}\,.$$

Dans le cas où l'on cherche la limite de f en un point a n'appartenant pas au domaine de définition de f, le calcul de limite nécessite un travail de mise en évidence et de simplification, avant le remplacement de x par a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) \;&=\; \lim_{x\to 1}\frac{2\,x^2-2}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1}\frac{2\,(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &=\; \lim_{x\to 1} 2\,(x+1) \;=\; 2\,(1+1) \;=\; 4\,.\end{aligned}$$

Montrons que la valeur obtenue est bien la limite de f lorsque x tend vers 1. Pour cela, considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Le but est de trouver un nombre réel $\delta > 0$ (qui, selon la définition, peut dépendre de ε, mais pas de x) tel que $0 < |x-1| \leqslant \delta$ implique $\big|f(x)-4\big| \leqslant \varepsilon$. Pour y parvenir, commençons par développer l'expression $|f(x)-4|$:

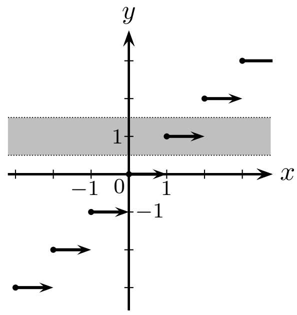
$$\begin{aligned}\big|f(x)-4\big| &= \left|\frac{2\,x^2-2}{x-1}-4\right| = \left|\frac{2\,x^2-2-4\,(x-1)}{x-1}\right| = \left|\frac{2\,x^2-4\,x+2}{x-1}\right| \\ &= \left|\frac{2\,(x^2-2\,x+1)}{x-1}\right| = \left|\frac{2\,(x-1)^2}{x-1}\right| \overset{x\neq 1}{=} 2\,|x-1| \leqslant 2\,\delta\,,\end{aligned}$$

du fait que, selon la définition, $|x-1| \leqslant \delta$ où δ est un nombre réel strictement positif. Comme l'expression $2\,\delta$ ne dépend pas de x, on peut directement poser $\varepsilon = 2\,\delta$, de sorte que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$; et ainsi :

$$0 < |x-1| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(x)-4\big| \leqslant \varepsilon\;;$$

le nombre 4 est donc la limite de f lorsque x tend vers 1.

3. Le raisonnement visant à prouver que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ est effectivement la limite de la fonction f lorsque x tend vers a n'est pas uniquement un jeu de l'esprit, ayant pour objectif de faire passer le temps. Dans certaines situations, on peut penser qu'une fonction réelle f admet une limite lorsque x tend vers a, du fait qu'il est possible de remplacer x par a dans l'expression de f. Mais en réalité, la limite n'existe pas. Ce qui permet de l'affirmer, c'est la définition même de la notion de limite.



Soit, par exemple, la fonction partie entière (*cf.* definition 2.3.2, section 2.3) :

$$\mathrm{E}(x) = n \in \mathbb{Z}\,, \quad \text{où } n \text{ est tel que} \quad x-1 < n \leqslant x\,.$$

Bien que $\mathrm{E}(1) = 1$, il n'est pas possible d'attribuer une valeur réelle à l'expression $\lim_{x\to 1} \mathrm{E}(x)$. Pour le voir, prenons le nombre réel $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour cette valeur de ε, il n'existe aucun nombre réel $\delta > 0$ pour lequel les relations $0 < |x-1| \leqslant \delta$ impliquent $\big|\mathrm{E}(x)-1\big| \leqslant \varepsilon$; en effet, quel que soit $x < 1$, $\big|\mathrm{E}(x)-1\big| \geqslant 1 > \varepsilon$. Un raisonnement similaire permet de montrer que la limite de E lorsque x tend vers 1 ne peut pas être 0 non plus ; ni aucun autre nombre réel, du reste.

2.7.4 Définitions : Soit $f\colon D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$).

- Supposons que f est définie dans un intervalle de la forme $]a-\gamma\,;\,a[$, où γ est un nombre réel strictement positif. On dit que f admet pour *limite à gauche* le nombre réel ℓ_1 lorsque x tend vers *a par valeurs plus petites que a*, si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $0 < a-x \leqslant \delta$ (qui sont équivalentes aux inégalités $a-\delta \leqslant x < a$) impliquent $|f(x)-\ell_1| \leqslant \varepsilon$. La limite à gauche se note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \qquad \text{ou aussi} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

- Supposons que f est définie dans un intervalle de la forme $]a\,;\,a+\gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif. On dit que f admet pour *limite à droite* le nombre réel ℓ_2 lorsque x tend vers *a par valeurs plus grandes que a* si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $0 < x-a \leqslant \delta$ (qui sont équivalentes aux inégalités $a < x \leqslant a+\delta$) impliquent $|f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon$. La limite à droite se note :

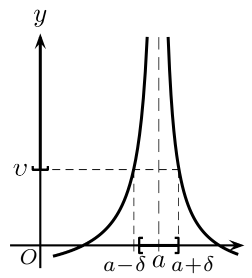
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{ou aussi} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)\,.$$

2.7.5 Exemple : Considérons à nouveau la fonction partie entière E (*cf.* troisième des exemples précédents). Manifestement :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{E}(x) \;=\; 0\,, \qquad \text{alors que :} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \mathrm{E}(x) \;=\; 1\,.$$

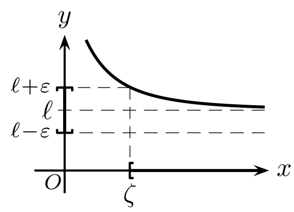
Dans un tel cas, on dit que $\lim_{x\to 1} \mathrm{E}(x)$ n'existe pas.

2.7.6 Définitions : • Soient a un nombre réel et $f\colon D \to E$ une fonction réelle définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. On dit que f tend vers ∞ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a si, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $0 < |x-a| \leqslant \delta$, où $x \in D$, implique $f(x) \geqslant \upsilon$ (respectivement $f(x) \leqslant -\upsilon$). Dans une telle situation, on parle de *limite infinie* et on note :



$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{(respectivement } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,)\,.$$

- Soit $f\colon D \to E$ une fonction réelle, définie dans un intervalle de la forme $]\alpha\,;\,\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;\,\alpha[$), où α est un nombre réel. On dit que f admet pour limite le nombre ℓ lorsque x tend vers ∞ (respectivement lorsque x tend vers $-\infty$) si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel ζ tel que la relation $x \geqslant \zeta$ (respectivement $x \leqslant \zeta$), où $x \in D$, implique $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dans un tel cas, on parle de *limite à l'infini* et on note :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \qquad \text{(respectivement } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell\,)\,.$$

- Soit $f\colon D \to E$ une fonction réelle, définie dans un intervalle de la forme $]\alpha\,;\,\infty[$, où α est un nombre réel. On dit que f tend vers ∞ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers ∞ si, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, il existe un nombre réel ζ tel que la relation $x \geqslant \zeta$, où $x \in D$, implique $f(x) \geqslant \upsilon$ (respectivement $f(x) \leqslant -\upsilon$). On note :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{(respectivement } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty)\,.$$

Aussi, soit $f : D \to E$ une fonction réelle, définie dans un intervalle de la forme $]-\infty\,;\,\alpha[$, où α est un nombre réel. On dit que f tend vers ∞ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers $-\infty$ si, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, il existe un nombre réel ζ tel que la relation $x \leqslant \zeta$, où $x \in D$, implique $f(x) \geqslant \upsilon$ (respectivement $f(x) \leqslant -\upsilon$). On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \text{(respectivement } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\text{)}\,.$$

Dans les deux cas, on parle de *limite infinie à l'infini.*

2.7.7 Remarque : La première des trois définitions précédentes se transpose sans problème dans la situation où x tend vers a par valeurs plus petites que a, ainsi que dans celle où x tend vers a par valeurs plus grandes que a ; il suffit de remplacer les relations $0 < |x - a| \leqslant \delta$ par $0 < a - x \leqslant \delta$ dans le premier cas et par $0 < x - a \leqslant \delta$ dans le deuxième.

2.7.8 Exemples : 1. Reprenons la fonction réelle f donnée par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty\,.$$

Pour le montrer, considérons un nombre réel $\upsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{\upsilon}}$. Alors :

$$0 < |x - 0| \leqslant \delta = \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} \qquad \text{implique :} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} \geqslant \upsilon\ ;$$

en effet, si $|x - 0| = |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\upsilon}}$, alors $x^2 \leqslant \frac{1}{\upsilon}$ et donc $\frac{1}{x^2} \geqslant \upsilon$, ce qui achève la démonstration. Aussi :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0\,.$$

Pour le montrer, considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\zeta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Alors :

$$x \geqslant \zeta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{implique :} \qquad \bigl|f(x) - 0\bigr| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leqslant \varepsilon\ ;$$

et :

$$x \leqslant -\zeta = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{implique :} \qquad \bigl|f(x) - 0\bigr| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leqslant \varepsilon\ ;$$

en effet, si $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, alors $x^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\bigl|f(x) - 0\bigr| = \bigl|\frac{1}{x^2}\bigr| = \frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon$; et si $x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, alors $x^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\bigl|f(x) - 0\bigr| = \bigl|\frac{1}{x^2}\bigr| = \frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon$. Ces considérations achèvent la démonstration.

2. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = \frac{2\,x + 1}{x}\,.$$

Alors :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \;=\; \infty\,, \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \;=\; -\infty\;;$$

en effet, f est négative (respectivement positive) lorsque x tend vers 0 par valeurs plus petites (respectivement par valeurs plus grandes). Aussi :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 2\,, \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; 2\;;$$

en effet :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\,x+1}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) \;=\; 2\,,$$

du fait que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. Noter que ces résultats se démontrent à l'aide des définitions de limite infinie et de limite à l'infini.

2.7.9 Définition : Soient a un nombre réel et $f\colon D\to E$ une fonction réelle, définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a.

- On dit que la limite de f lorsque x tend vers a par valeurs plus petites (respectivement par valeurs plus grandes) *existe* si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$), où ℓ est un nombre réel, ou si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (respectivement $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$), ou encore si $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$). Si ce n'est pas le cas, on dit que la limite *n'existe pas.*
- On dit que la limite de f lorsque x tend vers a *existe* si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existent et si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. Si ce n'est pas le cas, on dit que la limite *n'existe pas.*

2.7.10 Illustration : Reprenons la fonction f de la première des illustrations 2.2.3 :

$$\begin{array}{rccl} f \;:\; &]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\setminus \{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\} & \longrightarrow &]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}[\\ & p & \longmapsto & q \;=\; \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

Les seules valeurs réelles où cette fonction n'est pas définie sont 0 mm et 200 mm. Étudions alors ce qu'il se passe aux alentours de ces valeurs.

◇ Autour de 0 mm :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p\to 0\,\mathrm{mm}\\ p<0\,\mathrm{mm}}} q \;&=\; \lim_{\substack{p\to 0\,\mathrm{mm}\\ p<0\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} \;=\; \lim_{\substack{p\to 0\,\mathrm{mm}\\ p<0\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{p-200\,\mathrm{mm}}{p\cdot 200\,\mathrm{mm}}} \\ &=\; \lim_{\substack{p\to 0\,\mathrm{mm}\\ p<0\,\mathrm{mm}}} \frac{p\cdot 200\,\mathrm{mm}}{p-200\,\mathrm{mm}} \;=\; 0\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

et :

$$\lim_{\substack{p \to 0\,\mathrm{mm} \\ p > 0\,\mathrm{mm}}} q = \lim_{\substack{p \to 0\,\mathrm{mm} \\ p > 0\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} = \lim_{\substack{p \to 0\,\mathrm{mm} \\ p > 0\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{p-200\,\mathrm{mm}}{p \cdot 200\,\mathrm{mm}}}$$
$$= \lim_{\substack{p \to 0\,\mathrm{mm} \\ p > 0\,\mathrm{mm}}} \frac{p \cdot 200\,\mathrm{mm}}{p - 200\,\mathrm{mm}} = 0\,\mathrm{mm}\,.$$

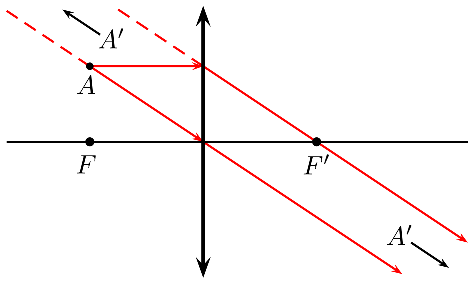
Les deux limites obtenues étant égales, la limite de q lorsque p tend vers $0\,\mathrm{mm}$ existe donc ; et elle vaut $0\,\mathrm{mm}$.

◇ Autour de $200\,\mathrm{mm}$:

$$\lim_{\substack{p \to 200\,\mathrm{mm} \\ p < 200\,\mathrm{mm}}} q = \lim_{\substack{p \to 200\,\mathrm{mm} \\ p < 200\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} = -\infty\,\mathrm{mm}$$

et :

$$\lim_{\substack{p \to 200\,\mathrm{mm} \\ p > 200\,\mathrm{mm}}} q = \lim_{\substack{p \to 200\,\mathrm{mm} \\ p > 200\,\mathrm{mm}}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} = \infty\,\mathrm{mm}\,;$$



en effet, le dénominateur $\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}$ tend vers $0\,\mathrm{mm}^{-1}$ par valeurs plus petites (respectivement plus grandes) lorsque p tend vers $200\,\mathrm{mm}$ par valeurs plus petites (respectivement plus grandes). Les deux limites obtenues n'étant pas égales, la limite de q lorsque p tend vers $200\,\mathrm{mm}$ n'existe pas. Noter qu'en optique géométrique, dans une telle situation (où un objet A est placé à la distance focale de la lentille, ici $200\,\mathrm{mm}$), on dit que l'image A' de A se forme à l'infini. Remarquer alors que l'on ne fait pas de distinction entre ∞ et $-\infty$, quand bien même les deux limites calculées ci-dessus ont des signes différents. Et pour cause : une image à l'infini correspond à des rayons lumineux parallèles ; or des rayons parallèles ne se coupent qu'à l'infini, d'un côté comme de l'autre côté de la lentille donnée (*cf.* figure ci-dessus).

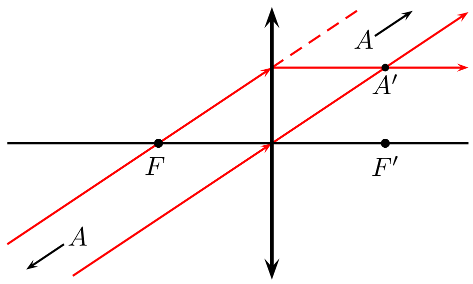
Étudions encore le comportement de la fonction f lorsque p tend vers ∞ ou $-\infty$:

$$\lim_{p \to -\infty\,\mathrm{mm}} q = \lim_{p \to -\infty\,\mathrm{mm}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}}} = 200\,\mathrm{mm}$$

et :

$$\lim_{p \to \infty\,\mathrm{mm}} q = \lim_{p \to \infty\,\mathrm{mm}} \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}}} = 200\,\mathrm{mm}\,.$$

En optique géométrique, de tels calculs de limites s'interprètent comme suit : pour que l'image A' d'un objet A se forme à une distance égale à la distance focale de la lentille, l'objet A doit se trouver à une distance infinie de la lentille ; noter alors que dans une telle configuration, les rayons issus de l'objet, ou qui convergent vers l'objet, sont parallèles entre eux (*cf.* figure ci-contre).



2.7.11 Propriétés : Soient a un nombre réel, $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, ainsi que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux nombres réels. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a} \big(\alpha f(x) + \beta\, g(x)\big) = \alpha\, \ell_1 + \beta\, \ell_2$, où α et β sont deux nombres réels ;
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\, g(x)\big) = \ell_1\, \ell_2$;
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, pour autant que $\ell_2 \neq 0$;

Si, en outre, f est une fonction constante dans $V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, *i.e.* si $f(x) = c$ pour tout $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où c est un nombre réel fixe, alors $\ell_1 = c$:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c\,.$

Revenons aux hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de ℓ_1, sauf éventuellement en ℓ_1. Supposons aussi que $\lim_{x\to \ell_1} g(x) = \ell_3$, où ℓ_3 est un nombre réel. Faisons, en outre, l'hypothèse supplémentaire suivante au sujet de f : $f(x) \neq \ell_1$ quel que soit $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a} \big(g \circ f\big)(x) = \lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \ell_3\,.$

Revenons aux hypothèses sur les fonctions $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ formulées initialement.

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, alors :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \leqslant \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Reprenons les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$; et soit $h\colon D_3 \to \mathbb{R}$ une troisième fonction réelle ; supposons que f, g et h sont toutes les trois définies dans un voisinage d'un nombre réel b, sauf éventuellement en b.

- Si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \tilde{V} \smallsetminus \{b\}$, où $\tilde{V}$ est un voisinage de b, et si $\lim_{x\to b} f(x) = \ell = \lim_{x\to b} g(x)$, où ℓ est un nombre réel, alors :
$$\lim_{x\to b} h(x) = \ell\ ;$$
ce résultat est connu sous le nom de **théorème des deux gendarmes**.

Toutes ces propriétés découlent de la définition 2.7.1. Une démonstration détaillée (utilisant comme outil les suites de nombres) est présentée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B.

2.7.12 Remarque : Dans la cinquième des propriétés précédentes (concernant la limite de la composition des fonctions f et g), l'hypothèse consistant à dire que $f(x) \neq \ell_1$ quel que soit $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, a toute son importance ; l'omettre reviendrait à accepter que la fonction f puisse être constante et égale à ℓ_1 dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a), ce qui aurait pour conséquence que $g \circ f$ pourrait être éventuellement non définie, non seulement en a, mais dans tout un voisinage de a. Parler de limite (de $g \circ f$, lorsque x tend vers a), dans de telles circonstances, ne ferait alors pas sens.

2.7.13 Exemple : Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (où sin désigne la fonction *sinus*). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$-x^2 \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leqslant x^2 \ ;$$

en effet, $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Aussi, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$. Selon le théorème des deux gendarmes, qui est manifestement applicable ici :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \, .$$

2.7.14 Remarques :

- Les propriétés 2.7.11 s'appliquent aussi dans le cas de limites infinies, ainsi que dans le cas de limites à l'infini ; les conventions suivantes, concernant les infinis et la division par zéro, sont alors à observer :

  ◇ $\infty + \infty = \infty$, ◇ $\infty + \ell = \infty$ quel que soit le nombre réel ℓ,

  ◇ $\infty \cdot \ell = \infty$ si $\ell > 0$, ◇ $\infty \cdot \ell = -\infty$ si $\ell < 0$,

  ◇ $\infty \cdot \infty = \infty$, ◇ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty \cdot \infty = -\infty$,

  ◇ $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$, ◇ $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$,

  ◇ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, ◇ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = \infty$.

- Si, lors du calcul de la limite suivante :

  $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3\,x + 2}{\sqrt{x} - 1}$$

  on remplaçait x par la valeur vers laquelle x tend (comme cela a été fait dans le premier des exemples 2.7.3), présentement 1, on se retrouverait avec une expression de la forme $\frac{0}{0}$. Vu la division par 0, cette quantité serait-elle égale à ∞

ou $-\infty$? Ou serait-elle égale à 0, vu qu'il y a 0 au numérateur ? Ou serait-elle égale à une autre valeur ? Rien ne permet à ce stade de le dire. Des investigations plus poussées sont nécessaires pour pouvoir conclure (*cf.* exemple ci-dessous).

- L'expression $\frac{0}{0}$, évoquée au point précédent, est ce que l'on appelle une *forme indéterminée*. Elle n'est pas la seule du genre ; d'autres existent. Les plus courantes sont les suivantes :

$$\frac{0}{0}\,, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \qquad \infty-\infty\,, \qquad 0\cdot(\pm\infty)\,, \qquad 0^0\,, \qquad \infty^0\,, \qquad 1^{\pm\infty}\,.$$

- Diverses techniques peuvent être utilisées pour se débarrasser d'une forme indéterminée ; elle fonctionnent plus ou moins bien selon les circonstances. En présence d'une fraction polynomiale, la technique de mise en évidence suivie d'une simplification est en général efficace. Si l'expression contient une racine, la technique dite d'*amplification* fonctionne bien (*cf.* exemple ci-dessous). Si l'expression considérée contient des fonctions *exponentielles*, *logarithmes*, etc. (*cf.* chapitre 3), il est nécessaire de recourir à des techniques plus poussées, basées sur des résultats qui seront présentés dans les chapitres suivants (*règle de Bernoulli-L'Hôpital* (*cf.* section 3.9 du chapitre 3), utilisation des *développements limités* (*cf.* section 5.5 du chapitre 5)).

2.7.15 Exemple : Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x)=\frac{x^2-3\,x+2}{\sqrt{x}-1}\,.$$

Pour calculer la limite de f lorsque x tend vers 1, on utilise la technique d'*amplification*, qui consiste ici à multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x}+1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{x^2-3\,x+2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-3\,x+2}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{(x^2-3\,x+2)\big(\sqrt{x}+1\big)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)\big(\sqrt{x}+1\big)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to1}(x-2)\big(\sqrt{x}+1\big) = -1\cdot2 = -2\,.
\end{aligned}$$

2.8 Asymptotes d'une fonction

Le terme d'*asymptote*, et plus généralement de *comportement asymptotique*, se rencontre dans différents domaines des sciences ; en mathématiques bien sûr, mais également en physique, en chimie, dans les sciences de l'ingénierie, etc. En mathématiques, on parle d'*asymptote*, essentiellement, dans l'étude des *courbes planes* (*i.e.* des lignes qu'il est possible de tracer, dans le plan euclidien, sans devoir lever le crayon (*cf.* section 2.11)).

On dit qu'une droite d, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), est une *asymptote* d'une certaine courbe $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^2$ donnée, si la distance entre un point quelconque $P(x;\, y) \in \mathcal{C}$ et d tend vers 0 lorsque x et/ou y tend vers l'infini.

Lorsqu'une courbe plane est décrite au moyen d'une fonction réelle, la définition qui vient d'être donnée se transpose comme suit.

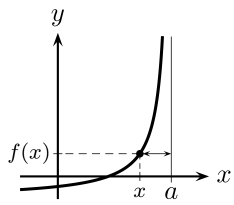
2.8.1 Définitions : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f\colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle.

- On dit que f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$, où a est un nombre réel, si l'un des deux points suivants, au moins, est satisfait :
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]a{-}\gamma\,;\, a[$, où γ est un nombre réel strictement positif, et :
  $$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \;=\; -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \;=\; \infty\;;$$
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]a\,;\, a{+}\gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif, et :
  $$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \;=\; -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \;=\; \infty\;.$$
- On dit que f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = b$, où b est un nombre réel, si l'un des deux points suivants, au moins, est satisfait :
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]-\infty\,;\, \alpha[$, où α est un nombre réel, et :
  $$\lim_{x\to -\infty} f(x) \;=\; b\;;$$
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]\alpha\,;\, \infty[$, où α est un nombre réel strictement positif, et :
  $$\lim_{x\to \infty} f(x) \;=\; b\;.$$
- On dit que f admet une *asymptote oblique* d'équation $y = m\,x + b$, où m et b sont des nombres réels, si l'un des deux points suivants, au moins, est satisfait :
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]-\infty\,;\, \alpha[$, où α est un nombre réel, et :
  $$\lim_{x\to -\infty} \big(f(x) - (m\,x + b)\big) \;=\; 0\;;$$
  - ◇ f est définie dans un intervalle de la forme $]\alpha\,;\, \infty[$, où α est un nombre réel strictement positif, et :
  $$\lim_{x\to \infty} \big(f(x) - (m\,x + b)\big) \;=\; 0\;.$$

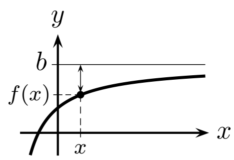
2.8.2 Remarques :

- Dire qu'une fonction réelle admet une asymptote constitue un léger abus de langage ; ce n'est, en effet, pas la fonction même qui admet une asymptote, mais son graphe.

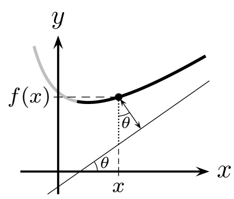
- Les définitions précédentes sont consistantes avec les considérations faites en début de section. En effet :
  - ◇ dire que $y = f(x)$ tend vers $-\infty$ ou ∞ lorsque x tend vers a (par valeurs plus petites, plus grandes, ou plus petites et plus grandes) revient à dire que la distance $\delta = |x - a|$, entre un point $\big(x\,;\, f(x)\big)$ sur le graphe de f et la droite d'équation $x = a$, tend vers 0 lorsque le point en question part à l'infini (tout en restant sur le graphe de f) ;



  - ◇ dire que $y = f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers ∞ revient à dire que la distance $\delta = |f(x) - b\,|$, entre un point $\big(x\,;\, f(x)\big)$ sur le graphe de f et la droite d'équation $y = b$, tend vers 0 lorsque le point en question part à l'infini (tout en restant sur le graphe de f) ;



  - ◇ dire que $f(x) - (m\,x + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ ou ∞ revient à dire que la distance $\delta = |f(x) - (m\,x + b)|\cos(\theta)$ (où θ est l'angle entre la droite d'équation $y = m\,x + b$ et l'axe Ox (*cf.* figure ci-contre)), entre un point $\big(x\,;\, f(x)\big)$ sur le graphe de f et la droite d'équation $y = m\,x + b$, tend vers 0 lorsque le point en question part à l'infini (tout en restant sur le graphe de f).



- Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle admettant une asymptote oblique d'équation $y = m\,x + b$. Alors, la condition :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (m\,x + b)\big) \;=\; 0$$

implique :

$$\boxed{m \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m\,x\big)}\,.$$

En effet, le fait que $f(x) - (m\,x + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ permet d'écrire :

$$\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \;=\; \frac{f(x) - (m\,x + b)}{x} \;\xrightarrow{x\to\pm\infty}\; 0\,;$$

et comme $\frac{b}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors :

$$0 \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} - m \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \;=\; m\,.$$

Aussi, par définition :

$$0 \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (m\,x + b)\big) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m\,x\big) - b\,,$$

ce qui est équivalent à :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - m\,x\big) \;=\; b\,.$$

2.8.3 Exemples : 1. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = \frac{2\,x+1}{x}\,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$. Le fait que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2\,x+1}{x} \;=\; -\infty$$

permet de conclure que f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$; noter aussi que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\,x+1}{x} \;=\; \infty\,.$$

La fonction f admet également une asymptote horizontale d'équation $y = 2$; en effet :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x+1}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) \;=\; 2\;;$$

noter aussi que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,x+1}{x} \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) \;=\; 2\,.$$

Le fait que ces deux limites sont égales permet de conclure que f possède une même asymptote horizontale, que x tende vers $-\infty$ ou que x tende vers ∞.

2. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) \;=\; \frac{4\,x^2-6\,x+1}{2\,x-2}\,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Le fait que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{4\,x^2-6\,x+1}{2\,x-2} \;=\; \infty$$

permet d'affirmer que f possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$; noter aussi que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{4\,x^2-6\,x+1}{2\,x-2} \;=\; -\infty\,.$$

La fonction f admet également une asymptote oblique d'équation $y = 2\,x - 1$; en effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{4\,x^2 - 6\,x + 1}{2\,x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x^2 - 6\,x + 1}{2\,x^2 - 2\,x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - 2\,x\big) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4\,x^2 - 6\,x + 1}{2\,x - 2} - 2\,x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x^2 - 6\,x + 1 - 2\,x\,(2\,x - 2)}{2\,x - 2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x^2 - 6\,x + 1 - 4\,x^2 + 4\,x}{2\,x - 2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2\,x + 1}{2\,x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(2 - \frac{2}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{-2}{2} = -1\,.
\end{aligned}$$

Des calculs similaires dans le cas où x tend vers $-\infty$ mènent aux mêmes résultats. f possède donc une même asymptote oblique, que x tende vers $-\infty$ ou que x tende vers ∞. Noter que l'équation $y = 2\,x - 1$ peut être aussi obtenue, dans la situation présente, en effectuant la division euclidienne du numérateur $4\,x^2 - 6\,x + 1$ par le dénominateur $2\,x - 2$ de l'expression de f ; le résultat s'écrit :

$$f(x) = 2\,x - 1 - \frac{1}{2\,x - 2} \ ;$$

lorsque x prend des valeurs extrêmes (dans les nombres positifs ou négatifs), la fraction $-\frac{1}{2\,x-2}$ devient négligeable, si bien que $y = f(x)$ se comporte de plus en plus comme $y = 2\,x - 1$.

2.8.4 Remarques : • Il existe des fonctions réelles dont les asymptotes horizontales (respectivement obliques) sont différentes selon que la variable indépendante prend des valeurs positives ou négatives. Pour distinguer les cas, on parle d'asymptote horizontale (respectivement oblique) *à droite* et *à gauche*. En outre, certaines fonctions réelles n'ont une asymptote horizontale (respectivement oblique) que d'un seul côté. D'autres fonctions réelles, encore, ont une asymptote horizontale d'un côté et une asymptote oblique de l'autre. En résumé, plusieurs cas de figure sont possibles.

- Si une fonction réelle possède une asymptote horizontale à droite (respectivement à gauche), elle ne peut pas avoir une asymptote oblique à droite (respectivement à gauche) ; et *vice versa*. Une fonction réelle ne peut, en effet, pas tendre vers deux limites différentes (un nombre réel b et ∞ (ou $-\infty$)) lorsque la variable indépendante tend vers ∞ (respectivement vers $-\infty$).

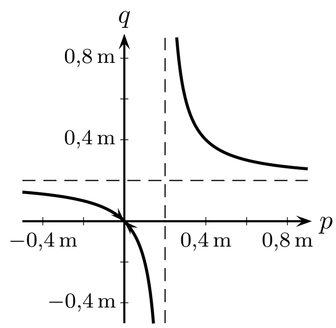
2.8.5 Illustration : Reprenons la fonction f de la première des illustrations 2.2.3 :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \left]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}\right[\setminus \{0\,\mathrm{mm}\,;\,200\,\mathrm{mm}\} & \longrightarrow & \left]-\infty\,\mathrm{mm}\,;\,\infty\,\mathrm{mm}\right[\\ p & \longmapsto & q = \dfrac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}} \end{array}$$

Les calculs de limites effectués dans l'illustration 2.7.10 permettent d'affirmer que f admet :

- ◇ une asymptote verticale d'équation $p = 200\,\mathrm{mm}$,
- ◇ une asymptote horizontale, à gauche et à droite, d'équation $q = 200\,\mathrm{mm}$.

Noter que f ne peut pas avoir une quelconque asymptote oblique, vu qu'elle possède une asymptote horizontale, à gauche et à droite. La figure ci-contre illustre un échantillon du graphe de f avec ses asymptotes.



2.9 Notion de continuité

D'un point de vue intuitif, on dit qu'une fonction réelle f est *continue* dans un intervalle I si son graphe peut être tracé, dans la portion $I \times \mathbb{R}$ du plan euclidien, sans devoir lever le crayon. Transposée dans un langage plus rigoureux, cette réalité se traduit par l'énoncé suivant.

2.9.1 Définition : Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. On dit que f est *continue* en $x_0 \in D$ si la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \, ;$$

autrement dit, f est continue en $x_0 \in D$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la relation :

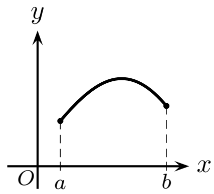
$$|x - x_0| \leqslant \delta \, , \quad \text{où } x \in D \, , \qquad \text{implique la relation :} \qquad \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leqslant \varepsilon \, .$$

2.9.2 Remarques :

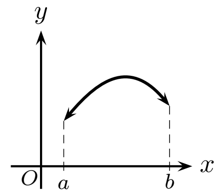
- Le nombre réel δ, évoqué dans la définition précédente, ainsi que dans les définitions qui suivent, peut dépendre de ε et de x_0, mais en aucun cas de la variable x (*cf.* définition de la limite d'une fonction réelle).
- Dans la définition précédente, comme $x_0 \in D$, il n'est pas nécessaire d'exiger $0 < |x - x_0|$; l'inégalité $|x - x_0| \leqslant \delta$ suffit.

2.9.3 Définitions : Soit $f : D \to E$ (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle.

- Soit x_0 un nombre réel dans D.
  - ◇ On dit que f est *continue à gauche* en x_0 si f est définie dans un intervalle de la forme $]\alpha; x_0]$, où α est un nombre réel strictement plus petit que x_0, et si :
  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \;=\; f(x_0)\,,$$
  i.e. si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0$, où $x \in D$, implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$.
  - ◇ On dit que f est *continue à droite* en x_0 si f est définie dans un intervalle de la forme $[x_0; \alpha[$, où α est un nombre réel strictement plus grand que x_0, et si :
  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \;=\; f(x_0)\,,$$
  i.e. si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$, où $x \in D$, implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$.
- Soient $I =]a; b[$ un intervalle ouvert et $\bar{I} = [a; b]$ le plus petit intervalle fermé contenant I, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
  - ◇ On dit que f est *continue dans* I si f est définie et continue en chaque point $x_0 \in I$.
  - ◇ On dit que f est *continue dans* $\bar{I}$ si f est définie en chaque point $x_0 \in \bar{I}$ et si elle est à la fois :
    - ▷ continue dans I,
    - ▷ continue à droite en a,
    - ▷ continue à gauche en b.



continuité dans $[a; b]$

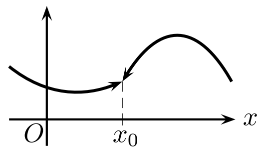


continuité dans $]a; b[$

2.9.4 Définition : Une fonction réelle $f : D \to E$, qui est définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, et qui n'est pas continue en x_0, est dite *discontinue* en x_0. On dit alors que f admet une *discontinuité* en x_0 ; et aussi que x_0 est un *point de discontinuité* de f.

2.9.5 Remarques : • Les discontinuités peuvent être regroupées en cinq catégories distinctes.

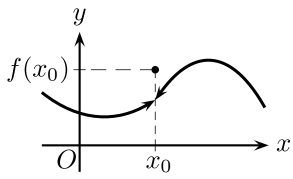
◇ *Discontinuité de type trou* :
Une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, possède une discontinuité de type *trou* en x_0 si la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à un nombre réel ℓ :



$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \;=\; \ell \;=\; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)\,,$$

mais f n'est pas définie en x_0 (autrement dit, x_0 n'appartient pas au domaine de définition de f).

◇ *Discontinuité de type trou-saut* :
Une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, possède une discontinuité de type *trou-saut* en x_0 si d'une part f est définie en x_0, si d'autre part la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à un nombre réel ℓ :

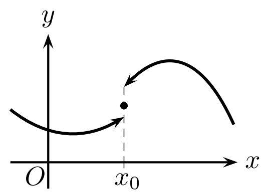


$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,,$$

mais :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)\,.$$

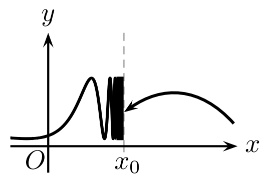
◇ *Discontinuité de type saut* :
Une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, possède une discontinuité de type *saut* en x_0 si :



$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,,$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux nombres réels. Cette définition s'applique aussi bien dans le cas où f est définie en x_0 que dans le cas où elle ne l'est pas.

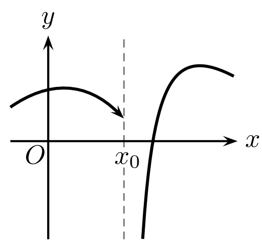
◇ *Discontinuité de type fluctuant* :
Une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, possède une discontinuité de type *fluctuant* en x_0 si l'une, au moins, des deux limites suivantes n'existe pas :



$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)\,, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,.$$

Cette définition s'applique aussi bien dans le cas où f est définie en x_0 que dans le cas où elle ne l'est pas.

◇ *Discontinuité de type asymptotique* :
Une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, possède une discontinuité de type *asymptotique* si l'une, au moins, des deux limites suivantes vaut ∞ ou $-\infty$:

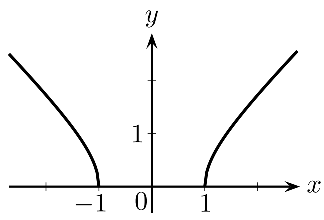


$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)\,, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,.$$

Cette définition s'applique aussi bien dans le cas où f est définie en x_0 que dans le cas où elle ne l'est pas. Noter qu'une discontinuité de type asymptotique est parfois dite *irréductible*, ou *infinie*.

Si une fonction réelle f, définie dans un voisinage d'un nombre réel x_0, sauf éventuellement en x_0, a une limite non existante lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites (respectivement par valeurs plus grandes), et une limite infinie lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus grandes (respectivement par valeurs plus petites), on dit que f admet une discontinuité de type asymptotique en x_0 (et non une discontinuité de type fluctuant).

- Lors du tracé du graphe d'une fonction réelle présentant une discontinuité, la discontinuité en question se manifeste par la nécessité de devoir lever le crayon à un moment donné au moins.
- Si la nécessité de devoir lever le crayon, lors du tracé du graphe d'une fonction réelle, témoigne d'une forme d'interruption, l'interruption en question ne correspond toutefois pas forcément à une discontinuité au sens de la définition 2.9.4. Pour illustrer ce propos, considérons la fonction réelle f donnée par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Pour tracer le graphe de f dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, il est nécessaire de lever une fois le crayon (*cf.* figure ci-contre). L'interruption du tracé ne correspond cependant pas, dans le cas présent, à une discontinuité en un point (dont le type est déterminé à partir de calculs de limites), mais à une non-définition de la fonction dans un intervalle (présentement $]-1;\,1[$). Dans un tel cas, on dit simplement que f n'est pas définie dans $]-1;\,1[$, et non qu'elle est discontinue dans $]-1;\,1[$.



- À toute fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ admettant une discontinuité de type trou en un nombre réel x_0, il est possible d'associer une fonction $\bar{f}$ qui coïncide avec f en tout point du domaine de définition D de f et qui est continue en x_0. Appelée *prolongement par continuité*, une telle fonction s'écrit concrètement :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \lim\limits_{u \to x_0} f(u) & \text{si } x = x_0 \notin D_f \end{cases},$$

  Dans de telles circonstances, on dit que f est *prolongeable par continuité en* x_0. Noter que :
  - ◇ la continuité de $\bar{f}$ en x_0 découle de sa construction même ;
  - ◇ le prolongement $\bar{f}$ de f est unique, du fait que la limite d'une fonction réelle, dès lors qu'elle existe, est unique ;
  - ◇ un prolongement par continuité de f en x_0 n'est envisageable ni dans le cas où elle possède une discontinuité de type trou-saut en x_0 (du fait que f est définie en x_0), ni dans le cas où elle possède une discontinuité de type saut en x_0 (du fait que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas), ni dans le cas où elle possède une discontinuité de type fluctuant en x_0 (du fait que l'une des deux limites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, au moins, n'existe pas), ni dans le cas où elle possède une discontinuité de type asymptotique en x_0 (du fait que l'une des deux limites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, au moins, est égale à $-\infty$ ou à ∞).

2.9.6 Exemples : 1. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \,.$$

Dans le premier des exemples 2.7.3, il a été montré que $\lim_{x\to 2} f(x)$ valait $\frac{1}{4}$. Or, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = f(2)$. De fait, f est continue en $x_0 = 2$. Qu'en est-il en d'autres valeurs x_0 ?

- ◇ Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons alors un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Si f est continue en x_0, il doit être possible de trouver un nombre réel $\delta > 0$ (dépendant de ε, de x_0 mais pas de x) tel que l'inégalité $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique l'inégalité $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. Regardons si un tel δ existe ; à cet effet, développons l'expression $\big|f(x) - f(x_0)\big|$:

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{{x_0}^2}\right| = \left|\frac{{x_0}^2 - x^2}{{x_0}^2\, x^2}\right| = \frac{|{x_0}^2 - x^2|}{{x_0}^2\, x^2} \\ &= \frac{|x_0 - x|\,|x_0 + x|}{{x_0}^2\, x^2} = \frac{|x - x_0|\,|x + x_0|}{{x_0}^2\, x^2} \leqslant \frac{\delta\,|x + x_0|}{{x_0}^2\, x^2} \,,\end{aligned}$$

  du fait que, selon la définition, $\delta > 0$ est un nombre réel tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$. Or, toujours selon la définition, on cherche à avoir $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. On serait donc tenté d'écrire $\frac{\delta\,|x+x_0|}{{x_0}^2\, x^2} = \varepsilon$. Mais dans ce cas, l'expression de δ dépendrait non seulement de ε et de x_0, mais également de x, ce qui n'est pas cohérent avec la définition. Ce souci peut être écarté en fixant momentanément la valeur de δ ; en choisissant par exemple $\delta = \frac{1}{2}\, x_0$, il vient $|x - x_0| \leqslant \delta = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow -\frac{x_0}{2} \leqslant x - x_0 \leqslant \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\,x_0}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}\, x_0\,;\, \frac{3}{2}\, x_0\right]$; dans ces circonstances, l'expression $\frac{1}{x^2}$ est définie (vu que $x \neq 0$) et :

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \frac{\delta\,|x + x_0|}{{x_0}^2\, x^2} \leqslant \frac{\delta\,\left|\frac{3}{2}\, x_0 + x_0\right|}{{x_0}^2 \left(\frac{1}{2}\, x_0\right)^2} = \frac{10\,\delta}{{x_0}^3} \,.$$

  Pour maximiser la fraction $\frac{\delta\,|x+x_0|}{{x_0}^2\, x^2}$, on a pris, dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\, x_0\,;\, \frac{3}{2}\, x_0\right]$, la plus grande valeur possible de x au numérateur et la plus petite au dénominateur. Comme $\frac{10\,\delta}{{x_0}^3}$ ne dépend plus de x, on peut poser :

$$\frac{10\,\delta}{{x_0}^3} = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \frac{{x_0}^3\,\varepsilon}{10} \,.$$

  Et ainsi, en considérant $\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}\,;\, \frac{{x_0}^3\,\varepsilon}{10}\right\}$, *i.e.* la plus petite valeur entre $\frac{x_0}{2}$ et $\frac{{x_0}^3\,\varepsilon}{10}$, on peut affirmer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

- ◇ Soit $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$. Considérons à nouveau un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, comme précédemment :

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{{x_0}^2}\right| = \frac{|{x_0}^2 - x^2|}{{x_0}^2\, x^2} = \frac{|x_0 - x|\,|x_0 + x|}{{x_0}^2\, x^2} \leqslant \frac{\delta\,|x + x_0|}{{x_0}^2\, x^2} \,,$$

du fait que $|x - x_0| \leqslant \delta$. Comme $x_0 < 0$, il convient de choisir ici, momentanément, $\delta = -\frac{x_0}{2}$, de sorte que δ soit strictement positif ; il vient alors $|x - x_0| \leqslant \delta = -\frac{x_0}{2}$, ce qui peut se récrire sous la forme $\frac{x_0}{2} \leqslant x - x_0 \leqslant -\frac{x_0}{2} \Leftrightarrow \frac{3\,x_0}{2} \leqslant x \leqslant \frac{x_0}{2}$, ou encore $x \in \left[\frac{3}{2}\,x_0\,;\,\frac{1}{2}\,x_0\right]$; dans ces circonstances, l'expression $\frac{1}{x^2}$ est définie (vu que $x \neq 0$) et :

$$\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \;\leqslant\; \frac{\delta\,|x + x_0|}{{x_0}^2\,x^2} \;\leqslant\; \frac{\delta\,\bigl|\frac{3}{2}\,x_0 + x_0\bigr|}{{x_0}^2\left(\frac{1}{2}\,x_0\right)^2} \;=\; -\frac{10\,\delta}{{x_0}^3}\,.$$

Les choix de x au numérateur et au dénominateur sont les mêmes que dans le cas précédent : avec la présence de la valeur absolue, c'est effectivement $\frac{3}{2}\,x_0$ qui maximise le numérateur, et c'est aussi $\frac{1}{2}\,x_0$ qui minimise le dénominateur (du fait de l'élévation au carré). Noter, en outre, que le signe négatif apparaissant dans l'expression finale vient du retrait de la valeur absolue au numérateur. Comme $-\frac{10\,\delta}{{x_0}^3}$ ne dépend plus de x, on peut poser :

$$-\frac{10\,\delta}{{x_0}^3} = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = -\frac{{x_0}^3\,\varepsilon}{10}\,.$$

Et ainsi, en prenant $\delta = \min\left\{-\frac{x_0}{2}\,;\,-\frac{{x_0}^3\,\varepsilon}{10}\right\}$, on peut affirmer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

◇ f n'est pas continue en $x_0 = 0$. En effet, selon le premier des exemples 2.7.8, il existe, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $0 < |x - 0| \leqslant \delta$ impliquent $f(x) \geqslant \upsilon$; autrement dit, $f(x)$ tend vers ∞ lorsque x tend vers 0. En outre, f n'est pas définie en 0. La limite en 0 valant ∞, la discontinuité en $x_0 = 0$ est de type asymptotique.

2. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = x^3\,.$$

Montrons que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour faciliter le raisonnement, il convient de distinguer trois cas : $x_0 = 0$, $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$.

◇ Soit $x_0 = 0$. Considérons alors un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Si f est continue en $x_0 = 0$, il doit être possible de trouver un nombre réel $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ε mais pas de x) tel que l'inégalité $|x - 0| = |x| \leqslant \delta$ implique l'inégalité $\bigl|f(x) - f(0)\bigr| = \bigl|f(x)\bigr| \leqslant \varepsilon$. Cherchons δ ; pour cela, développons l'expression $\bigl|f(x) - f(0)\bigr|$:

$$\bigl|f(x) - f(0)\bigr| = \bigl|x^3 - 0^3\bigr| = |x^3| = |x|^3 \leqslant \delta^3\,,$$

du fait que, selon la définition, $|x| \leqslant \delta$. Comme δ^3 ne dépend pas de x, on peut poser :

$$\delta^3 = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \sqrt[3]{\varepsilon}\,.$$

Et ainsi, en considérant $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$, on peut affirmer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x| \leqslant \delta$ implique $\bigl|f(x) - f(0)\bigr| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en $x_0 = 0$.

◇ Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons alors un nombre réel $\varepsilon > 0$. Si f est continue en x_0, il doit être possible de trouver un nombre réel $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ε, de x_0 mais non de x) tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. Cherchons δ ; pour ce faire, développons l'expression $\big|f(x) - f(x_0)\big|$:

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \big|x^3 - {x_0}^3\big| = \big|(x - x_0)(x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2)\big| \\ &= |x - x_0|\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big| \leqslant \delta\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big|,\end{aligned}$$

du fait que, selon la définition, $|x - x_0| \leqslant \delta$. Comme la dernière expression obtenue dépend encore de x, il n'est pas possible, à ce stade, de poser $\varepsilon = \delta\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big|$ et de conclure. Afin de faire disparaître la dépendance en x, il convient de fixer momentanément la valeur de δ ; en choisissant par exemple $\delta = x_0$, il vient $|x - x_0| \leqslant \delta = x_0$, ce qui peut se récrire sous la forme $-x_0 \leqslant x - x_0 \leqslant x_0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2\,x_0$, ou encore $x \in [0\,;\,2\,x_0]$; et ainsi :

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &\leqslant \delta\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big| \\ &\leqslant \delta\,\big|(2\,x_0)^2 + 2\,x_0\,x_0 + {x_0}^2\big| = \delta\,\big|7\,{x_0}^2\big| = 7\,{x_0}^2\,\delta\,;\end{aligned}$$

pour maximiser l'expression en valeur absolue, on a pris la plus grande valeur de x dans l'intervalle $[0\,;\,2\,x_0]$, qui est $x = 2\,x_0$. Comme $7\,{x_0}^2\,\delta$ ne dépend plus de x, on peut poser :

$$7\,{x_0}^2\,\delta = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{7\,{x_0}^2}\,.$$

Et ainsi, en considérant $\delta = \min\left\{x_0\,;\,\frac{\varepsilon}{7\,{x_0}^2}\right\}$, on peut affirmer que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ Soit $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$. Considérons alors un nombre réel $\varepsilon > 0$. En suivant un raisonnement similaire à celui mené précédemment :

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \big|x^3 - {x_0}^3\big| = \big|(x - x_0)(x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2)\big| \\ &= |x - x_0|\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big| \leqslant \delta\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big|,\end{aligned}$$

du fait que, selon la définition, $|x - x_0| \leqslant \delta$. Comme $x_0 < 0$, il convient de choisir ici, momentanément $\delta = -x_0$, de sorte que δ soit strictement positif ; il vient alors $|x - x_0| \leqslant \delta = -x_0$, ce qui peut s'écrire sous la forme $x_0 \leqslant x - x_0 \leqslant -x_0 \Leftrightarrow 2\,x_0 \leqslant x \leqslant 0$, ou encore $x \in [2\,x_0\,;\,0]$; et ainsi :

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &\leqslant \delta\,\big|x^2 + x\,x_0 + {x_0}^2\big| \\ &\leqslant \delta\,\big|(2\,x_0)^2 + 2\,x_0\,x_0 + {x_0}^2\big| = \delta\,\big|7\,{x_0}^2\big| = 7\,{x_0}^2\,\delta\,;\end{aligned}$$

même si $x_0 < 0$, c'est lorsque $x = 2\,x_0$ (qui est la plus petite valeur possible dans l'intervalle $[2\,x_0\,;\,0]$) que l'expression en valeur absolue est maximisée. Comme $7\,{x_0}^2\,\delta$ ne dépend plus de x, on peut poser :

$$7\,{x_0}^2\,\delta = \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{7\,{x_0}^2}\,.$$

Et ainsi, en considérant $\delta = \min\left\{-x_0\,;\ \frac{\varepsilon}{7\,x_0^2}\right\}$, on peut affirmer que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est donc continue en $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

En résumé, la fonction réelle f, donnée par $f(x) = x^3$, est continue en $x_0 = 0$, en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et également en tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$; la fonction f est donc continue dans tout l'ensemble $\mathbb{R}$.

3. Soit f la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - 2}{x - 1}\,.$$

Cette fonction est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; pour le prouver, il suffit de mener un raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent. En $x = 1$, f n'est pas continue, vu qu'elle n'est pas définie en ce point de l'axe x. Cela étant, sa limite lorsque x tend vers 1 existe et vaut 4 (*cf.* deuxième exemple des exemples 2.7.3). f possède donc une discontinuité de type trou en $x = 1$. Elle peut, de ce fait, être prolongée par continuité en 1 ; la fonction $\bar{f}$, donnée par :

$$\bar{f}(x) \;=\; 2\,x + 2\,, \qquad \text{où } x \in \mathbb{R}\,,$$

constitue un prolongement par continuité de f. En effet :

$$f(x) \;=\; \frac{2\,x^2 - 2}{x - 1} \;=\; \frac{2\,(x-1)(x+1)}{x - 1} \;=\; 2\,(x+1) \;=\; 2\,x + 2 \;=\; \bar{f}(x)\,,$$

quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et :

$$\lim_{x \to 1} f(x) \;=\; 4 \;=\; \bar{f}(1)\,.$$

2.9.7 Illustrations : 1. Reprenons la fonction f de la première des illustrations 2.2.3 ; rappelons son expression :

$$q \;=\; \frac{1}{\frac{1}{200\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{p}}\,.$$

Les calculs de limites effectués dans l'illustration 2.7.10 permettent d'affirmer que f possède :

- ◇ une discontinuité de type trou en $p = 0\,\mathrm{mm}$,
- ◇ une discontinuité de type asymptotique en $p = 200\,\mathrm{mm}$.

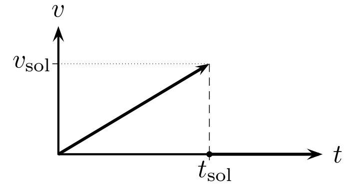
Noter que la fonction $\bar{f}$, donnée par :

$$\bar{f} \;=\; \frac{p \cdot 200\,\mathrm{mm}}{p - 200\,\mathrm{mm}}\,,$$

constitue le prolongement par continuité de f. Remarquer que le prolongement par continuité n'est possible qu'en $p = 0\,\mathrm{mm}$ et non en $p = 200\,\mathrm{mm}$.

2. Reprenons la fonction f de la deuxième des illustrations 2.2.3. Une observation attentive du graphe permet de conclure que f ne possède aucune discontinuité. Le graphe peut, en effet, être tracé en une seule fois, sans devoir lever le crayon.

3. Une personne se trouve dans la nacelle d'une mongolfière, à une hauteur h au-dessus du sol. À un instant donné, elle lâche un sac de sable et enclenche simultanément un chronomètre. À supposer que les frottements avec l'air sont négligeables, le sac tombe en chute libre, avec une accélération constante, jusqu'à ce qu'il atteigne le sol. En bonne approximation, la norme v de la vitesse du sac peut alors s'écrire :



$$v(t) = \begin{cases} (9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t & \text{si } 0\,\mathrm{s} \leqslant t < t_{\mathrm{sol}} \\ 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} & \text{si } t \geqslant t_{\mathrm{sol}} \end{cases},$$

où t est le temps qui s'écoule sur le chronomètre et t_{sol} l'instant où le sac touche le sol. La grandeur v, telle qu'écrite ici, peut être vue comme une fonction réelle de la variable t. Cette fonction présente manifestement une discontinuité de type saut en $t = t_{\mathrm{sol}}$; en effet (*cf.* graphe de v ci-dessus) :

$$\lim_{\substack{t\to t_{\mathrm{sol}}\\ t<t_{\mathrm{sol}}}} v(t) = \lim_{\substack{t\to t_{\mathrm{sol}}\\ t<t_{\mathrm{sol}}}} (9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t = (9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_{\mathrm{sol}} \neq 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \lim_{\substack{t\to t_{\mathrm{sol}}\\ t>t_{\mathrm{sol}}}} v(t)\,.$$

Note : Dans tout problème de mécanique en rapport avec la chute libre d'un corps, lorsqu'il est question de trouver la vitesse du corps en question juste avant qu'il ne touche le sol, il s'agit en fait de déterminer la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers t_{sol} par valeurs plus petites (ce qui correspond à v_{sol} sur la figure ci-dessus). Dans la pratique, le calcul de limite est rarement effectué proprement : la variable t est simplement remplacée par l'instant t_{sol} dans l'expression $(9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t$, sans faire allusion à un quelconque symbole de limite.

2.9.8 Propriétés : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, définies toutes les deux dans un voisinage d'un nombre réel x_0, et continues en x_0. Alors :

- $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0, quels que soient les nombres réels α et β ;
- fg est continue en x_0 ;
- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0, pour autant que $g(x_0) \neq 0$.

Gardons les hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g : D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et continue en $f(x_0)$. Alors :

- $g \circ f$ est continue en x_0.

Tous ces résultats découlent des définitions 2.7.1 et 2.9.1. Le détail des raisonnements est présenté à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B.

2.9.9 Remarques : • Dans la quatrième des propriétés précédentes (concernant la continuité de la composition des fonctions f et g), il n'est pas nécessaire de poser une hypothèse similaire à celle formulée dans la cinquième des propriétés 2.7.11 (concernant la limite de la composition des fonctions f et g), à savoir que $f(x) \neq f(x_0)$ quel que soit $x \in V \setminus \{x_0\}$, où V est un voisinage de x_0. La raison en est que g est définie en $f(x_0)$ (vu que f est définie en x_0) ; alors que dans la cinquième des propriétés 2.7.11, g n'est pas nécessairement définie en ℓ_1.

- De la définition de la continuité d'une fonction réelle en un point, ainsi que des propriétés précédentes, on déduit immédiatement que :
  - ◇ toute fonction polynomiale réelle (*i.e.* toute fonction dont l'expression est un polynôme réel en la variable x) est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
  - ◇ toute fonction rationnelle (*i.e.* toute fonction dont l'expression est une fraction contenant aussi bien au numérateur qu'au dénominateur un polynôme réel en la variable x) est continue en tout nombre réel x_0 de son domaine de définition.

2.10 Théorèmes relatifs aux fonctions continues

Les fonctions réelles continues possèdent des propriétés qui sont pour la plupart intuitives, mais qui ne se démontrent pas aisément. Ces propriétés sont résumées dans les théorèmes qui suivent.

2.10.1 Théorème : *Soit $f: D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, f prend, dans $[a;\, b]$, au moins une fois les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, ainsi que toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Ce résultat est connu sous le nom de* ***théorème des valeurs intermédiaires****.*

Preuve : Une démonstration détaillée de ce résultat, utilisant comme outil les suites de nombres, est donnée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B.

On peut raisonner intuitivement comme suit. Dire qu'une fonction réelle f est définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, revient à dire que le graphe de f, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), peut être tracé, entre les points $\big(a\,;\, f(a)\big)$ et $\big(b\,;\, f(b)\big)$ sans devoir lever le crayon. Si la coordonnée x de la pointe du crayon balaye toutes les valeurs réelles comprises entre a et b, et que le crayon n'est levé à aucun moment durant le tracé, la coordonnée y de la pointe du crayon doit nécessairement balayer au moins une fois toutes les valeurs réelles comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. □

2.10.2 Corollaire : *Soit $f: D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$). Si f est continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe un nombre réel $c \in [a;\, b]$ pour lequel $f(c) = 0$.*

Preuve : Ce résultat est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires. Pour s'en convaincre, considérons une fonction réelle $f: D \to E$, définie et continue dans un intervalle $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires (dont les hypothèses sont satisfaites ici), f prend, dans $[a; b]$, au moins une fois les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, ainsi que toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. En conséquence, f prend, dans $[a; b]$, au moins une fois la valeur 0, vu que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Ce qui revient à dire qu'il existe, dans $[a; b]$, au moins un nombre réel c pour lequel $f(c) = 0$. $\square$

2.10.3 Théorème : *Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, dans $[a; b]$, f atteint une valeur minimale m ainsi qu'une valeur maximale M (cf. définition 2.4.12) ; autrement dit, il existe $x_m \in [a; b]$ et $x_M \in [a; b]$ tels que $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, où m et M sont deux nombres réels satisfaisant $m = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M$ pour tout $x \in [a; b]$. En outre, f prend au moins une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[m; M]$. Un tel résultat est connu sous le nom de* ***théorème du minimum et du maximum****, ou sous le nom de* ***théorème des valeurs extrêmes****.*

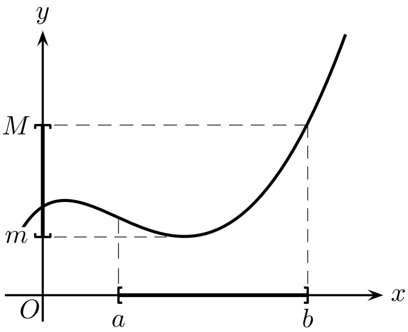
Preuve : Une démonstration détaillée de ce résultat est donnée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B.

On peut raisonner intuitivement comme suit. Dire qu'une fonction réelle f est définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, c'est dire que f ne possède aucune discontinuité, d'aucun type dans $[a; b]$; en particulier, f ne possède aucune discontinuité de type asymptotique dans $[a; b]$. Lors du tracé du morceau de graphe de f pour lequel $x \in [a; b]$, le crayon ne part donc à aucun moment à l'infini. De ce fait, et en vertu de la continuité de f dans $[a; b]$, il existe, parmi les points qui forment le morceau de graphe en question, au moins un point de plus petite deuxième coordonnée et aussi au moins un point de plus grande deuxième coordonnée. Ce qui revient à dire que la fonction f atteint, dans $[a; b]$, une valeur minimale ainsi qu'une valeur maximale. Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f atteint aussi toutes les valeurs comprises entre sa valeur minimale et sa valeur maximale dans $[a; b]$. $\square$

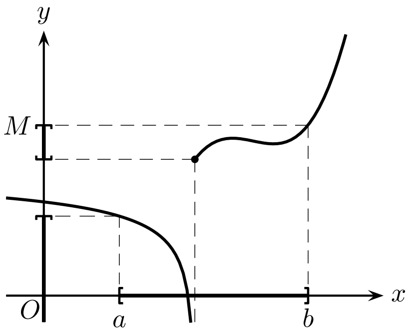
2.10.4 Remarques :

- Les deux théorèmes précédents peuvent se résumer en disant que l'image d'un intervalle fermé, par une fonction réelle définie et continue dans ledit intervalle, est un intervalle fermé.

- Dans les deux théorèmes précédents, l'hypothèse de continuité de la fonction f dans $[a; b]$ est essentielle ; si elle n'est pas satisfaite, les conclusions ne sont plus nécessairement vraies (*cf.* figures ci-dessous).



f continue : l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.

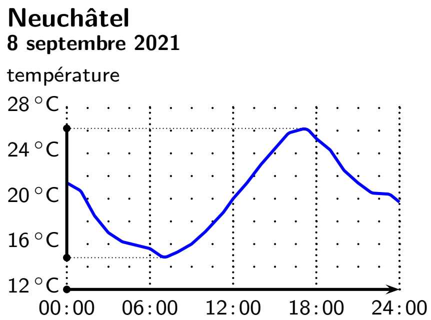


f non continue : l'image d'un intervalle fermé n'est pas nécessairement un intervalle fermé.

2.10.5 Illustration : Reprenons la fonction f de la deuxième des illustrations 2.2.3. La figure ci-dessous montre que f atteint son minimum et son maximum dans l'intervalle $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[$:

- ◇ f atteint son minimum à 7 h 00 environ ; le minimum est 14,8 °C ;
- ◇ f atteint son maximum à 17 h 00 environ ; le maximum est 26,2 °C.

En outre, f atteint toutes les valeurs comprises entre 14,8 °C et 26,2 °C. Noter que si f atteint effectivement son minimum et son maximum dans $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[$, c'est grâce au fait que f est continue dans $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[$ d'une part, et d'autre part que l'instant où le minimum (respectivement le maximum) est atteint est strictement supérieur à 0 h 00 et strictement inférieur à 24 h 00. Si la température juste avant 24 h 00 avait été strictement inférieure à 14,8 °C (ou au contraire strictement supérieure à 26,2 °C), la fonction n'admettrait pas de minimum (respectivement de maximum) dans l'intervalle $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00[$. Pour qu'elle l'admette, il faudrait considérer l'intervalle fermé $[0\,\text{h}\,00\,;\,24\,\text{h}\,00]$ (intervalle dans lequel le théorème du minimum et du maximum est alors applicable).



2.10.6 Proposition : *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Supposons que $J = f(I)$; autrement dit, supposons que J est l'ensemble image I_f de f. Alors :*

- *$f : I \to J$ est bijective ;*
- *l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;*
- *$f : I \to J$ admet une fonction réciproque $^{r}f : J \to I$ qui est continue est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J.*

Preuve : Une démonstration détaillée de ce résultat est donnée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B.

On peut raisonner intuitivement comme suit. Soit $f : I \to J$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses de la proposition.

- La fonction f étant strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, elle est injective. En effet, quels que soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, ou bien $x_1 < x_2$ et donc $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$, ou bien $x_2 < x_1$ et donc $f(x_2) < f(x_1)$ (respectivement $f(x_2) > f(x_1)$) ; dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$. En outre, f est surjective, par hypothèse. Donc f est bijective.
- Notons $I =]a; b[$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Soient alors x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $a < x_1 < x_2 < b$. La fonction f étant continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, et donc dans $[x_1; x_2]$, elle prend les valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, ainsi que toutes les valeurs comprises entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ (*cf.* théorème des valeurs intermédiaires) ; $f([x_1; x_2])$ est donc un intervalle. Une telle conclusion étant valable pour tous x_1, x_2 tels que $a < x_1 < x_2 < b$, y compris lorsque x_1 tend vers a par valeurs plus grandes et x_2 par valeurs plus petites, permet d'affirmer que l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle. Cet intervalle est ouvert, vu qu'il contient tous les nombres réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$, mais pas $f(a)$, ni $f(b)$.
- La fonction $f : I \to J$ étant bijective, elle admet une réciproque ; notons ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ cette réciproque. Rappelons que le graphe de ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ s'obtient à partir du graphe de f en lui appliquant, dans $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), une symétrie axiale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$. De fait, si la fonction $f : I \to J$ est continue dans I, *i.e.* si le graphe de f peut, dans $I \times J$ ($\subset \mathbb{R}^2$), être tracé sans devoir lever le crayon, alors le graphe de ${}^{\mathrm{r}}\!f$ peut, dans $J \times I$ ($\subset \mathbb{R}^2$), être également tracé sans devoir lever le crayon ; ce qui revient à dire que ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ est continue dans J. Aussi, si f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, alors ${}^{\mathrm{r}}\!f$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J. $\square$

2.10.7 Remarque : La proposition précédente possède une variante qui peut être formulée comme suit.

2.10.8 Corollaire : *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Supposons que J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :*

- *f est continue dans I ;*
- *$f : I \to J$ est bijective ;*
- *l'intervalle J est ouvert ;*
- *$f : I \to J$ admet une fonction réciproque ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ qui est continue est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J.*

Preuve : Elle est similaire à celle de la proposition précédente, notamment en ce qui concerne les deux derniers points. Pour ce qui est du premier point, il se déduit du fait que $f : I \to J$ est surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, d'une part, et d'autre part que l'ensemble J est un intervalle.

Une démonstration détaillée de ce corollaire est donnée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe B. $\square$

2.10.9 Remarque : La proposition 2.10.6 et le corollaire 2.10.8 sont valables, que l'intervalle de départ I et/ou l'intervalle d'arrivée J soient bornés ou infinis.

2.10.10 Exemple : La fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est bijective, continue et strictement croissante (dans $\mathbb{R}_+^*$) ; elle admet donc une réciproque (*cf.* premier des exemples 2.6.4) ; selon la proposition 2.10.6, cette réciproque est continue et strictement croissante (dans $\mathbb{R}_+^*$) :

$${}^{r}\!f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Aussi, la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est bijective, continue et strictement décroissante (dans $\mathbb{R}_-^*$) ; elle admet donc une réciproque (*cf.* premier des exemples 2.6.4) ; selon la proposition 2.10.6, cette réciproque est continue et strictement décroissante (dans $\mathbb{R}_+^*$) :

$${}^{r}\!f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_-^* \\ x & \longmapsto & -\sqrt{x} \end{array}$$

2.11 Courbes planes

La notion de continuité ayant été traitée, il est envisageable à présent de donner une définition rigoureuse de l'idée de *ligne*, évoquée dans la première section du présent chapitre.

2.11.1 Définition : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. On appelle *courbe plane* tout ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{C} \;=\; \left\{ (x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x;\, y) = \big(\gamma_x(t)\,;\, \gamma_y(t)\big),\ \text{où } t \in I \right\},$$

où $\gamma_x\colon I \to \mathbb{R}$ et $\gamma_y\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans I, l'ensemble I étant un intervalle dans $\mathbb{R}$. Les équations :

$$\begin{cases} x &= \gamma_x(t) \\ y &= \gamma_y(t) \end{cases}$$

sont appelées *équations paramétriques*.

2.11.2 Notation : Les équations paramétriques figurant dans la définition précédente se notent fréquemment :

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases} .$$

Avec cette écriture, x prend à la fois le rôle de variable et celui de fonction ; il en est de même pour y. Si cette double affectation est généralement acceptée, c'est parce qu'elle n'engendre pas de réelle ambiguité.

2.11.3 Remarques :

- Retranscrite en mots, la précédente définition exprime le fait qu'une courbe plane est une sorte de déformation, dans le plan euclidien, d'une droite ou d'un segment de droite ; l'agent responsable de la déformation étant l'ensemble des deux fonctions γ_x et γ_y.
- La continuité des fonctions γ_x et γ_y, évoquée dans la définition précédente, assure le fait que toute courbe plane $\mathcal{C}$ est une figure géométrique qui peut être tracée, dans le plan euclidien, en une fois, sans devoir lever le crayon : comme à tout point $(x_0;\, y_0) \in \mathcal{C}$ peut être associé (au moins) un élément t_0 dans l'intervalle I pour lequel $x_0 = \gamma_x(t_0)$ et $y_0 = \gamma_y(t_0)$, et comme γ_x et γ_y sont continues dans I, alors $(x_0;\, y_0) = \big(\gamma_x(t_0)\,;\, \gamma_y(t_0)\big) \in \mathcal{C}$ peut être considéré comme la limite de $(x;\, y) = \big(\gamma_x(t)\,;\, \gamma_y(t)\big) \in \mathcal{C}$ lorsque t tend vers t_0.
- Les considérations faites dans les deux points précédents permettent de dire que les idées de *courbe plane* (définie plus haut) et de *ligne* dans le plan euclidien (mentionnée dans la section 2.1 du présent chapitre) ne sont qu'un unique et même concept : les deux notions évoquent une figure géométrique d'« épaisseur nulle » qui peut être tracée, dans le plan euclidien, en une fois, sans devoir lever le crayon. Les termes *courbe plane* et *ligne* peuvent donc être considérés comme des synonymes. Dans la suite, c'est l'expression *courbe plane* qui sera davantage utilisée.
- Le graphe de n'importe quelle fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$, continue dans I, où I est un intervalle dans $\mathbb{R}$, peut être considéré comme une courbe plane. En effet, le graphe d'une telle fonction f, qui est l'ensemble :

  $$\big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x;\, y) = \big(x\,;\, f(x)\big), \text{ où } x \in I\big\}\,,$$

  peut s'écrire sous la forme :

  $$\Big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, (x;\, y) = \big(t\,;\, f(t)\big), \text{ où } t \in I\Big\}\,,$$

  qui remplit les conditions de la définition de courbe plane.

- Tout graphe de fonction réelle n'est pas nécessairement une courbe plane.
  - ◇ Il existe des fonctions qui ont pour graphe une réunion de plusieurs courbes planes qui n'ont entre elles aucun point en commun ; le nombre de courbes peut être fini (comme dans le cas de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$, dont le graphe est constitué de deux courbes planes qui n'ont aucun point en commun) ou infini (comme dans le cas de la fonction *tangente*, définie dans la section C.8 de l'annexe C, dont le graphe est formé d'une infinité dénombrable de courbes planes qui ne partagent aucun point en commun).
  - ◇ Certaines fonctions ont pour graphe un ensemble de points ; le nombre de points de l'ensemble peut être fini (comme dans le cas de la fonction $f : \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x$) ou infini dénombrable (comme dans le cas de la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x$), ou encore infini non dénombrable (comme dans le cas de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$).

  À partir de ces cas, on peut en imaginer d'autres ; on peut par exemple concevoir une fonction dont le graphe est constitué d'un ensemble de courbes planes n'ayant aucun point en commun, et d'un ensemble de points qui ne forment pas une courbe. Noter, pour terminer, que la caractérisation *infinité non dénombrable de points* est quelque peu ambigue : il peut s'agir, selon les circonstances, d'une courbe, d'une réunion de courbes, d'un ensemble de points que l'on ne peut tracer qu'en levant le crayon pour passer d'un point à l'autre... Chaque fois qu'il est question d'ensemble de points, il convient donc d'apporter les précisions nécessaires, afin d'éviter toute confusion.

Chapitre 3

Calcul différentiel

Achille est un héros légendaire de la mythologie grecque, qui apparaît dans le récit de la *guerre de Troie*. Connu pour être un coureur particulièrement rapide, il est l'un des acteurs d'une mise en scène imaginée par le philosophe grec *Zénon d'Élée* (490-430 av. J.-C.), ayant pour but d'illustrer une invraisemblance, connue sous le nom de *paradoxe d'Achille et de la tortue*. La situation est la suivante : Achille dispute une course avec une tortue. L'animal étant réputé particulièrement lent, Achille laisse au départ une longueur d'avance au reptile. Selon Zénon, Achille ne peut alors jamais rattraper la tortue, son argument étant le suivant : pendant qu'Achille court jusqu'à la position ou se trouvait la tortue initialement, celle-ci avance d'une certaine distance et se trouve donc devant Achille. En répétant ce raisonnement autant de fois que souhaité, il semble ressortir qu'Achille ne peut jamais rattraper la tortue. Pourtant, il n'est pas difficile de s'imaginer qu'un être humain dépasse une tortue... L'expérience peut le révéler.

L'élément essentiel qui manque dans le raisonnement de Zénon, et dont l'absence mène à une conclusion erronée, est l'aspect du temps qui s'écoule. Chaque étape décrite dans le raisonnement de Zénon est de plus en plus courte, si bien qu'Achille rattrape finalement la tortue. Deux méthodes, au moins, permettent de s'en convaincre. Afin de les exposer clairement, supposons que les vitesses d'Achille et de la tortue, présumées constantes, sont respectivement $v_{\mathrm{A}} = 10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $v_{\mathrm{t}} = 0{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, et qu'Achille laisse une distance d'avance $d_1 = 100\,\mathrm{m}$ à la tortue.

- *Première méthode* :
  Soit T_1 la durée de la première étape, *i.e.* le temps que met Achille pour parcourir la distance $d_1 = 100\,\mathrm{m}$. Comme v_{A} est constante, alors :

$$d_1 = v_{\mathrm{A}}\,T_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_1 = \frac{d_1}{v_{\mathrm{A}}}\,.$$

  Pendant ce temps, la tortue avance de la distance $d_2 = v_{\mathrm{t}}\,T_1 = \frac{d_1\,v_{\mathrm{t}}}{v_{\mathrm{A}}} = d_1\,\frac{v_{\mathrm{t}}}{v_{\mathrm{A}}}$. Soit T_2 la durée de la deuxième étape, *i.e.* le temps que met Achille pour parcourir la distance d_2. Alors :

$$d_2 = v_{\mathrm{A}}\,T_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_2 = \frac{d_2}{v_{\mathrm{A}}} = d_1\,\frac{v_{\mathrm{t}}}{{v_{\mathrm{A}}}^2} = \frac{d_1}{v_{\mathrm{A}}}\,\frac{v_{\mathrm{t}}}{v_{\mathrm{A}}}\,.$$

Pendant ce temps la tortue avance de la distance $d_3 = v_\mathrm{t}\, T_2 = d_1 \frac{v_\mathrm{t}^2}{v_\mathrm{A}^2} = d_1 \big(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\big)^2$. Soit T_3 la durée de la troisième étape, *i.e.* le temps que met Achille pour parcourir la distance d_3. Alors :

$$d_3 \;=\; v_\mathrm{A}\, T_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_3 \;=\; \frac{d_3}{v_\mathrm{A}} \;=\; \frac{d_1}{v_\mathrm{A}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^2 .$$

En continuant ainsi de suite, il ressort que l'étape n (où $n \in \mathbb{N}^*$) a une durée :

$$T_n \;=\; \frac{d_1}{v_\mathrm{A}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^{n-1} \;=\; \frac{d_1}{v_\mathrm{t}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^{n} .$$

Une observation attentive de la dernière expression ci-dessus révèle que T_n est le terme général d'une suite géométrique (T_n) de raison $\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}} = \frac{0{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = \frac{1}{100} < 1$. Noter que la somme de l'infinité des termes de cette suite (*i.e.* la somme des durées des première, deuxième, troisième... étapes) n'est rien d'autre que la durée totale T que met Achille pour rattraper la tortue. La raison étant strictement inférieure à 1, cette durée T est finie :

$$\begin{aligned}
T \;&=\; T_1 + T_2 + T_3 + \ldots \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} T_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1}{v_\mathrm{t}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^{n} \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1}{v_\mathrm{A}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^{n-1} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1}{v_\mathrm{A}} \left(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\right)^{k} \;=\; \frac{d_1}{v_\mathrm{A}} \, \frac{1}{1 - \frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}} \\
&=\; \frac{100\,\mathrm{m}}{10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \, \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \;=\; 10\,\mathrm{s}\, \frac{1}{\frac{99}{100}} \;=\; 10\,\mathrm{s}\, \frac{100}{99} \;=\; \frac{1000}{99}\,\mathrm{s}\ ;
\end{aligned}$$

le passage de la première à la deuxième ligne de calcul se justifie par le fait que $\big(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\big)^n = \frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}} \big(\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{A}}\big)^{n-1}$.

- *Deuxième méthode* :
  Prenons un axe gradué, que l'on note z, et plaçons-le selon la direction et le sens de la course, de sorte que l'origine soit à l'endroit où se trouve Achille au départ. Posons, en outre, l'origine du temps à l'instant où la course débute. Dans ces circonstances, les positions d'Achille $z_\mathrm{A}(t)$ et de la tortue $z_\mathrm{t}(t)$ s'écrivent $z_\mathrm{A}(t) = v_\mathrm{A}\, t$ et $z_\mathrm{t}(t) = v_\mathrm{t}\, t + d_1$, où d_1 est la distance qui sépare Achille de la tortue au début de la course et t le temps qui s'écoule. Notons T l'instant où Achille rejoint la tortue. À cet instant, les positions d'Achille et de la tortue sont égales : $z_\mathrm{A}(T) \;=\; z_\mathrm{t}(T)$; concrètement :

$$v_\mathrm{A}\, T \;=\; v_\mathrm{t}\, T + d_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_\mathrm{A}\, T - v_\mathrm{t}\, T \;=\; d_1 \quad \Leftrightarrow \quad (v_\mathrm{A} - v_\mathrm{t})\, T \;=\; d_1 .$$

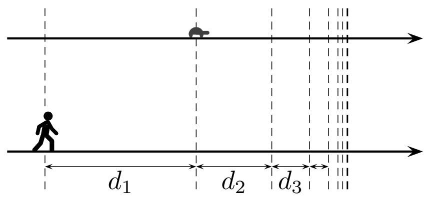
Ainsi :

$$T \;=\; \frac{d_1}{v_\mathrm{A} - v_\mathrm{t}} \;=\; \frac{100\,\mathrm{m}}{10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 0{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \;=\; \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \;=\; \frac{1000\,\mathrm{m}}{99\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \;=\; \frac{1000}{99}\,\mathrm{s}\,.$$

Manifestement, les deux méthodes conduisent au même résultat. La première méthode illustre bien le fait qu'une infinité d'étapes n'implique pas une durée infinie ; l'étude des suites géométriques dans le premier chapitre avait déjà mis en évidence ce type de constat. La vitesse de chacun des protagonistes ne changeant pas durant la course, la durée de chaque étape ne peut que diminuer, de sorte que :

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{d_1}{T_1} = \frac{d_2}{T_2} = \frac{d_3}{T_3} = \ldots = \lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{T_k} \,,$$

$$v_{\mathrm{t}} = \frac{d_2}{T_1} = \frac{d_3}{T_2} = \frac{d_4}{T_3} = \ldots = \lim_{k\to\infty} \frac{d_{k+1}}{T_k} \,,$$



d_k étant la distance parcourue par Achille lors de la k-ième étape et T_k la durée correspondante, où $k = 1, 2, 3, \ldots$ Les rapports $\frac{d_k}{T_k}$ et $\frac{d_{k+1}}{T_k}$ expriment ce que l'on appelle des *vitesses moyennes* : ce sont les vitesses moyennes d'Achille et de la tortue, respectivement, sur la k-ième étape. Lorsque k tend vers ∞, ce qui correspond à l'*infinitième* étape, les quantités d_k, et donc d_{k+1}, ainsi que T_k tendent vers 0. Cela étant, les rapports $\frac{d_k}{T_k}$ et $\frac{d_{k+1}}{T_k}$ ne tendent ni vers 0, ni vers ∞, mais vers v_{A} pour le premier, et vers v_{t} pour le second. Les quantités v_{A} et v_{t} ne sont, de fait, pas uniquement des rapports de grandeurs finies non nulles, mais également des quantités résultant de calculs de limites ; de telles quantités sont ce que l'on appelle des *vitesses instantanées* : ce sont les vitesses instantanées d'Achille et de la tortue, respectivement, à l'instant où Achille rejoint la tortue.

Noter que le concept de *vitesse moyenne*, que ce soit pour Achille ou la tortue, peut être défini non seulement sur les étapes mentionnées plus haut, mais dans n'importe quel intervalle de temps $[t_0;\, t_1]$, où t_0 et t_1 sont deux instants où Achille et la tortue avancent, tels que $t_0 < t_1$. Pour cela, il suffit de :

- prendre un axe gradué, que l'on note z, et de le placer selon la direction et le sens de la course,
- relever les positions d'Achille $z_{\mathrm{A}}(t_0)$ et $z_{\mathrm{A}}(t_1)$, ou celles de la tortue $z_{\mathrm{t}}(t_0)$ et $z_{\mathrm{t}}(t_1)$, aux instants t_0 et t_1 respectivement,
- calculer le rapport $\frac{z_{\mathrm{A}}(t_1)-z_{\mathrm{A}}(t_0)}{t_1-t_0}$ ou le rapport $\frac{z_{\mathrm{t}}(t_1)-z_{\mathrm{t}}(t_0)}{t_1-t_0}$. Par définition, ces rapports sont ce que l'on appelle les *vitesses moyennes* d'Achille et de la tortue, respectivement, dans l'intervalle $[t_0;\, t_1]$.

Pour ce qui est de la notion de *vitesse instantanée*, que ce soit pour Achille ou pour la tortue, elle peut être définie non seulement en l'instant où Achille rattrape la tortue, mais aussi en n'importe quel autre instant t_0 de la course. Pour cela, il suffit de :

- reprendre le rapport $\frac{z_{\mathrm{A}}(t_1)-z_{\mathrm{A}}(t_0)}{t_1-t_0}$ ou le rapport $\frac{z_{\mathrm{t}}(t_1)-z_{\mathrm{t}}(t_0)}{t_1-t_0}$, donnés précédemment, et d'en prendre la limite lorsque t_1 tend vers t_0, *i.e.* lorsque Δt tend vers 0, où $\Delta t = t_1 - t_0$. Par définition, les limites de ces rapports sont ce que l'on appelle les *vitesses instantanées* d'Achille et de la tortue, respectivement, à l'instant t_0.

Reprenons l'axe gradué z introduit précédemment, lors de la résolution du paradoxe de Zénon d'Élée avec la deuxième méthode proposée. Sur cet axe, la position d'Achille

$z_A(t)$ s'écrit, rappelons-le, $z_A(t) = v_A\, t$. De fait :

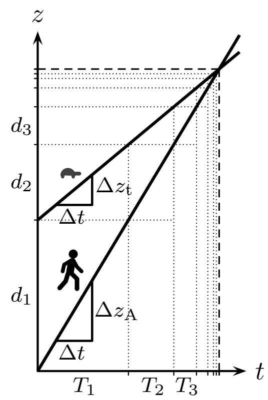
$$\frac{z_A(t_1) - z_A(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{z_A(t_0 + \Delta t) - z_A(t_0)}{\Delta t} = \frac{v_A(t_0 + \Delta t) - v_A\, t_0}{\Delta t}$$
$$= \frac{v_A\, t_0 + v_A\, \Delta t - v_A\, t_0}{\Delta t} = \frac{v_A\, \Delta t}{\Delta t} = v_A \;;$$

où $\Delta t = t_1 - t_0$. Aussi :

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{z_A(t_1) - z_A(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_A(t_0 + \Delta t) - z_A(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_A = v_A \,.$$

Pour ce qui est de la tortue, sa position $z_t(t)$ sur l'axe z mentionné précédemment s'écrit $z_t(t) = v_t\, t + d_1$. Des calculs similaires à ceux qui viennent d'être faits mènent au résultat v_t. Sans surprise, les quantités obtenues ici ne sont rien d'autre que les vitesses d'Achille et de la tortue, respectivement, introduites au début du présent chapitre.

Le diagramme ci-contre représente les positions d'Achille $z_A(t)$ et de la tortue $z_t(t)$ en fonction du temps t qui s'écoule. Le fait que la fonction $t \mapsto z_A(t)$ (respectivement $t \mapsto z_t(t)$) a pour graphe un morceau de droite illustre bien le fait que v_A (respectivement v_t) correspond aussi bien à la vitesse moyenne d'Achille (respectivement de la tortue) sur chaque étape qu'à sa vitesse instantanée en chaque instant de la course : v_A (respectivement v_t) n'est en effet rien d'autre que la pente du morceau de droite qui forme le graphe de $t \mapsto z_A(t)$ (respectivement $t \mapsto z_t(t)$) ; cette pente demeure la même, quelles que soient les quantités utilisées pour la calculer, grandes, petites ou même infiniment petites.

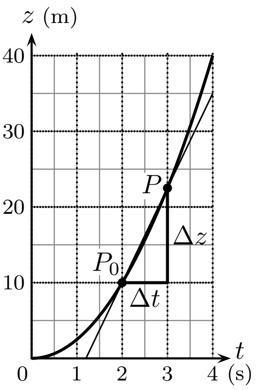


3.1 Tangente et vitesse instantanée

Dans le paradoxe formulé par Zénon d'Élée, que ce soit Achille ou la tortue, les deux avancent à vitesse constante ; autrement dit, les deux ont des vitesses instantanées qui ne changent pas durant toute la course. Ce fait a pour conséquence que la vitesse moyenne de chacun des protagonistes, dans tout intervalle de temps donné, est égale à sa vitesse instantanée de chaque instant. Si un tel résultat s'applique à tout coureur, ou à tout objet mobile, dont la vitesse instantanée demeure constante durant sa course, il ne s'observe en revanche pas lorsqu'il est question d'un mouvement avec vitesse instantanée variable. Pour justifier un tel propos, considérons la situation concrète suivante :

- on place une boule au sommet d'un plan incliné (formant un certain angle non nul avec l'horizontale),
- on lâche la boule ; elle se met a rouler sans glisser le long du plan incliné.

Plaçons un axe gradué z le long du plan incliné, pointant vers le bas, de sorte que son origine coïncide avec la position de la boule lorsqu'elle est immobile au sommet. Choisissons, en outre, comme origine du temps l'instant où la boule est lâchée. En mesurant avec précision la position de la boule à différents instants, on remarque que sa position z peut s'écrire en fonction du temps t comme suit :



$$z(t) \;=\; (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t^2\,, \qquad t \geqslant 0\,\mathrm{s}\,.$$

La figure ci-contre représente un échantillon du graphe de la fonction $t \mapsto z(t)$. Dans l'intervalle de temps $[t_0;\, t_1]$, où $t_0 = 2\,\mathrm{s}$ et $t_1 = 3\,\mathrm{s}$, la vitesse moyenne de la boule est, par définition :

$$\begin{aligned} v_{3\,\mathrm{s}-2\,\mathrm{s}} &= \frac{z(3\,\mathrm{s}) - z(2\,\mathrm{s})}{3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{(2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(3\,\mathrm{s})^2 - (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(2\,\mathrm{s})^2}{3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{22{,}5\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 12{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Dans le cas où $t_0 = 2\,\mathrm{s}$ et $t_1 = 2{,}5\,\mathrm{s}$, la vitesse moyenne, dans l'intervalle $[t_0;\, t_1]$, est :

$$\begin{aligned} v_{2{,}5\,\mathrm{s}-2\,\mathrm{s}} &= \frac{z(2{,}5\,\mathrm{s}) - z(2\,\mathrm{s})}{2{,}5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{(2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(2{,}5\,\mathrm{s})^2 - (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(2\,\mathrm{s})^2}{2{,}5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{15{,}625\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{s}} = 11{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat est manifestement différent du précédent. Plus généralement, dans l'intervalle de temps $[t_0;\, t_1]$, où $t_0 = 2\,\mathrm{s}$ et $t_1 = t_0 + \Delta t = 2\,\mathrm{s} + \Delta t$, où Δt est un nombre réel non nul quelconque, la vitesse moyenne de la boule s'écrit :

$$\begin{aligned} v_{\Delta t} &= \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} = \frac{(2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(t_0 + \Delta t)^2 - (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{(2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,(t_0^2 + 2\,t_0\,\Delta t + \Delta t^2) - (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{(5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_0\,\Delta t + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{\Delta t\,\big((5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_0 + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t\big)}{\Delta t} \\ &= (5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,t_0 + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t = (5\,\mathrm{m\,s^{-2}}) \cdot 2\,\mathrm{s} + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t \\ &= 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t\,, \end{aligned}$$

où $\Delta t^2 = (\Delta t)^2$ (les parenthèses étant souvent omises pour ne pas alourdir l'écriture). Le fait que l'expression de $v_{\Delta t}$ dépend de Δt montre clairement que la vitesse moyenne de la boule dépend de l'intervalle de temps considéré. En faisant tendre Δt vers 0, il vient :

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \big(10\,\mathrm{m\,s^{-1}} + (2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}})\,\Delta t\big) \;=\; 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

La dernière quantité obtenue est, par définition, la vitesse instantanée de la boule à l'instant $t_0 = 2\,\mathrm{s}$; on la note ici $v_{\mathrm{inst},2\,\mathrm{s}}$:

$$v_{\mathrm{inst},2\,\mathrm{s}} \;=\; 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Noter que cette quantité est encore différente des précédentes.

D'un point de vue graphique, la vitesse moyenne $v_{t_1-t_0}$ peut être interprétée comme étant la pente du segment reliant les points $P_0\big(t_0\,;\,z(t_0)\big)$ et $P_1\big(t_1\,;\,z(t_1)\big)$ sur le graphe de la fonction $t \mapsto z(t)$. Dans le cas où t_1 tend vers t_0, *i.e.* où $\Delta t = t_1 - t_0$ tend vers 0, le segment en question devient infiniment petit et se trouve sur la droite tangente au graphe de $t \mapsto z(t)$ en P_0. La vitesse instantanée v_{inst,t_0} n'est, de fait, rien d'autre que la pente de la tangente au graphe de $t \mapsto z(t)$ en P_0.

3.1.1 Remarques :

- Si la méthode visant à déterminer les tangentes à une courbe a été formulée pour la première fois par *Pierre de Fermat*[I] dans la première moitié du XVII^e^ siècle, la notion de vitesse instantanée n'a été réellement mise au point qu'à la fin du même siècle, après que *Gottfried Wilhelm Leibniz*[II] a élaboré le formalisme des *infiniment petits*.
- Les considérations et calculs effectués depuis le début du chapitre permettent de tenir les propos suivants :
  - ◇ Pour tout corps se déplaçant en ligne droite, avec une vitesse instantanée demeurant constante durant le mouvement, la valeur de la vitesse instantanée peut être déduite en calculant la vitesse moyenne dans n'importe quel intervalle de temps, sans devoir recourir à un calcul de limite.
  - ◇ Pour tout corps se déplaçant en ligne droite, avec une vitesse instantanée ne demeurant pas constante durant le mouvement, la valeur de la vitesse instantanée, en un instant t_0 donné, ne peut être déduite qu'en recourant à un calcul de limite, comme cela a été fait ci-dessus.

  Le calcul de limite qui permet d'obtenir la vitesse instantanée d'un corps à un instant t_0 donné est ce que l'on appelle une opération de *dérivation*. Et la vitesse instantanée à l'instant t_0 est ce que l'on appelle la *dérivée* de la position du corps (par rapport au temps) à l'instant t_0.

3.2 Notion de dérivée

3.2.1 Définitions : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle. Soient aussi x_0 et x_1 deux nombres réels dans D tels que $x_0 \neq x_1$.

- On appelle *accroissement de la variable indépendante* x, dans l'intervalle $[x_0;\, x_1]$, le nombre réel $\Delta x = x_1 - x_0$.

I. Pierre de Fermat était un magistrat et mathématicien français, né en 1601 à Beaumont-de-Lomagne et mort en 1665 à Castres (dans le sud-ouest du royaume de France).

II. Gottfried Wilhelm Leibniz était notamment un philosophe et mathématicien germanique, né le 1^er^ juillet 1646 à Leipzig et mort le 14 novembre 1716 à Hanover. Avec Isaac Newton, il est l'un des inventeurs du calcul infinitésimal.

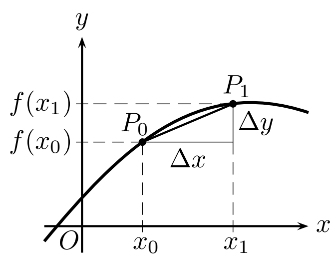
- On appelle *accroissement de la variable dépendante* y, associée à l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$, le nombre réel $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$; autrement écrit, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (vu que $x_1 = x_0 + \Delta x$).

3.2.2 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$ (*i.e.* définie dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \gamma\,;\, x_0 + \gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif) ; soit aussi x_1 un nombre réel dans D, différent de x_0. À l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ de la variable y.

- On dit que la fonction f est *dérivable* en $x_0 \in D$ si la quantité :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

admet pour limite un nombre réel lorsque Δx tend vers 0.



- Supposons que f est dérivable en x_0. On appelle *dérivée de f en x_0* la quantité $f'(x_0)$ donnée par :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

3.2.3 Remarques : Reprenons les notations de la définition précédente.

- Dans sa formulation du calcul différentiel (et intégral), dans la deuxième moitié du XVII[e] siècle, Leibniz a utilisé le concept d'*élément infiniment petit* pour définir la dérivée d'une fonction ; selon son point de vue :

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} ,$$

où :

  ◇ $\mathrm{d}x$ est ce que l'on appelle un *accroissement infinitésimal* (*i.e.* infiniment petit) de la variable indépendante x (depuis x_0),

  ◇ $\mathrm{d}y$ est ce que l'on appelle un *accroissement infinitésimal* (*i.e.* infiniment petit) de la variable dépendante y (depuis $f(x_0)$).

Le point de vue de Leibniz fait sens : lorsque les accroissements Δx et Δy deviennent toujours plus petits, le point $P\big(x_1;\, f(x_1)\big)$ se trouve toujours plus près de $P_0\big(x_0;\, f(x_0)\big)$, si bien que le rapport des accroissements s'approche toujours plus de la dérivée de la fonction f en x_0.

- Qu'est-ce qu'un accroissement *infiniment petit*, au juste ? Est-ce un nombre nul ou non ? S'il est nul, le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ introduit au point précédent n'a pas de sens, vu qu'il s'agit alors d'une forme indéterminée ; s'il n'est pas nul, alors $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ne correspond qu'approximativement à la dérivée de la fonction f en x_0. Manifestement, le concept d'élément *infiniment petit* ne peut pas être défini rigoureusement. Il est toutefois volontiers utilisé car il permet de noter de manière compacte la limite d'un rapport de deux grandeurs continues.

- De manière générale, le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (introduit au point avant précédent) n'est pas égal au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; ce n'est qu'à la limite où Δx tend vers 0 que les deux fractions sont égales.
- Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), la tangente au graphe de la fonction f au point $P_0\big(x_0;\, f(x_0)\big)$, à supposer qu'elle existe, a pour pente le nombre réel $f'(x_0)$. Un tel résultat est une conséquence directe du fait que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal, par définition, à la pente de la droite passant par les points $P_0\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ et $P_1\big(x_1\,;\, f(x_1)\big)$, et du fait que $f'(x_0)$ est égale à la limite dudit rapport lorsque Δx tend vers 0.

3.2.4 Définitions : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- Soit x_0 un nombre réel dans D.
  - ◇ On dit que f est *dérivable à gauche* en x_0 si f est définie dans un intervalle de la forme $]\alpha;\, x_0]$, où α est un nombre réel strictement plus petit que x_0, et si la limite suivante existe et est égale à un nombre réel :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

    Cette limite est alors appelée *dérivée à gauche* de f.
  - ◇ On dit que f est *dérivable à droite* en x_0 si f est définie dans un intervalle de la forme $[x_0;\, \alpha[$, où α est un nombre réel strictement plus grand que x_0, et si la limite suivante existe et est égal à un nombre réel :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

    Cette limite est alors appelée *dérivée à droite* de f.
- Soient $I = \,]a;\, b[$ un intervalle ouvert et $\bar{I} = [a;\, b]$ le plus petit intervalle fermé contenant I, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
  - ◇ On dit que f est *dérivable dans* I si f est définie et dérivable en chaque point $x_0 \in I$.
  - ◇ On dit que f est *dérivable dans* $\bar{I}$ si f est définie en chaque point $x_0 \in \bar{I}$ et si elle est à la fois :
    - ▷ dérivable dans I,
    - ▷ dérivable à droite en a,
    - ▷ dérivable à gauche en b.

3.2.5 Définition : Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Supposons que f est dérivable en tout $x \in H$, où H est un sous-ensemble non vide de D. On appelle *fonction dérivée* (ou simplement *dérivée*) de f la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f' : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x)\,, \end{array}$$

donnée par :

$$f'(x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\;.$$

3.2.6 Remarques :

- Dans la définition précédente, $f' \colon H \to \mathbb{R}$ est bien une fonction. En effet, comme :
  - ◇ la limite du rapport $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers 0 est définie en tout point de H, par hypothèse ;
  - ◇ toute limite, dès lors qu'elle existe, est unique,

  alors, à tout $x \in H$ correspond un et un unique nombre réel ; il s'agit de :

  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\quad ;$$

  la conclusion s'ensuit.
- Le domaine de définition de la dérivée d'une fonction réelle est systématiquement inclus dans le domaine de définition de ladite fonction.

3.2.7 Notation : Différentes notations sont admises pour désigner la dérivée f' d'une fonction f ; voici les plus courantes :

$$f'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\;.$$

Selon la notation, la dépendance en la variable x apparaît explicitement ou non.

3.2.8 Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

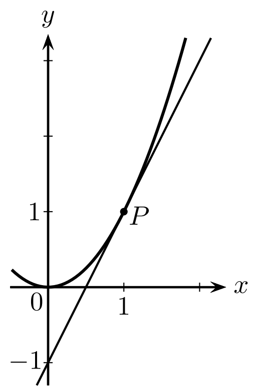
$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2\,x + \Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} (2\,x + \Delta x) \;=\; 2\,x\,. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que la dérivée f' de f est définie dans tout $\mathbb{R}$. Considérons à présent le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canoniques Oxy. Dans ce plan, intéressons-nous à la tangente au graphe de f au point $P(x_P\,;\,y_P)$, où

$x_P = 1$ et $y_P = f(x_P) = f(1) = 1$. Selon les propos tenus dans le quatrième point des remarques 3.2.3, la pente m de cette tangente est donnée par :

$$m \;=\; f'(x_P) \;=\; f'(1) \;=\; 2 \cdot 1 \;=\; 2\,.$$

P étant le point de tangence, il appartient non seulement au graphe de f, mais aussi à la tangente en question. De fait, les coordonnées $(x;\, y)$ de n'importe quel point se trouvant sur cette tangente doivent satisfaire l'équation :



$$\frac{y - y_P}{x - x_P} \;=\; f'(x_P) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y-1}{x-1} \;=\; 2\,.$$

L'équation de la tangente au graphe de f en $P(1;\, 1)$ s'écrit donc :

$$y - 1 \;=\; 2\,(x-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; 2\,x - 1\,.$$

3.2.9 Remarque : La dérivée f' d'une fonction réelle f en un nombre réel x_0 peut ne pas être définie, quand bien même f est définie dans un voisinage de x_0. La proposition qui suit indique la condition que doit nécessairement satisfaire f pour qu'elle puisse être dérivable en x_0.

3.2.10 Proposition : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie, dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. Si f est dérivable en x_0, alors f est nécessairement continue en x_0.*

Preuve : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. Pour tout $x \in D$ tel que $x \neq x_0$, l'expression $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0)\,.$$

f étant dérivable en x_0, la limite suivante existe et correspond à la dérivée de f en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \;=\; f'(x_0)\,,$$

où $\Delta x = x - x_0 \;\Leftrightarrow\; x = x_0 + \Delta x$. Ainsi :

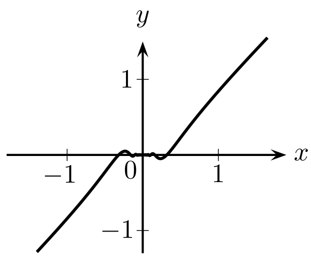
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) \;&=\; \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0) \right) \\ &=\; f(x_0) + f'(x_0)\,(x_0 - x_0) \;=\; f(x_0)\,, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de f en x_0. $\square$

3.2.11 Remarques :
- La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie ; une fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$, peut être continue en x_0 sans qu'elle soit dérivable en x_0 (*cf.* définition ci-dessous).

- La proposition précédente dit que si une fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$, est dérivable en x_0, elle est continue en x_0 ; mais elle n'affirme pas que la dérivée f' est elle-même continue en x_0. Une fonction peut être dérivable en un nombre réel x_0, sans que la dérivée soit continue en x_0. Pour s'en convaincre, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ,$$



où sin désigne la fonction sinus (*cf.* section C.8). Cette fonction f est continue en 0 ; en effet :

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; 0 \;=\; f(0)\ ;$$

le fait que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ se justifie en invoquant le théorème des deux gendarmes : d'une part, $-x^2 \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (vu que $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$) ; d'autre part, $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$; la conclusion s'ensuit. Intéressons-nous à présent à la dérivée f' de f.

  - ◇ En $x = 0$, f' est définie et vaut 0 ; en effet :

$$\begin{aligned} f'(0) \;&=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(0+\Delta x)^2 \sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \;=\; 0\ ; \end{aligned}$$

    le fait que $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$ se justifie en invoquant (comme précédemment) le théorème des deux gendarmes : d'une part, $-|\Delta x| \leqslant \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \leqslant |\Delta x|$ pour tout $\Delta x \neq 0$; d'autre part, $\lim_{\Delta x\to 0} -|\Delta x| = 0 = \lim_{\Delta x\to 0} |\Delta x|$; la conclusion s'ensuit.

  - ◇ En $x \in \mathbb{R}^*$, f' est définie et vaut (*cf.* section 3.3 et sous-section C.8 de l'annexe C) :

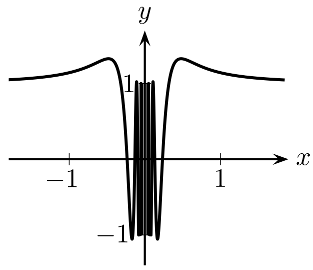
$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; 2\,x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &=\; 2\,x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) . \end{aligned}$$

En résumé :

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} 2\,x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

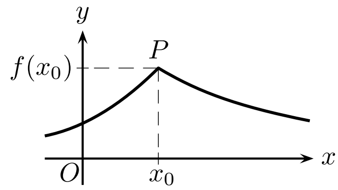
Si f' est définie en tout $x \in \mathbb{R}$, elle n'est toutefois pas continue en $x = 0$; et pour cause :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\left[2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 0} 2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\end{aligned}$$



or, $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Noter que si $\lim_{x\to 0} 2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, c'est (encore une fois) en vertu du théorème des deux gendarmes.

3.2.12 Définition : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. On dit que le point $P\big(x_0\,;\,f(x_0)\big) \in \mathbb{R}^2$ est un *point anguleux* du graphe de f si :



- ◇ f est continue en x_0,
- ◇ les deux limites :

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

existent, mais ne sont pas égales.

Dans le cas où les deux limites mentionnées ci-dessus valent respectivement ∞ et $-\infty$ ou $-\infty$ et ∞, on dit que P est un *point de rebroussement*.

3.2.13 Remarques : • Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$ et continue en x_0. Dans le cas où :

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \infty$$

ou :

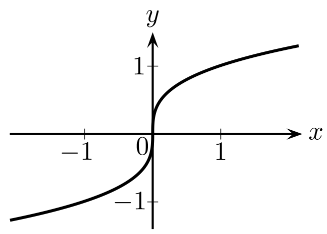
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\infty\,,$$

on dit que f admet une *dérivée infinie* en x_0. Vu les circonstances, x_0 ne fait pas partie du domaine de définition de la dérivée de f. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), le graphe de f admet néanmoins une tangente au point $P\big(x_0;\,f(x_0)\big)$: il s'agit d'une droite verticale. Comme exemple, on peut mentionner la fonction :

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

En $x = 0$, f admet une dérivée infinie ; en effet :

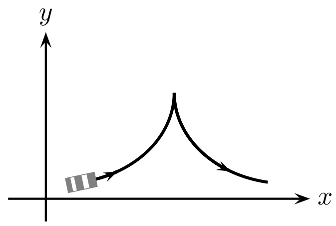
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}} = \infty \ ,\end{aligned}$$



et ce, que Δx tende vers 0 par valeurs plus petites ou par valeurs plus grandes. La figure ci-dessus illustre la situation : la droite confondue avec l'axe Oy est verticale et tangente au graphe de f en $O(0; 0)$.

- Un point du graphe d'une fonction où la tangente est verticale n'est pas un point de rebroussement.

3.2.14 Illustration : La figure ci-contre représente la trajectoire d'une automobile qui avance vers une place de stationnement, s'y arrête, puis recule afin de repartir dans l'autre sens. Il est supposé que le véhicule se déplace dans un plan. En assimilant ce plan au plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et en choisissant un système de coordonnées cartésiennes de manière judicieuse, dans ce plan $\mathbb{R}^2$, on peut voir la trajectoire de l'automobile comme le graphe d'une fonction réelle f d'une variable réelle. Dans ces circonstances, le point où l'automobile s'arrête pour ensuite reculer peut être vu comme un point de rebroussement du graphe de f.



3.3 Formules de dérivation

Le calcul de limite visant à obtenir la dérivée d'une fonction donnée peut s'avérer souvent laborieux.

La présente section a pour objectif de présenter et démontrer un certain nombre de formules qui permettent de faciliter les calculs de dérivées. Avec de telles formules, et en connaissant la dérivée de certaines fonctions basiques, il est possible de trouver aisément l'expression de la dérivée de la plupart des fonctions que l'on retrouve en physique et dans les sciences de l'ingénierie, sans devoir recourir à un quelconque calcul de limite.

3.3.1 Proposition : *Soit $h : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et constante dans un intervalle ouvert $I \subset D$; autrement dit, soit h une fonction telle que $h(x) = c$, pour tout $x \in I$, où c est un nombre réel et I un intervalle ouvert. Alors :*

- *h est dérivable dans I ; de plus :*

$$\boxed{h'(x_0) = 0} \ , \quad \textit{pour tout } x_0 \in I.$$

Soient maintenant $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$, et dérivables en x_0. Alors :

- *la fonction $f + g$ est dérivable en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\big(f+g\big)'(x_0) \;=\; f'(x_0) + g'(x_0)}\;;$$

- *la fonction fg est dérivable en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\big(fg\big)'(x_0) \;=\; f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)}\;;$$

- *la fonction cf, où c est un nombre réel, est dérivable en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\big(cf\big)'(x_0) \;=\; cf'(x_0)}\;;$$

- *la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, pour autant que g ne s'annule pas en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}}\;;$$

- *la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0, pour autant que g ne s'annule pas en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{-g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}}\;.$$

Gardons les hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g : D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et qu'elle est dérivable en $f(x_0)$. Alors :

- *la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 ; de plus :*

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big)\,f'(x_0)}\;.$$

Preuve : Soit $h : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et constante dans un intervalle ouvert $I \subset D$.

- Dire que h est constante dans I revient à écrire $h(x) = c$ pour tout $x \in I$, où c est un nombre réel. Soient x_0 un élément de I et Δx un accroissement de la variable x tel que $x_0 + \Delta x \in I$. Alors $h(x_0) = c = h(x_0 + \Delta x)$ et donc :

$$\begin{aligned} h'(x_0) \;&=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} 0 \;=\; 0\,; \end{aligned}$$

ce qui montre, en outre, que h est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Soient maintenant $f: D_1 \to \mathbb{R}$ et $g: D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$, et dérivables en x_0.

- Soit $f+g$ la somme des fonctions f et g. Alors :

$$\begin{aligned}
\big(f+g\big)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f+g\big)(x_0+\Delta x) - \big(f+g\big)(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big) + \big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0)\ ;
\end{aligned}$$

  ce qui montre, en outre, que $f+g$ est dérivable en x_0.

- Soit fg le produit des fonctions f et g. Alors :

$$\begin{aligned}
&\big(fg\big)'(x_0) = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(fg\big)(x_0+\Delta x) - \big(fg\big)(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\, g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big)\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\, g(x_0+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)\, \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)\ ;
\end{aligned}$$

  ce qui montre, en outre, que fg est dérivable en x_0. Noter que l'introduction de l'expression $-f(x_0)\, g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\, g(x_0+\Delta x)$, dans le numérateur de la fraction à la quatrième ligne de calcul, est tout à fait licite, vu qu'il s'agit d'une quantité nulle.

- Le fait que $\big(cf\big)'(x_0) = cf'(x_0)$, où c est une constante, est une conséquence directe du calcul précédent, ainsi que du fait que la dérivée d'une fonction constante est la fonction qui vaut zéro partout :

$$\big(cf\big)'(x) = c'f(x) + cf'(x) = 0 \cdot f(x) + cf'(x) = cf'(x)\,.$$

- Soit $\frac{f}{g}$ le quotient des deux fonctions f et g. Alors :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big)\, g(x_0) - f(x_0)\big(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big)\, g(x_0)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)\big(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{g(x_0)}{g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \\
&\qquad - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)}{g(x_0 + \Delta x)\, g(x_0)} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0) \frac{g(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} - \frac{f(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \, .
\end{aligned}
$$

Ce calcul montre, en outre, que $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0.

- Pour prouver la formule :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \, ,$$

il suffit d'appliquer le résultat obtenu au point précédent dans le cas où f est une fonction constante, qui vaut 1 (dans un voisinage de x_0) ; la conclusion est immédiate.

Gardons les hypothèses sur $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et qu'elle est dérivable en $f(x_0)$.

- Posons $u = f(x)$, $u_0 = f(x_0)$ et $\Delta u = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, où Δx est un accroissement de la variable x et Δu l'accroissement correspondant de la variable u. Alors :

$$\begin{aligned}\big(g \circ f\big)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g \circ f)(x_0 + \Delta x) - (g \circ f)(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} .\end{aligned}$$

Deux situations peuvent se présenter, lors du calcul de la limite.

◇ $\Delta u \neq 0$ lorsque l'on s'approche arbitrairement près de x_0 (sans toucher x_0) ; dans ce cas :

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u_0 + \Delta u) - g(u_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u_0 + \Delta u) - g(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u_0 + \Delta u) - g(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u_0 + \Delta u) - g(u_0)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u_0 + \Delta u) - g(u_0)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= g'(u_0)\, f'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0) ,\end{aligned}$$

du fait que Δu tend nécessairement vers 0 lorsque Δx tend vers 0. En conséquence :

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)$$

dans ce cas.

◇ $\Delta u = 0$ lorsque l'on s'approche arbitrairement près de x_0 (sans toucher x_0) ; dans ce cas, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$, *i.e.* $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Ainsi, d'une part :

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 ;\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0\,. \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = 0 = g'\big(f(x_0)\big) \cdot 0 = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)$$

dans ce cas.

En résumé, quelle que soit la situation, $\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)$. □

3.3.2 Remarque : Reprenons l'énoncé de la proposition précédente.

- Il n'est pas rare de voir le dernier point de la proposition écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x_0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}(u_0)\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,.$$

  où $u = f$ et $u_0 = f(x_0)$.
- Dire que $\big(f + g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ et que $\big(c\, f\big)'(x_0) = c\, f'(x_0)$ (*cf.* premier et troisième points de la proposition), c'est dire que la dérivation est une opération *linéaire*.

3.4 Dérivées des fonctions usuelles

Ce que l'on entend par fonctions usuelles, ce sont :

- les fonctions polynomiales et rationnelles,
- les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances,
- les fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques,
- les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques.

Ces fonctions sont décrites en détail dans l'annexe C, à la fin du présent ouvrage. Dans l'annexe F se trouve un tableau présentant les expressions de leurs dérivées.

3.5 Dérivées d'ordres supérieurs

Cela a été vu dans la première section du présent chapitre, si f est une fonction dérivable dans un ensemble $H \subset \mathbb{R}$, la dérivée f' de f peut être vue comme une fonction définie dans H. En tout élément $x_0 \in H$ où la fonction f' est dérivable, à supposer qu'un tel x_0 existe, il est alors possible de définir la dérivée de la fonction dérivée f'.

3.5.1 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, définie et dérivable dans un sous-ensemble $H \subset D$; soit aussi $f' : H \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée de f.

- Supposons que f' est définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in H$ et dérivable en $x_0 \in H$. On appelle *dérivée seconde* de f en x_0 la quantité $f''(x_0)$ donnée par :
$$f''(x_0) = (f')'(x_0)\,.$$
- Supposons à présent que f' est dérivable en tout $x \in \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est un sous-ensemble non vide de H. On appelle *fonction dérivée seconde* (ou simplement *dérivée seconde*) de f dans $\tilde{H}$ la fonction :
$$\begin{array}{rrcl} f'' : & \tilde{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f''(x) \end{array}$$
donnée par :
$$f''(x) = (f')'(x)\,.$$

3.5.2 Remarques : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$.

- En répétant p fois le processus de dérivation de f (où $p \in \mathbb{N}$), on peut définir la *p-ième dérivée* de f en x_0, à supposer qu'elle soit définie. Notée $f^{(p)}$ (avec des parenthèses autour de p, afin qu'il n'y ait pas de confusion possible avec la notation des exposants), notamment lorsque p est grand, elle est définie comme suit :
$$f^{(p)}(x_0) = \Big(\big((f')'\ldots\big)'\Big)'(x_0) \qquad \text{(où le signe $'$ apparaît p fois)}\,.$$
La $p^{\text{ème}}$ *dérivée* de f est également appelée *dérivée d'ordre p*. Par convention, la dérivée d'ordre 0 de f est égale à f : $f^{(0)} = f$.
- Si f admet une dérivée jusqu'à l'ordre p dans un ensemble $H \subset \mathbb{R}$, on dit que f est p fois dérivable dans H. En outre, si f est p fois dérivable dans H, quel que soit le nombre naturel p, on dit que f est *infiniment dérivable* dans H.

3.5.3 Notation : Différentes notations sont admises pour désigner la dérivée seconde f'' d'une fonction f ; voici les plus courantes :
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)\,.$$
De même, pour la dérivée d'ordre p :
$$f^{(p)}(x) = \frac{\mathrm{d}^p f}{\mathrm{d}x^p} = \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}f(x)\,.$$
Selon la notation, la dépendance en la variable x apparaît explicitement ou non.

3.5.4 Exemples : 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^5$. Cette fonction est infiniment dérivable dans $\mathbb{R}$. En effet, les expressions :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5\,x^4\,,\\
f''(x) &= \big(f'\big)' = 20\,x^3\,,\\
f'''(x) &= \big(f''\big)' = 60\,x^2\,,\\
f^{(4)}(x) &= \big(f'''\big)' = 120\,x\,,\\
f^{(5)}(x) &= \big(f^{(4)}\big)' = 120\,,\\
f^{(6)}(x) &= \big(f^{(5)}\big)' = 0 = f^{(7)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots
\end{aligned}$$

sont toutes définies, en tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 6 correspondent toutes à la fonction qui prend la valeur 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$, ou de manière équivalente, par $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Cette fonction est infiniment dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$. En effet, les expressions :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\\
f''(x) &= \big(f'\big)' = -\frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\,,\\
f'''(x) &= \big(f''\big)' = \frac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}\,,\\
f^{(4)}(x) &= \big(f'''\big)' = -\frac{15}{16}\,x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16\sqrt{x^7}}\,,\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

sont toutes définies, en tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Noter que f est définie en $x = 0$, mais pas ses dérivées ; et en tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, ni f, ni aucune de ses dérivées n'est définie.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \exp(\lambda\,x)$, où λ est un nombre réel donné. Cette fonction est infiniment dérivable dans $\mathbb{R}$. En effet, les expressions :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lambda \exp(\lambda\,x)\,,\\
f''(x) &= \big(f'\big)' = \lambda\,\big(\lambda \exp(x)\big) = \lambda^2 \exp(x)\,,\\
f'''(x) &= \big(f''\big)' = \lambda\,\big(\lambda^2 \exp(x)\big) = \lambda^3 \exp(x)\,,\\
f^{(4)}(x) &= \big(f'''\big)' = \lambda\,\big(\lambda^3 \exp(x)\big) = \lambda^4 \exp(x)\,,\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
f^{(n)}(x) &= \lambda^n \exp(x) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}\,,
\end{aligned}$$

sont toutes définies, en tout $x \in \mathbb{R}$.

3.5.5 Illustration : Considérons un corps matériel $\mathcal{M}$ qui se déplace dans l'espace, dans un certain intervalle de temps $]t_1;\, t_2[$, où t_1 est un instant antérieur à t_2. Supposons que $\mathcal{M}$ a des dimensions suffisamment petites pour qu'il puisse être assimilé à un point. L'espace dans lequel évolue $\mathcal{M}$ peut être vu comme l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$. Notons $\gamma_x(t)$, $\gamma_y(t)$ et $\gamma_z(t)$ les coordonnées de $\mathcal{M}$ selon Ox, Oy et Oz, respectivement, à l'instant $t \in\,]t_1;\, t_2[$. Le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^3$, donné par :

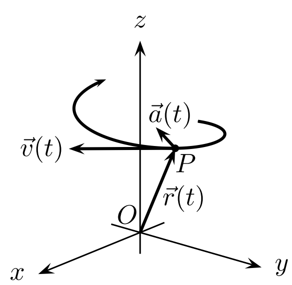
$$\mathcal{T} \;=\; \left\{(x;\, y;\, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \gamma_x(t),\, y = \gamma_y(t),\, z = \gamma_z(t), \text{ où } t \in\,]t_1;\, t_2[\right\},$$

est appelé *trajectoire* de $\mathcal{M}$; il a l'allure d'une ligne ininterrompue dans $\mathbb{R}^3$. Noter que les quantités γ_x, γ_y et γ_z peuvent être vues comme des fonctions du temps t ; ces fonctions sont toutes continues, vu que la ligne que forme $\mathcal{T}$ est ininterrompue.

- ◇ Soit $P\big(\gamma_x(t);\, \gamma_y(t);\, \gamma_z(t)\big)$ le point de $\mathcal{T}$ où se trouve le corps $\mathcal{M}$ à l'instant t. On appelle *(vecteur) position* de $\mathcal{M}$ à l'instant t le vecteur $\vec{r}(t)$, dans $\mathbb{R}^3$, donné par $\vec{r}(t) \;=\; \overrightarrow{OP}$; concrètement :

$$\vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \\ \gamma_z(t) \end{pmatrix}.$$

- ◇ Supposons que γ_x, γ_y et γ_z sont toutes dérivables à l'instant t. On appelle *(vecteur) vitesse* (*instantanée*) de $\mathcal{M}$ à l'instant t le vecteur $\vec{v}(t)$ donné par $\vec{v}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)$; concrètement :



$$\vec{v}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\gamma_x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}\gamma_y}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}\gamma_z}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}.$$

  Dit avec des mots, le vecteur vitesse de $\mathcal{M}$ à l'instant t est la dérivée première par rapport au temps du vecteur position, à l'instant t. Noter que ce vecteur vitesse est tangent à la trajectoire de $\mathcal{M}$ en P.

- ◇ Supposons que γ_x, γ_y et γ_z sont toutes deux fois dérivables à l'instant t. On appelle *(vecteur) accélération* (*instantanée*) de $\mathcal{M}$ à l'instant t le vecteur $\vec{a}(t)$ donné par $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$; concrètement :

$$\vec{a}(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2\gamma_x}{\mathrm{d}t^2}(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2\gamma_y}{\mathrm{d}t^2}(t) \\ \frac{\mathrm{d}^2\gamma_z}{\mathrm{d}t^2}(t) \end{pmatrix}.$$

  Dit avec des mots, le vecteur accélération à l'instant t est la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position, à l'instant t ; c'est également la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse, à l'instant t : $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t)$.

Noter qu'en mécanique, on écrit souvent $x(t)$, respectivement $y(t)$ et $z(t)$, à la place de $\gamma_x(t)$, respectivement $\gamma_y(t)$ et $\gamma_z(t)$.

3.6 Dérivation implicite

Les outils développés jusqu'à présent permettent de déterminer l'équation de la tangente au graphe d'une fonction f en n'importe quel point du graphe où f' est définie. S'il est vrai que le graphe d'une fonction continue est une courbe dans le plan euclidien, il n'en demeure pas moins vrai que toute courbe dans le plan euclidien ne correspond pas forcément au graphe d'une fonction. Se pose alors naturellement la question de savoir comment obtenir l'équation de la tangente à une courbe en un point donné, lorsque la courbe en question ne peut pas être décrite au moyen d'une unique expression de la forme $y = f(x)$. La présente section, ainsi que la suivante, tentent de répondre à cette question.

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons le cercle de rayon R, centré sur l'origine O du système Oxy. Cela a été vu dans la première section du chapitre 2, une telle courbe ne peut pas être décrite à l'aide d'une seule fonction ; deux sont nécessaires, l'une pour le demi-cercle supérieur, f_1, et l'autre pour le demi-cercle inférieur, f_2, où :

$$f_1(x) \;=\; \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \;=\; -\sqrt{R^2 - x^2}\;.$$

Pour déterminer l'équation de la tangente à ce cercle en un point donné, il convient de calculer la dérivée de f_1 ou de f_2, selon que le point de tangence est sur le demi-cercle supérieur ou sur le demi-cercle inférieur :

$$f_1{}'(x) \;=\; -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad \text{et} \qquad f_2{}'(x) \;=\; \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\;.$$

Prenons maintenant l'équation cartésienne implicite de ce même cercle : $x^2+y^2-R^2 = 0$. Même si, dans cette expression, aucune des grandeurs x et y ne dépend explicitement de l'autre, faisons comme si la variable y était une fonction de la variable x. En dérivant des deux côtés par rapport à x, il vient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2 + y^2 - R^2\big) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,0 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}R^2 \;&=\; 0 \\
\Leftrightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 0 \;&=\; 0\,,
\end{aligned}$$

où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est la dérivée de y par rapport à x ; elle peut être aussi notée y'. Cette dérivée n'est pas nulle, vu que y est vue comme une fonction de x. De la dernière égalité obtenue, il ressort :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; y' \;=\; -\frac{x}{y}\;.$$

Cette expression est équivalente aussi bien à celle de ${f_1}'$ qu'à celle de ${f_2}'$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le dénominateur de ${f_1}'(x)$ (respectivement ${f_2}'(x)$) n'est rien d'autre que $f_1(x)$ (respectivement $-f_2(x)$), d'une part, et d'autre part que l'équation décrivant le demi-cercle supérieur (respectivement inférieur) est $y = f_1(x)$ (respectivement $y = f_2(x)$) :

$$ {f_1}'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)} = -\frac{x}{y} $$

et :

$$ {f_2}'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{x}{-f_2(x)} = -\frac{x}{f_2(x)} = -\frac{x}{y}\,. $$

Si les expressions de ${f_1}'$ et ${f_2}'$ présentent l'avantage de ne dépendre que de la variable x, l'expression de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a l'intérêt d'être unique, valable aussi bien pour le demi-cercle supérieur que le demi-cercle inférieur. Le fait que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dépend aussi bien de x que de y n'est pas problématique en soi : dans la pratique, lorsque l'on cherche la tangente au cercle en un point P, on est de toute façon amené à connaître les deux coordonnées $(x_P\,;\,y_P)$ de P.

Résumons le travail qui vient d'être réalisé : en tout point $P(x_P;\,y_P)$ du cercle d'équation $x^2+y^2-R^2 = 0$, excepté les points de coordonnées $(\pm R;\,0)$, il est possible d'exhiber une fonction f (présentement f_1 ou f_2, dont les expressions sont données plus haut) dont :

- le graphe correspond localement au cercle,
- la dérivée $f'(x_P)$ en x_P est égale à la grandeur $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_P$, obtenue en dérivant des deux côtés par rapport à x l'équation $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ (tout en tenant compte du fait que y dépend de x) puis en l'évaluant en $P(x_P;\,y_P)$.

Ce qui vient d'être établi pour le cercle, est-ce transposable à n'importe quelle courbe du plan euclidien ? Plus précisément :

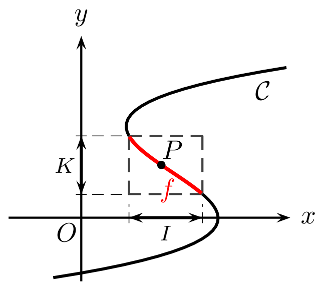
- toute courbe dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, décrite par une équation de la forme $F(x;\,y) = 0$, peut-elle systématiquement être exprimée à l'aide d'une relation sous forme explicite $y = f(x)$, du moins localement autour d'une valeur réelle x_0 où l'on voudrait calculer la dérivée de f (à supposer que f existe) ?
- étant donné une fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$, l'expression de la dérivée f' est-elle la même que celle de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ obtenue en dérivant des deux côtés l'équation $F(x;\,y) = 0$ par rapport à x (tout en considérant que y dépend de x), où $F(x;\,y)$ est la forme implicite de la forme explicite $y = f(x)$?

Ces questions trouvent réponses dans le résultat qui suit, connu sous le nom de **théorème des fonctions implicites**.

3.6.1 Théorème : *Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi $P(x_P;\,y_P)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $F\colon A\times B \to \mathbb{R}$ une fonction réelle des deux grandeurs réelles x et y, définie dans un domaine rectangulaire ouvert $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ contenant P. Supposons que :*

- $F(x_P\,;\,y_P) = 0$,

- *la dérivée de F par rapport à x (y étant considérée comme constante), notée $\frac{\partial F}{\partial x}$, est définie et continue dans $A \times B$,*
- *la dérivée de F par rapport à y (x étant considérée comme constante), notée $\frac{\partial F}{\partial y}$, est définie et continue dans $A \times B$, et satisfait la condition :*



$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_P;\, y_P) \neq 0\,.$$

Alors il existe un intervalle ouvert $I \subset A$ contenant x_P, un intervalle ouvert $K \subset B$ contenant y_P, ainsi qu'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$:

$$F(x;\, y) = 0\,, \quad \text{où } (x;\, y) \in I \times K \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x)\,, \quad \text{où } x \in I\,.$$

En outre, f est dérivable dans I ; l'expression de la dérivée f' de f peut être obtenue en dérivant par rapport à x l'équation $F(x;\, y) = 0$, dans laquelle y est préalablement remplacée par $f(x)$.

Preuve : La démonstration de ce théorème ne peut pas être donnée ici car elle fait appel à des outils provenant de la théorie des fonctions de plusieurs variables. □

3.6.2 Remarque : Se référant à des notions qui n'ont pas été discutées jusqu'à présent, les hypothèses et conclusions du théorème des fonctions implicites méritent un certain nombre de clarifications.

◇ Dire que le domaine rectangulaire $A \times B$ est ouvert revient à dire que $A \times B$ ne contient aucun point (de $\mathbb{R}^2$) qui se trouve sur son bord (*i.e.* sur son pourtour, qui est de forme rectangulaire), mais uniquement des points (de $\mathbb{R}^2$) qui sont dans son intérieur ; il en est de même pour le domaine rectangulaire $I \times K$.

◇ Le terme de *fonction*, mentionné dans l'énoncé du théorème pour parler de F, est à prendre au même sens que celui de la définition 2.2.1 donnée dans la section 2.2 du chapitre 2 : à un point $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$ correspond un et un unique élément $F(x;\, y) \in \mathbb{R}$.

◇ La grandeur $\frac{\partial F}{\partial x}$ (respectivement $\frac{\partial F}{\partial y}$) porte le nom de *dérivée partielle* de F par rapport à x (respectivement par rapport à y). Pratiquement :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;\, y) = \frac{\mathrm{d}g_y}{\mathrm{d}x}(x) = {g_y}'(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x;\, y) = \frac{\mathrm{d}g_x}{\mathrm{d}y}(y) = {g_x}'(y)\,,$$

où $x \mapsto g_y(x) = F(x;\, y)$ doit être considérée comme une fonction de la seule variable x, y n'étant alors qu'un paramètre (devant être considéré comme fixe), et $y \mapsto g_x(y) = F(x;\, y)$ doit être vue comme une fonction de la seule variable y (x n'étant alors qu'un paramètre devant être considéré comme fixe).

◇ Dans le cas des fonctions de deux (et plus généralement de n, où $n \in \{2;\, 3;\, \dots\}$) variables, la notion de continuité est plus subtile que dans le cas des fonctions d'une seule variable. Cette réalité est due au fait qu'il existe une infinité de façons de tendre vers un point de $\mathbb{R}^2$ (et plus généralement de $\mathbb{R}^n$, où n est un nombre naturel plus grand ou égal à 2), alors qu'il n'existe que deux manières de s'approcher d'un point de $\mathbb{R}$: soit par la gauche, soit par la droite. Dans le cadre de la présente étude, ne seront considérées que des fonctions F pour lesquelles la question de la continuité des dérivées partielles n'aura pas à être discutée.

◇ Dans un langage moins formel, la première partie de la conclusion du théorème précédent peut être énoncée comme suit : il existe une fonction réelle f (d'une seule variable réelle) dont le graphe coïncide avec la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, donnée par l'équation cartésienne $F(x;\, y) = 0$, dans une fenêtre ouverte (*i.e.* un domaine rectangulaire ouvert) contenant le point $P \in \mathbb{R}^2$; et ce pour autant que F satisfasse les hypothèses mentionnées.

◇ Dans l'expression $F(x;\, y) = 0$, la grandeur y peut correspondre à plusieurs fonctions implicites différentes. Ce qui permet de dire à quelle fonction elle se réfère, ce sont les coordonnées du point P, sur la courbe plane $\mathcal{C}$ décrite par $F(x;\, y) = 0$, autour duquel on cherche a représenter $\mathcal{C}$ par une fonction.

◇ La dérivée f' de la fonction implicite f, dont il est question dans la deuxième partie du théorème précédent, peut être exprimée à l'aide des dérivées partielles de F :

$$\begin{aligned}
& & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F\big(x\,;\, f(x)\big)\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \\
\Leftrightarrow & & \frac{\partial F}{\partial x}\big(x\,;\, f(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x\,;\, f(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \frac{\partial F}{\partial x}\big(x\,;\, f(x)\big)\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x\,;\, f(x)\big)\, f'(x) &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \frac{\partial F}{\partial y}\big(x\,;\, f(x)\big)\, f'(x) &= -\frac{\partial F}{\partial x}\big(x\,;\, f(x)\big) \\
\Leftrightarrow & & f'(x) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x\,;\, f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x\,;\, f(x)\big)}\,.
\end{aligned}$$

Noter que la deuxième ligne du calcul ci-dessus se déduit de la première en appliquant la règle de dérivation de la composition des fonctions de plusieurs variables.

◇ Dans la pratique, lors du calcul de la dérivée f' de la fonction implicite f à partir de l'équation $F(x;\, y) = 0$, on omet souvent de remplacer y par $f(x)$; on garde toutefois à l'esprit que y dépend (implicitement) de x.

◇ Le procédé visant à calculer la dérivée f' de la fonction implicite f porte le nom de *dérivation implicite*. S'il est ainsi appelé, c'est en raison du fait que la fonction f n'apparaît pas concrètement dans le calcul. Du reste, c'est pour cette même raison que la dérivée de la fonction implicite se note plus volontiers :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

au lieu de f' ; et évaluée en la coordonnée x_P d'un point $P(x_P;\, y_P) \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est la courbe plane décrite par l'équation $F(x;\, y) = 0$, la même dérivée se note plus volontiers :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P$$

au lieu de $f'(x_P)$.

3.6.3 Exemple : Reprenons le cercle de rayon R, centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$; et considérons le point $P\big(\frac{R}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\big) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons que le cercle en question peut être décrit par l'équation $F(x;\, y) = 0$, où F est la fonction réelle des deux variables réelles x et y, donnée par $F(x;\, y) = x^2 + y^2 - R^2$. Relevons alors les points suivants :

- F est définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^2)$;
- $F\big(\frac{R}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\big) = \big(\frac{R}{2}\big)^2 + \big(\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\big)^2 - R^2 = 0$, ce qui montre que P est sur le cercle ;
- il peut être montré que la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ (dont l'expression est $\frac{\partial F}{\partial x}(x;\, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - R^2) = 2\,x + 0 - 0 = 2\,x$) est une fonction continue dans $\mathbb{R}^2$;
- il peut être montré que la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ (dont l'expression est $\frac{\partial F}{\partial y}(x;\, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - R^2) = 0 + 2\,y - 0 = 2\,y$), est une fonction continue dans $\mathbb{R}^2$; en outre :
$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(\tfrac{R}{2}\,;\,\tfrac{\sqrt{3}\,R}{2}\big) = 2\,\frac{\sqrt{3}\,R}{2} = \sqrt{3}\,R \neq 0\,.$$

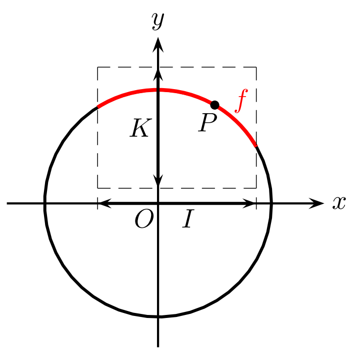
Manifestement, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites. Selon ce théorème, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant $\frac{R}{2}$, un intervalle ouvert $K \subset \mathbb{R}$ contenant $\frac{\sqrt{3}\,R}{2}$ et une fonction continue $f\colon I \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0\,, \quad \text{où } (x;\, y) \in I \times K \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x)\,, \quad \text{où } x \in I\,.$$

Présentement, la fonction f est f_1, mentionnée en début de section :

$$f(x) = f_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\;;$$

I peut être n'importe quel intervalle ouvert contenant $\frac{R}{2}$ et inclus dans $]{-R}\,;\,R[$; quant à K, il peut être n'importe quel intervalle ouvert contenant $\frac{\sqrt{3}\,R}{2}$, inclus (par exemple) dans $]0\,;\,2\,R[$ et compatible avec I (*cf.* figure ci-contre).



3.6.4 Remarque : Dans l'exemple précédent, si le point P avait pour coordonnées $(R\,;\,0)$ ou $(-R\,;\,0)$, il ne serait pas possible d'exhiber un quelconque domaine rectangulaire ouvert contenant P, dans lequel le cercle donné (de rayon R et centré sur O) pourraît coïncider avec le graphe d'une quelconque fonction. Cette réalité s'explique par le fait que les points de coordonnées $(\pm R\,;\,0)$ sont des points qui se trouvent à la jonction du graphe de la fonction f_1, donnée par $f_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, et du graphe de la fonction f_2, donnée par $f_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (*cf.* fonctions introduites en début de section) ; en passant par un de ces points de jonction, on change forcément de demi-cercle : soit on passe du demi-cercle inférieur au demi-cercle supérieur, soit on passe du demi-cercle inférieur au demi-cercle supérieur. Et justement, en chacun de ces deux points de jonction, l'une des hypothèses du théorème des fonctions implicites n'est pas satisfaite :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pm R\,;\,0) \;=\; 0\,.$$

3.6.5 Exemple : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi $P(11;\,3)$ un point dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par l'équation $F(x;\,y) = 0$, où F est la fonction réelle des deux variables réelles x et y, donnée par $F(x;\,y) = y^6 - y - 6\,x^2$. Relevons les points suivants :

- F est définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^2)$;
- $F(11;\,3) \;=\; 3^6 - 3 - 6 \cdot 11^2 \;=\; 0$, ce qui montre que $P \in \mathcal{C}$;
- il peut être montré que la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ (dont l'expression est $\frac{\partial F}{\partial x}(x;\,y) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(y^6 - y - 6\,x^2) \;=\; 0 - 0 - 12\,x \;=\; -12\,x$) est une fonction continue dans $\mathbb{R}^2$;
- il peut être montré que $\frac{\partial F}{\partial y}$ (dont l'expression est $\frac{\partial F}{\partial y}(x;\,y) \;=\; \frac{\partial}{\partial y}(y^6 - y - 6\,x^2) \;=\; 6\,y^5 - 1 - 0 \;=\; 6\,y^5 - 1$) est une fonction continue dans $\mathbb{R}^2$; en outre :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(11;\,3) \;=\; 6 \cdot 3^5 - 1 \;=\; 1457 \;\neq\; 0\,.$$

Manifestement, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites ; selon ce théorème, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 11, un intervalle ouvert $K \subset \mathbb{R}$ contenant 3 et une fonction continue $f\colon I \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$y^6 - y - 6\,x^2 \;=\; 0\,, \quad \text{où } (x;\,y) \in I \times K \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; f(x)\,, \quad \text{où } x \in I\,.$$

Cherchons à présent l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en P. Pour trouver la pente m de cette tangente, il n'est pas nécessaire d'exhiber la fonction implicite f, en vue du calcul de $f'(11)$; il suffit de dériver des deux côtés par rapport à x l'équation $F(x;\,y) = 0$ (tout en gardant à l'esprit que y dépend de x), d'isoler ensuite la quantité $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x;\,y) \;=\; 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^6 - y - 6\,x^2) \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad 6\,y^5\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 12\,x \;=\; 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,(6\,y^5 - 1) \;=\; 12\,x \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{12\,x}{6\,y^5 - 1}\,,
\end{aligned}$$

et enfin d'évaluer cette quantité en P :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P = \frac{12 \cdot 11}{6 \cdot 3^5 - 1} = \frac{132}{1457}\,.$$

P étant le point de tangence, il appartient non seulement à $\mathcal{C}$ mais également à la tangente en question. De fait, les coordonnées $(x;\, y)$ de n'importe quel point se trouvant sur cette tangente doivent satisfaire :

$$\frac{y-3}{x-11} = \frac{132}{1457} \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 3 = \frac{132}{1457}\,(x-11)\,.$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = \frac{132}{1457}\,(x-11) + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{132}{1457}\,x + \frac{2919}{1457}\,.$$

3.6.6 Remarque : La technique de dérivation implicite permet de faire le lien entre la dérivée d'une fonction et celle de sa réciproque ; le résultat qui suit le met en évidence.

3.6.7 Proposition : *Soient I un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to J$ une fonction réelle, bijective et continue dans I ; soit aussi ${}^{r}\!f\colon J \to I$ la réciproque de f. Alors, en tout $x \in I$ où f est dérivable et où $f'(x) \neq 0$, ${}^{r}\!f$ est dérivable en $y = f(x)$; en outre :*

$$\big({}^{r}\!f\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Preuve : Soit $f\colon I \to J$ une fonction réelle, bijective et continue dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Le fait que f est bijective implique qu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante : si ce n'était pas le cas, il existerait deux éléments $x_1, x_2 \in I$, tels que $x_1 \neq x_2$, pour lesquels $f(x_1) = f(x_2)$, ce qui impliquerait que f ne serait pas injective. La proposition 2.10.6 (*cf.* section 2.10 du chapitre 2) permet alors d'affirmer que J est un intervalle ouvert. Soit à présent la fonction réciproque ${}^{r}\!f\colon J \to I$; cette fonction est bien définie dans J, vu que $f\colon I \to J$ est bijective ; elle est aussi continue dans J, vu que f est continue dans I. Par définition de la réciproque, ${}^{r}\!f\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in I$. Autrement écrit, avec $y = f(x)$:

$${}^{r}\!f(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad {}^{r}\!f(y) - x = 0\,.$$

Posons alors $F(x;\, y) = {}^{r}\!f(y) - x$; avec cette écriture, la dernière équation ci-dessus se récrit $F(x;\, y) = 0$. En appliquant le procédé de dérivation implicite, *i.e.* en dérivant $F(x;\, y) = 0$ des deux côtés par rapport à x, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x;\,y) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big({}^{\mathrm{r}}\!f(y)-x\big) \;=\; 0\\ &\Leftrightarrow \quad \big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1 \;=\; 0\\ &\Leftrightarrow \quad \big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 1\\ &\Leftrightarrow \quad \big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y) \;=\; \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\,.\end{aligned}$$

Or, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$. Donc :

$$\big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Cette expression montre, en outre, que ${}^{\mathrm{r}}\!f$ est dérivable en $y = f(x) \in J$ dès lors que f est dérivable en $x \in I$ et $f'(x) \neq 0$. $\square$

3.6.8 Remarque : L'égalité $\big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)}$, donnée dans la proposition précédente, peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \;=\; \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\,.$$

Tout comme la dérivée de f en x peut s'écrire $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, la dérivée de ${}^{\mathrm{r}}\!f$ en y peut se noter $\big({}^{\mathrm{r}}\!f\big)'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

3.6.9 Exemples : 1. Soit la fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\big(\exp(x)\big) \;=\; x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln\big(\exp(x)\big) - x \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(y) - x \;=\; 0\,,$$

où $y = \exp(x)$. Dérivons cette dernière équation des deux côtés par rapport à x, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(y)-x\big) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1 \;=\; 0\\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 1\\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; y\,.\end{aligned}$$

Or, $y = \exp(x)$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \exp'(x)$. Donc :

$$\exp'(x) \;=\; \exp(x)\,.$$

2. Soit la fonction Arccos: $[-1;\, 1] \to [0;\, \pi]$. Alors, pour tout $x \in [-1;\, 1]$:

$$\cos\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) - x = 0\,,$$

où $y = \mathrm{Arccos}(x)$. Dérivons cette dernière équation des deux côtés par rapport à x, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cos(y) - x\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad -\sin(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad -\sin(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin(y)}\,. \end{aligned}$$

Noter que la dernière expression obtenue n'est définie que si $\sin(y) \neq 0$. Elle n'est, de fait, définie que pour $y \in\,]0;\, \pi[$; en effet, d'une part Arccos ne prend que les valeurs de l'intervalle $[0;\, \pi]$, et d'autre part sin ne s'annule, dans $[0;\, \pi]$, qu'en 0 et en π. Ces observations, combinées au fait que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, permettent alors d'écrire $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$ (et non $-\sqrt{1 - \cos^2(y)}$, du fait que $y \in\,]0;\, \pi[$ et donc que $\sin(y) > 0$). Par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

vu que $y = \mathrm{Arccos}(x)$ et donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Arccos}'(x)$.

3.7 Tangentes à une courbe paramétrée

Le procédé de dérivation implicite permet de déterminer la pente, et par conséquent l'équation de la tangente à une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ en un point $P \in \mathcal{C}$, dans le cas où $\mathcal{C}$ est donnée par une équation de la forme $F(x;\, y) = 0$. Qu'en est-il dans le cas d'une *courbe paramétrée*, *i.e.* d'une courbe donnée par des équations paramétriques (*cf.* section 2.11 du chapitre 2) :

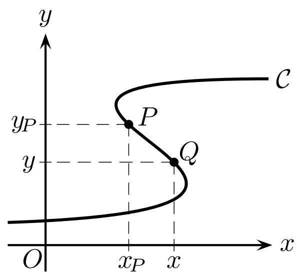
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad ?$$

Comment déterminer l'équation de la tangente à une telle courbe en un point $P(x_P;\, y_P)$, où $x_P = x(t_P)$ et $y_P = y(t_P)$ (où t_P est une certaine valeur du paramètre t) ? Pour répondre à cette question, il convient de revenir à l'idée première de la dérivée, à savoir la limite d'un rapport d'accroissements.

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe, donnée par les deux équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$, où $t \in I$, I étant un intervalle. Soient encore $P(x_P;\, y_P)$ un point sur $\mathcal{C}$ et $Q(x;\, y)$ un autre point sur $\mathcal{C}$, distinct de P. Noter que les coordonnées de P

et Q peuvent s'écrire, respectivement, $x_P = x(t_P)$ et $y_P = y(t_P)$, et $x = x(t)$ et $y = y(t)$, où $t, t_P \in I$, $t \neq t_P$. Considérons à présent un point mobile sur $\mathcal{C}$; lorsque le point en question se déplace de P à Q :

- sa coordonnée x subit un accroissement Δx donné par $\Delta x = x - x_P$,
- sa coordonnée y subit un accroissement Δy donné par $\Delta y = y - y_P$.



Par définition, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à la pente de la droite passant par P et Q. La valeur de cette pente dépend évidemment de la position de Q par rapport à P. Dans la situation où Q est infiniment proche de P, les accroissements Δx et Δy sont infiniment petits ; on les note alors respectivement $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. Quant au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que l'on note dans ce cas $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_P$, il n'est rien d'autre que la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en P. À supposer que $x(t) \neq x(t_P)$ pour tout $t \in V \smallsetminus \{t_P\}$, où V est un voisinage de t_P, ce rapport peut s'écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P = \lim_{t \to t_P} \frac{y(t) - y(t_P)}{x(t) - x(t_P)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_P + \Delta t) - y(t_P)}{x(t_P + \Delta t) - x(t_P)} \,,$$

où $\Delta t = t - t_P$ est l'accroissement selon t auquel correspondent les accroissements Δx selon x et Δy selon y. Remarquer que la quantité $\Delta t = t - t_P$ peut être introduite dans l'expression de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_P$, comme suit :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_P + \Delta t) - y(t_P)}{\Delta t} \, \frac{\Delta t}{x(t_P + \Delta t) - x(t_P)} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{y(t_P + \Delta t) - y(t_P)}{\Delta t}}{\frac{x(t_P + \Delta t) - x(t_P)}{\Delta t}} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_P + \Delta t) - y(t_P)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_P + \Delta t) - x(t_P)}{\Delta t}} \,.
\end{aligned}$$

Dans la dernière fraction obtenue, le numérateur n'est rien d'autre que la dérivée de y par rapport à t en t_P, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_P)$; et le dénominateur la dérivée de x par rapport à t en t_P, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_P)$. Ainsi donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_P)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_P)} \,.$$

Et plus généralement, si le point de tangence n'est pas spécifié :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \,,$$

pour autant que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ soient définies et que ni $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, ni $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ne s'annule ; avec la notation $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \,.$$

Un moyen simple permettant de retrouver cette formule consiste à multiplier la quantité $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ par la fraction $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$, puis de réarranger les différents éléments, comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\,.$$

Ce moyen permet aussi de trouver facilement la quantité $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, où $n = 2, 3, \ldots$ Par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\,\frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\,,$$

où $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ et $\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$.

3.7.1 Remarque : La notation $\dot{x}$ (respectivement $\dot{y}$), introduite ci-dessus, est un héritage du *calcul des fluxions* développé par le scientifique anglais *Isaac Newton* (*cf.* aperçu historique présenté au début du chapitre 4) ; elle apparaît essentiellement dans le cadre de l'étude des courbes paramétrées, où elle exprime la dérivée de la grandeur x (respectivement de la grandeur y) par rapport au paramètre donné.

3.7.2 Définition : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe donnée par les équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$, où $t \in I$, I étant un intervalle. On appelle *point singulier* tout point $P \in \mathcal{C}$ où $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est définie et vaut 0, et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ est définie et vaut 0.

3.7.3 Remarques : Reprenons les notations de la définition précédente.

- En tout point singulier P, l'expression $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ n'est pas définie, vu qu'elle équivaut à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ne soit pas définie en P ne permet toutefois pas de conclure que la tangente à $\mathcal{C}$ en P n'existe pas, mais uniquement que la pente de cette tangente, si elle existe, ne peut pas être obtenue avec l'expression $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.
- Pour se faire une image du concept de *point singulier*, on peut penser à un point d'une ligne de chemin de fer où un train s'arrête. À supposer que la ligne se trouve dans un plan, la trajectoire du train peut être décrite au moyen de deux équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées du train à l'instant t, relatives à un système de coordonnées cartésiennes Oxy placé dans le plan de la ligne. Les dérivées $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ correspondent alors aux composantes selon x et y, respectivement, du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du train à l'instant t. Supposons que le train s'arrête à un instant t_P donné, en un point P de sa trajectoire, puis repart en continuant sa route, sans changer de sens. À cet instant t_P, son vecteur vitesse est nul : $\vec{v}(t_P) = \vec{0}$; de fait $\dot{x}(t_P) = 0$ et $\dot{y}(t_P) = 0$. Le point P, où le train est arrêté, peut donc être considéré comme un point

singulier. Que le vecteur vitesse du train à l'instant t_P soit nul n'implique toutefois pas nécessairement que la trajectoire du train, *i.e.* la ligne de chemin de fer, n'admette pas de tangente en P ; un autre train, sur la même ligne, qui passerait par le point P sans devoir s'y arrêter constituerait une preuve de l'existence d'une telle tangente, vu que le vecteur vitesse de cet autre train, en P, serait non nul.

3.7.4 Exemples : 1. Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x(t) = R\cos(t) \\ y = y(t) = R\sin(t) \end{cases}, \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

Le fait que $\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 = R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t) = R^2$ montre que $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon R, centré sur l'origine O du sytème Oxy. Cherchons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P\big(x\big(\frac{\pi}{3}\big)\,;\,y\big(\frac{\pi}{3}\big)\big)$. Pour cela, calculons l'expression de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{R\cos(t)}{-R\sin(t)} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,,$$

et évaluons-la en P, *i.e.* en $t = \frac{\pi}{3}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P = -\frac{\cos\big(\frac{\pi}{3}\big)}{\sin\big(\frac{\pi}{3}\big)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

P étant le point de tangence, il appartient non seulement à $\mathcal{C}$ mais également à la tangente en question. De fait, les coordonnées $(x;\,y)$ de n'importe quel point se trouvant sur cette tangente doivent satisfaire :

$$\frac{y - y\big(\frac{\pi}{3}\big)}{x - x\big(\frac{\pi}{3}\big)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Leftrightarrow \qquad y - \frac{\sqrt{3}\,R}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{R}{2}\right),$$

avec $x\big(\frac{\pi}{3}\big) = R\cos\big(\frac{\pi}{3}\big) = \frac{R}{2}$ et $y\big(\frac{\pi}{3}\big) = R\sin\big(\frac{\pi}{3}\big) = \frac{\sqrt{3}\,R}{2}$. L'équation de la tangente s'écrit donc :

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{R}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\,R}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{2\,R}{\sqrt{3}}\,.$$

Noter que la pente de cette droite peut aussi être obtenue en dérivant des deux côtés par rapport à x l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + y^2 - R^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \qquad &\Leftrightarrow \quad 2\,x + 2\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\,x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}\,; \end{aligned}$$

en $P\left(\frac{R}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\right)$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P = -\frac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{3}\,R}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

2. Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) &= R\cos(t^2 - 4\,t) \\ y(t) &= R\sin(t^2 - 4\,t) \end{cases}, \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

Le fait que $\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 = R^2\cos^2(t^2-4\,t) + R^2\sin^2(t^2-4\,t) = R^2$ montre que $\tilde{\mathcal{C}}$ n'est autre que la courbe $\mathcal{C}$ décrite dans l'exemple précédent, à savoir un cercle de rayon R, centré sur l'origine O du sytème Oxy. Dans la situation présente :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(2\,t-4)\,R\cos(t^2-4\,t)}{-(2\,t-4)\,R\sin(t^2-4\,t)} = -\frac{(2\,t-4)\,R\cos(t^2-4\,t)}{(2\,t-4)\,R\sin(t^2-4\,t)}\,.$$

En $t = 2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ n'est pas définie ; le point $P\big(x(2);\, y(2)\big)$ est donc un point singulier. Il n'empêche que la tangente à $\tilde{\mathcal{C}}$ en P existe ; sa pente est bien définie ; elle ne peut simplement pas être déterminée avec les équations paramétriques données ici.

3.7.5 Remarques : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe.

- Supposons que $\mathcal{C}$ peut être décrite simultanément par des équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$, et par une équation cartésienne implicite $F(x;\, y) = 0$. Alors, en tout point $P(x_P;\, y_P) \in \mathcal{C}$ où les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont satisfaites, la quantité $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P$ obtenue par dérivation implicite (*i.e.* par dérivation par rapport à x de l'équation $F(x;\, y) = 0$, dans laquelle y est vue comme une grandeur dépendant de x) est égale au rapport $\frac{\dot{y}(t_P)}{\dot{x}(t_P)}$, où t_P est tel que $x(t_P) = x_P$ et $y(t_P) = y_P$, pour autant que $\frac{\dot{y}(t_P)}{\dot{x}(t_P)}$ soit défini (*i.e.* pour autant que P ne soit pas un point singulier). Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites ; selon ce théorème, il existe un intervalle ouvert I contenant x_P, un intervalle ouvert K contenant y_P, ainsi qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable dans I, dont le graphe coïncide avec $\mathcal{C}$ dans $I \times K$. De fait, $f(x) = y = y(t) \in K$ pour tout $x = x(t) \in I$; ce qui implique que pour tout accroissement $\Delta x = x(t_P + \Delta t) - x(t_P)$ selon x (où $x(t_P + \Delta t) \in I$), les accroissements correspondants $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ (où $f(x + \Delta x) \in K$) et $\Delta y = y(t_P + \Delta t) - y(t_P)$ (où $y(t_P + \Delta t) \in K$) selon y sont égaux, si bien que :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_P &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_P+\Delta x) - f(x_P)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_P+\Delta t) - y(t_P)}{x(t_P+\Delta t) - x(t_P)} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{y(t_P+\Delta t)-y(t_P)}{\Delta t}}{\frac{x(t_P+\Delta t)-x(t_P)}{\Delta t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(t_P)\,.\end{aligned}$$

- Dans le cas où $\mathcal{C}$ peut être décrite simultanément par des équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$, et par une équation cartésienne implicite $F(x;\, y) = 0$, les grandeurs $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ se retrouvent liées entre elles. En effet, de la dérivation par rapport à t de l'équation $F(x;\, y) = 0$, où $x = x(t)$ et $y = y(t)$, découle une relation dans laquelle apparaissent $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Noter que la quantité $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, respectivement $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, est parfois appelée *taux de variation de la grandeur* x, respectivement *taux de variation de la grandeur* y. Lorsque les deux taux $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont liés entre eux par une équation, on parle de **taux liés**.

3.7.6 Exemple : Reprenons le cercle $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy de $\mathbb{R}^2$. Ce cercle peut être décrit aussi bien par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}, \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,,$$

que par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, où x et y sont des grandeurs réelles. La dérivation par rapport à t de cette dernière équation, dans laquelle x et y sont considérées comme des fonctions du temps, conduit à une expression qui lie les taux $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 - R^2\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,x(t)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2\,y(t)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - 0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,y(t)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\,x(t)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,. \end{aligned}$$

C'est bien ce que l'on observe lorsqu'on calcule directement $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= R\cos(t) = \frac{R\sin(t)}{R\sin(t)}\,R\cos(t) = -\frac{R\cos(t)}{R\sin(t)}\big(-R\sin(t)\big) \\ &= -\frac{x(t)}{y(t)}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,, \end{aligned}$$

vu que :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -R\sin(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = R\cos(t)\,.$$

3.7.7 Illustration : Lorsqu'un gaz se trouve confiné dans un volume V fixe, sa pression p (qui se mesure en pascals (Pa)) et sa température T (qui se mesure en kelvins (K)) obéissent, pour autant que p soit suffisamment petite, à l'équation suivante, appelée *loi de Gay-Lussac*[III] :

$$\frac{p}{T} = C\,,$$

où C est une constante. Comme le rapport de p et T est constant, la variation dans le temps d'une des deux grandeurs entraîne nécessairement la variation dans le temps de l'autre. À un instant t_1 donné, on a mesuré une pression $p(t_1) = 1200\,\mathrm{Pa}$ et une température $T(t_1) = 293\,\mathrm{K}$; de plus, on a relevé que la température augmentait au taux $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t_1) = 1{,}8\,\mathrm{K/min}$. En récrivant la loi de Gay-Lussac sous la forme $p = C\,T$, puis en dérivant cette dernière des deux côtés par rapport à t :

$$\frac{p(t)}{T(t)} = C \qquad \Leftrightarrow \qquad p(t) = C\,T(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = C\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t)\,,$$

on trouve une expression qui lie le taux $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ au taux $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. En évaluant $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ en t_1, tout en remarquant que $C = \frac{p(t_1)}{T(t_1)}$, on obtient le taux de variation de la pression en t_1 :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t_1) = \frac{p(t_1)}{T(t_1)}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t_1) \approx 7{,}4\,\mathrm{Pa/min}\,,$$

et ce, sans connaître explicitement les équations paramétriques $p = p(t)$ et $T = T(t)$.

3.8 Différentielles

Au paragraphe 1.2, il a été vu que la dérivée d'une fonction f en x, si elle est définie, peut être vue comme un rapport de grandeurs infiniment petites :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,,$$

où $\mathrm{d}x$ est un accroissement infinitésimal (*i.e.* infiniment petit) de la variable indépendante x et $\mathrm{d}y$ l'accroissement infinitésimal de la variable dépendante $y = f(x)$, associé à $\mathrm{d}x$. Multipliée des deux côtés par $\mathrm{d}x$, cette relation devient :

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

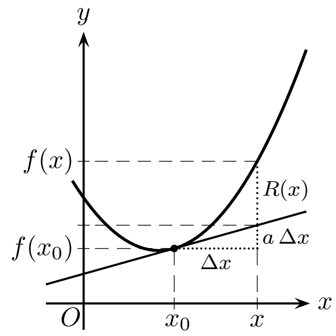
à un accroissement infiniment petit $\mathrm{d}x$ de la variable x correspond un accroissement infiniment petit $\mathrm{d}y$ de la variable y, qui s'écrit comme le produit de l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}x$ et de la dérivée de f au point où l'on considère l'accroissement infinitésimal.

Si une telle formulation s'avère utile dans la pratique, pour effectuer des calculs d'incertitude ou d'approximation, elle souffre néanmoins d'un manque de rigueur, du fait qu'elle traite d'éléments infiniment petits, mal définis mathématiquement. Plutôt que de parler d'accroissements infinitésimaux, on recourt plus volontiers au concept de *différentielle* ; et plutôt que d'écrire des relations entre accroissements infinitésimaux, on parlera de *différentiabilité*, dont la définition repose sur la notion précise de limite.

III. Louis Joseph Gay-Lussac était un chimiste et physicien français, né en 1778 à Saint-Léonard-de-Noblat (en Haute-Vienne, dans le royaume de France) et mort en 1850 à Paris (sous la IIe République).

3.8.1 Différentiabilité et dérivabilité

3.8.1 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$ (*i.e.* définie dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \gamma\,;\, x_0 + \gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif). On dit que f est *différentiable* en x_0 si, pour tout $x \in D$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :



$$f(x) \;=\; f(x_0) + a\,(x - x_0) + R(x)\,,$$

où a est un nombre réel et $R : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} \;=\; 0\,.$$

3.8.2 Remarques :

- La relation $f(x) = f(x_0) + a\,(x - x_0) + R(x)$, donnée dans la définition précédente, peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta y \;=\; a\,\Delta x + R(x)\,,$$

où $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

- La quantité Δy, mentionnée au point précédent, est souvent notée Δf ; que ce soit Δy ou Δf, toutes les deux écritures font référence à un seul et même objet : il s'agit de l'accroissement de la variable dépendante y, associé à l'accroissement Δx de la variable indépendante x.

3.8.3 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. Supposons que f est différentiable en x_0. Dire que f est différentiable en x_0 revient à dire que $f(x)$ peut s'écrire, pour tout $x \in D$, sous la forme :

$$f(x) \;=\; f(x_0) + a\,(x - x_0) + R(x)\,,$$

où a est un nombre réel et $R : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} \;=\; 0\,.$$

Noter que pour tout $x \in D$ tel que $x \neq x_0$, l'équation $f(x) = f(x_0) + a\,(x - x_0) + R(x)$ peut être récrite comme suit :

$$f(x) - f(x_0) \;=\; a\,(x - x_0) + R(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;=\; a + \frac{R(x)}{x - x_0}\,.$$

En passant à la limite lorsque x tend vers x_0, il vient alors :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;=\; \lim_{x \to x_0} \left(a + \frac{R(x)}{x - x_0} \right) \;=\; a\,,$$

vu que, par hypothèse, $\frac{R(x)}{x-x_0}$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Or, la limite qui se trouve du côté gauche dans l'expression ci-dessus n'est rien d'autre que la dérivée de f en x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,,$$

où $\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x$. En résumé, $f'(x_0) = a$; ce qui montre que f est dérivable en x_0.

Réciproquement, supposons que f est dérivable en x_0. Une telle hypothèse permet d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x-x_0)\big)\ ;$$

noter que tous les termes, du côté droit de l'égalité, se compensent deux à deux, excepté $f(x)$ qui demeure (d'où l'égalité). Posons à présent $a = f'(x_0)$ et $R(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x-x_0)$; notons alors les deux points suivants :

- a est un nombre réel, vu que f' est définie en x_0 ;
- $R(x)$ peut être vue comme l'expression d'une fonction réelle, définie dans D et satisfaisant $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$; en effet :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\,(x-x_0)\big)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right)\\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0\,.\end{aligned}$$

En résumé, $f(x)$ peut s'écrire, pour tout $x \in D$, sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + a\,(x-x_0) + R(x)\,,$$

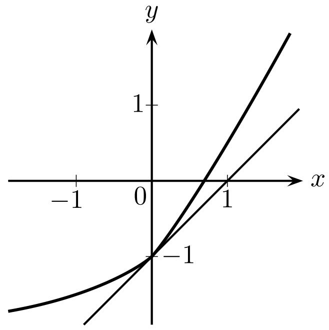
où a est un nombre réel et R une fonction réelle, définie dans D et satisfaisant la condition $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$; la fonction f est donc différentiable en x_0. $\square$

3.8.4 Remarque : La proposition précédente permet d'affirmer que les qualificatifs *différentiable* et *dérivable* sont complètement équivalents. Ces qualificatifs seront désormais considérés comme synonymes.

3.8.5 Exemple : La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4} - 1$, est différentiable en $x_0 = 0$. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = f(0) + 1\cdot(x-0) + R(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = -1 + x + R(x)\,,$$

avec :



$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - (-1+x) \\ &= x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4} - 1 - (-1+x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4}\,, \end{aligned}$$

et de remarquer que R est une fonction définie dans $\mathbb{R}$, qui satisfait $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x-0} = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = 0\,.$$

Noter que le facteur 1 multipliant la parenthèse $(x-0)$, présente dans l'expression $f(x) = f(0) + 1\cdot(x-0) + R(x)$, n'est rien d'autre que $f'(0)$.

3.8.6 Remarque : La condition $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0$, présente dans la définition de la différentiabilité d'une fonction f en un point x_0 de l'axe x (*cf.* définition 3.8.1), est d'une importance capitale pour le lien entre dérivabilité et différentiabilité de f en x_0 ; si cette condition n'est pas respectée, il n'est pas envisageable de parler de tangente au graphe de f en $\big(x_0\,;\,f(x_0)\big)$. Les deux exemples qui suivent illustrent bien cette réalité.

◇ Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $g(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^4} - 1$, ou de manière équivalente par $g(x) = x + \frac{1}{2}|x| - 1$. Certes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est possible d'écrire :

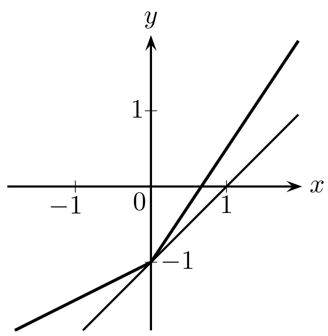
$$g(x) = g(0) + 1\cdot(x-0) + R_g(x) = -1 + x + R_g(x)\,,$$

où :

$$\begin{aligned} R_g(x) &= g(x) - (-1+x) = x + \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^4} - 1 - (-1+x) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^4} = \frac{1}{2}|x|\;; \end{aligned}$$

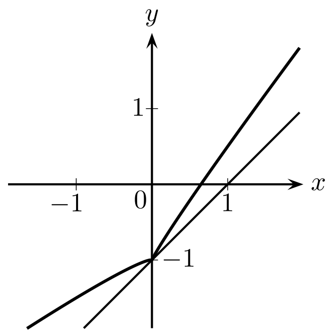
mais :

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_g(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}\,,$$



ce qui montre que la limite de $\frac{R_g(x)}{x}$, lorsque x tend vers 0, n'existe pas. Or, dans $\mathbb{R}^2$, le point $(0\,;\,-1)$ est un point anguleux, où la tangente au graphe de g n'existe pas (*cf.* figure ci-contre). Noter qu'un raisonnement similaire à celui qui vient d'être mené, mais avec, dans l'expression de $g(x)$, un facteur devant la parenthèse $(x-0)$ autre que 1, conduirait à la même conclusion au sujet de la limite de $\frac{R_g(x)}{x}$: au mieux le rapport $\frac{R_g(x)}{x}$ tendrait vers 0 lorsque x tendrait vers 0 par valeurs plus petites (respectivement par valeurs plus grandes) ; mais ce même rapport ne tendrait alors pas vers 0 lorsque x tendrait vers 0 par valeurs plus grandes (respectivement par valeurs plus petites).

◇ Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $h(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt[5]{x^4} - 1$; Certes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est possible d'écrire :



$$h(x) = h(0) + 1 \cdot (x - 0) + R_h(x) = -1 + x + R_h(x)\,,$$

où :

$$\begin{aligned} R_h(x) &= h(x) - (-1 + x) \\ &= x + \frac{1}{2}\sqrt[5]{x^4} - 1 - (-1 + x) = \frac{1}{2}\sqrt[5]{x^4}\,; \end{aligned}$$

mais :

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_h(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt[5]{x}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 0 \\ \infty & \text{si } x > 0 \end{cases}\,,$$

ce qui montre que la limite n'existe pas. Avec des limites infinies, on est particulièrement loin de la condition donnée dans la définition 3.8.1.

3.8.7 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$ et différentiable en x_0. Soit aussi l'accroissement $\Delta x = x - x_0$, où $x \in D$. On appelle *différentielle d'ordre* 1 *de* f, ou simplement *différentielle de* f la quantité proportionnelle à Δx dans l'expression de l'accroissement Δf de f (associé à Δx) :

$$f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad \text{ou, de manière équivalente :} \qquad f'(x_0)\,\Delta x\,.$$

3.8.8 Remarque : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$ et différentiable en x_0.

◇ Soit l'accroissement $\Delta x = x - x_0$, où $x \in D$, et $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ l'accroissement correspondant (associé à Δx). De manière générale, $\Delta f \neq f'(x_0)\,\Delta x$, vu que :

$$\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x + R(x)\,,$$

où $R(x)$ n'est en général pas égal à 0 si $x \neq x_0$. Ce n'est que lorsque l'accroissement Δx de x devient un accroissement infinitésimal (*i.e.* un accroissement infiniment petit), noté alors $\mathrm{d}x$, que l'accroissement correspondant selon y, noté $\mathrm{d}f$, infinitésimal aussi, peut s'écrire $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$; car dans ce cas, $R(x)$ devient infiniment petit (du fait que le rapport $\frac{R(x)}{x-x_0}$ devient infiniment petit). L'accroissement $\mathrm{d}f$ peut, de fait, être vu comme la différentielle de f, vu qu'il est proportionnel à l'accroissement $\mathrm{d}x$.

◇ Les accroissements infinitésimaux $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ peuvent être considérés comme étant les différentielles des variables x et y, respectivement ;

▷ si $\mathrm{d}y$ peut être vu comme la différentielle de y, c'est en raison du fait qu'il peut être identifié à $\mathrm{d}f$: comme $y = f(x)$, alors $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$, avec $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$; d'où $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

▷ si $\mathrm{d}x$ peut être vu comme la différentielle de x, c'est en raison du fait qu'il peut être identifié à la différentielle de la fonction ι, donnée par $\iota(x) = x$: comme $\iota'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\Delta\iota = 1 \cdot \Delta x$; en particulier, $\mathrm{d}\iota = 1 \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}\iota = \mathrm{d}x$.

Du point de vue adopté ici, les termes *accroissement infinitésimal* et *différentielle* sont complètement équivalents. Ils seront désormais considérés comme synonymes.

3.8.9 Exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^2 + 3$, est différentiable en 1. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) \;=\; f(1) + f'(1)(x-1) + R(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \;=\; 4 + 2\,(x-1) + R(x)\,,$$

avec :

$$R(x) \;=\; f(x) - 4 - 2\,(x-1) \;=\; x^2 + 3 - 4 - 2\,(x-1) \;=\; x^2 - 2\,x + 1\;,$$

et de remarquer que R est une fonction définie dans $\mathbb{R}$, qui satisfait $\lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{x-1} = 0$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2\,x + 1}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} (x-1) \;=\; 0\,.$$

Noter que la relation exprimant la différentiabilité de f en 1 peut être récrite comme suit :

$$f(x) - f(1) \;=\; f'(1)(x-1) + R(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta f \;=\; 2\,\Delta x + R(x)\,.$$

où $\Delta x = x - 1$ et $\Delta f = f(x) - f(1)$, avec $f(1) = 4$. Lorsque Δx et Δf deviennent des accroissements infinitésimaux, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}f$ respectivement, la quantité $R(x)$ devient négligeable ; la relation $\Delta f = 2\,\Delta x + R(x)$ devient alors :

$$\mathrm{d}f \;=\; 2\,\mathrm{d}x\,.$$

Cette expression n'est rien d'autre que la différentielle de f en 1. On écrit parfois $\mathrm{d}f(1)$, au lieu de $\mathrm{d}f$; ce afin que le point de l'axe x où $\mathrm{d}f$ est considérée soit clairement indiqué.

3.8.10 Propriétés : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$, et différentiables en x_0.

Notons $\mathrm{d}f(x_0)$, respectivement $\mathrm{d}g(x_0)$, la différentielle de f, respectivement g.

- La fonction $f+g$ est différentiable en x_0 ; de plus :

$$\mathrm{d}\big(f+g\big)(x_0) \;=\; \mathrm{d}f(x_0)+\mathrm{d}g(x_0)\;.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(f+g\big)(x_0) &= \big(f+g\big)'(x_0)\,\mathrm{d}x\\ &= \big(f'(x_0)+g'(x_0)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x+g'(x_0)\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{d}f(x_0)+\mathrm{d}g(x_0)\;.\end{aligned}$$

- La fonction fg est différentiable en x_0 ; de plus :

$$\mathrm{d}\big(fg\big)(x_0) \;=\; \mathrm{d}f(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0)\;.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(fg)(x_0) \;=\; (fg)'(x_0)\,\mathrm{d}x &= \big(f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= f'(x_0)\,g(x_0)\,\mathrm{d}x+f(x_0)\,g'(x_0)\,\mathrm{d}x\\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{d}f(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0)\;.\end{aligned}$$

- La fonction $\frac{f}{g}$ est différentiable en x_0, pour autant que g ne s'annule pas en x_0 ; de plus :

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{\mathrm{d}f(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\;.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) \;=\; \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)\,\mathrm{d}x &= \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f'(x_0)\,g(x_0)\,\mathrm{d}x-f(x_0)\,g'(x_0)\,\mathrm{d}x}{\big(g(x_0)\big)^2}\\ &= \frac{f'(x_0)\,\mathrm{d}x\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)\,\mathrm{d}x}{\big(g(x_0)\big)^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}f(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,\mathrm{d}g(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\;.\end{aligned}$$

- La fonction f^n (où $f^n(x) = \big(f(x)\big)^n$ pour tout $x \in D_1$, n étant un nombre entier strictement positif) est différentiable en x_0 ; de plus :

$$\mathrm{d}(f^n)(x_0) \;=\; n\, f^{n-1}(x_0)\, \mathrm{d}f(x_0)\ ,$$

où $f^{n-1}(x_0) = \big(f(x_0)\big)^{n-1}$. En effet :

$$\mathrm{d}(f^n)(x_0) \;=\; \big(f^n\big)'(x_0)\, \mathrm{d}x \;=\; n\, f^{n-1}(x_0)\, f'(x_0)\, \mathrm{d}x \;=\; n\, f^{n-1}(x_0)\, \mathrm{d}f(x_0)\,.$$

Gardons les hypothèses sur $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et qu'elle est différentiable en $f(x_0)$.

- La fonction $g \circ f$ est différentiable en x_0 ; de plus :

$$\mathrm{d}\big(g \circ f\big)(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big)\, \mathrm{d}f(x_0)\ .$$

En effet :

$$\mathrm{d}\big(g \circ f\big)(x_0) \;=\; \big(g \circ f\big)'(x_0)\, \mathrm{d}x \;=\; g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)\, \mathrm{d}x \;=\; g'\big(f(x_0)\big)\, \mathrm{d}f(x_0)\,.$$

3.8.11 Remarque : La proposition 3.8.3 permet d'affirmer que le calcul différentiel, *i.e.* le calcul traitant des différentielles, et le calcul traitant des dérivées sont un seul et même domaine des mathématiques.

3.8.2 Approximation

La relation exprimant la différentiabilité d'une fonction f en un point x_0 (*cf.* définition 3.8.1) peut s'avérer utile pour calculer des valeurs numériques approchées de nombres irrationnels.

Considérons un nombre irrationnel et supposons qu'il est possible de l'écrire sous la forme $f(x_1)$, où f est une fonction réelle, définie dans un voisinage V d'un nombre réel x_0 et différentiable en x_0, et x_1 un nombre réel dans V. Supposons, en outre, que les valeurs numériques de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ peuvent être aisément obtenues. Le fait que f est différentiable en x_0 permet d'écrire :

$$f(x_1) \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + R(x_1)\,.$$

Si x_1 est « suffisamment près » de x_0, $R(x_1)$ est « suffisamment petit », si bien que :

$$\boxed{f(x_1) \;\approx\; f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)}\,. \tag{3.8.1}$$

Le signe $\approx$ indique qu'il s'agit d'une approximation et non d'une égalité.

3.8.12 Exemples : 1. Cherchons une valeur approchée de $\sqrt{\frac{11}{10}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{11}{10}} &= \sqrt{\frac{10+1}{10}} = \sqrt{1+\frac{1}{10}} \\ &\approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\left(\frac{11}{10}-1\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = 1+\frac{1}{20} = \frac{21}{20} = 1{,}05\,.\end{aligned}$$

Ce calcul a été effectué en considérant la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{x}$, dont la dérivée f' s'écrit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et en utilisant la formule 3.8.1, avec $x_0 = 1$ et $x_1 = \frac{11}{10}$. Noter que la machine à calculer donne :

$$\sqrt{\frac{11}{10}} = 1{,}0488.....$$

2. Cherchons une valeur approchée de $\sin(31°)$. Pour cela, commençons par exprimer la mesure d'angle de $31°$ sous forme de longueur d'un arc de cercle de rayon égal à 1 :

$$31° \quad \leftrightarrow \quad \frac{31}{360}\cdot 2\pi\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(31°) &= \sin\left(\frac{31}{360}\cdot 2\pi\right) = \sin\left(\left(\frac{30}{360}+\frac{1}{360}\right)2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \\ &\approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}51511.....\end{aligned}$$

Le calcul a été effectué en considérant la fonction f donnée par $f(x) = \sin(x)$, dont la dérivée f' s'écrit $f'(x) = \cos(x)$, et en utilisant la formule 3.8.1, avec $x_0 = \frac{\pi}{6}$ et $x_1 = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$. La conversion de la mesure d'angle, faite au préalable, est essentielle ; si elle n'avait pas été effectuée, il n'aurait pas été possible d'utiliser la formule de dérivation $\sin' = \cos$; la formule encadrée n'aurait, de fait, pas été applicable telle quelle. Noter, pour terminer, que la machine à calculer donne :

$$\sin(31°) = 0{,}515038.....$$

3.8.13 Illustration : La formule 3.8.1 est fréquemment utilisée en physique et dans les sciences de l'ingénierie, notamment lorsqu'il s'agit d'exprimer un lien approximatif entre deux grandeurs, le lien exact n'étant pas connu ou non modélisable de manière simple. Comme exemple, on peut mentionner le phénomène de *dilatation thermique*, qui met en évidence la dépendance des dimensions d'un objet matériel par rapport à sa température. Prenons une barre métallique de longueur L_0 à la température T_0. Pour trouver la longueur L_1 de la barre à la température T_1, on utilise généralement l'expression :

$$L_1 = L_0\left(1+\alpha\,(T_1-T_0)\right),$$

où α est un coefficient appelé *coefficient de dilatation linéaire à la température* T_0 ; ce coefficient dépend du matériau dont est composée la barre. Bien que l'usage veuille qu'on l'écrive en utilisant le signe $=$ et non $\approx$, l'expression donnée ici n'est qu'une forme approximative d'une relation plus complexe qui ne peut pas être aisément modélisée. Cette expression a la même allure que la formule 3.8.1 ; afin que la ressemblance soit plus manifeste, il convient de poser $L_1 = L(T_1)$, $\lambda = \alpha\, L_0$ et de remplacer le signe $=$ par le symbole $\approx$:

$$L(T_1) \;\approx\; L_0 + \lambda\,(T_1 - T_0)\,.$$

3.8.3 Calcul d'incertitudes

Dans les sciences expérimentales, les mesures réalisées sur un dispositif n'ont jamais une précision infinie ; elles comportent ce que l'on appelle une *incertitude*. L'incertitude sur une mesure traduit l'erreur possible sur la mesure effectuée. La cause de l'erreur est multiple : l'instrument de mesure utilisé, l'expérimentateur, la méthode de mesure, etc. Plus une mesure est précise, plus son incertitude est petite.

L'incertitude sur une mesure x est un paramètre positif qui se note Δx. Une mesure x accompagnée de son incertitude Δx s'écrit $x \pm \Delta x$. Une telle notation indique que la mesure en question peut être *a priori* n'importe quel élément de l'intervalle $[x - \Delta x\,;\, x + \Delta x]$.

Supposons que la mesure x est utilisée pour calculer un résultat y, *via* la relation $y = f(x)$, où f est une fonction de la mesure x. L'incertitude Δx sur la mesure x induit alors une incertitude Δy sur le résultat y. Si le dispositif expérimental est correctement conçu, l'expérimentateur soigneux, la méthode de mesure appropriée..., l'écart Δx est suffisamment petit pour que la dérivée f' de f (à supposer qu'elle soit définie) ne varie pas trop dans l'intervalle $[x-\Delta x\,;\, x+\Delta x]$. Dans la relation exprimant la différentiabilité d'une fonction (*cf.* définition 3.8.1), le reste $R(x)$ devient alors négligeable, si bien que l'écart Δy peut s'écrire, dans ce cas, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$. Afin que Δy soit positif, les deux côtés de l'expression sont considérés en valeurs absolues :

$$|\Delta y| \;\approx\; \left|f'(x)\,\Delta x\right| \;=\; \left|f'(x)\right|\,|\Delta x|\;;$$

Dans la pratique, on note simplement :

$$\boxed{\Delta y \;\approx\; \left|f'(x)\right|\,\Delta x}\;.$$

Une telle écriture fait sens, vu que Δx et Δy sont des incertitudes et donc des quantités positives.

3.8.14 Exemple : On aimerait connaître l'aire A d'un disque. Pour cela, on mesure son diamètre ℓ à l'aide d'un pied à coulisse ; on obtient $\ell = (32{,}8 \pm 0{,}1)$ mm. Une telle écriture indique que $\ell = 32{,}8$ mm et que son incertitude est $\Delta\ell = 0{,}1$ mm. L'aire A est alors :

$$A \;=\; \pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \;\approx\; 845{,}0\,\mathrm{mm}^2 \;\approx\; 845\,\mathrm{mm}^2$$

et son incertitude :

$$\Delta A \;=\; \left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\ell}\right| \Delta\ell \;=\; \left|2\,\pi\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{2}\right| \Delta\ell \;=\; \frac{\pi\,\ell\,\Delta\ell}{2} \;\approx\; 5{,}2\,\mathrm{mm}^2 \;\approx\; 5\,\mathrm{mm}^2\,.$$

Comme le concept d'incertitude véhicule une idée d'imprécision, et qu'il ne fait pas sens d'être trop précis dans l'imprécision, la valeur de ΔA est arrondie à un seul chiffre significatif. Aussi, vu que l'incertitude, après avoir été arrondie, porte sur l'unité, la valeur de A est arrondie à l'unité également. Ainsi, sous forme compacte :

$$A \;=\; (845 \pm 5)\,\mathrm{mm}^2 \;=\; (8{,}45 \pm 0{,}05)\cdot 10^2\,\mathrm{mm}^2\,.$$

3.8.15 Remarques :

- Dans le cas où un résultat y dépend, non pas d'une, mais de n mesures $x_1, \ldots, x_n$ (où $n = 2, 3, 4, \ldots$) *via* la relation :

$$y \;=\; f(x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)\,,$$

  f étant une fonction des n grandeurs $x_1, \ldots, x_n$, l'incertitude Δy sur y s'obtient de la manière suivante :

$$\Delta y \;=\; \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \Delta x_k\,,$$

  où $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ est ce que l'on appelle la *dérivée partielle* de f par rapport à la variable x_k et Δx_k l'incertitude sur la mesure x_k. Dans la pratique, le calcul de la dérivée partielle de f par rapport à x_k se solde par un calcul de dérivée habituelle (basé sur les techniques développées dans le présent chapitre), dans lequel f est vue comme une fonction de la seule variable x_k, les autres grandeurs x_j, où $j \in \{1;\, \ldots\, ;\, n\}$ est tel que $j \neq k$, étant considérées comme des paramètres constants. Nécessitant des outils provenant de la théorie des fonctions de plusieurs variables, la démonstration de l'expression écrite ci-dessus ne peut pas être donnée ici.
- L'estimation et le calcul d'incertitudes sont un vaste sujet qui s'inscrit dans la science de la mesure. Les considérations faites ici ne constituent qu'une version simplifiée d'un ensemble cohérent de techniques plus complexes, basées entre autres sur des outils statistiques, qui permettent de caractériser aussi justement que possible la précision d'une mesure ou d'un résultat obtenu à partir de mesures.

3.9 Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

Outre la caractéristique de différentiabilité, ouvrant la voie au calcul d'approximation, les fonctions dérivables possèdent des propriétés dont l'intérêt ne se cantonne pas uniquement aux mathématiques, mais s'étend également à d'autres domaines ; par exemple la physique, notamment la cinématique.

3.9.1 Théorème : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que f est continue dans $[a;\, b]$, dérivable dans $]a;\, b[$ (i.e. dérivable dans le plus grand intervalle ouvert contenu dans $[a;\, b]$) et qu'elle satisfait $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un nombre réel $c \in\,]a;\, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Ce résultat est connu sous le nom de* ***théorème de Rolle***[IV].

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème. f étant continue dans $[a;\, b]$, elle atteint une valeur minimale m ainsi qu'une valeur maximale M dans $[a;\, b]$ (*cf.* théorème 2.10.3, section 2.10 du chapitre 2). En d'autres termes, il existe au moins un élément $x_m \in [a;\, b]$ et au moins un élément $x_M \in [a;\, b]$ tels que, pour tout $x \in [a;\, b]$:

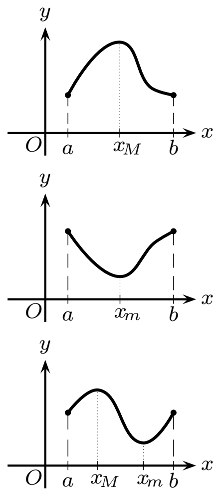
$$m \;=\; f(x_m) \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; f(x_M) \;=\; M\;;$$

en particulier :

$$m \;=\; f(x_m) \;\leqslant\; f(a) \;=\; f(b) \;\leqslant\; f(x_M) \;=\; M\,.$$

Deux situations peuvent alors se présenter :

- $m = M$, ce qui implique $m = f(a) = f(b) = M$:
  La fonction f ne peut qu'être constante dans $[a;\, b]$; dans cette situation, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in\,]a;\, b[$.
- $m \neq M$, ce qui implique $m \leqslant f(a) = f(b) \leqslant M$:
  Trois cas peuvent être distingués :



  1. $x_m = a$; alors nécessairement $x_M \in\,]a;\, b[$. En effet, si $x_m = a$, alors $m = f(x_m) = f(a) = f(b)$ et donc $f(a) = f(b) \neq M = f(x_M)$, vu que $m \neq M$; ainsi $x_M \neq a$ et $x_M \neq b$. Un raisonnement similaire s'applique dans le cas où $x_m = b$.
  2. $x_M = a$; alors nécessairement $x_m \in\,]a;\, b[$. En effet, si $x_M = a$, alors $M = f(x_M) = f(a) = f(b)$ et donc $f(a) = f(b) \neq m = f(x_m)$, vu que $m \neq M$; ainsi $x_m \neq a$ et $x_m \neq b$. Un raisonnement similaire s'applique dans le cas où $x_M = b$.
  3. $x_m, x_M \in\,]a;\, b[$.

  Dans tous les cas, au moins l'un des deux éléments x_m et x_M est dans l'intervalle ouvert $]a;\, b[$. Supposons que ce soit x_M qui est dans $]a;\, b[$. Alors :

$$f'(x_M) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_M + \Delta x) - f(x_M)}{\Delta x}\;;$$

IV. Michel Rolle était un mathématicien français, né le 21 avril 1652 à Ambert (en Auvergne, dans le royaume de France) et mort le 8 novembre 1719 à Paris.

autrement écrit, avec $\Delta x = x - x_M$:

$$f'(x_M) = \lim_{x \to x_M} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_M \\ x < x_M}} \dfrac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_M \\ x > x_M}} \dfrac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \end{cases} ;$$

or :

- ◇ $\lim\limits_{\substack{x \to x_M \\ x < x_M}} \dfrac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geqslant 0$ vu que $x - x_M < 0$ et $f(x) - f(x_M) \leqslant 0$ par définition d'un maximum ;
- ◇ $\lim\limits_{\substack{x \to x_M \\ x > x_M}} \dfrac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \leqslant 0$ vu que $x - x_M > 0$ et $f(x) - f(x_M) \leqslant 0$ par définition d'un maximum ;

en conséquence, et vu que f' est définie dans $]a; b[$, en particulier en x_M :

$$f'(x_M) = 0 .$$

Un raisonnement similaire s'applique si c'est x_m qui est dans $]a; b[$. Dans tous les cas, il existe au moins un $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. □

3.9.2 Exemple : Soient f la fonction réelle donnée par $f(x) = 4\,x^2 - 20\,x + 29$, $I =]1; 4[$ un intervalle ouvert et $\bar{I} = [1; 4]$ le plus petit intervalle fermé contenant I. Vu que f est une fonction polynomiale, elle est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$; elle est, de fait, continue dans $\bar{I}$ et dérivable dans I. En outre, elle prend la même valeur en 1 et en 4 : $f(1) = 13 = f(4)$. Manifestement, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle. Selon ce théorème, il existe au moins un nombre réel $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$; déterminons-le. Comme $f'(x) = 8\,x - 20$, alors :

$$f'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8\,c - 20 = 0 .$$

Un seul nombre réel satisfait cette équation ; il s'agit de :

$$c = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} ;$$

comme attendu, ce nombre est dans I.

3.9.3 Illustration : Considérons un point matériel $\mathcal{M}$ se déplaçant sur un axe z. Sur cet axe, la position de $\mathcal{M}$ peut être décrite par une expression de la forme $z = f(t)$, où f est une fonction continue du temps t qui s'écoule. Supposons que la position de $\mathcal{M}$ en un instant t_a est la même que celle en un instant $t_b > t_a$; autrement dit, supposons que $f(t_a) = f(t_b)$. Supposons aussi que la vitesse instantanée de $\mathcal{M}$ est définie en tout t, et donc en particulier en tout $t \in]t_a; t_b[$; en d'autres termes, supposons que f' est définie en tout t, en particulier en tout $t \in]t_a; t_b[$. Alors, selon le théorème de Rolle, il existe au moins un instant $t_c \in \,]t_a;\, t_b[$ où la dérivée f' de f est nulle : $f'(t_c) = 0$. Un tel résultat n'a rien d'étonnant : si le point matériel se retrouve au même endroit en t_a et en t_b :

- ◇ soit il reste immobile dans $[t_a;\, t_b]$, auquel cas sa vitesse est nulle pour tout $t \in \,]t_a;\, t_b[$,
- ◇ soit il est mobile, auquel cas il doit nécessairement rebrousser chemin en un instant t_c au moins, qui n'est ni l'instant t_a, ni l'instant t_b ; or, en t_c, sa vitesse est nécessairement nulle.

3.9.4 Théorème : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que f est continue dans $[a;\, b]$ et dérivable dans $]a;\, b[$. Alors il existe au moins un nombre réel $c \in \,]a;\, b[$ tel que :*

$$f'(c) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \big(\textit{ou, de manière équivalente : } f(b) - f(a) \;=\; f'(c)\,(b - a)\big)\,.$$

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème des accroissements finis****, ou* ***théorème de Lagrange***[V]*.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit alors g la fonction réelle donnée par :

$$g(x) \;=\; f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\,.$$

De par sa définition, g est définie et continue dans $[a;\, b]$, dérivable dans $]a;\, b[$ et satisfait $g(a) = f(a) = g(b)$. La fonction g remplit donc toutes les conditions nécessaires à l'application du théorème de Rolle. Selon ce théorème, il existe au moins un nombre réel $c \in \,]a;\, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme :

$$\begin{aligned} g'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigg(f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\bigg) \\ &=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - a) \;=\; f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,, \end{aligned}$$

alors :

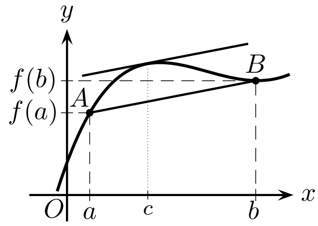
$$g'(c) \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;=\; 0\,.$$

En résumé, il existe au moins un nombre réel $c \in \,]a;\, b[$ tel que :

$$f'(c) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \qquad \square$$

V. Joseph Louis de Lagrange était un mathématicien né le 25 janvier 1736 à Turin (dans le royaume de Sardaigne) et mort le 10 avril 1813 à Paris (dans l'Empire napoléonien). Il est le fondateur de la *mécanique analytique*, discipline qui étudie les phénomènes mécaniques à l'aide des outils fournis par le calcul différentiel et intégral.

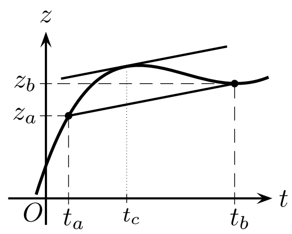
3.9.5 Remarques : • Dans l'énoncé du théorème précédent, la quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ n'est rien d'autre que la pente du segment reliant les points $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $B\big(b\,;\,f(b)\big)$, dans $\mathbb{R}^2$.



- La conclusion du théorème précédent peut être formulée comme suit : il existe au moins un point $\big(c\,;\,f(c)\big)$ du graphe de f, avec $c \in \,]a;\, b[$, où la tangente est parallèle au segment reliant $\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $\big(b\,;\,f(b)\big)$ (*cf.* figure ci-contre).

3.9.6 Illustrations : 1. Considérons un point matériel $\mathcal{M}$ se déplaçant sur un axe z. Sur cet axe, la position de $\mathcal{M}$ peut être décrite par une expression de la forme $z = f(t)$, où f est une fonction continue du temps t qui s'écoule. Notons z_a, respectivement z_b, la position de $\mathcal{M}$ en un instant t_a, respectivement un instant $t_b > t_a$. Supposons que la vitesse instantanée de $\mathcal{M}$ est définie en tout t, et donc en particulier en tout $t \in \,]t_a;\, t_b[$; en d'autres termes, supposons que f' est définie en tout t, en particulier en tout $t \in \,]t_a;\, t_b[$. Alors, selon le théorème de Lagrange, il existe au moins un instant $t_c \in \,]t_a;\, t_b[$ tel que :

$$f'(t_c) = \frac{f(t_b) - f(t_a)}{t_b - t_a}\,.$$



Autrement dit, il existe au moins un instant $t_c \in \,]t_a;\, t_b[$ où la vitesse instantanée du point matériel est égale à sa vitesse moyenne dans $[t_a;\, t_b]$; en effet, $f'(t_c)$ n'est rien d'autre que la vitesse instantanée de $\mathcal{M}$ en t_c ; alors que le terme de droite est sa vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $[t_a;\, t_b]$.

2. Assis au volant de son véhicule, un automobiliste se déplace sur une autoroute rectiligne. En un instant t_A, il se trouve au point A ; à cet instant, un radar mesure la vitesse de sa voiture et relève $v_A = 115\,\mathrm{km/h}$. Quatre minutes plus tard, à l'instant t_B, l'automobiliste se trouve au point B, distant de $d = 10\,\mathrm{km}$ du point A ; à cet instant t_B, un deuxième radar mesure la vitesse de la voiture et relève $v_B = 118\,\mathrm{km/h}$. Tout porte à croire que l'automobiliste respecte les limitations de vitesse ; pourtant, il est amendable. Et pour cause : sur le tronçon entre les points A et B, la vitesse moyenne de l'automobile est :

$$v_{\text{moy}} = \frac{d}{t_B - t_A} = \frac{10\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{min}} = \frac{10\,\mathrm{km}}{\frac{1}{15}\,\mathrm{h}} = 150\,\mathrm{km/h}\ ;$$

or, selon le théorème de Lagrange (qui est applicable ici, vu que la trajectoire de la voiture peut être décrite par une fonction du temps t, continue dans $[t_A;\, t_B]$ et dérivable dans $]t_A;\, t_B[$), il existe au moins un instant $t_C \in \,]t_A;\, t_B[$ où la vitesse instantanée de l'automobile est de 150 km/h.

3.9.7 Théorème : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D_1 \cap D_2$, où a et b sont deux nombres* *réels tels que $a < b$. Supposons que f et g sont continues dans $[a;\, b]$ et dérivables dans $]a;\, b[$; supposons, en outre, que g' ne s'annule en aucun point de $]a;\, b[$. Alors il existe au moins un nombre réel $c \in\,]a;\, b[$ tel que :*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \,.$$

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème des accroissements finis généralisé****, ou* ***théorème de Cauchy***[VI]*.*

Preuve : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles satisfaisant les hypothèses du théorème. Le fait que g' ne s'annule en aucun point de $]a;\, b[$ permet d'affirmer, grâce au théorème de Rolle, que $g(a) \neq g(b)$. Soit alors la fonction réelle h donnée par :

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(x) - g(a)\big) \,.$$

De par sa définition, h est définie et continue dans $[a;\, b]$, dérivable dans $]a;\, b[$ et satisfait $h(a) = f(a) = h(b)$. La fonction h remplit donc toutes les conditions nécessaires à l'application du théorème de Rolle. Selon ce théorème, il existe au moins un nombre réel $c \in\,]a;\, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Comme :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big(g(x) - g(a)\big)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(g(x) - g(a)\big) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x) \,, \end{aligned}$$

alors :

$$h'(c) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c) = 0 \,.$$

En résumé, il existe au moins un nombre réel $c \in\,]a;\, b[$ tel que :

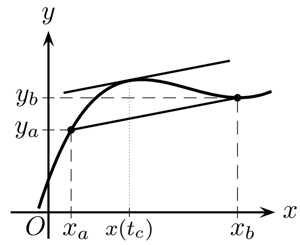
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a)}\, g'(c) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \,. \qquad \square$$

3.9.8 Remarque : Le théorème des accroissements finis généralisés n'est rien d'autre que le théorème des accroissements finis appliqué à des courbes $\mathcal{C}$ données non pas par une équation cartésienne explicite $y = f(x)$, mais par deux équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \,,$$

VI. Augustin Louis Cauchy était un mathématicien français, né le 21 août 1789 à Paris (près de six semaines après la prise de la Bastille) et mort le 23 mai 1857 à Sceaux (dans les Hauts-de-Seine, dans le Second Empire de France). Il est connu pour ses nombreux travaux de mathématiques, notamment ceux en lien avec les calculs différentiel et intégral.

où f et g sont deux fonctions définies et continues dans un certain intervalle $[t_a\,;\,t_b]$, où t_a et t_b sont deux nombres réels tels que $t_a < t_b$, et dérivables dans $]t_a\,;\,t_b[$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer la figure ci-contre et de se référer aux remarques 3.9.5 : en notant $x_a = g(t_a)$, $x_b = g(t_b)$, $y_a = f(t_a)$ et $y_b = f(t_b)$, et en observant que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, où $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'$ et $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'$ (*cf.* section 3.7 consacrée aux tangentes à une courbe paramétrée), il vient :



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(t_c) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f'(t_c)}{g'(t_c)} = \frac{f(t_b) - f(t_a)}{g(t_b) - g(t_a)} \,.$$

3.9.9 Théorème : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un intervalle fermé $[a;\,x_0] \subset D_1 \cap D_2$, où a et x_0 sont deux nombres réels tels que $a < x_0$. Supposons que f et g sont continues dans $[a;\,x_0]$ et dérivables dans $]a;\,x_0[$. Supposons, de plus, que :*

$$f(x_0) = 0 = g(x_0)\,,$$

que g et g' ne s'annulent en aucun point de $]a;\,x_0[$ et que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\,,$$

où ℓ est un nombre réel. Alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

Un tel résultat est connu sous le nom de ***Règle de Bernoulli***[VII]***-L'Hôpital***[VIII].

Preuve : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles satisfaisant les hypothèses du théorème, et x un élément quelconque de $]a;\,x_0[$. D'une part, vu que

VII. Jean Bernoulli était un mathématicien helvétique, d'origine flamande, né en 1667 à Bâle (en Suisse) et mort en 1748 dans la même ville. Disciple, avec son frère Jacques, de Leibniz, il a été parmi les premiers à comprendre le calcul infinitésimal et à l'appliquer dans diverses situations.

VIII. Guillaume François de L'Hôpital (marquis de Saint-Mesme, compte d'Autremont et seigneur d'Ouques) était un mathématicien français, né en 1661 à Paris (dans le royaume de France) et mort en 1704 dans la même ville. L'Hôpital a acquis une certaine notoriété peu après sa mort, grâce à un ouvrage paru de son vivant, intitulé *Analyse des infiniment petits*. C'est dans cet ouvrage qu'est apparu pour la première fois le résultat appelée de nos jours *règle de Bernoulli-L'Hôpital*, ou parfois simplement *règle de L'Hôpital*. Les publications successives, dans la première moitié du XX[e] siècle, du traité de Bernoulli sur le calcul différentiel, puis de sa correspondance, ont permis d'établir que cette règle, certes publiée pour la première fois dans l'ouvrage de L'Hôpital, n'était pas due à L'Hôpital lui-même, mais à Bernoulli. Si elle n'a pas été publiée par Bernoulli lui-même, c'est parce que L'Hôpital avait passé un accord avec Bernoulli (en 1694) : en échange d'une allocation annuelle de 300 livres, Bernoulli s'engageait à transmettre à L'Hôpital toutes ses découvertes, s'abstenant de les communiquer à toute autre personne.

$f(x_0) = 0 = g(x_0)$ et que g ne s'annule pas dans $]a;\, x_0[$:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \;;$$

d'autre part, selon le théorème des accroissements finis généralisé (dont les hypothèses sont toutes satisfaites dans $[a;\, x_0]$), il existe un nombre réel $c_x \in \,]x;\, x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \,.$$

En résumé, il existe un nombre réel $c_x \in \,]x;\, x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \,.$$

Par conséquent :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \,,$$

vu que x et c_x tendent tous les deux vers x_0 lorsque x tend vers x_0. □

3.9.10 Remarques :

- La conclusion du théorème précédent demeure valable si, dans l'énoncé, la condition $a < x_0$ est remplacée par la condition $a > x_0$; noter alors que la modification de $a < x_0$ en $a > x_0$ entraîne la substitution des intervalles $[a;\, x_0]$ et $]a;\, x_0[$ par les intervalles $[x_0;\, a]$ et $]x_0;\, a[$, respectivement, ainsi que la substitution des limites par valeurs plus petites ($x \to x_0$ avec $x < x_0$) par des limites par valeurs plus grandes ($x \to x_0$ avec $x > x_0$).
- Dans le cas où la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites (évoquée dans le théorème précédent) et la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus grandes (mentionnée au point précédent) sont égales à un seul et même nombre réel ℓ, l'expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers x_0, que ce soit par valeurs plus petites ou par valeurs plus grandes.
- Dans la conclusion du théorème précédent, il s'agit bien du rapport entre la dérivée du numérateur et la dérivée du dénominateur, et non de la dérivée du rapport entre le numérateur et le dénominateur.

3.9.11 Exemple : Cherchons la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. À cet effet, remarquons que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < 0 < b$:

- ◇ les fonctions données par $\sin(x)$ et par x sont continues dans $[a;\, b]$ et dérivables dans $]a;\, 0[\, \cup \,]0;\, b[$,
- ◇ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$,
- ◇ les quantités x et 1 ne s'annulent pas dans $]a;\, 0[\, \cup \,]0;\, b[$.

Manifestement, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) ; selon cette règle :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

3.9.12 Remarques : • **Première généralisation de la règle de Bernoulli-L'Hôpital** : La conclusion du théorème 3.9.9 demeure valable si, dans les hypothèses, la condition $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ est remplacée par la condition :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} g(x)\,,$$

et la condition de la continuité des fonctions f et g dans $[a;\, x_0]$ remplacée par la condition de la continuité de f et g dans $[a;\, x_0[$. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la preuve du théorème 3.9.9 et de l'adapter comme suit. Soient x et b deux éléments de l'intervalle $]a;\, x_0[$, tels que $x \neq b$. Alors, selon le théorème des accroissements finis généralisé, il existe un nombre réel c_x compris strictement entre x et b (*i.e.* un nombre réel $c_x \in\,]x;\, b[$ si $x < b$ ou $c_x \in\,]b;\, x_0[$ si $b < x$) tel que :

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,,$$

et ce aussi bien dans le cas où $x < b$ que dans le cas où $x > b$ (du fait que $\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$). Ainsi, en passant à la limite lorsque b tend vers x_0 par valeurs plus petites :

$$\lim_{\substack{b\to x_0\\b<x_0}} \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \lim_{\substack{b\to x_0\\b<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{b\to x_0\\b<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,,$$

vu que, d'une part, $f(b)$ et $g(b)$ tendent toutes les deux vers 0 lorsque b tend vers x_0 par valeurs plus petites, d'autre part $\frac{0-f(x)}{0-g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Par conséquent :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \lim_{\substack{b\to x_0\\b<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,.$$

Or :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \lim_{\substack{b\to x_0\\b<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{c_x\to x_0\\c_x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,,$$

du fait que c_x tend aussi vers x_0 lorsque b et x tendent tous les deux vers x_0 (vu que c_x est strictement compris entre x et b) ; et comme :

$$\lim_{\substack{c_x\to x_0\\c_x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

il ne s'agit là, en effet, que de deux écritures différentes de la même limite, alors :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \qquad \square$$

- **Deuxième généralisation de la règle de Bernoulli-L'Hôpital** : La conclusion du théorème 3.9.9 demeure valable si, dans les hypothèses, la condition $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ est remplacée par la condition :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{ou} \\ -\infty \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) = \begin{cases} \infty & \text{ou} \\ -\infty \end{cases},$$

et la condition de la continuité des fonctions f et g dans $[a;\, x_0]$ remplacée par la condition de la continuité de f et g dans $[a;\, x_0[$. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la preuve du théorème 3.9.9 et de l'adapter comme suit. Soient x et b deux éléments de l'intervalle $]a;\, x_0[$, tels que $x \neq b$. Alors, selon le théorème des accroissements finis généralisé, il existe un nombre réel c_x compris strictement entre x et b tel que :

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,,$$

et ce aussi bien dans le cas où $x < b$ que dans le cas où $x > b$. Intéressons-nous à présent à la quantité $\frac{f(x)}{g(x)}$; celle-ci peut être récrite comme suit, pour autant que $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq f(b)$, $g(x) \neq 0$ et $g(x) \neq g(b)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(b) - f(x)}{f(b) - f(x)}\,\frac{g(b) - g(x)}{g(b) - g(x)}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \left(-\frac{f(b) - f(x)}{f(x) - f(b)}\right)\left(-\frac{g(x) - g(b)}{g(b) - g(x)}\right)\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \\ &= \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}\,\frac{g(x) - g(b)}{f(x) - f(b)}\,\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}\,\frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}}\,. \end{aligned}$$

Noter que les conditions $f(x) \neq 0$, $f(x) \neq f(b)$, $g(x) \neq 0$ et $g(x) \neq g(b)$ sont de toute façon satisfaites lorsqu'il est question de passer à la limite où x, puis b, tendent tous les deux vers x_0 par valeurs plus petites ; en effet :

  - ◇ f ne peut pas valoir 0 ou $f(b)$ juste avant x_0 et satisfaire en même temps $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$;
  - ◇ g ne peut pas valoir 0 ou $g(b)$ juste avant x_0 et satisfaire en même temps $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = -\infty$.

Des deux derniers résultats obtenus, il ressort que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}\,\frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,\frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}}\,.$$

Par conséquent, en passant à la limite lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,\frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}}\right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b)}{f(x)}} \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot 1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\,, \end{aligned}$$

vu que les rapports $\frac{f(b)}{f(x)}$ et $\frac{g(b)}{g(x)}$ tendent tous les deux vers 0 lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites (du fait que $f(x)$ tend vers ∞ ou $-\infty$ et $g(x)$ vers ∞ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites), quel que soit $b \in]a; x_0[$. Et donc, en passant à la limite lorsque b tend vers x_0 par valeurs plus petites :

$$\lim_{\substack{b\to x_0\\ b<x_0}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{b\to x_0\\ b<x_0}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} .$$

Or, d'une part :

$$\lim_{\substack{b\to x_0\\ b<x_0}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

vu que la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites ne dépend pas de b, et d'autre part :

$$\lim_{\substack{b\to x_0\\ b<x_0}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{c_x\to x_0\\ c_x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} ,$$

du fait que c_x tend vers x_0 lorsque b et x tendent tous les deux vers x_0 (vu que c_x est strictement compris entre x et b) ; et comme :

$$\lim_{\substack{c_x\to x_0\\ c_x<x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

alors :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \qquad \square$$

- **Troisième généralisation de la règle de Bernoulli-L'Hôpital** : Si, dans les hypothèses du théorème 3.9.9 (respectivement de sa première, sa deuxième généralisation), la condition :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

est remplacée par la condition :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \qquad \left(\text{respectivement} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty\right) ,$$

la conclusion du théorème en question (respectivement de sa première, sa deuxième généralisation) est :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \qquad \left(\text{respectivement} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty\right) .$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} \infty & \text{ou} \\ -\infty \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{1}{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = 0\,,$$

puis de mener le même raisonnement que celui présenté dans la preuve du théorème 3.9.9 (ou dans la preuve de l'une ou l'autre de ses généralisations), mais avec le rapport $\frac{g(x)}{f(x)}$ (et non $\frac{f(x)}{g(x)}$). Noter que, pour que l'argumentation soit valable, il est nécessaire de s'assurer qu'il existe un intervalle $]\alpha; x_0[$ (où α est un nombre réel strictement inférieur à x_0) dans lequel ni f ni f' ne s'annulent. Or, une telle condition est satisfaite dès lors que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers ∞ (ou $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 par valeurs plus petites :

- ◇ g et g' ne s'annulant pas dans $]a; x_0[$, f' ne peut pas s'annuler juste avant x_0 et satisfaire en même temps $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ ou $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$;
- ◇ f' ne s'annulant pas juste avant x_0, f ne peut pas s'annuler juste avant x_0 et satisfaire en même temps la condition $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$, ou encore $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Ainsi donc :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0\,.$$

Et comme les rapports $\frac{g(x)}{f(x)}$ et $\frac{g'(x)}{f'(x)}$ ont les mêmes signes juste avant x_0 au moins, alors :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} \infty & \text{ou} \\ -\infty \end{cases}\,.$$

- Les remarques 3.9.10, relatives au théorème 3.9.9, s'appliquent également aux trois généralisations du dit théorème, énoncées dans les points précédents.
- Le théorème 3.9.9, ou l'une ou l'autre de ses généralisations, peut être également utilisé pour calculer des limites à l'infini (*i.e.* des limites lorsque x tend vers ∞ ou vers $-\infty$). Pour s'en convaincre, il convient d'introduire une nouvelle variable, la variable réelle t donnée par $t = \frac{1}{x}$, de sorte que la limite lorsque x tend vers ∞ (respectivement vers $-\infty$) soit transformée en limite lorsque t tend vers 0 par valeurs plus grandes (respectivement par valeurs plus petites). Le détail du raisonnement est laissé en exercice.

3.9.13 Exemples : 1. Calculons la limite du quotient de la fonction logarithme naturel par la fonction racine carrée, lorsque x tend vers l'infini ; à cet effet, commençons par introduire la variable t donnée par $t = \frac{1}{x}$, de sorte que la limite lorsque x tend vers ∞ se ramène à une limite lorsque t tend vers 0 par valeurs plus grandes :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t}}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\ln(t^{-1})}{\sqrt{t^{-1}}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{-\ln(t)}{t^{-\frac{1}{2}}}\,.$$

À ce stade, relevons que, pour tout nombre réel $b > 0$:

- ◇ les fonctions données par $-\ln(t)$ et par $t^{-\frac{1}{2}}$ sont continues dans $]0;\, b]$ et dérivables dans $]0;\, b[$,
- ◇ les expressions $-\ln(t)$ et $t^{-\frac{1}{2}}$ tendent toutes les deux vers ∞ lorsque t tend vers 0 par valeurs plus grandes,
- ◇ les fonctions données par $t^{-\frac{1}{2}}$ et par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, t^{-\frac{1}{2}}$ (*i.e.* par $-\frac{1}{2}\, t^{-\frac{3}{2}}$) ne s'annulent pas dans $]0;\, b[$,
- ◇ la limite suivante existe (*cf.* calcul ci-dessous) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\ln(t)\big)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-\frac{1}{2}}}\,.$$

Manifestement, toutes les conditions sont réunies pour pouvoir appliquer la deuxième généralisation de la règle de Bernoulli-L'Hôpital ; selon cette deuxième généralisation :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{-\ln(t)}{t^{-\frac{1}{2}}} \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{2}\, t^{-\frac{3}{2}}} \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t^{-1}}{\frac{1}{2}\, t^{-\frac{3}{2}}} \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} 2\, t^{\frac{1}{2}} \;=\; 0\,.$$

2. Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\,.$$

À cet effet, considérons la fonction f donnée par $f(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$, où $x \in \mathbb{R}_+^*$, et calculons sa limite lorsque x tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} \;&=\; \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \exp\left[\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}}\right)\right] \\
&=\; \lim_{x\to\infty} \exp\left[\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] \;\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=}\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \exp\big[2\, t\ln(t)\big] \\
&=\; \exp\Big[\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} 2\, t\ln(t)\Big] \;=\; \exp\left[\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{2\ln(t)}{\frac{1}{t}}\right] \\
&\stackrel{\text{B-H}}{=}\; \exp\left[\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\frac{2}{t}}{-\frac{1}{t^2}}\right] \;=\; \exp\Big[\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} -2\, t\Big] \\
&=\; \exp(0) \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$

L'introduction de la limite dans l'argument de l'exponentielle se justifie par le fait que la fonction exp est continue dans $\mathbb{R}$. Pour ce qui est de la règle de Bernoulli-

L'Hôpital (B-H), elle est applicable, vu que :

- ◇ les fonctions données par $2\ln(t)$ et par $\frac{1}{t}$ sont continues et dérivables dans $\mathbb{R}_+^*$,
- ◇ les expressions $2\ln(t)$ et $\frac{1}{t}$ tendent respectivement vers $-\infty$ et vers ∞ lorsque t tend vers 0 par valeurs plus grandes,
- ◇ les quantités $\frac{1}{t}$ et $-\frac{1}{t^2}$ ne s'annulent pas dans $\mathbb{R}_+^*$;
- ◇ la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\frac{2}{t}}{-\frac{1}{t^2}}\,.$$

En résumé :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1\,.$$

En conséquence, et vu que $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

3.9.14 Remarque : La règle de Bernoulli-L'Hôpital, tout comme ses généralisations, constitue une condition suffisante (et non nécessaire) d'existence de la limite d'un quotient de deux fonctions ; le fait, par exemple, que deux fonctions f et g ne satisfont pas l'hypothèse d'existence de la limite du quotient de f' par g' n'implique pas que la limite du quotient de f par g n'existe pas. Les deux fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, données par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x\,,$$

reflètent bien cette réalité : f et g satisfont toutes les hypothèses du théorème 3.9.9, excepté le fait que la limite du quotient de la dérivée f' par la dérivée g' lorsque x tend vers 0 par valeurs plus petites existe (*cf.* deuxième des remarques 3.2.11) :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Pourtant, la limite du quotient de f par g lorsque x tend vers 0 par valeurs plus petites existe :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

Effectivement, $-|x| \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$; or, $-|x|$ et $|x|$ tendent toutes les deux vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs plus petites, d'où la conclusion (*cf.* théorème des deux gendarmes). Noter, pour terminer, que les considérations faites ici, dans le cas où x tend vers 0 par valeurs plus petites, s'appliquent aussi dans la situation où x tend vers 0 par valeurs plus grandes.

Chapitre 4

Calcul intégral

Dans l'Antiquité déjà, l'être humain s'intéressait aux problèmes de quadratures [I] et de cubatures [II]. Alors qu'il est parvenu sans trop de peine à calculer des aires de polygones [III] ou des volumes de polyèdres [IV], il a rencontré nombre de difficultés lorsqu'il était question de surfaces délimitées par des courbes ou des solides délimités par des surfaces courbes.

Si les Grecs anciens ont développé des techniques astucieuses permettant de s'attaquer à certaines surfaces non polygonales, ils n'ont toutefois pas été en mesure d'exhiber une méthode générale, pouvant être appliquée en toutes circonstances. L'approche globale, permettant de résoudre n'importe quel problème de quadrature (ou presque), n'est apparue que près de vingt siècles plus tard. Appelée *calcul infinitésimal*, en raison du fait qu'elle se base sur la notion d'élément *infinitésimal* (*i.e.* d'élément infiniment petit), cette approche a littéralement révolutionné le monde des mathématiques et de la physique des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles.

Le calcul infinitésimal se compose de deux domaines qui s'avèrent être complémentaires :

- le calcul différentiel, développé dans le but de pouvoir obtenir l'équation de la tangente à une courbe en un point donné,
- le calcul intégral, dont l'objectif premier est le calcul d'aires de surfaces non polygonales.

I. Par définition, la quadrature d'une surface est la détermination d'un carré dont l'aire est égale à l'aire de la surface en question. Par extension, le terme désigne le calcul de l'aire d'une surface ; et dans le domaine du calcul intégral, il se réfère au calcul d'une intégrale, *i.e.* au calcul de l'aire d'une surface, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

II. Par définition, la cubature d'un solide est la détermination d'un cube dont le volume est égal au volume du solide en question. Par extension, le terme désigne le calcul du volume d'un solide.

III. Par définition, un polygone est une surface plane (*i.e.* une surface qu'il est possible de mettre dans le plan euclidien) délimitée par une ligne polygonale fermée ; par ligne polygonale fermée, on comprend un ensemble de segments mis bout à bout, la deuxième extrémité du dernier segment touchant la première extrémité du premier segment.

IV. Par définition, un polyèdre est un solide, dans l'espace euclidien, délimité par un nombre fini de polygones, chaque côté de chacun des polygones étant commun au côté d'un autre polygone.

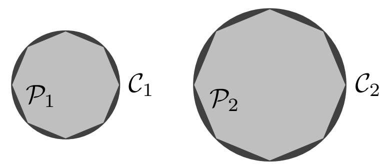
Dans le présent ouvrage, le calcul différentiel est traité dans le troisième chapitre ; quant au calcul intégral, il fait l'objet du présent chapitre. Nombre de notions et de notations apparaissant dans ces deux chapitres se réfèrent aux mathématiques et aux mathématiciens des siècles passés. Ces notions et notations peuvent être mieux comprises et acceptées lorsqu'elles sont replacées dans le contexte dans lequel elles sont nées ; voilà pourquoi un bref historique du calcul infinitésimal est proposé ici, avant de rentrer dans le vif du sujet dans la section suivante (*cf.* section 4.1).

Aperçu historique

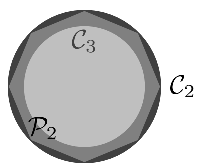
Antiquité

On doit les premiers écrits relatifs aux calculs d'aires de surfaces non polygonales, en Europe du moins, aux mathématiciens grecs de l'Antiquité.

- Au IV^e^ siècle av. J.-C., le savant grec *Eudoxe de Cnide* (408-355 av. J.-C.) a développé et utilisé une technique propre pour aborder les problèmes de quadratures. Appelée *méthode d'exhaustion* (près de vingt siècles plus tard, par le jésuite flammand *Grégoire de Saint-Vincent*), du fait qu'elle traite de manière exhaustive tous les cas possibles, cette approche ne permet pas de déduire les formules, mais seulement de les démontrer. C'est avec cette méthode qu'Eudoxe a pu établir le fait que l'aire A d'un disque $\mathcal{D}$ est proportionnelle à son diamètre d. L'idée de la preuve est la suivante.
  - ▷ On considère deux disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, d'aires A_1 et A_2 respectivement et délimités par les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement ; on considère aussi deux polygones semblables $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, le premier inscrit dans $\mathcal{C}_1$, le deuxième dans $\mathcal{C}_2$.



  - ▷ Par un calcul direct, on montre que $\frac{P_2}{P_1} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$, où d_1 est le diamètre de $\mathcal{D}_1$, d_2 le diamètre de $\mathcal{D}_2$, P_1 l'aire de $\mathcal{P}_1$ et P_2 l'aire de $\mathcal{P}_2$; et on note que le résultat est valable quel que soit le polygone $\mathcal{P}_1$ inscrit dans $\mathcal{D}_1$ et son polygone semblable $\mathcal{P}_2$ inscrit dans $\mathcal{C}_2$.
  - ▷ On suppose que $\frac{A_2}{A_1} > \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$. On considère alors le disque $\mathcal{D}_3$ délimité par le cercle $\mathcal{C}_3$, dont l'aire, notée A_3, satisfait $\frac{A_3}{A_1} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$. De $\frac{A_2}{A_1} > \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$ et $\frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} = \frac{A_3}{A_1}$, on déduit que $A_2 > A_3$. On prend ensuite un polygone $\mathcal{P}_2$ inscrit dans $\mathcal{C}_2$, dont l'aire, notée P_2, satisfait $A_2 > P_2 > A_3$ (un tel acte est toujours possible, en vertu des deux résultats énoncés ci-dessous) ; et on considère son polygone semblable[V] $\mathcal{P}_1$ inscrit dans $\mathcal{C}_1$, dont l'aire est P_1 ; on raisonne enfin comme suit : selon les considérations faites au point précédent et ici, $\frac{A_3}{A_1} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} = \frac{P_2}{P_1}$; or, $P_2 > A_3$, par choix de $\mathcal{P}_2$; donc nécessairement $P_1 > A_1$, de sorte que $\frac{A_3}{A_1} = \frac{P_2}{P_1}$.



V. Deux polygones sont dits semblables si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une transformation géométrique qui conserve les angles.

Cette conclusion est toutefois absurde, vu que $\mathcal{P}_1$ est inscrit dans $\mathcal{C}_1$. En conclusion, $\frac{A_2}{A_1}$ ne peut pas être strictement supérieur à $\frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$.

- ▷ En menant un raisonnement similaire à celui du point précédent, on montre que $\frac{A_2}{A_1}$ ne peut pas être strictement inférieur à $\frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$.
- ▷ Des deux points précédents, on conclut que $\frac{A_2}{A_1} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2}$; ce qui établit que l'aire d'un disque est proportionnelle à son diamètre (en effet, $\frac{A_2}{A_1} = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} \Leftrightarrow A_2 = \frac{A_1}{{d_1}^2}\,{d_2}^2$).

La preuve qui vient d'être donnée, et plus généralement la méthode d'exhaustion dans son intégralité, repose sur les deux résultats essentiels suivants :

- ◇ étant donné deux grandeurs qui ont un rapport, on peut trouver un multiple de la première ou de la deuxième qui excède l'autre ;
- ◇ si de toute grandeur on lui soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et si du reste, on lui soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et si l'on continue ainsi de suite ce procédé, il reste à la fin une grandeur plus petite que toute grandeur donnée de la même espèce ; en notation moderne : $\lim_{n\to\infty} A\,(1-r)^n = 0$, où A est la grandeur initiale, r un nombre réel tel que $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$ et n le nombre d'étapes dans le procédé.

Appelé *lemme d'Archimède*, le premier énoncé a été, selon Archimède lui-même, formulé par Eudoxe ; quant au deuxième, il peut être déduit (en procédant à un raisonnement par l'absurde) du premier.

- Le IIIe siècle av. J.-C. a vu naître et mourir l'un des plus grands, sinon le plus grand mathématicien grec de l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (287-212 av. J.-C.). Ayant pour père un astronome (nommé Phéidias), Archimède en est venu naturellement à s'intéresser à l'astronomie ; mais ses travaux les plus fameux sont sans doute dans les mathématiques (géométrie et algèbre) et la physique (mécanique et hydrostatique). Ayant acquis une grande maîtrise de la méthode d'exhaustion, il a été capable de déterminer l'aire de plusieurs surfaces non polygonales (disque, surface délimitée par un arc de parabole...) ainsi que le volume de certains solides non polyédriques.
  - ◇ *Disque $\mathcal{D}$ de diamètre d* : Archimède a déterminé relativement précisément le facteur de proportionnalité entre d et l'aire A de $\mathcal{D}$; et ce en considérant des polygones inscrits et circonscrits ayant toujours plus de côtés. Il a ainsi établi que le nombre π était compris entre $\frac{223}{71}$ et $\frac{22}{7}$.
  - ◇ *Surface $\mathcal{S}$ délimitée par une parabole $\mathcal{P}$ et une droite intersectant $\mathcal{P}$ en deux points P et Q* : Le savant grec en a déterminé l'aire A de deux façons différentes ; l'une d'elles repose sur une décomposition de $\mathcal{S}$ en surfaces triangulaires ; la décomposition en question s'effectue pas à pas, selon un procédé itératif ; les trois premières étapes sont représentées ci-dessous.
    - ▷ Dans la figure du milieu, le point M (respectivement N) résulte de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de la médiatrice du segment $\overline{PO}$ (respectivement la

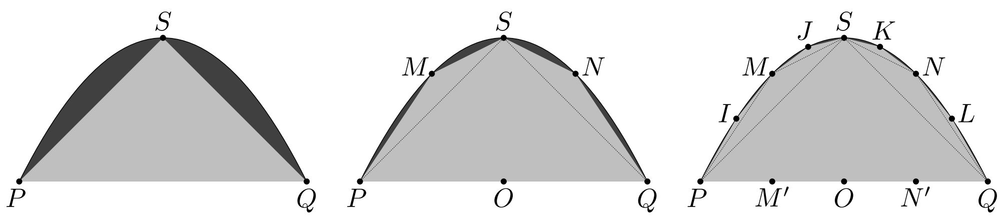
médiatrice du segment $\overline{OQ}$), où O est le point sur le segment $\overline{PQ}$ qui se trouve à la même distance de P et de Q.

▷ Dans la figure de droite, le point I (respectivement J) résulte de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de la médiatrice du segment $\overline{PM'}$ (respectivement la médiatrice du segment $\overline{M'O}$), où M' est le point sur le segment $\overline{PO}$ qui se trouve à la même distance de P et de O ; aussi, le point K (respectivement L) résulte de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de la médiatrice du segment $\overline{ON'}$ (respectivement la médiatrice du segment $\overline{N'Q}$), où N' est le point sur le segment $\overline{OQ}$ qui se trouve à la même distance de O et de Q.

▷ Soit T l'aire du triangle $\triangle PQS$ présent dans la figure de gauche ; par un calcul direct, on montre que la somme des aires des deux triangles $\triangle PSM$ et $\triangle SQN$, présents dans la figure du milieu, vaut $\frac{1}{4}T$; et que la somme des aires des quatre triangles $\triangle PMI$, $\triangle MSJ$, $\triangle SNK$ et $\triangle NQL$ vaut $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}T\right)$, soit $\left(\frac{1}{4}\right)^2 T$. En continuant le processus de décomposition à l'infini, on arrive à la conclusion que l'aire A vaut :

$$\begin{aligned} A &= T + \frac{1}{4}T + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T + \left(\frac{1}{4}\right)^3 T + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n T = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} T = \frac{4}{3} T \ ; \end{aligned}$$

ce résultat s'obtient en réalisant que l'on est en présence d'une somme d'une infinité de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Noter qu'Archimède est arrivé à cette conclusion, non pas à l'aide d'une formule de sommation infinie, mais en la déduisant avec quelque raisonnement intuitif, puis en la prouvant par la méthode d'exhaustion (*i.e.* par un double raisonnement par l'absurde).



Moyen Âge

Avec les bouleversements qu'a connus l'Europe dans les IVe et Ve siècles (christianisation de l'Empire romain, chute de l'Empire romain d'Occident), nombre de connaissances mathématiques acquises par la civilisation grecque ont été perdues ou ont sombré dans l'oubli. Durant les siècles qui ont suivi, les peuples d'Europe ont eu souvent d'autres priorités que l'avancée des mathématiques, si bien que le développement des techniques relatives aux calculs d'aires a connu un net ralentissement, pour ne pas dire une régression. Si la géométrie et l'algèbre des Grecs antiques n'ont que peu progressé en Occident durant le Haut Moyen Âge, elles ont en revanche connu un enrichissement certain à pareille époque au Proche et au Moyen-Orient. Avec les conquêtes musulmanes des VII^{e} et VIII^{e} siècles et grâce à une relative stabilité politique des régions conquises qui s'est ensuivie, le monde arabe de l'époque s'est retrouvé dans une conjoncture propice à l'essor des activités intellectuelles. En contact avec différents peuples, différentes cultures, grecque et hindoue notamment, les mathématiciens de l'Islam ont eu accès à leurs savoirs ; en traduisant leurs œuvres mathématiques, ils ont pu se les approprier et ainsi les développer en apportant de nouveaux résultats. Sur le nombre de savants que comptait le monde musulman dans la période du Moyen Âge européen, on ne citera ici que trois d'entre eux, qui ont eu un rapport direct avec le calcul infinitésimal :

- *Thābit ibn Qurra* (né autour de 826 et mort en 901), qui a déterminé, avec des techniques propres, l'aire de surfaces finies délimitées par des arcs de paraboles, ainsi que le volume de solides finis délimités par des paraboloïdes ;
- *Ibn al-Haitam* (connu en Europe sous le nom de *Alhazen*, né autour de 965 et mort en 1039), qui a généralisé certaines expressions de volumes obtenues par Archimède, et démontré de manière géométrique certaines formules de sommation ;
- *al-Bīrūnī* (né en 973 et mort en 1048), qui a évoqué, lors de ses études sur les mouvements non uniformes des corps, le concept de vitesse instantanée.

Temps modernes

Si les mathématiques européennes n'ont que peu évolué durant le Haut Moyen Âge, elles ont, en revanche, été marquées par un certain progrès à partir du X^{e} siècle, lorsque les savants occidentaux ont commencé à absorber, peu à peu, la culture scientifique du monde arabe (en traduisant les textes arabes, que l'on pouvait trouver alors en Espagne, qui était à l'époque sous domination musulmane, et en Sicile, qui était un carrefour des cultures arabe, latine et grecque). Mais c'est certainement durant la Renaissance que les sciences ont connu un nouvel essor en Europe ; parmi les nombreux facteurs qui sont à l'origine de cet éveil, trois ont une importance fondamentale :

- ▷ la chute de l'Empire romain d'Orient, en particulier la prise de Constantinople par les Ottomans en 1453, qui a entraîné la migration vers l'Italie de nombreux réfugiés byzantins, emmenant avec eux des œuvres de la Grèce antique pratiquement inconnues du monde occidental ;
- ▷ l'apparition de l'imprimerie, qui a favorisé la diffusion et la standardisation des connaissances ;
- ▷ la Réforme et les bouleversements religieux qui se sont ensuivis, qui ont contribué à ce que le savoir soit largement diffusé et non réservé à certaines classes de la population.

La redécouvertes des œuvres grecques antiques a eu pour conséquence un nouvel intérêt pour la géométrie, domaine qui n'avait pas grandement évolué durant le Moyen Âge, que ce soit en Orient ou en Occident. Avec ce regain d'intérêt, combiné à une certaine maîtrise des outils algébriques hérités du monde arabe, les mathématiciens européens du XVI^{e}, puis du XVII^{e} siècle, ont peu à peu eu tendance à résoudre les problèmes liés à des courbes planes, des surfaces, des solides, non pas avec des constructions mais à l'aide de calculs arithmétiques.

L'inclusion progressive de l'arithmétique dans la géométrie a permis de faire émerger une nouvelle discipline : la géométrie analytique. Et c'est de cette nouvelle discipline qu'est né un nouveau type de calcul : le calcul infinitésimal, *i.e.* le calcul des éléments infiniment petits.

Nombre de mathématiciens ont contribué à l'élaboration du calcul infinitésimal. Dans les points qui suivent, seuls les plus incontournables sont évoqués.

- *Luca Valerio* (né en 1553 à Naples et mort en 1618 à Rome) était un mathématicien italien, connu pour ses travaux sur les calculs d'aires, de volumes et de centres de gravité. Dans ses calculs d'aires de surfaces non polygonales, il considérait deux *figures en escaliers*, l'une inscrite dans la surface en question et l'autre circonscrivant cette même surface ; il calculait alors l'aire de ces deux figures en escaliers puis réduisait la différence entre les deux en augmentant le nombre d'escaliers (ce qui rendait ceux-ci de plus en plus petits). Une telle démarche rappelle celle employée par Archimède ; sauf qu'Archimède utilisait plutôt des figures construites à partir de triangles.

- *Galileo Galilei* (dit *Galilée*, né en 1564 à Pise et mort en 1642 à Arcetri, dans les environs de Florence, en Toscane) était un astronome, physicien et mathématicien toscan ; il a d'abord étudié la médecine avant de se tourner vers la physique. Lorsque l'on évoque le personnage de Galilée, on pense en premier lieu à la lunette astronomique qu'il a construite, grâce à laquelle il a découvert quatre satellites de la planète Jupiter, ainsi qu'au modèle héliocentrique du monde, qu'il a défendu avec conviction (avant d'être forcé de le renier publiquement). L'œuvre scientifique du savant ne se limite toutefois pas à ces deux aspects ; ses travaux dans les autres domaines des sciences, en mécanique notamment, sont tout aussi remarquables. Ses découvertes scientifiques ont fait l'objet de deux publications : la première, en 1632, traite d'astronomie, la seconde, en 1638, de physique. Dans les deux ouvrages, on retrouve plusieurs passages dans lesquels les propriétés de l'*infiniment grand* ou de l'*infiniment petit* sont invoquées.

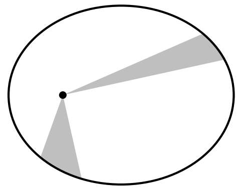
  S'il est vrai que Galilée a fréquemment mentionné les concepts d'infini et d'infiniment petit, il n'en demeure pas moins vrai qu'il ne les a pas étudiés en détail. Ces notions, que l'on retrouve déjà chez les Grecs anciens (Leucippe, Démocrite...), et qui ont été reprises au XIII^e siècle par le courant philosophique de la *scolastique*, ont eu davantage d'écho chez un disciple de Galilée : *Cavalieri*.

- *Johannes Kepler* (né en 1571 à Weil, dans l'actuel Baden-Würtemberg, dans le sud de l'Allemagne, et mort à Ratisbonne, dans l'actuelle Bavière) était un astronome germanique. Il est demeuré célèbre notamment pour ses trois lois sur le mouvement des planètes :

  (I) *chaque planète a une trajectoire elliptique dont l'un des foyers est occupé par le Soleil ;*

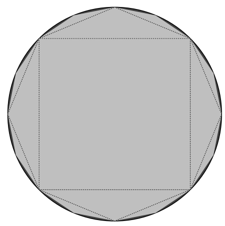
(II) *le segment joignant le Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux ;*

(III) *pour chaque planète, le rapport entre le cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique et le carré de la période de révolution est une constante indépendante de la masse de la planète en question.*



Dans sa deuxième loi, Kepler concevait l'aire d'un morceau d'ellipse (balayé par le segment Soleil-planète) comme formée de triangles infinitésimaux, *i.e.* de triangles infiniment petits, dont les sommets étaient le Soleil, la planète en un instant donné et la planète en un instant ultérieur, infiniment proche de l'instant précédent.

En matière de calcul d'aires de surfaces, Kepler a également fait remarquer que l'élément essentiel dans la preuve d'Archimède, relative à la formule de l'aire d'un cercle, ne se trouve pas dans le raisonnement par l'absurde mais dans la démarche consistant à approximer un disque à l'aide de surfaces polygonales inscrites ayant toujours plus de faces (*cf.* figure ci-contre).



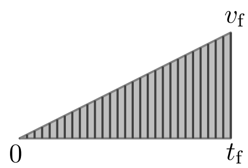
- *Grégoire de Saint-Vincent* (né en 1584 à Bruges, dans les Flandres (aujourd'hui en Belgique), et mort en 1667 à Gand, dans les Flandres) était un jésuite et mathématicien flammand, qui a développé une technique de calcul d'aires s'apparentant à la méthode d'exhaustion des Grecs antiques. Mais à la différence d'Archimède, Saint-Vincent considérait que les polygones pouvaient avoir jusqu'à une infinité de côtés. Typiquement, dans le cas du cercle, il considérait un polygone inscrit à 2^n faces, où n pouvait aller jusqu'à l'infini ; il voyait donc le disque comme la limite obtenue en multipliant indéfiniment par deux le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit. De fait, avec sa conception du calcul d'aires, Saint-Vincent a donné une définition géométrique de la limite d'une série numérique.

- *Bonaventura Cavalieri* (né en 1598 à Milan et mort en 1647 à Bologne) était un mathématicien et astronome italien ; il a été l'élève de Galilée, certainement l'un des meilleurs. S'il est demeuré célèbre, c'est essentiellement grâce à l'un de ses ouvrages, dans lequel il a introduit le concept d'*indivisible*. Cavalieri concevait toute surface comme un ensemble indéfini d'*indivisibles* : des segments de droites équidistants ; et tout solide comme un ensemble indéfini d'*indivisibles* : des morceaux de plans parallèles équidistants. En décomposant des surfaces ou des solides en indivisibles, et en appliquant le résultat suivant (appelé parfois, de nos jours, *principe de Cavalieri*) :

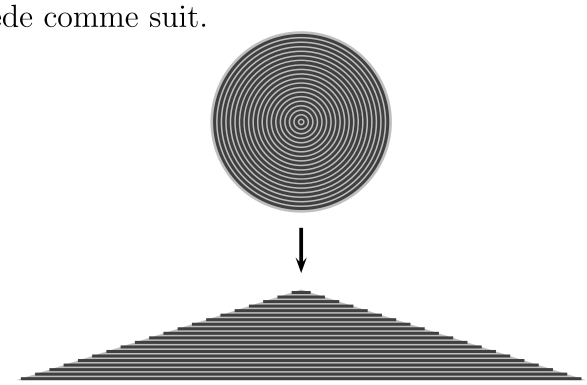
  si deux surfaces ou solides ont même hauteur et si les indivisibles de l'un et les indivisibles de l'autre sont deux à deux dans le même rapport, les volumes des deux solides sont aussi dans ce même rapport,

  le disciple de Galilée est parvenu non seulement à retrouver des formules déjà connues, mais également à en obtenir de nouvelles. Il a notamment établi le résultat suivant : la somme des n-ièmes puissances des indivisibles x compris entre 0 et a est égale à la $(n+1)$-ème puissance de a divisée par $n+1$; dans la notation qui sera adoptée plus loin dans ce chapitre, ce résultat s'écrit $\int_0^a x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$. Le cas où $n = 1$ se démontre très simplement, en remarquant que tout parallélogramme de hauteur a et de base a peut être vu comme une composition de deux triangles isométriques ayant chacun la même hauteur a ; l'aire de l'un de ces triangles étant égale à la moitié de l'aire du parallélogramme, la somme des indivisibles du triangle ($\int_0^a x \, \mathrm{d}x$) est égale à la moitié de la somme des indivisibles du parallélogramme ($\frac{1}{2} a^2$).

Il est intéressant de relever que le résultat qui vient d'être prouvé avait déjà été obtenu trois siècles avant Cavalieri par le mathématicien, physicien, philosophe et théologien Nicole Oresme (né en 1323 et mort en 1382, en Normandie), mais dans un contexte quelque peu différent : dans ses études sur le mouvement uniformément accéléré des objets, Oresme représentait la vitesse en un instant donné sous la forme d'un batonnet vertical de hauteur égale à la valeur de cette vitesse ; en posant successivement et verticalement tous les bâtonnets, chacun désignant une vitesse en un instant donné, sur un axe horizontal représentant le temps, il obtenait, pour un objet accélérant depuis le repos, un triangle rectangle dont la hauteur était égale à la vitesse finale (v_f) atteinte (à l'instant t_f) ; il considérait alors la somme des bâtonnets comme la distance totale parcourue par l'objet en question ; de plus, il associait la somme des bâtonnets à l'aire totale du triangle. Avec ce genre de raisonnement, Oresme a jeté les prémices de ce qui allait devenir au XVII^e siècle la théorie des indivisibles, et mentionné par la même occasion (de façon implicite du moins) le concept de vitesse instantanée.



La méthode des indivisibles permet aussi de retrouver des formules d'aires de surfaces non polygonales ; par exemple l'aire de la surface délimitée par un cercle de rayon R. Pour l'obtenir, on procède comme suit.



- ▷ On décompose le disque en cercles concentriques ; ces cercles constituent les indivisibles du disque.
- ▷ On prend un triangle de hauteur R et de base égale à $2\pi R$ et on le décompose en lignes parallèles à la base ; ces lignes constituent les indivisibles du triangle en question.
- ▷ On compare les indivisibles du cercles et les indivisibles du triangle ; on remarque que les indivisibles des deux figures sont deux à deux égaux ; ce qui permet d'établir que l'aire du disque de rayon R est égale à l'aire du triangle de base $2\pi R$ et de hauteur R, et vaut donc $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Noter que le résultat obtenu ici est très similaire à une proposition énoncée et démontrée (par la méthode d'exhaustion, évidemment) par Archimède vingt siècles avant que Cavalieri n'établisse sa théorie des indivisibles, à savoir que l'aire d'un disque de rayon R est égale à l'aire d'un triangle rectangle de hauteur R et de base égale à $2\,\pi\,R$.

Si la théorie des indivisibles permet d'obtenir nombre de résultats intéressants, elle comporte aussi des risques dans son application : le fait que l'épaisseur d'un indivisible n'apparaît nulle part dans les raisonnements peut conduire à des conclusions erronées.

- *Pierre de Fermat* (né en 1601 à Beaumont-de-Lomagne et mort à Castres en 1665, dans le sud-ouest du royaume de France) a été probablement le mathématicien français le plus prolifique du XVII^e siècle. De formation juridique, il a été magistrat à Toulouse et conseiller au Parlement de la même ville ; les mathématiques, il ne les a pratiquées que dans ses moments de loisirs. Parmi ses nombreux travaux, aussi impressionnants que variés, on compte une méthode permettant de trouver les minima et les maxima d'un certain type de fonctions, les *fonctions algébriques* (parmi lesquelles on trouve les fonctions polynomiales et rationnelles, entre autres). La procédure est la suivante :
  - ▷ dans la fonction f de la variable x, dont on cherche les minima et maxima, on remplace x par la quantité $x + e$;
  - ▷ on pose l'égalité approximative $f(x+e) \approx f(x)$ et on la divise des deux côtés par la quantité e ;
  - ▷ dans le résultat obtenu, on élimine tous les termes contenant e ; il en résulte une équation dont la ou les éventuelle(s) solution(s) correspondent à des minima ou des maxima.

Dans le langage mathématique moderne, cette marche à suivre revient à calculer la dérivée f' de la fonction f et à résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

En 1632, peu après qu'il l'a élaborée, Fermat a cherché à appliquer sa méthode des minima et des maxima pour déterminer les normales, et donc aussi les tangentes, à une courbe plane donnée. Comme dans le raisonnement sur les minima et les maxima, on retrouve dans son argumentation le concept de dérivée.

En 1637, l'année même où Fermat a rédigé par écrit sa méthode sur la détermination des minima et des maxima, le philosophe, biologiste, physicien et mathématicien français *René Descartes* (né en 1596 à La Haye, en Touraine, dans le royaume de France, et mort en 1650 à Stockholm, dans le royaume de Suède), autre personnage illustre de la première moitié du XVII^e siècle, a commencé à s'intéresser au problème des tangentes. Pour trouver la tangente à une courbe plane donnée en un certain point, il a proposé une approche basée sur la détermination de la normale à la courbe en question au point considéré. Que ce soit la méthode de Fermat ou celle de Descartes, toutes les deux ont une même idée commune, celle de considérer deux points de la courbe qui, devenant toujours plus proches l'un de l'autre, n'en deviennent plus qu'un, le point de tangence.

- *Isaac Newton* (né le 25 décembre 1642 (de l'ancien calendrier (le calendrier julien), ce qui correspond au 4 janvier 1643 du nouveau calendrier (le calendrier grégorien)) à Woolsthorpe, dans le Lincolnshire, en Angleterre, et mort le 20 mars 1727 (du calendrier julien, ce qui correspond au 31 mars 1727 du calendrier grégorien) à Londres, dans le royaume de Grande-Bretagne) était un philosophe, mathématicien, physicien, astronome et théologien anglais. Il est une figure incontournable des mathématiques et de la physique, tant son œuvre est riche est variée. S'il s'est distingué en physique par ses trois lois sur le mouvement des corps, ainsi que par sa loi de la gravitation universelle, il s'est également montré comme un génie des mathématiques : il a été le premier savant à avoir élaboré une méthode générale permettant à la fois de déterminer les tangentes à une courbe plane et de calculer des aires de surfaces non polygonales. La formulation de sa théorie s'est faite en deux étapes.
  - ◇ Dans un premier temps, Newton a montré que si l'aire A de la surface sous une courbe (*i.e.* entre une courbe et l'axe horizontal des x) valait $A = a\,x^m$, où a est un paramètre (positif) et m un nombre entier ou fractionnaire, alors le taux de variation de cette aire est égal à $m\,a\,x^{m-1}$. Pour y parvenir, il a considéré un accroissement infinitésimal (*i.e.* infiniment petit) o de la grandeur x, et a désigné par oy l'accroissement infinitésimal de l'aire A lorsque la grandeur x passe de x à $x+o$; ce qui lui a permis d'écrire $A+oy = a\,(x+o)^m$. En développant alors en série la partie droite de cette équation (*i.e.* en développant l'expression $(x+o)^m$ en une somme de termes, somme finie si m est un nombre entier positif, somme infinie dans tout autre cas), en soustrayant ensuite des deux côtés la quantité A, puis en divisant par o, et en négligeant enfin tous les termes contenant o, il a obtenu le résultat $y = m\,a\,x^{m-1}$. De façon similaire, Newton a également montré que pour toute courbe d'équation $y = m\,a\,x^{m-1}$, l'aire sous cette courbe vaut $A = a\,x^m$.
  - ◇ Dans un deuxième temps, Newton a procédé à une généralisation des résultats obtenus pour les courbes $y = m\,a\,x^{m-1}$, en introduisant deux nouveaux concepts : les *fluentes* et les *fluxions*. Newton concevait les fluentes comme des grandeurs qui peuvent être augmentées ou diminuées de façon continue, et les fluxions comme les vitesses auxquelles les fluentes sont augmentées ou diminuées ; il notait les fluentes $x, y, \ldots$ et les fluxions associées $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ Il affirmait alors que, lorsqu'il s'écoule un intervalle de temps infinitésimal o, les fluentes $x, y, \ldots$ sont augmentées des quantités infinitésimales $\dot{x}\,o, \dot{y}\,o, \ldots$, respectivement. Aussi, il considérait que les grandeurs $x, y, \ldots$ apparaissant dans une équation pouvaient être substituées par les grandeurs $x+\dot{x}\,o, y+\dot{y}\,o, \ldots$, respectivement, en invoquant le fait que $\dot{x}\,o, \dot{y}\,o, \ldots$ sont des quantités infiniment petites ; de plus il admettait que tous les termes multiples de o ou d'une puissance (positive) de o pouvaient être négligés. Avec de telles considérations, Newton a été en mesure de résoudre le problème qui consiste à déduire d'une relation entre des fluentes $x, y, \ldots$ l'équation qui lie les fluxions $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ correspondantes (par exemple, $x^3 - y^3 = 0 \;\Rightarrow\; 3\,x^2\,\dot{x} - 3\,y^2\,\dot{y} = 0$). Quant

au problème consistant à retrouver une relation entre des fluentes $x, y, \ldots$ à partir d'une équation liant les fluxions $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$, Newton disait qu'il s'agissait de l'inverse du problème précédent ; il résolvait donc ce deuxième problème par un procédé contraire à celui du premier.

En maîtrisant les deux problèmes évoqués ci-dessus, Newton a été en mesure de traiter non seulement les questions des tangentes et des aires de surfaces dans leur globalité, mais également de déterminer d'autres propriétés, telles la concavité d'une courbe ou la longueur d'une courbe.

- *Gottfried Wilhelm Leibniz* (né le 1er juillet 1646 à Leipzig, en Saxe, dans le Saint-Empire romain germanique, et mort le 14 novembre 1716 à Hanovre, dans le même Empire) était notamment un philosophe, diplomate et mathématicien germanique. Il a étudié le droit à l'université de Leipzig et la philosophie à l'université d'Altdorf, près de Nuremberg. En 1667, il est entré au service du baron Johann Christian von Boineburg, puis du prince-électeur de Mayence, Johann Philipp von Schönborn. Envoyé au printemps 1672 à Paris pour une mission diplomatique, il y a fait la connaissance, en automne, de *Christiaan Huygens* (né en 1629 à la Haye, dans les Provinces-Unies, aujourd'hui les Pays-Bas, et mort en 1695 dans la même ville), éminent scientifique grâce auquel il a acquis peu à peu de solides connaissances en mathématiques et en physique. En 1673, lors d'un voyage politique de trois mois à Londres, Leibniz a eu l'occasion de rencontrer plusieurs mathématiciens anglais. De retour à Paris, il a continué d'étudier les mathématiques, sous l'impulsion et la bienveillance de Huygens, et a pris connaissance des différents travaux, notamment ceux du mathématicien et opticien écossais *James Gregory* (né en 1638 à Drumoak, près d'Aberdeen, et mort en 1675) sur les tangentes et les calculs d'aires de surfaces. L'année 1674 a marqué le début de ses grandes découvertes ; de 1674 à 1676, Leibniz a élaboré l'essentiel de sa méthode sur le calcul des éléments infinitésimaux. Les résultats qu'il a obtenus sont identiques à ceux de Newton, mais le formalisme qu'il a développé est bien différent de celui des fluentes et des fluxions : Leibniz résolvait le problème des tangentes en calculant non pas une fluxion à partir d'une fluente, mais un rapport d'éléments infinitésimaux $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; et il déterminait l'aire d'une surface non pas en cherchant une fluente de laquelle découle une fluxion donnée, mais en considérant des sommes d'éléments infiniment petits $\int \mathrm{d}A$.

  De nos jours, en présence d'une expression de la forme $\int \mathrm{d}A$, on parle d'*intégrale*. S'il est vrai que la notation $\int \mathrm{d}A$ vient de Leibniz, il est également vrai que le terme *intégral* est dû à un autre mathématicien : la première fois que l'on trouve le mot *intégral*, c'est dans un problème de calcul infinitésimal résolu en 1690 par le mathématicien helvétique *Jacques Bernoulli* (né en 1654 à Bâle, en Suisse, et mort en 1705 dans la même ville, membre d'une famille originaire d'Anvers, dans les Flandres). Ce mot a ensuite été repris par Leibniz lui-même : ce qu'il désignait d'abord par *calcul sommatoire* est alors devenu *calcul intégral*. Noter que le terme *intégral* a pour origine le mot latin *integer*, qui signifie *entier* ; il n'est, de fait, pas étonnant de voir apparaître ce terme dans le contexte du calcul infinitésimal, vu

> que, dans les problèmes liés aux infiniment petits, on est souvent amené à calculer la somme d'éléments infinitésimaux, *i.e.* à considérer de tels éléments dans leur *intégralité*.

Newton, qui a élaboré son calcul des fluxions en 1671, n'a publié ses travaux qu'en 1687. Leibniz, qui a mis au point son calcul des éléments infinitésimaux entre 1674 et 1676, a publié une première version de ses résultats en 1684 déjà. Ainsi, quand bien même postérieure à celle de Newton, l'œuvre de Leibniz est passée dans le domaine public avant celle du savant anglais. Cette réalité historique a été la cause d'une profonde division au sein du monde mathématique occidental de l'époque : d'un côté se trouvaient les mathématiciens du continent, qui pensaient que Leibniz était l'inventeur du calcul infinitésimal, de l'autre côté les mathématiciens anglais, qui soutenaient le fait que le calcul infinitésimal avait été inventé par Newton, au travers de sa théorie des fluxions. À la querelle sur la primauté de la découverte se sont ajoutées des accusations de plagiat... Survenu tout à la fin du XVII^e siècle, le différend entre les deux parties s'est prolongé sur près d'un siècle. De nos jours, on estime, après relecture des faits historiques, que Newton et Leibniz ont tous les deux, de manière quasi indépendante, chacun avec son originalité, élaboré le calcul infinitésimal ; on reconnaît ainsi qu'ils sont tous les deux les co-inventeurs du calcul infinitésimal.

Au XVIII^e siècle, alors que le calcul infinitésimal de Leibniz se développait rapidement sur le continent, des voix se sont élevées, tant parmi les mathématiciens que les philosophes, pour dénoncer un certain manque de logique dans cette nouvelle discipline : Que sont les éléments infinitésimaux ? Sont-ils nuls ou non ? S'ils sont nuls, comment donner du sens au rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? S'ils ne sont pas nuls, comment peut-on les négliger à un moment donné dans les calculs ? À ces remarques dérangeantes est venue s'ajouter une question qui a germé peu à peu chez les scientifiques dès la deuxième moitié du XVIII^e siècle : dans quelle mesure une fonction est-elle intégrable ? Quels critères doit remplir une fonction pour que son intégrale existe ?

S'il est vrai que la notion de fonction (déjà bien présente chez nombre de mathématiciens et physiciens du XVII^e siècle, tels Galilée, Gregory, etc.) a été précisée dans la première moitié du XVIII^e siècle, notamment par Leibniz ainsi que par *Leonhard Euler* (mathématicien helvétique né en 1707 à Bâle, en Suisse, et mort en 1783 à Saint-Petersbourg, dans l'Empire russe), il est également vrai qu'elle a fait l'objet d'une nouvelle discussion à partir de la deuxième moitié du même siècle, lorsque les mathématiciens de l'époque ont commencé à s'intéresser à certaines questions de physique telles que la vibration d'une corde ou la propagation de la chaleur. En étudiant le phénomène de vibration d'une corde fixée en ses deux extrémités, le médecin, mathématicien et physicien *Daniel Bernoulli* (né en 1700 à Groningue, dans les Provinces-Unies (aujourd'hui les Pays-Bas), et mort en 1782 à Bâle, fils de Jean et neveu de Jacques Bernoulli) a émis l'idée que toute fonction f pouvait, dans un intervalle donné, s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique (*i.e.* sous la forme d'une somme infinie de fonctions trigonométriques, que l'on note de nos jours $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\,s\,x) + b_n \sin(n\,s\,x)\big)$, où $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sont des coefficients réels et s un nombre réel strictement positif). Reprenant cette idée pour décrire la propagation de la chaleur dans une plaque, le mathématicien français

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (né en 1768 à Auxerre, dans le royaume de France, et mort en 1830 à Paris) l'a complétée en donnant les formules qui permettent de trouver les coefficients de la série à partir de la fonction f en question. S'exprimant sous la forme d'intégrales contenant f, ces formules n'ont de sens que si f est intégrable. La représentabilité d'une fonction sous la forme d'une série trigonométrique dépend donc directement de l'intégrabilité de la fonction en question.

Époque contemporaine

Les mathématiciens du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle l'ont bien compris : s'ils voulaient en savoir plus sur la possibilité de représenter une fonction sous la forme d'une série trigonométrique, ils devaient disposer d'une définition suffisamment précise du concept d'intégrale. Cette définition, plusieurs mathématiciens ont cherché à la donner, avec plus ou moins de succès. Deux seront retenus ici : *Augustin Cauchy* et *Bernhard Riemann*.

- *Augustin-Louis Cauchy* (né le 21 août 1789 à Paris, près de six semaines après la prise de la Bastille, et mort le 23 mai 1857 à Sceaux, près de Paris) était un mathématicien français, connu notamment pour sa rigueur dans le domaine du calcul infinitésimal. Il a été le premier à donner une définition arithmétique du concept de limite : si l'idée de limite figurait déjà dans les méthodes infinitésimales de mathématiciens antérieurs à Cauchy, elle ne se présentait que sous une conception essentiellement géométrique ; alors que chez Cauchy, elle est devenue une notion abstraite, purement algébrique. Dans le domaine du calcul intégral, Cauchy, toujours soucieux de la précision, s'est vu définir l'intégrale d'une fonction d'une manière différente de celle considérée jusqu'alors : tandis qu'elle était vue au XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle comme le résultat d'une opération inverse de la dérivation, l'intégrale est devenue avec Cauchy l'expression algébrique de la limite d'une somme d'aires. Sa formulation est la suivante.
  - ▷ Soit f une fonction continue dans l'intervalle délimité par les nombres réels x_0 et X ; pour trouver son intégrale entre x_0 et X, on commence par diviser l'intervalle délimité par x_0 et X en n intervalles, en plaçant $n-1$ points, x_1, x_2, …, x_{n-1} entre x_0 et X.
  - ▷ On considère ensuite la somme suivante :

    $$S_n = (x_1 - x_0)\, f(x_0) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\, f(x_{n-1}) \, .$$

  - ▷ Lorsque le nombre de points entre x_0 et X augmente indéfiniment et que les quantités $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1)$, … décroissent indéfiniment, S_n tend vers une limite S, appelée *intégrale de f*, limite qui ne dépend que de x_0, X et de la forme de f.

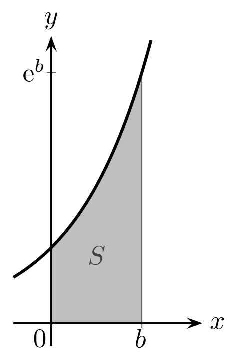
  Cette conclusion, Cauchy l'a non seulement énoncée, mais également démontrée. Sa preuve n'était toutefois pas complètement rigoureuse, du fait qu'il ne possédait à son époque pas tous les outils nécessaires pour pouvoir formuler un raisonnement complet et sans faille.

- *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (né le 17 septembre 1826 à Breselenz, dans le royaume de Hanovre, et mort le 20 juillet 1866 à Selasca, dans le nord de l'Italie) était un mathématicien germanique, qui s'est distingué par ses travaux tant dans le domaine du calcul différentiel et intégral que dans une branche de la géométrie qui venait d'éclore à son époque : la *géométrie différentielle.* En 1846, alors qu'il songeait à devenir pasteur, il a débuté des études de philosophie et de théologie à l'université de Göttingen (à l'époque dans le royaume de Hanovre). Mais la fréquentation des cours de l'illustre mathématicien *Carl Friedrich Gauss* (né en 1777 à Göttingen et mort en 1855 dans la même ville), fondateur de la géométrie différentielle, l'a convaincu de changer d'orientation et de se consacrer aux mathématiques. Au début des années 1850, alors qu'il étudiait la possibilité de développer des fonctions toujours plus singulières en séries trigonométriques, Riemann s'est retrouvé à devoir fournir une définition claire de la notion d'*intégrabilité* d'une fonction ; autrement dit, il s'est retrouvé dans la nécessité de préciser les hypothèses que doit satisfaire une fonction pour qu'elle soit intégrable. Ses réflexions l'ont conduit à reprendre la définition d'intégrale de Cauchy et à la repenser, à la généraliser.

  Ayant également une structure de limite d'une somme, la formulation de Riemann est toutefois plus cohérente que celle de Cauchy. D'un maniement relativement simple, elle fournit un certain cadre à la notion d'*intégrabilité* ; en outre, elle permet de donner un sens rigoureux au concept vague de *somme d'éléments infiniment petits.* Voilà probablement pourquoi elle demeure encore aujourd'hui le point de départ de la plupart des discours introductifs au calcul intégral.

4.1 Intégrale de (Cauchy-) Riemann

Que ce soit l'intégrale de Cauchy ou celle de Riemann, les deux se basent sur l'idée de limite d'une somme. Afin de bien comprendre cette notion, qui sera définie proprement plus loin, illustrons-la à l'aide d'un exemple concret de calcul d'aire de surface non polygonale.



Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy (*cf.* section 2.1 du chapitre 2), considérons la surface S délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, où $f(x) = \exp(x)$, l'axe Ox (d'équation $y = 0$) et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = b$ (*cf.* figure ci-contre). Cherchons l'aire A de cette surface S, en utilisant la définition d'intégrale telle que l'a formulée le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy au XIX^{e} siècle (*cf.* introduction historique). À cet effet, procédons comme suit.

- On décompose l'intervalle $[0; b]$ en n sous-intervalles, que l'on note $[x_{k-1}\,;\, x_k]$, où $k = 1, \ldots, n$. Pour simplifier les calculs, on considère que tous les intervalles ont la même taille. Dans ce cas :

$$x_{k-1} = \frac{(k-1)\,b}{n} \qquad \text{et} \qquad x_k = \frac{k\,b}{n}\;;$$

en particulier, $x_0 = 0$ et $x_n = b$.

- On explicite la somme $S_n = (x_1 - x_0)\,f(x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,f(x_{n-1})$:

$$\begin{aligned} S_n &= (x_1 - x_0)\,f(x_0) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,f(x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\,f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\,b}{n} - \frac{(k-1)\,b}{n}\right)\exp\left(\frac{(k-1)\,b}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\exp\left(\frac{(k-1)\,b}{n}\right) \overset{\ell=k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{b}{n}\exp\left(\frac{\ell\,b}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{b}{n}\left[\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]^{\ell}. \end{aligned}$$

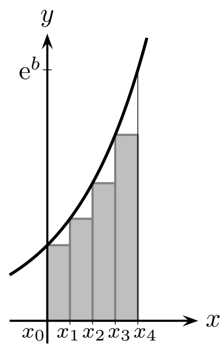
La dernière expression étant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\exp\left(\frac{b}{n}\right)$, elle peut se récrire sous la forme (*cf.* sous-section 1.6.3 du chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{b}{n}\left[\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]^{\ell} &= \frac{b}{n}\,\frac{1 - \left[\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]^{(n-1)+1}}{1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)} = \frac{b}{n}\,\frac{1 - \left[\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]^{n}}{1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)} \\ &= \frac{b}{n}\,\frac{1 - \exp\left(\frac{n\,b}{n}\right)}{1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{b}{n}\,\frac{1 - \exp(b)}{1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)}.$$

- On calcule la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini :



$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\,\frac{1 - \exp(b)}{1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{b\left[1 - \exp(b)\right]}{n\left[1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]} \\ &= b\left[1 - \exp(b)\right]\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left[1 - \exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]} \\ &= b\left[1 - \exp(b)\right]\frac{1}{-b} = \exp(b) - 1\,. \end{aligned}$$

Noter que l'avant-dernière expression s'obtient grâce à la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) ; pour pouvoir l'appliquer, il convient simplement de remplacer la variable entière n par une variable continue x :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x\left[1 - \exp\left(\frac{b}{x}\right)\right] &\overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{1}{u}\bigl(1 - \exp(b\,u)\bigr) = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{1 - \exp(b\,u)}{u} \\ &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{-b\exp(b\,u)}{1} = -b\,. \end{aligned}$$

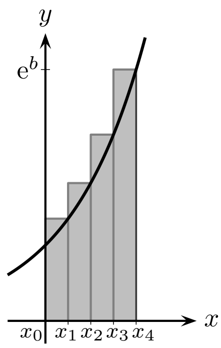
Selon Cauchy, la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini est l'intégrale de la fonction exp entre 0 et b ; autrement dit, la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini est égale à l'aire A cherchée.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la somme S_n représente, dans le cas présent, l'aire d'un polygone inscrit dans la surface S considérée ; en effet, la fonction $x \mapsto \exp(x)$ étant croissante dans l'intervalle $[0;\, b]$, chacun des termes $(x_1 - x_0)\, f(x_0), \ldots, (x_n - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$ correspond à l'aire d'un rectangle qui se trouve complètement entre l'axe Ox (*i.e.* entre la droite d'équation $y = 0$) et la courbe d'équation $y = \exp(x)$, et qui touche cette courbe en un unique point, le sommet supérieur gauche. Si le graphe de la fonction f, délimitant supérieurement S, était celui d'une fonction décroissante dans l'intervalle $[0;\, b]$ (par exemple $x \mapsto \exp(-x)$), S_n correspondrait alors à l'aire d'un polygone circonscrit à S ; et si la courbe délimitant supérieurement S était en partie croissante et en partie décroissante dans $[0;\, b]$, S_n serait l'aire d'un polygone ni inscrit, ni circonscrit à S.

Le polygone d'aire S_n, inscrit dans S, rappelle manifestement les figures en escalier qu'utilisait le mathématicien italien Luca Valerio au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle pour calculer des aires. Seulement, Valerio n'utilisait pas uniquement des polygones inscrits, mais également des polygones circonscrits. Que se passerait-il alors, dans le cas présent, si l'on calculait l'aire d'un polygone en escalier circonscrit à S et si l'on faisait tendre, comme précédemment, le nombre d'escaliers vers l'infini ? Pour le voir, reprenons la procédure utilisée précédemment pour le calcul de S_n et adaptons-la en conséquence.

- Pour simplifier les calculs, on reprend la décomposition de l'intervalle $[0;\, b]$ en n sous-intervalles de tailles égales, $[x_{k-1}\,;\, x_k]$, où $k = 1, \ldots, n$ et :
$$x_{k-1} = \frac{(k-1)\,b}{n} \qquad \text{et} \qquad x_k = \frac{k\,b}{n}\,;$$
en particulier, $x_0 = 0$ et $x_n = b$.
- On explicite la somme $T_n = (x_1 - x_0)\, f(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(x_n)$:
$$\begin{aligned} T_n &= (x_1 - x_0)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(x_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k\,b}{n} - \frac{(k-1)\,b}{n}\right) \exp\left(\frac{k\,b}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{k\,b}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{(k-1+1)\,b}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{b}{n} + \frac{(k-1)\,b}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{b}{n}\right) \exp\left(\frac{(k-1)\,b}{n}\right) \overset{\ell = k-1}{=} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{b}{n}\right) \exp\left(\frac{\ell\,b}{n}\right) = \exp\left(\frac{b}{n}\right) \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b}{n} \left[\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right]^{\ell}, \end{aligned}$$
et on remarque que :
$$T_n = \exp\left(\frac{b}{n}\right) S_n\,.$$

- On calcule la limite de T_n lorsque n tend vers l'infini :



$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_n &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{b}{n}\right) S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{b}{n}\right) \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= 1 \cdot \big(\exp(b) - 1\big) = \exp(b) - 1\,.\end{aligned}$$

En résumé, les sommes S_n et T_n, telles que définies plus haut, tendent vers la même limite $\exp(b) - 1$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \exp(b) - 1\,.$$

Autrement dit, le polygone en escalier inscrit dans la surface S donnée et le polygone en escalier circonscrit à cette même surface ont des aires de plus en plus égales à mesure que n augmente. Ce résultat implique alors que tout polygone en escalier, formé de rectangles d'aires $(x_k - x_{k-1})\, f(\xi_k)$, où $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, a une aire de plus en plus égale à celle du polygone inscrit ou celle du polygone circonscrit à mesure que n augmente ; pour le voir, il suffit d'écrire l'aire d'un tel polygone :

$$U_n = (x_1 - x_0)\, f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\, f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(\xi_n)\,,$$

et de remarquer que $S_n \leqslant U_n \leqslant T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; le théorème des deux gendarmes pour les suites (*cf.* annexe B) permet alors de conclure.

C'est avec une expression comme celle de U_n exposée ci-dessus que Riemann a formulé sa version de l'intégrale d'une fonction. À la différence de Cauchy, Riemann a considéré, pour chaque intervalle $[x_{k-1};\, x_k]$, non pas la quantité $f(x_{k-1})$ mais la quantité $f(\xi_k)$, où ξ_k peut être n'importe quel élément de l'intervalle en question. Il n'a, de ce fait, privilégié aucun polygone en escalier ; ni le polygone inscrit, ni le polygone circonscrit, en particulier. N'importe quel polygone en escalier, dont les marches touchent chacune au moins une fois la courbe donnée peut être pris en considération.

4.1.1 Définitions : Soit $[a;\, b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- On appelle *subdivision* d'ordre n de $[a;\, b]$ toute suite finie de nombres réels $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots;\, x_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, telle que :

  $$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,.$$

  On appelle *pas* de la subdivision σ_n le nombre réel strictement positif :

  $$\delta_{\sigma_n} = \max\big\{(x_k - x_{k-1}) \,\big|\, k = 1, \ldots, n\big\}\,,$$

  où $\max\{(x_k - x_{k-1}) \,|\, k = 1, \ldots, n\}$ désigne le plus grand des nombres réels $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1)$, $\ldots$, $(x_n - x_{n-1})$.

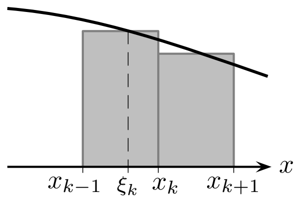
- On appelle *subdivision régulière* d'ordre n de $[a;\, b]$ la suite finie de nombres réels ${}_{\mathrm{r}}\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots;\, x_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, telle que :

$$x_k \;=\; a + \frac{k\,(b-a)}{n}\,, \qquad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots, n\,;$$

en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$.

4.1.2 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

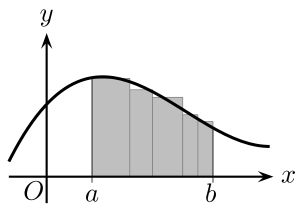
- Soient $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$ et δ_{σ_n} son pas. On appelle *somme de Riemann* de f associée à σ_n toute somme S_{σ_n} de la forme :



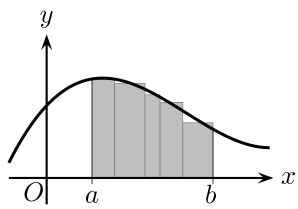
$$S_{\sigma_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,,$$

où $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

- Supposons que la limite de la somme de Riemann S_{σ_n} notée au point précédent, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, existe et qu'elle est égale à un certain nombre réel I :



$$I \;=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,.$$



Dans le cas où I ne dépend ni du choix de la subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots;\, x_n)$ de $[a;\, b]$, ni, pour chaque subdivision, du choix des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1], \dots, \xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$, on dit que l'*intégrale de Riemann de f entre a et b existe*, ou de manière équivalente que *f est intégrable (au sens de Riemann) dans* $[a;\, b]$; I est alors appelé l'*intégrale de Cauchy-Riemann*, ou simplement l'*intégrale de Riemann de f entre a et b*, ou plus simplement encore l'*intégrale de f entre a et b*. Dans le cas où la limite de la somme de Riemann S_{σ_n} n'existe pas ou que la limite existe mais dépend du choix de la subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots;\, x_n)$ de $[a;\, b]$ et/ou du choix, pour chaque subdivision, des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1], \dots, \xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$, on dit que l'*intégrale de Riemann de f entre a et b n'existe pas*, ou de manière équivalente que *f n'est pas intégrable (au sens de Riemann) dans* $[a;\, b]$.

4.1.3 Notation : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. L'intégrale de Riemann I de f entre a et b, si elle existe, se note :

$$I \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

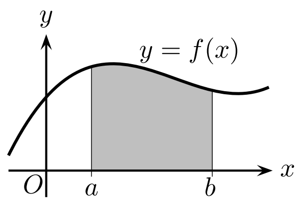
Le signe $\int_a^b$ symbolise la limite de la somme qui se trouve dans l'expression de I donnée dans la deuxième des définitions 4.1.2. Quant à l'élément dx, qui est un accroissement infinitésimal de la variable x (*cf.* section 3.2 du chapitre 3), il peut être vu comme ce qui reste des quantités $(x_1 - x_0)$, ... , $(x_n - x_{n-1})$ après le passage à la limite (lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0). Avec l'écriture $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, la correspondance est particulièrement manifeste :

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n}} f(\xi_k)\, \Delta x_k \\ &= \int_a^b \quad f(x) \quad \mathrm{d}x \quad . \end{aligned}$$

Une telle notation, introduite à la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle par le mathématicien germanique Gottfried Wilhelm Leibniz, retranscrit bien l'idée de *somme d'éléments infiniment petits* que tant de mathématiciens, dans l'histoire du calcul infinitésimal, ont mentionnée dans leurs différentes approches du calcul d'aires de surfaces non polygonales.

4.1.4 Remarques : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- Quelle que soit la subdivision $\sigma_n = (x_0; x_1; \ldots; x_n)$ d'ordre n de $[a; b]$, si son pas δ_{σ_n} tend vers 0, alors nécessairement son ordre n tend vers l'infini.
- Dans l'intégrale de Riemann I de f entre a et b, à supposer qu'elle existe, les nombres réels a et b sont appelés *bornes d'intégration* ; la grandeur x, elle, porte le nom de *variable d'intégration*.
- Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique (*cf.* section 2.1 du chapitre 2). Dans le cas où $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$, l'intégrale de Riemann de f entre a et b, à supposer qu'elle existe (ce qui est le cas, cela sera vu plus loin), est une grandeur positive qui, par définition, correspond



  à l'aire de la surface finie, dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe Ox) et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Dans le cas où $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$, l'intégrale de Riemann de f entre a et b est une grandeur négative. Or, d'un point de vue géométrique, l'aire d'une surface est une quantité positive ou nulle. L'intégrale de f entre a et b, lorsque $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$, correspond donc à l'opposé de l'aire de la surface finie, dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe Ox) et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
- L'intégrale de Riemann de f entre a et b est une grandeur qui, si elle existe, ne dépend pas de la variable d'intégration ; étant associée au concept géométrique d'aire de surface, elle ne peut effectivement pas dépendre de la manière dont elle

est calculée. De ce fait :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \dots$$

- L'aire d'une surface réduite à un segment de droite étant nulle, l'intégrale de Riemann de f entre n'importe quel point $c \in [a;\, b]$ et lui-même est nécessairement nulle :

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\,;$$

- Soit $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots\,;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$. Dès lors que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue dans $[a;\, b]$, elle est continue dans l'intervalle $[x_{k-1};\, x_k]$, et ce quel que soit $k = 1,\, \dots\,, n$. Or, l'intervalle $[x_{k-1};\, x_k]$ est fermé, quel que soit $k = 1,\, \dots\,, n$. f atteint donc nécessairement son minimum et son maximum dans $[x_{k-1};\, x_k]$, quel que soit $k = 1,\, \dots\,, n$ (*cf.* théorème du minimum et du maximum, section 2.10 du chapitre 2). Pour chaque $k = 1,\, \dots\,, n$, notons m_k le minimum et M_k le maximum de f dans $[x_{k-1};\, x_k]$. Parmi toutes les sommes de Riemann de f associées à la subdivision σ_n, deux peuvent alors être distinguées :

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

4.1.5 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Soit aussi $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \dots\,;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$.

- On appelle *somme de Darboux*[VI] *inférieure* de f associée à la subdivision σ_n la somme $\underline{S}_{\sigma_n}$ donnée par :

$$\underline{S}_{\sigma_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1})\;,$$

  où m_k est le minimum de f dans l'intervalle $[x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1,\, \dots\,, n$.
- On appelle *somme de Darboux supérieure* de f associée à la subdivision σ_n la somme $\overline{S}_{\sigma_n}$ donnée par :

$$\overline{S}_{\sigma_n} \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})\;.$$

  où M_k est le maximum de f dans l'intervalle $[x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1,\, \dots\,, n$.

VI. Gaston Darboux était un mathématicien français, né en 1842 à Nîmes, dans le sud de la France, et mort en 1917 à Paris.

4.1.6 Exemple : Au début de la présente section, il a été question de la surface finie S dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = \exp(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = b$. Lors du calcul de son aire, deux sommes ont été explicitées. Ces sommes, rappelons-les ici :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{(k-1)\,b}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \exp\left(\frac{k\,b}{n}\right) ,$$

ne sont rien d'autre que les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, de la fonction exp associée à la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[0;\, b]$.

4.1.7 Lemme : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, l'intégrale de Riemann de f entre a et b existe si et seulement si, pour toute subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n} :*

- *la limite de la somme de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ de f associée à σ_n, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, existe et est égale à un nombre réel $\underline{I}$ qui ne dépend pas du choix de σ_n,*
- *la limite de la somme de Darboux supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ de f associée à σ_n, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, existe et est égale à un nombre réel $\overline{I}$ qui ne dépend pas du choix de σ_n,*
- *les deux limites sont égales : $\underline{I} = \overline{I}$.*

Autrement dit, l'intégrale de Riemann de f entre a et b existe si et seulement si :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \underline{S}_{\sigma_n} = I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \overline{S}_{\sigma_n} ,$$

où I est un nombre réel indépendant du choix de la subdivision σ_n de $[a;\, b]$. Ce nombre réel est alors, par définition, l'intégrale de Riemann de f entre a et b.

Preuve : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du lemme.

Supposons que l'intégrale de Riemann de f entre a et b existe. Soit alors $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}. Par hypothèse, toutes les sommes S_{σ_n}, où :

$$S_{\sigma_n} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) ,$$

admettent pour limite le même nombre réel I lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, et ce quel que soit le choix de la subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ de $[a;\, b]$ et quel que soit le choix, pour chaque subdivision, des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1]$, … , $\xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$. Or, parmi les sommes S_{σ_n} se trouvent les sommes de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ et supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ de f associées à σ_n. Par conséquent, $\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ admettent chacune pour limite, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, le même nombre réel I, qui ne dépend pas du choix de la subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ de $[a;\, b]$.

Réciproquement, supposons que les sommes de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ et supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ de f associée à une subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}, admettent toutes les deux pour limite, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, le même nombre réel I, et que ce nombre ne dépend pas du choix de la subdivision σ_n. Alors, par définition des sommes de Darboux inférieure et supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underline{S}_{\sigma_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}) = \overline{S}_{\sigma_n}\,,$$

où m_k et M_k sont, respectivement, le minimum et le maximum de f dans $[x_{k-1};\, x_k]$, et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Par conséquent, selon le théorème des deux gendarmes pour les suites (*cf.* proposition A.1.6 de l'annexe A), la somme $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ admet pour limite, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, le nombre réel I ; en outre, ce nombre ne dépend ni du choix de la subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ de $[a;\, b]$, ni du choix, pour chaque subdivision σ_n, des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1], \ldots,$ $\xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$. L'intégrale de Riemann de f entre a et b existe donc. $\square$

4.1.8 Proposition : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue dans $[a;\, b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) entre a et b. Autrement dit, si f est continue dans $[a;\, b]$, l'intégrale de Riemann de f entre a et b existe.*

Éléments de preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Pour prouver que f est intégrable (au sens de Riemann) entre a et b, il suffit, selon le lemme précédent, de montrer les deux points suivants : premièrement, les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f, associées à une subdivision donnée, tendent vers le même nombre réel I lorsque l'ordre de la subdivision en question tend vers l'infini et le pas tend vers 0 ; deuxièmement, le nombre réel I ne dépend pas du choix de la subdivision.

- Soit $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}. Notons m_k le minimum et M_k le maximum de f dans l'intervalle fermé $[x_{k-1};\, x_k]$, où $k = 1, \ldots, n$. Lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0, les quantités $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, où $k = 1, \ldots, n$, tendent toutes vers 0 ; ce qui implique, du fait de la continuité de f dans $[a;\, b]$, que les différences $M_k - m_k$, où $k = 1, \ldots, n$, tendent toutes vers 0 ; ce qui revient à dire que m_k et M_k tendent vers le même nombre réel ℓ_k (où $k = 1, \ldots, n$). De ce résultat, il découle immédiatement que la différence entre la somme de Darboux supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ et la somme de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0. En conséquence, soit $\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ convergent toutes les deux vers un même nombre réel I, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} vers 0, soit elles tendent à diverger toutes les deux. Dans la situation présente, avec les hypothèses formulées, les deux sommes convergent. Passablement technique, et nécessitant l'introduction de notions qui n'ont pas été vues jusqu'à présent, la preuve de cette dernière assertion n'est pas exposée ici. Une démonstration détaillée est donnée à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe D.

- Avec les concepts et résultats vus jusqu'à présent, il n'est pas possible de prouver que le nombre réel I, mentionné au point précédent, ne dépend pas du choix de la subdivision de $[a;\, b]$. Une démonstration détaillée de ce résultat est exposée dans l'annexe D, à la fin du présent ouvrage.

4.1.9 Remarque : Pour calculer l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, il suffit de considérer une seule subdivision σ_n d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}, puis une seule somme de Riemann de f associée à σ_n (par exemple l'une des deux sommes de Darboux de f associée à σ_n), et enfin d'en prendre la limite lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0. Il n'est pas nécessaire de considérer toutes les sommes de Riemann possibles de f, associées à toutes les subdivisions possibles de $[a;\, b]$; la proposition précédente garantit que l'on obtient dans tous les cas le même résultat lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} tend vers 0.

4.1.10 Propriétés : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Selon la proposition précédente, l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f entre a et b existe.

- Soient $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$ et δ_{σ_n} son pas. On définit l'intégrale de Riemann de f entre b et a comme étant la limite suivante :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_{k-1} - x_k)\,,$$

où $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$ pour tout $k = 1,\, \ldots\, , n$. On note cette limite :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vu que :

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_{k-1} - x_k) \\
&=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big[-(x_k - x_{k-1})\big] \\
&=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} -\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \\
&=\; -\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

et que, par définition :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,,$$

il vient :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Noter que $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ existe, vu que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

- Soit $c \in [a;\, b]$. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,,$$

où $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont respectivement l'intégrale de f entre a et c et l'intégrale de f entre c et b. Pour s'en convaincre, il convient de considérer une subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ d'ordre n de $[a;\, c]$ (pour laquelle $x_0 = a$ et $x_n = c$), une subdivision $\varsigma_m = (x_n;\, x_{n+1};\, \ldots\,;\, x_{n+m})$ d'ordre m de $[c;\, b]$ (pour laquelle $x_n = c$ et $x_{n+m} = b$) et la subdivision $\tau_\ell = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n;\, x_{n+1};\, \ldots\,;\, x_{n+m})$ d'ordre $\ell = n + m$ de $[a;\, b]$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \lim_{\substack{\ell\to\infty \\ \delta_{\tau_\ell}\to 0}} \sum_{k=1}^{\ell} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \\
&=\; \lim_{\substack{\ell\to\infty \\ \delta_{\tau_\ell}\to 0}} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=n+1}^{\ell} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \right) \\
&=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \lim_{\substack{m\to\infty \\ \delta_{\varsigma_m}\to 0}} \sum_{k=n+1}^{n+m} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,,
\end{aligned}$$

où δ_{σ_n}, δ_{ς_m} et δ_{τ_ℓ} sont les pas de σ_n, ς_m et τ_ℓ, respectivement, et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$ pour tout $k = 1,\, \ldots\,, n, n+1,\, \ldots\,, n+m$. Noter que le passage de la deuxième à la troisième ligne de calcul est tout à fait licite puisque, dès le moment où δ_{τ_ℓ} tend vers 0, alors nécessairement δ_{σ_n} et δ_{ς_m} tendent tous les deux vers 0 aussi (en effet, dès lors que le plus grand des nombres $(x_1 - x_0),\, \ldots\,, (x_n - x_{n-1}), (x_{n+1} - x_n),\, \ldots\,,$ $(x_{n+m} - x_{n+m-1})$ tend vers 0, alors nécessairement tous ces nombres tendent vers 0, en particulier le plus grand des nombres $(x_1 - x_0),\, \ldots\,,\, (x_n - x_{n-1})$ ainsi que le plus grand des nombres $(x_{n+1} - x_n),\, \ldots\,,\, (x_{n+m} - x_{n+m-1})$). Par définition, la dernière ligne du calcul n'est rien d'autre que la somme de l'intégrale de f entre a et c et l'intégrale de f entre c et b. Ainsi donc :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \lim_{\substack{m\to\infty \\ \delta_{\varsigma_m}\to 0}} \sum_{k=n+1}^{n+m} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \\
&=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Remarquer que $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existent, vu que f, qui est continue dans $[a;\, b]$, est continue dans $[a;\, c]$ et dans $[c;\, b]$.

- Le précédent résultat demeure valable si $c \notin [a;\, b]$, pour autant que f soit définie et continue dans $[c;\, b]$ au moins, dans le cas où $c < a$, ou dans $[a;\, c]$ au moins, dans le cas où $c > b$. Pour s'en convaincre, il convient de supposer que $c < a$ (la situation où $c > b$ se démontrant de manière analogue), d'écrire l'intégrale de f entre c et b, puis de développer celle-ci comme suit (en notant que $c < a < b$, ce qui permet d'utiliser le résultat obtenu au point précédent) :

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

En tenant compte du fait que $\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, il vient alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.1.11 Remarques :

- Les propriétés précédentes sont en accord avec le fait que l'intégrale d'une fonction entre un point et le même point, si elle existe, est nulle :

$$0 \;=\; \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où $f\colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) est une fonction continue dans l'intervalle $[a;\, b] \subset D$ au moins, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- D'autres propriétés de l'intégrale d'une fonction seront énoncées dans les sections qui suivent. Un résultat, néanmoins, va encore être évoqué ici ; suffisamment important, il est présenté sous la forme d'un théorème.

4.1.12 Théorème : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, il existe un élément $c \in [a;\, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(c)\,(b-a)\,.$$

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème de la valeur moyenne****. Le nombre $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f dans l'intervalle $[a;\, b]$.*

Preuve : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit aussi $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ une subdivision d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}.

Comme f est continue dans $[a;\, b]$ et que $[a;\, b]$ est fermé, f atteint son minimum, que l'on note m, et son maximum, que l'on note M, dans $[a;\, b]$ (*cf.* théorème du minimum et du maximum, section 2.10 du chapitre 2). Ainsi, pour tout $x \in [a;\, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. En particulier, pour tout $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k] \subset [a;\, b]$, $m \leqslant f(\xi_k) \leqslant M$, où $k = 1, \ldots, n$. Par conséquent :

$$m\,(x_k - x_{k-1}) \;\leqslant\; f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \;\leqslant\; M\,(x_k - x_{k-1})\,,$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$, et donc :

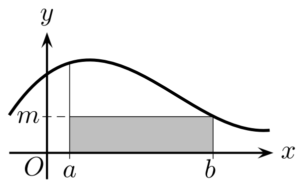
$$\sum_{k=1}^{n} m\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

Or, comme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= -x_0 + x_n = x_n - x_0 = b - a\,,\end{aligned}$$

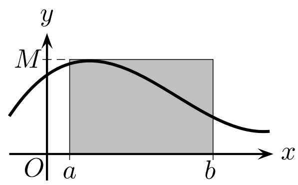
vu que $x_0 = a$ et $x_n = b$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} m\,(x_k - x_{k-1}) &= m\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= m\,(x_n - x_0) = m\,(b-a)\end{aligned}$$



et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} M\,(x_k - x_{k-1}) &= M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= M\,(x_n - x_0) = M\,(b-a)\,.\end{aligned}$$



Ainsi :

$$m\,(b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant M\,(b-a)\,,$$

d'où (*cf.* dernier point de la remarque A.1.6 de l'annexe A) :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} m\,(b-a) \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} M\,(b-a)\,;$$

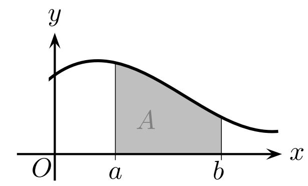
autrement écrit :

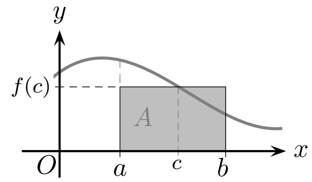
$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,(b-a) \qquad \Leftrightarrow \qquad m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,,$$

vu que ni $m\,(b-a)$, ni $M\,(b-a)$ ne dépend de n.

Pour terminer, rappelons que, du moment que f est continue dans $[a;\, b]$, f prend, dans $[a;\, b]$, une fois au moins la valeur m, une fois au moins la valeur M, ainsi qu'une fois au moins toute valeur comprise entre m et M (*cf.* théorème du minimum et du maximum). Autrement dit, pour tout nombre réel $y \in [m;\, M]$, il existe au moins un nombre réel $x \in [a;\, b]$ tel que $f(x) = y$. Or, selon la dernière double inégalité obtenue ci-dessus, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in [m;\, M]$. Par conséquent, il existe au moins un nombre réel $c \in [a;\, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$





4.1.13 Remarque : Le théorème de la valeur moyenne peut être interprété comme suit : pour toute fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ définie et continue dans un intervalle $[a; b] \subset D$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, il existe un nombre réel $c \in [a; b]$ tel que la surface finie S, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, a une aire A qui est égale à celle d'un rectangle de base $(b - a)$ et de hauteur $f(c)$.

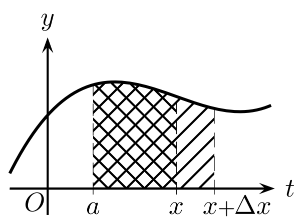
4.2 Notion de primitive

Si la formulation de Riemann de l'intégrale d'une fonction permet de définir de manière claire et relativement générale l'idée de somme d'éléments infiniment petits, elle ne fournit, en revanche, pas une méthode pratique pour la détermination de l'aire de surfaces non polygonales ; le calcul de la limite d'une somme étant souvent lourd et laborieux.

L'objectif principal que visait Riemann, et avant lui Cauchy, au travers de leur formulation d'intégrale, était de donner une définition précise de la notion d'intégrabilité, et non pas d'élaborer des techniques pratiques de calcul d'aires ; de telles techniques, rappelons-le, ont déjà été mises au point près de deux siècles plus tôt par les savants Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz.

Reposant sur une opération inverse de celle de la dérivation, les méthodes de Newton et de Leibniz offrent la possibilité de résoudre de façon relativement simple et élégante nombre de problèmes, non seulement en géométrie, mais également en mécanique, et plus généralement en physique ; le formalisme qui en résulte est souvent plus simple à manier que le calcul fastidieux des sommes et des limites.

Retraçons ici, avec le langage mathématique d'aujourd'hui, les différentes étapes qui ont permis aux deux inventeurs du calcul infinitésimal d'élaborer une conception générale du calcul de l'aire d'une surface non polygonale. À cet effet, considérons une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) d'une variable réelle t, définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.



- Soit $A(x)$ l'intégrale de f entre a et un nombre réel $x \in]a; b[$:
$$A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
Soient aussi le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oty son système de coordonnées cartésiennes canonique, composé de l'axe des abscisses Ot et de l'axe des ordonnées Oy. Géométriquement parlant, $A(x)$ peut être vue comme l'aire de la surface finie, dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = f(t)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe Ot) et les

deux droites verticales d'équations $t = a$ et $t = x$ (surface \\\\ sur la figure du bas de la page précédente).

- Soit $A(x + \Delta x)$ l'intégrale de f entre a et un nombre réel $x_1 \in \,]a;\, b[$, que l'on note $x_1 = x + \Delta x$:

$$A(x + \Delta x) \;=\; \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

  Géométriquement parlant, $A(x + \Delta x)$ peut être vue comme l'aire de la surface finie, dans $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oty), délimitée par la courbe d'équation $y = f(t)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe Ot) et les deux droites verticales d'équations $t = a$ et $t = x+\Delta x$ (surface //// sur la figure du bas de la page précédente).

Selon la première et la deuxième des propriétés 4.1.10 :

$$\begin{aligned} A(x+\Delta x) - A(x) \;&=\; \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_x^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Or, f est continue dans $[x\,;\, x+\Delta x]$, vu qu'elle est continue dans $[a;\, b]$. Il existe donc, selon le théorème de la valeur moyenne (théorème 4.1.12), un nombre réel $c \in [x\,;\, x+\Delta x]$ tel que :

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(c)\,\big(x + \Delta x - x\big)\,.$$

Par conséquent :

$$A(x+\Delta x) - A(x) \;=\; f(c)\,\Delta x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c) \;=\; \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x}\,.$$

Lorsque Δx tend vers 0, c tend vers x, vu que $c \in [x\,;\, x+\Delta x]$, et $f(c)$ tend vers $f(x)$, vu que f est continue dans $[a;\, b] \supset [x\,;\, x+\Delta x]$; quant au rapport $\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$, il tend, par définition, vers la dérivée A' de A en x. Ainsi :

$$A'(x) \;=\; f(x)\;;$$

l'aire A de la surface finie, dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = f(t)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les droites verticales d'équations $t = a$ et $t = x$, semble donc pouvoir s'obtenir directement à partir de f, en appliquant à f une opération contraire à celle de la dérivation, de sorte que, lorsque l'on dérive A, on retrouve f.

4.2.1 Définition : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *primitive* de f dans $[a;\, b]$ toute fonction $F\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, continue dans $[a;\, b]$, telle que, pour tout $x \in \,]a;\, b[$:

$$F'(x) \;=\; f(x)\,.$$

4.2.2 Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donné par $f(x) = 2\,x$. Alors, dans tout intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, la fonction $F : [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $F(x) = x^2$, est une primitive de f dans $[a;\, b]$. En effet, F étant une fonction polynomiale, F est continue dans tout $\mathbb{R}$; de fait, elle est continue dans $[a;\, b]$ (*i.e.* elle est continue dans $]a;\, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b). De plus, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$F'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \;=\; 2\,x \;=\; f(x)\,.$$

Noter que la fonction $\tilde{F} \colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $\tilde{F}(x) = x^2 + 5$, est aussi une primitive de f dans $[a;\, b]$; en effet, $\tilde{F}$ étant une fonction polynomiale, elle est continue dans tout $\mathbb{R}$; et donc en particulier dans $[a;\, b]$. De plus, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$\tilde{F}'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}\tilde{F}}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+5) \;=\; 2\,x + 0 \;=\; 2\,x \;=\; f(x)\,.$$

Plus généralement, toute fonction $G \colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $G(x) = x^2 + C$, où C est un nombre réel quelconque, est une primitive de f dans $[a;\, b]$.

4.2.3 Lemme : *Soit $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons, en outre, que f admet dans $[a;\, b]$ deux primitives $F_1 \colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ et $F_2 \colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in [a;\, b]$, $F_2(x) = F_1(x) + C$, où C est un nombre réel.*

Preuve : Soit $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du lemme. Soit, en outre, $G \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$, où $F_1 \colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ sont les deux primitives de f mentionnées dans les hypothèses du lemme. Alors, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$\begin{aligned} G'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(F_2 - F_1\big)(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}x}(x) - \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}x}(x) \\ &=\; F_2'(x) - F_1'(x) \;=\; f(x) - f(x) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $G(x) = C$ pour tout $x \in\,]a;\, b[$, où C est un nombre réel. Et comme G est continue dans $[a;\, b]$ (vu qu'elle est définie, dans $[a;\, b]$, comme étant la différence de deux fonctions continues dans $[a;\, b]$), alors $G(x) = C$, pour tout $x \in [a;\, b]$. Ainsi, $F_2(x) = F_1(x) + C$ pour tout $x \in [a;\, b]$. $\square$

4.2.4 Remarque : Le lemme précédent permet d'affirmer que toute fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, dès le moment où elle admet une primitive dans $[a;\, b]$, en possède une infinité ; en outre, toutes ces primitives se distinguent entre elles par des constantes réelles.

4.2.5 Notation : L'ensemble de toutes les primitives dans $[a;\, b]$ d'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), à supposer qu'il existe, se note :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou aussi :} \qquad F(x) + C\,,$$

où F est une primitive de f dans $[a;\, b]$ et C un nombre réel quelconque. L'utilisation des symboles $\int$ et $\mathrm{d}x$, dans la première écriture, vient du fait que la primitive d'une fonction f, si elle existe, s'emploie volontiers pour calculer l'intégrale de f entre a et b. Remarquer que l'on parle volontiers d'*intégrer une fonction* pour indiquer que l'on recherche en fait ses primitives.

4.2.6 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.*

- *La grandeur A, donnée par :*

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

est une fonction à valeurs réelles, définie dans l'intervalle $[a;\, b]$.

- *La fonction $A\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, définie au point précédent, est une primitive de f dans $[a;\, b]$.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses de la proposition ; soit A la grandeur donnée par :

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- Par définition, $A(x)$ est l'intégrale de Riemann de f entre a et x. Cette intégrale existe, quel que soit $x \in [a;\, b]$, vu que f est continue dans $[a;\, b]$ (*cf.* proposition 4.1.8). Pour chaque $x \in [a;\, b]$, la quantité $A(x)$ est donc égale à une et une unique valeur réelle. A peut donc être vue comme une fonction à valeurs réelles ; elle est définie dans $[a;\, b]$, vu que $A(x)$ existe pour tout $x \in [a;\, b]$.
- Au début de la présente section, il a été montré que :

$$A'(x) \;=\; f(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in\,]a;\, b[\;.$$

$A'(x)$ existe donc pour tout $x \in\,]a;\, b[$; A est, de fait, continue dans $]a;\, b[$. Reste alors à montrer que A est aussi continue à droite en a et continue à gauche en b.

  - ◇ *Continuité à droite en a* : Comme f est continue dans $[a;\, b]$, elle est continue dans $[a;\, x]$, quel que soit $x \in\,]a;\, b]$. Il existe donc, selon le théorème de la valeur moyenne, un nombre réel $c_1 \in [a;\, x]$ tel que :

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(c_1)\,(x-a)\,.$$

Or, lorsque x tend vers a par valeurs plus grandes, c_1 tend vers a, vu que $c \in [a;\, x]$, et $f(c_1)$ tend vers $f(a)$, vu que f est continue dans $[a;\, b] \supset [a;\, x]$. Par conséquent :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} A(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(c_1)\,(x-a) \;=\; f(a)\,(a-a) \;=\; 0 \;=\; A(a)\,,$$

vu que $A(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction A est donc continue à droite en a.

◇ *Continuité à gauche en* b : La quantité $A(x)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A(x) \;=\; \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; A(b) - \int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Comme f est continue dans $[a;\, b]$, elle est continue dans $[x;\, b]$, quel que soit $x \in [a;\, b[$. Il existe donc, selon le théorème de la valeur moyenne, un nombre réel $c_2 \in [x;\, b]$ tel que :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(c_2)\,(b-x)\,.$$

Or, lorsque x tend vers b par valeurs plus petites, c_2 tend vers b, vu que $c_2 \in [x;\, b]$, et $f(c_2)$ tend vers $f(b)$, vu que f est continue dans $[a;\, b] \supset [x;\, b]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} A(x) \;&=\; \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \left(A(b) - \int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \;=\; \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \big(A(b) - f(c_2)\,(b-x) \big) \\ &=\; A(b) - f(b)\,(b-b) \;=\; A(b)\,. \end{aligned}$$

La fonction A est donc continue à gauche en b.

En résumé, la fonction $A\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, est continue dans $[a;\, b]$ et satisfait $A'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \,]a;\, b[$. A est donc une primitive de f dans $[a;\, b]$. □

4.2.7 Remarque : La proposition précédente permet d'affirmer que toute fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, admet une primitive dans $[a;\, b]$. Le lemme 4.2.3 permet alors de conclure qu'une telle fonction possède en fait une infinité de primitives distinctes dans $[a;\, b]$.

4.2.8 Propriétés : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Selon la proposition précédente et le lemme 4.2.3, f et g admettent toutes les deux une infinité de primitives distinctes dans $[a;\, b]$. Notons F une des primitives de f dans $[a;\, b]$ et G une des primitives de g dans $[a;\, b]$. Alors :

- $\alpha\, F$ est une primitive de la fonction αf dans $[a;\, b]$; en effet, $\alpha\, F$ est continue dans $[a;\, b]$, vu que F l'est, par définition ; de plus, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$\big(\alpha\, F\big)'(x) \;=\; \alpha\, F'(x) \;=\; \alpha f(x)\;;$$

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ dans $[a;\, b]$; en effet, $F + G$ est continue dans $[a;\, b]$, vu que F et G le sont, par définition ; de plus, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$\big(F + G\big)'(x) \;=\; F'(x) + G'(x) \;=\; f(x) + g(x)\,.$$

4.2.9 Exemple : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f(x) \;=\; x^2 - 3\,x + 2\,.$$

Alors, dans tout intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, la fonction $F\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$F(x) \;=\; \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 2\,x\,,$$

est une primitive de f dans $[a;\, b]$. En effet, F étant une fonction polynomiale, elle est continue dans tout $\mathbb{R}$; et donc en particulier dans $[a;\, b]$; de plus, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$F'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 2\,x\right) \;=\; \frac{1}{3}\cdot 3\,x^2 - \frac{3}{2}\cdot 2\,x + 2 \;=\; x^2 - 3\,x + 2 \;=\; f(x)\,.$$

Selon le lemme 4.2.3, n'importe quelle primitive de f est égale à F à une constante réelle près. Ainsi :

$$\int (x^2 - 3\,x + 2)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 2\,x + C\,.$$

4.3 Théorème fondamental du calcul intégral

4.3.1 Théorème : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a)\,,$$

*où F est une primitive quelconque de f dans $[a;\, b]$. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème fondamental du calcul intégral**.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème. Selon la proposition 4.2.6, la fonction $A\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

est une primitive de f dans $[a;\, b]$. Cette primitive s'annule en $x = a$, vu que $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soit alors F une autre primitive de f dans $[a;\, b]$. Selon le lemme 4.2.3, il existe un nombre réel C tel que $A(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= A(b) - A(a) = \big(F(b) + C\big) - \big(F(a) + C\big) \\ &= F(b) - F(a)\,,\end{aligned}$$

et ce, quelle que soit la primitive F de f dans $[a;\, b]$. □

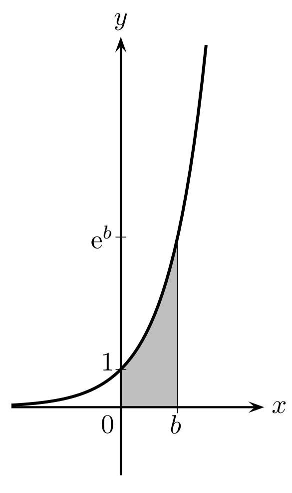
4.3.2 Notation : L'expression $F(b) - F(a)$, notée dans la proposition précédente, s'écrit volontiers :

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b \qquad \text{ou aussi} \qquad F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b\,.$$

4.3.3 Exemples : 1. Calculons l'intégrale entre 0 et b de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \exp(x)$. Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^b \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)\big|_0^b \\ &= \exp(b) - \exp(0) = \exp(b) - 1\,;\end{aligned}$$

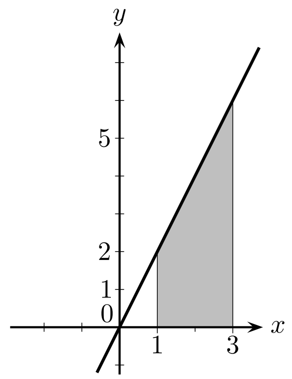
la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est bien une primitive de f dans $[0;\, b]$: elle est continue dans $[0;\, b]$ et sa dérivée, donnée par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x) = \exp(x)$, est égale à f dans $]0;\, b[$. Comme $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;\, b]$, le résultat obtenu ci-dessus est égal, par définition de l'intégrale de f entre 0 et b, à l'aire de la surface finie, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = \exp(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = b$. Noter que cette expression $\exp(b) - 1$ est identique à celle obtenue dans le début de la section consacrée à l'intégrale de (Cauchy-) Riemann, en calculant des limites de sommes.



2. Calculons l'intégrale entre 1 et 3 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2\,x$. Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient :

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 2\,x\,\mathrm{d}x = x^2\big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8\,;$$

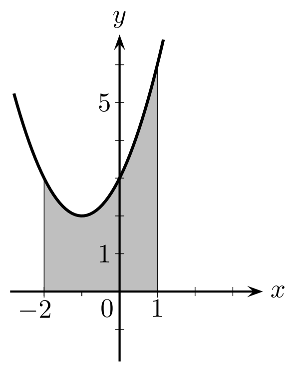
la fonction $x \mapsto x^2$ est bien une primitive de f dans $[1;\,3]$: elle est continue dans $[1;\,3]$ et sa dérivée, donnée par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2\,x$, est égale à f dans $]1;\,3[$. Vu que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1;\,3]$, le résultat obtenu ci-dessus est égal, par définition de l'intégrale de f entre 1 et 3, à l'aire de la surface finie, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la droite oblique d'équation $y = 2\,x$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



3. Calculons l'intégrale entre -2 et 1 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 + 2\,x + 3$. Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{1} (x^2 + 2\,x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3 + x^2 + 3\,x\right]_{-2}^{1}\\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1^2 + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + (-2)^2 + 3\cdot(-2)\right)\\ &= \frac{13}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9\ ;\end{aligned}$$

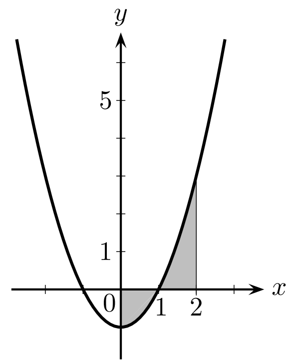
la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}\,x^3 + x^2 + 3\,x$ est bien une primitive de f dans $[-2;\,1]$: elle est continue dans $[-2;\,1]$ et sa dérivée, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\frac{1}{3}\,x^3 + x^2 + 3\big) = x^2 + 2\,x + 3$, est égale à f dans $]-2;\,1[$. Comme $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-2;\,1]$, le résultat obtenu ci-dessus est égal, par définition de l'intégrale de f entre -2 et 1, à l'aire de la surface finie, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la parabole d'équation $y = x^2 + 2\,x + 3$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = -2$ et $x = 1$.



4. Calculons l'intégrale entre 0 et 2 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2 - 1$. Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{2} (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3 - x\right]_{0}^{2}\\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - 0\right)\\ &= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}\ ;\end{aligned}$$

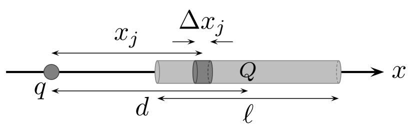
la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$ est bien une primitive de f dans $[0; 2]$: elle est continue dans $[0; 2]$ et sa dérivée, donnée par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\frac{1}{3}x^3 - x\big) = x^2 - 1$, est égale à f dans $]0; 2[$. Comme $f(x) < 0$ pour tout $x \in [0; 1[$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1; 2]$, le résultat obtenu ci-dessus n'est pas égal à l'aire de la surface finie, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la parabole d'équation $y = x^2 - 1$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$.



4.3.4 Illustration : Selon la loi de Coulomb, une particule chargée électriquement, de charge $q \neq 0$, située à une distance d non nulle d'une autre particule chargée, de charge $Q \neq 0$, subit une force $\vec{F}_{\mathrm{E}}$, dite électrique, de norme :

$$F_{\mathrm{E}} = k\,\frac{|Q\,q|}{d^2}\ ,$$

où $k \approx 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$ est une grandeur constante, appelée *constante de Coulomb*. Une telle expression est valable pour autant que les dimensions des particules chargées soient négligeables par rapport à la distance d ; si l'une des deux particules, ou les deux, ont des tailles non négligeables, l'expression ci-dessus n'est plus valable en l'état, elle doit être adaptée. Afin de se rendre compte comment il est possible d'obtenir la force électrique entre deux charges dont l'une au moins a des dimensions quelque peu conséquentes, considérons une situation concrète ; par exemple celle représentée sur la figure ci-contre. Dans cette configuration :



- une charge Q, supposée strictement positive, se trouve répartie uniformément sur une barre cylindrique de longueur $\ell > 0$ et de section négligeable,
- à une distance $d > \frac{\ell}{2}$ du centre de la barre, sur l'axe de la barre, se trouve une charge q de dimensions négligeables, supposée strictement négative.

Plaçons un x de sorte qu'il soit confondu avec l'axe de la barre, qu'il aille de q en direction de Q, et que son origine soit confondue avec q. Décomposons ensuite la barre en n rondelles d'épaisseurs $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. En bonne approximation, un élément d'épaisseur Δx_j, situé à une distance x_j de q (*cf.* figure ci-dessus), produit une force $\Delta\vec{F}_{\mathrm{E},j}$ sur q, de norme :

$$\Delta F_{\mathrm{E},j} = k\,\frac{\big|\big(\frac{\Delta x_j}{\ell}\,Q\big)\,q\big|}{{x_j}^2} = \frac{k\,\Delta x_j\,|Q\,q|}{\ell\,{x_j}^2}\ ;$$

en effet, la charge portée par l'élément de barre d'épaisseur Δx_j est $\Delta Q_j = \frac{\Delta x_j}{\ell}\,Q$. Vu la disposition des charges q et ΔQ_j, la force $\Delta\vec{F}_{\mathrm{E},j}$ n'est que selon l'axe x. Ainsi, $\Delta\vec{F}_{\mathrm{E},j} = \Delta F_{\mathrm{E},j,x}\,\vec{e}_x$, où :

$$\Delta F_{\mathrm{E},j,x} = \frac{k\,\Delta x_j\,|Q\,q|}{\ell\,{x_j}^2}$$

et $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire (*i.e.* de norme égale à 1) ayant la direction et le sens de l'axe x ; noter que $\Delta F_{\mathrm{E},j,x} > 0$, en raison du fait que q et ΔQ_j sont de signes opposés. Pour obtenir la force électrique totale que subit q, due à tous les éléments de la barre, il suffit alors de considérer la somme $\Delta\vec{F}_{\mathrm{E},1} + \ldots + \Delta\vec{F}_{\mathrm{E},n}$, puis de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et que tous les éléments $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ tendent vers 0. La limite de la somme se déduit aisément grâce au théorème fondamental du calcul intégral :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\mathrm{E}} &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\to 0}} \sum_{j=1}^{n} \Delta\vec{F}_{\mathrm{E},j} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\to 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{k\,\Delta x_j\,|Q\,q|}{\ell\,{x_j}^2}\,\vec{e}_x \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\to 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{k\,|Q\,q|}{\ell\,{x_j}^2}\,\Delta x_j\,\vec{e}_x = \int_{d-\frac{\ell}{2}}^{d+\frac{\ell}{2}} \frac{k\,|Q\,q|}{\ell\,x^2}\,\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \\
&= \frac{k\,|Q\,q|}{\ell} \int_{d-\frac{\ell}{2}}^{d+\frac{\ell}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\vec{e}_x = \frac{k\,|Q\,q|}{\ell}\left[-\frac{1}{x}\right]_{d-\frac{\ell}{2}}^{d+\frac{\ell}{2}} \vec{e}_x \\
&= \frac{k\,|Q\,q|}{\ell}\left[-\frac{1}{d+\frac{\ell}{2}} + \frac{1}{d-\frac{\ell}{2}}\right]\vec{e}_x = \frac{k\,|Q\,q|}{\ell}\,\frac{\ell}{d^2-\frac{\ell^2}{4}}\,\vec{e}_x \\
&= k\,\frac{|Q\,q|}{d^2-\frac{\ell^2}{4}}\,\vec{e}_x\,.
\end{aligned}$$

De cette expression peut être déduite la norme de la force électrique totale que subit q :

$$F_{\mathrm{E}} = k\,\frac{|Q\,q|}{d^2-\frac{\ell^2}{4}}\,.$$

4.3.5 Propriétés : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- Soit α un nombre réel quelconque. Alors, l'intégrale de $\alpha\, f$ entre a et b est égale à α fois l'intégrale de f entre a et b :

$$\boxed{\int_a^b \big(\alpha f\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

  En effet, soit F une primitive de f dans $[a;\, b]$. Alors, selon la première des propriétés 4.2.8, $\alpha\, F$ est une primitive de $\alpha\, f$ dans $[a;\, b]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(\alpha f\big)(x)\,\mathrm{d}x &= \big(\alpha\,F\big)(x)\Big|_a^b = \big(\alpha\,F\big)(b) - \big(\alpha\,F\big)(a) = \alpha\,F(b) - \alpha\,F(a) \\
&= \alpha\,\big(F(b)-F(a)\big) = \alpha\,\big[F(x)\big]_a^b = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

- L'intégrale de la somme de f et de g entre a et b est égale à la somme de l'intégrale de f entre a et b et de l'intégrale de g entre a et b :

$$\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\;.$$

En effet, soient F une primitive de f dans $[a;\, b]$ et G une primitive de g dans $[a;\, b]$. Alors, selon la deuxième des propriétés 4.2.8, $F+G$ est une primitive de $f+g$ dans $[a;\, b]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \big(F+G\big)(x)\Big|_a^b \;=\; \big(F+G\big)(b) - \big(F+G\big)(a)\\
&=\; F(b)+G(b)-F(a)-G(a)\\
&=\; \big(F(b)-F(a)\big)+\big(G(b)-G(a)\big)\\
&=\; F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

- La valeur absolue de l'intégrale de f entre a et b est plus petite ou égale à l'intégrale de la valeur absolue de f entre a et b :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leqslant\; \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x}\;.$$

Pour s'en convaincre, il convient de considérer les deux fonctions $f_-\colon D \to \mathbb{R}$ et $f_+\colon D \to \mathbb{R}$ définies comme suit :

$$f_-(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{en tout } x \text{ pour lequel } f(x) < 0\\ 0 & \text{en tout } x \text{ pour lequel } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

et :

$$f_+(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{en tout } x \text{ pour lequel } f(x) < 0\\ f(x) & \text{en tout } x \text{ pour lequel } f(x) \geqslant 0 \end{cases}\;.$$

Par définition de ces deux fonctions, $f_-(x) \leqslant 0$ et $f_+(x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in D$; en outre :

$$\begin{aligned}
\big(f_- + f_+\big)(x) \;&=\; f_-(x)+f_+(x) \;=\; f(x)\,,\\
\big(-f_- + f_+\big)(x) \;&=\; -f_-(x)+f_+(x) \;=\; \big|f(x)\big|
\end{aligned}$$

pour tout $x \in D$. Comme $f_-(x) \leqslant 0$ et $f_+(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in D$, alors $\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ et $\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, ce qui implique que :

$$\left|\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x\right| \;=\; -\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b -f_-(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

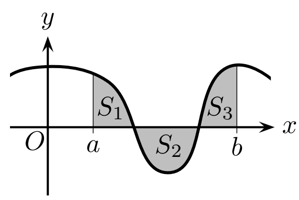
et :

$$\left|\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi, selon le résultat donné au point précédent :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \big(f_- + f_+\big)(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \big(f_-(x) + f_+(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_a^b -f_-(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big(-f_-(x) + f_+(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(-f_- + f_+\big)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Noter que $\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la surface finie S_+, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = f_+(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$; et $\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire de la surface finie S_-, dans $\mathbb{R}^2$, délimitée par la courbe d'équation $y = f_-(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$; remarquer alors que S_+ et/ou S_- peuvent être constituées de plusieurs domaines disjoints (par exemple $S_+ = S_1 \cup S_3$ dans la figure ci-contre).



- Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in [a;\, b]\,.$$

En effet, si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = C\Big|_a^b = C - C = 0\,,$$

où C est un nombre réel quelconque. Réciproquement, si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, *i.e.* si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors, pour tout $x \in [a;\, b]$:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

vu que :

$$0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

et que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, du fait que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$, par hypothèse. Par conséquent, pour tout $x \in]a;\, b[$:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\,;$$

et comme f est supposée être continue dans $[a;\, b]$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

- Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$, alors la fonction $F : [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante dans $[a;\, b]$. En effet, quels que soient $x_1, x_2 \in [a;\, b]$ tels que $x_1 < x_2$:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_2)\,,$$

du fait que $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, vu que $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [a;\, b]$.

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour s'en convaincre, il convient de considérer la fonction $h\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, donnée par $h(x) = g(x) - f(x)$. Manifestement, $h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$; et donc $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(g - f\big)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4.4 Primitives des fonctions usuelles

Jusqu'à présent, les primitives d'une fonction ont été définies dans des intervalles fermés. Cela étant, rien n'empêche, conceptuellement, de les spécifier dans d'autres types d'intervalles.

4.4.1 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle $J \subset D$. On appelle primitive de f dans J toute fonction $F\colon J \to \mathbb{R}$, continue dans J et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, où I est le plus grand intervalle ouvert contenu dans J.

4.4.2 Remarque : Dans la définition précédente, l'hypothèse de continuité de f dans J implique nécessairement l'existence de F ; la proposition 4.2.6 l'atteste : l'expression $\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$, où x_0 est un élément fixe dans J, est bien définie et correspond à une primitive de f dans J.

C'est au sens de la définition donnée ci-dessus que sera comprise, par la suite, la notion de primitive d'une fonction.

À la fin du présent ouvrage, dans l'annexe F, se trouve un tableau présentant les expressions des primitives de certaines fonctions usuelles. Pour la plupart de ces fonctions, les primitives se déduisent presque immédiatement. Mais pour certaines, telle la tangente, les primitives sont plus difficiles à deviner. Et pour d'autres encore, par exemple les fonctions trigonométriques réciproques, les primitives ne peuvent pas être trouvées sans recourir à des techniques particulières ; raison pour laquelle de telles primitives ne figurent pas dans le tableau.

4.5 Méthodes d'intégration

S'il est relativement aisé, grâce aux formules de dérivation, d'obtenir l'expression de la dérivée d'une fonction s'écrivant sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, d'une composition,... de fonctions usuelles, il est, en revanche, souvent difficile de trouver une expression relativement simple de la primitive d'une fonction, ne serait-ce que dans le cas où la fonction en question est un produit ou une composition de deux fonctions usuelles. Plusieurs techniques peuvent être élaborées et mises en œuvre pour trouver des primitives ; elles ne sont cependant pas universelles et fonctionnent plus ou moins bien selon les circonstances.

4.5.1 Intégration par parties

Cette méthode peut s'avérer efficace, essentiellement, dans les deux situations suivantes :
- la fonction dont on cherche une primitive est un produit de deux fonctions usuelles,
- la fonction dont on cherche une primitive est une fonction usuelle (dont on connaît évidemment l'expression de la dérivée, mais dont l'expression d'une primitive ne s'obtient pas de façon évidente).

4.5.1 Proposition : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et dérivables dans un intervalle ouvert I. Supposons, en outre, que la dérivée f' de f et la dérivée g' de g sont toutes les deux continues dans I. Alors, pour tous nombres réels $a, b \in I$ tels que $a < b$:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Cette égalité est appelée ***formule d'intégration par parties****.*

Preuve : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles satisfaisant les hypothèses de la proposition. Alors, selon la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, $\big(f\,g\big)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ pour tout $x \in I$. Ainsi, $f(x)\,g'(x) = \big(f\,g\big)' - f'(x)\,g(x)$ et donc, quels que soient les nombres réels $a{,}b \in I$, où $a < b$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \Big(\big(f\,g\big)'(x) - f'(x)\,g(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big(f\,g\big)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \big(f\,g\big)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

vu que $f\,g$ est une primitive de $(f\,g)'$ dans I. □

4.5.2 Remarque : De la proposition précédente, on déduit immédiatement que, pour tout $x \in I$ (où I est l'intervalle ouvert défini dans l'énoncé de la proposition) :

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Appelée également *formule d'intégration par partie*, cette égalité peut servir à calculer l'ensemble des primitives d'une fonction s'écrivant sous la forme $f(x)\,g'(x)$.

4.5.3 Exemples : 1. Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $x\exp(x)$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, posons $f(x) = x$ et $g'(x) = \exp(x)$, puis appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int x\exp(x)\,\mathrm{d}x &= x\exp(x) - \int 1\cdot\exp(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\exp(x) - \int \exp(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\exp(x) - \exp(x) + C \\
&= (x-1)\exp(x) + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$

du fait que $f'(x) = 1$ et $g(x) = \exp(x)$, par exemple. Si l'ajout d'une constante réelle A à $\exp(x)$ n'est pas nécessaire, il n'est pas interdit non plus ; dans tous les cas, on retrouve le même résultat.

2. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction Arctg, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. Pour cela, posons $f(x) = \mathrm{Arctg}(x)$ (ce qui entraîne que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) et $g'(x) = 1$ (ce qui implique que $g(x) = x$, par exemple) ; puis appliquons la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned}
\int \mathrm{Arctg}(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot \mathrm{Arctg}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\,\mathrm{Arctg}(x) - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\,\mathrm{Arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr) + C \\
&= x\,\mathrm{Arctg}(x) - \ln\Bigl(\sqrt{1+x^2}\,\Bigr) + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,,
\end{aligned}$$
le passage de la première à la deuxième ligne de calcul se justifie par le fait que :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr)\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,2\,x = \frac{x}{1+x^2}\,.$$

3. Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\exp(x)\sin(x)$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, posons $f(x) = \exp(x)$ (ce qui entraîne que $f'(x) = \exp(x)$) et $g'(x) = \sin(x)$ (ce qui implique que $g(x) = -\cos(x)$, par exemple) ; puis appliquons la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned}
\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\exp(x)\cos(x) - \int -\exp(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\exp(x)\cos(x) + \int \exp(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$
Ensuite, dans l'expression $\int \exp(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, posons $\tilde{f}(x) = \exp(x)$ (ce qui entraîne que $\tilde{f}(x) = \exp(x)$) et $\tilde{g}'(x) = \cos(x)$ (ce qui implique, par exemple, que $\tilde{g}(x) = \sin(x)$), puis appliquons à nouveau la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned}
\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\exp(x)\cos(x) + \int \exp(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\exp(x)\cos(x) + \exp(x)\sin(x) - \int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$
On obtient ainsi une équation pour l'inconnue $\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$:
$$\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\exp(x)\cos(x) + \exp(x)\sin(x) - \int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Isolons alors la quantité $\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et ajoutons une constante $\tilde{C}$, afin d'avoir l'ensemble de toutes les primitives :
$$2\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)\sin(x) - \exp(x)\cos(x) + \tilde{C}\,.$$

Finalement, en posant $C = \frac{1}{2}\tilde{C}$:

$$\begin{aligned}\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)\sin(x) - \exp(x)\cos(x) + \tilde{C}\big)\\ &= \frac{1}{2}\exp(x)\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. Calculons l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ de la fonction donnée par $x\sin(x)$. Pour cela, posons $f(x) = x$ (ce qui entraîne que $f'(x) = 1$) et $g'(x) = \sin(x)$ (ce qui implique que $g(x) = -\cos(x)$, par exemple) ; puis appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= x\,\big(-\cos(x)\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \Big[-x\cos(x) + \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \Big[-\frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big] - \big[-0\cdot\cos(0) + \sin(0)\big]\\ &= \Big(-\frac{\pi}{2}\cdot 0 + 1\Big) - (-0+0) = 1\,.\end{aligned}$$

4.5.2 Intégration par changement de variable et par substitution

Cette méthode est utilisée pour transformer des fonctions difficiles à intégrer en d'autres fonctions dont les primitives sont plus faciles à déterminer.

4.5.4 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Soient aussi $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, dérivable dans I, dont la dérivée φ' est continue dans I. Soit encore $[\alpha;\, \beta]$ un intervalle fermé inclus dans I, où α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$, tel que $\varphi([\alpha;\, \beta]) \subset [a;\, b]$. Alors :*

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Cette égalité est appelée ***formule d'intégration par changement de variable****; l'expression $x = \varphi(t)$ porte le nom de changement de variable.*

Preuve : Reprenons les hypothèses de la proposition ; et considérons la fonction G : $[\alpha;\, \beta] \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Cette fonction G peut être vue comme la composition de deux fonctions : $G(x) = F\big(\varphi(x)\big) = \big(F \circ \varphi\big)(x)$, où $F : \varphi\big([\alpha;\, \beta]\big) \to \mathbb{R}$ est donnée par $F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^{u} f(s)\,\mathrm{d}s$. Remarquer que G est continue dans $[\alpha;\, \beta]$, vu que F est continue dans $\varphi\big([\alpha;\, \beta]\big)$ (*cf.* proposition 4.2.6) et que φ est continue dans $I \supset [\alpha;\, \beta]$; de plus, pour tout $x \in \,]\alpha;\, \beta[$:

$$G'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\big(\varphi(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; F'\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x) \;=\; f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,.$$

G est donc une primitive, dans $[\alpha;\, \beta]$, de la fonction $g\colon [\alpha;\, \beta] \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)$. Noter que g est continue dans $[\alpha;\, \beta]$, vu que f est continue dans $[a;\, b] \supset \varphi([\alpha;\, \beta])$ et φ continue dans $[\alpha;\, \beta]$. Ainsi, d'une part, selon le théorème fondamental du calcul intégral :

$$G(\beta) - G(\alpha) \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

d'autre part, par définition de G :

$$G(\beta) - G(\alpha) \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Par conséquent :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\;;$$

autrement écrit :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad \square$$

4.5.5 Remarques :

- Dans la proposition précédente, $\varphi\colon [\alpha;\, \beta] \to \varphi([\alpha;\, \beta])$ n'a pas besoin d'être injective ; dans la preuve, à aucun moment il n'a été nécessaire de parler d'injectivité.
- La formule d'intégration par changement de variable peut s'avérer utile pour calculer non seulement des intégrales, mais également des primitives. Lors du calcul des primitives, il convient alors, à la fin du calcul, de revenir à la variable originale, de sorte que le résultat soit cohérent avec l'expression de départ. Ne pas oublier d'appliquer, à chaque étape du calcul, les précautions qui s'imposent.
- Il n'est pas rare que la formule d'intégration par changement de variable soit utilisée dans le sens inverse à celui donné dans la proposition précédente, *i.e.* dans le sens :

  $$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

  et exprimée avec une notation adaptée aux circonstances :

  $$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

où $u = \varphi(x)$. Dans un tel cas de figure, on parle alors plutôt de *substitution* que de changement de variable, du fait que l'on substitue u à $\varphi(x)$; et comme $u = \varphi(x)$, alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$.

4.5.6 Exemples : 1. Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\sqrt{5\,x+7}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\left[-\frac{7}{5}\,;\,\infty\right[$. À cet effet, posons $u = 5\,x+7$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5 \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}u$), puis appliquons la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{5\,x+7}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int \sqrt{u}\,\frac{1}{5}\,\mathrm{d}u \;=\; \int u^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{5}\,\mathrm{d}x\\ &=\; \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}+C\\ &=\; \frac{2}{15}\,\sqrt{u^3}+C \;=\; \frac{2}{15}\,\sqrt{(5\,x+7)^3}+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\sqrt[3]{\sin(x)}\,\cos(x)$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, posons $u = \sin(x)$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$), puis appliquons la formule d'intégration par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\sin(x)}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int \sqrt[3]{u}\,\mathrm{d}u \;=\; \int u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u\\ &=\; \frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}}+C \;=\; \frac{3}{4}\,\sqrt[3]{\sin^4(x)}+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

3. Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{x}{1+x^2}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. Pour cela, posons $u = 1+x^2$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\,x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$), puis appliquons la formule d'intégration par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;&=\; \int \frac{1}{1+x^2}\,x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &=\; \frac{1}{2}\ln|x|+C \;=\; \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C\\ &=\; \frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr)+C \;=\; \ln\bigl(\sqrt{1+x^2}\,\bigr)+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{1}{a^2+x^2}$, où a est un nombre réel strictement positif, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, posons $u = \frac{x}{a}$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$), puis appliquons

la formule d'intégration par changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}\,a\,\mathrm{d}u = \frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}(u)+C = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\Big(\frac{x}{a}\Big)+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5. Calculons l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction donnée par $\sqrt{1-x^2}$. Pour cela, posons $x=\cos(t)$ (avec $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x=-\sin(t)\,\mathrm{d}t$), puis appliquons la formule d'intégration par changement de variable ; remarquons que les bornes d'intégration passent de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de 1 à 0 (vu que $\cos\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$ et $\cos(0)=1$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\big(\cos(t)\big)^2}\,\big(-\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(t)}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\sin^2(t)}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\Big[t-\frac{1}{2}\sin(2\,t)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
&= -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin(0)\right)-\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(\pi)\right)\right) = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Noter les points suivants.

- Le passage de la deuxième à la troisième ligne de calcul a été effectué en considérant que $\sqrt{\sin^2(t)}=\sin(t)$; si $\sqrt{\sin^2(t)}=\sin(t)$ (et non $\sqrt{\sin^2(t)}=-\sin(t)$), c'est en raison du fait que $\sin(t)\geqslant 0$ dans l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.
- Le passage de la troisième à la quatrième ligne de calcul a été effectué en recourant à l'identité trigonométrique $\sin^2(t)=\frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big)$.
- La fonction $t\mapsto\frac{1}{2}\cos(2\,t)$ est effectivement une primitive de $t\mapsto-\sin(2\,t)$ dans $\mathbb{R}$ (et donc dans $\big[0\,;\frac{\pi}{2}\big]$) ; en effet, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\frac{1}{2}\cos(2\,t)\big)=\frac{1}{2}\big(-\sin(2\,t)\big)\cdot 2=-\sin(2\,t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
- Il aurait aussi été possible de considérer le changement de variable $x=\sin(t)$; il aurait même donné lieu à des calculs légèrement plus simples (comprenant moins de signes négatifs). Si c'est $x=\cos(t)$ qui a été privilégié ici, c'est afin de faire le lien avec les coordonnées polaires : la première coordonnée, *i.e.* la coordonnée x, d'un point situé à une distance 1 de l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy satisfait $x=\cos(t)$, où t est l'angle des coordonnées polaires associées au système Oxy.

6. Calculons l'intégrale entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$ de la fonction donnée par $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. À cet effet, posons $u = \sin(x)$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$), puis appliquons la formule d'intégration par changement de variable ; remarquons que les bornes d'intégration passent de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{1}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$ à 1 (vu que $\frac{1}{2} = \sin\!\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $1 = \sin\!\left(\frac{\pi}{2}\right)$) :
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \ln|1| - \ln\left|\frac{1}{2}\right| = 0 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)\,.\end{aligned}$$

4.5.7 Exemples : La liste qui suit présente les techniques permettant d'obtenir relativement aisément les expressions des primitives des fonctions f de la forme $f(x) = \frac{A\,x+B}{a\,x^2+b\,x+c}$ ou de la forme $f(x) = \frac{A\,x+B}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$, où $A, B, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{1}{2\,x^2+8\,x+20}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, commençons par mettre en évidence le facteur 2 dans l'expression $2\,x^2 + 8\,x + 20$; cherchons ensuite à compléter le carré de $x^2 + 4\,x$; enfin, posons $u = x+2$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$) et appliquons la formule d'intégration par changement de variable :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2\,x^2+8\,x+20}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2\,(x^2+4\,x+10)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4\,x+10}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+4\,x+4)+6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

2. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{7\,x+1}{3\,x^2+12\,x+24}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, commençons par faire apparaître au numérateur de l'expression de la fonction la quantité $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3\,x^2+12\,x+24)$, *i.e.* la quantité $6\,x+12$, de sorte que :
$$\frac{7\,x+1}{3\,x^2+12\,x+24} = \frac{7}{6}\cdot\frac{6\,x+12}{3\,x^2+12\,x+24} - 13\cdot\frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,.$$
Ainsi, l'ensemble des primitives de la fonction peut s'écrire sous la forme :
$$\int \frac{7\,x+1}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{6}\int \frac{6\,x+12}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x - 13\int \frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x\,.$$
Dans $\frac{7}{6}\int \frac{6\,x+12}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x$, posons $u = 3\,x^2+12\,x+24$ (de sorte que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 6\,x+12 \Leftrightarrow \mathrm{d}u = (6\,x+12)\,\mathrm{d}x$) ; dans $13\int \frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x$, mettons 3 en évidence au dénominateur, complétons ensuite l'expression $x^2+4\,x$ de façon à obtenir une identité

remarquable, et posons enfin $v = x + 2$ (avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$). Avec ces changements de variables, il vient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{7\,x+1}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x &= \frac{7}{6}\int \frac{6\,x+12}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x - 13\int \frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,(6\,x+12)\,\mathrm{d}x - 13\int \frac{1}{3\,(x^2+4\,x+8)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{3\,x^2+12\,x+24}\,(6\,x+12)\,\mathrm{d}x - 13\cdot\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+4\,x+8}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{13}{3}\int \frac{1}{x^2+4\,x+4+4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{13}{3}\int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{13}{3}\int \frac{1}{v^2+2^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{7}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{13}{3}\int \frac{1}{2^2+v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{7}{6}\ln|u| - \frac{13}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}\Big(\frac{v}{2}\Big) + C \\
&= \frac{7}{6}\ln|u| - \frac{13}{6}\,\mathrm{Arctg}\Big(\frac{v}{2}\Big) + C \\
&= \frac{7}{6}\ln\big|3\,x^2+12\,x+24\big| - \frac{13}{6}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C\,, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Noter que les deux barres désignant la valeur absolue, dans le logarithme, peuvent être ôtées ; et pour cause : l'expression $3\,x^2 + 12\,x + 24$ est strictement positive, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{5\,x+2}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, commençons par faire apparaître, au numérateur de l'expression de la fonction, la quantité $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4\,x^2+8\,x+20)$, *i.e.* la quantité $8\,x+8$:

$$\frac{5\,x+2}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{8\,x+8}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}} - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,.$$

L'ensemble des primitives de la fonction peut alors s'écrire sous la forme :

$$\int \frac{5\,x+2}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\int \frac{8\,x+8}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dans $\frac{5}{8}\int \frac{8\,x+8}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x$, posons $u = 4\,x^2+8\,x+20$ (de sorte que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 8\,x+8 \Leftrightarrow \mathrm{d}u = (8\,x+8)\,\mathrm{d}x$) ; dans $-3\int \frac{1}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x$, mettons 4 en évidence dans la racine au dénominateur, complétons ensuite l'expression $x^2 + 2\,x$ de façon à obtenir une identité remarquable, et posons enfin $v = x + 1$ (avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$). Avec ces changements de variables, il vient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{5\,x+2}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{8}\int \frac{8\,x+8}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int \frac{(8\,x+8)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}} - 3\int \frac{1}{\sqrt{4\,(x^2+2\,x+5)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int \frac{(8\,x+8)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x^2+8\,x+20}} - 3\int \frac{1}{2\,\sqrt{x^2+2\,x+5}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} - 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2\,x+1+4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{v^2+2^2}}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{5}{8}\cdot 2\,u^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\ln\left|v+\sqrt{v^2+2^2}\,\right| + C \\
&= \frac{5}{4}\sqrt{u} - \frac{3}{2}\ln\left|v+\sqrt{v^2+2^2}\,\right| + C \\
&= \frac{5}{4}\sqrt{4\,x^2+8\,x+20} - \frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2^2}\,\right| + C \\
&= \frac{5}{4}\sqrt{4\,x^2+8\,x+20} - \frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2\,x+5}\,\right| + C\,,
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Noter que les deux barres désignant la valeur absolue, dans le logarithme, peuvent être ôtées ; et pour cause : l'expression $x+1+\sqrt{x^2+2\,x+5}$ est strictement positive, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

4.5.8 Exemples : Les deux situations suivantes présentent les techniques grâce auxquelles il est possible de déterminer relativement aisément les expressions des primitives des fonctions f de la forme $f(x) = \big(\cos(x)\big)^m \big(\sin(x)\big)^n$ ($= \cos^m(x)\sin^n(x)$), où $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\cos^3(x)\sin^5(x)$. À cet effet, commençons par transformer l'expression $\cos^3(x)$ comme suit :

$$\cos^3(x) \;=\; \cos(x)\cos^2(x) \;=\; \cos(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\;;$$

l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ a été utilisée pour écrire $\cos^2(x)$ sous la forme $1 - \sin^2(x)$. Posons ensuite $u = \sin(x)$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$), puis appliquons la formule d'intégration par changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\sin^5(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \big(\sin^5(x)-\sin^7(x)\big)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (u^5-u^7)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}u^6-\frac{1}{8}u^8+C \\
&= \frac{1}{6}\sin^6(x)-\frac{1}{8}\sin^8(x)+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Noter que le calcul aurait pu aussi être effectué en laissant $\cos^3(x)$ tel quel et en transformant l'expression $\sin^5(x)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \sin(x)\sin^2(x)\sin^2(x) = \sin(x)\big(1-\cos^2(x)\big)\big(1-\cos^2(x)\big) \\
&= \sin(x)\big(1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)\big)\,.
\end{aligned}$$

Le raisonnement mené dans le présent exemple s'applique à toute fonction f de la forme $f(x)=\cos^m(x)\sin^n(x)$, où l'un des deux entiers naturels m et n, au moins, est impair.

2. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\cos^2(x)\sin^2(x)$. Pour cela, utilisons les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\,x)\big) \qquad \text{et} \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,x)\big)\,,$$

afin de récrire le produit $\cos^2(x)\sin^2(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^2(x) &= \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\,x)\big)\,\frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,x)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big(1-\cos^2(2\,x)\big) = \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{2}\big(1+\cos(4\,x)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{8}\big(1+\cos(4\,x)\big) = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4\,x)\,;
\end{aligned}$$

noter que l'identité trigonométrique $\cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}\big(1+\cos(2\,\alpha)\big)$ a été réutilisée pour transformer $\cos^2(2\,x)$ en $\frac{1}{2}\big(1+\cos(4\,x)\big)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int \Big(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4\,x)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin(4\,x)+C\,, \qquad \text{où } C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

La marche à suivre donnée ici s'applique à toute fonction f de la forme $f(x)=\cos^m(x)\sin^n(x)$, où les entiers naturels m et n sont tous les deux pairs. Noter que plus m et/ou n sont grands, plus le nombre d'étapes est important.

Si les méthodes présentées dans ces deux exemples s'appliquent bien aux fonctions de type $x \mapsto \cos^m(x)\sin^n(x)$, et plus généralement aux classes de fonctions données par $\cos^m(a\,x)\sin^n(a\,x)$, où $m, n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, elles se montrent, en revanche, inefficaces dans le cas des fonctions de type $x \mapsto \cos^m(a\,x)\sin^n(b\,x)$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq b$. Pour de telles fonctions, il convient plutôt de recourir à l'une ou à plusieurs des identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a\,x)\cos(b\,x) &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a+b)\,x\big) + \cos\big((a-b)\,x\big)\Big)\,, \\
\sin(a\,x)\cos(b\,x) &= \frac{1}{2}\Big(\sin\big((a+b)\,x\big) + \sin\big((a-b)\,x\big)\Big)\,, \\
\sin(a\,x)\sin(b\,x) &= \frac{1}{2}\Big(-\cos\big((a+b)\,x\big) + \cos\big((a-b)\,x\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

4.5.9 Illustration : Dans les ouvrages consacrés à l'étude de l'électricité, on tombe parfois sur l'expression *valeur efficace*. Ce que l'on entend par valeur efficace d'un courant électrique variable, dans une période donnée, c'est la valeur d'un courant électrique constant qui, lorsqu'il traverse une résistance électrique, produit une énergie (se dissipant sous forme de chaleur) égale à celle que produit le courant électrique variable, traversant la même résistance, durant la même période. Concrètement, en notant :

- ◇ $I(t)$ le courant variant au cours du temps,
- ◇ R la résistance électrique considérée,
- ◇ T la période considérée,
- ◇ I_{eff} la valeur efficace du courant variable dans la période T,

il vient :

$$R\,{I_{\text{eff}}}^2\,T = \int_{t_0}^{t_0+T} R\,\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,,$$

où t_0 est l'instant qui marque le début de la période T. Une telle relation peut être déduite de ce que l'on appelle l'*effet Joule*[VII]. Selon cet effet,

- la puissance dissipée dans la résistance R, lorsque elle est traversée par le courant électrique constant I_{eff}, vaut $R\,{I_{\text{eff}}}^2$;
- la puissance dissipée dans la résistance R, lorsque elle est traversée par le courant électrique variable $I(t)$, vaut $R\,\big(I(t)\big)^2$.

Ainsi, dans un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$:

- l'énergie dissipée dans la résistance R, lorsque elle est traversée par le courant électrique constant I_{eff}, vaut $R\,{I_{\text{eff}}}^2\,\mathrm{d}t$;
- l'énergie dissipée dans la résistance R, lorsque elle est traversée par le courant électrique variable $I(t)$, vaut $R\,\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

VII. L'effet Joule est le phénomène qui se manifeste par le réchauffement d'un corps conducteur lorsque celui-ci est traversé par un courant électrique. Il a été découvert en 1840 par le physicien anglais James Prescott Joule, né en 1818 à Salford, près de Manchester, et mort en 1889 à Sale.

En sommant, *i.e.* en intégrant chacune de ces énergies sur la période T et en égalant les résultats obtenus, il ressort que :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} R\,{I_{\text{eff}}}^2\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t_0}^{t_0+T} R\,\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Or, l'intégrale de gauche n'est autre que $R\,{I_{\text{eff}}}^2\,T$, vu que I_{eff} et R sont constants.

Considérons le cas où le courant $I(t)$ est sinusoïdal : $I(t) = I_0\sin(\omega\,t+\varphi)$, où I_0 et ω sont deux paramètres fixes strictement positifs et φ un paramètre réel. I est alors une fonction périodique du temps, de période $T = \frac{2\,\pi}{\omega}$. Dans une période, la valeur efficace d'un tel courant est :

$$I_{\text{eff}} \;=\; \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,.$$

En effet :

$$\begin{aligned} R\,{I_{\text{eff}}}^2\,T \;=\; \int_{t_0}^{t_0+T} R\,\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \qquad &\Leftrightarrow \qquad R\,{I_{\text{eff}}}^2\,\frac{2\,\pi}{\omega} \;=\; R\int_{t_0}^{t_0+T}\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow \qquad {I_{\text{eff}}}^2 \;=\; \frac{\omega}{2\,\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}}\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

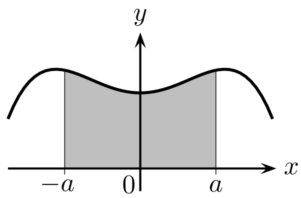
Or :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}}\big(I(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \;&=\; \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} {I_0}^2\sin^2(\omega\,t+\varphi)\,\mathrm{d}t \\ &=\; {I_0}^2\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,\omega\,t+2\,\varphi)\big)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\left[t-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t+2\,\varphi)\right]_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} \\ &=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\left[\left(t_0+\frac{2\,\pi}{\omega}\right)-\frac{1}{2\,\omega}\sin\left(2\,\omega\left(t_0+\frac{2\,\pi}{\omega}\right)+2\,\varphi\right)\right] \\ &\quad\; -\frac{1}{2}\,{I_0}^2\left[t_0-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t_0+2\,\varphi)\right] \\ &=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\left(t_0+\frac{2\,\pi}{\omega}-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t_0+2\,\pi+2\,\varphi)\right) \\ &\quad\; -\frac{1}{2}\,{I_0}^2\left(t_0-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t_0+2\,\varphi)\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\left(t_0+\frac{2\,\pi}{\omega}-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t_0+2\,\varphi)\right) \\ &\quad\; -\frac{1}{2}\,{I_0}^2\left(t_0-\frac{1}{2\,\omega}\sin(2\,\omega\,t_0+2\,\varphi)\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\left(t_0+\frac{2\,\pi}{\omega}-t_0\right) \;=\; \frac{1}{2}\,{I_0}^2\,\frac{2\,\pi}{\omega}\,. \end{aligned}$$

Donc ${I_{\text{eff}}}^2 = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\, {I_0}^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\, {I_0}^2$, d'où le résultat. Noter que le calcul de l'intégrale a été effectué en utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(\alpha)\big)$. La puissance du sinus étant paire, il n'est pas possible d'utiliser ici la technique présentée dans le premier des exemples 4.5.8.

4.5.10 Remarque : La formule d'intégration par changement de variable permet de prouver certaines propriétés des intégrales, en rapport avec les fonctions paires, impaires et périodiques.

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle paire, définie et continue dans un intervalle fermé $[-a; a]$, où a est un nombre réel strictement positif. Alors :



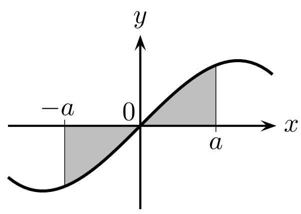
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En effet, comme f est paire, alors $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$, et donc :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \int_{a}^{0} f(\tilde{x})\,(-\mathrm{d}\tilde{x}) + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_{a}^{0} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \int_{0}^{a} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,;\end{aligned}$$

l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pu être transformée en l'intégrale $\int_{a}^{0} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$ grâce au changement de variable $\tilde{x} = -x$, pour lequel $\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x} = -1 \Leftrightarrow \mathrm{d}\tilde{x} = -\mathrm{d}x$, avec les bornes d'intégration qui passent de $-a$ à $-(-a) = a$ et de 0 à $-0 = 0$.

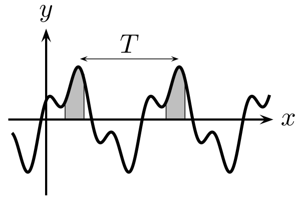
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle impaire, définie et continue dans un intervalle fermé $[-a; a]$, où a est un nombre réel strictement positif. Alors :



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Très similaire à la précédente (dans le cas où f est paire), la preuve de ce résultat est laissée en exercice.

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle périodique, de période T (où T est un nombre réel strictement positif), définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b]$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$. Alors :



$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En effet, comme f est périodique de période T, alors $f(x+nT) = f(x)$ pour tout $x \in D$, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$; en particulier $f(x-T) = f(x)$ pour tout $x \in D$; et donc :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$$
$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

l'intégrale $\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x$ a pu être transformée en l'intégrale $\int_a^b f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$ grâce au changement de variable $\tilde{x} = x - T$, pour lequel $\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}\tilde{x} = \mathrm{d}x$, avec les bornes d'intégration qui passent de $a+T$ à $a+T-T = a$ et de $b+T$ à $b+T-T = b$. Noter que f est définie et continue dans $[a+T\,;\,b+T]$, vu qu'elle l'est dans $[a;\,b]$ et qu'elle est périodique ; l'intégrale $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc bien définie. Remarquer aussi que si $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, alors $\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4.5.3 Intégration des fonctions rationnelles

Toute fonction rationnelle R s'écrit, rappelons-le (*cf.* sous-section C.2 de l'annexe C) :

$$R(x) \;=\; \frac{P(x)}{Q(x)}\ ,$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes en la variable x. S'il est vrai que R admet des primitives dans tout intervalle où elle est continue, il est également vrai que ces primitives ne peuvent être, en général, exprimées de manière simple et concrète ; du moins pas lorsque R est présentée en l'état, sous la forme $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (à moins que $P(x) = (Q(x))^n\,Q'(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de R, n étant un nombre entier).

Selon les propos tenus dans la sous-section 1.5.3, toute expression $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peut s'écrire comme la somme d'un polynôme $S(x)$ et d'un certain nombre d'éléments simples. $S(x)$ est :

- un polynôme de degré $m-n$ si $m \geqslant n$,
- le polynôme nul si $m < n$,

où m est le degré de $P(x)$ et n le degré de $Q(x)$. Quant aux éléments simples, ils s'écrivent sous la forme de fractions, dont le dénominateur est un polynôme de degré un ou deux, élevé à une certaine puissance, et le numérateur un polynôme de degré 0 ou 1, selon les circonstances ; ils peuvent être classés, rappelons-le, en quatre catégories.

Si les primitives de R ne peuvent être exprimées de façon concrète lorsque R est sous la forme $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, peut-être peuvent-elles l'être dans le cas où R est écrit sous la forme de somme d'une fonction polynomiale et d'éléments simples. On sait écrire concrètement les primitives d'une fonction polynomiale ; reste alors à voir s'il est possible de trouver des expressions concrètes des primitives des différents types d'éléments simples.

- *Éléments simples de première espèce* :
  De tels éléments sont de la forme $\frac{A}{x-a}$, où a est un nombre réel et A un coefficient réel. Dans tout intervalle I dans lequel $x - a \neq 0$, leurs primitives s'écrivent :

$$\boxed{\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x \;=\; A \ln\bigl|x-a\bigr| + C}\;, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.$$

  En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(A \ln|x-a| + C\bigr) \;&=\; A\,\frac{1}{x-a} + 0\\ &=\; \frac{A}{x-a}\,.\end{aligned}$$

- *Éléments simples de deuxième espèce* :
  De tels éléments ont la forme d'une somme de fractions $\frac{A_k}{(x-a)^k}$, où a est un nombre réel, A_k un coefficient réel et $k = 1, \ldots, n$, où n est un nombre entier supérieur où égal à 2. Dans tout intervalle I dans lequel $x - a \neq 0$, les primitives de $\frac{A_k}{(x-a)^k}$ s'écrivent :

$$\boxed{\int \frac{A_k}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{A_k}{(1-k)\,(x-a)^{k-1}} + C}\;, \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{N}\setminus\{0;\,1\}\,.$$

  En effet, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A_k}{(1-k)\,(x-a)^{k-1}} + C\right) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A_k}{1-k}\,(x-a)^{-(k-1)} + C\right)\\ &=\; \frac{A_k}{1-k}\,\bigl(-(k-1)\bigr)(x-a)^{-(k-1)-1} + 0\\ &=\; \frac{A_k}{1-k}\,(1-k)(x-a)^{-k}\\ &=\; \frac{A_k}{(x-a)^k}\,.\end{aligned}$$

  Dans le cas où $k = 1$, la fraction $\frac{A_1}{(x-a)^1}$ est un élément simple de première espèce ; ses primitives s'écrivent donc $A_1 \ln|x-a| + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

- *Éléments simples de troisième espèce* :
  De tels éléments sont de la forme $\frac{A\,x+B}{a\,x^2+b\,x+c}$, où a, b et c sont des nombres réels tels que $b^2 - 4\,a\,c < 0$, A et B des coefficients réels. Les primitives de ces éléments

s'obtiennent en appliquant les techniques développées dans les deux premiers exemples 4.5.7 :

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{A\,x+B}{a\,x^2+b\,x+c}\,\mathrm{d}x \;= \\ &= \;\frac{A}{2\,a}\ln\left|a\,x^2+b\,x+c\right| + \frac{2\,a\,B-A\,b}{a\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2\,a\,x+b}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\right)+C\end{aligned}}\,,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

En effet :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A}{2\,a}\ln\left|a\,x^2+b\,x+c\right| + \frac{2\,a\,B-A\,b}{a\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2\,a\,x+b}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\right)+C\right) = \\ &= \frac{A}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{2\,a\,B-A\,b}{a\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2\,a\,x+b}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}\right)^2}\,\frac{2\,a}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}+0 \\ &= \frac{A}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{2\,(2\,a\,B-A\,b)}{4\,a\,c-b^2}\,\frac{1}{1+\frac{4\,a^2\,x^2+4\,a\,b+b^2}{4\,a\,c-b^2}} \\ &= \frac{A}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{2\,(2\,a\,B-A\,b)}{4\,a\,c-b^2}\,\frac{1}{\frac{4\,a\,c-b^2+4\,a^2\,x^2+4\,a\,b+b^2}{4\,a\,c-b^2}} \\ &= \frac{A}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{2\,(2\,a\,B-A\,b)}{4\,a\,c-b^2+4\,a^2\,x^2+4\,a\,b+b^2} \\ &= \frac{A}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{2\,(2\,a\,B-A\,b)}{4\,a\,(a\,x^2+b+c)} \;=\; \frac{1}{2\,a}\,\frac{A\,(2\,a\,x+b)+2\,a\,B-A\,b}{a\,x^2+b\,x+c} \\ &= \frac{A\,x+B}{a\,x^2+b\,x+c}\,.\end{aligned}$$

- *Éléments simples de quatrième espèce* :
  De tels éléments ont la forme d'une somme de fractions $\frac{A_k\,x+B_k}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}$, où a, b et c sont des nombres réels tels que $b^2-4\,a\,c<0$, A_k et B_k des coefficients réels, et $k=1,\ldots,n$, où n est un nombre entier supérieur ou égal à 2. Les primitives de $\frac{A_k\,x+B_k}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{A_k\,x+B_k}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x \;= \\ &= \;\frac{A_k}{2\,a}\,\frac{1}{(1-k)(a\,x^2+b\,x+c)^{k-1}} + \frac{2\,a\,B_k-A_k\,b}{2\,a}\int\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x\end{aligned}}$$

En effet :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A_k}{2\,a}\,\frac{1}{(1-k)(a\,x^2+b\,x+c)^{k-1}}+\frac{2\,a\,B_k-A_k\,b}{2\,a}\int\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{A_k}{2\,a}\,\frac{1}{1-k}(a\,x^2+b\,x+c)^{-(k-1)}+\frac{2\,a\,B_k-A_k\,b}{2\,a}\int\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{A_k}{2\,a}\,\frac{1}{1-k}\,\big(-(k-1)\big)\,(a\,x^2+b\,x+c)^{-(k-1)-1}\,(2\,a\,x+b)$$
$$+\frac{2\,a\,B_k-A_k\,b}{2\,a}\,\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}$$

$$=\frac{A_k}{2\,a}\,\frac{2\,a\,x+b}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}+\frac{2\,a\,B_k-A_k\,b}{2\,a}\,\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}$$

$$=\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\frac{1}{2\,a}\,\big(A_k\,(2\,a\,x+b)+2\,a\,B_k-A_k\,b\big)$$

$$=\frac{A_k\,x+B_k}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,.$$

Arrêtons-nous à présent sur $\int\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x$. Cette quantité peut être récrite comme suit :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(a\,x^2+b\,x+c)^k}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\left[a\left(x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right)\right]^k}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{1}{a^k}\,\frac{1}{\left(x^2+2\,\frac{b}{2\,a}\,x+\frac{b^2}{4\,a^2}-\frac{b^2}{4\,a^2}+\frac{c}{a}\right)^k}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a^k}\int\frac{1}{\left(x^2+2\,\frac{b}{2\,a}\,x+\frac{b^2}{4\,a^2}+\frac{1}{4\,a^2}\,(4\,a\,c-b^2)\right)^k}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a^k}\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)^2+\left(\frac{1}{2\,a}\,\sqrt{4\,a\,c-b^2}\,\right)^2\right]^k}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Or, la dernière expression obtenue peut être ramenée à une expression de la forme :

$$\int\frac{1}{(u^2+r^2)^k}\,\mathrm{d}u\;;$$

pour le voir, il suffit de poser $r=\frac{1}{2\,a}\,\sqrt{4\,a\,c-b^2}$ et $u=x+\frac{b}{2\,a}$ (avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1\Leftrightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$). Notons alors :

$$I_k(u)=\int\frac{1}{(u^2+r^2)^k}\,\mathrm{d}u\qquad\text{et}\qquad I_{k+1}(u)=\int\frac{1}{(u^2+r^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}u\,.$$

Ainsi :

$$I_k(u)=\frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k}+2\,k\,I_k(u)-2\,k\,r^2\,I_{k+1}(u)\,.$$

En effet, en procédant à une intégration par partie de I_k (avec $f(u) = (u^2+r^2)^{-k}$, ce qui implique $f'(u) = -k\,(u^2+r^2)^{-k-1}\,2\,u$, et $g'(u) = 1$, ce qui implique, $g(u) = u$, par exemple) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(u^2+r^2\right)^k}\,\mathrm{d}x &= \int \left(u^2+r^2\right)^{-k}\cdot 1\cdot \mathrm{d}u \\
&= \left(u^2+r^2\right)^{-k}\cdot u - \int -k\left(u^2+r^2\right)^{-k-1} 2\,u\cdot u\cdot \mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k} + k\int \frac{2\,u^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k} + 2\,k\int \frac{u^2+r^2-r^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k} + 2\,k\int \left(\frac{u^2+r^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}} - \frac{r^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k} + 2\,k\int \frac{u^2+r^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}u - 2\,k\int \frac{r^2}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^k} + 2\,k\int \frac{1}{\left(u^2+r^2\right)^{k}}\,\mathrm{d}u - 2\,k\,r^2\int \frac{1}{\left(u^2+r^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

En isolant $I_{k+1}(u)$, il vient alors :

$$I_{k+1}(u) = \frac{1}{2\,k\,r^2}\,\frac{u}{\left(u^2+r^2\right)^2} + \frac{2\,k-1}{2\,k\,r^2}\,I_k(u)\,.$$

Grâce à cette formule, il est possible d'exprimer $I_{k+1}(u)$ à partir de $I_k(u)$. Par conséquent, à partir de $I_1(u)$, qui est donnée par :

$$I_1(u) = \int \frac{1}{\left(u^2+r^2\right)^1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+r^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{r}\,\mathrm{Arctg}\Big(\frac{u}{r}\Big) + C\,, \quad \text{où } C\in\mathbb{R}\,,$$

il est possible d'obtenir l'expression de $I_2(u)$, de laquelle il est possible de trouver l'expression de $I_3(u)$, etc.

En résumé, quel que soit l'élément simple considéré, ses primitives peuvent être exprimées de façon concrète. Ainsi, dès lors qu'une fonction rationnelle est écrite sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'éléments simples, ses primitives peuvent être formulées explicitement.

4.5.11 Exemple : Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction réelle f donnée par $f(x) = \frac{3\,x^3+2}{x^3+x}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}^*$. À cet effet, écrivons $f(x)$ sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'éléments simples :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3\,x^3+2}{x^3+x} = \frac{3\,x^3+3\,x-3\,x+2}{x^3+x} = \frac{3\,x^3+3\,x}{x^3+x} + \frac{-3\,x+2}{x^3+x} \\ &= \frac{3\,(x^3+x)}{x^3+x} + \frac{-3\,x+2}{x^3+x} = 3 + \frac{-3\,x+2}{x^3+x} = 3 + \frac{-3\,x+2}{x\,(x^2+1)} \\ &= 3 + \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+1}\,, \end{aligned}$$

où A, B et C sont des coefficients réels à déterminer. Ceux-ci s'obtiennent en mettant au même dénominateur les deux fractions dans lesquelles ils apparaissent :

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+1} &= \frac{A\,(x^2+1)+(B\,x+C)\,x}{x\,(x^2+1)} = \frac{A\,x^2+A+B\,x^2+C\,x}{x^3+x} \\ &= \frac{(A+B)\,x^2+C\,x+A}{x^3+x}\,, \end{aligned}$$

et en comparant le numérateur de la fraction trouvée avec le numérateur de la fraction $\frac{-3\,x+2}{x^3+x}$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} A+B &=& 0 \\ C &=& -3 \\ A \qquad &=& 2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcr} B &=& -2 \\ C &=& -3 \\ A &=& 2 \end{array}\right. .$$

Ainsi :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x} + \frac{-2\,x-3}{x^2+1}\,.$$

La fraction $\frac{2}{x}$ est un élément simple de première espèce ; et la fraction $\frac{-2\,x+3}{x^2+1}$ un élément simple de troisième espèce. En se référant aux résultats obtenus dans la présente sous-section, il vient :

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\,x^3+2}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{-2\,x-3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int 3\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2\,x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \left(\frac{-2\,x}{x^2+1} + \frac{-3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 3\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\,x + 2\ln|x| - \ln\left|x^2+1\right| - 3\,\mathrm{Arctg}(x) + C\,, \end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Noter que les deux barres désignant la valeur absolue, dans l'expression $\ln\left|x^2+1\right|$, peuvent être ôtées, vu que $x^2+1>0$ quel que soit $x \in D_f = \mathbb{R}^*$.

4.5.4 Intégration de certaines classes de fonctions

L'intérêt d'étudier en détail les primitives des fonctions rationnelles réside dans le fait que nombre de problèmes d'intégration peuvent être ramenés à l'intégration d'une fonction rationnelle. Diverses situations sont présentées dans la liste non exhaustive qui suit.

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :
$$\alpha\,\big(\exp(x)\big)^k\big(\cosh(x)\big)^m\big(\sinh(x)\big)^n\,,\qquad \text{où } k,m,n\in\mathbb{N} \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$
Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable :
$$x = \ln(t)\,,\qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}^*_+\,,$$
une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que :
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\exp(x) = \exp\big(\ln(t)\big) = t\,,$$
et aussi que :
$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big) = \frac{1}{2}\left(\exp(x)+\frac{1}{\exp(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2+1}{2\,t}\,,\\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big) = \frac{1}{2}\left(\exp(x)-\frac{1}{\exp(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2-1}{2\,t}\,.\end{aligned}$$
- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :
$$\alpha\,x^m\big(\sqrt{a^2\,x^2+b^2}\,\big)^n\,,\qquad \text{où } m,n\in\mathbb{N},\ a,b\in\mathbb{R}^*_+ \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$
Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable :
$$x = \frac{b}{a}\sinh(t)\,,\qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}\,,$$
une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction comme celle donnée au point précédent, et donc en définitive à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que :
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{a}\cosh(t) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{b}{a}\cosh(t)\,\mathrm{d}t$$

et, en tenant compte du fait que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2\,x^2 + b^2} &= \sqrt{a^2\,\frac{b^2}{a^2}\sinh^2(t) + b^2} = \sqrt{b^2\sinh^2(t) + b^2} \\ &= \sqrt{b^2\big(\sinh^2(t) + 1\big)} = \sqrt{b^2\cosh^2(t)} = b\cosh(t)\,.\end{aligned}$$

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\,x^m\big(\sqrt{a^2\,x^2 - b^2}\,\big)^n\,, \qquad \text{où } m,n \in \mathbb{N},\ a,b \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce à l'un ou l'autre des changements de variables suivants :

$$x = \frac{b}{a}\cosh(t) \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{b}{a}\cosh(t)\,, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}\,,$$

une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction comme celle donnée au premier point, et donc en définitive à une intégration d'une fonction rationnelle R. Si x est positif (et supérieur à $\frac{b}{a}$, de sorte que la racine soit bien définie), c'est $x = \frac{b}{a}\cosh(t)$ qu'il convient de considérer ; si x est négatif (et inférieur à $-\frac{b}{a}$, de sorte que la racine soit bien définie), c'est $x = -\frac{b}{a}\cosh(t)$ qu'il convient d'appliquer.

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\,\big(\cos(x)\big)^m\big(\sin(x)\big)^n\,, \qquad \text{où } m,n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Grâce au changement de variable suivant, qui s'applique pour autant que les bornes d'intégration soient comprises strictement entre $-\pi$ et π :

$$x = 2\,\mathrm{Arctg}(t)\,, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}\,,$$

une intégration de Ψ se ramène à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{1+t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,, \\ \cos(x) &= \frac{1 - \mathrm{tg}^2\big(\frac{x}{2}\big)}{1 + \mathrm{tg}^2\big(\frac{x}{2}\big)} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\big(\mathrm{Arctg}(t)\big)}{1 + \mathrm{tg}^2\big(\mathrm{Arctg}(t)\big)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \\ \sin(x) &= \frac{2\,\mathrm{tg}\big(\frac{x}{2}\big)}{1 + \mathrm{tg}^2\big(\frac{x}{2}\big)} = \frac{2\,\mathrm{tg}\big(\mathrm{Arctg}(t)\big)}{1 + \mathrm{tg}^2\big(\mathrm{Arctg}(t)\big)} = \frac{2\,t}{1+t^2}\,.\end{aligned}$$

Noter que la relation entre $\cos(x)$ et $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ se déduit des identités trigonométriques $\cos(x_1+x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$ et $\cos^2(x_1) + \sin^2(x_1) = 1$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = \cos^2\Big(\frac{x}{2}\Big) - \sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big) = 2\cos^2\Big(\frac{x}{2}\Big) - 1 \\
&= \frac{2}{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}} - 1 = \frac{2}{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{2 - \left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \ ;
\end{aligned}$$

quant à la relation entre $\sin(x)$ et $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, elle se déduit des identités $\sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2)$ et $\cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = \sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) + \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) \\
&= 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) = 2\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}\Big)\cos^2\Big(\frac{x}{2}\Big) \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \, .
\end{aligned}$$

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\, x^m \big(\sqrt{b^2 - a^2\, x^2}\,\big)^n , \qquad \text{où } m, n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \, .$$

Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable :

$$x = \frac{b}{a}\sin(t) \qquad \left(\text{ou également} \quad x = \frac{b}{a}\cos(t)\right), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \, ,$$

une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction comme celle donnée au point précédent, et donc en définitive à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de noter (dans le cas où $x = \frac{b}{a}\sin(t)$, par exemple) que :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{a}\cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{b}{a}\cos(t)\,\mathrm{d}t \, ,$$

et, en tenant compte de l'identité $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{b^2 - a^2\, x^2} &= \sqrt{b^2 - a^2\, \frac{b^2}{a^2}\sin^2(t)} = \sqrt{b^2 - b^2\sin^2(t)} \\
&= \sqrt{b^2\big(1 - \sin^2(t)\big)} = \sqrt{b^2\cos^2(t)} = b\cos(t) \, .
\end{aligned}$$

Noter que la racine n'est définie que si x est compris entre $-\frac{b}{a}$ et $\frac{b}{a}$.

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\,\bigl(\cos(x)\bigr)^{2m}\bigl(\sin(x)\bigr)^{2n}\,,$$

i.e. de la forme :

$$\alpha\,\bigl(\cos^2(x)\bigr)^{m}\bigl(\sin^2(x)\bigr)^{n}\,,\qquad \text{où } m,n\in\mathbb{N} \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable suivant, qui s'applique pour autant que les bornes d'intégration soient comprises strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$:

$$x = \operatorname{Arctg}(t)\,,\qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}\,,$$

une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{1+t^2} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,,\\
\cos^2(x) &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{1}{1+t^2}\,,\\
\sin^2(x) &= \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{t^2}{1+t^2}\,.
\end{aligned}$$

Noter que la relation entre $\cos^2(x)$ et $\operatorname{tg}^2(x)$ se déduit de l'identité trigonométrique $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\;;$$

il en est de même pour la relation entre $\sin^2(x)$ et $\operatorname{tg}^2(x)$:

$$\sin^2(x) = \overset{2}{\operatorname{tg}}(x)\cos^2(x) = \overset{2}{\operatorname{tg}}(x)\,\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}\,.$$

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\,x^k\,\bigl(\sqrt[\mu]{x}\bigr)^{m}\bigl(\sqrt[\nu]{x}\bigr)^{n}\,,\qquad \text{où } k,m,n\in\mathbb{N},\ \mu,\nu\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0;\,1\} \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable :

$$x = t^{\kappa}\,,\qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}\,,$$

où κ est le plus petit multiple commun de μ et ν, une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction rationnelle R. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \kappa\, t^{\kappa-1} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \kappa\, t^{\kappa-1}\,\mathrm{d}t\,,\\
\sqrt[\mu]{x} &= \sqrt[\mu]{t^{\kappa}} = t^{\frac{\kappa}{\mu}}\,,\\
\sqrt[\nu]{x} &= \sqrt[\nu]{t^{\kappa}} = t^{\frac{\kappa}{\nu}}\,.
\end{aligned}$$

Noter que la présente situation se généralise sans problème aux cas où il y a plus de deux racines différentes.

- Soit $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Lambda(x)}$, où $\Phi(x)$ et $\Lambda(x)$ sont des expressions qui peuvent s'écrire chacune comme une somme non nulle de termes de la forme :

$$\alpha\, x^k \left(\sqrt[\mu]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)^m, \quad \text{où } k, m \in \mathbb{N},\ \ \mu \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0;\,1\},\ \ \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ a\,d - b\,c \neq 0\,.$$

Dans tout intervalle I dans lequel Λ ne s'annule pas, Ψ est continue et par conséquent intégrable. Grâce au changement de variable :

$$x = \frac{-d\,t^{\mu}+b}{c\,t^{\mu}-a}\,, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}\,,$$

une intégration de Ψ (dans I) se ramène à une intégration d'une fonction rationnelle R. La personne qui lit ces lignes peut s'en convaincre par elle-même, en effectuant des calculs similaires à ceux présentés dans les points précédents.

4.5.12 Exemples : 1. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction donnée par $\frac{\exp(x)}{1+\cosh(x)}$, dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$. À cet effet, considérons le changement de variable $x = \ln(t)$, pour lequel $\exp(x) = t$, $\cosh(x) = \frac{t^2+1}{2\,t}$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Avec un tel changement de variable, il vient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\exp(x)}{1+\cosh(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{1+\frac{t^2+1}{2\,t}}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{2\,t+t^2+1}{2\,t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\,t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int \frac{t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int \left(\frac{t+1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t = 2\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= 2\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + 2\int -\frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t+1| + 2\cdot\frac{1}{t+1} + C\\
&= 2\ln\bigl|\exp(x)+1\bigr| + \frac{2}{\exp(x)+1} + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Noter que les deux barres désignant la valeur absolue, dans le logarithme, peuvent être ôtées ; et pour cause : l'expression $\exp(x) + 1$ est strictement positive, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2. Cherchons l'ensemble des primitives de la fonction cosécante (csc) dans tout intervalle I de son domaine de définition, qui est $\mathbb{R} \smallsetminus \{k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Comme $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, il convient d'appliquer le changement de variable $x = 2\,\mathrm{Arctg}(t)$, pour lequel $\sin(x) = \frac{2\,t}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Avec un tel changement de variable, il vient :

$$\begin{aligned}\int \csc(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2\,t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4.6 Intégrales généralisées

Jusqu'à présent, l'intégrale d'une fonction a été systématiquement considérée sur des intervalles fermés et bornés. La présente section a pour objectif de généraliser le concept d'intégrale à d'autres types d'intervalles : intervalles semi-ouverts, ouverts, bornés ou non... Tous ces intervalles ont un point commun en matière d'intégration : ils donnent lieu à un calcul de limite.

4.6.1 Intégrales généralisées sur un intervalle borné

Un intervalle borné, rappelons-le, est un intervalle de la forme $[a;\,b]$, $[a;\,b[$, $]a;\,b]$ ou $]a;\,b[$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$.

4.6.1 Définition :

- Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a;\,b[$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *intégrale généralisée de f entre a et b* (ou *intégrale généralisée de f sur $[a;\,b[$*) la quantité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si la limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞ ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $]a;\,b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *intégrale généralisée de f entre a et b* (ou *intégrale généralisée de f sur $]a;\,b]$*) la quantité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si la limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞ ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert et borné $]a;\, b[$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *intégrale généralisée de f entre a et b* (ou *intégrale généralisée de f sur* $]a;\, b[$) la quantité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si la double limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la double limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞ ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

4.6.2 Notation : Une intégrale généralisée sur un intervalle $[a;\, b[$, $]a;\, b]$ ou $]a;\, b[$ se note de la même manière qu'une intégrale habituelle sur un intervalle $[a;\, b]$ (a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$).

4.6.3 Propriétés :

- Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que l'intégrale généralisée de f entre a et b converge. Alors, quel que soit le nombre réel $c \in [a;\, b[$ (respectivement $c \in\,]a;\, b]$), l'intégrale généralisée de f entre c et b (respectivement entre a et c) converge ; de plus :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Prouvons ce résultat dans le cas de l'intervalle semi-ouvert et borné $[a;\, b[$; le cas de l'intervalle semi-ouvert et borné $]a;\, b]$ se montrant de façon similaire. Pour tout $s \in [a;\, b[$:

$$\int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

ainsi, en passant à la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \left(\int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\ ;\end{aligned}$$

Autrement écrit :

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

d'où le résultat.

- Dans la définition précédente, l'intégrale généralisée sur l'intervalle ouvert $]a;\, b[$ (*cf.* troisième point de la définition 4.6.1) peut être redéfinie comme suit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

quel que soit $c \in\,]a;\, b[$. Cette écriture fait sens, dans la mesure où $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas du nombre $c \in\,]a;\, b[$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre un autre nombre réel $d \in\,]a;\, b[$ et de développer l'expression $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, en tenant compte du résultat établi au point précédent :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_d^s f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_d^s f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

L'intégrale généralisée sur un intervalle ouvert et borné peut donc être vue comme la somme de deux intégrales généralisées sur des intervalles semi-ouverts et bornés. Toutes les propriétés des intégrales généralisées sur des intervalles ouverts peuvent ainsi être déduites des propriétés des intégrales généralisées sur des intervalles semi-ouverts et bornés.

- Soient $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle semi-ouvert $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que l'intégrale généralisée de f entre a et b converge, que l'intégrale généralisée de g entre a et b converge aussi, et que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b[$ (respectivement pour tout $x \in\,]a;\, b]$). Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ce résultat est une conséquence directe des propriétés de l'intégrale de Riemann (*cf.* propriétés 4.3.5) et des propriétés de la limite d'une fonction.

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [a;\, b[$ (respectivement $t \in]a;\, b]$). Alors l'intégrale généralisée de f entre a et b converge si et seulement si, pour tout $x \in [a;\, b[$ (respectivement $x \in]a;\, b]$), il existe un nombre réel $M > 0$ tel que :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M \qquad \left(\text{respectivement} \quad \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\right).$$

Pour s'en convaincre, il suffit de traiter le cas où $f : [a;\, b[\to \mathbb{R}$ (le cas $f :]a;\, b] \to \mathbb{R}$ se prouvant de manière similaire). Soit $F : [a;\, b[\to \mathbb{R}$ la fonction réelle donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La quantité $f(t)$ étant supposée positive pour tout $t \in [a;\, b[$, la fonction F est croissante dans $[a;\, b[$; en effet, quels que soient $x_1, x_2 \in [a;\, b[$ tels que $x_1 < x_2$:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_2)\,,$$

du fait que $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Supposons à présent qu'il existe, pour tout $x \in [a;\, b[$, un nombre réel $M > 0$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$. Une telle hypothèse implique qu'il existe un plus petit nombre réel $\ell \geqslant 0$ tel que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ell$, quel que soit $x \in [a;\, b[$. Or, ce nombre ℓ n'est rien d'autre que la limite de F lorsque x tend vers b par valeurs plus petites ; en effet, par définition même de ℓ, il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un nombre réel $c \in [a;\, b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant F(c) \leqslant \ell$; et comme F est croissante dans $[a;\, b[$, et donc dans $[c;\, b[$, alors $\ell - \varepsilon \leqslant F(x) \leqslant \ell$ pour tout $x \in [c;\, b[$. L'intégrale généralisée de f entre a et b converge donc. Supposons maintenant qu'il n'existe aucun nombre réel $M > 0$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$, quel que soit $x \in [a;\, b[$. Une telle hypothèse implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, un nombre réel $c \in [a;\, b[$ tel que $F(c) \geqslant \upsilon$. Et comme F est croissante dans $[a;\, b[$, et donc dans $[c;\, b[$, alors $F(x) \geqslant \upsilon$ pour tout $x \in [c;\, b[$. L'intégrale généralisée de f entre a et b diverge donc.

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle semi-ouvert $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que l'intégrale généralisée de f entre a et b converge et que l'intégrale généralisée de g entre a et b converge aussi. Alors :
  - ◇ quel que soit le nombre réel α, l'intégrale généralisée de la fonction αf entre a et b converge, et :

$$\int_a^b \big(\alpha f\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

◇ l'intégrale généralisée de la fonction $f+g$ entre a et b converge, et :

$$\int_a^b \big(f+g\big)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

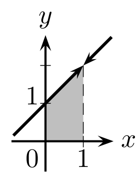
Ces résultats sont des conséquences directes des propriétés de l'intégrale de Riemann (*cf.* propriétés 4.3.5) et des propriétés de la limite d'une fonction. En vertu de ce qui a été établi dans les points précédents, ils sont également valables dans le cas d'intégrales généralisées sur un intervalle ouvert $\,]a;\,b[\,$.

4.6.4 Remarque : Lors du calcul de l'intégrale généralisée entre a et b d'une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ définie et continue dans l'intervalle semi-ouvert $[a;\,b[$ (respectivement dans $]a;\,b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$, trois scénarios peuvent survenir :

- la limite de f lorsque x tend vers b par valeurs plus petites (respectivement lorsque x tend vers a par valeurs plus grandes) existe et est égale à un nombre réel ℓ ;
- la limite de f lorsque x tend vers b par valeurs plus petites (respectivement lorsque x tend vers a par valeurs plus grandes) vaut ∞ ou $-\infty$;
- la limite de f lorsque x tend vers b par valeurs plus petites (respectivement lorsque x tend vers a par valeurs plus grandes) n'existe pas.

Si l'intégrale généralisée converge systématiquement dans la première situation (cela sera prouvé par la suite), elle peut aussi bien converger que diverger dans les deux autres situations ; cela dépend du type de fonction à intégrer.

4.6.5 Exemples : 1. L'intégrale généralisée entre 0 et 1 de la fonction $f\colon\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}\to\mathbb{R}$, donnée par $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, converge ; en effet :



$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{s\to1\\ s<1}} \int_0^s \frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{s\to1\\ s<1}} \int_0^s \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{s\to1\\ s<1}} \int_0^s (x+1)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{s\to1\\ s<1}} \left[\frac{1}{2}\,x^2+x\right]_0^s$$

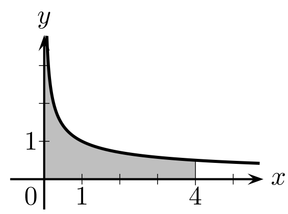
$$= \lim_{\substack{s\to1\\ s<1}} \left[\left(\frac{1}{2}\,s^2+s\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0^2+0\right)\right] \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Noter que la fonction f tend vers 2 lorsque x tend vers 1 par valeurs plus petites. Il n'est donc pas étonnant que l'intégrale généralisée converge.

2. L'intégrale généralisée entre 0 et 4 de la fonction $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, donnée par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, converge ; en effet :

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{r\to0\\ r>0}} \int_r^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{r\to0\\ r>0}} 2\,\sqrt{x}\,\Big|_r^4 \;=\; \lim_{\substack{r\to0\\ r>0}} \Big(2\,\sqrt{4}-2\,\sqrt{r}\Big) \;=\; 4\,.$$

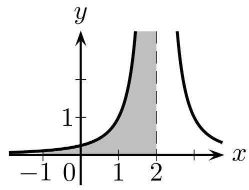
La valeur obtenue correspond à l'aire de la surface S, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 4$. Le fait que f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$ montre que S s'étend jusqu'à l'infini. Cela étant, son aire n'est pas infinie. Le présent exemple montre donc qu'une surface s'étendant à l'infini peut avoir une aire finie.



3. L'intégrale généralisée entre -1 et 2 de la fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, diverge ; en effet :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{s\to 2\\ s<2}} \int_{-1}^{s} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to 2\\ s<2}} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^{s} \\ &= \lim_{\substack{s\to 2\\ s<2}} \left[\left(-\frac{1}{s-2}\right) - \left(-\frac{1}{-1-2}\right)\right] \\ &= -\lim_{\substack{s\to 2\\ s<2}} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} = \infty\,.\end{aligned}$$

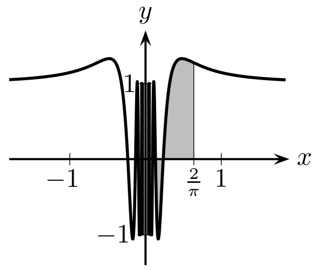
Cette intégrale généralisée correspond à l'aire de la surface S, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et les deux droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$. Le fait que f possède une asymptote verticale d'équation $x = 2$ montre que S s'étend jusqu'à l'infini ; et son aire n'est pas finie. Le présent exemple montre donc qu'une surface s'étendant à l'infini peut avoir une aire infinie.



4. L'intégrale généralisée entre 0 et $\frac{2}{\pi}$ de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = 2\,x\sin\!\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\!\left(\frac{1}{x}\right)$ (*cf.* deuxième point des remarques 3.2.11), converge ; en effet :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{2}{\pi}} \left[2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{r}^{\frac{2}{\pi}} \left[2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left[x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{r}^{\frac{2}{\pi}} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - 0 = \frac{4}{\pi^2}\,,\end{aligned}$$

du fait que $-r^2 \leqslant r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right) \leqslant r^2$, et que $-r^2$ et r^2 tendent tous les deux vers 0 lorsque r tend vers 0 par valeurs plus grandes (*cf.* théorème des deux gendarmes). Noter que $f(x)$ ne tend vers aucun nombre réel lorsque x tend vers 0 par valeurs plus grandes. Cet exemple montre donc que l'intégrale généralisée entre a et b d'une fonction f définie et continue dans $[a; b[$ (respectivement $]a; b]$), a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, peut converger quand bien même f n'admet aucune limite à droite en a (respectivement aucune limite à gauche en b).



5. L'intégrale généralisée entre $-\frac{1}{\pi}$ et 0 de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ diverge ; en effet :

$$\int_{-\frac{1}{\pi}}^{0} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to 0\\ s<0}} \int_{-\frac{1}{\pi}}^{s} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to 0\\ s<0}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{-\frac{1}{\pi}}^{s}$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ s<0}} \left[\cos\left(\frac{1}{s}\right) - \cos(-\pi)\right] = \lim_{\substack{s\to 0\\ s<0}} \cos\left(\frac{1}{s}\right) + 1 \; ;$$

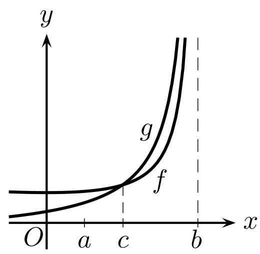
or, $\cos\left(\frac{1}{s}\right)$ n'admet aucune limite lorsque s tend vers 0 par valeurs plus petites. Noter que $f(x)$ ne tend vers aucun nombre réel lorsque x tend vers 0 par valeurs plus petites. Cet exemple montre donc que l'intégrale généralisée entre a et b d'une fonction f définie et continue dans l'intervalle semi-ouvert $[a; b[$ (respectivement $]a; b]$), a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, peut diverger lorsque f n'admet aucune limite à droite en a (respectivement aucune limite à gauche en b).

Dans la précédente section, consacrée aux méthodes d'intégration, on a pu se rendre compte de la difficulté qu'il peut y avoir à exhiber concrètement une primitive d'une fonction donnée. Le proposition qui suit montre qu'il est possible, dans certaines situations, de dire si une intégrale généralisée converge ou non, sans devoir expliciter une primitive de la fonction dont on cherche l'intégrale.

4.6.6 Proposition : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle semi-ouvert $[a; b[$ (respectivement $]a; b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons qu'il existe un nombre réel $c \in [a; b[$ (respectivement $c \in]a; b]$) tel que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [c; b[$ (respectivement $x \in]a; c]$).*

- *Si l'intégrale généralisée de g entre a et b converge, alors l'intégrale généralisée de f entre a et b converge.*
- *Si l'intégrale généralisée de f entre a et b diverge, alors l'intégrale généralisée de g entre a et b diverge.*

Ce résultat est connu sous le nom de ***critère de comparaison*** *relatif aux intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert et borné.*



Preuve : Soient f et g deux fonctions réelles, définies et continues dans un intervalle semi-ouvert $[a;\, b[$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons qu'il existe un nombre réel $c \in [a;\, b[$ (respectivement $c \in]a;\, b]$) tel que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [c;\, b[$.

- Si l'intégrale généralisée de g entre a et b converge, alors l'intégrale généralisée de g entre c et b converge, vu que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$. Selon le quatrième point des propriétés 4.6.3, il existe donc un nombre réel $M > 0$ tel que $\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$ pour tout $x \in [c;\, b[$. Ainsi, comme $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [c;\, b[$, alors, pour tout $x \in [c;\, b[$:
$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\,.$$
L'intégrale généralisée de f entre c et b converge donc. Et comme :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
alors l'intégrale généralisée de f entre a et b converge également.
- Si l'intégrale généralisée de f entre a et b diverge, alors l'intégrale généralisée de f entre c et b diverge, vu que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Selon le quatrième point des propriétés 4.6.3, il existe donc, pour tout nombre réel $\upsilon > 0$, un nombre réel $\tilde{c} \in [c;\, b[$ tel que $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \upsilon$ pour tout $x \in [\tilde{c};b[$. Ainsi, comme $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [c;\, b[$, alors, pour tout $x \in [\tilde{c};\, b[$:
$$\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \upsilon\,.$$
L'intégrale généralisée de g entre c et b diverge donc. Et comme :
$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
alors l'intégrale généralisée de g entre a et b diverge également.

Un raisonnement similaire s'applique dans le cas où f et g sont définies et continues dans un intervalle semi-ouvert $]a;\, b]$. □

4.6.7 Exemples : 1. L'intégrale généralisée entre 0 et 4 de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par :
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,,$$
converge. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'intégrale généralisée entre 0 et 4 de la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, converge, et que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \left]0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$. Le critère de comparaison permet alors de conclure.

2. L'intégrale généralisée entre 0 et 2 de la fonction $g\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$g(x) \;=\; \frac{\exp(x)}{(x-2)^2}\;,$$

diverge. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'intégrale généralisée entre 0 et 2 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, diverge, et que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [0;\, 2[$. Le critère de comparaison permet alors de conclure.

4.6.8 Remarques :

- Les conclusions du critère de comparaison, évoqué précédemment, demeurent valables si, dans l'énoncé, la condition $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [c;\, b[$ (respectivement $x \in\,]a;\, c]$) est remplacée par l'hypothèse $0 \geqslant f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [c;\, b[$ (respectivement $x \in\,]a;\, c]$). Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier la double inéquation $0 \geqslant f(x) \geqslant g(x)$ par -1, de manière à obtenir $0 \leqslant -f(x) \leqslant -g(x)$, puis de reprendre la preuve du critère avec les fonctions $-f$ et $-g$.
- Du critère de comparaison, évoqué précédemment, peut être déduit un autre critère de convergence dont l'énoncé est donné dans le corollaire suivant.

4.6.9 Corollaire : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons qu'il existe un nombre réel α pour lequel :*

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} (b-x)^{\alpha} f(x) \;=\; \ell \neq 0 \qquad \left(\textit{respectivement} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^{\alpha} f(x) \;=\; \ell \neq 0\right),$$

où ℓ est un nombre réel non nul. Alors l'intégrale généralisée de f entre a et b :

- *converge si $\alpha < 1$,*
- *diverge si $\alpha \geqslant 1$.*

Preuve : Traitons le cas d'une fonction réelle f définie et continue dans un intervalle $[a;\, b[$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, pour laquelle :

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} (b-x)^{\alpha} f(x) \;=\; \ell \;>\; 0$$

(les autres cas se traitant de manière similaire). Dire que $(b-x)^{\alpha} f(x)$ tend vers un nombre réel $\ell > 0$ lorsque x tend vers b par valeurs plus petites revient à dire qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un nombre réel $c \in [a;\, b[$ tel que :

$$\left|(b-x)^{\alpha} f(x) - \ell\,\right| \;\leqslant\; \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell - \varepsilon \;\leqslant\; (b-x)^{\alpha} f(x) \;\leqslant\; \ell + \varepsilon$$

pour tout $x \in [c;\, b[$. En particulier, pour tout nombre réel $\tilde{\varepsilon}$ tel que $0 < \tilde{\varepsilon} < \ell$, il existe $\tilde{c} \in [a;\, b[$ tel que :

$$\ell - \tilde{\varepsilon} \;\leqslant\; (b-x)^{\alpha} f(x) \;\leqslant\; \ell + \tilde{\varepsilon}$$

pour tout $x \in [\tilde{c}; b[$. Par conséquent :

$$0 \leqslant \frac{\ell - \tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ell + \tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha}$$

pour tout $x \in [\tilde{c}; b[$. Or, l'intégrale généralisée entre a et b de la fonction donnée par $\frac{\ell-\tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$; en effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\ell - \tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \frac{\ell - \tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s (\ell-\tilde{\varepsilon})(b-x)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} (\ell-\tilde{\varepsilon})\,\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_a^s \\
&= \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \frac{\ell-\tilde{\varepsilon}}{1-\alpha}\big((b-s)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\big)
\end{aligned}$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$; et lorsque $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\ell - \tilde{\varepsilon}}{b-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \frac{\ell - \tilde{\varepsilon}}{b-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \Big[-(\ell-\tilde{\varepsilon})\ln|b-x|\Big]_a^s \\
&= \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} (\ell-\tilde{\varepsilon})\big(\ln(b-a) - \ln(b-s)\big)
\end{aligned}$$

diverge. Il en est de même pour la fonction donnée par $\frac{\ell+\tilde{\varepsilon}}{(b-x)^\alpha}$. Donc, selon le critère de comparaison, l'intégrale généralisée de f entre a et b converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$. □

Le premier des exemples 4.6.5 a mis en évidence une fonction définie dans $\mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$, qui admet une limite lorsque x tend vers 1, et dont l'intégrale généralisée entre 0 et 1 converge. Le fait que l'intégrale converge n'est pas un hasard ; il est une conséquence directe du fait que la fonction admet pour limite un certain nombre réel lorsque x tend vers 1 par valeurs plus petites. Le résultat qui suit le montre.

4.6.10 Lemme : *Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a; b[$ (respectivement $]a; b]$), où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que :*

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \ell \qquad \left(\textit{respectivement} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell\right),$$

où ℓ est un nombre réel. Alors l'intégrale généralisée de f entre a et b converge. De plus :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où $\bar{f}\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *est la fonction donnée par :*

$$\bar{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in [a;\, b[\\ \lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} f(u) & \textit{si } x = b \end{cases}$$

$$\left(\textit{respectivement} \quad \bar{f}(x) \;=\; \begin{cases} \lim\limits_{\substack{u\to a\\ u>a}} f(u) & \textit{si } x = a \\ f(x) & \textit{si } x \in \,]a;\, b] \end{cases} \right) .$$

Preuve : Soit f une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle semi-ouvert et borné $[a;\, b[$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, qui admet pour limite un certain nombre réel ℓ lorsque x tend vers b par valeurs plus petites. Soit aussi $\bar{f}$ la fonction donnée par :

$$\bar{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a;\, b[\\ \lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} f(u) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Alors, pour tout $s \in [a;\, b[$:

$$0 \;=\; \int_a^s \big(\bar{f} - f\big)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^s \big(\bar{f}(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^s \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Ainsi, en passant à la limite :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \big(\bar{f} - f\big)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \big(\bar{f}(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x \;, \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x \;;$$

autrement écrit :

$$\int_a^b \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;;$$

l'intégrale généralisée de f entre a et b converge donc. Un raisonnement similaire s'applique dans le cas d'une fonction f définie et continue dans un intervalle $]a;\, b]$, qui admet pour limite un certain nombre réel ℓ lorsque x tend vers a par valeurs plus grandes. $\square$

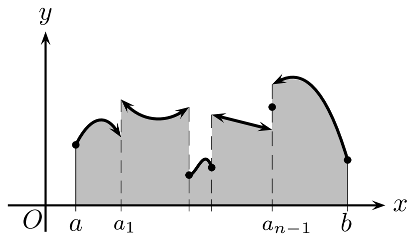
4.6.2 Intégrales de fonctions continues par morceaux

4.6.11 Définition : Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $[a;\, b]$ un intervalle fermé, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$. La fonction f est dite *continue par morceaux* dans $[a;\, b]$ s'il existe un nombre fini $n+1$ d'éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $[a;\, b]$, satisfaisant les conditions suivantes :

- $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_{k-1} < a_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$,
- f est définie et continue dans chaque intervalle ouvert $]a_{k-1}\,; a_k[$, $k = 1, \ldots, n$; en outre :

$$\lim_{\substack{x \to a_{k-1} \\ x > a_{k-1}}} f(x) = \ell_{1,k} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} f(x) = \ell_{2,k}\,,$$

où $\ell_{1,k}$ et $\ell_{2,k}$ sont des nombres réels, quel que soit $k = 1, \ldots, n$.



4.6.12 Remarques :

- Dire qu'une fonction réelle f est continue par morceaux dans un intervalle $[a; b]$ revient à dire que f possède un nombre fini de discontinuités dans $[a; b]$ et que ces discontinuités ne peuvent être que de types trou, trou-saut ou saut.
- La remarque précédente met en évidence le fait qu'une fonction réelle, continue par morceaux dans un intervalle $[a; b]$, peut très bien ne pas être définie en l'un ou l'autre point de $[a; b]$; par exemple, si f possède une discontinuité de type trou en un certain point $c \in [a; b]$, alors f n'est pas définie en c.
- Toute fonction réelle, continue dans un intervalle $[a; b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, est continue par morceaux dans $[a; b]$. La réciproque n'est évidemment pas nécessairement vraie.

4.6.13 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, continue par morceaux dans un intervalle fermé $[a; b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *intégrale (de Riemann)* de f entre a et b la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où :

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r_{k-1} \to a_{k-1} \\ r_{k-1} > a_{k-1}}} \lim_{\substack{s_k \to a_k \\ s_k < a_k}} \int_{r_{k-1}}^{s_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$. On note cette intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, de la même manière que l'intégrale d'une fonction continue dans $[a; b]$. Ainsi :

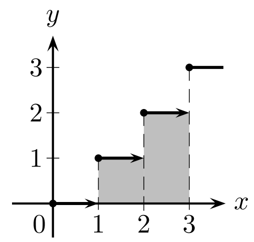
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.6.14 Remarques :

- Le dernier lemme énoncé dans la sous-section précédente garantit que l'intégrale généralisée de f entre a_{k-1} et a_k, donnée dans la définition précédente, existe quel que soit $k = 1, \ldots, n$. La définition précédente fait donc pleinement sens.

- On vérifie sans peine que les propriétés 4.1.10 et 4.3.5, relatives aux fonctions continues dans un intervalle $[a;\, b]$, demeurent valables dans le cas de fonctions continues par morceaux dans $[a;\, b]$.

4.6.15 Exemple : Calculons l'intégrale entre 0 et 3 de la fonction *partie entière* $\mathrm{E}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. À cet effet, commençons par rappeler la définition de cette fonction : $\mathrm{E}(x) = n$, où n est le nombre entier tel que $x - 1 < n \leqslant x$. Notons alors que E est continue par morceaux dans tout intervalle fermé $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Ainsi :



$$\begin{aligned}
\int_0^3 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{r_0\to 0\\ r_0>0}} \lim_{\substack{s_1\to 1\\ s_1<1}} \int_{r_0}^{s_1} 0\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{r_1\to 1\\ r_1>1}} \lim_{\substack{s_2\to 2\\ s_2<2}} \int_{r_1}^{s_2} 1\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{r_2\to 2\\ r_2>2}} \lim_{\substack{s_3\to 3\\ s_3<3}} \int_{r_2}^{s_3} 2\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{r_0\to 0\\ r_0>0}} \lim_{\substack{s_1\to 1\\ s_1<1}} 0\Big|_{r_0}^{s_1} + \lim_{\substack{r_1\to 1\\ r_1>1}} \lim_{\substack{s_2\to 2\\ s_2<2}} x\Big|_{r_1}^{s_2} + \lim_{\substack{r_2\to 2\\ r_2>2}} \lim_{\substack{s_3\to 3\\ s_3<3}} 2\,x\Big|_{r_2}^{s_3} \\
&= \lim_{\substack{r_0\to 0\\ r_0>0}} \lim_{\substack{s_1\to 1\\ s_1<1}} 0 + \lim_{\substack{r_1\to 1\\ r_1>1}} \lim_{\substack{s_2\to 2\\ s_2<2}} (s_2 - r_1) + \lim_{\substack{r_2\to 2\\ r_2>2}} \lim_{\substack{s_3\to 3\\ s_3<3}} 2\,(s_3 - r_2) \\
&= 0 + (2-1) + 2\,(3-2) \;=\; 0 + 1 + 2 \;=\; 3\,.
\end{aligned}$$

4.6.16 Remarque : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

- Quelle que soit la subdivision $\sigma_n = (a_0;\, a_1;\, \dots\, ;\, a_n)$ de $[a;\, b]$ (où $a_0 = a$ et $a_n = b$), la somme de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ de f associée à σ_n peut être vue comme l'intégrale entre a et b d'une fonction g_1, qui est continue par morceaux dans $[a;\, b]$ et qui a la propriété d'être constante dans chaque intervalle $]a_{k-1}\,;\, a_k[$, où $k = 1, \dots, n$. Par définition de $\underline{S}_{\sigma_n}$, $g_1(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Par conséquent :

$$\underline{S}_{\sigma_n} \;=\; \int_a^b g_1(x)\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Quelle que soit la subdivision $\sigma_n = (a_0;\, a_1;\, \dots\, ;\, a_n)$ de $[a;\, b]$ (où $a_0 = a$ et $a_n = b$), la somme de Darboux supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ de f associée à σ_n peut être vue comme l'intégrale entre a et b d'une fonction g_2, qui est continue par morceaux dans $[a;\, b]$ et qui a la propriété d'être constante dans chaque intervalle $]a_{k-1}\,;\, a_k[$, où $k = 1, \dots, n$. Par définition de $\overline{S}_{\sigma_n}$, $g_2(x) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Par conséquent :

$$\overline{S}_{\sigma_n} \;=\; \int_a^b g_2(x)\,\mathrm{d}x \;\geqslant\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.6.17 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, continue par morceaux dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.*

- *La grandeur A, donnée par :*

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

  est une fonction à valeurs réelles, définie dans l'intervalle $[a;\, b]$.

- *La fonction $A\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$, définie au point précédent, est continue dans $[a;\, b]$. De plus, A est dérivable en tout élément $x_0 \in \,]a;\, b[$ où f est continue ; en outre, en un tel élément x_0, $A'(x_0) = f(x_0)$.*

Preuve : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}$) une fonction réelle, continue par morceaux dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Soit aussi la grandeur A, donnée par :

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Le fait que f est continue par morceaux dans $[a;\, b]$ implique l'existence d'un nombre fini $n+1$ d'éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $[a;\, b]$, satisfaisant $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_{k-1} < a_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, tels que f est définie et continue dans $]a_{k-1}\,;\, a_k[$, $k = 1, \ldots, n$. Pour tout $x \in [a;\, b]$, il existe donc un nombre entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n-1$, pour lequel :

$$A(x) \;=\; \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{m-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- De la propriété d'unicité de la limite d'une fonction, ainsi que de la définition même de l'intégrale généralisée d'une fonction sur un intervalle semi-ouvert et borné, ou ouvert et borné, on déduit que, pour chaque $x \in [a;\, b]$, A prend une et une unique valeur réelle. A peut donc être vue comme une fonction à valeurs réelles ; elle est définie dans $[a;\, b]$, vu que $A(x)$ existe pour tout $x \in [a;\, b]$.
- Considérons la dernière expression de $A(x)$ obtenue ci-dessus. En se référant à la proposition 4.2.6 et au lemme 4.6.10, et en se souvenant que la dérivée d'une constante est nulle, on peut écrire, pour tout $x \in \,]a_{m-1}\,;\, a_m[$:

$$\begin{aligned} A'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{m-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a_{m-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; 0 + f(x)\,. \end{aligned}$$

  Le fait que le calcul est valable pour tout $m = 1, \ldots, n-1$ permet d'affirmer que $A'(x_0) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in \,]a;\, b[$ où f est continue. A est donc dérivable en tout $x_0 \in \,]a;\, b[$ où f est continue. Par conséquent, A est continue en tout $x_0 \in \,]a;\, b[$ où f est continue. Montrons, pour terminer, que A est continue également en tout $x_0 \in \{a_0;\, a_1;\, \ldots\,;\, a_n\}$. À cet effet, considérons $x_0 = a_m$, où m est un certain nombre entier compris entre 1 et $n-1$ $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$. En se référant aux différentes propriétés de l'intégrale, ainsi qu'à celles de l'intégrale généralisée sur un intervalle borné (ouvert ou semi-ouvert), on peut écrire, d'une part :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} A(x) &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{m-1}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} A(x) &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_m}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_m}^{a_m} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t + 0\,.\end{aligned}$$

Les deux limites sont égales ; en outre, elles existent et ne sont pas infinies, vu que f est continue par morceaux dans $[a;\, b]$. A est donc continue en $x_0 = a_m$. Le fait que le raisonnement est valable pour tout $m = 1,\, \ldots\,, n-1$ permet alors d'affirmer que A est continue en tout $x_0 \in \{a_1;\, \ldots\,;\, a_{n-1}\}$. Noter enfin que A est évidemment continue à droite en $a_0 = a$ et continue à gauche en $a_n = b$ (*cf.* proposition 4.2.6). En résumé, A est continue dans $[a;\, b]$. ☐

4.6.3 Intégrales généralisées sur un intervalle non borné

4.6.18 Définition : • Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé et non borné $[a;\, \infty[$, où a est un nombre réel. On appelle *intégrale généralisée de f entre a et ∞* (ou *intégrale généralisée de f sur* $[a;\, \infty[$) la quantité :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si la limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞, ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé et non borné $]-\infty;\, b]$, où b est un nombre réel. On appelle *intégrale généralisée de f entre $-\infty$ et b* (ou *intégrale généralisée de f sur* $]-\infty;\, b]$) la quantité :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si la limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞, ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert et non borné $]a; \infty[$, où a est un nombre réel. On appelle *intégrale généralisée de f entre a et ∞* (ou *intégrale généralisée de f sur* $]a; \infty[$) la quantité :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r \to a \\ r > a}} \lim_{b \to \infty} \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

  Si la double limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la double limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞, ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert et non borné $]-\infty; b[$, où b est un nombre réel. On appelle *intégrale généralisée de f entre $-\infty$ et b* (ou *intégrale généralisée de f sur* $]-\infty; b[$) la quantité :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \lim_{\substack{s \to b \\ s < b}} \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

  Si la double limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la double limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞, ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans tout $\mathbb{R}$. On appelle *intégrale généralisée de f entre $-\infty$ et ∞* (ou *intégrale généralisée de f sur* $]-\infty; \infty[$ ou encore *intégrale généralisée de f sur* $\mathbb{R}$) la quantité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

  Si la double limite de l'intégrale est égale à un nombre réel, on dit que l'intégrale généralisée *converge* (ou est *convergente*) ; si la double limite de l'intégrale n'existe pas ou si elle est égale à ∞, ou à $-\infty$, on dit que l'intégrale généralisée *diverge* (ou est *divergente*).

4.6.19 Notation : L'intégrale généralisée de f entre $-\infty$ et ∞, évoquée dans la définition précédente, peut aussi se noter :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.6.20 Propriétés : Les intégrales généralisées sur un intervalle non borné possèdent des propriétés similaires à celles des intégrales généralisées sur un intervalle borné. Ces propriétés ne sont pas exposées ici, car elles sont, en fait, données implicitement dans les propriétés 4.6.3 : si l'on remplace b par ∞ (respectivement a par $-\infty$) dans les propriétés 4.6.3, on obtient, en effet, les propriétés relatives aux intégrales généralisées sur un intervalle non borné. Relevons simplement que les trois dernières intégrales généralisées de la définition précédente peuvent être récrites comme suit :

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{r\to a\\ r>a}} \int_r^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où $c \in \left]a;\,\infty\right[$,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\substack{s\to b\\ s<b}} \int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

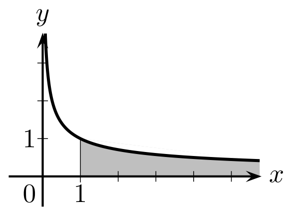
où $c \in \left]-\infty;\,b\right[$,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

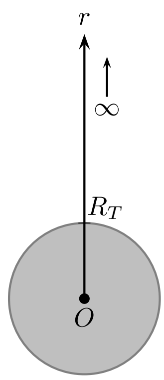
où c est un nombre réel.

4.6.21 Exemple : L'intégrale généralisée entre 1 et ∞ de la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, diverge ; en effet :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;&=\; \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^b \\ &=\; \lim_{b\to\infty}\Big(2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}\Big) \;=\; \infty\,.\end{aligned}$$



4.6.22 Illustration : Considérons la planète Terre. Représentons-la par une sphère de centre C et de rayon $R_\mathrm{T} \approx 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Plaçons un axe Or dont l'origine O coïncide avec C. Selon la loi de la gravitation de Newton, un objet de masse m situé sur Or à une distance $r \geqslant R_\mathrm{T}$ du centre C (et donc de l'origine O) subit une force de gravitation $\vec{F}_\mathrm{G}$ donnée par :



$$\vec{F}_\mathrm{G} \;=\; -G\,\frac{M_\mathrm{T}\,m}{r^2}\,\vec{u}_r\,,$$

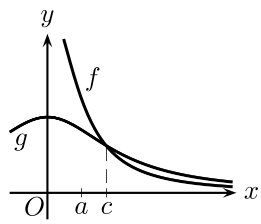
où $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ est la constante de gravitation universelle, $M_\mathrm{T} \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ la masse de la Terre et $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire (*i.e.* un vecteur de norme égale à 1) ayant la même direction et le même sens que l'axe Or. Par définition de la notion de travail d'une force, le travail de la force de gravitation $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, donnée ci-dessus, entre R_{T} et l'infini est :

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_{\mathrm{G}}} &= \int_{R_{\mathrm{T}}}^{\infty} \vec{F}_{\mathrm{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_{\mathrm{T}}}^{\infty} \left(-G \, \frac{M_{\mathrm{T}} \, m}{r^2} \, \vec{u}_r \right) \cdot \left(\vec{u}_r \, \mathrm{d}r \right) = \int_{R_{\mathrm{T}}}^{\infty} -G \, \frac{M_{\mathrm{T}} \, m}{r^2} \, \mathrm{d}r \\ &= -G \, M_{\mathrm{T}} \, m \int_{R_{\mathrm{T}}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r = -G \, M_{\mathrm{T}} \, m \lim_{b \to \infty} \int_{R_{\mathrm{T}}}^{b} \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r \\ &= -G \, M_{\mathrm{T}} \, m \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_{\mathrm{T}}}^{b} = G \, M_{\mathrm{T}} \, m \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{r} \right]_{R_{\mathrm{T}}}^{b} \\ &= G \, M_{\mathrm{T}} \, m \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{R_{\mathrm{T}}} \right) = -\frac{G \, M_{\mathrm{T}} \, m}{R_{\mathrm{T}}} \, . \end{aligned}$$

Pour amener un objet de masse m de la surface de la Terre à l'infini, il est alors nécessaire d'appliquer une force opposée à $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, dont le travail entre R_{T} et ∞ est au moins égal à l'opposé de $W_{\vec{F}_{\mathrm{G}}}$. Comme $|W_{\vec{F}_{\mathrm{G}}}|$ n'est pas infini, le travail de la force à appliquer n'a pas besoin d'être infini. En résumé, il n'est pas nécessaire de fournir une énergie infinie pour amener un objet de masse m (finie) de la surface de la Terre à un point infiniment loin de la Terre.

4.6.23 Proposition : *Soient $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies et continues dans un intervalle fermé et non borné $[a; \infty[$ (respectivement $]-\infty; b]$), où a (respectivement b) est un nombre réel. Supposons qu'il existe un nombre réel $c \in [a; \infty[$ (respectivement $c \in]-\infty; b]$) tel que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [c; \infty[$ (respectivement $x \in]-\infty; c]$).*

- *Si l'intégrale généralisée de g entre a et ∞ (respectivement entre $-\infty$ et b) converge, alors l'intégrale généralisée de f entre a et ∞ (respectivement entre $-\infty$ et b) converge.*
- *Si l'intégrale généralisée de f entre a et ∞ (respectivement entre $-\infty$ et b) diverge, alors l'intégrale généralisée de g entre a et ∞ (respectivement entre $-\infty$ et b) diverge.*



Ce résultat est connu sous le nom de ***critère de comparaison*** *relatif aux intégrales généralisées sur un intervalle fermé et non borné.*

Preuve : Pour démontrer ce résultat, il suffit de reprendre la preuve de la proposition 4.6.6 et de remplacer b par ∞. □

4.6.24 Remarques :

- Les conclusions de la proposition précédente demeurent valables si, dans l'énoncé, la condition $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [c; \infty[$ (respectivement $x \in]-\infty; c]$) est remplacée par l'hypothèse $0 \geqslant f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [c; \infty[$ (respectivement $x \in]-\infty; c]$).
- Les conclusions de la proposition précédente, tout comme celles de la proposition 4.6.6, du reste, demeurent valables si f ou g, ou encore f et g sont continues

par morceaux dans les intervalles mentionnés. Noter qu'une fonction est considérée comme continue par morceaux :

- ◇ dans un intervalle de la forme $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$, $]a;\, b[$), a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, si elle est continue par morceaux dans n'importe quel intervalle fermé et borné contenu dans $[a;\, b[$ (respectivement $]a;\, b]$, $]a;\, b[$) ;
- ◇ dans un intervalle de la forme $[a;\, \infty[$ (respectivement $]a;\, \infty[$, $]-\infty;\, b]$ ou $]-\infty;\, b[$), a (respectivement b) étant un nombre réel, si elle est continue par morceaux dans n'importe quel intervalle fermé et borné contenu dans $[a;\, \infty[$ (respectivement $]a;\, \infty[$, $]-\infty;\, b]$ ou $]-\infty;\, b[$).

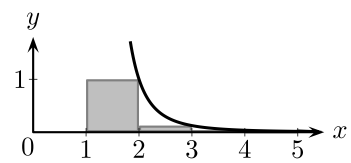
4.6.25 Exemple : Montrons que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge. À cet effet, considérons la fonction partie entière E ; rappelons que $\mathrm{E}(x)$ est le nombre entier tel que $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$. Pour tout $x > 1$:

$$x - 1 < \mathrm{E}(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^3 < \big(\mathrm{E}(x)\big)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\big(\mathrm{E}(x)\big)^3} < \frac{1}{(x-1)^3}\,.$$

Or, l'intégrale généralisée entre 2 et ∞ de la fonction donnée par $\frac{1}{(x-1)^3}$ converge :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,(x-1)^2}\right]_2^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,(b-1)^2} + \frac{1}{2\,(2-1)^2}\right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Le critère de comparaison relatif aux intégrales généralisées sur un intervalle non borné, ainsi que le deuxième point de la remarque précédente, permettent donc d'affirmer que l'intégrale généralisée entre 2 et ∞ de la fonction donnée par $\frac{1}{(\mathrm{E}(x))^3}$ converge. Par ailleurs :



$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\big(\mathrm{E}(x)\big)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^3}\cdot 1 + \frac{1}{3^3}\cdot 1 + \frac{1}{4^3}\cdot 1 + \ldots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right) - 1\,.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \int_2^{\infty} \frac{1}{\big(\mathrm{E}(x)\big)^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

En résumé, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

4.6.26 Remarque : Du critère de comparaison relatif aux intégrales généralisées sur un intervalle non borné peut être déduit un autre critère de convergence, dont l'énoncé est donné dans le corollaire suivant.

4.6.27 Corollaire : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé et non borné $[a; \infty[$, où a est un nombre réel. Supposons qu'il existe un nombre réel β pour lequel :*

$$\lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = \ell \neq 0\,,$$

où ℓ est un nombre réel non nul. Alors l'intégrale généralisée de f entre a et b :

- *converge si $\beta > 1$,*
- *diverge si $\beta \leqslant 1$.*

Preuve : Pour démontrer ce résultat, il suffit de reprendre la preuve du corollaire 4.6.9 et d'observer que l'intégrale généralisée entre 0 et ∞ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\beta}$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$. □

4.6.4 Test de l'intégrale

Le raisonnement mené dans le dernier exemple de la sous-section précédente n'est pas spécifique à la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; il peut être généralisé à toute série dont les termes forment une suite décroissante de nombres positifs.

4.6.28 Proposition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (i.e. tous les termes de la suite sont positifs), et telle que $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4 \geqslant \dots$ (i.e. la suite est décroissante). Supposons qu'il existe une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie, continue et décroissante dans l'intervalle $[1; \infty[$, et telle que $f(n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

- *si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge aussi ;*
- *si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge aussi.*

Ce résultat est connu sous le nom de ***test de l'intégrale****.*

Preuve : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs, décroissante, et f une fonction réelle définie, continue et décroissante dans l'intervalle $[1; \infty[$, et telle que $f(n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction *partie entière* E ; rappelons que $\mathrm{E}(x)$ est le nombre entier satisfaisant la double inégalité $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. De fait, d'une part $f(x-1) \geqslant f\big(\mathrm{E}(x)\big)$ pour tout $x \in [2; \infty[$ (vu que $x - 1 < \mathrm{E}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in [2; \infty[$), et d'autre part $f\big(\mathrm{E}(x)\big) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in [1; \infty[$ (vu que $\mathrm{E}(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in [1; \infty[$). Étudions séparément les conséquences de chacune de ces deux inégalités.

- Pour tout $x \in [1; \infty[$, $f(x) \leqslant f\big(\mathrm{E}(x)\big)$. Ainsi :

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^\infty f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{2} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_2^{3} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_3^{4} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot 1 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,,
\end{aligned}$$

vu que $f(n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,.$$

- Pour tout $x \in [2;\infty[$, $f\big(\mathrm{E}(x)\big) \leqslant f(x-1)$. Ainsi :

$$\int_2^{\infty} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^{\infty} f(x-1)\,\mathrm{d}x\,.$$

Or, d'une part (selon ce qui a été établi au point précédent) :

$$\int_2^{\infty} f\big(\mathrm{E}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1\,,$$

d'autre part, en appliquant le changement de variable $\tilde{x} = x - 1$, pour lequel $\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}\tilde{x} = \mathrm{d}x$:

$$\int_2^{\infty} f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 \leqslant \int_1^{\infty} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant u_1 + \int_1^{\infty} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,;$$

autrement écrit (en rebaptisant $\tilde{x}$ par x) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant u_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En résumé :

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant u_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

où $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_1^{\infty} f(\mathrm{E}(x))\,\mathrm{d}x$. Ainsi, selon le critère de comparaison relatif aux intégrales généralisées sur un intervalle non borné, et selon la remarque 4.6.24 :

- la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge si l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge ;
- la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. $\square$

4.6.29 Remarque : Lorsqu'il est applicable, le test de l'intégrale permet de dire si une série numérique converge ou diverge ; il ne permet cependant pas, en général, de trouver la valeur de la série.

4.6.30 Exemples :

1. La série harmonique, *i.e.* la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (*cf.* premier des exemples 1.6.30, sous-section 1.6.4 du chapitre 1), diverge ; en effet :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln\left|x\right|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln|b| - \ln|1| \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln(1) = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - 0 = \infty\,.\end{aligned}$$

2. La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (*cf.* troisième des exemples 1.6.30, sous-section 1.6.4 du chapitre 1) converge ; en effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

et :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + \frac{1}{1} = 1\,.$$

Chapitre 5

Développements limités et illimités

Les fonctions usuelles (*cf.* annexe C) ne se manient pas toutes avec la même aisance ; certaines sont plus difficiles à traiter que d'autres, notamment lorsqu'elles sont combinées (*i.e.* multipliées, divisées, composées, etc.) entre elles. Les plus faciles d'utilisation sont indéniablement les polynômes ; et pour cause :

- la somme, la différence et le produit de plusieurs polynômes donnent un polynôme ; le quotient de deux polynômes peut être décomposé en une somme d'éléments simples ;
- grâce aux techniques de factorisation et de mise en évidence, le calcul de limites des fonctions polynomiales et rationnelles est particulièrement simple ;
- que ce soit le calcul de dérivation ou d'intégration, aucun ne présente une difficulté particulière dans le cas des fonctions polynomiales.

Les fonctions polynomiales présentent tellement d'avantages qu'il serait tentant d'essayer d'écrire d'autres fonctions, telles que exp, log, sin, cos, etc. sous la forme de polynômes. N'y aurait-il pas moyen d'y parvenir, d'une quelconque manière ?

5.1 Point de contact

Dans la section 3.8.1 du chapitre 3, il a été vu que toute fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in D$ et dérivable en x_0, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)\,,$$

où R est une fonction de x satisfaisant la propriété suivante :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} \;=\; 0\,.$$

Dans le cas où x est « suffisamment proche » de x_0 pour que $R(x)$ puisse être négligé, l'égalité ci-dessus peut être récrite sous la forme d'une *égalité approximative* :

$$f(x) \;\approx\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

ou, en écrivant a à la place de x_0, afin d'alléger quelque peu la notation :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)\,.$$

Une telle relation est appelée *approximation linéaire* ; le qualificatif *linéaire* vient du fait que la quantité $f(a) + f'(a)(x-a)$ est l'expression d'une fonction polynomiale de degré 1, dont le graphe, dans $\mathbb{R}^2$, est une droite. Cette fonction polynomiale, que l'on notera P_1^a, a comme particularité de prendre la même valeur que la fonction f en a et d'avoir une dérivée égale à celle de f en a.

5.1.1 Définition : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un certain intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que a est un *point contact d'ordre p de f et g* si :

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)\,, \qquad \text{pour tout } k = 0, 1, \ldots, p\,,$$

où $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ sont les dérivées d'ordre k de f et g respectivement ; par convention $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.

Dans l'approximation linéaire, évoquée précédemment, le point a est un point de contact d'ordre 1 (au moins) des fonctions f et P_1^a, vu que :

$$P_1^a(a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad {P_1^a}'(a) = \frac{\mathrm{d}P_1^a}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a)\,.$$

5.2 Développements de Taylor et de MacLaurin

Reprenons les fonctions f et P_1^a, introduites dans la sous-section précédente. Comme P_1^a est une fonction polynomiale de degré 1, elle admet pour seconde dérivée la fonction identiquement nulle. De fait, $P^{a\,\prime\prime}(a) \neq f''(a)$, à moins que la seconde dérivée de f s'annule en a (à supposer qu'elle existe en a) ; ce qui n'est en général pas le cas. Le point a ne peut donc, en général, pas être un point de contact d'ordre supérieur à 1. Pour qu'il puisse l'être, il est nécessaire d'augmenter le degré du polynôme donné : afin que a soit un point de contact d'ordre 2 au moins, il est nécessaire d'avoir un polynôme de degré 2 au moins ; et plus généralement, pour que a soit un point de contact d'ordre n au moins, il est nécessaire d'avoir un polynôme de degré n.

Soit P_n^a une fonction polynomiale de degré n. Notons-la sous la forme :

$$P_n^a(x) = b_0 + b_1\,(x-a) + b_2\,(x-a)^2 + \ldots + b_n\,(x-a)^n\,,$$

où $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des coefficients réels et $b_n \neq 0$. Une telle expression est bien un polynôme de degré n ; en effet, si l'on développe les parenthèses et que l'on regroupe de manière judicieuse les différents termes, on obtient $P_n^a(x) = c_0 + c_1\,x + \ldots + c_n\,x^n$, où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des coefficients réels et $c_n \neq 0$. Supposons que f est n fois dérivable en a et que a est un point de contact d'ordre n de f et P_n^a. Alors $f^{(k)}(a) = P_n^{a\,(k)}(a)$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$. Or :

$$\begin{aligned}
P_n^{a\,\prime}(x) &= b_1 + 2\,b_2\,(x-a) + \ldots + b_n\,n\,(x-a)^{n-1}\,,\\
P_n^{a\,\prime\prime}(x) &= 2\,b_2 + 3\cdot 2\,b_3\,(x-a) + \ldots + b_n\,n\,(n-1)(x-a)^{n-2}\,,\\
P_n^{a\,\prime\prime\prime}(x) &= 3\cdot 2\,b_3 + 4\cdot 3\cdot 2\,b_4\,(x-a) + \ldots + b_n\,n\,(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}\,,\\
\vdots\quad & \vdots \quad\quad \vdots\\
P_n^{a\,(n)}(x) &= n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\,b_n\,.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f(a) &= P_n^a(a) = b_0\,,\\
f'(a) &= P_n^{a\,\prime}(a) = b_1\,,\\
f''(a) &= P_n^{a\,\prime\prime}(a) = 2\,b_2\,,\\
f'''(a) &= P_n^{a\,\prime\prime\prime}(a) = 3\cdot 2\,b_3\,,\\
\vdots\quad & \vdots \quad\quad \vdots\\
f^{(n)}(a) &= P_n^{a\,(n)}(a) = n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\,b_n\,,
\end{aligned}$$

d'où, en introduisant la notation $k! = k\,(k-1)(k-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$, où k est un nombre naturel ($k!$ se lisant k *factorielle*) :

$$\begin{aligned}
b_0 &= f(a)\,,\\
b_1 &= f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}\,,\\
b_2 &= \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}\,,\\
b_3 &= \frac{f'''(a)}{6} = \frac{f'''(a)}{3!}\,,\\
\vdots\quad & \vdots \quad\quad \vdots\\
b_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.
\end{aligned}$$

5.2.1 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et n fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soit aussi a un élément de I. On appelle *développement de Taylor*[I] *d'ordre n de f autour de a* le polynôme P_n^a donné par :

$$P_n^a(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

I. Brook Taylor était un mathématicien anglais, né en 1685 à Edmonton (qui est aujourd'hui un quartier de Londres) et mort en 1731 à Londres.

Dans le cas où $a = 0$, on parle de *développement de MacLaurin*[II] *d'ordre* n :

$$P_n^0(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\,.$$

On le note volontiers $P_n(x)$, au lieu de $P_n^0(x)$.

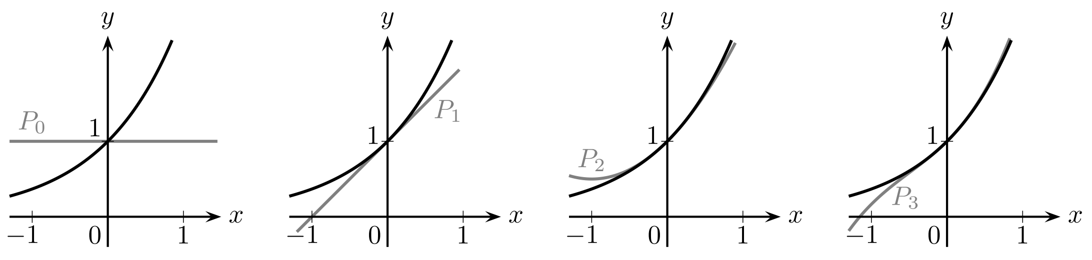
5.2.2 Remarques : Reprenons les notations de la définition précédente.

- Les développements de Taylor et de MacLaurin peuvent être écrits de manière compacte, à l'aide du signe $\sum$:

$$P_n^a(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,,$$

  avec, par convention, $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $0! = 1$.
- Par définition de P_n^a, le point $a \in I$ est un point de contact d'ordre n de f et P_n^a. De fait, plus l'ordre du développement de Taylor de la fonction f est élevé, plus l'ordre de a est grand.
  - ◇ Si $n = 0$, a est un point de contact d'ordre 0 ; la fonction f et le polynôme P_0^a ont alors la même valeur en $x = a$, mais pas nécessairement la même *direction*.
  - ◇ Si $n = 1$, a est un point de contact d'ordre 1 ; la fonction f et le polynôme P_1^a ont alors non seulement la même valeur en $x = a$, mais également la même *direction* (grandeur définie par la dérivée en a).
  - ◇ Si $n = 2$, a est un point de contact d'ordre 2 ; la fonction f et le polynôme P_2^a ont alors non seulement la même valeur et la même direction en $x = a$, mais également la même *courbure* (grandeur définie à partir des dérivées première et seconde en a).
  - ◇ Etc.

  Les quatre diagrammes ci-dessous illustrent la situation dans le cas où $f = \exp$ et $a = 0$. En plus du graphe de f, on trouve le graphe de P_0 dans le premier diagramme depuis la gauche, celui de P_1 dans le deuxième, celui de P_2 dans le troisième et enfin celui de P_3 dans le dernier.



II. Colin MacLaurin était un mathématicien écossais, né en 1698 à Kilmodan (dans la région de l'Argyll, en Écosse) et mort en 1746 à Edimbourg. Taylor et MacLaurin ont tous les deux cherché à écrire les fonctions sous forme de polynômes ; alors que MacLaurin ne considérait que des développements autour de 0, Taylor s'intéressait à des développements autour d'un nombre réel a quelconque.

5.2.3 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et n fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$. Soient aussi a un élément de I et P_n^a le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a. On appelle *reste d'ordre* n associé à P_n^a la quantité R_n^a telle que :

$$f(x) \;=\; P_n^a(x) + R_n^a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad R_n^a(x) \;=\; f(x) - P_n^a(x)\,, \quad \text{où } x \in I\,.$$

Dans le cas où $a = 0$, on note volontiers R_n, au lieu de R_n^0.

5.2.4 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et $n+1$ fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$. Soient aussi a un élément de I et P_n^a le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a. Alors, à tout élément $x \in I$ peut être associé un nombre réel $\lambda \in \,]0;\,1[$ pour lequel :*

$$f(x) \;=\; P_n^a(x) + R_n^a(x)\,, \qquad \text{avec :} \qquad R_n^a(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}\big(a + \lambda\,(x-a)\big)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}\big(a + \lambda\,(x-a)\big)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

Le reste R_n^a, tel qu'exprimé ici, est appelé reste de Lagrange (d'ordre n) associé à P_n^a.

Preuve : Soit f une fonction réelle, définie et $n+1$ fois dérivable dans un intervalle ouvert I ; soient aussi a un élément de I et P_a le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a. Deux situations peuvent être distinguées.

- $x = a$: dans ce cas, $P_n^a(a) = f(a)$ et donc $R_n^a(a) = 0$. Par ailleurs, quel que soit le nombre réel $\lambda \in \,]0;\,1[$:

$$\frac{f^{(n+1)}\big(a + \lambda\,(a-a)\big)}{(n+1)!}\,(a-a)^{n+1} \;=\; 0\,.$$

  Il existe donc bien un nombre réel $\lambda \in \,]0;\,1[$ (ce nombre peut être n'importe quel élément de l'intervalle) pour lequel :

$$R_n^a(a) \;=\; \frac{f^{(n+1)}\big(a + \lambda\,(a-a)\big)}{(n+1)!}\,(a-a)^{n+1} \;=\; 0\,.$$

- $x \in I \setminus \{a\}$: dans ce cas, $P_n^a(x)$ n'est en général pas égal à $f(x)$. Soit alors la fonction $g \colon I \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(u) \;=\; f(u) - P_n^a(u) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(u-a)^{n+1}\,.$$

  De par sa construction, g est une fonction $n+1$ fois dérivable dans I. De plus :

$$g(a) \;=\; g'(a) \;=\; g''(a) \;=\; \ldots \;=\; g^{(n)}(a) \;=\; 0 \;=\; g(x)\,.$$

En effet :

$$g(a) \;=\; f(a) - P_n^a(a) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(a-a)^{n+1} \;=\; f(a) - P_n^a(a) \;=\; 0\,,$$

vu que $P_n^a(a) = f(a)$. Aussi :

$$g'(u) \;=\; f'(u) - {P_n^a}'(u) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)(u-a)^n\,;$$

d'où :

$$g'(a) \;=\; f'(a) - {P_n^a}'(a) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)(a-a)^n \;=\; 0\,,$$

vu que ${P_n^a}'(a) = f'(a)$.

- ◇ La fonction g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle dans l'intervalle fermé délimité par a et x ; en effet, g étant $n+1$ fois dérivable dans I, elle est continue dans l'intervalle fermé délimité par a et x et dérivable dans l'intervalle ouvert délimité a et x ; de plus, $g(a) = g(x) = 0$. Selon le théorème, il existe donc un nombre réel c_1 compris strictement entre a et x tel que $g'(c_1) = 0$.
- ◇ La fonction g' satisfait les hypothèses du théorème de Rolle dans l'intervalle fermé délimité par a et c_1 ; en effet, g étant $n+1$ fois dérivable dans I, g' est continue dans l'intervalle fermé délimité par a et c_1 et dérivable dans l'intervalle ouvert délimité par a et c_1 ; de plus, $g'(a) = g'(c_1) = 0$. Selon le théorème, il existe donc un nombre réel c_2 compris strictement entre a et c_1, et donc compris strictement entre a et x, tel que $g''(c_2) = (g')'(c_2) = 0$.

$$\vdots$$

- ◇ La fonction $g^{(n)}$ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle dans l'intervalle fermé délimité par a et c_n, où c_n est un nombre réel compris strictement entre a et x ; en effet, g étant $n+1$ fois dérivable dans I, $g^{(n)}$ est continue dans l'intervalle fermé délimité par a et c_n et dérivable dans l'intervalle ouvert délimité par a et c_n ; de plus, $g^{(n)}(a) = g^{(n)}(c_n) = 0$. Selon le théorème, il existe donc un nombre réel ξ compris strictement entre a et c_n, et donc compris strictement entre a et x, tel que $g^{(n+1)}(\xi) = (g^{(n)})'(\xi) = 0$. Or :

  $$g^{(n+1)}(u) \;=\; f^{(n+1)}(u) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)!\,,$$

  du fait que que ${P_n^a}^{(n+1)}(u) = 0$ (vu que P_n^a est une fonction polynomiale de degré n), et que la $(n+1)$-ième dérivée de $(u-a)^{n+1}$ est :

  $$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}u^{n+1}}\big((u-a)^{n+1}\big) \;=\; (n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \;=\; (n+1)!\,.$$

  Donc :

  $$g^{(n+1)}(\xi) \;=\; f^{(n+1)}(\xi) + \frac{P_n^a(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)! \;=\; 0\,,$$

En résumé, il existe un nombre réel compris strictement entre a et x pour lequel :

$$f^{(n+1)}(\xi) \;=\; \frac{f(x) - P_n^a(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)!\,,$$

i.e. pour lequel :

$$f(x) \;=\; P_n^a(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,.$$

Et comme ξ est compris strictement entre a et x, il peut s'écrire $\xi = a + \lambda\,(x-a)$, avec $\lambda \in \,]0;\,1[\,$. □

5.2.5 Exemples : 1. Écrivons le développement de Taylor P_4^1 d'ordre 4, autour de 1, de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \sqrt{x}$. À cet effet, écrivons les expressions des dérivées d'ordre $0, 1, 2, 3$ et 4 de f et évaluons-les en $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow & f(1) &= 1^{\frac{1}{2}} = 1\,,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} &&\Rightarrow & f'(1) &= \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,,\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{2}} &&\Rightarrow & f''(1) &= -\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\,,\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} &&\Rightarrow & f'''(1) &= \frac{3}{8}\cdot 1^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\,,\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}\,x^{-\frac{7}{2}} &&\Rightarrow & f^{(4)}(1) &= -\frac{15}{16}\cdot 1^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P_4^1(x) &= 1 + \frac{\frac{1}{2}\,(x-1)}{1!} + \frac{-\frac{1}{4}\,(x-1)^2}{2!} + \frac{\frac{3}{8}\,(x-1)^3}{3!} + \frac{-\frac{15}{16}\,(x-1)^4}{4!}\\
&= 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5\,(x-1)^4}{128}\,.
\end{aligned}$$

Écrivons également le reste de Lagrange R_4^1 associé à P_4^1. Pour cela, calculons la dérivée d'ordre 5 de f :

$$f^{(5)}(x) \;=\; \frac{105}{32}\,x^{-\frac{9}{2}} \;=\; \frac{105}{32\,\sqrt{x^9}}\,.$$

Ainsi :

$$R_4^1(x) \;=\; \frac{\frac{105}{32\,\sqrt{\xi^9}}\,(x-1)^5}{5!} \;=\; \frac{7\,(x-1)^5}{256\,\sqrt{\xi^9}}\,,$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre 1 et x ; il peut s'écrire $\xi = 1 + \lambda\,(x-1)$, où $\lambda \in \,]0;\,1[\,$.

2. Écrivons le développement de MacLaurin P_5 d'ordre 5 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \exp(x)$. À cet effet, considérons les dérivées d'ordre $0, 1, 2, 3, 4$ et 5 de f :

$$f(x) \;=\; f'(x) \;=\; f''(x) \;=\; f'''(x) \;=\; f^{(4)}(x) \;=\; f^{(5)}(x) \;=\; \exp(x)\,,$$

et évaluons-les en 0 :

$$f(0) \;=\; f'(0) \;=\; f''(0) \;=\; f'''(0) \;=\; f^{(4)}(0) \;=\; f^{(5)}(0) \;=\; 1\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_5(x) \;&=\; 1 + \frac{1\,(x-0)}{1!} + \frac{1\,(x-0)^2}{2!} + \frac{1\,(x-0)^3}{3!} + \frac{1\,(x-0)^4}{4!} + \frac{1\,(x-0)^5}{5!} \\ &=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\,. \end{aligned}$$

Écrivons également le reste de Lagrange R_5 associé à P_5. À cet effet, remarquons que $f^{(6)}(x) = \exp(x)$. Ainsi :

$$R_5(x) \;=\; \frac{\exp(\xi)\,(x-0)^6}{6!} \;=\; \frac{\exp(\xi)\,x^6}{720}\,,$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre 0 et x ; il peut s'écrire :

$$\xi \;=\; 0 + \lambda\,(x-0) \;=\; \lambda\,x\,, \qquad \text{où } \lambda \in \,]0;\,1[\;.$$

5.2.6 Remarques :

- Pour ne pas alourdir l'écriture, le reste de Lagrange, évoqué dans la proposition précédente, est souvent noté comme dans les deux exemples qui viennent d'être traités, *i.e.* sous la forme :

$$R_n^a(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,,$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre a et x.

- Le nombre réel ξ, mentionné au point précédent, n'est souvent pas du tout évident à trouver. De fait, il est difficile d'estimer le reste $R_n^a(x)$ en un x donné. Il est néanmoins possible de donner, dans un intervalle J fixé qui contient a, une valeur que la différence $\big|f(x) - P_n^a(x)\big|$ ne dépasse jamais. Appelée *erreur maximale commise*, et notée $\mathcal{E}_{\max}$, cette valeur s'obtient en prenant les x et ξ dans l'intervalle $\bar{J}$ qui maximisent $|R_n^a|$, $\bar{J}$ étant le plus petit intervalle fermé contenant J :

$$\mathcal{E}_{\max} \;=\; \max_{x,\xi\in\bar{J}} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \right| \;=\; \max_{x\in\bar{J}} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, \max_{\xi\in\bar{J}} \big|f^{(n+1)}(\xi)\big|\,.$$

Certes, le nombre réel ξ ne peut pas prendre toutes les valeurs possibles de $\bar{J}$, vu qu'il est compris strictement entre a et x ; s'il est considéré ici comme indépendant de x, c'est dans le but de s'assurer que $\mathcal{E}_{\max}$ est bien une valeur qui n'est jamais dépassée. Noter que l'existence de $\mathcal{E}_{\max}$ n'est garantie que si $f^{(n+1)}$ est continue dans $\bar{J}$ (de sorte que $f^{(n+1)}$ atteigne une valeur maximale dans $\bar{J}$).

5.2.7 Exemple : Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \exp(x)$, et considérons son développement de MacLaurin P_5 d'ordre 5, ainsi que son reste de Lagrange R_5 d'ordre 5 (*cf.* deuxième des exemples 5.2.5) :

$$P_5(x) \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \qquad \text{et} \qquad R_5(x) \;=\; \frac{\exp(\xi)\, x^6}{720}\,.$$

Dans l'intervalle $I =]{-1};\, 1[$, l'erreur maximale commise, lorsque f est remplacée par P_5, est :

$$\mathcal{E}_{\max} \;=\; \max_{x\in[-1;\,1]} \frac{|x|^6}{720} \max_{\xi\in[-1;\,1]} \bigl|\exp(\xi)\bigr| \;=\; \frac{1^6}{720}\exp(1) \;=\; \frac{\mathrm{e}}{720} \;\approx\; 0{,}004\,.$$

5.3 Développements limités

5.3.1 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel a (*i.e.* dans un intervalle contenant un intervalle de la forme $]a-\gamma\,;\, a+\gamma[$, où $\gamma > 0$ est un nombre réel), sauf éventuellement en a. On dit que f *admet un développement limité d'ordre* n *autour de* a s'il existe un polynôme en $x - a$, de degré n au plus, noté P_n^a, et une fonction réelle $R_n^a : D \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in D\setminus\{a\}$:

$$f(x) \;=\; P_n^a(x) + R_n^a(x)$$

et :

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^a(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

L'égalité $f(x) = P_n^a(x) + R_n^a(x)$ porte le nom de *développement limité d'ordre* n *de* f *autour de* a ; le polynôme $P_n^a(x)$ est appelé *partie principale* du développement limité et $R_n^a(x)$ le *reste* ; sous sa forme développée, $P_n^a(x)$ s'écrit $P_n^a(x) = b_0 + b_1\,(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ étant $n+1$ coefficients réels.

5.3.2 Propriétés : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a.

- Si f admet un développement limité d'ordre n autour de a, alors nécessairement f admet un développement limité d'ordre m autour de a, où $m = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Si f admet un développement limité d'ordre n autour de a, ce développement limité est unique.
- Si f admet un développement limité d'ordre n autour de 0, *i.e.* si f peut s'écrire, pour tout $x \in D\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; b_0 + b_1\,(x-0) + b_2\,(x-0)^2 + \ldots + b_n\,(x-0)^n + R_n^0(x) \\ &=\; b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)\,, \end{aligned}$$

où $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont $n+1$ coefficients réels et $R_n^0 : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^0(x)}{(x-0)^n} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{R_n^0(x)}{x^n} \;=\; 0\,,$$

alors :

- ◇ tous les coefficients d'indice impair $(b_1, b_3, b_5, \ldots)$ sont nuls si f est paire ;
- ◇ tous les coefficients d'indice pair $(b_0, b_2, b_4, \ldots)$ sont nuls si f est impaire.

Tous ces résultats découlent de la définition même du concept de développement limité. Le détail des raisonnements est présenté à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe E.

5.3.3 Remarques : • Dans la définition du développement limité d'une fonction (*cf.* définition 5.3.1), rien n'indique que f doit nécessairement être définie en a ; selon la définition, f peut très bien admettre un développement limité d'ordre n autour de a sans pour autant être définie en a. Cela étant, si $f(a)$ existe, alors il est admis que $f(a) = b_0$.

- Dire qu'une fonction f est définie en $a \in \mathbb{R}$ et admet un développement limité d'ordre 1 autour de a revient à dire que f est différentiable en a.

5.3.4 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et $n+1$ fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soit aussi a un point dans I. Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a dans I ; ce développement limité s'écrit $f(x) = P_n^a(x) + R_n^a(x)$ pour tout $x \in I$, où P_n^a est le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a et R_n^a le reste de Lagrange associé.*

Preuve : Ce résultat est une conséquence, d'une part, du fait que le reste de Lagrange R_n^a, associé au développement de Taylor P_n^a d'ordre n d'une fonction f autour d'un point a, satisfait la condition :

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n^a(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,,$$

et d'autre part, du fait que le développement limité d'ordre n d'une fonction f autour d'un point a, s'il existe, est unique. □

5.3.5 Remarque : La même notation $P_n^a(x)$ a été utilisée pour désigner d'une part le développement de Taylor d'ordre n (où n est un nombre naturel) d'une fonction f autour d'un point a de l'axe x, et d'autre part la partie principale d'un développement limité d'ordre n autour de a de f. Une telle confusion n'est pas si grave, vu que les deux objets en question n'en sont qu'un seul et même, dès lors que f est n fois dérivable en a.

5.4 Opérations entre développements limités

Tout comme on peut additionner, soustraire, multiplier, diviser ou composer deux fonctions données, on peut envisager les mêmes opérations avec leurs développements limités respectifs. Afin que les résultats aient du sens, il convient d'observer une certaine cohérence quant aux points autour desquels les développements limités sont effectués.

5.4.1 Proposition : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, définies toutes les deux dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a. Supposons que f et g admettent toutes les deux un développement limité d'ordre n autour* *de a. Notons :*

$$f(x) \;=\; P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) \quad (x \in D_1) \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

les développements limités d'ordre n autour de a de f et g, respectivement, $P^a_{f,n}(x)$ et $P^a_{g,n}(x)$ étant les parties principales, $R^a_{f,n}(x)$ et $R^a_{g,n}(x)$ les restes associés. Alors :

- *la fonction $\alpha\, f + \beta\, g$, où α et β sont deux nombres réels, admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$, dont la partie principale, notée $P^a_{\alpha f+\beta g,n}$, est donnée par :*

$$P^a_{\alpha f+\beta g,n}(x) \;=\; \alpha\, P^a_{f,n}(x) + \beta\, P^a_{g,n}(x)\ ;$$

- *la fonction fg admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$, dont la partie principale, notée $P^a_{fg,n}$, s'obtient en effectuant le produit :*

$$P^a_{f,n}(x)\, P^a_{g,n}(x)$$

  et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n ;

- *si $c_0 \neq 0$, où c_0 est le terme constant dans $P^a_{g,n}(x)$ (i.e. $c_0 = \lim_{x\to a} P^a_{g,n}(x)$), la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$ tel que $g(x) \neq 0$, dont la partie principale s'obtient en effectuant une division euclidienne de $P^a_{f,n}(x)$ par $P^a_{g,n}(x)$ selon les puissances croissantes, et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n.*

Gardons les hypothèses sur $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage du nombre réel b_0, sauf éventuellement en b_0, où b_0 est le terme constant dans $P^a_{f,n}(x)$ (i.e. $b_0 = \lim_{x\to a} P^a_{f,n}(x)$). Supposons que g admet un développement limité d'ordre n autour de b_0. Notons :

$$g(x) \;=\; P^{b_0}_{g,n}(x) + R^{b_0}_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

le développement limité d'ordre n de g autour de b_0, $P^{b_0}_{g,n}(x)$ étant la partie principale et $R^{b_0}_{g,n}$ le reste associé. Alors :

- *la fonction $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1$ tel que $f(x) \in D_2$, dont la partie principale s'obtient en composant $P^a_{f,n}(x)$ et $P^{b_0}_{g,n}(x)$, et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n.*

Preuve : Ces résultats découlent de la définition même du concept de développement limité d'une part, et d'autre part du fait que si une fonction admet un développement limité d'ordre n autour d'un point a, le développement en question est unique. Le détail des raisonnements est présenté à la fin du présent ouvrage, dans l'annexe E.

5.4.2 Remarque : La proposition précédente s'adapte sans problème à toute situation dans laquelle le développement limité de f et le développement limité de g ne sont pas du même ordre. Noter alors que, si n est l'ordre du développement de f et m l'ordre du développement de g, les résultats sont des développements limités d'ordre p, où p est le plus petit des deux nombres n et m.

5.4.3 Exemples : 1. Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions données par $f(x) = \exp(x)$ et $g(x) = x^2 + 1$. Cherchons la partie principale du développement limité d'ordre 3 de la fonction $\frac{f}{g}$ autour de 0. À cet effet, écrivons les développements limités d'ordre 3 de f et de g autour de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + R_{f,3}(x)\,, \\ g(x) &= 1 + 0 \cdot x + x^2 + 0 \cdot x^3 + R_{g,3}(x) \;=\; 1 + x^2\,; \end{aligned}$$

effectivement, $R_{g,3}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Effectuons alors la division euclidienne du polynôme $1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3$ par le polynôme $1+x^2$ suivant l'ordre des puissances croissantes, et arrêtons-nous lorsque le résultat est un polynôme de degré 3 :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 + x & +\frac{1}{2}\,x^2 & +\frac{1}{6}\,x^3 & & & & 1 + x^2 \\ \cline{7-7}
-(1 & + \; x^2) & & & & & 1 + x - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{5}{6}\,x^3 \\ \cline{1-3}
x & -\frac{1}{2}\,x^2 & +\frac{1}{6}\,x^3 & & & & \\
-(x & & + \; x^3) & & & & \\ \cline{1-3}
 & -\frac{1}{2}\,x^2 & -\frac{5}{6}\,x^3 & & & & \\
 & -(\,-\frac{1}{2}\,x^2 & & -\frac{1}{2}\,x^4) & & & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{5}{6}\,x^3 & +\frac{1}{2}\,x^4 & & & \\
 & & -(\,-\frac{5}{6}\,x^3 & & -\frac{5}{6}\,x^5) & & \\ \cline{3-5}
 & & & +\frac{1}{2}\,x^4 & +\frac{5}{6}\,x^5 & &
\end{array}$$

Ainsi, la partie principale $P_{f/g,3}$ du développement limité d'ordre 3 de la fonction $\frac{f}{g}$ autour de 0 s'écrit :

$$P_{f/g,3}(x) \;=\; 1 + x - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{5}{6}\,x^3\,.$$

2. Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions données par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \exp(x)$. Cherchons la partie principale du développement limité d'ordre 3 de la fonction $g \circ f$, donnée par $\exp\big(\sin(x)\big)$, autour de 0. À cet effet, écrivons les développements limités d'ordre 3 de f et de g autour de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 + R_{f,3}(x) \\ &= x - \frac{1}{6}\,x^3 + R_{f,3}(x)\,, \\ g(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + R_{g,3}(x)\,; \end{aligned}$$

si g a été développée autour de 0, c'est parce que $f(0) = \sin(0) = 0$. Explicitons alors $P_{g,3}\big(P_{f,3}(x)\big)$, où $P_{f,3}(x)$ et $P_{g,3}(x)$ sont les parties principales des développements limités d'ordre 3 de f et de g, respectivement, autour de 0 :

$$\begin{aligned}
P_{g,3}\big(P_{f,3}(x)\big) &= 1 + P_{f,3}(x) + \frac{1}{2}\,\big(P_{f,3}(x)\big)^2 + \frac{1}{6}\,\big(P_{f,3}(x)\big)^3 \\
&= 1 + \left(x - \frac{1}{6}\,x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\,x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}\,x^3\right)^3 \\
&= 1 + \left(x - \frac{1}{6}\,x^3\right) + \frac{1}{2}\big(x + \ldots\big)^2 + \frac{1}{6}\big(x + \ldots\big)^3 \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^3}{6} + \ldots \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \ldots\,,
\end{aligned}$$

où $\ldots$ donnent lieu ou désignent une somme de termes proportionnels à x^m, où $m \geqslant 4$. Ainsi, la partie principale $P_{g\circ f,\,3}$ du développement limité d'ordre 3 de la fonction $g \circ f$ autour de 0 s'écrit :

$$P_{g\circ f,3}(x) \;=\; 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2\,.$$

5.5 Applications des développements limités

5.5.1 Calcul de limites

Le développement limité d'une fonction est un outil qui s'avère particulièrement puissant pour calculer des limites. Les exemples qui suivent permettent de s'en convaincre.

5.5.1 Exemples : 1. Cherchons la limite de $\frac{\ln(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1. À cet effet, écrivons le développement limité d'ordre 1 de la fonction ln autour de 1 :

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \ln(1) + \frac{\ln'(1)}{1!}\,(x-1) + R_1^1(x) \\
&= 0 + \frac{\frac{1}{1}}{1!}\,(x-1) + R_1^1(x) \;=\; (x-1) + R_1^1(x)\,,
\end{aligned}$$

où $R_1^1(x)$ est le reste associé à la partie principale $P_1(x) = (x-1)$ du développement limité en question. Alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1) + R_1^1(x)}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\big(1 + \frac{R_1^1(x)}{x-1}\big)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\left(1 + \frac{R_1^1(x)}{x-1}\right) \;=\; 1\,,
\end{aligned}$$

du fait que :

$$\lim_{x\to 1}\frac{R_1^1(x)}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln''(\xi)}{2!}\,(x-1)^2}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{\xi^2}\,(x-1)}{2} \;=\; 0\,,$$

ξ étant un nombre réel compris strictement entre 1 et x.

2. Cherchons la limite de $\frac{\cosh(x)-1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0. À cet effet, écrivons le développement limité d'ordre 2 de la fonction cosinus hyperbolique (cosh) autour de 0 ; comme $\cosh(x)=\frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)$, alors, selon les premier et quatrième points de la proposition 5.4.1 :

$$\begin{aligned}
\cosh(x) \;&=\; \frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)\\
&=\; \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{1}{2}\,x^2+R_{\exp,2}(x)+1+(-x)+\frac{1}{2}\,(-x)^2+R_{\exp,2}(-x)\right)\\
&=\; \frac{1}{2}\big(2+x^2+R_{\exp,2}(x)+R_{\exp,2}(-x)\big) \;=\; 1+\frac{1}{2}\,x^2+R_{\cosh,2}(x)\,,
\end{aligned}$$

où $R_{\cosh,2}(x)=\frac{1}{2}\big(R_{\exp,2}(x)+R_{\exp,2}(-x)\big)$ est le reste d'ordre 2 associé à la partie principale $P_{\cosh,2}(x)=1+\frac{1}{2}\,x^2$ du développement limité d'ordre 2 de cosh autour de 0. Alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-1}{x^2} \;&=\; \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}\,x^2+R_{\cosh,2}(x)-1}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\,x^2+R_{\cosh,2}(x)}{x^2}\\
&=\; \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{R_{\cosh,2}(x)}{x^2}\right)}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{R_{\cosh,2}(x)}{x^2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

du fait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_{\cosh,2}(x)}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cosh'''(\xi)}{3!}\,x^3}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\xi)\,x}{6} \;=\; 0\,,$$

ξ étant un nombre réel compris strictement entre 0 et x.

5.5.2 Remarque : Comme l'illustrent les exemples précédents, il convient, lors du calcul d'une limite, de considérer des développements limités autour du même point a que celui vers lequel tend x (dans la limite en question).

5.5.2 Approximations

Les développements de Taylor peuvent se révéler utiles pour calculer des valeurs numériques approchées de nombres irrationnels. Pour s'en rendre compte, considérons un nombre irrationnel y_1 et supposons qu'il puisse s'écrire sous la forme $y_1 = f(x_1)$, où f est une fonction n fois dérivable dans un intervalle ouvert I qui contient l'élément x_1. S'il existe, dans I, un élément x_0 pour lequel les valeurs numériques de

$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ peuvent être facilement obtenues, une valeur approximative de $f(x_1)$ peut être aisément donnée, grâce au développement de Taylor $P_n^{x_0}(x_1)$ d'ordre n de f autour de x_0, évalué en x_1 :

$$\boxed{f(x_1) \;\approx\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x_1 - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x_1 - x_0)^n}\,.$$

Le signe $\approx$ indique qu'il s'agit d'une approximation et non d'une égalité. Pour qu'il puisse y avoir une égalité, il est nécessaire d'ajouter du côté droit le reste $R_n^{x_0}(x_1)$ évalué en x_1, associé à $P_n^{x_0}(x_1)$. Dans le cas où f admet une dérivée d'ordre $n+1$ dans I, ce reste peut s'écrire :

$$R_n^{x_0}(x_1) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_1 - x_0)^{n+1}\,,$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre x_0 et x_1. S'il n'est, en général, pas évident de savoir ce que vaut concrètement $R_n^{x_0}(x_1)$ (vu que ξ n'est en général pas facile à déterminer), il est néanmoins possible de donner une valeur numérique que l'on est certain de ne pas dépasser lorsque l'on considère la différence $\big|f(x_1) - P_n^{x_0}(x_1)\big|$. Cette valeur, notée $\mathcal{G}_{\max}$, s'obtient en prenant l'élément $\xi \in \bar{J}$ qui maximise $\big|R_n^{x_0}(x_1)\big|$, où $\bar{J}$ est l'intervalle fermé délimité par x_0 et x_1 :

$$\mathcal{G}_{\max} \;=\; \max_{\xi\in\bar{J}} \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_1 - x_0)^{n+1}\right| \;=\; \frac{|x_1 - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,\max_{\xi\in\bar{J}}\big|f^{(n+1)}(\xi)\big|\,.$$

Noter que l'existence de $\mathcal{G}_{\max}$ n'est garantie que si $f^{(n+1)}$ est continue dans $\bar{J}$ (de sorte que $f^{(n+1)}$ atteigne une valeur maximale dans $\bar{J}$). Remarquer, en outre, que $\mathcal{G}_{\max}$ est d'autant plus petite que x_1 est proche de x_0.

5.5.3 Exemple : Cherchons une valeur numérique approchée du nombre irrationnel $\sqrt[4]{19}$. À cet effet, considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $(= x^{\frac{1}{4}})$ et posons $x_0 = 16$ et $x_1 = 19$. Écrivons alors le développement de Taylor d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 16$:

$$\begin{aligned}
P_3^{16}(x) &= f(16) + \frac{f'(16)}{1!}\,(x-16) + \frac{f''(16)}{2!}\,(x-16)^2 + \frac{f'''(16)}{3!}\,(x-16)^3 \\
&= 16^{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}\,16^{-\frac{3}{4}}}{1!}\,(x-16) + \frac{-\frac{3}{16}\,16^{-\frac{7}{4}}}{2!}\,(x-16)^2 + \frac{\frac{21}{64}\,16^{-\frac{11}{4}}}{3!}\,(x-16)^3 \\
&= 2 + \frac{1}{32}\,(x-16) - \frac{3}{4096}\,(x-16)^2 + \frac{7}{262\,144}\,(x-16)^3\,.
\end{aligned}$$

Évalué en $x_1 = 19$, le développement en question fournit une valeur numérique approximative de $f(19) = \sqrt[4]{19}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{19} &\approx 2 + \frac{1}{32}\,(19-16) - \frac{3}{4096}\,(19-16)^2 + \frac{7}{262\,144}\,(19-16)^3 \\
&= 2 + \frac{3}{32} - \frac{27}{4096} + \frac{189}{262\,144} = \frac{547\,325}{262\,144}\,.
\end{aligned}$$

Déterminons la valeur $\mathcal{G}_{\max}$ que l'on est certain de ne pas dépasser lorsque l'on considère la différence $\left|f(19) - P_3^{16}(19)\right|$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\max} &= \frac{|19-16|^4}{4!} \max_{\xi\in[16;\,19]} \left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{3^4}{4!} \max_{\xi\in[16;\,19]} \left|-\frac{231}{256}\,\xi^{-\frac{15}{4}}\right| \\ &= \frac{81}{24} \max_{\xi\in[16;\,19]} \frac{231}{256\,\xi^{\frac{15}{4}}} = \frac{27}{8}\,\frac{231}{256\cdot 16^{\frac{15}{4}}} = \frac{6237}{67\,108\,864} \approx 0{,}0001\,.\end{aligned}$$

Ce calcul montre que la valeur approximative obtenue correspond à $\sqrt[4]{19}$ jusqu'à la troisième décimale (comprise) au moins.

5.5.3 Calcul approximatif d'intégrales

Si les différentes techniques d'intégration, développées dans le chapitre 4, se montrent efficaces dans de nombreuses situations, elles n'offrent cependant pas de méthode générale permettant d'expliciter les primitives de n'importe quelle fonction définie et continue dans un intervalle donné.

Là où les procédés d'intégration habituels atteignent leurs limites, d'autres techniques, basées sur des approximations, peuvent s'avérer salvatrices. Tout comme il est employé pour donner la valeur numérique approximative d'un nombre irrationnel, le développement de Taylor d'une fonction peut être utilisé pour déterminer approximativement une intégrale. Pour le voir, considérons une fonction f, définie et continue dans un intervalle fermé $[b;\, c]$, où b et c sont deux nombres réels tels que $b < c$. Si f est n fois dérivable dans un intervalle ouvert I contenant $[b;\, c]$, l'intégrale de f entre b et c peut être obtenue approximativement en calculant l'intégrale entre b et c du développement de Taylor P_n^a d'ordre n de f autour d'un point $a \in I$:

$$\boxed{\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_b^c P_n^a(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Le signe $\approx$ indique qu'il s'agit d'une approximation et non d'une égalité pure. Pour qu'il puisse y avoir une égalité, il est nécessaire d'ajouter du côté droit l'intégrale entre b et c de R_n^a, où R_n^a est le reste associé à P_n^a, de sorte que :

$$\int_b^c P_n^a(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c R_n^a(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c \big(P_n^a(x) + R_n^a(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dans le cas où f admet une dérivée d'ordre $n+1$ dans I, l'intégrale du reste peut s'écrire :

$$\int_b^c R_n^a(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre a et x. S'il n'est, en général, pas évident de savoir ce que vaut concrètement cette intégrale (vu que ξ, qui dépend de x, n'est en général pas facile à déterminer), il est néanmoins possible, dans le cas où $a \in [b;\, c]$, de donner une valeur numérique que l'on est certain de ne pas dépasser lorsque l'on considère la différence $\left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c P_n^a(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Notée $\mathcal{H}_{\max}$, cette valeur s'obtient en considérant l'élément $\xi \in [b;\, c]$ qui maximise $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ dans $[b;\, c]$:

$$\begin{aligned}\left|\int_b^c R_n^a(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_b^c \left|R_n^a(x)\right|\mathrm{d}x \\ &= \int_b^c \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_b^c \max_{\xi\in[b;\,c]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x \\ &= \max_{\xi\in[b;\,c]} \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \int_b^c |x-a|^{n+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathcal{H}_{\max}\,.\end{aligned}$$

Noter que l'existence de $\mathcal{H}_{\max}$ n'est garantie que si $f^{(n+1)}$ est continue dans $[b;\, c]$ (de sorte que $f^{(n+1)}$ atteigne une valeur maximale dans $[b;\, c]$). Remarquer, en outre, que la condition $a \in [b;\, c]$ (évoquée plus haut) est importante ; si elle n'est pas respectée, il n'est pas possible d'affirmer que l'élément ξ qui maximise $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ se trouve nécessairement dans $[b;\, c]$; le calcul ci-dessus n'est alors plus forcément correct.

5.5.4 Exemples : 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(t) = \exp(-t^2)$. Il peut être montré que l'intégrale $\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ ne peut pas être exprimée au moyen des fonctions usuelles (*cf.* annexe C) ; cela étant, elle peut être approximée par une fonction polynomiale en x. Pour s'en convaincre, considérons le développement de MacLaurin d'ordre $2\,m$ de la fonction f, où $m \in \mathbb{N}$. Ce développement s'obtient en prenant le développement de MacLaurin d'ordre m de la fonction exponentielle :

$$P_{\exp,m}(u) \;=\; 1 + u + \frac{1}{2!}\,u^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\,u^m\,,$$

dans lequel u est remplacé par $-t^2$:

$$\begin{aligned}P_{f,2m}(t) \;=\; P_{\exp,m}(-t^2) \;&=\; 1 + \left(-t^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\left(-t^2\right)^m \\ &=\; 1 - t^2 + \frac{1}{2}\,t^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!}\,t^{2m}\,.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t \;&\approx\; \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2!}\,t^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!}\,t^{2m}\right)\mathrm{d}t \\ &=\; \left[t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}\,t^5 - \ldots + \frac{1}{(2\,m+1)\,m!}\,(-1)^m\,t^{2m+1}\right]_0^x \\ &=\; x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}\,x^5 - \ldots + \frac{1}{(2\,m+1)\,m!}\,(-1)^m\,x^{2m+1}\;;\end{aligned}$$

cette dernière expression est effectivement un polynôme en x.

2. Calculons l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}\exp(x)$. Les primitives de f n'étant pas évidentes à expliciter, déterminons une valeur approchée de l'intégrale. À cet effet, utilisons (par exemple) le développement limité d'ordre 3 autour de 0 de la fonction exponentielle : $\exp(x) = P_{\exp,3}(x) + R_{\exp,3}(x)$, où $P_{\exp,3}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3$ est le développement de MacLaurin d'ordre 3 de l'exponentielle et $R_{\exp,3}(x)$ le reste associé ; exp étant infiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, ce reste peut s'écrire sous la forme $R_{\exp,3}(x) = \frac{1}{4!}\exp^{(4)}(\xi)\,x^4 = \frac{1}{24}\exp(\xi)\,x^4$, où ξ est un nombre réel compris strictement entre 0 et x. Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x}\exp(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^4\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}\,x^{\frac{7}{2}} + \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}\,x^{\frac{7}{2}}\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}\,x^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{27} + \int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1178}{945} + \int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1178}{945} \approx 1{,}25\,.\end{aligned}$$
La quantité $\frac{1178}{945}$ est le résultat du calcul approximatif de $\int_0^1 \sqrt{x}\exp(x)\,\mathrm{d}x$. Calculons encore la valeur que l'on est certain de ne pas dépasser lorsque l'on considère la différence $\left|\int_0^1 \sqrt{x}\exp(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \sqrt{x}\,P_{\exp,3}(x)\,\mathrm{d}x\right|$. Cette valeur s'obtient en prenant l'élément $\xi \in [0;\,1]$ qui maximise $\left|\int_0^1 \frac{1}{24}\exp(\xi)\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\right|$:
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\exp(\xi)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{\exp(1)}{24}\,x^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{24}\cdot\frac{2}{11}\,x^{\frac{11}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{132} \approx 0{,}02\,.\end{aligned}$$
Ce calcul montre que la valeur 1,25 (obtenue un peu plus haut) correspond à la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x}\exp(x)\,\mathrm{d}x$ jusqu'à la première décimale (comprise) au moins.

5.6 Développements illimités

Considérons une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et a un point de I ; supposons que f est infiniment dérivable dans I. Dès lors que la dérivée d'ordre p de f en a est définie, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, f admet un développement de Taylor P_n^a d'ordre n autour de a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Selon les propos tenus dans les remarques 5.2.2, le nombre a est un point de contact dont l'ordre est égal au degré du polynôme $P_n^a(x)$; plus le degré du polynôme est élevé, plus l'ordre de a est donc grand. Il est alors tentant de se dire que plus le degré de $P_n^a(x)$ est grand, plus P_n^a se comporte de la même manière que f dans un voisinage de a. Mais est-ce bien le cas ? Et qu'arrive-t-il lorsque n tend vers l'infini ?

5.6.1 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et infiniment dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soit aussi a un élément de I. On appelle *série de Taylor de f en a* la somme P^a contenant une infinité de termes, donnée par :

$$\begin{aligned} P^a(x) &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,. \end{aligned}$$

Dans le cas où $a = 0$, on parle de *série de MacLaurin de f*.

5.6.2 Remarques : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et infiniment dérivable dans un intervalle $I \subset D$; soient aussi a un point dans I et P^a la série de Taylor de f en a.

- Si f est une fonction polynomiale de degré n, sa série de Taylor en a ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. En effet, de par sa nature polynomiale, toutes les dérivées de f d'ordre plus grand ou égal à $n+1$ sont des fonctions identiquement nulles. Seuls les $n+1$ premiers termes de la série de Taylor sont donc non tous nuls. Un calcul explicite permet de montrer que :

$$f(x) = P^a(x) = P_n^a(x)\,.$$

- Les propos tenus au point précédent ne sont en général plus valables lorsque f n'est pas une fonction polynomiale. Dans ce cas, la série de Taylor de f peut comporter une infinité de termes non nuls.
- En chaque point $x \in D$, l'expression $P^a(x)$ peut être vue comme une série numérique de terme général u_k, donné par :

$$u_k(x) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\;;$$

  aussi, le développement de Taylor $P_n^a(x)$ d'ordre n de f autour de a peut être vue comme la somme partielle d'indice n, de terme général u_k. Ainsi :

$$P^a(x) = \lim_{n\to\infty} P_n^a(x)\,.$$

  Se pose alors naturellement la question de savoir dans quelles circonstances $P^a(x)$ converge.

5.6.3 Définitions : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et infiniment dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soient aussi a un élément de I, P_n^a le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a, et P^a la série de Taylor de f en a.

- On dit que la série de Taylor $P^a(x)$ de f en a, évaluée en $x \in D$, converge s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} P_n^a(x) \;=\; P^a(x) \;=\; \ell\,.$$

- On dit que la série de Taylor $P^a(x)$ de f en a, évaluée en $x \in D$, converge vers $f(x)$ si :

$$\lim_{n\to\infty} P_n^a(x) \;=\; P^a(x) \;=\; f(x)\,.$$

5.6.4 Remarque : Reprenons la fonction f de la définition précédente et P^a sa série de Taylor en a. Dès lors que $P^a(x)$ converge pour un certain $x \in D$, alors nécessairement $f^{(k)}(a) < \infty$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

5.6.5 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et infiniment dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$. On appelle *domaine(s) de convergence* de P^a l'ensemble $\mathcal{D}_a \subset D$, constitué de tous les nombres $x \in D$ pour lesquels la série $P^a(x)$ converge :

$$\mathcal{D}_a \;=\; \left\{ x \in D \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \text{ converge} \right\}.$$

5.6.6 Remarque : Dans la définition précédente, le domaine $\mathcal{D}_a$ contient dans tous les cas le nombre réel a, vu que $f(a) = P^a(a)$ par définition.

5.6.7 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et infiniment dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soient aussi a un élément de I, P_n^a le développement de Taylor d'ordre n de f autour de a, R_n^a le reste associé à P_n^a, et P^a la série de Taylor de f en a. Alors la série de Taylor $P^a(x)$ de f en a, évaluée en $x \in D$, converge vers $f(x)$ si et seulement si le reste $R_n^a(x)$, évalué en x, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini :*

$$\lim_{n\to\infty} R_n^a(x) \;=\; 0\,.$$

Preuve : Ce résultat est une conséquence directe de la définition du reste R_n^a associé au développement de Taylor P_n^a d'ordre n d'une fonction f autour du nombre réel a. □

5.6.8 Exemples : 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \exp(x)$. Comme f est infiniment dérivable dans tout $\mathbb{R}$, elle admet une série de Taylor en tout $a \in \mathbb{R}$. La série de Taylor en $a = 0$, *i.e.* la série de MacLaurin de f s'écrit :

$$P(x) \;=\; 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Quant au développement de MacLaurin d'ordre n, il est donné par :

$$P_n(x) \;=\; 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \,.$$

Étudions à présent la convergence de $P(x)$. À cet effet, considérons le reste R_n associé à P_n. Comme f est infiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, R_n peut s'écrire sous la forme :

$$R_n(x) \;=\; \frac{\exp(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\, x^{n+1} \,,$$

où ξ_{n+1} est un nombre réel compris strictement entre 0 et x. Fixons à présent l'élément $x \in \mathbb{R}$. Comme ξ_{n+1} est strictement compris entre 0 et x, et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors $0 < \exp(\xi_{n+1}) \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où M est un nombre réel strictement positif. Ainsi :

$$\big|R_n(x)\big| \;=\; \left|\frac{\exp(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\, x^{n+1}\right| \;=\; \frac{\exp(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \;\leqslant\; \frac{M}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \,.$$

Notons $v_n(x) \;=\; \frac{M}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}$. L'ensemble $\big(v_n(x)\big) \;=\; \big(v_0(x)\,;\, v_1(x)\,;\, v_2(x)\,;\, \ldots\big)$ peut être alors vu comme une suite de nombres et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ comme une série numérique. Cette série converge ; en effet, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$ si $x = 0$, et si $x \neq 0$ (*cf.* critère de d'Alembert, proposition 1.6.33 de la sous-section 1.6.4 du chapitre 1) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \;&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{M}{((n+1)+1)!}\, |x|^{(n+1)+1}}{\frac{M}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!}\, |x| \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)!}\, |x| \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} \;=\; 0 \;<\; 1 \,.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) converge donc vers 0 (*cf.* proposition 1.6.31 de la sous-section 1.6.4 du chapitre 1), et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\big|R_n(x)\big|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$; ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \;=\; P(x) \;=\; \exp(x) \,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série de MacLaurin de l'exponentielle converge donc vers l'exponentielle dans tout $\mathbb{R}$; ce qui permet d'écrire :

$$\exp(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \,.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \sin(x)$. Comme f est infiniment dérivable dans tout $\mathbb{R}$, elle admet une série de Taylor en tout $a \in \mathbb{R}$. La série de Taylor en $a = 0$, *i.e.* la série de MacLaurin de f s'écrit :

$$P(x) \;=\; \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} \,.$$

Quant au développement de MacLaurin d'ordre n, il est donné par :

$$P_{2n+1}(x) \;=\; \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}\,.$$

Étudions à présent la convergence de $P(x)$. À cet effet, considérons le reste R_{2n+1} associé à P_{2n+1}. Comme f est infiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, R_{2n+1} peut s'écrire sous la forme :

$$R_{2n+1}(x) \;=\; \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi_{2n+2})}{(2\,n+2)!}\, x^{2n+2}\,,$$

où $\sin^{(2n+2)}$ est la dérivée d'ordre $2\,n+2$ du sinus et ξ_{2n+2} un nombre réel compris strictement entre 0 et x. Vu que $\sin^{(2n+2)}(x) = \sin(x)$ pour tout n entier, positif et impair et $\sin^{(2n+2)}(x) = -\sin(x)$ pour tout n entier, positif et pair, *i.e.* vu que $\sin^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\sin(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que le sinus ne prend que des valeurs comprises entre -1 et 1, alors :

$$\begin{aligned}
\big|R_{2n+1}(x)\big| \;&=\; \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi_{n+1})}{(2\,n+2)!}\, x^{2n+2}\right| \;=\; \frac{\big|\sin^{(2n+2)}(\xi_{n+1})\big|}{(2\,n+2)!}\,|x|^{2n+2} \\
&\leqslant\; \frac{1}{(2\,n+2)!}\,|x|^{2n+2}\,.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2\,(n+1)+2)!}\,|x|^{2(n+1)+2}}{\frac{1}{(2\,n+2)!}\,|x|^{2n+2}}\right| \;&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2\,n+4)!}\,|x|^{2n+4}}{\frac{1}{(2\,n+2)!}\,|x|^{2n+2}} \\
&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n+4)!}\,|x|^2 \\
&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(2\,n+2)!}{(2\,n+4)(2\,n+3)(2\,n+2)!}\,|x|^2 \\
&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2\,n+4)(2\,n+3)} \;=\; 0 \;<\; 1\,.
\end{aligned}$$

Donc, en raisonnant de la même manière que dans l'exemple précédent (et en remarquant que $R_{2n+1}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) :

$$\lim_{n\to\infty}\big|R_{2n+1}(x)\big| \;=\; 0\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$; ce qui permet de conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(x) \;=\; P(x) \;=\; \sin(x)\,,$$

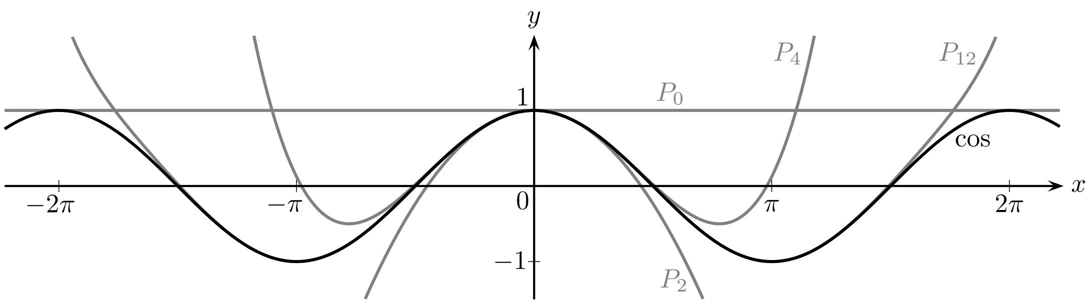
et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série de MacLaurin du sinus converge donc vers le sinus dans tout $\mathbb{R}$; ce qui permet d'écrire :

$$\sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}\;, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

Dans le cas de la fonction cosinus, un raisonnement similaire à celui qui vient d'être mené conduit au résultat :

$$\cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2\,k)!}\;, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

La figure ci-dessous illustre des échantillons du graphe de la fonction cosinus, ainsi que des graphes des développements de MacLaurin P_0, P_2, P_4 et P_{12} du cosinus. Plus l'ordre du développement augmente, plus le domaine dans lequel le graphe du développement et le graphe du cosinus se ressemblent augmente.



3. Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques connaissent des écritures similaires à celles du sinus et du cosinus :

$$\sinh(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}\;, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\cosh(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}\;, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ces égalités se prouvent de façon analogue à celles établies pour le sinus et le cosinus.

5.6.9 Remarques : • Le fait que $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, permet d'affirmer que la fonction exponentielle *est* sa série de MacLaurin. En conséquence, la série de MacLaurin de la fonction exponentielle peut servir de définition même à cette fonction. De telles considérations s'appliquent également aux fonctions sinus, cosinus, sinus et cosinus hyperboliques. Dans la littérature spécifique au sujet, il n'est, du reste, pas rare de voir les fonctions exponentielles, trigonométriques et hyperboliques définies au moyen de leurs séries de MacLaurin respectives.

- Comme $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathrm{e} \;=\; \exp(1) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

La somme partielle $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ permet d'obtenir une valeur numérique approximative du nombre irrationnel e. Plus n est grand, meilleure est l'approximation.

5.6.10 Définition : Une fonction réelle $f \colon D \to \mathbb{R}$ est dite *analytique* si elle peut s'écrire, dans un voisinage de chaque point $a \in D$, sous la forme d'un polynôme en $x - a$, de degré fini ou non ; autrement dit, f est analytique si en chaque point $a \in D$, il existe un voisinage V_a de a, inclus dans D, et des coefficients réels $b_0^a, b_1^a, b_2^a, \ldots$ tels que :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k^a \,(x-a)^k\,, \qquad \text{pour tout } x \in V_a\,.$$

5.6.11 Remarques :

- Il peut être montré que l'expression $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^a \,(x-a)^k$, donnée dans la définition précédente, n'est rien d'autre que la série de Taylor de f en a.
- Dans la définition précédente, le voisinage V_a de a n'a pas besoin d'être l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité. Par définition même de la notion de voisinage, il ne peut, en outre, pas être réduit au point a uniquement.
- Les fonctions usuelles, *i.e.* les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, puissances, hyperboliques, hyperboliques réciproques, trigonométriques, trigonométriques réciproques, sont toutes analytiques.
- En raisonnant comme dans les exemples 5.6.8 et en utilisant le critère de convergence des séries alternées (*cf.* proposition A.2.6, section A.2 de l'annexe A), il peut être montré que la fonction Arctg peut s'écrire, pour tout $x \in [-1;\, 1]$ sous la forme :

$$\mathrm{Arctg}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{x^{2k+1}}{2\,k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Or, par définition de la fonction arc tangente, $\mathrm{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\pi \;=\; 4\,\mathrm{Arctg}(1) \;&=\; 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{1^{2k+1}}{2\,k+1} \;=\; 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{1}{2\,k+1} \\ &=\; 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).\end{aligned}$$

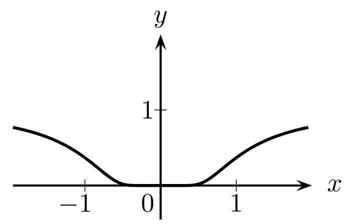
La somme partielle $4\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,\frac{1}{2\,k+1}$ peut être utilisée pour donner une valeur numérique approximative du nombre irrationnel π. Si, dans les faits, elle n'est que peu considérée, c'est à cause de sa trop lente progression vers la valeur exacte de π à mesure que n augmente. Noter qu'il existe une autre formule permettant de trouver approximativement la valeur numérique de π ; basée également sur la série de l'arc tangente (donnée ci-dessus), elle utilise l'égalité $\operatorname{Arctg}\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\big) = \frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}
\pi &= 6\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\,k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} \\
&= 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\,k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k}\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\,k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 2\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\,k+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \\
&= 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\dots\right).
\end{aligned}$$

La somme partielle $2\sqrt{3}\,\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\,k+1}\big(-\frac{1}{3}\big)^k$ progresse beaucoup plus rapidement vers la valeur exacte de π (à mesure que n augmente) que celle obtenue à partir de $\operatorname{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Pour que cette expression soit applicable, il est toutefois nécessaire d'avoir une bonne approximation numérique du nombre $\sqrt{3}$.

- Nombre de fonctions ne sont pas analytiques. Un exemple de fonction non analytique est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\big(-\frac{1}{x^2}\big) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$



Il peut être montré que cette fonction est infiniment dérivable dans tout $\mathbb{R}$, y compris en 0, et qu'elle et toutes ses dérivées s'annulent en $x = 0$ ($f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$). La série de MacLaurin de cette fonction s'écrit alors :

$$P(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \ldots = 0.$$

La série converge donc vers 0, et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$. De fait, le domaine de convergence de la série est $\mathbb{R}$ tout entier. Or, f ne s'annule qu'en $x = 0$. La fonction f ne coïncide donc avec P qu'en $x = 0$ et nulle part ailleurs. Par conséquent, il n'existe aucun voisinage de 0 dans lequel $f = P$.

5.6.12 Remarque : Revenons à la définition 5.6.5. Le domaine de convergence $\mathcal{D}_a$ de la série de Taylor P^a de f en a peut être obtenu à l'aide des critères de convergence présentés dans la sous-section 1.6.4 du chapitre 1 (critères de d'Alembert et de la racine), ainsi que dans la sous-section 4.6.4 du chapitre 4 (test de l'intégrale), et aussi (dans une moindre mesure) dans la section A.2 de l'annexe A. Noter, toutefois, que la convergence de P^a dans $\mathcal{D}_a$ n'implique pas nécessairement la convergence de P^a vers f dans $\mathcal{D}_a$.

5.6.13 Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Cette fonction étant infiniment dérivable dans un voisinage de 0, elle admet une série de MacLaurin ; calculons-la. À cet effet, déterminons l'expression de la dérivée d'ordre k de f et évaluons-la en $x = 0$:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & \dfrac{1}{1-x} \;=\; (1-x)^{-1} & \Rightarrow & f(0) & = & (1-0)^{-1} \;=\; 1\,, \\
f'(x) & = & -(1-x)^{-2}\,(-1) \;=\; (1-x)^{-2} & \Rightarrow & f'(0) & = & (1-0)^{-2} \;=\; 1\,, \\
f''(x) & = & -2\,(1-x)^{-3}\,(-1) \;=\; 2\,(1-x)^{-3} & \Rightarrow & f''(0) & = & 2\,(1-0)^{-3} \;=\; 2\,, \\
f'''(x) & = & 2\,(-3)\,(1-x)^{-4}\,(-1) \;=\; 6\,(1-x)^{-4} & \Rightarrow & f'''(0) & = & 6\,(1-0)^{-4} \;=\; 6 \;=\; 3!\,, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
f^{(k)}(x) & = & -k!\,(1-x)^{-k-1}\,(-1) \;=\; k!\,(1-x)^{-k-1} & \Rightarrow & f^{(k)}(0) & = & k!\,(1-0)^{-k-1} \;=\; k!\,.
\end{array}$$

La série de MacLaurin de f s'écrit donc :

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!}\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

Pour chaque x, $P(x)$ peut être vue comme une série numérique de terme général x^n. Déterminons alors les valeurs de x pour lesquelles cette série converge. Pour cela, utilisons le critère de la racine (*cf.* proposition 1.6.34 de la sous-section 1.6.4 du chapitre 1) :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} |x|\,.$$

Il y a convergence si $|x| < 1$, *i.e.* si $x \in \,]-1;\, 1[$. Si $x = 1$, il ne peut pas y avoir convergence vu que le nombre 1 n'est pas dans le domaine de définition de f. Aussi, il ne peut pas y avoir convergence lorsque $x = -1$, vu que :

$$\begin{aligned}
P(-1) \;&=\; 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + \ldots \\
&=\; 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots
\end{aligned}$$

n'admet pas de limite. En résumé, la série de MacLaurin P de f converge dans le domaine :

$$\mathcal{D}_a \;=\;]-1;\, 1[\,.$$

Et ce vers quoi P converge dans $\mathcal{D}_a$ n'est, dans le cas présent, rien d'autre que f. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le reste R_n du développement de MacLaurin P_n de f tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On peut aussi, de manière alternative, observer que $P(x)$ est, pour tout x, la série associée à une suite géométrique de raison x ; or, selon les propos tenus dans la sous-section 1.6.3, la série est égale à $\frac{1}{1-x}$, pour autant que $|x| < 1$.

Chapitre 6

Équations différentielles

Avec l'élaboration du calcul infinitésimal dans la deuxième moitié du XVII^{e} siècle, une nouvelle sorte d'équations, dans lesquelles interviennent une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées, a peu à peu émergé. Même si l'une ou l'autre de ces équations était déjà présente dans certains problèmes rencontrés par les scientifiques de la première moitié du même siècle, il n'en demeure pas moins que c'est avec le calcul différentiel et intégral qu'il a été possible de poser une définition claire, ainsi que de fournir des méthodes de résolution rigoureuses et appropriées pour ce type d'objets mathématiques.

6.1 Équations différentielles ordinaires

De telles équations sont fréquemment utilisées pour décrire le comportement de systèmes physiques, biologiques, etc. (tels les circuits électriques, le mouvement des objets matériels, une population d'êtres vivants...). Parvenir à résoudre l'équation différentielle gouvernant un système donné permet de connaître son évolution et ainsi de prédire son comportement dans le futur.

6.1.1 Définition : On appelle *équation différentielle ordinaire* toute équation liant une fonction réelle y de la variable réelle x, ses dérivées y', ... , $y^{(n)}$, ainsi que la variable x ;

- on dit que l'équation différentielle ordinaire en question est donnée *sous forme implicite* si elle s'écrit :

$$G(x;\, y;\, y';\, \ldots;\, y^{(n)}) \;=\; 0\,,$$

  où G est une fonction des $n+2$ grandeurs x, y, y', ... , $y^{(n)}$;
- on dit que l'équation différentielle ordinaire en question est donnée *sous forme explicite* si elle s'écrit :

$$y^{(n)} \;=\; g(x;\, y;\, y';\, \ldots;\, y^{(n-1)})\,,$$

  où g est une fonction des $n+1$ grandeurs x, y, y', ... , $y^{(n-1)}$.

Le nombre n (correspondant au plus grand ordre de dérivation de y apparaissant dans l'équation) est appelé *ordre* de l'équation différentielle.

6.1.2 Illustrations : 1. *Modèle élémentaire de la dynamique des populations* :
Soit $y(t)$ l'effectif d'une population de bactéries au temps t. Soit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t)$ la vitesse de croissance de cette population. Dans un milieu abondant en nourriture, on observe que la vitesse de croissance de la population est, en bonne approximation, proportionnelle à la population même, *i.e.* au nombre d'individus qui la constitue :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t) = k\,y(t)\,,$$

où k est une constante. Une telle expression est une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

2. *Système prédateur-proie* :
Ce modèle de croissance de populations est plus complexe que le précédent, du fait qu'il comporte deux espèces : l'une faisant office de *proies* (comme par exemple les lièvres des neiges), l'autre de *prédateurs* (comme par exemple les lynx). Soient $y(t)$ et $z(t)$ les effectifs de proies et de prédateurs, respectivement, à l'instant t ; soient aussi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t)$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z'(t)$ les vitesses de croissance des proies et des prédateurs, respectivement, au temps t. Les quatre grandeurs y, y', z et z' sont, dans ce système, liées entre elles par deux équations suivantes, appelées *équations de Lotka*[I]*-Volterra*[II] :

$$\begin{cases} y'(t) = A\,y(t) - B\,y(t)\,z(t) \\ z'(t) = -C\,z(t) + D\,y(t)\,z(t) \end{cases}.$$

Les paramètres A, B, C et D peuvent être interprétées de la façon suivante :
- ◇ A est le taux de reproduction des proies ; il est constant et indépendant du nombre de prédateurs ;
- ◇ B est le taux de mortalité des proies due aux prédateurs rencontrés ;
- ◇ C est le taux de mortalité des prédateurs ; il est constant et indépendant du nombre de proies ;
- ◇ D est le taux de reproduction des prédateurs ; il dépend du nombres de proies rencontrées et mangées.

Les équations de Lotka-Volterra constituent un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.

3. *Loi d'atténuation du rayonnement électromagnétique* :
Lorsqu'une onde électromagnétique traverse un milieu matériel, son intensité $I(x)$ diminue avec l'épaisseur x de matière traversée, selon l'équation :

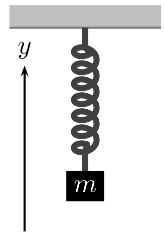
$$-I'(x) = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}(x) = \mu\,I(x)\,,$$

I. Alfred James Lotka était un mathématicien et démographe américain, né en 1880 à Lemberg, dans l'Empire d'Autriche-Hongrie (aujourd'hui Lviv, en Ukraine), et mort en 1949 à New York, aux États-Unis.

II. Vito Volterra était un mathématicien italien, né en 1860 à Ancône, dans le royaume d'Italie, et mort en 1940 à Rome.

où $I'(x)$ est le taux d'atténuation de l'intensité en fonction de l'épaisseur x et μ un coefficient, appelé *coefficient d'atténuation*, dépendant de l'énergie de l'onde ainsi que du milieu en question. Connue sous le nom de *loi de Beer*[III]*-Lambert*[IV], cette relation est, comme celle du premier exemple ci-dessus, une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

4. *Masse soumise à la force de rappel d'un ressort* :
Soit une masse m suspendue à un ressort, qui est lui-même fixé, à l'autre extrémité, au plafond d'une pièce. Soit un axe y, vertical et orienté vers le haut, dont l'origine se trouve à l'emplacement de la masse m lorsqu'elle est immobile, à l'équilibre. À un instant donné, la masse m est tirée vers le bas, puis lâchée. En tout temps, elle subit une force verticale, appelée *force de rappel*, dont la composante selon y est $F_y = -k\,y$, où k est une constante. Selon la deuxième loi de Newton, cette force est égale, en tout temps, au produit de m et de l'accélération $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = y''(t)$ que subit m selon y :



$$m\,y''(t) \;=\; -k\,y(t)\,.$$

Une telle expression est une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre.

6.1.3 Remarques :

- On parle d'équations différentielles *ordinaires*, pour marquer clairement la différence avec les *équations aux dérivées partielles*, équations dans lesquelles interviennent des fonctions de plusieurs variables réelles, ainsi que leurs *dérivées* dites *partielles.*
- L'équation ou les équations différentielle(s) décrivant un modèle de croissance de population laisse(nt) supposer que le nombre d'individus d'une population est une grandeur réelle continue ; ce qui n'est évidemment pas le cas dans la réalité. L'équation ou les équations présentée(s) décrit ou décrivent en fait une généralisation du modèle donné, dans laquelle la population étudiée est une fonction continue, qui peut prendre des valeurs aussi bien entières que non entières. Cela étant, chaque fois que la fonction prend des valeurs entières, elle décrit bien le modèle donné, dans lequel la population se compte en nombre entier d'individus.

6.1.4 Définition : Soit $G(x; y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0$ une équation différentielle ordinaire d'ordre n ; soit aussi $u\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dont la dérivée d'ordre n est continue dans I. On dit que u est une *solution* de l'équation différentielle en question si :

$$G\big(x\,;\, u(x)\,;\, u'(x)\,;\, u''(x)\,;\, \ldots;\, u^{(n)}(x)\big) \;=\; 0\,,$$

pour tout $x \in I$.

III. August Beer était un mathématicien, physicien et chimiste germanique, né le 31 juillet 1825 à Trèves, dans la Rhénanie-Palatinat (faisant partie aujourd'hui de la République fédérale d'Allemagne), et mort le 18 novembre 1863 à Bonn, en Rhénanie-du-Nord-Westphalie (faisant également partie aujourd'hui de la République fédérale d'Allemagne).

IV. Johann Heinrich Lambert était un mathématicien, physicien et philosophe, né en 1728 à Mulhouse (rattachée à l'époque à la Confédération helvétique) et mort en 1777 à Berlin (en Prusse).

6.1.5 Remarques : • Différentes définitions de la solution d'une équation différentielle peuvent être trouvées dans la littérature, avec des hypothèses plus ou moins fortes. Si, dans l'énoncé précédent, la condition de continuité de la n-ième dérivée a été imposée, c'est afin de pouvoir utiliser sans restriction le calcul intégral lors de la résolution (pour autant qu'elle soit possible) d'une équation différentielle donnée.

- Si $u\colon I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, est une solution de l'équation :

$$G(x;\, y;\, y';\, y'';\, \ldots;\, y^{(n)}) \;=\; 0\,,$$

alors la restriction de u à un intervalle ouvert $J \subset I$ est également solution de cette même équation.

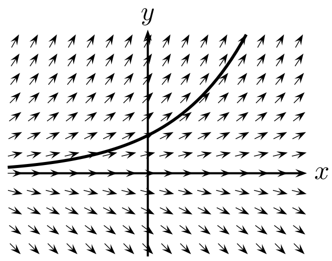
- Nombre d'équations différentielles ordinaires n'ont pas de solutions analytiques (*i.e.* n'ont pas de solutions qui peuvent être écrites au moyen de fonctions usuelles). Leurs résolutions ne peuvent alors être obtenues qu'avec des techniques d'approximation provenant du domaine mathématique de l'*analyse numérique*. Noter que, dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, donnée sous forme explicite :

$$y' \;=\; g(x;\, y)\,,$$

la solution approximée peut être déduite à l'aide du raisonnement géométrique suivant :

  ◇ En chaque point du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, on trace une petite flèche de pente $p = g(x;\, y)$; l'ensemble de ces flèches forme ce que l'on appelle un *champ de vecteur*.

  ◇ On trouve une solution graphique en traçant la courbe d'équation $y = u(x)$, où u est une fonction dérivable, dont la tangente en chaque point de $\mathbb{R}^2$ coïncide avec le champ de vecteur (*i.e.* à la petite flèche) au point en question. Une telle solution graphique est appelée *ligne de champ*.



6.1.6 Exemples : 1. Soit l'équation différentielle $y'(x) = a$, où a est une constante réelle. Alors, en intégrant des deux côtés, *i.e.* en prenant l'ensemble des primitives des deux côtés, il vient :

$$y'(x) \;=\; a \qquad \Leftrightarrow \qquad \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int a\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) \;=\; a\,x + C\,,$$

où $x \in \mathbb{R}$ et C est une constante réelle. L'équation différentielle $y'(x) = a$ admet donc pour solution la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y(x) = a\,x + C$.

2. Soit l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$. Si $y(x) \neq 0$ quel que soit x, cette équation peut être récrite sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x &&\Leftrightarrow \quad \ln\bigl|y(x)\bigr| = x + C \\
&\Leftrightarrow \quad \bigl|y(x)\bigr| = \exp(x+C) &&\Leftrightarrow \quad \bigl|y(x)\bigr| = \exp(x)\underbrace{\exp(C)}_{=A} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \pm A\exp(x) &&\Leftrightarrow \quad y(x) = \tilde{A}\exp(x)\,,
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle, $A = \exp(C)$ une constante réelle strictement positive (vu que $\exp(C) > 0$ quelle que soit C) et $\tilde{A} = \pm A$ une constante réelle non nulle. Noter que l'équation différentielle donnée est également satisfaite dans le cas où y est la fonction identiquement nulle ; en effet, si $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $y'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que $0 = 0$. L'équation différentielle $y'(x) = y(x)$ admet donc pour solution la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $y(x) = K\exp(x)$, où K est une constante réelle quelconque.

3. Soit l'équation différentielle $y'(x) = x\,y(x)$. Si $y(x) \neq 0$ quel que soit x, cette équation peut être récrite sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)} = x$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} = x \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\bigl|y(x)\bigr| = \frac{1}{2}\,x^2 + C \\
&\Leftrightarrow \quad \bigl|y(x)\bigr| = \exp\left(\frac{1}{2}\,x^2 + C\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \bigl|y(x)\bigr| = \exp\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)\underbrace{\exp(C)}_{=A} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \pm A\exp\left(\frac{1}{2}\,x^2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \tilde{A}\exp\left(\frac{1}{2}\,x^2\right),
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle, $A = \exp(C)$ une constante réelle strictement positive (vu que $\exp(C) > 0$ quelle que soit C) et $\tilde{A} = \pm A$ une constante réelle non nulle. Noter que l'équation différentielle donnée est également satisfaite dans le cas où y est la fonction identiquement nulle ; en effet, si $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $y'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que $0 = x\,0$. L'équation différentielle $y'(x) = x\,y(x)$ admet donc pour solution la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $y(x) = K\exp\bigl(\frac{1}{2}\,x^2\bigr)$, où K est une constante réelle quelconque.

4. Soit l'équation différentielle $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$. Si $y(x) \neq 0$ quel que soit x, cette équation peut être récrite sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\big|y(x)\big| = \ln|x| + C \\
&\Leftrightarrow \quad \big|y(x)\big| = \exp\big(\ln|x| + C\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \big|y(x)\big| = \underbrace{\exp\big(\ln|x|\big)}_{=|x|}\,\underbrace{\exp(C)}_{=A} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \pm A\,|x| \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \tilde{A}\,|x|\,,
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle, $A = \exp(C)$ une constante réelle strictement positive (vu que $\exp(C) > 0$ quelle que soit C) et $\tilde{A} = \pm A$ une constante réelle non nulle. Noter que y' n'existe pas en $x = 0$ (vu qu'il y a division par x dans la partie gauche de l'équation différentielle donnée). La solution de l'équation différentielle ne peut donc être définie que dans $\mathbb{R}^*_-$ ou dans $\mathbb{R}^*_+$. Dans $\mathbb{R}^*_+$, $|x| = x$; et dans $\mathbb{R}^*_-$, $|x| = -x$. Mais comme la constante $\tilde{A}$ peut être aussi bien positive que négative, $y(x)$ peut s'écrire dans tous les cas $y(x) = B\,x$, où B est une constante réelle non nulle. Remarquer, en outre, que $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*_-$ ou pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ satisfait également l'équation différentielle donnée. En résumé, l'équation $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ admet pour solution la fonction $y\colon \mathbb{R}^*_- \to \mathbb{R}$ ou la fonction $y\colon \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $y = K\,x$, où K est une constante réelle quelconque.

6.1.7 Remarques :

- Dans chacun des exemples ci-dessus, la solution est une famille de fonctions ; non pas une unique fonction mais une infinité, du fait de la présence systématique d'une constante réelle. On remarque immédiatement que si deux fonctions d'une même famille sont égales en un x donné, ces deux fonctions sont égales en tout x ; autrement dit, elles sont identiques.
- Tout problème concret (de physique, de biologie...) est caractérisé par des données de base indiquant, par exemple, l'état d'un système à un instant donné. Dans le langage des équations différentielles, ces données de base sont appelées *conditions initiales*. Dans le cas d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, les conditions initiales, ou plutôt la condition initiale est un point du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées $(x_0;\, y_0)$. Toute solution de l'équation différentielle donnée, qui satisfait la condition initiale $(x_0;\, y_0)$, est une fonction f qui vérifie l'équation différentielle en question et dont le graphe passe par le point $(x_0;\, y_0)$ (ce qui revient à dire que $f(x_0) = y_0$).
- La famille de toutes les fonctions qui sont solutions d'une équation différentielle ordinaire est appelée *solution générale* de l'équation différentielle en question.

Dans cette famille de solutions, la (ou les) fonction(s) satisfaisant des conditions initiales données est (sont) appelée(s) *solution(s) spécifique(s)* aux conditions initiales données. Typiquement, dans le deuxième des exemples qui viennent d'être traités, la famille de fonctions donnée par $y(x) = K\exp(x)$ constitue la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$, alors que la fonction donnée par $y(x) = \kappa\exp(x)$, où $\kappa = y_0\exp(-x_0)$, est une solution spécifique à la condition initiale $(x_0; y_0)$ (vu qu'elle satisfait $y(x_0) = y_0$).

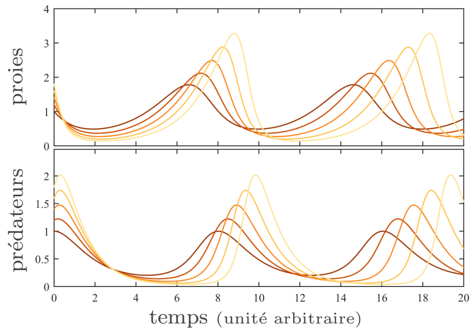
- Aux XVIII^e et XIX^e siècles, les équations différentielles ordinaires ont fait l'objet de nombreuses études, desquelles il a été possible de tirer un certain nombre de propriétés intéressantes. L'une de ces propriétés, connue sous *théorème d'existence et d'unicité*, affirme que toute équation différentielle ordinaire admet, sous certaines hypothèses, une unique solution y (dans un intervalle donné) satisfaisant des conditions initiales données.
- Dès lors qu'une équation différentielle donnée admet, sous des conditions initiales données, une unique solution y définie dans un intervalle J donné, il est envisageable de rechercher la solution $\hat{y}$, définie dans le plus grand intervalle $\hat{J}$ possible, qui satisfait les mêmes conditions initiales. Appelée *solution maximale*, cette solution est la fonction la plus générale qui soit, qui satisfait l'équation différentielle donnée sous les conditions initiales données ; son intérêt réside dans le fait que toute solution satisfaisant les mêmes conditions initiales peut être facilement déduite d'elle. Typiquement, la solution y mentionnée ci-dessus s'obtient simplement en prenant la restriction de $\hat{y}$ à J.

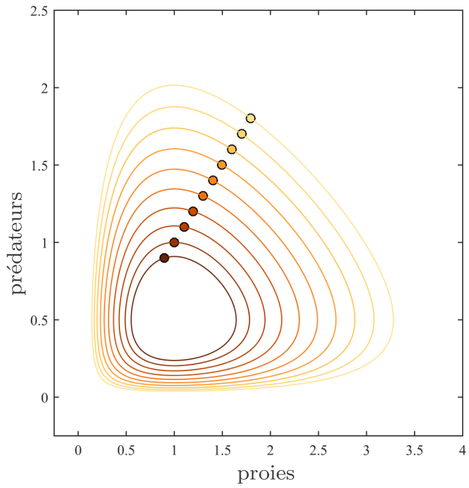
6.1.8 Illustrations : 1. *Modèle élémentaire de la dynamique des populations* :
La fonction $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_1(t) = \exp(k\,t)$, est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = k\,y(t)$, vu que $y_1'(t) = k\exp(k\,t) = k\,y_1(t)$. La fonction $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_2(t) = 7\exp(k\,t)$, est également une solution de cette même équation (vu que $y_2'(t) = 7\,k\exp(k\,t) = k\,y_2(t)$). En procédant de la même manière que dans le deuxième des exemples 6.1.6 :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t \quad &&\Leftrightarrow \quad \ln\left|y(t)\right| = k\,t + C \\
&\Leftrightarrow \quad \left|y(t)\right| = \exp(k\,t + C) \quad &&\Leftrightarrow \quad \left|y(t)\right| = \exp(k\,t)\underbrace{\exp(C)}_{=A} \\
&\Leftrightarrow \quad y(t) = \pm A\exp(k\,t) \quad &&\Leftrightarrow \quad y(t) = \tilde{A}\exp(k\,t)\,,
\end{aligned}$$

on arrive à la conclusion que l'équation $y'(t) = k\,y(t)$ admet pour solution générale la famille de fonctions donnée par $y(t) = K\exp(k\,t)$, où K est une constante (qui peut être positive, négative, ou même nulle, vu que la fonction identiquement nulle satisfait aussi l'équation donnée). Pour une population comptant 1428 individus à l'instant $t = 0$ (et obéissant à l'équation $y'(t) = k\,y(t)$), la fonction qui représente son évolution s'écrit $v(t) = 1428\exp(k\,t)$ (de sorte que $v(0) = 1428\exp(k\,0) = 1428$). Cette fonction est alors la solution de l'équation différentielle donnée, spécifique à la condition $v(0) = 1428$.

2. *Système prédateur-proie* :
   Le système d'équations de Lotka-Volterra (*cf.* exemples 6.1.2) admet des solutions périodiques dans le temps, qui ne peuvent pas être écrites au moyen d'expressions analytiques simples. La figure du haut, ci-contre, illustre le graphe de ces fonctions pour différentes conditions initiales. La figure du bas représente le nombre de prédateurs en fonction du nombre de proies pour différentes conditions initiales. Pour chacune des conditions initiales données, le graphe est une courbe fermée (*i.e.* une courbe dont chaque point peut être vu comme le point de départ et le point d'arrivée).





3. *Loi d'atténuation du rayonnement électromagnétique* :
   L'équation différentielle $-I'(x) = \mu\, I(x)$ (*cf.* exemples 6.1.2), est du même type que celle du modèle élémentaire de la dynamique des populations. La solution générale s'écrit $I(x) = A\exp(-\mu\, x)$, où A est une constante. La fonction donnée par $I(x) = I_0 \exp(-\mu\, x)$ est la solution spécifique à la condition initiale $I(0) = I_0$. La grandeur I_0 correspond à l'intensité initiale de l'onde électromagnétique, avant qu'elle ne commence à traverser le milieu de coefficient d'atténuation μ.

4. *Masse soumise à la force de rappel d'un ressort* :
   La fonction $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :
   $$y_1(t) = \cos(\lambda\, t)\,, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,$$
   est une solution de l'équation différentielle $m\, y''(t) = -k\, y(t)$, vu que $m\, y_1''(t) = -m\,\lambda^2 \cos(\lambda\, t) = -k\cos(\lambda\, t) = -k\, y_1(t)$. La fonction $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_2(t) = \sin(\lambda\, t)$ est également une solution de cette même équation (vu que $m\, y_2''(t) = -k\sin(\lambda\, t) = -k\, y_2(t)$). Il sera établi par la suite que la solution générale de l'équation $m\, y''(t) = -k\, y(t)$ s'écrit $y(t) = A\cos(\lambda\, t) + B\sin(\lambda\, t)$, où A et B sont des constantes réelles.

6.2 Équations différentielles à variables séparables

6.2.1 Définition : On appelle *équation différentielle à variable séparable* toute équation différentielle pouvant être mise sous la forme :

$$f\big(y(x)\big)\,y'(x) \;=\; g(x) \qquad \text{(de façon plus compacte : } \; f(y)\,y' \;=\; g\,)\,, \tag{6.2.1}$$

où $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I_1 \subset \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I_2 \subset \mathbb{R}$, y une fonction et y' sa dérivée.

6.2.2 Définition : Toute fonction $y\colon J \to I_1$, dérivable dans l'intervalle ouvert $J \subset I_2$, dont la dérivée $y'\colon I \to \mathbb{R}$ est continue dans J, et qui vérifie l'équation 6.2.1, est appelée *solution* de cette équation.

6.2.3 Proposition : *Soit* $f\big(y(x)\big)\,y'(x) \;=\; g(x)$ *une équation différentielle à variables séparables, où* $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue dans l'intervalle ouvert* $I_1 \subset \mathbb{R}$ *et* $g\colon I_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue dans l'intervalle ouvert* $I_2 \subset \mathbb{R}$. *Alors, toute solution (si elle existe)* $y\colon J \to I_1$ *de cette équation différentielle, où* $J \subset I_2$ *est un intervalle ouvert, s'écrit, sous forme implicite :*

$$F\big(y(x)\big) \;=\; \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où F *est une primitive de* f *dans* I_1. *Par définition, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle donnée (i.e. l'ensemble de toutes les fonctions* y *satisfaisant l'équation différentielle en question) est appelé* solution générale *de cette équation.*

Preuve : Reprenons les hypothèses de la proposition. Soit alors $y\colon J \to I_1$, où $J \subset I_2$, une solution de l'équation différentielle donnée (à supposer que cette solution existe). Alors, pour tout $x \in J$:

$$f\big(y(x)\big)\,y'(x) \;=\; g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad F\big(y(x)\big) \;=\; \int g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où F est une primitive de f dans I_1 ; en effet, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(y(x)\big) = f\big(y(x)\big)\,y'(x)$. Ainsi donc, $y\colon J \to I_1$ est solution de l'équation différentielle donnée si et seulement si elle satisfait l'égalité $F\big(y(x)\big) = \int g(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

6.2.4 Exemples : 1. Soit l'équation différentielle à variables séparables :

$$y'(x) \;=\; \frac{x}{y(x)}\,.$$

Une multiplication (des deux côtés) par $y(x)$ permet d'écrire cette équation sous la forme $y(x)\,y'(x) = x$, qui peut être directement intégrée :

$$\begin{aligned} y(x)\,y'(x) \;=\; x \quad \Leftrightarrow \quad \int y(x)\,y'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int x\,\mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(y(x)\big)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,x^2 + C \\ &\Leftrightarrow \quad \big(y(x)\big)^2 \;=\; x^2 + 2\,C\,, \end{aligned}$$

où C est une constante réelle. Les fonctions y_- et y_+, données respectivement par $y_-(x) = -\sqrt{x^2+2\,C}$ et $y_+(x) = \sqrt{x^2+2\,C}$, sont donc toutes les deux des solutions de l'équation différentielle donnée. Noter que pour chaque C, il n'y a pas une, mais deux solution distinctes.

2. Soit l'équation différentielle à variables séparables :

$$y'(x) + \big(y(x)\big)^4 \exp(2\,x) \;=\; 0\,.$$

Un réarrangement des différents éléments qui constituent cette équation permet d'obtenir une expression qui peut être intégrée sans peine :

$$\begin{aligned}
y'(x) + \big(y(x)\big)^4 \exp(2\,x) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow & y'(x) &\;=\; -\big(y(x)\big)^4 \exp(2\,x)\\
&\Leftrightarrow & -\frac{y'(x)}{\big(y(x)\big)^4} &\;=\; \exp(2\,x)\\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{3\,\big(y(x)\big)^3} &\;=\; \frac{1}{2}\exp(2\,x) + C\\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{\big(y(x)\big)^3} &\;=\; 3\left(\frac{1}{2}\exp(2\,x) + C\right)\\
&\Leftrightarrow & y(x) &\;=\; \sqrt[3]{\frac{1}{3\,\big(\frac{1}{2}\exp(2\,x) + C\big)}}\;,
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle. Noter que $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est également une solution de l'équation différentielle donnée.

3. Soit l'équation différentielle à variables séparables :

$$\Big(1 + \big(y(x)\big)^2\Big) + (1+x^2)\,y'(x) \;=\; 0\,.$$

Un réarrangement des différents éléments qui constituent cette équation permet d'obtenir une expression qui peut être intégrée sans peine :

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \big(y(x)\big)^2\Big) + (1+x^2)\,y'(x) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow & (1+x^2)\,y'(x) &\;=\; -\Big(1 + \big(y(x)\big)^2\Big)\\
&\Leftrightarrow & \frac{y'(x)}{1+\big(y(x)\big)^2} &\;=\; -\frac{1}{1+x^2}\\
&\Leftrightarrow & \operatorname{Arctg}\big(y(x)\big) &\;=\; -\operatorname{Arctg}(x) + C
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle. Pour obtenir y, il convient d'appliquer la tangente des deux côtés ; reste alors à préciser les conditions sous lesquelles y est bien définie...

6.2.5 Remarque : La proposition 6.2.3 fournit la marche à suivre permettant d'obtenir formellement la solution générale, sous forme implicite, de l'équation différentielle à variable séparable $f\big(y(x)\big)\, y'(x) = g(x)$. Elle n'indique cependant pas les circonstances dans lesquelles cette solution générale existe. Le théorème qui suit apporte les précisions nécessaires.

6.2.6 Théorème : *Soit l'équation différentielle à variables séparables :*

$$f\big(y(x)\big)\, y'(x) \;=\; g(x)\,,$$

où $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I_1 \subset \mathbb{R}$ et $g\colon I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I_2 \subset \mathbb{R}$. Supposons que f ne s'annule pas dans I_1. Alors, pour tout couple $(x_0;\, y_0)$, où $x_0 \in I_2$ et $y_0 \in I_1$, il existe une unique solution $y\colon J \to I_1$ de l'équation donnée, où $J \subset I_2$ est un intervalle ouvert, qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème d'existence et d'unicité locale*** *pour les équations différentielles à variables séparables.*

Preuve : Soit l'équation différentielle $f\big(y(x)\big)\, y'(x) = g(x)$, où $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ne s'annulant pas dans l'intervalle ouvert I_1 et $g\colon I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert I_2. Soit aussi le couple $(x_0;\, y_0)$, où $x_0 \in I_2$ et $y_0 \in I_1$. Pour montrer qu'il existe une unique fonction $y : J \to I_1$, où $J \subset I_2$ est un intervalle ouvert, qui satisfait l'équation différentielle donnée et qui remplit la condition $y(x_0) = y_0$, il convient de procéder en deux étapes : prouver d'abord l'existence d'une telle fonction, puis démontrer son unicité.

- Soit F la fonction donnée par :

$$F(y) \;=\; \int_{y_0}^{y} f(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y}\,,$$

où $y \in I_1$. La fonction f étant continue dans I_1, F est définie et dérivable dans I_1. En outre :

◇ F s'annule en y_0 (vu que $F(y_0) = \int_{y_0}^{y_0} f(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} = 0$),

◇ F est strictement croissante ou strictement décroissante dans I_1, vu que f ne s'annule pas dans I_1.

La fonction $F\colon I_1 \to I_F$, où $I_F = F(I_1)$ est l'image de I_1 par F, est donc bijective ; elle admet, par conséquent, une réciproque (*cf.* proposition 2.10.6, section 2.10 du chapitre 2). Cette réciproque, que l'on note ${}^{\mathrm{r}}\!F$, est continue dans I_F, vu que F est dérivable, et donc continue dans I_1. Soit à présent l'expression :

$$y(x) \;=\; {}^{\mathrm{r}}\!F\left(\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right)\,,$$

où $x \in I_2$. Le fait que ${}^{\mathrm{r}}\!F$ est une fonction continue (et donc définie) dans I_F, et que $0 \in I_F$ (vu que $F(y_0) = \int_{y_0}^{y_0} f(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y} = 0 \in I_F$) permet d'affirmer qu'il existe un voisinage $J \subset I_2$ de x_0 tel que, pour tout $x \in J$, $y(x)$ est bien définie. $y\colon J \to I_1$ est donc une fonction ; cette fonction remplit la condition $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y(x_0) \;&=\; {}^{\mathrm{r}}F\left(\int_{x_0}^{x_0} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right) \;=\; {}^{\mathrm{r}}F\left(F(y_0) + \int_{x_0}^{x_0} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right) \\ &=\; {}^{\mathrm{r}}F\big(F(y_0) + 0\big) \;=\; {}^{\mathrm{r}}F\big(F(y_0)\big) \;=\; y_0\,, \end{aligned}$$

et satisfait l'équation différentielle $f\big(y(x)\big)\,y'(x) \;=\; g(x)$, vu que :

$$y(x) \;=\; {}^{\mathrm{r}}F\left(\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad F\big(y(x)\big) \;=\; \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F\big(y(x)\big)\Big) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right) \\ \Leftrightarrow \quad F'\big(y(x)\big)\,y'(x) \;&=\; g(x)\,, \end{aligned}$$

du fait que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(G(x) - G(x_0)\big) \;=\; g(x)$, G étant une primitive de g dans I_2. L'équation différentielle $f\big(y(x)\big)\,y'(x) \;=\; g(x)$ admet donc bien une solution $y\colon J \to I_1$.

- Pour prouver que la solution obtenue au point précédent est unique, il suffit de supposer l'existence d'une autre fonction $v : J \to I_1$ qui satisfait l'équation différentielle donnée et qui remplit la condition $v(x_0) = y_0$, puis de se rendre compte que v n'est autre que la fonction y obtenue précédemment. Soit donc $v\colon J \to I_1$ une telle fonction. Alors, pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned} f\big(v(x)\big)\,v'(x) \;=\; g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f\big(v(\tilde{x})\big)\,v'(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \;=\; \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &\Leftrightarrow \quad F\big(v(\tilde{x})\big)\Big|_{x_0}^{x} \;=\; \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &\Leftrightarrow \quad F\big(v(x)\big) - F\big(v(x_0)\big) \;=\; \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &\Leftrightarrow \quad F\big(v(x)\big) \;=\; F\big(v(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &\Leftrightarrow \quad v(x) \;=\; {}^{\mathrm{r}}F\left(F\big(v(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}\right)\,, \end{aligned}$$

où F est la primitive définie plus haut, dans la première partie de la preuve, et ${}^{\mathrm{r}}F$ sa réciproque. Or, $v(x_0) = y_0$. Par conséquent, $F\big(v(x_0)\big) = F(y_0) = 0$ et donc $v(x) = y(x)$ pour tout $x \in J$; d'où la conclusion. $\square$

6.2.7 Remarque : Dans la proposition précédente, le nombre d'intervalles ouverts J admissibles est infini. Parmi tous ces intervalles, il y en a un, noté $\hat{J}$ qui est le plus grand : c'est celui qui est obtenu en réunissant tous les intervalles J admissibles. La fonction $y : \hat{J} \to I_1$, satisfaisant l'équation différentielle $f\big(y(x)\big)\, y'(x) \;=\; g(x)$ et ayant pour ensemble de départ l'intervalle ouvert $\hat{J}$, constitue alors ce que l'on appelle la *solution maximale* de l'équation différentielle en question.

6.3 Équations différentielles linéaires

6.3.1 Définition : Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est dite *linéaire* si elle peut s'écrire sous la forme :

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) \;=\; b(x)\,,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ sont des fonctions continues dans un intervalle ouvert I donné et a_n une fonction non identiquement nulle.

6.3.2 Remarques :

- En la divisant des deux côtés par $a_n(x)$, pour autant que $a_n(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, l'expression de la définition précédente devient :

  $$y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_2(x)\, y''(x) + \alpha_1(x)\, y'(x) + \alpha_0(x)\, y(x) \;=\; \beta(x)\,,$$

  où $\alpha_k(x) = \frac{a_k(x)}{a_n(x)}$, $k = 1, \ldots, n-1$, et $\beta(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)}$. Toute équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n peut donc être mise sous une forme dans laquelle le coefficient multipliant $y^{(n)}$ vaut 1.
- Parmi les équations différentielles linéaires, les équations du premier et du deuxième ordre sont celles qui se retrouvent le plus fréquemment dans les problèmes de physique, notamment ceux de mécanique et d'électromagnétisme. De fait, ce type d'équations mérite d'être étudié dans le détail.

6.3.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

6.3.3 Définition : On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation différentielle pouvant être écrite sous la forme :

$$y'(x) + p(x)\, y(x) \;=\; q(x) \qquad \text{(de façon plus compacte : } \; y' + p\, y \;=\; q\,)\,, \qquad (6.3.1)$$

où $p : I \to \mathbb{R}$ et $q : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle ouvert I, y une fonction et y' sa dérivée.

6.3.4 Définition : Toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$, dérivable dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dont la dérivée $y' : I \to \mathbb{R}$ est continue dans I, et qui vérifie l'équation 6.3.1, est appelée *solution* de cette même équation.

6.3.5 Remarques : • Toute fonction $y\colon J \to \mathbb{R}$, dérivable dans un certain intervalle ouvert $J \subset I$, dont la dérivée $y' : J \to \mathbb{R}$ est continue dans J, et qui satisfait l'équation différentielle 6.3.1, peut également être appelée solution de l'équation en question. Si ce sont les solutions $y\colon I \to \mathbb{R}$ qui sont en général considérées, c'est essentiellement pour avoir une unité dans les domaines de départ des fonctions y, p et q. Noter que ces solutions $y\colon I \to \mathbb{R}$ sont maximales, vu que l'équation 6.3.1 n'est pas définie en dehors de I.

- Il existe essentiellement deux méthodes pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre : la méthode de la *variation de la constante* et celle du *facteur intégrant*. Chacune d'elles a ses avantages et ses inconvénients ; raison pour laquelle les deux vont être traitées.

Méthode de la variation de la constante

6.3.6 Définition : On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène* toute équation différentielle de la forme :

$$y'(x) + p(x)\, y(x) \;=\; 0\,,$$

où $p\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

6.3.7 Proposition : *Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène :*

$$y'(x) + p(x)\, y(x) = 0\,,$$

où $p\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Toute solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ de cette équation (dans l'intervalle I) s'écrit :

$$y(x) \;=\; K\exp\bigl(-P(x)\bigr)\,,$$

où P est une primitive de p dans I et K une constante réelle. Autrement dit, $y\colon I \to \mathbb{R}$, telle que donnée ci-dessus, est la solution générale de l'équation $y'(x) + p(x)\, y(x) = 0$.

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire, homogène $y'(x) + p(x)\, y(x) = 0$, où $p\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans l'intervalle ouvert I. Cette équation peut être récrite sous la forme $y'(x) = -p(x)\, y(x)$, ou encore, si $y(x) \neq 0$ quel que soit $x \in I$, sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \;&\Leftrightarrow\; \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int -p(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \ln\bigl|y(x)\bigr| \;=\; -P(x) + C\\
&\Leftrightarrow\; \bigl|y(x)\bigr| \;=\; \exp\bigl(-P(x) + C\bigr) \;\Leftrightarrow\; \bigl|y(x)\bigr| \;=\; \exp\bigl(-P(x)\bigr)\,\underbrace{\exp(C)}_{=A}\\
&\Leftrightarrow\; y(x) \;=\; \pm A\exp\bigl(-P(x)\bigr) \;\Leftrightarrow\; y(x) \;=\; \tilde{A}\exp\bigl(-P(x)\bigr)\,,
\end{aligned}$$

où P est une primitive de p dans I, C une constante réelle, $A = \exp(C)$ une constante réelle strictement positive (vu que $\exp(C) > 0$ quelle que soit C) et $\tilde{A} = \pm A$ une constante réelle non nulle. Noter que l'équation différentielle donnée est également satisfaite dans le cas où y est la fonction identiquement nulle ; en effet, si $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $y'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que $0 = -p(x)\,0$. L'équation différentielle $y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$ admet donc pour solution la fonction donnée par $y(x) = K\exp\bigl(-P(x)\bigr)$, où K est une constante réelle quelconque et $x \in I$. Montrons encore que cette solution est la solution générale. À cet effet, prenons une solution v quelconque de l'équation différentielle et considérons la fonction $\tilde{v}$ donnée :

$$\tilde{v}(x) \;=\; \frac{v(x)}{\exp\bigl(-P(x)\bigr)} \;=\; v(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\tilde{v}'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}x}(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) + v(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\bigl(P(x)\bigr)\\ &=\; v'(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) + v(x)\,p(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)\\ &=\; \bigl(v'(x) + p(x)\,v(x)\bigr)\exp\bigl(P(x)\bigr) \;=\; 0\,,\end{aligned}$$

vu que, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\bigl(P(x)\bigr) = \exp\bigl(P(x)\bigr)\,P'(x) = \exp\bigl(P(x)\bigr)\,p(x)$ (du fait que P est une primitive de p) et que v est une solution de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x) = 0$. Par conséquent, $\tilde{v}(x) = B$ pour tout $x \in I$, où B est une constante réelle ; d'où :

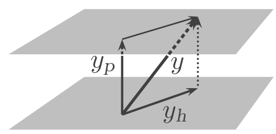
$$v(x) \;=\; \tilde{v}(x)\exp\bigl(-P(x)\bigr) \;=\; B\exp\bigl(-P(x)\bigr)\,.$$

La solution v a donc la même forme que la fonction y obtenue précédemment. Ainsi, toute solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$ s'écrit $y(x) = K\exp\bigl(-P(x)\bigr)$, où K est une constante réelle. $\square$

6.3.8 Proposition : *Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre :*

$$y'(x) + p(x)\,y(x) \;=\; q(x)\,,$$

où $p\colon I \to \mathbb{R}$ et $q\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors toute solution $y : I \to \mathbb{R}$ de cette équation (dans l'intervalle I) s'écrit sous la forme :



$$y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x)\,,$$

où :

- *$y_h\colon I \to \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation homogène $y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$ (associée à l'équation $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$),*
- *$y_p\colon I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$.*

Autrement dit, $y = y_h + y_p$ est la solution générale de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x) = q(x)$.

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$, où $p,q\colon I\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans l'intervalle ouvert I. Soient $y_\mathrm{h}\colon I\to\mathbb{R}$ la solution générale de l'équation homogène $y'(x)+p(x)\,y(x)=0$, et $y_\mathrm{p}: I\to\mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation complète $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$. La preuve établissant le fait que toute solution de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$ s'écrit sous la forme $y(x)=y_\mathrm{h}(x)+y_\mathrm{p}(x)$ s'effectue en deux étapes : la première consiste à montrer que $y=y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$ est effectivement solution de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$; la deuxième a pour objectif d'établir que toute solution de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$ est de la forme $y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$.

- L'expression $y=y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$ est solution de l'équation $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$. En effet :

$$\begin{aligned}y'(x)+p(x)\,y(x) &= (y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p})'(x)+p(x)\,(y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p})(x)\\ &= y_\mathrm{h}'(x)+y_\mathrm{p}'(x)+p(x)\,y_\mathrm{h}(x)+p(x)\,y_\mathrm{p}(x)\\ &= \underbrace{y_\mathrm{h}'(x)+p(x)\,y_\mathrm{h}(x)}_{=0}+\underbrace{y_\mathrm{p}'(x)+p(x)\,y_\mathrm{p}(x)}_{=q(x)} = q(x)\,,\end{aligned}$$

  du fait que y_h est solution de l'équation homogène $y'(x)+p(x)\,y(x)=0$ et y_p solution de l'équation complète $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$.

- Toute solution de l'équation différentielle $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$ est de la forme $y=y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$. Pour s'en convaincre, on considère une autre solution de l'équation différentielle complète $y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x)$, que l'on note w, et on s'intéresse à la différence $w-y$, où $y=y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$. En injectant $w-y$ dans la partie de gauche de l'équation différentielle en question, on trouve :

$$\begin{aligned}(w-y)'(x)+p(x)\,(w-y)(x) &= w'(x)-y'(x)+p(x)\,w(x)-p(x)\,y(x)\\ &= \big(\underbrace{w'(x)+p(x)\,w(x)}_{=q(x)}\big)-\big(\underbrace{y'(x)+p(x)\,y(x)}_{=q(x)}\big)\\ &= q(x)-q(x) = 0\,,\end{aligned}$$

  vu que w et y satisfont toutes les deux l'équation différentielle complète. Manifestement donc, $w-y$ satisfait l'équation homogène associée à l'équation complète. Or, si $w-y$ satisfait l'équation homogène, elle doit avoir la forme d'une solution $\tilde{y}_\mathrm{h}$ de l'équation homogène, $w-y=\tilde{y}_\mathrm{h}$. En conséquence :

$$w(x) = \tilde{y}_\mathrm{h}(x)+y(x) = \tilde{y}_\mathrm{h}(x)+y_\mathrm{h}(x)+y_\mathrm{p}(x)\,;$$

  mais $\tilde{y}_\mathrm{h}+y_\mathrm{h}$ est encore la solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{aligned}\tilde{y}_\mathrm{h}(x)+y_\mathrm{h}(x) &= \tilde{K}\exp\big(-P(x)\big)+K\exp\big(-P(x)\big)\\ &= (\tilde{K}+K)\exp\big(-P(x)\big) = B\exp\big(-P(x)\big)\,,\end{aligned}$$

  où $B=\tilde{K}+K$ est une constante réelle quelconque. De fait, w est également de la forme $y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$, tout comme y. □

Selon la proposition 6.3.8, la solution générale y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x)+p(x)\,y(x) = q(x)$ s'obtient donc en cherchant d'abord la solution générale y_h de l'équation homogène $y'(x)+p(x)\,y(x) = 0$, puis en trouvant une solution particulière y_p de l'équation complète $y'(x)+p(x)\,y(x) = q(x)$. La solution y_h de l'équation homogène s'obtient grâce à la proposition 6.3.7. Quant à une solution particulière de l'équation complète, elle se trouve par tâtonnement, en quelque sorte, en faisant des essais. Une tentative particulièrement fructueuse consiste à prendre l'expression de la solution générale y_h de l'équation homogène, et à remplacer la constante K par une fonction c de x :

$$y_\mathrm{p}(x) \;=\; c(x)\,w(x)\,, \qquad \text{où :} \qquad w(x) \;=\; \exp\bigl(-P(x)\bigr)\,,$$

P étant une primitive de p dans l'intervalle ouvert I donné, dans lequel p est continue. En insérant cette expression, ainsi que celle de sa dérivée, $y_\mathrm{p}'(x) \;=\; c'(x)\,w(x) + c(x)\,w'(x)$, dans l'équation $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & c'(x)\,w(x) + c(x)\,w'(x) + p(x)\,c(x)\,w(x) \;=\; q(x) \\ \Leftrightarrow \qquad & c'(x)\,w(x) + c(x)\bigl(\underbrace{w'(x) + p(x)\,w(x)}_{=0}\bigr) \;=\; q(x)\,, \end{aligned}$$

du fait que w satisfait l'équation homogène $y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$. Ainsi :

$$c'(x)\,w(x) \;=\; q(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad c'(x) \;=\; \frac{q(x)}{w(x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad c(x) \;=\; \int \frac{q(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

d'où le résultat qui suit.

6.3.9 Proposition : *Soit $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $p\colon I \to \mathbb{R}$ et $q\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors toute solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ de cette équation différentielle s'écrit :*

$$y(x) \;=\; K\,w(x) + c(x)\,w(x) \;=\; \bigl(K + c(x)\bigr)\,w(x)\,,$$

où K est une constante réelle,

$$w(x) \;=\; \exp\bigl(-P(x)\bigr) \qquad \textit{et} \qquad c(x) \;=\; \int \frac{q(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

P étant une primitive de p dans I. Par définition, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle donnée (i.e. l'ensemble de toutes les fonctions de la forme de y, donnée ci-dessus) est appelé solution générale *de cette même équation.* □

6.3.10 Remarque : La technique de résolution (d'une équation différentielle linéaire du premier ordre) résumée dans la proposition précédente porte le nom de *méthode de la variation de la constante.* Cette appellation vient du fait que, lors de la recherche d'une solution particulière, la constante dans la solution générale de l'équation homogène est remplacée par une fonction ; la constante devient en quelque sorte variable.

Méthode du facteur intégrant

Reprenons l'expression de la solution y donnée dans la proposition 6.3.9 et divisons-la par la fonction w ; une telle opération est légitime vu que $w(x) = \exp\bigl(-P(x)\bigr) \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) \;=\; \bigl(K + c(x)\bigr)\, w(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y(x)}{w(x)} \;=\; K + c(x)\,.$$

Comme $w(x) = \exp\bigl(-P(x)\bigr)$, alors $\frac{1}{w(x)} = \exp\bigl(P(x)\bigr)$. Ainsi, la dernière expression obtenue peut se récrire :

$$y(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) \;=\; K + c(x)\,.$$

En dérivant cette équation des deux côtés par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(y(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)\Bigr) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(K + c(x)\bigr)\\
\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) + y(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\bigl(P(x)\bigr) \;&=\; c'(x)\\
\Leftrightarrow \quad y'(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) + y(x)\,p(x)\exp\bigl(P(x)\bigr) \;&=\; \frac{q(x)}{w(x)}\\
\Leftrightarrow \quad \bigl(y'(x) + p(x)\,y(x)\bigr)\exp\bigl(P(x)\bigr) \;&=\; q(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)\;;
\end{aligned}$$

en effet, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(K + c(x)\bigr) = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x) = 0 + c'(x) = c'(x)$, avec, selon la proposition 6.3.9, $c'(x) = \frac{q(x)}{w(x)} = q(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)$, vu que $\frac{1}{w(x)} = \exp\bigl(P(x)\bigr)$; aussi, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\bigl(P(x)\bigr) = \exp\bigl(P(x)\bigr)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \exp\bigl(P(x)\bigr)\,p(x)$, vu que P est une primitive de p. Or, la dernière équation obtenue :

$$\bigl(y'(x) + p(x)\,y(x)\bigr)\exp\bigl(P(x)\bigr) \;=\; q(x)\exp\bigl(P(x)\bigr)\,,$$

n'est rien d'autre que l'équation différentielle $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ multipliée par le facteur $\exp\bigl(P(x)\bigr)$. Ce constat permet alors d'énoncer le résultat suivant (dont les calculs qui viennent d'être faits constituent une preuve).

6.3.11 Proposition : *Soit $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $p\colon I \to \mathbb{R}$ et $q\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit aussi $\mathcal{I}\colon I \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :*

$$\mathcal{I}(x) \;=\; \exp\bigl(P(x)\bigr)\,,$$

où P est une primitive de p dans I. Alors :

- *la fonction donnée par $\bigl(y'(x) + p(x)\,y(x)\bigr)\,\mathcal{I}(x)$ admet comme primitive, dans I, la fonction donnée par $y(x)\,\mathcal{I}(x)$;*

- *l'équation différentielle :*

$$\big(y'(x) + p(x)\,y(x)\big)\,\mathcal{I}(x) \;=\; q(x)\,\mathcal{I}(x)$$

est équivalente, dans I, à l'équation intégrale :

$$y(x)\,\mathcal{I}(x) \;=\; \int q(x)\,\mathcal{I}(x)\,\mathrm{d}x \;;$$

- *la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) + p(x)\,y(x) \;=\; q(x)$ est la fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$ donnée par :*

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\mathcal{I}(x)} \int q(x)\,\mathcal{I}(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \square$$

6.3.12 Remarques : • Le facteur $\mathcal{I}(x) = \exp\big(P(x)\big)$, introduit dans la proposition précédente, est appelé *facteur intégrant* de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$.

- Toute équation différentielle linéaire du premier ordre peut être résolue soit en recherchant la solution générale de l'équation homogène, ainsi qu'une solution particulière de l'équation totale (à l'aide de la méthode de la variation de la constante), soit avec la technique faisant intervenir le facteur intégrant. Dans les deux cas, le résultat obtenu est exactement le même.
- Si les équations différentielles du premier ordre de la forme $y'(x)+p(x)\,y(x) = q(x)$ portent le qualificatif *linéaire*, c'est en raison du fait que leur solution générale s'écrit sous la forme d'une superposition de deux solutions (la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation complète), comme s'il s'agissait de la résultante de deux vecteurs (le premier vecteur étant la solution générale de l'équation homogène, le deuxième une solution particulière de l'équation complète).

6.3.13 Exemple : Soit l'équation différentielle :

$$y'(x) - 3\,x^2\,y(x) \;=\; x^2\,.$$

Résolvons cette équations par la méthode de la variation de la constante, puis par la méthode du facteur intégrant.

- *Méthode de la variation de la constante* :
  Selon la proposition 6.3.8, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$, où y_{h} est la solution générale de l'équation différentielle homogène $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = 0$ et y_{p} une solution particulière de l'équation différentielle complète $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = x^2$.
  - ◇ *Solution générale de l'équation homogène $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = 0$* :
    Cette équation peut être récrite sous la forme $y'(x) = 3\,x^2\,y(x)$, ou encore, si

$y(x) \neq 0$ quel que soit x, sous la forme $\frac{y'(x)}{y(x)} = 3\,x^2$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} = 3\,x^2 \;&\Leftrightarrow\; \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int 3\,x^2\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \ln\bigl|y(x)\bigr| = x^3 + C\\
&\Leftrightarrow\; \bigl|y(x)\bigr| = \exp(x^3 + C) \;\Leftrightarrow\; \bigl|y(x)\bigr| = \exp(x^3)\,\underbrace{\exp(C)}_{=A}\\
&\Leftrightarrow\; y(x) = \pm A\exp(x^3) \;\Leftrightarrow\; y(x) = \tilde{A}\exp(x^3)\,,
\end{aligned}$$

où C est une constante réelle, $A = \exp(C)$ une constante réelle strictement positive et $\tilde{A} = \pm A$ une constante réelle non nulle. Noter que l'équation est également satisfaite dans le cas où y est la fonction identiquement nulle. La solution générale de l'équation $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = 0$ s'écrit donc :

$$y_{\mathrm{h}}(x) = K\exp(x^3)\,,$$

où K est une constante réelle quelconque.

◇ *Solution particulière de l'équation complète* $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = x^2$:
On reprend l'expression de y_{h} et on remplace la constante K par une fonction c de x :

$$y_{\mathrm{p}}(x) = c(x)\exp(x^3)\,.$$

En injectant l'expression de y_{p}, ainsi que celle de sa dérivée :

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = c'(x)\exp(x^3) + c(x)\,3\,x^2\exp(x^3)\,,$$

dans l'équation complète, on obtient :

$$\begin{aligned}
c'(x)\exp(x^3) + c(x)\,3\,x^2\exp(x^3) - 3\,x^2\,c(x)\exp(x^3) &= x^2\\
\Leftrightarrow\quad c'(x)\exp(x^3) &= x^2\\
\Leftrightarrow\quad c'(x) &= x^2\exp(-x^3)\,.
\end{aligned}$$

d'où, en intégrant des deux côtés :

$$c(x) = -\frac{1}{3}\exp(-x^3)\,.$$

La solution particulière s'écrit alors :

$$y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{3}\exp(-x^3)\exp(x^3) = -\frac{1}{3}\,.$$

La solution générale de l'équation $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = x^2$ est donc :

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = K\exp(x^3) - \frac{1}{3}\,.$$

- *Méthode du facteur intégrant* :
  Le facteur intégrant associé à l'équation différentielle $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = x^2$ s'écrit :

$$\mathcal{I}(x) \;=\; \exp\left(\int -3\,x^2\,\mathrm{d}x\right) \;=\; \exp(-x^3)\,.$$

En multipliant alors les deux côtés $y'(x) - 3\,x^2\,y(x) = x^2$ par $\mathcal{I}(x)$, on obtient, selon la proposition 6.3.11, une équation qui peut être directement intégrée :

$$\begin{aligned} y'(x) - 3\,x^2\,y(x) \;&=\; x^2 \\ \Leftrightarrow \quad y'(x)\exp(-x^3) - 3\,x^2\exp(-x^3)\,y(x) \;&=\; x^2\exp(-x^3) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y(x)\exp(-x^3)\big) \;&=\; x^2\exp(-x^3) \\ \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y(x)\exp(-x^3)\big)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int x^2\exp(-x^3)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad y(x)\exp(-x^3) \;&=\; -\frac{1}{3}\exp(-x^3) + C\,. \end{aligned}$$

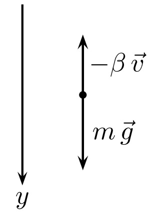
En multipliant cette dernière relation des deux côtés par $\exp(x^3)$, on trouve la solution générale de l'équation différentielle donnée :

$$y(x) \;=\; \left(-\frac{1}{3}\exp(-x^3) + C\right)\exp(x^3) \;=\; C\exp(x^3) - \frac{1}{3}\,.$$

Cette expression est la même que celle obtenue précédemment, avec la méthode de la variation de la constante.

L'exemple qui vient d'être traité illustre bien le fait qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre se résout plus rapidement par la méthode du facteur intégrant. De fait, il est naturel de préférer cette méthode à celle de la variation de la constante.

6.3.14 Illustration : Considérons une gouttelette d'eau de brouillard, de masse m, dans l'air, qui tombe à terre. Dans l'air, la gouttelette est soumise essentiellement à deux forces : la force de pesanteur et une force de frottements (due aux frottements dans l'air) ; tant que la vitesse de la goutte n'est pas trop grande, l'intensité de cette dernière est, en tout temps, proportionnelle à la vitesse de la goutte. Noter que la goutte subit encore une troisième force, la *force d'Archimède*, due à l'air environnant ; dans la situation présente, cette force a une intensité suffisamment petite pour pouvoir être négligée. En plaçant un axe vertical y orienté vers le bas, en projetant les deux forces sur cet axe, puis en appliquant la deuxième loi de Newton (relative à la dynamique des corps matériels), on obtient une équation différentielle qui décrit l'évolution de la gouttelette :



$$m\,\dot{v}(t) \;=\; m\,g - \beta\,v(t)\,,$$

où $v(t)$ est la vitesse selon y de la gouttelette dans l'air au temps t, $\dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)$ son accélération selon y au temps t, g la norme de l'accélération due à la pesanteur (considérée comme constante ici) et β un facteur qui dépend du rayon r de la gouttelette, supposée sphérique, selon la relation $\beta = 6\,\pi\,\eta_{\mathrm{air}}\,r$, où η_{air} est un paramètre appelé *coefficient de viscosité dynamique* de l'air ($\eta_{\mathrm{air}} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ à la température de 20 °C). En ajoutant $\beta\,v(t)$ aux deux côtés de cette relation, puis en divisant les deux côtés par m, on obtient la forme typique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$m\,\dot{v}(t) + \beta\,v(t) \;=\; g \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{v}(t) + \frac{\beta}{m}\,v(t) \;=\; g\,.$$

Résolvons cette équation en utilisant la méthode du facteur intégrant. Pour cela, commençons par calculer le facteur intégrant $\mathcal{I}(t)$. Vu que $\frac{\beta}{m}\,t$ est l'expression d'une primitive de la fonction donnée par $\frac{\beta}{m}$, le facteur intégrant s'écrit :

$$\mathcal{I}(t) \;=\; \exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right)\,.$$

En multipliant alors les deux côtés $\dot{v}(t) + \frac{\beta}{m}\,v(t) \;=\; g$ par $\mathcal{I}(t)$, on obtient une équation qui peut être directement intégrée :

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t) + \frac{\beta}{m}\,v(t) \;&=\; g \\
\Leftrightarrow \quad \dot{v}(t)\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right) + \frac{\beta}{m}\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right)v(t) \;&=\; g\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v(t)\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right)\right] \;&=\; g\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right) \\
\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v(t)\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right)\right]\mathrm{d}t \;&=\; \int g\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right)\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad v(t)\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right) \;&=\; \frac{m\,g}{\beta}\exp\!\left(\frac{\beta}{m}\,t\right) + C\,,
\end{aligned}$$

où C est une constante. En multipliant cette dernière relation des deux côtés par $\exp\!\left(-\frac{\beta}{m}\,t\right)$, on trouve la solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) \;=\; \frac{m\,g}{\beta} + C\exp\!\left(-\frac{\beta}{m}\,t\right)\,.$$

Supposons que la goutte était initialement, au temps $t = 0$, immobile. Mathématiquement, cette condition se traduit par l'expression $v(0) = 0$. La solution de l'équation différentielle $\dot{v}(t) + \frac{\beta}{m}\,v(t) = g$ qui satisfait $v(0) = 0$ est alors celle pour laquelle $C = -\frac{m\,g}{\beta}$; en effet, $0 = v(0) = \frac{m\,g}{\beta} + C\exp(0) = \frac{m\,g}{\beta} + C$. Cette solution s'écrit donc :

$$v(t) \;=\; \frac{m\,g}{\beta} - \frac{m\,g}{\beta}\exp\!\left(-\frac{\beta}{m}\,t\right) \;=\; \frac{m\,g}{\beta}\left[1 - \exp\!\left(-\frac{\beta}{m}\,t\right)\right]\,.$$

À la limite lorsque t tend vers l'infini, la vitesse de la gouttelette vaut :

$$\lim_{t\to\infty} v(t) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{m\,g}{\beta}\left[1-\exp\left(-\frac{\beta}{m}\,t\right)\right] \;=\; \frac{m\,g}{\beta}\,(1-0) \;=\; \frac{m\,g}{\beta}\,.$$

Pour une gouttelette de 20 µm de diamètre, $\frac{m\,g}{\beta} \approx 0{,}012\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 12\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$ à 20 °C, ce qui est suffisamment petit pour pouvoir prétendre que la force de frottement est en tout temps $t \geqslant 0\,\mathrm{s}$ proportionnelle à la vitesse de la gouttelette. Dans le cas d'une goutte de pluie, par contre (dont le diamètre peut être supérieur à 2 mm), la quantité $\frac{m\,g}{\beta}$ est suffisamment grande pour pouvoir dire qu'il existe un instant $t_1 > 0\,\mathrm{s}$ à partir duquel la force de frottement n'est plus proportionnelle à la vitesse ; la solution $v(t)$ obtenue ci-dessus n'est, dans ce cas, valable que pour les instants t compris entre 0 s et l'instant t_1.

Note : La solution $v(t)$ obtenue ci-dessus est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pourtant, la situation physique considérée, elle, n'est spécifiée qu'à partir de $t = 0\,\mathrm{s}$ (l'instant où la goutte est encore juste immobile), et seulement jusqu'à l'instant t_1 dans le cas de la goutte de pluie. La solution obtenue n'est donc pas valable dans tout $\mathbb{R}$, mais seulement dans un intervalle qui commence en $t = 0\,\mathrm{s}$. C'est typiquement pour ce genre de situation que le premier point de la remarque 6.3.5 a été formulé.

6.3.15 Théorème : *Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre :*

$$y'(x) + p(x)\,y(x) \;=\; q(x)\,,$$

où $p: I \to \mathbb{R}$ et $q: I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout couple $(x_0;\, y_0)$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y: I \to \mathbb{R}$ de l'équation donnée, qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème d'existence et d'unicité*** *pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.*

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$, où $p, q : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit aussi le couple $(x_0;\, y_0)$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer qu'il existe une unique fonction $y: I \to \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle donnée et qui remplit la condition $y(x_0) = y_0$, il convient de procéder en deux étapes : prouver d'abord l'existence d'une telle fonction, puis démontrer son unicité.

- Selon le théorème 6.3.9, l'équation différentielle $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ admet pour solution générale la fonction $u: I \to \mathbb{R}$ donnée par :

  $$u(x) \;=\; \big(K + c(x)\big)\,w(x)\,,$$

  où K est une constante réelle,

  $$w(x) \;=\; \exp\big(-P(x)\big) \qquad \text{et} \qquad c(x) \;=\; \int \frac{q(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

  P étant une primitive de p dans I. En posant :

  $$K \;=\; \frac{y_0}{w(x_0)} - c(x_0)\,,$$

il vient :

$$u(x_0) \,=\, \big(K + c(x_0)\big)\, w(x_0) \,=\, \left[\left(\frac{y_0}{w(x_0)} - c(x_0)\right) + c(x_0)\right] w(x_0) \,=\, y_0\,.$$

Un tel calcul montre qu'il existe une fonction qui satisfait l'équation différentielle donnée et qui prend la valeur y_0 en x_0 ; cette fonction est la fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y(x) \,=\, \left[\left(\frac{y_0}{w(x_0)} - c(x_0)\right) + c(x)\right] w(x)\,.$$

- Pour prouver que la fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$ donnée au point précédent est unique, il suffit de remarquer toute solution de l'équation $y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$ est de la forme $\big(K + c(x)\big)\, w(x)$, d'une part, et d'autre part que, étant donné le couple $(x_0;\, y_0)$, l'expression $\frac{y_0}{w(x_0)} - c(x_0)$ n'est qu'un seul et même nombre réel. □

6.3.2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre, homogènes et à coefficients constants

6.3.16 Définition : On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants* toute équation différentielle pouvant être écrite sous la forme :

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \,=\, 0 \qquad \text{(de façon plus compacte : } \; a\,y'' + b\,y' + c\,y \,=\, 0\,)\,, \tag{6.3.2}$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, y une fonction, y' et y'' sa première et sa seconde dérivée, respectivement.

6.3.17 Définition : Toute fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$, dont la seconde dérivée $y''\colon I \to \mathbb{R}$ est continue dans I, et qui vérifie l'équation 6.3.2, est appelée *solution* de cette même équation.

6.3.18 Remarque : À ce stade, il n'est pas possible de montrer que toute solution de l'équation 6.3.2 est effectivement définie dans $\mathbb{R}$ tout entier ; ce résultat sera prouvé par la suite. Il va sans dire que toute fonction $y\colon J \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$, dont la seconde dérivée $y''\colon J \to \mathbb{R}$ est continue dans J, et qui satisfait l'équation différentielle 6.3.2, peut également être appelée solution de l'équation en question. Si ce sont les solutions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vont être en général considérées, c'est afin de disposer du cadre d'étude le plus large possible.

6.3.19 Proposition : *Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants :*

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \,=\, 0\,,$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés. Si $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de cette équation, alors la fonction $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y_3(x) \;=\; C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \;,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles, est aussi une solution de cette même équation.

Preuve : Soient $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$ (où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels) et $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $y_3 = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles. Alors :

$$\begin{aligned}
& a\, y_3''(x) + b\, y_3'(x) + c\, y_3(x) \;= \\
&= \; a\,(C_1\, y_1 + C_2\, y_2)''(x) + b\,(C_1\, y_1 + C_2\, y_2)'(x) + c\,(C_1\, y_1 + C_2\, y_2)(x) \\
&= \; C_1\, a\, y_1''(x) + C_2\, a\, y_2''(x) + C_1\, b\, y_1'(x) + C_2\, b\, y_2'(x) + C_1\, c\, y_1(x) + C_2\, c\, y_2(x) \\
&= \; C_1\big(\underbrace{a\, y_1''(x) + b\, y_1'(x) + c\, y_1(x)}_{=\,0}\big) + C_2\big(\underbrace{a\, y_2''(x) + b\, y_2'(x) + c\, y_2(x)}_{=\,0}\big) \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

du fait que $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfont toutes les deux l'équation différentielle $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$. La fonction $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc bien une solution de cette même équation. $\square$

6.3.20 Définition : Deux fonctions $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$, définies dans un certain intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$, sont dites *linéairement indépendantes* si l'égalité :

$$K_1\, y_1(x) + K_2\, y_2(x) \;=\; 0\,, \qquad \text{pour tout } x \in I\,,$$

où K_1 et K_2 sont des nombres réels, implique $K_1 = K_2 = 0$. Si l'égalité est vérifiée pour tout $x \in I$, avec au moins un des deux nombres réels K_1, K_2 qui est non nul, les deux fonctions sont dites *linéairement dépendantes.*

6.3.21 Remarque : La définition précédente peut être évidemment aussi énoncée dans le cas de fonctions définies dans tout $\mathbb{R}$.

6.3.22 Théorème :

- *Toute équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, possède deux solutions linéairement indépendantes $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
- *Toute solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels fixés, s'écrit :*

  $$y(x) \;=\; C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)\,,$$

  où $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle en question, C_1 et C_2 deux constantes réelles. Autrement dit, la fonction $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ est la solution générale de l'équation différentielle en question.

Preuve : Nécessitant des outils dont la complexité dépasse le cadre de la présente étude, ce théorème ne peut pas être démontré ici. □

Selon la proposition 6.3.22, la solution générale y de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=0$ s'obtient donc en cherchant deux fonctions linéairement indépendantes, qui satisfont toutes les deux l'équation en question. Toute la difficulté réside dans le fait de trouver ces deux solutions ; car il n'existe pas de méthode générale permettant de les obtenir. Il ne reste qu'à procéder par tâtonnement, en faisant des essais. En tentant une solution y ayant la forme d'une exponentielle, on remarque que l'équation différentielle $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=0$ se transforme en une équation algébrique, facile à résoudre ; en effet, si $y=\exp(\lambda\,x)$, où λ est un nombre, alors $y'(x)=\lambda\exp(\lambda\,x)$, $y''(x)=\lambda^2\exp(\lambda\,x)$, si bien qu'en insérant ces expressions dans l'équation différentielle en question, on obtient :

$$\begin{aligned} a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad a\,\lambda^2\exp(\lambda\,x)+b\,\lambda\exp(\lambda\,x)+c\exp(\lambda\,x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (a\,\lambda^2+b\,\lambda+c)\exp(\lambda\,x) &= 0\,; \end{aligned}$$

et vu que cette relation doit être satisfaite pour tout x, alors nécessairement :

$$a\,\lambda^2+b\,\lambda+c = 0\,.$$

Cette dernière expression n'est rien d'autre qu'une équation du deuxième degré en λ. Comme le montre le théorème qui suit, la résolution de cette équation permet d'exhiber les deux solutions linéairement indépendantes cherchées.

6.3.23 Définition : Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants :

$$a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = 0\,,$$

où $a\neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés. On appelle *équation caractéristique*, associée à l'équation différentielle donnée ci-dessus, l'équation du deuxième degré en la variable λ :

$$a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0\,.$$

6.3.24 Proposition : *Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants :*

$$a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = 0\,,$$

où $a\neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0$ son équation caractéristique. Trois situations peuvent se présenter.

1. $b^2-4\,a\,c>0$. *Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2 ; l'équation différentielle en question admet alors comme solution*

générale la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$y(x) \;=\; C_1 \exp(\lambda_1\, x) + C_2 \exp(\lambda_2\, x)\,,$$

où C_1 *et* C_2 *sont deux constantes réelles.*

2. $b^2 - 4\,a\,c = 0$. *Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une unique solution réelle (dite double)* λ_0 *; l'équation différentielle en question admet alors comme solution générale la fonction* $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$y(x) \;=\; C_1 \exp(\lambda_0\, x) + C_2\, x \exp(\lambda_0\, x)\,,$$

où C_1 *et* C_2 *sont deux constantes réelles.*

3. $b^2 - 4\,a\,c < 0$. *Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes* λ_1 *et* λ_2 *qui ne sont pas réelles mais complexes, et qui peuvent s'écrire sous la forme* $\lambda_1 = r - s\,\mathrm{i}$ *et* $\lambda_2 = r + s\,\mathrm{i}$*, où* $r = -\frac{b}{2\,a}$ *et* $s = \frac{1}{2\,a}\sqrt{4\,a\,c - b^2}$ *sont deux nombres réels, et* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ *par définition ; l'équation différentielle en question admet alors comme solution générale la fonction* $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$y(x) \;=\; \exp(r\,x)\big(C_1 \cos(s\,x) + C_2 \sin(s\,x)\big)\,,$$

où C_1 *et* C_2 *sont deux constantes réelles.*

Preuve : Soit $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = 0$ une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants (où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés) et $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ son équation caractéristique. Trois situations peuvent se présenter.

1. $b^2 - 4\,a\,c > 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2. Selon les calculs établis plus haut (menant à l'équation caractéristique), les fonctions $y_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, données respectivement par $y_1(x) = \exp(\lambda_1\, x)$ et $y_2(x) = \exp(\lambda_2\, x)$, satisfont toutes les deux l'équation différentielle en question. En outre, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, vu que l'égalité $K_1 \exp(\lambda_1\, x) + K_2 \exp(\lambda_2\, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où K_1 et K_2 sont deux nombres réels), implique $K_1 = K_2 = 0$. Le théorème 6.3.22 permet alors de conclure que la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y(x) \;=\; C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \;=\; C_1 \exp(\lambda_1\, x) + C_2 \exp(\lambda_2\, x)\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles, est la solution générale de l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ dans le cas où $b^2 - 4\,a\,c > 0$.

2. $b^2 - 4\,a\,c = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique possède une unique solution, dite double, λ_0. Selon les calculs établis précédemment (menant à l'équation caractéristique), la fonction $y_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_1(x) = \exp(\lambda_0\, x)$, satisfait l'équation différentielle en question. Pour obtenir la solution générale de l'équation différentielle, il est nécessaire de disposer d'une deuxième solution $y_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéairement indépendante de $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*cf.* théorème 6.3.22). On vérifie que

cette deuxième solution est donnée par $y_2(x) = x\exp(\lambda_0\, x)$: d'une part y_2 satisfait l'équation différentielle donnée (vérification laissée en exercice), d'autre part l'égalité $K_1\exp(\lambda_0\, x) + K_2\, x\exp(\lambda_0\, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où K_1 et K_2 sont deux nombres réels) implique $K_1 = K_2 = 0$. Le théorème 6.3.22 permet alors de conclure que la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y(x) \;=\; C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \;=\; C_1\exp(\lambda_0\, x) + C_2\, x\exp(\lambda_0\, x)\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles, est la solution générale de l'équation différentielle $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$ dans le cas où $b^2 - 4\,a\,c = 0$.

3. $b^2 - 4\,a\,c < 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 qui ne sont pas réelles mais complexes, qui peuvent s'écrire sous la forme $\lambda_1 = r - s\,\mathrm{i}$ et $\lambda_2 = r + s\,\mathrm{i}$, où $r = -\frac{b}{2\,a}$ et $s = \frac{1}{2\,a}\sqrt{4\,a\,c - b^2}$ sont deux nombres réels, et $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ par définition ; en effet :

$$\begin{aligned}\lambda_{1,\,2} \;&=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \;=\; -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{1}{2\,a}\sqrt{-(4\,a\,c - b^2)}\\ &=\; -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{1}{2\,a}\sqrt{4\,a\,c - b^2}\,\sqrt{-1} \;=\; \underbrace{-\frac{b}{2\,a}}_{=\,r} \pm \underbrace{\frac{1}{2\,a}\sqrt{4\,a\,c - b^2}\,\mathrm{i}}_{=\,s\,\mathrm{i}}\;.\end{aligned}$$

Soient à présent les fonctions $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$, données par $\tilde{y}_1(x) = \exp(\lambda_1\, x)$ et $\tilde{y}_2(x) = \exp(\lambda_2\, x)$. Selon les calculs établis plus haut (conduisant à l'équation caractéristique), ces fonctions satisfont toutes les deux l'équation différentielle en question ; de plus, elles semblent être linéairement indépendantes. Seulement, ces fonctions ne sont *a priori* pas réelles, mais complexes. Elles sortent donc du cadre du théorème 6.3.22 ; elles ne peuvent, par conséquent, pas être utilisées, du moins pas telles quelles, pour écrire la solution générale de l'équation différentielle en question. Posons néanmoins :

$$y(x) \;=\; A_1\exp(\lambda_1\, x) + A_2\exp(\lambda_2\, x)\,,$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes *a priori* complexes. Alors, en notant que :

$$\exp(\lambda_{1,\,2}\, x) \;=\; \exp\big((r \pm s\,\mathrm{i})\, x\big) \;=\; \exp(r\, x)\exp(\pm\mathrm{i}\, s\, x)\,,$$

et en appliquant la formule d'Euler (*cf.* sous-section C.8.10, annexe C), il vient :

$$\begin{aligned}
y(x) &= A_1 \exp(\lambda_1 x) + A_2 \exp(\lambda_2 x) \\
&= A_1 \exp\big((r - s\,\mathrm{i})\,x\big) + A_2 \exp\big((r + s\,\mathrm{i})\,x\big) \\
&= A_1 \exp(r\,x) \exp(-s\,\mathrm{i}\,x) + A_2 \exp(r\,x) \exp(s\,\mathrm{i}\,x) \\
&= \exp(r\,x)\big(A_1 \exp(-\mathrm{i}\,s\,x) + A_2 \exp(\mathrm{i}\,s\,x)\big) \\
&= \exp(r\,x)\Big(A_1\big(\cos(-s\,x) + \mathrm{i}\sin(-s\,x)\big) + A_2\big(\cos(s\,x) + \mathrm{i}\sin(s\,x)\big)\Big) \\
&= \exp(r\,x)\Big(A_1\big(\cos(s\,x) - \mathrm{i}\sin(s\,x)\big) + A_2\big(\cos(s\,x) + \mathrm{i}\sin(s\,x)\big)\Big) \\
&= \exp(r\,x)\big(\underbrace{(A_1 + A_2)}_{C_1}\cos(s\,x) + \underbrace{\mathrm{i}\,(A_2 - A_1)}_{C_2}\sin(s\,x)\big)\,,
\end{aligned}$$

où il a été posé $C_1 = A_1 + A_2$ et $C_2 = \mathrm{i}\,(A_2 - A_1)$. L'expression :

$$\exp(r\,x)\big(C_1 \cos(s\,x) + C_2 \sin(s\,x)\big)$$

est complètement réelle, pour autant que C_1 et C_2 soient réelles ; une telle condition peut être remplie sans difficulté aucune : il suffit de poser $A_1 = \frac{1}{2}\,(C_1 + C_2\,\mathrm{i})$ et $A_2 = \frac{1}{2}\,(C_1 - C_2\,\mathrm{i})$. Soient alors les fonctions $y_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, données respectivement par :

$$y_1(x) \;=\; \exp(r\,x)\cos(s\,x) \qquad \text{et} \qquad y_2(x) \;=\; \exp(r\,x)\sin(s\,x)\,.$$

Comme le montrent les calculs qui viennent d'être effectués, ces fonctions satisfont toutes les deux l'équation différentielle en question. En outre, elles sont linéairement indépendantes, vu que l'égalité $K_1 \exp(r\,x)\cos(s\,x) + K_2 \exp(r\,x)\sin(s\,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où K_1 et K_2 sont deux nombres réels) implique $K_1 = K_2 = 0$. Le théorème 6.3.22 permet alors de conclure que la fonction $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y(x) \;=\; \exp(r\,x)\big(C_1 \cos(s\,x) + C_2 \sin(s\,x)\big)\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles, est la solution générale de l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ dans le cas où $b^2 - 4\,a\,c < 0$. □

6.3.25 Remarques : • Dans la dernière situation du théorème précédent, si $b = 0$, alors $r = 0$ et donc $\lambda_1 = -s\,\mathrm{i}$ et $\lambda_2 = s\,\mathrm{i}$. Dans ce cas, $\exp(r\,x) = \exp(0) = 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, et la solution générale s'écrit donc simplement :

$$y(x) \;=\; C_1 \cos(s\,x) + C_2 \sin(s\,x)\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

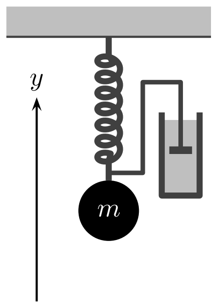
- Toute équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, peut être écrite sous la forme $y''(x) + \beta\,y'(x) + \gamma\,y(y) = 0$, où β et γ sont des nombres réels fixés. Pour cela, il suffit de diviser l'équation de départ par a ; les coefficients β et γ valent alors respectivement $\beta = \frac{b}{a}$ et $\gamma = \frac{c}{a}$.
- Lors de la résolution de l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ (où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels fixés), la donnée de conditions initiales permet de fixer la les valeurs des constantes C_1 et C_2. Du fait qu'il y a deux constantes, il est nécessaire d'avoir deux conditions initiales, une sur y, par exemple $y(0) = y_0$, et une autre sur la dérivée y', par exemple $y'(0) = y'_0$. Le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants (*cf.* théorème 6.3.36), revient sur ce sujet et le détaille.

6.3.26 Exemple : Soit l'équation différentielle $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$. Son équation caractéristique, $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$, admet deux solutions réelles distinctes, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Selon la proposition 6.3.24, l'équation différentielle en question admet alors comme solution générale la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y(x) = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(2\,x)$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

6.3.27 Illustration : Un objet de masse m est suspendu au plafond d'une pièce par l'intermédiaire d'un ressort (*cf.* figure ci-dessous) ; il est également lié à un piston de masse négligeable, se mouvant dans un liquide ayant une certaine viscosité. Dans ces circonstances, et à supposer que les frottements avec l'air sont négligeables, l'objet en question subit trois forces : la force due à la pesanteur, une force due au ressort et une force due au piston qui se meut dans le liquide visqueux. Soit alors un axe y, vertical et orienté vers le haut (*cf.* figure ci-dessous). En projetant les différentes forces sur y, et en appliquant la deuxième loi de Newton, il vient :

$$m\,\ddot{y}(t) \;=\; -m\,g - k\,\big(y(t) - y_0\big) - \beta\,\dot{y}(t)\,,$$

où :



- ◇ $y(t)$ est la position sur l'axe y, à l'instant t, de l'extrémité inférieure du ressort (cette position peut être assimilée à la position sur l'axe y de l'objet de masse m) ;
- ◇ $\dot{y}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ les dérivées première et seconde de y à l'instant t, respectivement (correspondant à la vitesse et à l'accélération de l'objet, selon y, à l'instant t, respectivement) ;
- ◇ $-m\,g$ est la composante selon y de la force de pesanteur, g étant l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre ($g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) ;
- ◇ $-k\,\big(y(t) - y_0\big)$ est la composante selon y, à l'instant t, de la force due au ressort, k étant un paramètre réel strictement positif (appelé *constante du ressort*) et y_0

la position de l'extrémité inférieure du ressort, lorsque celui-ci n'est ni contracté ni étiré ;

◇ $-\beta\,\dot{y}(t)$ est la composante selon y, à l'instant t, de la force due au piston, β étant un paramètre réel strictement positif (caractérisant la visquosité du liquide dans le piston).

L'équation qui vient d'être exposée peut être récrite comme suit :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{y}(t) &= -m\,g - k\big(y(t)-y_0\big) - \beta\,\dot{y}(t) \\ \Leftrightarrow \quad m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + m\,g + k\big(y(t)-y_0\big) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad m\,\ddot{y}(t) + \beta\,\dot{y}(t) + k\big(y(t)-y_0+\tfrac{m\,g}{k}\big) &= 0\,; \end{aligned}$$

autrement écrit, en posant $z(t) = y(t) - y_0 + \frac{m\,g}{k}$:

$$m\,\ddot{z}(t) + \beta\,\dot{z}(t) + k\,z(t) = 0\,,$$

où $\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y(t)-y_0+\frac{m\,g}{k}\big) = \dot{y}(t)$ et $\ddot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = \ddot{y}(t)$. Cette dernière expression est une équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants. Résolvons-là. À cet effet, écrivons son équation caractéristique :

$$m\,\lambda^2 + \beta\,\lambda + k = 0\,,$$

et exhibons les solutions de cette dernière :

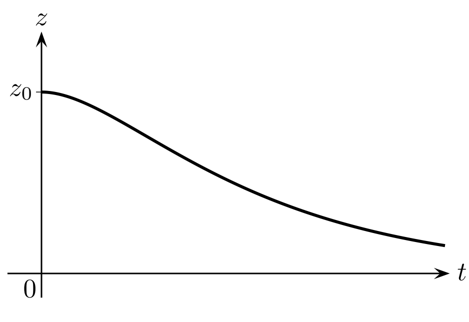
$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2\,m} \pm \frac{1}{2\,m}\sqrt{\beta^2 - 4\,m\,k}\,.$$

Trois situations peuvent alors se présenter (*cf.* proposition 6.3.24) :

- $\beta^2 - 4\,m\,k > 0$ (*amortissement fort*) :
  λ_1 et λ_2 sont distinctes, réelles et négatives (vu que $\sqrt{\beta^2 - 4\,m\,k} < \sqrt{\beta^2} = \beta$). La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

  $$z(t) = C_1 \exp(\lambda_1\,t) + C_2 \exp(\lambda_2\,t)\,,$$

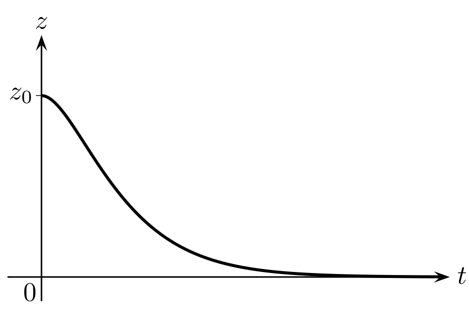
  où C_1 et C_2 sont des constantes réelles qui sont fixées par la donnée de conditions initiales ($z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$).



- $\beta^2 - 4\,m\,k = 0$ (*amortissement critique*) :
  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2\,m} \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

  $$z(t) = (C_1 + C_2\,t)\exp(\lambda_0\,t)\,,$$

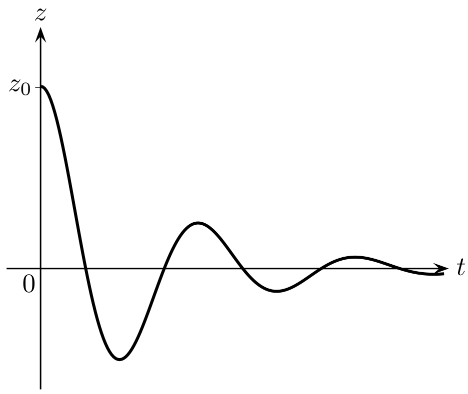
  où $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$, C_1 et C_2 des constantes réelles qui sont fixées par la donnée de conditions initiales ($z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$).



- $\beta^2 - 4\,m\,k < 0$ (*amortissement faible*) :
  λ_1 et λ_2 ne sont pas réelles, mais complexes, et peuvent s'écrire sous la forme $\lambda_1 = \mu - \mathrm{i}\,\omega$ et $\lambda_2 = \mu + \mathrm{i}\,\omega$, où $\mu = -\frac{\beta}{2\,m} < 0$ et $\omega = \frac{1}{2\,m}\sqrt{4\,m\,k - \beta^2}$ sont deux nombres réels. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

  $$z(t) \;=\; \exp(\mu\,t)\big(C_1\cos(\omega\,t) + C_2\sin(\omega\,t)\big)\,,$$

  où C_1 et C_2 sont des constantes réelles qui sont fixées par la donnée de conditions initiales ($z(0) = z_0$ et $\dot z(0) = \dot z_0$).



Les trois graphiques ci-dessus, représentant les différentes solutions, ont été obtenus avec les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot z(0) = \dot z_0 = 0$. Dans le premier cas, la force de frottement est si intense que l'objet, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre, revient peut à peu vers cette position, sans pouvoir même osciller ; on parle alors d'*amortissement fort.* Dans le troisième cas, la force de frottement est suffisamment faible pour que l'objet, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre, oscille tout en revenant peu à peu vers cette position d'équilibre ; on parle alors d'*amortissement faible.* En comparant les trois graphiques, on constate que c'est dans le deuxième cas que l'objet, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre, regagne le plus rapidement cette position ; dans cette situation, on parle d'*amortissement critique.*

Note : Le dispositif décrit dans la présente illustration peut être vu comme un modèle d'un système suspension-amortisseur. Pour garantir le confort du conducteur et des passagers, un constructeur automobile va opter pour des matériaux qui permettent de se retrouver à peu près dans la deuxième situation décrite ci-dessus (amortissement critique) : après avoir roulé sur une bosse, la personne au volant de sa voiture apprécie de retrouver l'état initial le plus rapidement possible, sans subir de mouvement oscillatoire.

6.3.3 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre, non homogènes et à coefficients constants

6.3.28 Définition : On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants* toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme :

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \;=\; g(x) \quad \text{(de façon plus compacte :} \quad a\,y'' + b\,y' + c\,y \;=\; g\,)\,, \tag{6.3.3}$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés et $g\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

6.3.29 Définition : Toute fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et vérifiant l'équation 6.3.3, est appelée *solution* de cette équation.

6.3.30 Remarque : Toute fonction $y : J \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $J \subset I$ et qui satisfait l'équation 6.3.3, peut également être appelée solution de l'équation en question. En revanche, aucune fonction $y\colon \tilde{J} \to \mathbb{R}$, où $\tilde{J} \supset I$, ne peut être considérée comme une solution de l'équation 6.3.3, vu que l'ensemble $\tilde{J}$ est plus étendu que l'intervalle I, dans lequel l'équation en question est définie.

6.3.31 Définition : On définit l'*opérateur* L, agissant sur les fonctions $y\colon I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables dans un certain intervalle ouvert I, par :

$$L \;=\; a\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c\,,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} L[y](x) \;&=\; \left(a\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c\right)[y]\,(x) \\ &=\; a\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x) + b\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + c\,y(x) \;=\; a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x)\,; \end{aligned}$$

de manière équivalente, sous forme plus compacte :

$$L[y] \;=\; a\,y'' + b\,y' + c\,y\,.$$

6.3.32 Remarques :

- Si L porte le nom d'*opérateur*, c'est parce qu'il agit sur des fonctions (et non sur des nombres). L'argument d'un opérateur (qui est une fonction) se note entre crochets.
- Si l'opérateur L a été défini, c'est essentiellement pour rendre les calculs futurs plus compacts.
- L'opérateur L est linéaire. La vérification de ce résultat est laissée en exercice.

6.3.33 Proposition : *Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants :*

$$L[y](x) \;=\; a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \;=\; g(x)\,,$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors toute solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ de cette équation (dans l'intervalle I) s'écrit sous la forme :

$$y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x)\,,$$

où :

- *$y_h\colon I \to \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ (qui est l'équation homogène associée à l'équation $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = g$),*

- $y_{\mathrm{p}}\colon I \to \mathbb{R}$ *est une solution particulière de l'équation* $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = g$.

Autrement dit, $y = y_h + y_p$ *est la solution générale de l'équation* $L[y](x) = g(x)$.

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$, où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels fixés, et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soient y_{h} la solution générale de l'équation homogène $L[y](x) = 0$ ($\Leftrightarrow\ a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$) et y_{p} une solution particulière de l'équation complète $L[y](x) = g(x)$ ($\Leftrightarrow\ a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$). Pour prouver le fait que toute solution de l'équation $L[y](x) = g(x)$ s'écrit sous la forme $y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$, il convient de procéder en deux étapes : montrer d'abord que $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$ est solution de l'équation $L[y] = g$, puis établir que toute solution de l'équation $L[y] = g$ est de la forme $y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$.

- L'expression $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$ est solution de l'équation différentielle du deuxième ordre $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = g$. En effet :

$$L[y] \;=\; L[y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}] \;=\; L[y_{\mathrm{h}}] + L[y_{\mathrm{p}}] \;=\; 0 + g \;=\; g\;,$$

  du fait que L est un opérateur linéaire, que y_{h} est solution de l'équation homogène $L[y] = 0$ et y_{p} solution de l'équation complète $L[y] = g$.

- Toute solution de l'équation différentielle $L[y] = g$ est de la forme $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$. Pour s'en convaincre, on considère une autre solution de l'équation différentielle complète $L[y] = g$, que l'on note w, et on s'intéresse à la différence $w - y$, où $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$. En injectant $w - y$ dans la partie de gauche de l'équation différentielle en question, il vient :

$$L[w - y] \;=\; L[w] - L[y] \;=\; g - g \;=\; 0\;,$$

  du fait que w et y satisfont toutes les deux l'équation différentielle complète. Manifestement donc, $w - y$ satisfait l'équation homogène associée à l'équation complète. Or, si $w - y$ satisfait l'équation homogène, elle doit avoir la forme d'une solution $\tilde{y}_{\mathrm{h}}$ de l'équation homogène, $w - y = \tilde{y}_{\mathrm{h}}$. En conséquence :

$$w(x) \;=\; \tilde{y}_{\mathrm{h}}(x) + y(x) \;=\; \tilde{y}_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)\,;$$

  mais $\tilde{y}_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{h}}$ est encore la solution générale de l'équation homogène. En conséquence, w est de la forme $y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$, tout comme y. □

Selon la proposition qui vient d'être démontrée, la solution générale y de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ s'obtient en cherchant d'abord la solution générale y_{h} de l'équation homogène $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, puis en trouvant une solution particulière y_{p} de l'équation complète $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$. La solution y_{h} de l'équation homogène s'obtient grâce à la proposition 6.3.24. Pour ce qui est d'une solution particulière de l'équation complète, deux méthodes existent, essentiellement, pour la déterminer.

Méthode de la variation des constantes

Une telle méthode est similaire à celle de la variation de la constante, dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre ; elle consiste à reprendre l'expression de la solution générale y_{h} de l'équation homogène (associée à l'équation complète) et à y remplacer les deux constantes par des fonctions u et v de x.

6.3.34 Proposition : *Soit l'équation différentielle du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants :*

$$L[y](x) \;=\; a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \;=\; g(x)\,,$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit aussi $y_h = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 : I \to \mathbb{R}$ la solution générale (dans I) de l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ (associée à l'équation complète $L[y](x) = g(x)$), où $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de cette équation $L[y](x) = 0$. Alors la fonction $y_{\mathrm{p}}\colon I \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; u(x)\,y_1(x) + v(x)\,y_2(x)\,,$$

où $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $v\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, est une solution particulière de l'équation complète $L[y](x) = g(x)$, à condition que u et v satisfassent le système d'équations :

$$\begin{cases} u'(x)\,y_1(x) + v'(x)\,y_2(x) \;=\; 0 \\ u'(x)\,y_1'(x) + v'(x)\,y_2'(x) \;=\; \frac{1}{a}\,g(x) \end{cases},$$

pour tout $x \in I$. En outre, ce système d'équation possède toujours une unique solution (en u' et v').

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants $L[y](x) = a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = g(x)$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit aussi $y_{\mathrm{h}} = C_1\,y_1+C_2\,y_2 : I \to \mathbb{R}$ la solution générale (dans I) de l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ (associée à l'équation complète $L[y](x) = g(x)$), où $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de cette équation $L[y](x) = 0$. Posons :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; u(x)\,y_1(x) + v(x)\,y_2(x)\,,$$

où $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $v\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables dans I. Alors :

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'(x) \;&=\; u'(x)\,y_1(x) + u(x)\,y_1'(x) + v'(x)\,y_2(x) + v(x)\,y_2'(x) \\ &=\; \big(u\,y_1' + v\,y_2'\big)(x) + \big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)(x)\,, \end{aligned}$$

$$y_{\mathrm{p}}''(x) \;=\; u'(x)\,y_1'(x) + u(x)\,y_1''(x) + v'(x)\,y_2'(x) + v(x)\,y_2''(x) + \big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)'(x)\,.$$

En insérant ces expressions dans l'équation différentielle $L[y] = a\,y'' + b\,y' + c\,y = g$, il vient :

$$\begin{aligned} a\,u'(x)\,y_1'(x) + a\,u(x)\,y_1''(x) + a\,v'(x)\,y_2'(x) + a\,v(x)\,y_2''(x) + a\,\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)'(x) \\ + b\,u(x)\,y_1'(x) + b\,v(x)\,y_2'(x) + b\,\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)(x) \\ + c\,u(x)\,y_1(x) + c\,v(x)\,y_2(x) \;=\; g(x)\ ; \end{aligned}$$

autrement écrit :

$$\begin{aligned} u(x)\,\big(\underbrace{a\,y_1''(x) + b\,y_1'(x) + c\,y_1(x)}_{=0}\big) \;+\; v(x)\,\big(\underbrace{a\,y_2''(x) + b\,y_2'(x) + c\,y_2(x)}_{=0}\big) \\ + a\,\big(u'\,y_1' + v'\,y_2'\big)(x) + a\,\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)'(x) + b\,\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)(x) \;=\; g(x)\ . \end{aligned}$$

Les expressions entre parenthèses (dans la première ligne de cette dernière équation) sont nulles en raison du fait que y_1 et y_2 satisfont toutes les deux l'équation homogène $L[y] = 0$. Pour que l'égalité obtenue soit satisfaite, il suffit de choisir u et v de sorte que :

$$\begin{cases} u'(x)\,y_1(x) + v'(x)\,y_2(x) \;=\; 0 \\ u'(x)\,y_1'(x) + v'(x)\,y_2'(x) \;=\; \frac{1}{a}\,g(x) \end{cases} ,$$

pour tout $x \in I$, vu que, si $\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors nécessairement $\big(u'\,y_1 + v'\,y_2\big)'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Le fait que y_1 et y_2 sont des fonctions linéairement indépendantes implique que la quantité $y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)$ est non nulle, quel que soit $x \in I$ (le lecteur peut le vérifier dans chacune des trois situations présentées dans la proposition 6.3.24) [V]. Selon la théorie sur la résolution des systèmes d'équations dits linéaires, le système d'équations ci-dessus (qui est un système d'équations linéaires pour les inconnues u' et v'), admet exactement une solution en u' et v'. Noter que u' et v' sont des fonctions bien définies et continues dans I ; en effet, le système écrit ci-dessus admet pour solution les expressions :

$$u'(x) \;=\; -\frac{g(x)}{a}\,\frac{y_2(x)}{y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)} \quad \text{et} \quad v'(x) \;=\; \frac{g(x)}{a}\,\frac{y_1(x)}{y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)}\ ,$$

dans lesquelles $y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et g, y_1, y_1', y_2 et y_2' sont des fonctions continues dans I. Ainsi donc, la fonction $y_{\mathrm{p}} : I \to \mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = u(x)\,y_1(x) + v(x)\,y_2(x)$, est bien définie et constitue une solution particulière de l'équation $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$, pour autant que les fonctions $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $v\colon I \to \mathbb{R}$ satisfassent le système d'équations noté ci-dessus. □

V. Une telle quantité porte le nom de *wronskien* (ou *déterminant wronskien*), en l'honneur de Jósef Maria Hoëné-Wroński, philosophe et mathématicien de nationalité polonaise et française, né en 1776 à Wolsztyn (dans la République des Deux Nations, constituée de la Pologne et de la Lituanie) et mort en 1853 à Neuilly-sur-Seine (dans le Second Empire de France).

6.3.35 Exemple : Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) \;=\; x\,.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants. Selon la proposition 6.3.33, sa solution générale s'écrit $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$, où y_{h} est la solution générale de l'équation homogène $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$ et y_{p} une solution particulière de l'équation complète $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = x$.

- ◇ *Solution générale de l'équation homogène* $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$:
Cette équation homogène a été traitée dans l'exemple 6.3.26. Sa solution générale y_{h} s'écrit :

$$y_{\mathrm{h}}(x) \;=\; C_1 \exp(x) + C_2 \exp(2\,x)\,,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles. Noter que y_{h} peut se récrire sous la forme $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$, où $y_1(x) = \exp(x)$ et $y_2(x) = \exp(2\,x)$; remarquer alors que y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

- ◇ *Solution particulière de l'équation complète* $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = x$:
On reprend l'expression de y_{h} donnée ci-dessus, et on remplace les constantes C_1 et C_2 par deux fonctions u et v de x :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; u(x)\,y_1(x) + v(x)\,y_2(x) \;=\; u(x)\exp(x) + v(x)\exp(2\,x)\,.$$

Selon la proposition 6.3.34, la fonction y_{p}, donnée par son expression ci-dessus, est une solution particulière de l'équation complète $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = x$, pour autant que les fonctions u et v satisfassent le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x)\,y_1(x) + v'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ u'(x)\,y_1'(x) + v'(x)\,y_2'(x) & = & x \end{array}\right. ,$$

i.e. le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x)\exp(x) + v'(x)\exp(2\,x) & = & 0 \\ u'(x)\exp(x) + v'(x)\,2\exp(2\,x) & = & x \end{array}\right. .$$

Pour résoudre ce dernier, on peut, par exemple, soustraire la première équation de la deuxième ; on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(x)\exp(x) + v'(x)\exp(2\,x) & = & 0 \\ v'(x)\exp(2\,x) & = & x \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & -x\exp(-x) \\ v'(x) & = & x\exp(-2\,x) \end{array}\right. ,$$

d'où, en intégrant par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & (x+1)\exp(-x) \\ v(x) & = & -\frac{1}{4}\,(2\,x+1)\exp(-2\,x) \end{array}\right. .$$

La solution particulière s'écrit alors :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; x + 1 - \frac{1}{4}\,(2\,x+1) \;=\; \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}\,.$$

La solution générale de l'équation $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x)$ est donc :

$$y(x) \;=\; y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; C_1 \exp(x) + C_2 \exp(2\,x) + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}\,.$$

Note : Comme y_{p} est une solution particulière (et non la solution générale) de l'équation complète, il n'est pas nécessaire d'ajouter des constantes d'intégration lors du calcul de u et v. L'ajout de ces constantes n'est certainement pas faux, mais donne lieu à une certaine redondance : ces constantes peuvent, en fin de compte, être combinées avec celles présentes dans la solution générale y_{h} de l'équation homogène, pour donner lieu à de nouvelles constantes.

6.3.36 Théorème : *Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants :*

$$L[y](x) \;=\; a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \;=\; g(x)\,,$$

*où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout triplet $(x_0;\, y_0;\, y_0')$, où $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0' \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation donnée, qui vérifie les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème d'existence et d'unicité** pour les équations différentielles linéaires du deuxième ordre, à coefficients constants.*

Preuve : Soit l'équation différentielle $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans un certain intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit aussi le triplet $(x_0;\, y_0;\, y_0')$, où $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0' \in \mathbb{R}$.

Selon le théorème 6.3.22, les propositions 6.3.33 et 6.3.34, l'équation différentielle $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ a pour solution générale la fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + u(x)\,y_1(x) + v(x)\,y_2(x) \\ &=\; \big(C_1 + u(x)\big)\,y_1(x) + \big(C_2 + v(x)\big)\,y_2(x)\,, \end{aligned}$$

où $y_1\colon I \to \mathbb{R}$ et $y_2\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, C_1 et C_2 deux constantes réelles, $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $v\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui satisfont le système :

$$\left\{ \begin{aligned} u'(x)\,y_1(x) + v'(x)\,y_2(x) \;&=\; 0 \\ u'(x)\,y_1'(x) + v'(x)\,y_2'(x) \;&=\; \tfrac{1}{a}\,g(x) \end{aligned} \right. ,$$

pour tout $x \in I$. Écrivons alors la dérivée de y :

$$\begin{aligned} y'(x) \;&=\; \big(0 + u'(x)\big)\,y_1(x) + \big(0 + v'(x)\big)\,y_2(x) + \big(C_1 + u(x)\big)\,y_1'(x) + \big(C_2 + v(x)\big)\,y_2'(x) \\ &=\; u'(x)\,y_1(x) + v'(x)\,y_2(x) + \big(C_1 + u(x)\big)\,y_1'(x) + \big(C_2 + v(x)\big)\,y_2'(x) \\ &=\; \big(C_1 + u(x)\big)\,y_1'(x) + \big(C_2 + v(x)\big)\,y_2'(x)\,; \end{aligned}$$

le passage de la deuxième à la troisième ligne de calcul se justifie par le fait que u et v satisfont la première équation du système donné plus haut. Considérons à présent les conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y_0' = y'(x_0)$. En prenant les expressions de y et y' obtenues, et en les évaluant en x_0, il vient :

$$\begin{cases} \big(C_1 + u(x_0)\big)\, y_1(x_0) + \big(C_2 + v(x_0)\big)\, y_2(x_0) \;=\; y_0 \\ \big(C_1 + u(x_0)\big)\, y_1'(x_0) + \big(C_2 + v(x_0)\big)\, y_2'(x_0) \;=\; y_0' \end{cases},$$

ou, en posant $\tilde{C}_1 = C_1 + u(x_0)$ et $\tilde{C}_2 = C_2 + v(x_0)$:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1\, y_1(x_0) + \tilde{C}_2\, y_2(x_0) \;=\; y_0 \\ \tilde{C}_1\, y_1'(x_0) + \tilde{C}_2\, y_2'(x_0) \;=\; y_0' \end{cases}.$$

Ces deux équations constituent un système d'équations linéaire pour les deux grandeurs $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$. Comme y_1 et y_2 sont des fonctions linéairement indépendantes, la quantité $y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$ est non nulle, quel que soit $x \in I$; en particulier, $y_1(x_0)\, y_2'(x_0) - y_1'(x_0)\, y_2(x_0) \neq 0$. Selon la théorie relative à la résolution des systèmes d'équations linéaires, le système obtenu admet exactement une unique solution ; autrement dit, $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ existent et sont uniques. Et vu que chacune des expressions $u(x_0)$ et $v(x_0)$ n'est qu'un seul et même nombre réel, les quantités $C_1 = \tilde{C}_1 - u(x_0)$ et $C_2 = \tilde{C}_2 - v(x_0)$ sont uniques. Pour chaque triplet $(x_0; y_0; y_0')$, où $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0' \in \mathbb{R}$, il existe donc une unique fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle $L[y](x) = a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = g(x)$ et qui remplit les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$. $\square$

Méthode de l'*Ansatz*

Le terme *Ansatz* est un nom masculin allemand qui a plusieurs significations différentes. Il se traduit en français par différents mots, l'un d'eux étant *approche*. Apparu d'abord dans les mathématiques germaniques, le mot s'est propagé par la suite, tel quel, sans être traduit, dans les mathématiques françaises, anglo-saxonnes...

Comme son nom l'indique, la méthode de l'*Ansatz* est un procédé de résolution basé sur l'idée d'approche : pour trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = g(x)$, on cherche une expression qui a une allure similaire à celle de g, qui s'en approche.

6.3.37 Proposition : *Soit l'équation différentielle du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants :*

$$L[y](x) \;=\; a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) \;=\; g(x)\,,$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R}$. Soit aussi l'équation homogène $L[y](x) = a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$, associée à l'équation $L[y](x) = g(x)$, et $a\, \lambda^2 + b\, \lambda + c = 0$ son équation caractéristique.

1. *Supposons que g est de la forme $g(x) = \alpha \exp(n\, x)$, où α est un nombre réel et n un nombre réel qui n'est pas solution de l'équation caractéristique $a\, \lambda^2 + b\, \lambda + c = 0$.*

Alors l'équation différentielle $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_\mathrm{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_\mathrm{p}(x) \;=\; A\exp(n\,x)\,,$$

où A *est un coefficient réel qui se détermine en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y'_p *et de* y''_p *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

2. *Supposons que* g *est de la forme* $g(x) = (\alpha\,x + \beta)\exp(n\,x)$*, où* α *et* β *sont des nombres réels, et* n *est un nombre réel qui n'est pas solution de l'équation caractéristique* $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c = 0$*. Alors l'équation différentielle* $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_\mathrm{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_\mathrm{p}(x) \;=\; (A\,x + B)\exp(n\,x)\,,$$

où A *et* B *sont deux coefficients réels qui se déterminent en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y'_p *et de* y''_p *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

3. *Supposons que* g *est de la forme* $g(x) = \alpha\exp(p\,x)\sin(q\,x)$ *ou* $g(x) = \alpha\exp(p\,x)\cos(q\,x)$*, où* α *est un nombre réel et* $p+q\,\mathrm{i}$ *un nombre complexe qui n'est pas solution de l'équation caractéristique* $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$*. Alors l'équation différentielle* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_\mathrm{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_\mathrm{p}(x) \;=\; \exp(p\,x)\big(A\cos(q\,x) + B\sin(q\,x)\big)\,,$$

où A *et* B *sont deux coefficients réels qui se déterminent en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y'_p *et de* y''_p *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R}$. Soit aussi l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, associée à l'équation complète $L[y](x) = g(x)$, et $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ son équation caractéristique.

Considérons le cas où g est donnée par $g(x) = \alpha\exp(n\,x)$, où α est un nombre réel et n un nombre réel qui n'est pas solution de l'équation $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c = 0$. Soit $y_\mathrm{p}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$y_\mathrm{p}(x) \;=\; A\exp(n\,x)\,,$$

où A est un coefficient réel. Alors :

$$y'_\mathrm{p}(x) \;=\; A\,n\exp(n\,x) \qquad \text{et} \qquad y''_\mathrm{p}(x) \;=\; A\,n^2\exp(n\,x)\,.$$

En injectant les expressions de y_p, y'_p et y''_p dans l'équation différentielle $L[y](x) = g(x)$, il vient :

$$\begin{aligned} a\,A\,n^2\exp(n\,x) + b\,A\,n\exp(n\,x) + c\,A\exp(n\,x) \;&=\; \alpha\exp(n\,x) \\ \Leftrightarrow \qquad (a\,n^2 + b\,n + c)\,A\exp(n\,x) \;&=\; \alpha\exp(n\,x)\;; \end{aligned}$$

et comme cette dernière expression doit être valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors nécessairement :

$$(a\,n^2 + b\,n + c)\,A \;=\; \alpha\;.$$

Cette équation admet une solution pour autant que $a\,n^2 + b\,n + c \neq 0$, *i.e.* pour autant que n ne soit pas solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène $L[y](x) = 0$. Ainsi, la fonction $y_{\mathrm{p}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = A\exp(n\,x)$, satisfait l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = \alpha\exp(n\,x)$, pour autant que n ne soit pas solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$; autrement dit, $y_{\mathrm{p}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = A\exp(n\,x)$, est une solution de l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = \alpha\exp(n\,x)$, pour autant que n ne soit pas solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$. Et comme y_{p} est une fonction et non une famille de fonctions, elle est une solution particulière de l'équation.

Noter que si n est solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$, la fonction y_{p}, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = A\exp(n\,x)$ ne peut plus être une solution de l'équation $L[y](x) = g(x)$, vu qu'elle est alors solution de l'équation $L[y](x) = 0$; évidemment, elle ne peut pas être solution des deux à la fois.

Les deux autres cas de figure énoncés dans la proposition se démontrent de la même manière que le premier. $\square$

6.3.38 Remarques :

- La méthode de l'*Ansatz*, telle que présentée dans la proposition 6.3.37, ne se limite pas uniquement aux trois cas énoncés dans la proposition ; d'autres situations peuvent être envisagées (comme par exemple celle où g est de la forme d'un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant 2$, qui multiplie une exponentielle). Ces autres situations ne vont pas être discutées ici.
- La situation où g est une fonction constante est un cas particulier de la première des trois catégories de la proposition précédente ; en effet, avec $n = 0$:

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; A\exp(0\,x) \;=\; A \cdot 1 \;=\; A\,.$$

6.3.39 Exemple : Reprenons l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) \;=\; x\,,$$

traitée dans l'exemple 6.3.35. Cette équation peut s'écrire $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = g(x)$, où $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par $g(x) = x$. Vu que $g(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$g(x) \;=\; x \;=\; x\exp(0\,x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,,$$

g rentre dans la deuxième des trois catégories de fonctions mentionnées dans la proposition 6.3.37. De cette proposition, et du fait que le nombre 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$ (associée à l'équation $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$), il ressort que l'équation complète $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = x$ admet comme solution particulière la fonction $y_{\mathrm{p}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; (A + B\,x)\exp(0\,x) \;=\; A + B\,x\,,$$

où A et B sont des coefficients réels à déterminer. Pour obtenir ces coefficients, il convient d'injecter l'expression de y_{p}, ainsi que celles de y_{p}' et y_{p}'' qui en découlent :

$$y_{\mathrm{p}}'(x) \;=\; B \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{p}}''(x) \;=\; 0\,,$$

dans l'équation complète $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = x$:

$$0 - 3\,B + 2\,(A + B\,x) \;=\; x \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,A - 3\,B + 2\,B\,x \;=\; 0 + 1 \cdot x\,.$$

Comme cette dernière relation doit être valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, les termes constants de gauche ne peuvent être comparés qu'aux termes constants de droite, et les termes en x de gauche ne peuvent être comparés qu'aux termes en x de droite. De cette comparaison résulte un système de deux équations, dont la résolution est presque immédiate :

$$\begin{cases} 2\,A - 3\,B \;=\; 0 \\ \qquad 2\,B \;=\; 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A \;=\; \frac{3}{4} \\ B \;=\; \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La solution particulière y_{p} cherchée s'écrit donc :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}\,.$$

L'expression est identique à celle obtenue précédemment, par la méthode de la variation des constantes.

6.3.40 Remarque : Cela a été mentionné précédemment, la méthode de l'Ansatz, telle que présentée dans la proposition 6.3.37, ne s'applique que dans la situation où le nombre réel n, ou le nombre complexe $p + q\,\mathrm{i}$, n'est pas solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$. Si n ou $p + q\,\mathrm{i}$ est solution de l'équation caractéristique, il convient de revenir à la méthode de la variation des constantes, qui est une méthode générale, s'appliquant en toutes circonstances. Cela étant, si l'on veut s'éviter de possibles calculs d'intégrales fastidieux, on peut également recourir au résultat qui suit. Similaire à la proposition 6.3.37, il s'applique dans toute situation où n, ou $p + q\,\mathrm{i}$, est solution de l'équation caractérisitique.

6.3.41 Corollaire : *Soit l'équation différentielle du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants :*

$$L[y](x) \;=\; a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) \;=\; g(x)\,,$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R}$. Soit aussi l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, associée à l'équation complète $L[y](x) = g(x)$, et $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ son équation caractéristique.

1. *Supposons que g est de la forme $g(x) = \alpha \exp(n\,x)$, où α est un nombre réel et n un nombre réel non nul, qui est solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$.*

Alors :

- ◇ *si* $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$*, l'équation* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_p(x) \;=\; A\,x\exp(n\,x)\,,$$

où A *est un coefficient réel qui se détermine en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y_p' *et de* y_p'' *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question ;*

- ◇ *si* $b^2 - 4\,a\,c = 0$*, l'équation* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_p(x) \;=\; A\,x^2\exp(n\,x)\,,$$

où A *est un coefficient réel qui se détermine en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y_p' *et de* y_p'' *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

2. *Supposons que* g *est de la forme* $g(x) = (\alpha\,x + \beta)\exp(n\,x)$*, où* α *et* β *sont deux nombres réels, et* n *est un nombre réel non nul, qui est solution de l'équation caractéristique* $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$*. Alors :*

- ◇ *si* $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$*, l'équation* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_p(x) \;=\; x\,(A\,x + B)\exp(n\,x)\,,$$

où A *et* B *sont deux coefficients réels qui se déterminent en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y_p' *et de* y_p'' *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question ;*

- ◇ *si* $b^2 - 4\,a\,c = 0$*, l'équation* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_p(x) \;=\; x^2\,(A\,x + B)\exp(n\,x)\,,$$

où A *est un coefficient réel qui se détermine en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y_p' *et de* y_p'' *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

3. *Supposons que* g *est de la forme* $g(x) = \alpha\exp(p\,x)\sin(q\,x)$ *ou de la forme* $g(x) = \alpha\exp(p\,x)\cos(q\,x)$*, où* α *est un nombre réel et* $p + q\,\mathrm{i}$ *un nombre complexe non nul, qui est solution de l'équation caractéristique* $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$*. Alors, l'équation* $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$ *admet comme solution particulière une fonction* $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y_p(x) \;=\; x\exp(p\,x)\big(A\cos(q\,x) + B\sin(q\,x)\big)\,,$$

où A *et* B *sont des coefficients réels qui se déterminent en injectant l'expression de* y_p*, ainsi que celles de* y_p' *et de* y_p'' *qui en découlent, dans l'équation différentielle en question.*

Preuve : Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = g(x)$, où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels fixés, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R}$. Soit aussi l'équation homogène $L[y](x) = a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$, associée à l'équation complète $L[y](x) = g(x)$, et $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ son équation caractéristique.

Considérons le cas où g est donnée par $g(x) = \alpha \exp(n\,x)$, où α est un nombre réel et n un nombre réel qui est solution de l'équation $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$. Deux situations peuvent être envisagées à ce stade. Dans la première, $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$; dans la deuxième, $b^2 - 4\,a\,c = 0$.

◇ Supposons que $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$; dans ce cas, $n \neq -\frac{b}{2\,a}$, vu que :

$$n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \qquad \text{ou} \qquad n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,.$$

Soit à présent $y_{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x \exp(n\,x)\,,$$

où A est un coefficient réel. Alors :

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = A \exp(n\,x) + A\,x\,n \exp(n\,x) = A\,(1 + n\,x) \exp(n\,x)$$

et :

$$y_{\mathrm{p}}''(x) = A\,n \exp(n\,x) + A\,(1 + n\,x)\,n \exp(n\,x) = A\,(2\,n + n^2\,x) \exp(n\,x)\,.$$

En injectant les expressions de y_{p}, y_{p}' et y_{p}'' dans l'équation $L[y](x) = g(x)$, il vient :

$$\begin{aligned}
a\,A\,(2\,n + n^2\,x) \exp(n\,x) + b\,A\,(1 + n\,x) \exp(n\,x) + c\,A\,x \exp(n\,x) &= \alpha \exp(n\,x) \\
\Leftrightarrow \qquad (a\,n^2\,x + 2\,a\,n + b\,n\,x + b + c\,x)\,A \exp(n\,x) &= \alpha \exp(n\,x) \\
\Leftrightarrow \qquad (\underbrace{a\,n^2 + b\,n + c}_{=0})\,x\,A \exp(n\,x) + (2\,a\,n + b)\,A \exp(n\,x) &= \alpha \exp(n\,x) \\
\Leftrightarrow \qquad (2\,a\,n + b)\,A \exp(n\,x) &= \alpha \exp(n\,x)\,,
\end{aligned}$$

vu que n est solution de l'équation caractéristique. La dernière égalité ci-dessus devant être valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, nécessairement :

$$(2\,a\,n + b)\,A = \alpha\,.$$

Cette équation admet une solution pour autant que $2\,a\,n + b \neq 0$, *i.e.* pour autant que $n \neq -\frac{b}{2\,a}$, *i.e.* pour autant que $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$, ce qui est le cas ici. Ainsi, la fonction $y_{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x \exp(n\,x)$, satisfait l'équation différentielle $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = \alpha \exp(n\,x)$, pour autant que n soit solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$ et que $b^2 - 4\,a\,c \neq 0$; autrement dit, $y_{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x \exp(n\,x)$, est une solution de l'équation différentielle $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=\alpha\exp(n\,x)$, pour autant que n soit solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0$ et que $b^2-4\,a\,c\neq 0$. Et comme y_{p} est une fonction et non une famille de fonctions, elle est une solution particulière de l'équation.

◇ Supposons que $b^2-4\,a\,c=0$; dans ce cas, $n=-\frac{b}{2\,a}$, vu que :

$$n \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\,.$$

Soit à présent $y_{\mathrm{p}}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$y_{\mathrm{p}}(x) \;=\; A\,x^2\exp(n\,x)\,,$$

où A est un coefficient réel. Alors :

$$y_{\mathrm{p}}'(x) \;=\; 2\,A\,x\exp(n\,x)+A\,x^2\,n\exp(n\,x) \;=\; A\,(2\,x+n\,x^2)\exp(n\,x)$$

et :

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}''(x) &= A\,(2+2\,n\,x)\exp(n\,x)+A\,(2\,x+n\,x^2)\,n\exp(n\,x)\\ &= A\,(2+4\,n\,x+n^2\,x^2)\exp(n\,x)\,. \end{aligned}$$

En injectant les expressions de y_{p}, y_{p}' et y_{p}'' dans l'équation $L[y](x)=g(x)$, il vient :

$$\begin{aligned} & a\,A\,(2+4\,n\,x+n^2\,x^2)\exp(n\,x)+\\ & +b\,A\,(2\,x+n\,x^2)\exp(n\,x)+c\,A\,x^2\exp(n\,x) \;=\; \alpha\exp(n\,x)\\ \Leftrightarrow\quad & (a\,n^2\,x^2+4\,a\,n\,x+2\,a+b\,n\,x^2+2\,b\,x+c\,x^2)\,A\exp(n\,x) \;=\; \alpha\exp(n\,x)\\ \Leftrightarrow\quad & \overbrace{(a\,n^2+b\,n+c)}^{=0}\,x^2\,A\exp(n\,x)+\\ & +2\,\underbrace{(2\,a\,n+b)}_{=0}\,x\,A\exp(n\,x)+2\,a\,A\exp(n\,x) \;=\; \alpha\exp(n\,x)\\ \Leftrightarrow\quad & 2\,a\,A\exp(n\,x) \;=\; \alpha\exp(n\,x)\,, \end{aligned}$$

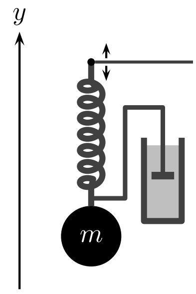
vu que n est solution de l'équation caractéristique et est égal à $-\frac{b}{2\,a}$. La dernière égalité ci-dessus devant être valable pour tout $x\in\mathbb{R}$, nécessairement :

$$2\,a\,A \;=\; \alpha\,.$$

Cette équation admet une solution pour autant que $a\neq 0$, ce qui est le cas ici. Ainsi, la fonction $y_{\mathrm{p}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x)=A\,x^2\exp(n\,x)$, satisfait l'équation différentielle $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=\alpha\exp(n\,x)$, pour autant que n soit solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0$ et que $b^2-4\,a\,c=0$; autrement dit, $y_{\mathrm{p}}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donnée par $y_{\mathrm{p}}(x)=A\,x\exp(n\,x)$, est une solution de l'équation différentielle $a\,y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=\alpha\exp(n\,x)$, pour autant que n soit solution de l'équation caractéristique $a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0$ et que $b^2-4\,a\,c=0$. Et comme y_{p} est une fonction et non une famille de fonctions, elle est une solution particulière de l'équation.

Les deux autres cas de figure énoncés dans le corollaire se démontrent de la même manière que le premier. □

6.3.42 Illustration : Reprenons le dispositif de l'illustration 6.3.27 ; et supposons à présent que ce à quoi est fixée l'extrémité supérieure du ressort subit un mouvement oscillatoire vertical, décrit par une expression de la forme $y_{s0} + \alpha \cos(\varpi\, t)$, où α et ϖ sont deux paramètres réels strictement positifs (appelés respectivement *amplitude* et *pulsation* du mouvement), et y_{s0} un paramètre réel (appelé *position moyenne*, selon l'axe y, du mouvement). Dans ces circonstances, l'évolution de la masse m peut être décrite par l'équation différentielle suivante :



$$m\, \ddot{y}(t) \;=\; -m\, g - k\, \big[y(t) - \big(y_{i0} + \alpha \cos(\varpi\, t)\big)\big] - \beta\, \dot{y}(t)\ ,$$

où y_{i0} est un paramètre réel, qui correspond à ce que l'on appelle la position moyenne, selon l'axe y, de l'extrémité inférieure du ressort. Noter que tous les termes, dans l'équation ci-dessus, sont identiques à ceux de l'équation donnée dans l'illustration 6.3.27 ; à l'exception du terme correspondant à la force due au ressort, qui est ici non pas $-k\,\big(y(t) - y_0\big)$, mais $-k\,\big[y(t) - \big(y_{i0} + \alpha\cos(\varpi\, t)\big)\big]$. Si la quantité y_0 a été remplacée par l'expression $y_{i0} + \alpha\cos(\varpi\, t)$, c'est en raison du mouvement oscillatoire de l'extrémité supérieure du ressort : dès lors que l'extrémité supérieure du ressort oscille verticalement, selon l'expression $y_{s0} + \alpha\cos(\varpi\, t)$, la position de l'extrémité inférieure du ressort, lorsque celui-ci n'est ni étiré ni contracté, oscille aussi, verticalement, selon une expression de la forme $y_{i0} + \alpha\cos(\varpi\, t)$. L'équation obtenue ci-dessus peut être récrite comme suit :

$$\begin{aligned} & m\, \ddot{y}(t) + \beta\, \dot{y}(t) + m\, g + k\, \big[y(t) - \big(y_{i0} + \alpha \cos(\varpi\, t)\big)\big] \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & m\, \ddot{y}(t) + \beta\, \dot{y}(t) + k\, \big(y(t) - y_{i0} + \tfrac{m\, g}{k}\big) \;=\; k\, \alpha \cos(\varpi\, t)\ ; \end{aligned}$$

autrement écrit, en posant $z(t) = y(t) - y_{i0} + \frac{m\, g}{k}$ et $F_0 = k\, \alpha$:

$$m\, \ddot{z}(t) + \beta\, \dot{z}(t) + k\, z(t) \;=\; F_0 \cos(\varpi\, t)\ .$$

Cette dernière expression est une équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, non homogène et à coefficients constants. Pour la résoudre, il convient d'établir en premier lieu la solution générale de l'équation homogène associée, puis de trouver une solution particulière de l'équation complete.

- ◇ *Solution générale de l'équation homogène* $m\, \ddot{z}(t) + \beta\, \dot{z}(t) + k\, z(t) = 0$:
  Elle a déjà été obtenue dans l'illustration 6.3.27.
- ◇ *Solution particulière de l'équation complète* $m\, \ddot{z}(t) + \beta\, \dot{z}(t) + k\, z(t) = F_0 \cos(\varpi\, t)$:
  Soit g la fonction réelle donnée par $g(t) = F_0 \cos(\varpi\, t)$. Remarquer que $g(t)$ peut être mise sous la forme $g(t) = F_0 \exp(0\, t) \cos(\varpi\, t)$. Dès lors que le coefficient β est non nul, le nombre complexe $0 + \varpi\, \mathrm{i}$ (associé à l'expression de $g(t)$) n'est pas solution de l'équation caractéristique $m\, \lambda^2 + \beta\, \lambda + k = 0$. Selon le troisième point de la proposition 6.3.37, l'équation différentielle donnée admet comme solution

particulière une fonction z_{p} de la forme :

$$z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; A\cos(\varpi\, t) + B\sin(\varpi\, t)\,,$$

où A et B sont des coefficients réels à déterminer. Pour trouver ces coefficients, il convient de calculer les dérivées première et seconde de z_{p} :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{\mathrm{p}}(t) \;&=\; -A\,\varpi\sin(\varpi\, t) + B\,\varpi\cos(\varpi\, t)\,,\\
\ddot{z}_{\mathrm{p}}(t) \;&=\; -A\,\varpi^2\cos(\varpi\, t) - B\,\varpi^2\sin(\varpi\, t)\,,
\end{aligned}$$

puis d'injecter leurs expressions, ainsi que celle de z_{p} dans l'équation donnée :

$$\begin{aligned}
& m\,\big(-A\,\varpi^2\cos(\varpi\, t) - B\,\varpi^2\sin(\varpi\, t)\big) +\\
& +\beta\,\big(-A\,\varpi\sin(\varpi\, t) + B\,\varpi\cos(\varpi\, t)\big) +\\
& \qquad +k\,\big(A\cos(\varpi\, t) + B\sin(\varpi\, t)\big) \;=\; F_0\cos(\varpi\, t)\\
\Leftrightarrow\quad & \big(-A\,m\,\varpi^2 + B\,\beta\,\varpi + A\,k\big)\cos(\varpi\, t) +\\
& +\big(-B\,m\,\varpi^2 - A\,\beta\,\varpi + B\,k\big)\sin(\varpi\, t) \;=\; F_0\cos(\varpi\, t) + 0\sin(\varpi\, t)
\end{aligned}$$

En comparant ce qui est comparable, il vient :

$$\left\{\begin{aligned} -A\,m\,\varpi^2 + B\,\beta\,\varpi + A\,k \;&=\; F_0\\ -B\,m\,\varpi^2 - A\,\beta\,\varpi + B\,k \;&=\; 0 \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{aligned} B\,\tfrac{k^2 - 2\,k\,m\,\varpi^2 + m^2\,\varpi^4 + \beta^2\,\varpi^2}{\beta\,\varpi} \;&=\; F_0\\ \tfrac{k - m\,\varpi^2}{\beta\,\varpi}\,B \;&=\; A \end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{aligned} B \;&=\; \tfrac{\beta\,\varpi\,F_0}{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}\\ A \;&=\; \tfrac{(k - m\,\varpi^2)\,F_0}{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2} \end{aligned}\right.$$

Ainsi :

$$z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; \frac{(k - m\,\varpi^2)\,F_0}{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}\cos(\varpi\, t) + \frac{\beta\,\varpi\,F_0}{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}\sin(\varpi\, t)\;; \tag{6.3.4}$$

autrement écrit (en utilisant l'identité $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta + \varphi)$, où $\mathrm{tg}(\varphi) = -\frac{b}{a}$) :

$$z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}}\cos(\varpi\, t + \varphi)\,,$$

avec :

$$\mathrm{tg}(\varphi) \;=\; -\frac{\beta\,\varpi}{k - m\,\varpi^2}\,.$$

En résumé, l'équation différentielle $m\,\ddot{z}(t) + \beta\,\dot{z}(t) + k\,z(t) \;=\; F_0\cos(\varpi\, t)$ admet pour solution générale la fonction z donnée par :

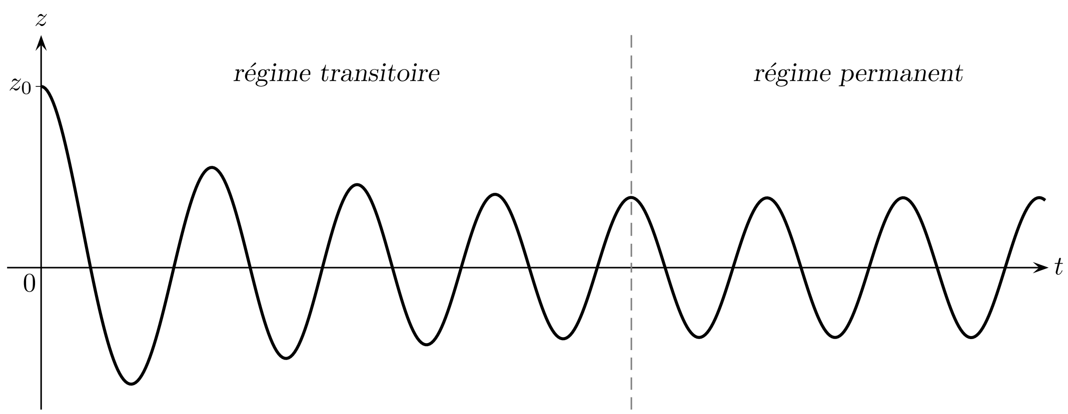
$$z(t) \;=\; z_{\mathrm{h}}(t) + z_{\mathrm{p}}(t)\,,$$

où z_{h} est la fonction trouvée dans l'illustration 6.3.27 et z_{p} la fonction obtenue ci-dessus.

Notes :

- L'expression de la fonction z_{h} dépend, rappelons-le, du signe de la quantité $\beta^2 - 4\,m\,k$ (*cf.* illustration 6.3.27). Cela étant, dans tous les cas, z_{h} tend vers 0 lorsque t tend vers ∞. Ainsi, à mesure que t augmente, la composante z_{h} (dans la solution générale $z = z_{\mathrm{h}} + z_{\mathrm{p}}$) devient de plus en plus négligeable. À mesure que t augmente, l'évolution de la masse m est donc de plus en plus dictée par z_{p}, l'influence de z_{h} étant de plus en plus petite. Deux phases peuvent, de fait, être mises en évidence :
  - ◇ une première phase, dans laquelle z_{h} est non négligeable, appelée *régime transitoire* ;
  - ◇ une deuxième phase, dans laquelle z_{h} devient négligeable, appelée *régime permanent.*

  La figure ci-dessous illustre la situation dans le cas où $\beta^2 - 4\,m\,k < 0$, avec les conditions initiales $z(0) = z_0$, où $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\dot{z}(0) = 0$.



- Dans la formule :

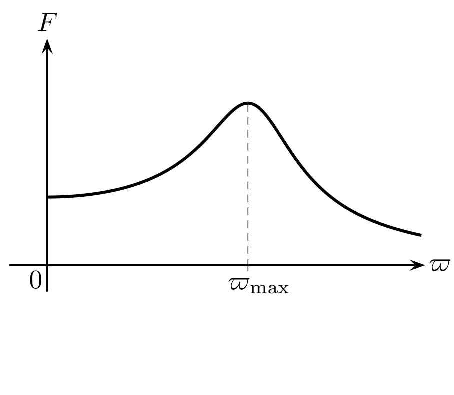
$$z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}}\cos(\varpi\,t + \varphi)\,,$$

  la fraction devant le cosinus est, par définition, l'amplitude des oscillations de la masse m. Cette fraction peut être vue comme l'expression d'une fonction réelle F dépendant de la grandeur ϖ :

$$F(\varpi) \;=\; \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\varpi^2)^2 + (\beta\,\varpi)^2}}\;.$$

  En faisant appel aux techniques présentées dans le chapitre suivant, il peut être établi que cette fonction F atteint une valeur maximale $\varpi_{\max}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, pour autant que $2\,m\,k - \beta^2 > 0$; cette valeur maximale s'écrit :

$$\varpi_{\max} \;=\; \frac{\sqrt{2\,m\,k - \beta^2}}{\sqrt{2}\,m}\;.$$



Parmi toutes les valeurs positives que peut prendre ϖ, il existe donc, pour autant que $2\,m\,k - \beta^2 > 0$, une valeur pour laquelle l'objet de masse m oscille le plus fortement ; cette valeur est $\varpi_{\max}$.

- Dans le cas où :

$$\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad \varpi = \omega_0\,, \qquad \text{où :}\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,$$

la solution particulière z_{p} de l'équation différentielle complète, $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = F_0\cos(\omega_0\,t)$, n'est pas de la forme $z_{\mathrm{p}}(t) = A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)$; et pour cause : le nombre complexe $0 + \omega_0\,\mathrm{i}$ est solution de l'équation caractéristique $m\,\lambda^2 + k = 0$ (équation associée à l'équation homogène $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = 0$). Pour trouver l'expression de z_{p} dans une telle situation, il convient d'appliquer le corollaire 6.3.41 :

$$z_{\mathrm{p}}(t) = t\,\big(A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)\big)\,,$$

où A et B sont des coefficients réels à déterminer. Pour trouver ces coefficients, il convient de calculer la dérivée première et surtout la dérivée seconde de z_{p} :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{\mathrm{p}}(t) &= A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t) + t\,\big(-A\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\big)\,,\\
\ddot{z}_{\mathrm{p}}(t) &= -A\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\\
&\quad - A\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\\
&\quad + t\,\big(-A\,\omega_0^2\cos(\omega_0\,t) - B\,\omega_0^2\sin(\omega_0\,t)\big)\\
&= -2\,A\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + 2\,B\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\\
&\quad + t\,\big(-A\,\omega_0^2\cos(\omega_0\,t) - B\,\omega_0^2\sin(\omega_0\,t)\big)\,,
\end{aligned}$$

puis d'injecter les expressions obtenues dans l'équation différentielle (dans laquelle, rappelons-le, $\beta = 0$) :

$$\begin{aligned}
&m\,\big(-2\,A\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + 2\,B\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\\
&\quad -t\,A\,\omega_0^2\cos(\omega_0\,t) - t\,B\,\omega_0^2\sin(\omega_0\,t)\big)\\
&\qquad + k\,t\,\big(A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)\big) = F_0\cos(\omega_0\,t)\ .
\end{aligned}$$

Cette égalité peut être récrite comme suit :

$$\begin{aligned}
&-2\,A\,m\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + 2\,B\,m\,\omega_0\cos(\omega_0\,t)\\
&\qquad + A\,t\,(\underbrace{-m\,\omega_0^2 + k}_{=0})\cos(\omega_0\,t)\\
&\qquad + B\,t\,(\underbrace{-m\,\omega_0^2 + k}_{=0})\sin(\omega_0\,t) = F_0\cos(\omega_0\,t)\\
\Leftrightarrow\quad &-2\,A\,m\,\omega_0\sin(\omega_0\,t) + 2\,B\,m\,\omega_0\cos(\omega_0\,t) = F_0\cos(\omega_0\,t) + 0\sin(\omega_0\,t)\,,
\end{aligned}$$

du fait que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Ainsi, en comparant ce qui est comparable, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\,A\,m\,\omega_0 & = & 0 \\ 2\,B\,m\,\omega_0 & = & F_0 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ B & = & \frac{F_0}{2\,m\,\omega_0} \end{array} \right. .$$

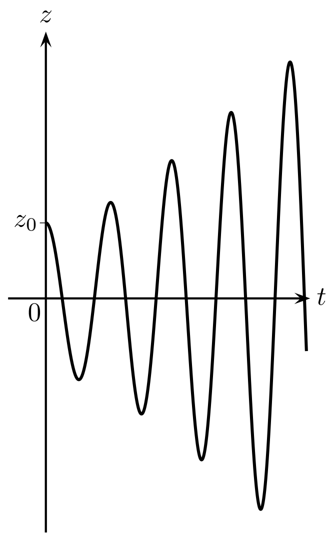
En résumé :

$$z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; \frac{F_0}{2\,m\,\omega_0}\,t\sin(\omega_0\,t)\,.$$

La solution générale de l'équation $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = F_0\cos(\omega_0\,t)$ s'écrit donc, dans la situation présente :

$$z(t) \;=\; z_{\mathrm{h}}(t) + z_{\mathrm{p}}(t) \;=\; C_1\cos(\omega_0\,t) + C_2\sin(\omega_0\,t) + \frac{F_0}{2\,m\,\omega_0}\,t\sin(\omega_0\,t)\;.$$

La figure ci-contre illustre le graphe de la fonction z dans le cas où les conditions initiales sont $z(0) = z_0$, où $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\dot{z}(0) = 0$. À mesure que t augmente, l'amplitude des oscillations de la masse m augmente, sans atteindre un quelconque plafond.



- L'expression 6.3.5, obtenue dans le point précédent, peut être déduite directement des calculs établis antérieurement. Pour le voir, il suffit de prendre la solution générale de l'équation différentielle $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = F_0\cos(\varpi\,t)$ dans le cas où $\varpi \neq \omega_0$ (ω_0 étant la grandeur définie au point précédent), d'écrire ensuite la solution spécifique à des conditions initiales données, puis enfin de calculer la limite de cette solution spécifique lorsque ϖ tend vers ω. Les détails sont donnés ci-dessous.

  ▷ L'équation différentielle $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = F_0\cos(\varpi\,t)$ admet comme solution générale la fonction z donnée par :

$$z(t) \;=\; C_1\cos(\omega_0\,t) + C_2\sin(\omega_0\,t) + \frac{F_0}{k - m\,\varpi^2}\cos(\varpi\,t)\,,$$

  où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles. Pour obtenir cette expression, il suffit d'observer les deux points suivants :

  ◇ l'équation différentielle homogène associée, $m\,\ddot{z}(t) + k\,z(t) = 0$, a pour équation caractéristique $m\,\lambda^2 + k = 0$, laquelle admet des solutions purement imaginaires, $\lambda_{1,\,2} = \pm\omega_0\,\mathrm{i}$, où $\omega_0 = \sqrt{k\,m^{-1}}$;

  ◇ une solution particulière z_{p} de l'équation complète peut être obtenue en prenant l'expression 6.3.4 et en y posant $\beta = 0$ (ce qui est licite, vu que $\varpi \neq \omega_0$).

Noter alors que la fonction z donnée ci-dessus peut être récrite comme suit :

$$z(t) \;=\; C_1 \cos(\omega_0\, t) + C_2 \sin(\omega_0\, t) - \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \cos(\varpi\, t)\,,$$

vu que ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$.

▷ Soient les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$, où z_0 et $\dot{z}_0$ sont deux nombres réels donnés. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 \cos(\omega_0 \cdot 0) + C_2 \sin(\omega_0 \cdot 0) - \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \cos(\varpi \cdot 0) & = & z_0 \\ -C_1\, \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0) + C_2\, \omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0) - \frac{F_0\, \varpi}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \sin(\varpi \cdot 0) & = & \dot{z}_0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} C_1 - \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} & = & z_0 \\ C_2\, \omega_0 & = & \dot{z}_0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} C_1 & = & z_0 + \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \\ C_2 & = & \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \end{array}\right. .$$

Ainsi :

$$z(t) \;=\; \left(z_0 + \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)}\right) \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) - \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \cos(\varpi\, t)\,.$$

▷ La limite de $z(t)$ lorsque ϖ tend vers ω_0 se calcule en faisant appel à la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H). Noter que la variable par rapport à laquelle on dérive est ϖ (et non pas t) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varpi \to \omega_0} z(t) \;&=\; \lim_{\varpi \to \omega_0} \Bigg[\left(z_0 + \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)}\right) \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) \\ &\qquad\qquad - \frac{F_0}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \cos(\varpi\, t)\Bigg] \\ &=\; \lim_{\varpi \to \omega_0} \left[z_0 \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) - \frac{F_0\,\big(\cos(\varpi\, t) - \cos(\omega_0\, t)\big)}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)}\right] \\ &=\; z_0 \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) - \lim_{\varpi \to \omega_0} \frac{F_0\,\big(\cos(\varpi\, t) - \cos(\omega_0\, t)\big)}{m\,(\varpi^2 - {\omega_0}^2)} \\ &\overset{\text{B-H}}{=}\; z_0 \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) - \lim_{\varpi \to \omega_0} \frac{F_0\,\big(-t \sin(\varpi\, t) - 0\big)}{m\,(2\,\varpi - 0)} \\ &=\; z_0 \cos(\omega_0\, t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0\, t) + \frac{F_0}{2\,m\,\omega_0}\, t \sin(\omega_0\, t)\,. \end{aligned}$$

On retrouve ici l'expression 6.3.5 obtenue au point précédent (avec $C_1 = z_0$ et $C_2 = \frac{\dot{z}_0}{\omega_0}$).

- Le dispositif décrit dans la présente illustration est un exemple de ce que l'on appelle un *oscillateur harmonique forcé* ;
  - ◇ le terme *forcé* vient du fait que le mouvement de la masse m est forcé par une action extérieure ; cette action est la vibration régulière de l'extrémité supérieure du ressort ;
  - ◇ l'expression *oscillateur harmonique* est employé pour indiquer que le mouvement de la masse m est, en l'absence d'une action extérieure, et pour autant que les frottements ne soient pas trop importants, semblable au mouvement vibratoire d'un point quelconque d'une corde de piano, de guitare, etc.

  Tout oscillateur harmonique forcé présente les caractéristiques discutées dans les points précédents ; notamment :
  - ▷ il existe une pulsation (de l'action extérieure) pour laquelle l'amplitude des oscillations du système étudié atteint un maximum ; lorsque le système oscille avec une telle pulsation (et que, par conséquent, l'amplitude de ses oscillations est maximale), on dit que le système est dans un état de *résonance* ;
  - ▷ lorsque les frottements sont négligeables, l'état de résonance se caractérise par une amplitude des oscillations qui croît constamment ; cette croissance, qui peut en théorie aller jusqu'à l'infini, s'arrête pratiquement avec la rupture du système ou de l'un de ses composants.
- Des dispositifs tels que celui décrit dans la présente illustration, on en trouve dans différents appareils, instruments et engins : sismographes élémentaires, automobiles, etc.
  - ▷ *Sismographe basique* : La vibration de l'extrémité supérieure du ressort est produite par les ondes sismiques. À la masse m est fixée un stylo-feutre ; lequel marque la position sur un rouleau de papier qui se déroule régulièrement à mesure que le temps s'écoule.
  - ▷ *Automobile* : La masse m correspond à la cabine (ou à une partie de la cabine) du véhicule ; elle est fixée non pas à l'extrémité inférieure mais à l'extrémité supérieure du ressort. L'extrémité inférieure, elle, est fixée à une roue ; cette extrémité se met à vibrer lorsque le véhicule roule sur une route qui présente des creux et des bosses à intervalles réguliers.
- Les oscillateurs harmoniques forcés ne se rencontrent pas uniquement en mécanique. On en trouve dans d'autres contextes ; en électricité par exemple : un circuit électrique composé d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur branchés en série à une source de tension sinusoïdale en est un spécimen.

Chapitre 7

Applications du calcul différentiel

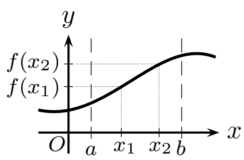
Les prémices du concept de dérivée remontent, rappelons-le, au XVII^{e} siècle, lorsque Pierre de Fermat a élaboré une méthode pour déterminer les tangentes à une courbe. S'il est vrai que la formulation algébrique de cette notion n'a que peu évolué entre les XVII^{e} et XIX^{e} siècles, il n'en demeure pas moins vrai que le champ de ses applications s'est largement développé durant cette période. Nombre de situations en mécanique, puis dans les phénomènes ondulatoires, ainsi qu'en électromagnétisme, ont pu, dans le courant des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, être abordés sous un angle nouveau et résolus grâce à l'opération de dérivation.

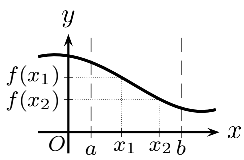
La dérivée a beau s'être implantée dans quasiment tous les domaines de la physique, toujours est-il que c'est dans la branche des mathématiques qui l'a vue naître, le calcul différentiel, qu'elle trouve son utilité première. Les pages qui suivent en témoignent...

7.1 Croissance et décroissance d'une fonction

7.1.1 Définition : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle ouvert $I =]a;\, b[\subset D$, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$.

- f est dite *(strictement) croissante* dans I si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), quels que soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$.
- f est dite *(strictement) décroissante* dans I si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), quels que soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$.
- f est dite constante dans I si $f(x_1) = f(x_2)$, quels que soient $x_1, x_2 \in I$.





7.1.2 Remarque : Pour déterminer si une fonction f est croissante ou décroissante dans un intervalle I donné, on peut étudier le signe de sa dérivée f' dans I, pour autant que celle-ci existe dans I.

7.1.3 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I =]a\,;\, b[\subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.*

Alors :

- *f est croissante dans $]a\,;b[$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$.*
- *f est décroissante dans $]a\,;b[$ si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I =]a\,;b[\subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$ (le cas où $f'(x) \leqslant 0$ se démontrant de manière analogue). La fonction f étant dérivable dans $]a;b[$, pour tous x_1, $x_2 \in]a\,;b[$ tels que $x_1 < x_2$, il existe, selon le théorème des accroissements finis (*cf.* théorème 3.9.4, section 3.9 du chapitre 3), un nombre réel $c \in]x_1\,;x_2[\subset]a\,;b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)\,.$$

Comme $c \in]a\,;b[$, alors $f'(c) \geqslant 0$. Et vu que $x_2 - x_1 > 0$, alors :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x_2) \geqslant f(x_1)\,.$$

La fonction est donc croissante dans $]a\,;b[$.

Réciproquement, supposons que f est croissante dans l'intervalle $]a;b[$. Alors $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ quels que soient x_1, $x_2 \in]a;b[$ tels que $x_1 < x_2$. Ainsi :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0\,,$$

et donc, en écrivant $\Delta x = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0\,.$$

Le fait que le raisonnement est valable pour tous x_1, $x_2 \in]a;b[$ tels que $x_1 < x_2$ permet d'affirmer que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]a;b[$. $\square$

7.1.4 Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^3 + x^2 - 5\,x - 5$. Alors :

   $$f'(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 5 = (3\,x + 5)(x - 1)\,.$$

   On constate que f' est définie dans tout $\mathbb{R}$ et que :
   - $f'(x) > 0$ dans $\left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right[\cup \left]1\,;\infty\right[$,
   - $f'(x) < 0$ dans $\left]-\frac{5}{3}\,;1\right[$.

   Ainsi, en se référant à la proposition précédente, on peut affirmer que f est croissante dans tout intervalle ouvert $I \subset \left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right[\cup \left]1\,;\infty\right[$ et décroissante dans tout intervalle ouvert $I \subset \left]-\frac{5}{3}\,;1\right[$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^3$. Alors :

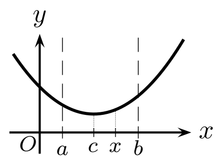
   $$f'(x) = 3\,x^2\,.$$

On constate que f' est définie dans tout $\mathbb{R}$ et que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, en se référant à la proposition précédente, on peut affirmer que f est croissante dans tout intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Noter que f est même strictement croissante dans tout $\mathbb{R}$ (vu que ${x_1}^3 < {x_2}^3$ quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$), quand bien même la dérivée f' de f s'annule en $x = 0$. Cette observation illustre le fait qu'**il n'est pas possible** d'extrapoler la proposition précédente, en disant que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans un intervalle ouvert si et seulement si sa dérivée est strictement positive (respectivement strictement négative) dans l'intervalle ouvert en question.

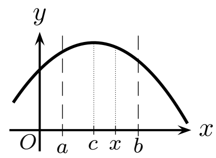
7.2 Extrema d'une fonction

7.2.1 Définition : Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $c \in D$ un nombre réel.

- On dit que f admet un *minimum local* en c s'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset D$, contenant c, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < c < b$, tel que $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in\,]a;\, b[$. Le nombre $f(c)$ est alors appelé *minimum local* de f dans $]a;\, b[$.



- On dit que f admet un *maximum local* en c s'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset D$, contenant c, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < c < b$, tel que $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout $x \in\,]a;\, b[$. Le nombre $f(c)$ est alors appelé *maximum local* de f dans $]a;\, b[$.



- On dit que f admet un *extremum local* en c si f possède un minimum local ou un maximum local en c. Le nombre $f(c)$ est alors appelé *extremum local*.

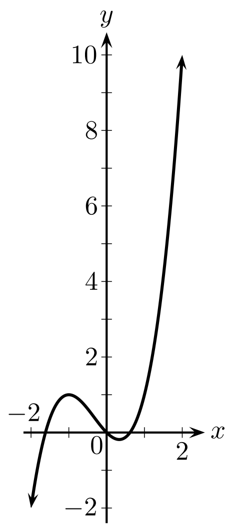
7.2.2 Définition : Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $I_f = f(D)$ son image.

- Supposons qu'il existe un nombre réel $m \in I_f$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in D$. Le nombre m est alors appelé *minimum* (ou parfois *minimum global*) de f dans D. On dit que f *atteint son minimum (global) en* $c \in D$ si $f(c) = m$.
- Supposons qu'il existe un nombre réel $M \in I_f$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in D$. Le nombre M est alors appelé *maximum* (ou parfois *maximum global*) de f dans D. On dit que f *atteint son maximum (global) en* $c \in D$ si $f(c) = M$.
- Les nombres m et M évoqués dans les points précédents, s'ils existent, sont appelés *extrema (globaux)* de f dans D. On dit que f *atteint un extremum (global) en* $c \in D$ si $f(c) = m \in I_f$ ou si $f(c) = M \in I_f$.

7.2.3 Remarque : Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ peut tout à fait posséder un ou plusieurs extrema locaux, sans pour autant atteindre son maximum ou son minimum dans D. Pour s'en rendre compte, considérons, par exemple, la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f\,: &]-2;\, 2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \;=\; x^3 + x^2 - x\,. \end{array}$$

La dérivée f', donnée par $f'(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 1 = (3\,x - 1)(x + 1)$, est strictement positive pour tout $x < -1$ et pour tout $x > \frac{1}{3}$, et strictement négative pour tout $-1 < x < \frac{1}{3}$; f admet donc un maximum local en $x_1 = -1$ et un minimum local en $x_2 = \frac{1}{3}$. Le minimum local ne peut en aucun cas être le minimum (global) de f dans $]-2; 2[$, vu qu'il existe $x \in\,]-2; 2[$ (par exemple $x = -\frac{19}{10}$) tel que $f(x) < f\left(\frac{1}{3}\right)$; aussi, le maximum local ne peut pas être le maximum (global) de f, vu qu'il existe $x \in\,]-2; 2[$ (par exemple $x = \frac{3}{2}$) tel que $f(x) > f(-1)$. Et comme $-2 \notin\,]-2; 2[$, respectivement $2 \notin\,]-2; 2[$, il n'est pas possible de dire que f atteint son minimum en -2, respectivement son maximum en 2. La conclusion suivante s'impose alors : f n'atteint ni son minimum, ni son maximum dans $]-2; 2[$. Noter que si le domaine de départ était $[-2; 2]$, alors la conclusion serait différente : f atteindrait effectivement son minimum en -2 et son maximum en 2 dans cet intervalle. Dès lors qu'une fonction continue a pour domaine de départ un intervalle fermé, elle atteint nécessairement son minimum ainsi que son maximum dans cet intervalle (*cf.* théorème du minimum et du maximum, section 2.9 consacrée aux théorèmes relatifs aux fonctions continues, dans le chapitre 2).



7.2.1 Condition nécessaire pour avoir un extremum local

7.2.4 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $c \in D$ (i.e. définie dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]c-\gamma\,; c+\gamma[$, où $\gamma > 0$ est un nombre réel). Si f admet un extremum local (i.e. si f admet un minimum ou un maximum local) en c et si, de plus, f est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans un voisinage d'un nombre réel $c \in D$. Supposons que f est dérivable en c et qu'elle admet un maximum local en c. Alors, en posant $x = c + \Delta x$, avec $x \in D$:

$$f'(c) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \;=\; \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \;=\; \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \end{cases},$$

du fait que, par définition d'un maximum local, $f(x) \leqslant f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leqslant 0$. Comme $f'(c)$ existe (par hypothèse), les deux limites ci-dessus existent et doivent être égales ; la dérivée de f en c est donc nécessairement nulle : $f'(c) = 0$. Un raisonnement similaire s'applique dans le cas où f possède un minimum local en c. $\square$

7.2.5 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un voisinage d'un nombre réel $c \in D$. On dit que c est un *point stationnaire* de f si f est dérivable en c et si $f'(c) = 0$.

7.2.6 Exemples : 1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ atteint son minimum en $x = 0$. Et en $x = 0$, la dérivée f' de f vaut effectivement $f'(0) = 0$.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3$ n'admet pas d'extremum en $x = 0$. Pourtant, $f'(0) = 0$. La réciproque de la proposition 7.2.4 n'est donc pas vraie. Dans le cas présent, le point de coordonnées $(0; 0)$ est ce que l'on appelle parfois un *palier.*

7.2.7 Remarques :

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. De la proposition 7.2.4, il ressort que les éventuels extrema locaux de f sont à rechercher parmi les points suivants :
  - ▷ les points stationnaires de f dans D ;
  - ▷ les points de D où f' n'est pas définie.
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a; b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Selon le théorème du minimum et du maximum (*cf.* théorème 2.10.3, section 2.10, chapitre 2), f atteint nécessairement, dans $[a; b]$, une valeur minimale (*i.e.* son minimum global dans $[a; b]$), ainsi qu'une valeur maximale (*i.e.* son maximum global dans $[a; b]$). De la proposition 7.2.4, il ressort que le(s) point(s) de $[a; b]$ où f atteint, dans $[a; b]$, sa valeur minimale (*i.e.* son minimum global), respectivement sa valeur maximale (*i.e.* son maximum global), ne peuvent être que parmi les points suivants :
  - ▷ les points stationnaires de f dans $[a; b]$;
  - ▷ les points de $]a; b[$ où f' n'est pas définie ;
  - ▷ les bords de $[a; b]$, *i.e.* les points a et b.

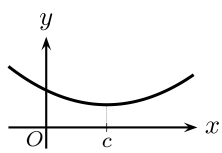
  Noter que si a et b peuvent être des points où f atteint sa valeur minimale et/ou sa valeur maximale dans $[a; b]$, ils ne peuvent en aucun cas être des points où f admet un extremum local, vu qu'ils sont sur les bords de $[a; b]$. En revanche, il est possible qu'un point dans $[a; b]$ où f atteint un extremum local soit un point où f atteint sa valeur minimale ou sa valeur maximale dans $[a; b]$.

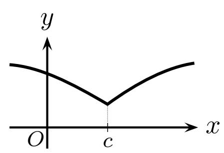
7.2.2 Condition suffisante pour avoir un extremum local

7.2.8 Proposition : *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons, en outre, que f est dérivable dans I, sauf éventuellement en c.*

- *Pour que f admette un minimum local en c, il suffit qu'il existe un intervalle ouvert $]a; b[\subset I$, contenant c, tel que :*

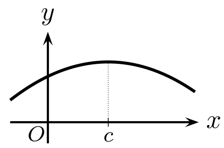
$$\begin{cases} f'(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in]a; c[\ , \\ f'(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in]c; b[\ . \end{cases}$$

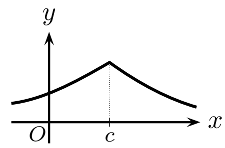




- *Pour que f admette un maximum local en c, il suffit qu'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c, tel que :*

$$\begin{cases} f'(x) \geqslant 0 & \textit{si } x \in \,]a;\, c[\,, \\ f'(x) \leqslant 0 & \textit{si } x \in \,]c;\, b[\,. \end{cases}$$





Preuve : Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons, en outre, que f est dérivable dans I, sauf éventuellement en c, et qu'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c, tel que :

$$\begin{cases} f'(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \,]a;\, c[\,, \\ f'(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \,]c;\, b[\,. \end{cases}$$

Dans tout intervalle fermé compris entre c et x, où $x \in \,]a;\, c[\, \cup \,]c;\, b[$, la fonction f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis (*cf.* théorème 3.9.4, section 3.9 du chapitre 3) ; selon ce théorème, il existe un nombre ξ compris strictement entre c et x tel que :

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) - f(c) \;=\; f'(\xi)\,(x - c)\;;$$

autrement écrit :

$$f(x) \;=\; f(c) + f'(\xi)\,(x - c)\,.$$

Par conséquent :

- pour tout $x \in \,]a;\, c[\,$, $f'(\xi) \leqslant 0$ par hypothèse (vu que $\xi \in \,]x;\, c[\, \subset \,]a;\, c[\,$) ; donc :

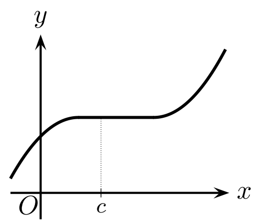
$$f(x) \;=\; f(c) + \underbrace{f'(\xi)}_{\leqslant 0}\underbrace{(x - c)}_{<0} \;\geqslant\; f(c)\;;$$

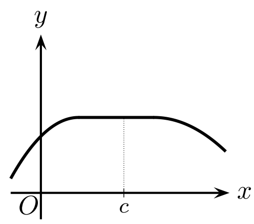
- pour tout $x \in \,]c;\, b[\,$, $f'(\xi) \geqslant 0$ par hypothèse (vu que $\xi \in \,]c;\, x[\, \subset \,]c;\, b[\,$) ; donc :

$$f(x) \;=\; f(c) + \underbrace{f'(\xi)}_{\geqslant 0}\underbrace{(x - c)}_{>0} \;\geqslant\; f(c)\;.$$

Ainsi, $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in \,]a;\, c[\, \cup \,]c;\, b[\,$; et donc $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in \,]a;\, b[\,$. La fonction f admet donc un minimum local en c. Un raisonnement similaire permet de prouver la deuxième partie de la proposition (qui est la condition suffisante pour avoir un maximum local). $\square$

7.2.9 Remarque : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert I. Si f est constante dans I, alors, selon la définition d'extremum local donnée précédemment, tout point $c \in I$ est un point où f admet aussi bien un minimum qu'un maximum local. La partie du graphe de f qui forme un segment horizontal est ce que l'on appelle un *plateau*. On dit alors que le point de coordonnées $\big(c\,;\, f(c)\big)$, où $c \in I$, est sur un plateau.





7.2.10 Exemples : 1. Soit $f\colon [-1;\,2] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

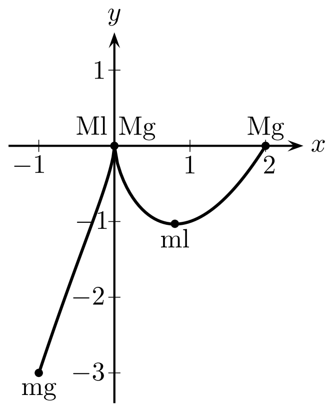
$$f(x) \;=\; (x-2)\,\sqrt[3]{x^2} \quad \left(=\;(x-2)\,x^{\frac{2}{3}}\,\right).$$

Cette fonction s'annule en $x_1 = 0 \in [-1;\,2]$ et en $x_2 = 2 \in [-1;\,2]$. Comme $\sqrt[3]{x^2} \geqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$ quel que soit $x \in [-1;\,2]$, alors $f(x) \leqslant 0$ quel que soit $x \in [-1;\,2]$. Cherchons à présent les extrema locaux et globaux de f. À cet effet, calculons la dérivée f' de f :

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; 1\cdot x^{\frac{2}{3}} + (x-2)\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} \\ &=\; \frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\,\big(3\,x + 2\,(x-2)\big) \\ &=\; \frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\,(5\,x-4) \\ &=\; \frac{5\,x-4}{3\,\sqrt[3]{x}}\,. \end{aligned}$$

x	-1		0		$\frac{4}{5}$		2
$5\,x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3\,\sqrt[3]{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

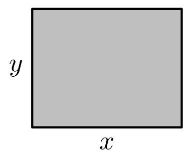
Dans $[-1;\,2]$, f' n'existe pas en $x_3 = 0$ et s'annule en $x_4 = \frac{4}{5}$. Le tableau des signes de f' représenté ci-dessus montre que f admet un maximum local en $x_3 = 0$ et un minimum local en $x_4 = \frac{4}{5}$. En x_3, f vaut $f(x_3) = f(0) = 0$; en $x_4 = \frac{4}{5}$, f vaut :



$$f\big(\tfrac{4}{5}\big) \;=\; \big(\tfrac{4}{5}-2\big)\,\sqrt[3]{\big(\tfrac{4}{5}\big)^2} \;=\; -\tfrac{6}{5}\,\sqrt[3]{\tfrac{16}{25}} \;\approx\; -1{,}03\,.$$

Regardons encore ce que vaut f aux bords de l'intervalle $[-1;\,2]$, *i.e.* en $x_5 = -1$ et en $x_6 = 2$; en x_5, f vaut $f(x_5) = f(-1) = (-1-2)\cdot 1 = -3$; en $x_6 = 2$, f vaut $f(x_6) = f(2) = 0$. Ainsi, la fonction f atteint son minimum global (mg) en $x_5 = -1$ et son maximum global (Mg) en $x_3 = 0$ et en $x_6 = 2$; f possède, en outre, un maximum local (Ml) en $x_3 = 0$ et un minimum local (ml) en $x_4 = \frac{4}{5}$.

2. La technique de recherche des extrema d'une fonction f, basée sur les conditions nécessaire et suffisante introduites dans la présente section, et illustrée dans le précédent exemple, permet de résoudre efficacement nombre de problèmes concrets, dans lesquels on cherche à optimiser une situation dans un cadre donné. Pour s'en rendre compte, considérons le contexte suivant : on dispose d'un grillage de longueur ℓ fixe (que l'on peut dérouler) ; avec ce grillage, on aimerait fabriquer une clôture délimitant un enclos rectangulaire ; afin que l'enclos puisse accueillir suffisamment d'ovins, ou voudrait que son aire soit la plus grande possible.



Appelons x et y les dimensions de l'enclos rectangulaire. L'aire A de cet enclos est alors $A = x\,y$. Or, x et y ne sont pas des grandeurs indépendantes l'une de l'autre ; elles sont liées par une équation : $x+y+x+y=\ell$; cette égalité exprime le fait que le pourtour de l'enclos est égal à la longueur de la clôture. La quantité y peut donc s'écrire en fonction de la quantité x :

$$x+y+x+y \;=\; \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,x+2\,y \;=\; \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; \frac{\ell}{2}-x\,,$$

si bien que l'aire A peut être vue comme une fonction de la seule variable x :

$$A \;=\; A(x) \;=\; x\left(\frac{\ell}{2}-x\right).$$

$A(x)$ est définie et continue en tout $x \in \mathbb{R}$. Les valeurs de x sont toutefois limitées à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\ell}{2}\right]$, de sorte que les dimensions x et y soient des grandeurs positives.

Chercher x et y qui maximisent A revient à chercher x qui maximise la fonction $x \mapsto A(x)$ dans l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\ell}{2}\right]$. Selon le théorème du minimum et du maximum, la fonction A atteint ses extrema dans cet intervalle, vu qu'il est fermé. Selon ce qui a été vu dans la sous-section consacrée à la condition nécessaire pour avoir un extremum local, les points où A atteint ses extrema se trouvent nécessairement parmi les points suivants : les points stationnaires de A, les points dans $\left]0\,;\,\frac{\ell}{2}\right[$ où A' n'existe pas et les bords de $\left[0\,;\,\frac{\ell}{2}\right]$, *i.e.* 0 et $\frac{\ell}{2}$.

- Le maximum de A n'est certainement pas en $x=0$, ni en $x=\frac{\ell}{2}$, vu que $A(0)=A\left(\frac{\ell}{2}\right)=0$.
- Le maximum de A ne peut pas être en un point où A' n'est pas définie, vu qu'un tel point n'existe pas dans ce cas.
- Le fait que A n'est pas maximal sur les bords de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\ell}{2}\right]$, tout comme le fait qu'il n'existe aucun point dans $\left]0\,;\,\frac{\ell}{2}\right[$ où A' n'existe pas, permet de dire que le maximum de A se trouve en un point stationnaire de A. Déterminons ce point ; pour cela, calculons la dérivée de A :

  $$A'(x) \;=\; 1\cdot\left(\frac{\ell}{2}-x\right)+x\cdot(-1) \;=\; \frac{\ell}{2}-2\,x\,.$$

  A' s'annule en un unique point, $x=x_1=\frac{\ell}{4}$; A n'admet donc qu'un unique point stationnaire, $x_1=\frac{\ell}{4}$. Comme $A'(x)>0$ lorsque $x<x_1$ et $A'(x)<0$ lorsque $x>x_1$, on peut affirmer que ce point stationnaire est un point où A admet un maximum local. Comme il n'y a pas d'autre point stationnaire et comme $A(0)=A\left(\frac{\ell}{2}\right)=0$, on conclut que A n'admet pas d'autre maximum local ; A atteint donc son maximum (global) en $x_1=\frac{\ell}{4}$.

Les dimensions x et y qui maximisent l'aire de l'enclos sont donc :

$$x \;=\; x_1 \;=\; \frac{\ell}{4} \qquad \text{et} \qquad y \;=\; \left(\frac{\ell}{2}-x_1\right) \;=\; \frac{\ell}{4}\;;$$

il s'agit d'un enclos carré.

7.2.3 Condition suffisante alternative pour avoir un extremum

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soit aussi c un point dans I où la dérivée s'annule ou n'existe pas. Dans la sous-section précédente, il a été vu que la nature de c pouvait être déterminée grâce à l'étude du signe de la dérivée f' de f en $x < c$ et en $x > c$, à supposer que celle-ci existe dans un intervalle ouvert contenant c, sauf éventuellement en c. Dans la présente sous-section, une autre manière de déterminer la nature de c va être présentée ; une manière basée sur l'étude des dérivées de f d'ordre supérieur ou égal à deux, pour autant que celles-ci existent dans I (y compris en c).

Supposons que la fonction f donnée dans le début de la présente sous-section est n fois dérivable dans l'intervalle ouvert I, où n est un nombre entier supérieur ou égal à 2. Dans ce cas, le développement limité d'ordre $n-1$ autour de $c \in I$ est égal à la somme du développement de Taylor d'ordre $n-1$ de f autour de c, et du reste de Lagrange associé :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-c)^n\,,$$

où ξ est un nombre compris strictement entre x et c. Dans la situation où les dérivées de f jusqu'à l'ordre $n-1$ sont toutes nulles en c (*i.e.* $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$) :

$$f(x) \;=\; f(c) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-c)^n\,.$$

Posons à présent l'hypothèse que $f^{(n)}$ est continue dans I et que $f^{(n)}(c) \neq 0$. Alors, pour tout $x \neq c$ suffisamment proche de c, $f^{(n)}(\xi)$ est suffisamment proche de $f^{(n)}(c)$ pour pouvoir affirmer que $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ et que $f^{(n)}(\xi)$ et $f^{(n)}(c)$ ont le même signe (vu que ξ est alors suffisamment proche de c aussi). À ce stade, trois situations peuvent être envisagées :

- n est pair et $f^{(n)}(c) < 0$; alors il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c (où a et b sont deux nombres réels dans I tels que $a < b$), tel que (par continuité) $f^{(n)}(\xi) < 0$ quel que soit $x \in\,]a;\, b[$; il existe donc un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$ tel que, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$f(x) \;=\; f(c) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{<\,0}\underbrace{(x-c)^n}_{\geqslant\,0} \leqslant f(c)\,,$$

  vu que n est pair. Par conséquent, f admet un maximum local en c.

- n est pair et $f^{(n)}(c) > 0$; alors il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c (où a et b sont deux nombres réels dans I tels que $a < b$), tel que (par continuité) $f^{(n)}(\xi) > 0$ quel que soit $x \in\,]a;\, b[$; il existe donc un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$ tel que, pour tout $x \in\,]a;\, b[$:

$$f(x) \;=\; f(c) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>\,0}\underbrace{(x-c)^n}_{\geqslant\,0} \geqslant f(c)\,,$$

  vu que n est pair. Par conséquent, f admet un minimum local en c.

- n est impair ; dans ce cas, quel que soit l'intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c (où a et b sont deux nombres réels dans I tels que $a < b$), $(x-c)^n < 0$ si $x \in\,]a;\, c[$ et $(x-c)^n > 0$ si $x \in\,]c;\, b[$; et comme pour tout x suffisamment proche de c, $f^{(n)}(\xi)$ a (par continuité) le même signe que $f^{(n)}(c)$, on conclut que $f^{(n)}(\xi)(x-c)^n$ ne garde pas toujours le même signe dans $]a;\, b[$ quel que soit $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c ; f n'admet donc pas d'extremum en c lorsque n est impair.

Ces considérations peuvent être résumées comme suit.

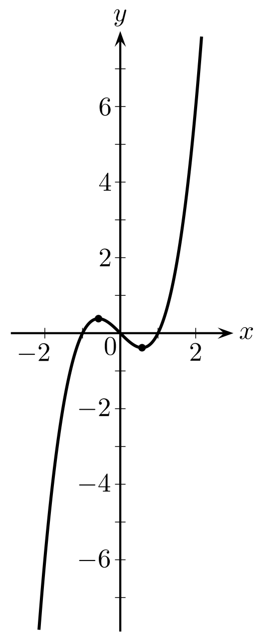
7.2.11 Proposition : *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons que f est n fois dérivable dans I, où $n \geqslant 2$ est un nombre entier. Supposons de plus que $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, que $f^{(n)}(c) \neq 0$ et que $f^{(n)}$ est continue dans I.*

- *Si n est pair et :*
  - ◇ *si $f^{(n)}(c) < 0$, alors f admet un maximum local en c,*
  - ◇ *si $f^{(n)}(c) > 0$, alors f admet un minimum local en c.*
- *Si n est impair, alors f n'admet pas d'extremum local en c.*

7.2.12 Remarque : Il est important de noter que la seule condition $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, évoquée dans la proposition précédente, ne permet pas d'affirmer quoi que ce soit sur la nature de c ; c'est uniquement lorsque cette condition est couplée avec la condition $f^{(n)}(c) \neq 0$ qu'il est possible de conclure. Les exemples qui suivent illustrent bien cette réalité.

7.2.13 Exemples : 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f(x) = x^3 - x\,.$$



Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. Cherchons ses extrema locaux ; pour cela, calculons la dérivée f' de f :

$$f'(x) = 3\,x^2 - 1 = \big(\sqrt{3}\,x - 1\big)\big(\sqrt{3}\,x + 1\big)\,.$$

Manifestement, f' est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ et s'annule en $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et en $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La fonction f n'admet donc aucun point dans D_f où sa dérivée f' n'existe pas, et possède deux points stationnaires, x_1 et x_2. Déterminons la nature de ces points ; à cet effet, calculons la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = 6\,x\,.$$

Le fait que :

$$f''(x_1) = f''\Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$$

et que f'' est une dérivée d'ordre pair permet de conclure que f admet un maximum local en $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aussi, le fait que :

$$f''(x_2) = f''\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} > 0$$

et que f'' est une dérivée d'ordre pair permet de conclure que f admet un minimum local en $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

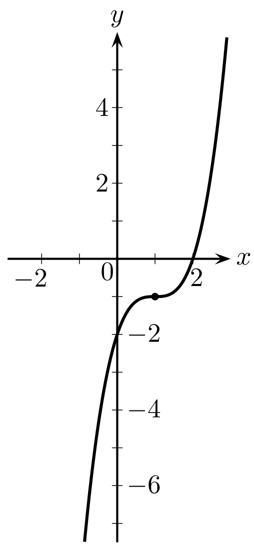
$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 2\,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. Cherchons ses extrema locaux ; pour cela, calculons la dérivée f' de f :

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x + 3 = 3\,(x^2 - 2\,x + 1) = 3\,(x-1)^2\,.$$

Manifestement, f' est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ et s'annule en $x_1 = 1$ uniquement. La fonction f n'admet donc aucun point dans D_f où sa dérivée f' n'existe pas, et possède un unique point stationnaire, x_1. Déterminons la nature de ce point ; pour cela, calculons la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = 6\,x - 6 = 6\,(x-1)\,.$$



Comme :

$$f''(x_1) = f''(1) = 6\,(1-1) = 0\,,$$

il n'est pas possible de caractériser x_1 à l'aide de f''. Calculons alors la dérivée d'ordre 3 de f :

$$f'''(x) = 6\,.$$

Le fait que $f'''(x_1) = f'''(1) = 6 \neq 0$ et que f''' est une dérivée d'ordre impaire permet de conclure que f n'admet pas d'extremum local en x_1 ; elle possède ce que l'on appelle parfois un *palier*.

Note : Le développement limité d'ordre 2 de f autour de $x_1 = 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x-1)^3 \\ &= -1 + 0\cdot(x-1) + 0\cdot(x-1)^2 + \frac{6}{3!}\,(x-1)^3 = -1 + (x-1)^3\,, \end{aligned}$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre 1 et x. Vu que $f'''(\xi) = 6$ demeure constante et que $(x-1)^3$ change de signe lorsque x passe de $x < 1$ à $x > 1$, on déduit que f ne peut effectivement pas admettre d'extremum en 1.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f(x) = x^4 - 4 \,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. Cherchons ses extrema locaux ; pour cela, calculons la dérivée f' de f :

$$f'(x) = 4\,x^3 \,.$$

Manifestement, f' est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ et s'annule en $x_1 = 0$ uniquement. La fonction f n'admet donc aucun point dans D_f où sa dérivée f' n'existe pas, et possède un unique point stationnaire, x_1. Déterminons la nature de ce point ; pour cela, calculons la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = 12\,x^2 \,.$$

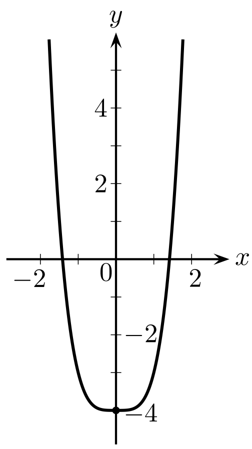
Comme $f''(x_1) = f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$, il n'est pas possible de caractériser x_1 à l'aide de f''. Calculons alors la dérivée d'ordre 3 de f :

$$f'''(x) = 24\,x \,.$$

Comme $f'''(x_1) = f'''(0) = 24 \cdot 0 = 0$, il n'est pas possible de caractériser x_1 à l'aide de f'''. Calculons alors la dérivée d'ordre 4 de f :

$$f^{(4)}(x) = 24 \,.$$

Le fait que $f^{(4)}(x_1) = f^{(4)}(0) = 24 > 0$ et que $f^{(4)}$ est une dérivée d'ordre pair permet de conclure que f admet un minimum local en x_1.



Note : Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_1 = 0$ s'écrit :

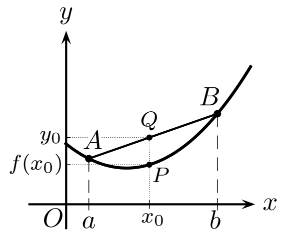
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x-0)^4 \\ &= -4 + 0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (x-0)^2 + 0 \cdot (x-0)^3 + \frac{24}{4!}\,(x-0)^4 = -4 + (x-0)^4 \,, \end{aligned}$$

où ξ est un nombre réel compris strictement entre 0 et x. Vu que $f^{(4)}(\xi) = 24$ demeure constante et que $(x-0)^4$ est toujours positif (que $x < 0$ ou $x > 0$), on déduit que f admet effectivement un minimum local en $x_1 = 0$.

7.3 Concavité et courbure

7.3.1 Définition : Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle ouvert $I \subset D$.

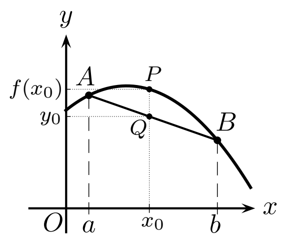
- f est dite *convexe* dans I si, pour tout couple de points $A\big(a\,;\, f(a)\big) \in \mathbb{R}^2$ et $B\big(b\,;\, f(b)\big) \in \mathbb{R}^2$ du graphe de f, où a et b sont deux nombres réels dans I tels que $a < b$, n'importe quel point $P\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ du graphe de f, pour lequel $a < x_0 < b$, se trouve en dessous du segment $\overline{AB}$, *i.e.* se trouve en dessous du point $Q(x_0;\, y_0)$ du segment $\overline{AB}$ ayant pour abscisse x_0 ; autrement dit, pour tout $a < x_0 < b$:



$$f(x_0) \leqslant y_0\,,$$

  où y_0 est l'ordonnée de Q.

- f est dite *concave* dans I si, pour tout couple de points $A\big(a\,;\, f(a)\big) \in \mathbb{R}^2$ et $B\big(b\,;\, f(b)\big) \in \mathbb{R}^2$ du graphe de f, où a et b sont deux nombres réels dans I tels que $a < b$, n'importe quel point $P\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ du graphe de f, pour lequel $a < x_0 < b$, se trouve au-dessus du segment $\overline{AB}$, *i.e.* se trouve au-dessus du point $Q(x_0;\, y_0)$ du segment $\overline{AB}$ ayant pour abscisse x_0 ; autrement dit, pour tout $a < x_0 < b$:



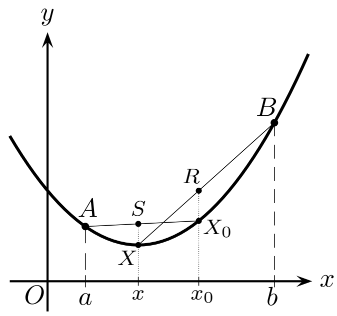
$$f(x_0) \geqslant y_0\,,$$

  où y_0 est l'ordonnée de Q.

7.3.2 Remarques :

- La *concavité* (on peut aussi dire la *convexité*) est une notion géométrique qui s'applique, entre autres, à des courbes planes. Dire qu'une fonction f est convexe (ou concave) dans un intervalle ouvert donné constitue un leger abus de langage, puisque ce n'est pas f directement qui est convexe (ou concave), mais son graphe (qui est une courbe plane).
- Étudier la *concavité* d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ revient à déterminer les intervalles ouverts dans lesquels la fonction en question est convexe, ainsi que les intervalles ouverts dans lesquels elle est concave.
- Toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$, définie et convexe, ou concave, dans un intervalle ouvert $I \subset D$ est nécessairement continue dans I. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas où f est convexe dans I (le cas où f est concave se traitant de façon similaire). Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique ; soient aussi $\big(a\,;\, f(a)\big) \in \mathbb{R}^2$ et $\big(b\,;\, f(b)\big) \in \mathbb{R}^2$ deux points du graphe de f tels que $a, b \in I$ et $a < b$; soit encore $x_0 \in I$ tel que $a < x_0 < b$. Alors, pour tout $x \in \,]a;\, b[$ tel que $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leqslant \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}\,.$$



Pour démontrer cette double inégalité, il convient de supposer, en premier lieu, que $x < x_0$; soit alors $R(x_0;\, y_0)$ le point sur le segment $\overline{XB}$ d'abscisse x_0, où $X\big(x\,;\, f(x)\big)$ est le point du graphe de f ayant pour abscisse x. Les points X, R et B étant alignés, les segments $\overline{XB}$, $\overline{XR}$ et $\overline{RB}$ sont tous supportés par la même droite ; par conséquent :

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{y_0-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(b)-y_0}{b-x_0}\,.$$

Aussi, soit $S(x;\, y)$ le point sur le segment $\overline{AX_0}$ d'abscisse x, où $X_0\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ est le point du graphe de f d'abscisse x_0. Les points A, S et X_0 étant alignés, les segments $\overline{AX_0}$, $\overline{AS}$ et $\overline{SX_0}$ sont tous supportés par la même droite ; par conséquent :

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \frac{y-f(a)}{x-a} = \frac{f(x_0)-y}{x_0-x}\,.$$

Comme f est convexe dans I, alors $f(x_0) \leqslant y_0$ et $f(x) \leqslant y$. Ainsi, pour tout $x < x_0$, d'une part :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant \frac{y_0-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(b)-y_0}{b-x_0} \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\,,$$

d'autre part :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \geqslant \frac{f(x_0)-y}{x_0-x} = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\,;$$

la double inégalité est ainsi prouvée dans le cas où $x < x_0$. La preuve est similaire dans le cas où $x > x_0$; il faut simplement être attentif au fait que le point $R(x_0;\, y_0)$ se trouve sur le segment $\overline{AX}$ et le point $S(x;\, y)$ sur le segment $\overline{X_0B}$. Revenons maintenant à $f(x)$; pour tout $x \in I$ tel que $x \neq x_0$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\,.$$

Certes $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)$ n'existe pas en général. Mais vu que $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$ pour tout $x \in \,]a;\, b[$ tel que $x \neq x_0$, et que :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\,(x-x_0)\right) = f(x_0) + \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\,(x_0-x_0) = f(x_0)\,,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\,(x-x_0)\right) = f(x_0) + \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\,(x_0-x_0) = f(x_0)\,,$$

alors, selon le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\right) = f(x_0)\,;$$

f est donc continue en x_0. Le fait que le raisonnement est valable pour tous $a, b, x_0 \in I$ (où $a < x_0 < b$) permet de conclure que f est continue dans I.

7.3.3 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$.*

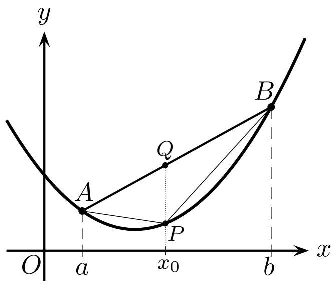
- *f est convexe dans I si et seulement si la dérivée f' de f est une fonction croissante dans I, si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, pour autant que f'' soit définie dans I.*
- *f est concave dans I si et seulement si la dérivée f' de f est une fonction décroissante dans I, si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, pour autant que f'' soit définie dans I.*

Preuve : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$.

Montrons d'abord que si f est convexe dans I, alors f' est croissante dans I. Pour ce faire, considérons deux points quelconques $A\big(a\,;\, f(a)\big) \in \mathbb{R}^2$ et $B\big(b\,;\, f(b)\big) \in \mathbb{R}^2$ du graphe de f, tels que $a, b \in I$ et $a < b$. Soient x_0 un point quelconque dans l'intervalle $]a; b[$, $P\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ le point du graphe de f d'abscisse x_0, et $Q(x_0\,;\, y_0)$ le point sur le segment $\overline{AB}$ d'abscisse x_0. Vu que Q est sur $\overline{AB}$, son ordonnée y_0 satisfait nécessairement les relations suivantes :

$$\frac{y_0 - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - y_0}{b - x_0} \ ;$$

de telles égalités expriment le fait que les segments $\overline{AB}$, $\overline{AQ}$ et $\overline{QB}$ ont la même pente. Comme f est supposée convexe dans I, alors $y_0 \geqslant f(x_0)$.



En conséquence, d'une part :

$$\frac{y_0 - f(a)}{x_0 - a} \geqslant \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \,,$$

vu que $y_0 \geqslant f(x_0) \Leftrightarrow y_0 - f(a) \geqslant f(x_0) - f(a)$, et d'autre part :

$$\frac{f(b) - y_0}{b - x_0} \leqslant \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \,,$$

vu que $y_0 \geqslant f(x_0) \Leftrightarrow -y_0 \leqslant -f(x_0) \Leftrightarrow f(b) - y_0 \leqslant f(b) - f(x_0)$. Ainsi, en utilisant la double égalité $\frac{y_0 - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - y_0}{b - x_0}$, il ressort que :

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \,.$$

Faisons à présent tendre successivement x_0 vers a (par valeurs plus grandes), puis vers b (par valeurs plus petites).

- Posons $\Delta x = x_0 - a$. Dans ce cas, dire que x_0 tend vers a par valeurs plus grandes revient à dire que Δx tend vers 0 par valeurs plus grandes. Ainsi, en notant que $\Delta x = x_0 - a \Leftrightarrow x_0 = a + \Delta x$:

$$\lim_{\substack{x_0 \to a \\ x_0 > a}} \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} .$$

Or, cette dernière expression n'est rien d'autre que la dérivée à droite de f en a ; et comme f est dérivable dans I, et donc en particulier en a, la dérivée à droite de f en a est égale à la dérivée de f en a. Donc, en tenant compte de l'inégalité $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\substack{x_0 \to a \\ x_0 > a}} \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \\ &\leqslant \lim_{\substack{x_0 \to a \\ x_0 > a}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \end{aligned}$$

- Posons $\Delta x = x_0 - b$. Dans ce cas, dire que x_0 tend vers b par valeurs plus petites revient à dire que Δx tend vers 0 par valeurs plus petites. Ainsi, en notant que $\Delta x = x_0 - b \Leftrightarrow x_0 = b + \Delta x$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_0 \to b \\ x_0 < b}} \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \lim_{\substack{x_0 \to b \\ x_0 < b}} \frac{-\big(f(x_0) - f(b)\big)}{-(x_0 - b)} &= \lim_{\substack{x_0 \to b \\ x_0 < b}} \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} . \end{aligned}$$

Or, cette dernière expression n'est rien d'autre que la dérivée à gauche de f en b ; et comme f est dérivable dans I, et donc en particulier en b, la dérivée à gauche de f en b est égale à la dérivée de f en b. Donc, en tenant compte de l'inégalité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$:

$$\begin{aligned} f'(b) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\substack{x_0 \to b \\ x_0 < b}} \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \\ &\geqslant \lim_{\substack{x_0 \to b \\ x_0 < b}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \end{aligned}$$

En résumé :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b) ,$$

d'où :

$$f'(a) \leqslant f'(b) .$$

Le fait que le résultat est valable quels que soient les points $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $B\big(b\,;\,f(b)\big)$ tels que $a, b \in I$, où $a < b$, permet de conclure que la dérivée f' de f est croissante dans I.

Réciproquement, supposons que f' est croissante dans I. Dans ce cas, $f'(a) \leqslant f'(x_0) \leqslant f'(b)$, quels que soient a, b, $x_0 \in I$ tels que $a < x_0 < b$. Considérons alors la fonction $g\colon I \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x) \;=\; f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)\,.$$

De par sa construction, g satisfait $g(a) = g(b)$; en effet :

$$g(a) \;=\; f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a-a) \;=\; f(a)$$

et :

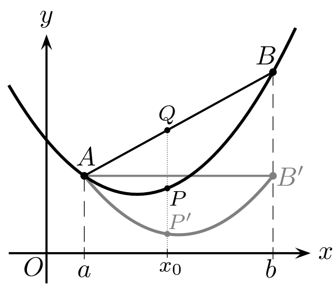
$$g(b) \;=\; f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(b-a) \;=\; f(b) - \big(f(b)-f(a)\big) \;=\; f(a)\,.$$

De plus, g est dérivable dans I, vu que f l'est ; la dérivée g' de g s'écrit :

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

En outre, g' est croissante dans I, vu que f' l'est ; en effet, pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$:

$$g'(x_1) \;=\; f'(x_1) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\leqslant\; f'(x_2) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;=\; g'(x_2)\,.$$



En résumé, g est une fonction continue dans $[a;\,b]$, dérivable dans $]a;\,b[$ (vu que g est dérivable dans I et que $a, b \in I$) et telle que $g(a) = g(b)$; g satisfait donc les hypthèses du théorème de Rolle (*cf.* section 3.9 du chapitre 3). De fait, selon ce théorème, il existe (au moins) un nombre réel $c \in \,]a;\,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme g' est croissante dans I, et donc dans $]a;\,b[$, alors $g'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \,]a;\,c[$ et $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \,]c;\,b[$. Ainsi, selon la proposition 7.1.3, la fonction g est décroissante dans $]a;\,c[$ et croissante dans $]c;\,b[$. En conséquence (et du fait de la continuité de g dans $[a;\,b]$), $g(a) \geqslant g(x) \geqslant g(c)$ pour tout $x \in [a;\,c]$ et $g(c) \leqslant g(x) \leqslant g(b)$ pour tout $x \in [c;\,b]$. Autrement écrit, et en tenant compte du fait que $g(a) = g(b)$:

$$g(c) \;\leqslant\; g(x) \;\leqslant\; g(a) = g(b)\,, \qquad \text{pour tout } x \in [a;\,b]\,.$$

En particulier, en reprenant l'élément $x_0 \in \,]a;\,b[$ introduit plus haut, $g(x_0) \leqslant g(a) = g(b)$. Or, $g(x_0) = f(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x_0 - a)$ et $g(a) = f(a)$. Donc :

$$f(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x_0-a) \;=\; g(x_0) \leqslant g(a) \;=\; f(a)\,,$$

d'où :

$$f(x_0) - f(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x_0 - a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Soient à présent $A\big(a\,;\,f(a)\big) \in \mathbb{R}^2$, $B\big(b\,;\,f(b)\big) \in \mathbb{R}^2$ et $P\big(x_0\,;\,f(x_0)\big) \in \mathbb{R}^2$ les points du graphe de f d'abscisse a, b et x_0, respectivement ; soit aussi $Q(x_0\,;\,y_0)$ le point sur le segment $\overline{AB}$, d'abscisse x_0. Alors, comme vu au début de la démonstration :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_0-f(a)}{x_0-a}\,.$$

En combinant cette égalité avec l'inégalité précédente, il vient :

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{y_0-f(a)}{x_0-a}\,.$$

Une telle inégalité est respectée si et seulement si :

$$f(x_0) \leqslant y_0\,.$$

Le fait que ce résultat soit valable pour tous $a, b, x_0 \in I$, tels que $a < x_0 < b$, prouve que f est convexe dans I.

La démonstration du fait que f est concave dans I si et seulement si f' est décroissante dans I est en tout point similaire à celle donnée ci-dessus, établissant le fait que f est convexe dans I si et seulement si f' est croissante dans I.

Enfin, pour montrer que la dérivée f' de f est croissante (respectivement décroissante) dans I si et seulement si la dérivée seconde f'' de f, si elle est définie, est positive (respectivement négative) dans I, il suffit de reprendre la preuve de la proposition 7.1.3 et d'y remplacer f par f'. □

7.3.4 Définition : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$.

- On dit que la fonction f a une *courbure (strictement) négative* en $x \in I$ si $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) < 0$).
- On dit que la fonction f a une *courbure (strictement) positive* en $x \in I$ si $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) > 0$).

7.3.5 Remarques :

- Dire qu'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$, définie et deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$, est convexe (respectivement concave) dans I revient à dire que f a une courbure positive (respectivement négative) dans I.
- La notion de *courbure* ne se limite pas au contexte des fonctions réelles d'une variable (réelle) ; elle s'applique en général aux courbes, planes ou non, aux surfaces, etc. La présente étude se limite toutefois uniquement au cas des courbes planes décrites par des fonctions (réelles).

7.4 Points d'inflexion

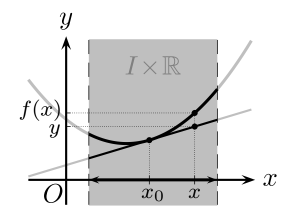
7.4.1 Définition : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. On dit que $\big(c\,;\, f(c)\big) \in \mathbb{R}^2$ est un *point d'inflexion* du graphe de f (ou simplement de f) si la fonction f est dérivable en c (*i.e.* $f'(c) \in \mathbb{R}$), ou si elle admet une dérivée infinie en c (*i.e.* $f'(c) = -\infty$ ou $f'(c) = \infty$), et s'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c, tel que :

$$\begin{cases} f \text{ est concave dans }]a;\, c[\ , \\ f \text{ est convexe dans }]c;\, b[\ , \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \text{ est convexe dans }]a;\, c[\ , \\ f \text{ est concave dans }]c;\, b[\ . \end{cases}$$

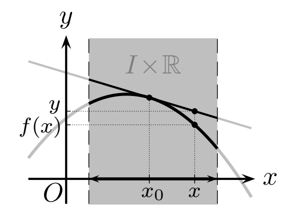
Dans ces circonstances, on dit que f *admet un point d'inflexion en* c ; on dit aussi parfois que f *admet un point d'inflexion dans* I, vu que $c \in I$.

7.4.2 Propriétés : Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$.

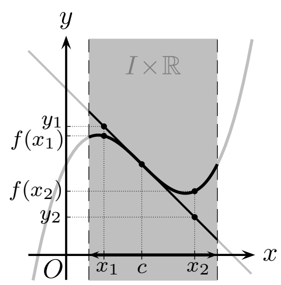
- Si f est convexe dans I, alors, pour tout $x_0 \in I$, la tangente au graphe de f en $\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ est sur ou en dessous du graphe de f dans le domaine $I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$; plus précisément, $f(x) \geqslant y$, quel que soit $x \in I$, où y est l'ordonnée du point $S(x;\, y)$ d'abscisse x, qui se trouve sur la tangente au graphe de f en $\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$.



- Si f est concave dans I, alors, pour tout $x_0 \in I$, la tangente au graphe de f en $\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$ est sur ou au-dessus du graphe de f dans le domaine $I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$; plus précisément, $f(x) \leqslant y$, quel que soit $x \in I$, où y est l'ordonnée du point $S(x;\, y)$ d'abscisse x, qui se trouve sur la tangente au graphe de f en $\big(x_0\,;\, f(x_0)\big)$.



- Si f admet un unique point d'inflexion dans I, en un certain point c, alors la tangente au graphe de f en $\big(c\,;\, f(c)\big)$ traverse le graphe dans le domaine $I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$; plus précisément, $f(x) \leqslant y$ (respectivement $f(x) \geqslant y$) quel que soit $x \in I$ tel que $x < c$ et $f(x) \geqslant y$ (respectivement $f(x) \leqslant y$) quel que soit $x \in I$ tel que $x > c$, où y est l'ordonnée du point $S(x;\, y)$ d'abscisse x, qui se trouve sur la tangente au graphe de f en $\big(c\,;\, f(c)\big)$.



Démontrons la dernière propriété. Pour cela, considérons le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$, qui admet un unique point d'inflexion dans I, en un certain point c ; notons $C\big(c\,;\, f(c)\big)$ le point d'inflexion du graphe de f dans $I \times \mathbb{R}$. Les hypothèses qui viennent d'être formulées permettent d'affirmer que f

est convexe dans $I \cap\,]-\infty; c[$ et concave dans $I \cap\,]c; \infty[$, ou concave dans $I \cap\,]-\infty; c[$ et convexe dans $I \cap\,]c; \infty[$. Envisageons le deuxième scénario (le premier se traitant de façon similaire). Soient $x_1 \in I \cap\,]-\infty; c[$ et $x_2 \in I \cap\,]c; \infty[$. La fonction f étant dérivable dans I, il existe, selon le théorème des accroissements finis, un nombre réel $\xi_1 \in I \cap\,]-\infty; c[$ et un nombre réel $\xi_2 \in I \cap\,]c; \infty[$ tels que :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \qquad \text{et} \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\,.$$

Soit y_1 (respectivement y_2) l'ordonnée du point $S_1(x_1; y_1)$ (respectivement $S_2(x_2; y_2)$) sur la droite tangente au graphe de f en $C\big(c\,; f(c)\big)$, ayant pour abscisse x_1 (respectivement x_2). Comme S_1 et S_2 sont sur la même tangente, alors :

$$\frac{f(c) - y_1}{c - x_1} = f'(c) = \frac{y_2 - f(c)}{x_2 - c}\,.$$

Et vu que f est concave dans $I \cap\,]-\infty; c[$ et convexe dans $I \cap\,]c; \infty[$, alors, selon la proposition 7.3.3, $f'(\xi_1) \geqslant f'(c)$ et $f'(c) \leqslant f'(\xi_2)$. Par conséquent :

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \geqslant \frac{f(c) - y_1}{c - x_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{y_2 - f(c)}{x_2 - c} \leqslant \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}\,,$$

d'où :

$$y_1 \geqslant f(x_1) \qquad \text{et} \qquad y_2 \leqslant f(x_2)\,.$$

Le fait que le raisonnement soit valable pour tous $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < c < x_2$ permet de conclure que la tangente au graphe de f en $\big(c\,; f(c)\big)$ traverse le graphe de f dans le domaine $I \times \mathbb{R}$. Noter, pour terminer, que les deux autres propriétés évoquées (où f est convexe dans I, concave dans I) se démontrent de manière analogue. $\square$

7.4.3 Remarque : La définition d'un point d'inflexion peut légèrement différer d'un ouvrage à l'autre. Dans la présente étude, un point d'inflexion $\big(c\,; f(c)\big)$ du graphe d'une fonction réelle f est un point où la tangente au graphe existe. Dans certains livres, la condition d'existence de la tangente n'est pas exigée ; dans de telles circonstances, un point d'inflexion peut alors coïncider avec un point anguleux.

7.4.1 Condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion

7.4.4 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$; soit aussi c un point dans I. Si la seconde dérivée f'' de f est continue en c et si f admet un point d'inflexion en c, alors $f''(c) = 0$.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons que la dérivée f'' de f est continue en c et que f admet un point d'inflexion en c. Alors, par définition, il existe un intervalle ouvert $]a; b[\, \subset I$, contenant c, tel que :

$$\begin{cases} f \text{ est concave dans }]a; c[\,, \\ f \text{ est convexe dans }]c; b[\,, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} f \text{ est convexe dans }]a; c[\,, \\ f \text{ est concave dans }]c; b[\ ; \end{cases}$$

en d'autres termes, vu que f est deux fois dérivable dans I, il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c, tel que (*cf.* proposition 7.3.3) :

$$\begin{cases} f''(x) \leqslant 0 & \text{pour tout } x \in\,]a;\, c[\,, \\ f''(x) \geqslant 0 & \text{pour tout } x \in\,]c;\, b[\,, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f''(x) \geqslant 0 & \text{pour tout } x \in\,]a;\, c[\,, \\ f''(x) \leqslant 0 & \text{pour tout } x \in\,]c;\, b[\,. \end{cases}$$

Comme f'' est continue en c, alors $f''(c) = \lim_{x\to c} f''(x)$. Or :

$$\lim_{x\to c} f''(x) \;=\; \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to c\\ x<c}} f''(x) \leqslant 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to c\\ x>c}} f''(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c} f''(x) \;=\; \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to c\\ x<c}} f''(x) \geqslant 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to c\\ x>c}} f''(x) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Donc, par continuité de f'' en c :

$$f''(c) \;=\; \lim_{x\to c} f''(x) \;=\; 0\,. \qquad \square$$

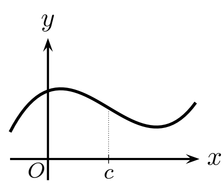
7.4.5 Remarques :

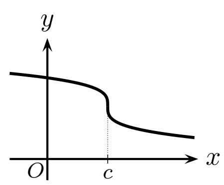
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$. De la proposition précédente, il ressort que si f admet un point d'inflexion dans I, ce point ne peut se trouver que parmi les points suivants :
  - ▷ les points de I où la dérivée seconde f'' de f est définie, continue et s'annule ;
  - ▷ les points de I où la dérivée seconde f'' de f est définie mais n'est pas continue ;
  - ▷ les points de I où la dérivée seconde f'' de f n'est pas définie, mais où f est dérivable ou admet une dérivée infinie.
- Dans la proposition 7.4.4, si l'on abandonne l'hypothèse de continuité de f'' en c, la conclusion demeure valable : si f est deux fois dérivable dans I et admet un point d'inflexion en $c \in I$, alors nécessairement $f''(c) = 0$. Compte tenu de ces circonstances, le point précédent peut être reformulé comme suit : si $f : D \to \mathbb{R}$ admet un point d'inflexion dans un intervalle ouvert $I \subset D$, ce point se trouve nécessairement parmi les points suivants : les points de I où la dérivée seconde f'' de f est définie et s'annule, les points de I où la dérivée seconde f'' de f n'est pas définie mais où f est dérivable ou admet une dérivée infinie. Quelque peu technique, la preuve de ce résultat n'est pas donnée ici.

7.4.2 Condition suffisante pour avoir un point d'inflexion

7.4.6 Proposition : *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons que f est deux fois dérivable dans I, sauf éventuellement en $c \in I$. Supposons, en outre, que f est dérivable en c ou qu'elle admet une dérivée infinie en c. Alors, pour que f admette un point d'inflexion en c, il suffit qu'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\, \subset I$, contenant c, tel que :*

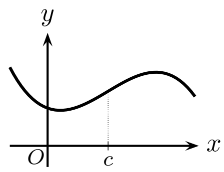
$$\begin{cases} f''(x) \leqslant 0 & \textit{si } x \in\,]a;\, c[\,, \\ f''(x) \geqslant 0 & \textit{si } x \in\,]c;\, b[\,, \end{cases}$$

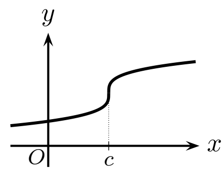




ou :

$$\begin{cases} f''(x) \geqslant 0 & \textit{si } x \in \,]a;\, c[\;, \\ f''(x) \leqslant 0 & \textit{si } x \in \,]c;\, b[\;. \end{cases}$$





Preuve : Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 7.3.3 et de la définition d'un point d'inflexion. □

7.4.7 Corollaire : *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle ouvert $I \subset D$, et c un point dans I. Supposons que f est deux fois dérivable dans I, sauf éventuellement en $c \in I$. Supposons, en outre, que f est dérivable en c ou qu'elle admet une dérivée infinie en c. Alors, s'il existe un intervalle ouvert $]a;\, b[\subset I$, contenant c, tel que $f''(x) > 0$ (respectivement $f''(x) < 0$) pour tout $x \in \,]a;\, c[\cup]c;\, b[$, alors f n'admet pas de point d'inflexion en c.*

Preuve : Ce résultat est également une conséquence directe de la proposition 7.3.3 et de la définition d'un point d'inflexion. □

7.4.8 Exemples : 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f(x) = \exp(-x^2) \,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. Cherchons ses points d'inflexion ; pour cela, calculons la dérivée seconde f'' de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \exp(-x^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(-x^2)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(-2\,x\exp(-x^2)\big) \\ &= -2\exp(-x^2) - 2\,x\,(-2\,x)\exp(-x^2) \\ &= -2\exp(-x^2) + 4\,x^2\exp(-x^2) \\ &= 2\,(2\,x^2 - 1)\exp(-x^2) \\ &= 2\,\big(\sqrt{2}\,x - 1\big)\big(\sqrt{2}\,x + 1\big)\exp(-x^2) \,. \end{aligned}$$

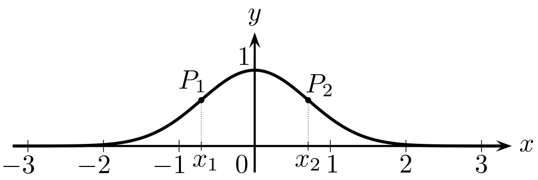
f'' est définie et continue dans tout $\mathbb{R}$. De fait, quel que soit l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, si f admet un point d'inflexion en un point $c \in I$, ce point satisfait la condition $f''(c) = 0$ (*cf.* remarque 7.4.5). Dans le cas présent, la dérivée seconde s'annule en :

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;;$$

en effet, la condition $f''(x) = 0$ implique $\big(\sqrt{2}\,x - 1\big)\big(\sqrt{2}\,x + 1\big) = 0$, vu que $\exp(-x^2)$ ne s'annule jamais dans $\mathbb{R}$. Le tableau des signes présenté ci-contre montre que f est convexe dans tout intervalle ouvert contenu dans $\left]-\infty;\, x_1\right[\cup \left]x_2;\, \infty\right[$ et concave dans tout intervalle ouvert contenu dans $\left]x_1;\, x_2\right[$. f admet donc un premier point d'inflexion (PI) en x_1 et un deuxième en x_2. Sur le graphe de f, les points d'inflexion sont $P_1\big(x_1\,;\, f(x_1)\big)$ et $P_2\big(x_2\,;\, f(x_2)\big)$; concrètement :

$$P_1\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\, \tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\Big) \quad \text{et} \quad P_2\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\, \tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\Big)\,.$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\sqrt{2}\,x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{2}\,x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\exp(-x^2)$	$+$		$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$



2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1\,.$$

Cette fonction a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. Cherchons ses points d'inflexion. À cet effet, calculons les dérivées première et seconde de f :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(x-2)^{\frac{1}{3}} + 1\Big] = \frac{1}{3}\,(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,,$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{3}\,(x-2)^{-\frac{2}{3}}\right] = -\frac{2}{9}\,(x-2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\,\sqrt[3]{(x-2)^5}}\,.$$

f'' est définie et continue dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; en $x = 2$, elle n'est pas définie. De fait, si f admet un point d'inflexion, celui-ci ne peut être qu'en $x = 2$. Relevons alors les deux points suivants :

- ◇ f admet une dérivée infinie en $x = 2$; en effet :

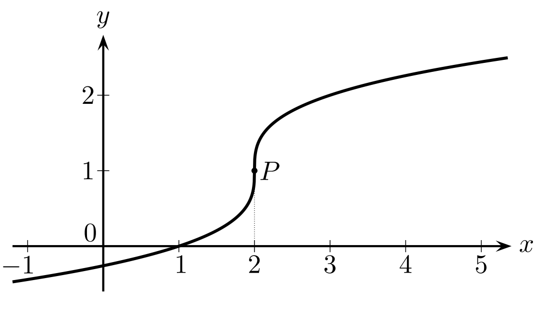
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{3\,\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \infty = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{3\,\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,;$$

- ◇ f'' est strictement positive dans tout intervalle ouvert contenu dans $\left]-\infty;\, 2\right[$ et strictement négative dans tout intervalle ouvert contenu dans $\left]2;\, \infty\right[$.

Ces deux éléments permettent de conclure que f admet effectivement un point d'inflexion en $x = 2$. Sur le graphe de f, le point d'inflexion est :

$$P(2;\, 1)\,;$$

c'est un point où la tangente au graphe est verticale.



3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par (*cf.* troisième des exemples 7.2.13) :

$$f(x) = x^4 - 4\,.$$

Cette fonction n'admet pas de point d'inflexion en $x = 0$, quand bien même la dérivée seconde f'' de f, qui est donnée par $f''(x) = 12\,x^2$, s'annule en $x = 0$. Cette réalité est due au fait que f'' est strictement positive dans $]-\infty; 0[$, ainsi que dans $]0; \infty[$.

7.5 Étude d'une fonction

Appliqués à une fonction réelle f donnée, les résultats présentés dans ce chapitre fournissent des informations essentielles sur la forme du graphe de f. Si la détermination des extrema, points d'inflexion... est complétée par l'étude d'autres caractéristiques, telles que les éventuels zéros, asymptotes..., il devient aisé d'esquisser le graphe de façon relativement précise. Étudier complètement une fonction revient à traiter tous les points de la liste relativement exhaustive donnée ci-dessous.

i. Domaine de définition.
ii. Parité, périodicité...
iii. Zéros et tableau des signes.
iv. Points de discontinuités et leur nature (calcul de limite) ; asymptotes.
v. Extrema ; intervalles de croissance et décroissance.
vi. Points d'inflexion ; intervalles de concavité et de convexité.
vii. Représentation graphique (*i.e.* esquisse du graphe).
viii. Mise en évidence d'autres symétries éventuelles.

7.5.1 Exemple : Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{3\ln(x^2)}{x}\,.$$

i. *Domaine de définition* : Le numérateur de $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; en effet, $\ln(x^2)$ existe pour tout $x^2 > 0$; or, $x^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$. Quant au dénominateur, il est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x = 0$. Le domaine de définition de f est donc :

$$D_f = \mathbb{R}^*\,.$$

ii. *Parité, périodicité* : La fonction f n'est pas périodique. Cela étant, elle est impaire ; en effet, son domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine de l'axe x et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \frac{3\ln\big((-x)^2\big)}{-x} = \frac{3\ln(x^2)}{-x} = -\frac{3\ln(x^2)}{x} = -f(x)\,.$$

Pour connaître les caractéristiques essentielles de son graphe, il n'est donc pas nécessaire d'étudier f dans tout $\mathbb{R}^*$; il suffit de le faire dans $\mathbb{R}^*_-$; ou dans $\mathbb{R}^*_+$. Si, dans la suite, f sera tout de même étudiée dans tout $\mathbb{R}^*$, c'est parce que le travail n'en est pas plus conséquent. Le fait de savoir que f est impaire permettra alors de vérifier, du moins en partie, la cohérence des résultats obtenus.

iii. *Zéros et tableau des signes* : La fonction f s'annule en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 1$; en effet :

$$\frac{3\ln(x^2)}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 & \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Le tableau des signes de f, établi ci-dessous, montre que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-1; 0[\cup]1; \infty[$. Les signes et les zéros sont cohérents avec le fait que f est impaire.

x		-1		0		1	
$3\ln(x^2)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

iv. *Points de discontinuité et asymptotes* : Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x$ étant continues en tout point de leurs domaines de définition respectifs, la fonction f est continue dans $D_f = \mathbb{R}^*$.

◇ f possède une discontinuité de type asymptotique en $x = 0$; les calculs de limites suivants le montrent :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{3\ln(x^2)}{x} = \infty$$

et :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3\ln(x^2)}{x} = -\infty\,.$$

f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

◇ f possède une même asymptote horizontale, à droite et à gauche, d'équation $y = 0$; le calcul de limite suivant, dans lequel la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) est appliquée, le montre :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\ln(x^2)}{x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x^2}\,2\,x}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{x} = 0\,.$$

◇ Le fait que f possède une (même) asymptote horizontale à droite et à gauche implique que f n'admet aucune asymptote oblique.

Ces résultats sont en adéquation avec le fait que f est impaire.

v. *Extrema* : Ils s'obtiennent en étudiant la dérivée f' de f ; cette dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\frac{6x}{x^2} \cdot x - 3\ln(x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{3\big(2 - \ln(x^2)\big)}{x^2}\,.$$

Manifestement, f' est définie pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}^*$ et s'annule en $x_3 = -\mathrm{e}$ et en $x_4 = \mathrm{e}$; en effet :

$$\frac{3\big(2 - \ln(x^2)\big)}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \exp(2) = \mathrm{e}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\mathrm{e} & \text{ou} \\ x = \mathrm{e} \end{cases}.$$

Ainsi, selon la proposition 7.2.4, si f admet des extrema locaux, ces extrema ne peuvent être atteints qu'en x_3 et/ou en x_4. Le tableau des signes de f', établi ci-dessous, montre que f admet un minimum local en x_3 et un maximum local en x_4. En outre, le tableau permet d'affirmer que f est croissante dans $]-\mathrm{e}; 0[$ ainsi que dans $]0; \mathrm{e}[$, et décroissante dans $]-\infty; -\mathrm{e}[$ ainsi que dans $]\mathrm{e}; \infty[$.

x		$-\mathrm{e}$		0		e	
$3\big(2 - \ln(x^2)\big)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Sur le graphe de f, le minimum local et le maximum local sont, respectivement, $E_1\big(-\mathrm{e}\,;\, f(-\mathrm{e})\big)$ et $E_2\big(\mathrm{e}\,;\, f(\mathrm{e})\big)$; concrètement :

$$E_1\big(-\mathrm{e}\,;\, -\tfrac{6}{\mathrm{e}}\big) \qquad \text{et} \qquad E_2\big(\mathrm{e}\,;\, \tfrac{6}{\mathrm{e}}\big)\,.$$

Ces résultats sont conformes au fait que f est impaire.

vi. *Points d'inflexion* : Ils s'obtiennent en étudiant la dérivée seconde f'' de f ; cette dérivée seconde est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(x) = \big(f'\big)'(x) &= 3\,\frac{-\frac{2x}{x^2} \cdot x^2 - \big(2 - \ln(x^2)\big) \cdot 2x}{x^4} \\ &= 3\,\frac{-2x - 2x\big(2 - \ln(x^2)\big)}{x^4} = 3\,\frac{-2 - 2\big(2 - \ln(x^2)\big)}{x^3} \\ &= 3\,\frac{2\ln(x^2) - 6}{x^3} = \frac{6\big(\ln(x^2) - 3\big)}{x^3}\,. \end{aligned}$$

Manifestement, f'' est définie et continue en tout $x \in D_f = \mathbb{R}^*$, et s'annule en $x_5 = -\sqrt{e^3}$ et en $x_6 = \sqrt{e^3}$; en effet :

$$\frac{6\left(\ln(x^2)-3\right)}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \exp(3) = e^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -\sqrt{e^3} \quad \text{ou} \\ x &=& \sqrt{e^3} \end{array} \right. .$$

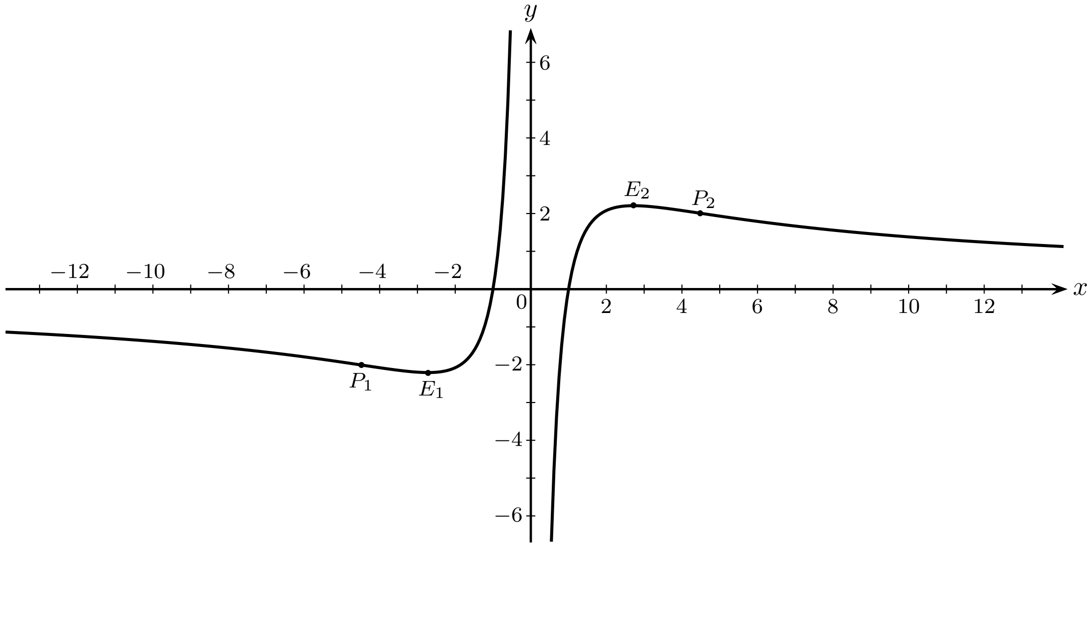
Ainsi, selon la proposition 7.4.4, si f admet des points d'inflexion, ces points ne peuvent être qu'en x_5 et/ou en x_6. Le tableau des signes de f'', établi ci-dessus, montre que f admet effectivement des points d'inflexion en x_5 et en x_6. Le tableau permet, en outre, d'affirmer que f est concave dans $\left]-\infty\,;\,-\sqrt{e^3}\right[$ ainsi que dans $\left]0\,;\,\sqrt{e^3}\right[$, et convexe dans $\left]-\sqrt{e^3}\,;\,0\right[$ ainsi que dans $\left]\sqrt{e^3}\,;\,\infty\right[$.

x		$-\sqrt{e^3}$		0		$\sqrt{e^3}$	
$6\left(\ln(x^2)-3\right)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$	$\|$	$\cap$	PI	$\cup$

Sur le graphe de f, les deux points d'inflexion (PI) sont $P_1\big(-\sqrt{e^3}\,;\,f(-\sqrt{e^3}\,)\big)$ et $P_2\big(\sqrt{e^3}\,;\,f(\sqrt{e^3}\,)\big)$; concrètement :

$$P_1\Big(-\sqrt{e^3}\,;\,-\tfrac{9}{\sqrt{e^3}}\Big) \qquad \text{et} \qquad P_2\Big(\sqrt{e^3}\,;\,\tfrac{9}{\sqrt{e^3}}\Big)\,.$$

Ces résultats sont en adéquation avec le fait que f est impaire.



vii. *Graphe* : Grâce aux informations obtenues aux points précédents, le graphe de f peut être esquissé relativement précisément. Un échantillon est représenté au bas de la page précédente. Illustrant le fait que f est impaire, la symétrie centrale, de centre O, est bien visible.

viii. *Autres symétries* : Aucune autre symétrie n'est à relever.

7.5.2 Illustration : Le morceau de métal qu'un forgeron place au milieu du feu peut devenir incandescent s'il reste suffisamment longtemps au milieu des flammes ; il paraît d'abord rouge foncé, puis orange, jusqu'à devenir blanc. En absorbant (une partie de) l'énergie émise par la source de chaleur, énergie émise sous forme de *rayonnement électromagnétique*, la pièce de métal se trouve dans un état de température toujours plus élevée. Afin que sa température n'augmente pas indéfinimient, le métal émet à son tour de l'énergie, également sous forme de rayonnement électromagnétique. Un tel rayonnemment est dit *thermique*. Le morceau atteint finalement un état d'équilibre, de température T, dans lequel il émet autant d'énergie qu'il en absorbe.

L'observation systématique du rayonnement thermique émis par les objets chauds est survenue avec le développement de l'industrie métallurgique dans le courant du XIX^e^ siècle. Pour étudier théoriquement ce type de rayonnement, les physiciens de l'époque ont introduit le concept de *corps noir* : un objet se comporte comme un corps noir s'il absorbe complètement l'énergie reçue sous forme de rayonnement électromagnétique, sans la réfléchir, ni la transmettre. Dans la réalité, aucun objet ne se comporte parfaitement comme un corps noir ; certains s'en approchent, comme par exemple le noir de carbone ou les gaz de surface d'une étoile.

L'ensemble du rayonnement thermique émis par un corps noir se caractérise à l'aide d'une grandeur physique appelée *radiance spectrale* ; notée $R_T(\lambda)$, elle exprime l'intensité du rayonnement émis par le corps noir en question, dont la température d'équilibre est T, dans l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda\,;\,\lambda+\mathrm{d}\lambda]$, λ étant la longueur d'onde du rayonnement émis et $\mathrm{d}\lambda$ un élément infinitésimal de longueur d'onde. En 1900, le physicien allemand *Max K. Planck* (né le 23 avril 1858 à Kiel, dans le duché de Schleswig-Holstein, et mort le 3 octobre 1947 à Göttingen, en Basse-Saxe, dans l'actuelle Allemagne) a établi une expression de $R_T(\lambda)$ concordant parfaitement avec les mesures expérimentales. Connue sous le nom de *loi de Planck*, cette expression s'écrit :

$$R_T(\lambda) \;=\; \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Big(\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\big)-1\Big)}\;,$$

où k_B et h sont deux constantes, appelées respectivement *constante de Boltzmann* et *constante de Planck*, et c la vitesse de la lumière dans le vide.

La grandeur $R_T(\lambda)$ peut être vue comme une fonction de λ. On se propose ici d'étudier cette fonction, afin de pouvoir esquisser au mieux son graphe.

i. *Domaine de définition* : Le numérateur de $R_T(\lambda)$ est défini en tout $\lambda \in \mathbb{R}$, vu que c'est une constante ; quant au dénominateur, il est défini en tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et s'annule uniquement en $\lambda = 0$. Le domaine de définition de $R_T(\lambda)$ est donc $\mathbb{R}^*$. Le domaine d'étude de R_T sera toutefois limité à $\mathbb{R}_+^*$ uniquement, en raison du fait que la grandeur λ est, par définition, une grandeur positive (une longueur d'onde négative n'ayant pas de sens physique).

ii. *Parité, périodicité* : Comme les valeurs négatives de λ ne sont pas considérées, il ne fait pas sens de parler de parité ; ni de périodicité, du reste.

iii. *Zéros et tableau des signes* : L'équation $R_T(\lambda) = 0$ n'admet aucune solution. En effet, $R_T(\lambda) = 0$ implique $2\,\pi\,c^2\,h = 0$, ce qui n'est pas possible. Dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction R_T est donc soit toujours positive, soit toujours négative. Comme $2\,\pi\,c^2\,h > 0$, $\lambda^5 > 0$ et $\exp\bigl(\frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\bigr) > 1$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors nécessairement $R_T(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

iv. *Points de discontinuité et asymptotes* : La fonction R_T est une composition, un produit, une différence, un rapport de fonctions qui sont continues dans leurs domaines de définition respectifs ; en outre, le dénominateur de l'expression de R_T ne s'annule pas dans $\mathbb{R}^*$. R_T est donc continue dans tout $\mathbb{R}_+^*$.

- ◇ R_T ne possède pas d'asymptote verticale en $\lambda = 0$. Le calcul de limite qui suit le montre ; ce qui permet de mener à terme ce calcul, c'est l'effectuation du changement de variable $s = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{s}$, suivie de cinq applications successives de la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} R_T(\lambda) &= \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Bigl(\exp\bigl(\frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\bigr)-1\Bigr)} \overset{\lambda=\frac{1}{s}}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\bigl(\frac{1}{s}\bigr)^5\Bigl(\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)-1\Bigr)}\\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{2\,\pi\,c^2\,h\,s^5}{\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)-1} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{10\,\pi\,c^2\,h\,s^4}{\frac{h\,c}{k_\mathrm{B}\,T}\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)} \overset{\text{4 fois B-H}}{=} \dots\\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{240\,\pi\,c^2\,h}{\Bigl(\frac{h\,c}{k_\mathrm{B}\,T}\Bigr)^5\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)} = 0\,.
\end{aligned}$$

- ◇ R_T possède une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$. Le calcul de limite qui suit le montre ; ce qui permet de mener à terme ce calcul, c'est la réalisation du changement de variable $s = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{s}$, suivie de l'application de la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} R_T(\lambda) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Bigl(\exp\bigl(\frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\bigr)-1\Bigr)} \overset{\lambda=\frac{1}{s}}{=} \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{2\,\pi\,c^2\,h\,s^5}{\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)-1}\\
&\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \frac{10\,\pi\,c^2\,h\,s^4}{\frac{h\,c}{k_\mathrm{B}\,T}\exp\bigl(\frac{h\,c\,s}{k_\mathrm{B}\,T}\bigr)} = 0\,.
\end{aligned}$$

  Comme le domaine d'étude de R_T est $\mathbb{R}_+^*$ uniquement, la question d'une éventuelle asymptote horizontale à gauche ne se pose pas.

- ◇ Comme R_T possède une asymptote horizontale à droite, elle ne peut pas avoir une quelconque asymptote oblique à droite. Et vu que le domaine d'étude de R_T se limite à $\mathbb{R}_+^*$, la question d'une éventuelle asymptote oblique à gauche ne se pose pas.

v. *Extrema* : Ils s'obtiennent en étudiant la dérivée R_T' de R_T ; cette dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} R_T'(\lambda) &= -\frac{10\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^6}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1} - \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5}\cdot\frac{-\frac{h\,c}{\lambda^2\,k_{\mathrm{B}}\,T}\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)^2} \\ &= -\frac{10\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^6\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)} + \frac{2\,\pi\,c^3\,h^2\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)}{\lambda^7\,k_{\mathrm{B}}\,T\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)^2} \\ &= \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^6\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)}\left(\frac{h\,c\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)}-5\right). \end{aligned}$$

Manifestement, R_T' est définie en tout $x \in \mathbb{R}^*$ (*i.e.* en tout x du domaine d'étude de R_T) et s'annule en tout point satisfaisant l'équation :

$$\frac{h\,c\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T\left(\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)-1\right)}-5 = 0\,.$$

Une telle équation n'est pas soluble analytiquement. Pour trouver ses solutions éventuelles, il est nécessaire de procéder par tâtonnement. Il peut ainsi être établi qu'il n'existe qu'une seule solution, dont une expression approchée est :

$$\lambda = \frac{h\,c}{5\,k_{\mathrm{B}}\,T}\ ;$$

en effet, en évaluant la partie gauche de l'équation en $\frac{h\,c}{5\,k_{\mathrm{B}}\,T}$, il vient :

$$\frac{5\exp(5)}{\exp(5)-1}-5 \approx 0{,}03 \approx 0\,.$$

Par affinement, il est possible d'obtenir une expression plus précise de la solution :

$$\lambda = \lambda_0 \approx \frac{h\,c}{4{,}965\,k_{\mathrm{B}}\,T}\,.$$

Selon la proposition 7.2.4, si R_T admet un extremum local, cet extremum ne peut être atteint qu'en λ_0. Le fait que :

- ◇ pour tout $\lambda \in \,]0\,;\lambda_0[$, la dérivée R_T' est strictement positive,
- ◇ pour tout $\lambda \in \,]\lambda_0\,;\infty[$, la dérivée R_T' est strictement négative,

permet de conclure que R_T admet un unique extremum local, en $\lambda_0 = \frac{h\,c}{4{,}965\,k_{\mathrm{B}}\,T}$, et que cet extremum est un maximum. L'élément λ_0 où R_T atteint un maximum local sera noté, dans la suite, $\lambda_{\max}$ ($\lambda_0 = \lambda_{\max}$).

vi. *Points d'inflexion* : Au vu de la taille importante de l'expression de R'_T, on peut s'attendre au fait que l'expression de la dérivée seconde R''_T de R_T soit encore plus imposante ; et les zéros encore plus difficiles à déterminer. Des investigations poussées permettent d'établir que R_T admet deux points d'inflexion dans $\mathbb{R}^*_+$, l'un dans l'intervalle $]0\,;\,\lambda_{\max}[$, l'autre dans $]\lambda_{\max}\,;\,\infty[$. Passablement fastidieuses, ces investigations ne sont pas présentées ici. En contrepartie, une étude de la dérivée R'_T de R_T va être effectuée pour des valeurs de λ positives, proches de 0. Si un tel travail ne participe pas à la détermination des points d'inflexions, il fournit un autre élément intéressant : la forme du graphe de R_T pour des valeurs de λ proches de 0. Cherchons donc la limite de R'_T lorsque λ tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} R'_T(\lambda) &= \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} -\frac{10\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^6\Big(\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)} + \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{2\,\pi\,c^3\,h^2\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}{\lambda^7\,k_{\mathrm{B}}\,T\,\Big(\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)^2}\\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{10\,\pi\,c^2\,h\,s^6}{\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1} + \lim_{s\to\infty}\frac{2\,\pi\,c^3\,h^2\,s^7\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}{k_{\mathrm{B}}\,T\,\Big(\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)^2}\,.
\end{aligned}$$

Six applications successives de la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) à la première des deux limites permettent de conclure que celle-ci est nulle. Quant à la deuxième, elle devient, après application de la même règle (B-H) :

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty}\frac{2\,\pi\,c^3\,h^2\,s^7\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}{k_{\mathrm{B}}\,T\,\Big(\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)^2} &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{s\to\infty}\frac{2\,\pi\,c^3\,h^2\,\big(7\,s^6+s^7\frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}{2\,k_{\mathrm{B}}\,T\,\Big(\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)\frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}\,T}\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}\\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{2\,\pi\,c^2\,h\,\big(7\,s^6+s^7\frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)}{2\,\Big(\exp\big(\frac{h\,c\,s}{k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)}\,.
\end{aligned}$$

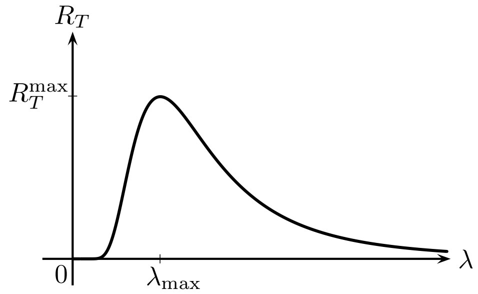
Enfin, sept applications successives de la même règle (B-H) à la dernière limite obtenue permettent de conclure que celle-ci est nulle aussi. En résumé :

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} R'_T(\lambda) = 0\,.$$

La tangente au graphe de R_T tend donc à être horizontale lorsque λ tend vers 0 par valeurs plus grandes.

vii. *Graphe* : Les résultats des points précédents, résumés dans le tableau ci-après, permettent d'esquisser relativement précisément le graphe de la fonction R_T. Noter qu'une ligne du tableau a été consacrée à la dérivée seconde R''_T (et à ses signes), quand bien même elle n'a pas été traitée dans le détail ; les nombres λ_1 et λ_2, apparaissant dans l'en-tête, sont les éléments où f admet des points d'inflexion.

λ	0		λ_1		$\lambda_{\max}$		λ_2	
R'_T		$+$		$+$	0	$-$		$-$
R''_T		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
R_T		$\nearrow$ $\cup$	PI	$\nearrow$ $\cap$	max	$\searrow$ $\cap$	PI	$\searrow$ $\cup$



Le graphe de R_T (représenté ci-dessus) est appelé *spectre du corps noir de température* T. La forme de ce spectre a beaucoup intéressé les physiciens de la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et suscité de nombreuses études de leur part.

- Le physicien germanique *Wilhelm C. Wien* (né le 13 janvier 1864 à Fischhausen, en Prusse-Orientale (aujourd'hui en Pologne), et mort le 30 août 1928 à Munich, en Bavière) a proposé en 1896 une expression empirique de la radiance spectrale R_T en fonction de la longueur d'onde λ. Connue sous le nom de *loi de Wien*, cette expression s'écrit :

$$R_T(\lambda) \;=\; A\,\lambda^{-5}\exp\!\left(-\frac{B}{\lambda\,T}\right)\,,$$

  où A et B sont des constantes. En accord avec les données expérimentales dans le domaine des petites longueurs d'onde, la loi de Wien n'est, en revanche, pas satisfaisante pour les grandes longueurs d'onde. Cette réalité concorde avec le fait que la loi de Wien peut être déduite de la loi de Planck dans le cas où λ est suffisament petite : si λ est beaucoup plus petite que $\frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}T}$, l'expression $\exp\!\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)$ est beaucoup plus grande que 1, si bien que la loi de Planck peut être approximée de la façon suivante :

$$R_T(\lambda) \;=\; \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Big(\exp\!\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)} \;\approx\; \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\exp\!\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)} \;=\; 2\,\pi\,c^2\,h\,\lambda^{-5}\exp\!\left(-\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)\;;$$

  cette dernière expression est bien la loi de Wien, pour autant que $A = 2\,\pi\,c^2\,h$ et $B = \frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}}$.
- De son côté, le physicien britannique *John W. Strutt* (né le 12 novembre 1842 à Landford Grove, dans l'Essex (en Angleterre), et mort le 30 juin 1919 à Witham, dans l'Essex), dit *Lord Rayleigh*, a proposé en 1900 une expression de R_T en fonction de λ qui est en bon accord avec les mesures expérimentales pour les grandes longueurs d'onde, mais pas pour les petites. Connue sous le nom de *loi de Rayleigh-Jeans* (en l'honneur également du physicien britannique *James H. Jeans* (né le 11 septembre 1877 à Londres et mort le 16 septembre 1946 à Dorking, dans

le Surrey, en Angleterre) qui a apporté quelques années plus tard une correction à la valeur de la constante), elle s'écrit :

$$R_T(\lambda) \;=\; C\,T\,\lambda^{-4}\,,$$

où C est une constante. Une telle loi ne peut effectivement pas être satisfaisante pour les courtes longueurs d'onde, car R_T croît indéfiniment à mesure que λ devient de plus en plus petite, ce qui ne peut pas avoir de sens physique : une intensité ne peut en effet pas devenir infinie (d'où l'expression *catastrophe de l'ultraviolet* employée par les physiciens de l'époque). Dans le cas où λ est suffisamment grande, la loi de Rayleigh-Jeans peut être déduite de la loi de Planck; en effet, si λ est beaucoup plus grande que $\frac{h\,c}{k_{\mathrm{B}}\,T}$, l'expression $\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}$ devient très petite, si bien que l'exponentielle peut être bien approximée par son développement de MacLaurin d'ordre 1 :

$$R_T(\lambda) \;=\; \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Big(\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}\big)-1\Big)} \;\approx\; \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\left(1+\frac{h\,c}{\lambda\,k_{\mathrm{B}}\,T}-1\right)} \;=\; 2\,\pi\,c\,k_{\mathrm{B}}\,T\,\lambda^{-4}\ ;$$

cette dernière expression est bien la loi de Rayleigh-Jeans, pour autant que $C = 2\,\pi\,c\,k_{\mathrm{B}}$.

- W. Wien a également remarqué que la longueur d'onde dans laquelle un corps noir émet avec la plus grande intensité est inversement proportionnelle à sa température T, selon la loi :

  $$\lambda_{\max}\,T \;=\; 2{,}898\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}\,.$$

  Connue sous le nom de *loi du déplacement de Wien* (du fait du déplacement de $\lambda_{\max}$ en fonction de T), cette relation se déduit également de la loi de Planck, comme le montre le cinquième point de l'étude de la fonction R_T ci-dessus :

  $$\lambda_{\max} \;=\; \frac{h\,c}{4{,}965\,k_{\mathrm{B}}\,T} \;=\; \frac{2{,}898\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{T}\ .$$

- En étudiant les données expérimentales, le physicien, mathématicien et poète slovène (citoyen alors de l'empire d'Autriche-Hongrie) *Jožef Stefan* (né en 1835 à Sankt Peter, en Carinthie (dans l'Empire d'Autriche-Hongrie), et mort en 1893 à Vienne) a établi en 1879 une loi décrivant l'intensité totale émise par un corps noir (dans toutes les longueurs d'onde) en fonction de sa température. Connue sous le nom de *loi de Stefan-Boltzmann* (en l'honneur également du physicien autrichien *Ludwig E. Boltzmann* (né en 1844 à Vienne et mort en 1906 à Duino, dans la province de Trieste, à l'époque dans l'Empire d'Autriche-Hongrie), doctorant de Stefan, qui a fourni une justification théorique à la relation), elle s'écrit :

  $$I \;=\; \sigma\,T^4\,,$$

où $\sigma = 5{,}670\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ est une constante, appelée *constante de Stefan-Boltzmann.* Une telle expression peut encore être déduite de la loi de Planck : l'intensité totale I émise par le corps noir n'est rien d'autre que la somme des radiances dans toutes les longueurs d'onde $\lambda \in \,]0\,;\infty[$:

$$I = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \lim_{b\to\infty} \int_a^b R_T(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty R_T(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Pour calculer l'intégrale, il convient d'appliquer le changement de variable :

$$x = \frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\ ;$$

sous ce changement de variable :

$$\lambda = \frac{h\,c}{x\,k_\mathrm{B}\,T} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = -\frac{h\,c}{x^2\,k_\mathrm{B}\,T}\ .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\lambda^5\Big(\exp\big(\frac{h\,c}{\lambda\,k_\mathrm{B}\,T}\big)-1\Big)}\,\mathrm{d}\lambda = \int_\infty^0 \frac{2\,\pi\,c^2\,h}{\big(\frac{h\,c}{x\,k_\mathrm{B}\,T}\big)^5\big(\exp(x)-1\big)}\left(-\frac{h\,c}{x^2\,k_\mathrm{B}\,T}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{2\,\pi\,k_\mathrm{B}^4\,T^4\,x^3}{h^3\,c^2\,\big(\exp(x)-1\big)}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\pi\,k_\mathrm{B}^4\,T^4}{h^3\,c^2}\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\pi^5\,k_\mathrm{B}^4\,T^4}{15\,h^3\,c^2}\ . \end{aligned}$$

I est effectivement proportionnelle à T^4. De plus, la valeur du facteur $\frac{2\,\pi^5\,k_\mathrm{B}^4}{15\,h^3\,c^2}$ correspond à celle de σ. Remarquer que les primitives de la fonction donnée par $\frac{x^3}{\exp(x)-1}$ ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles. Pour trouver le résultat :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}\ ,$$

il convient d'écrire l'expression $\frac{x^3}{\exp(x)-1}$ sous la forme $\frac{x^3\exp(-x)}{1-\exp(-x)}$ (qui s'obtient en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\exp(-x)$), puis de constater que $\frac{1}{1-\exp(-x)}$ est la somme des éléments d'une suite géométrique dont le terme général est $(\exp(x))^n$ (qui peut s'écrire aussi $\exp(n\,x)$)...

Chapitre 8

Applications du calcul intégral

Parmi les savants de l'Antiquité qui se sont penchés sur les questions d'aires et de volumes, le scientifique grec Archimède de Syracuse est sans doute le plus illustre, tant son œuvre dans le domaine est riche et variée. Ses techniques de calcul et ses raisonnements, il les a synthétisés dans un ouvrage qu'il a intitulé *La Méthode*. Comme son titre le suggère, ce traité expose une marche à suivre qui peut être, en principe, appliquée à tout problème d'aire de surface ou de volume de solide. La procédure qui y est décrite repose sur deux points essentiels : la décomposition du corps considéré en éléments infinitésimaux et l'application du principe des leviers à chacun de ces éléments. Si l'approche est bien commune à tout problème, les opérations mathématiques, elles, ne proviennent pas systématiquement d'une théorie, d'un modèle unique.

Dans les chapitres précédents, on a pu se rendre compte à quel point le calcul infinitésimal, lorsqu'il est présenté de manière rigoureuse et précise, est tributaire des notions de limite et de continuité ; elles-mêmes étant dépendantes du concept de nombre réel : sans nombres réels, pas de continuum de nombres, et donc pas de notion de limite, ni de continuité, et par conséquent pas de calcul infinitésimal ; du moins pas dans sa forme présentée ici.

Cela a été évoqué dans le début du premier chapitre, la difficulté qu'ont rencontrée les mathématiciens des différentes époques (de l'Antiquité jusqu'à l'Époque moderne) à concevoir l'idée de nombre réel a vraisemblablement joué un rôle dans le temps de gestation d'une théorie globale des éléments infiniment petits. Les premières considérations purement arithmétiques des nombres réels remontent aux années 1860 et 1870 ; on les doit essentiellement à *Karl Weierstraß*[I], à *Charles Méray*[II], à *Georg Cantor*[III] et à

I. Karl Wilheim Theodor Weierstraß était un mathématicien germanique, né en 1815 à Ostenfelde (en Westphalie, dans l'actuelle Allemagne) et mort en 1897 à Berlin (à l'époque en Prusse). Weierstraß est demeuré célèbre pour son arithmétisation des calculs différentiel et intégral ; on lui doit, entre autres, la définition de la continuité avec les nombres ε et δ.

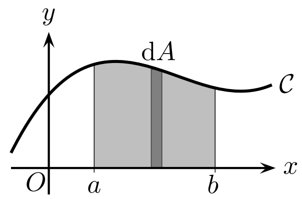
II. Charles Méray était un mathématicien français, né en 1835 à Chalon-sur-Saône (en Bourgogne, dans le royaume de France) et mort à Dijon (en Bourgogne, dans la République française).

III. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor était un mathématicien germanique né en 1845 à Saint-Pétersbourg (dans l'Empire russe) et mort en 1918 à Halle (aujourd'hui dans le Land de Saxe-Anhalt, en Allemagne).

Richard Dedekind[IV]. Il conviendrait de penser que de telles réflexions auraient dû être antérieures aux travaux de Newton et Leibniz dans le domaine du calcul infinitésimal ; alors qu'elles sont survenues en réalité deux siècles plus tard ; et quelques décennies après les idées de Cauchy sur la notion de limite.

Même si le calcul infinitésimal a vécu des périodes de grandes incertitudes durant le XVIII[e] et une partie du XIX[e] siècle, il n'en demeure pas moins qu'il s'est clairement révélé, dès son élaboration, d'une bien plus grande efficacité que les théories des infiniment petits qui l'ont précédé. Nombre de problèmes d'aires de surfaces, de volumes de solides, certains datant de l'Antiquité, ont pu être traités avec succès ; de nouvelles questions, dans le domaine de la mécanique notamment, ont pu être abordées et résolues sans difficulté aucune. En outre, ce que *la méthode* d'Archimède n'est pas parvenue à exhiber, *le calcul des fluxions* de Newton et *le calcul des éléments infinitésimaux* de Leibniz ont pu le procurer : un procédé universel, applicable à n'importe quelle forme géométrique.

8.1 Aires de surfaces planes non polygonales



Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique (*cf.* remarques 2.1.2 de la première section du chapitre 2). Selon Leibniz, rappelons-le, l'aire A d'une surface plane finie $S \subset \mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une somme (intégrale) d'aires infiniment petites, notées $\mathrm{d}A$. Dans le cas où S est délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, d'autre part par la droite horizontale d'équation $y = 0$ (*i.e.* l'axe Ox) et une courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x)$ (*i.e.* le graphe de f), où f est une fonction réelle, définie et continue dans $[a;\, b]$ au moins, et telle que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$ au moins (*i.e.* f est positive dans $[a;\, b]$), l'élément $\mathrm{d}A$ peut s'écrire $\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$; et ainsi :

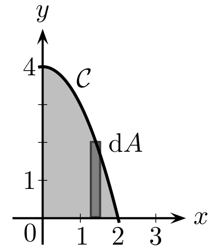
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\ .$$

Si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$, la quantité A est négative. Or, d'un point de vue géométrique, l'aire est une grandeur positive ou nulle. A est donc, dans ce cas, égale à l'opposé de l'aire géométrique de la surface S (*cf.* troisième point des remarques 4.1.4).

8.1.1 Exemples : 1. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de sons système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons la surface finie S délimitée par la droite

IV. Julius Wilhelm Richard Dedekind était un mathématicien germanique né en 1831 à Brunswick (en Basse-Saxe, dans l'actuelle Allemagne) et mort en 1916 dans la même ville. Durant plusieurs années, il a enseigné les calculs différentiel et intégral à l'Institut polytechnique de Zurich (aujourd'hui l'École polytechnique fédérale de Zurich, EPFZ (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, ETHZ)). C'est à cette époque qu'il a mené une réflexion conséquente sur les nombres irrationnels et réels.

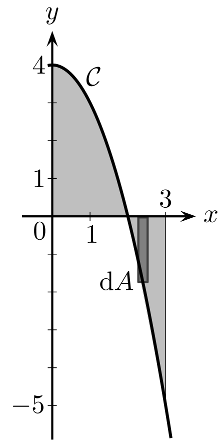
verticale d'équations $x = 0$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x) = 4 - x^2$, où $x \geqslant 0$. L'aire A de cette surface est :



$$A = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \big(4 - x^2\big)\,\mathrm{d}x = \Big[4\,x - \frac{1}{3}\,x^3\Big]_0^2$$
$$= \Big[\Big(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\Big) - \Big(4 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\Big)\Big] = \frac{16}{3}\,.$$

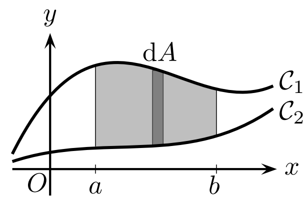
2. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons la surface finie S délimitée par les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 3$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x) = 4 - x^2$. Comme $f(x) = 4 - x^2$ est négative entre $x = 2$ et $x = 3$, l'aire A de S, au sens géométrique du terme, s'obtient en calculant l'intégrale entre 0 et 3 non pas de f, mais de sa valeur absolue :

$$A = \int_0^3 \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 -f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \big(4 - x^2\big)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \big(4 - x^2\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{16}{3} - \Big[4\,x - \frac{1}{3}\,x^3\Big]_2^3$$
$$= \frac{16}{3} - \Big[\Big(4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3\Big) - \Big(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\Big)\Big] = \frac{23}{3}\,.$$



Noter que la première des deux intégrales, dans le calcul qui vient d'être fait, a déjà été calculée dans l'exemple précédent.

Considérons à présent une surface $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$ (*i.e.* les graphes de f et g), où f et g sont deux fonctions définies et continues dans $[a;\, b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Dans ce cas, un élément infinitésimal dA d'aire A de S peut s'écrire $\mathrm{d}A = \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$; l'aire A de S est alors donnée par :



$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x}\,.$$

8.1.2 Remarques : • La précédente formule se justifie par les considérations faites sur l'intégrale de Riemann dans le chapitre 4 (*cf.* section 4.1). Pour le voir, considérons deux fonctions réelles f et g définies et continues dans un intervalle fermé $[a;\, b]$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Considérons aussi une subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\, ;\, x_n)$ d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}. L'aire A de la surface $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part, et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (*i.e.* par les graphes de f et g), vaut approximativement :

$$\sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_k) - g(\xi_k)\big)\, \Delta x_k\,,$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Comme f et g sont continues dans $[a;\, b]$, alors $f - g$ est aussi continue dans $[a;\, b]$. La somme ci-dessus admet donc pour limite, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} vers 0, un nombre réel qui ne dépend ni du choix de la subdivision σ_n, ni, pour chaque subdivision, du choix des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1],\, \ldots\, , \xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$. Cette limite est égale, par définition, à l'aire A de S ; elle se note :

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_k) - g(\xi_k)\big)\, \Delta x_k = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

La première situation décrite dans la présente section correspond au cas particulier où $g(x) = 0$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\, b]$:

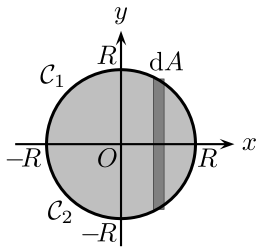
$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

- Si, dans le point précédent, $f(x)$ n'est pas plus grande ou égale à $g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, l'aire A de S, au sens géométrique du terme, s'obtient en calculant l'intégrale entre a et b non pas de $f - g$, mais de $|f - g|$.
- Dans le présent chapitre, tout comme dans le chapitre 4, il est question de *surface finie* (on parle aussi de *domaine fini*). Par cette expression, il faut comprendre une surface du plan euclidien qui ne s'étend pas jusqu'à l'infini. Dans un langage mathématique formel, on utilise plus volontiers la formule *domaine borné* (à la place de *surface finie*).

8.1.3 Exemples : 1. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R, centré sur l'origine O de Oxy. Ce cercle, dont l'équation cartésienne s'écrit $x^2+y^2 = R^2$, peut être vu comme la réunion de deux demi-cercles, le demi-cercle $\mathcal{C}_1$ et le demi-cercle $\mathcal{C}_2$ (*cf.* figure ci-dessous), dont les équations s'obtiennent en isolant y dans l'équation de $\mathcal{C}$:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 = R^2 - x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se rejoignent sur l'axe Ox, en $x = -R$ et en $x = R$. L'aire A du cercle $\mathcal{C}$ peut donc être obtenue en calculant l'intégrale entre $-R$ et R de la différence $f - g$, où f et g sont les fonctions données par $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, qui décrivent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement :



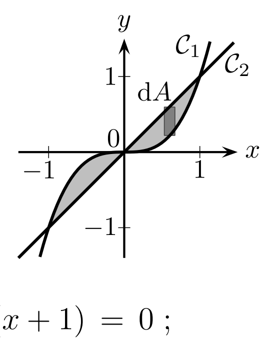
$$A = \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\right] \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour calculer cette intégrale, il convient d'effectuer le changement de variable $x = R\cos(t)$, pour lequel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\sin(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = -R\sin(t)\,\mathrm{d}t$, avec les bornes d'intégration qui passent de $-R$ à π (de sorte que $R\cos(\pi) = -R$) et de R à 0 (de sorte que $R\cos(0) = R$), puis d'appliquer successivement les identités trigonométriques $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ et $\sin^2(t) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\,t)\big)$:

$$A = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\pi}^{0} \sqrt{R^2 - \big(R\cos(t)\big)^2}\,\big(-R\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\int_{\pi}^{0} \sqrt{R^2\sin^2(t)}\,R\sin(t)\,\mathrm{d}t = -2\int_{\pi}^{0} R^2\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -2\,R^2\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\,t)\big)\,\mathrm{d}t = -R^2\left[t - \frac{1}{2}\sin(2\,t)\right]_{\pi}^{0}$$
$$= -R^2\left[\left(0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right) - \left(\pi - \frac{1}{2}\sin(2\,\pi)\right)\right] = \pi\,R^2\,.$$

Une telle intégrale peut, rappelons-le, être également calculée en considérant le changement de variable $x = R\sin(t)$. Si c'est $x = R\cos(t)$ qui a été plébiscité ici, c'est dans le but de faire le lien avec les coordonnées polaires et le cercle trigonométrique.

2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons la surface finie S délimitée par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x) = x^3$ et $y = g(x) = x$. Pour trouver l'aire A de cette surface, il convient de trouver en premier lieu les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$; ceux-ci s'obtiennent en résolvant l'équation $f(x) = g(x)$:



$$x^3 = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 - x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(x-1)(x+1) = 0\,;$$

cette dernière égalité est satisfaite si $x = x_1 = -1$ (avec $y_1 = f(x_1) = g(x_1) = -1$) ou si $x = x_2 = 0$ (avec $y_2 = f(x_2) = g(x_2) = 0$), ou encore si $x = x_3 = 1$ (avec

$y_3 = f(x_3) = g(x_3) = 1$). Noter que $f(x) = x^3 \geqslant x = g(x)$ pour tout $x \in [-1; 0]$ et $g(x) = x \geqslant x^3 = f(x)$ pour tout $x \in [0; 1]$. L'aire A de S (au sens géométrique du terme) est, de fait, égale à l'intégrale entre -1 et 1 non pas de la différence $f - g$, mais de la valeur absolue de cette différence :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left|x^3 - x\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{4}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^4\right]_{0}^{1} = \left[0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] + \left[\frac{1}{4} - 0\right] = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Observer que A peut être calculée de manière plus rapide, en remarquant que la fonction à intégrer est paire :

$$\begin{aligned} \left|(-x)^3 - (-x)\right| &= \left|-x^3 + x\right| = \left|-(x^3 - x)\right| \\ &= |-1|\,|x^3 - x| = |x^3 - x|\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

et que l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à l'origine O ; ce qui permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left|x^3 - x\right| \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \left|x^3 - x\right| \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^4\right]_{0}^{1} = 2\left[\frac{1}{4} - 0\right] = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

8.1.4 Remarques : • Toutes les considérations faites jusqu'à présent s'adaptent sans difficulté au cas où la (ou les) courbe(s) est (sont) donnée(s) non pas par une (des) équation(s) cartésienne(s) explicite(s), de la forme $y = f(x)$, mais par des équations paramétriques, de la forme $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$, et ce pour autant que φ soit une fonction injective dans le domaine dans lequel elle est définie (de sorte que la courbe « ne revienne pas en arrière » dans le domaine considéré). Typiquement, dans le cas d'une surface finie S délimitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), et d'autre part par la droite horizontale d'équation $y = 0$ et une courbe $\mathcal{C}$, donnée par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$, son aire A est donnée par :

$$\boxed{A = \int_{a}^{b} y\,\mathrm{d}x = \int_{t_a}^{t_b} \psi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}\,,$$

où t_a et t_b sont deux nombres réels tels que $a = \varphi(t_a)$ et $b = \psi(t_b)$. Une telle expression se déduit essentiellement de la formule $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et du changement de variable $x = \varphi(t)$, sous lequel :

◇ $\mathrm{d}x$ s'écrit $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (vu que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$),

◇ $f(x)$, qui est égal à y par définition, devient $\psi(t)$,
◇ les bornes d'intégration passent de a à t_a et de b à t_b.

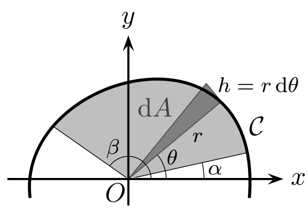
Afin que A soit une aire, au sens géométrique du terme, il est nécessaire d'avoir $a < b$ et $y > 0$ pour tout $x \in [a; b]$.

- Les équations paramétriques d'une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ se notent souvent, de manière certes un peu abusive, $x = x(t)$ et $y = y(t)$. La précédente expression de A s'écrit alors :
$$A = \int_{t_a}^{t_b} y(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
où $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.

8.1.5 Exemple : Reprenons le cercle $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (*cf.* premier des exemples 8.1.3). Ce cercle peut être décrit par les équations paramétriques :
$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}, \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$
L'aire A de $\mathcal{C}$ peut alors être obtenue en effectuant le calcul suivant :
$$A = 2\int_{-R}^{R} y\,\mathrm{d}x = 2\int_{\pi}^{0} R\sin(t)\big(-R\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t = -2\,R^2\int_{\pi}^{0}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi\,R^2\,.$$
On retombe ici sur le calcul effectué dans le premier des exemples 8.1.3, dans lequel le changement de variable $x = R\cos(t)$ s'est montré nécessaire pour pouvoir expliciter l'intégrale.

8.1.6 Remarques :

- Tous les résultats obtenus dans la présente section peuvent être transposés, moyennant quelques adaptations, à la situation dans laquelle les courbes qui délimitent les surfaces planes sont décrites par des équations polaires. Pour s'en rendre compte, prenons le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, et traitons l'axe Ox comme l'axe polaire Or des coordonnées polaires $(r; \theta)$ (*cf.* remarques 2.1.12 de la section 2.1 du chapitre 2). Dans $\mathbb{R}^2$, considérons une surface finie S délimitée d'une part par les droites d'équations polaires $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, où α et β sont deux éléments de l'intervalle $[0\,; 2\,\pi[$ tels que $\alpha < \beta$, et d'autre part par la courbe $\mathcal{C}$ donnée par l'équation polaire $r = f(\theta)$, où f est une fonction réelle, définie et continue dans $[\alpha; \beta]$, et telle que $f(\theta) \geqslant 0$ pour tout θ du domaine de définition de f (de sorte que r soit une grandeur positive). Cette surface S peut être vue comme une somme de surfaces infinitésimales qui ont ici la forme non pas de rectangles, mais de triangles rectangles d'aire $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,r\,h$, où $h = r\,\mathrm{tg}(\mathrm{d}\theta)$. Comme $\mathrm{d}\theta$ est infiniment petit, $\mathrm{tg}(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta$, et ainsi :



$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,r\cdot r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\big(f(\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta\,,$$

L'aire A de S est donc :

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\,\big(f(\theta)\big)^2\,\mathrm{d}\theta}\,.$$

- L'expression précédente se justifie par les concepts de subdivision et de somme de Riemann. Les détails du raisonnement ne sont pas présentés ici.
- Si, dans les propos menant à la formule précédente, les angles α et β sont supposés être dans l'intervalle $[0\,;\,2\,\pi[$, c'est afin de ne pas compter plusieurs fois une partie ou la totalité de la surface S donnée.

8.1.7 Exemple : Reprenons encore une fois le cercle $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (*cf.* premier des exemples 8.1.3). Ce cercle admet pour équation polaire $r = f(\theta) = R$; quel que soit l'angle θ, la fonction f est constante et vaut R. L'aire A de $\mathcal{C}$ peut alors être obtenue en effectuant le calcul suivant :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,R^2\,\mathrm{d}\theta = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \int_0^b \frac{1}{2}\,R^2\,\mathrm{d}\theta = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \frac{1}{2}\,R^2\,\theta\Big|_0^b \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \frac{1}{2}\,R^2\,(b-0) = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \frac{1}{2}\,R^2\,b = \frac{1}{2}\,R^2\,2\,\pi = \pi\,R^2\,. \end{aligned}$$

Afin qu'aucun point sur le cercle ne soit compté deux fois, l'intervalle d'intégration est l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\,2\,\pi[$; l'intégrale est, de fait, une intégrale généralisée.

8.2 Volumes de solides de révolution

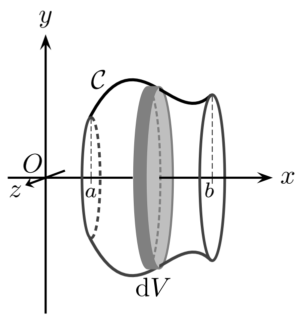
On appelle *solide de révolution* tout solide engendré par la rotation d'une surface plane finie S autour d'un axe situé dans le même plan que S, et n'ayant en commun avec S aucun point ou uniquement des points du bord de S.

Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $Oxyz$ son système de coordonnées cartésiennes canonique (*cf.* section 2.1 du chapitre 3). Les axes Ox et Oy génèrent un plan qui peut être identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$; les axes Ox et Oy forment alors le système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy de ce plan $\mathbb{R}^2$.

8.2.1 Corps de révolution autour d'un axe horizontal

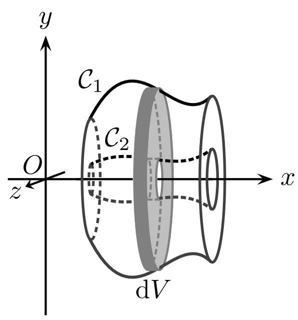
Considérons la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, d'autre part par la droite horizontale d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x)$, où f est une fonction réelle, définie et continue dans $[a;\,b]$ et telle que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\,b]$.

La rotation de S autour de l'axe Ox génère un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qui peut être vu comme la réunion d'une infinité de disques infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $f(x)$, centrés en $(x;\,0;\,0)$, où $x \in [a;\,b]$, et normaux à Ox. Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces disques étant donné par $\mathrm{d}V = \pi\,\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, le volume total V de Ω s'écrit :



$$\boxed{V \;=\; \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}\;.$$

Considérons à présent une surface finie S délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions définies et continues dans $[a;\,b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\,b]$. La rotation de S autour de l'axe Ox génère un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qui peut être vu comme la réunion d'une infinité de couronnes infiniment fines, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayon intérieur $g(x)$, de rayon extérieur $f(x)$, centrés en $(x;\,0;\,0)$, où $x \in [a;\,b]$, et normaux à Ox. Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces disques étant donné par $\mathrm{d}V = \pi\big[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\,\big]\,\mathrm{d}x$, le volume total V de Ω s'écrit :



$$\boxed{V \;=\; \int_a^b \pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x}\;.$$

8.2.1 Remarque : Les deux formules précédentes se justifient par les considérations faites sur l'intégrale de Riemann dans le chapitre 4 (*cf.* section 4.1). Pour le voir, considérons deux fonctions réelles f et g définies et continues dans un intervalle fermé $[a;\,b]$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), et telles que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\,b]$. Considérons aussi une subdivision $\sigma_n = (x_0;\,x_1;\,\ldots\,;\,x_n)$ d'ordre n de $[a;\,b]$, de pas δ_{σ_n}. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, la rotation autour de l'axe Ox du rectangle (dans $\mathbb{R}^2$) ayant pour base $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et pour hauteur $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, où $\xi_k \in [x_{k-1};\,x_k]$, génère dans $\mathbb{R}^3$ une couronne normale à l'axe Ox, centrée sur le point $(\xi_k;\,0;\,0)$, d'épaisseur Δx_k, de rayon intérieur $g(\xi_k)$ et de rayon extérieur $f(\xi_k)$. Le volume ΔV_k de cette couronne s'obtient en prenant la différence entre le volume d'un disque de rayon $f(\xi_k)$ et d'épaisseur Δx_k, et le volume d'un disque de rayon $g(\xi_k)$ et d'épaisseur Δx_k :

$$\Delta V_k \;=\; \pi\,\big(f(\xi_k)\big)^2\,\Delta x_k - \pi\,\big(g(\xi_k)\big)^2\,\Delta x_k \;=\; \pi\Big(\big(f(\xi_k)\big)^2 - \big(g(\xi_k)\big)^2\Big)\,\Delta x_k\,.$$

Soit à présent S la surface finie délimitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part, et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. La rotation de S autour de l'axe Ox génère un solide Ω qui peut être vu, grossièrement, comme une réunion de couronnes telles que celles décrites ci-dessus. Le volume de Ω s'obtient donc, approximativement, en sommant les volumes de ces couronnes :

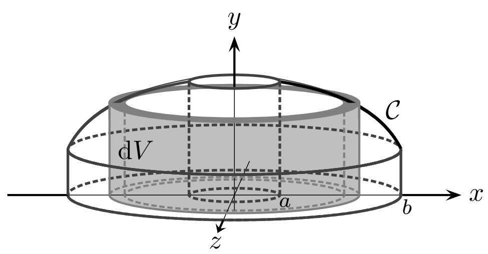
$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi\Big(\big(f(\xi_k)\big)^2 - \big(g(\xi_k)\big)^2\Big)\,\Delta x_k\,.$$

Comme f et g sont continues dans $[a;\,b]$, alors $f^2 - g^2$ est aussi continue dans $[a;\,b]$. La somme ci-dessus admet donc pour limite, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} vers 0, un nombre réel qui ne dépend ni du choix de la subdivision σ_n, ni, pour chaque subdivision, du choix des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\,x_1], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1};\,x_n]$. Cette limite est égale, par définition, au volume V de Ω ; elle se note :

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi\Big(\big(f(\xi_k)\big)^2 - \big(g(\xi_k)\big)^2\Big)\,\Delta x_k \\ &= \int_a^b \pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

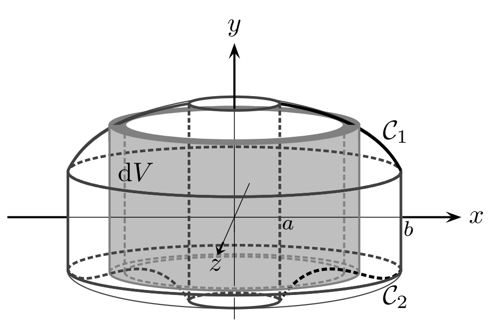
8.2.2 Corps de révolution autour d'un axe vertical

Considérons la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$, d'autre part par la droite horizontale d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x)$, où f est une fonction réelle, définie et continue dans $[a;\,b]$, et telle que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a;\,b]$. La rotation de S autour de l'axe Oy génère un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qui peut être vu comme la réunion d'une infinité de cylindres creux infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $x \in [a;\,b]$, de hauteurs $f(x)$ et dont les axes coïncident avec Oy. Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces cylindres étant donné par $\mathrm{d}V = 2\,\pi\,x\,f(x)\,\mathrm{d}x$, le volume total V de Ω s'écrit :



$$\boxed{V = \int_a^b 2\,\pi\,x\,f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Considérons à présent une surface finie S délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$), et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions réelles, définies et continues dans $[a;\,b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\,b]$. La rotation de S autour de



l'axe Oy génère un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qui peut être vu comme la réunion d'une infinité de cylindres creux infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $x \in [a;\, b]$, de hauteurs $f(x)-g(x)$ et dont les axes coïncident avec Oy. Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces cylindres étant donné par $\mathrm{d}V = 2\,\pi\, x\,\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x$, le volume total V de Ω s'écrit :

$$\boxed{V \;=\; \int_a^b 2\,\pi\, x\,\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x}\;.$$

8.2.2 Remarque : Les deux formules précédentes se justifient par les considérations faites sur l'intégrale de Riemann dans le chapitre 4 (*cf.* section 4.1). Pour le voir, considérons deux fonctions réelles f et g définies et continues dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$, et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Considérons aussi une subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ d'ordre n de $[a;\, b]$, de pas δ_{σ_n}. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, la rotation autour de l'axe Oy du rectangle (dans $\mathbb{R}^2$) ayant pour base $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et pour hauteur $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, où $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, génère dans $\mathbb{R}^3$ un cylindre creux dont l'axe coïncide avec Oy, de hauteur $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, de rayon intérieur x_{k-1} et de rayon extérieur x_k. Le volume ΔV_k de ce cylindre s'obtient en prenant la différence entre le volume d'un cylindre de rayon x_k et de hauteur $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, et le volume d'un cylindre de rayon x_{k-1} et de hauteur $f(\xi_k) - g(\xi_k)$:

$$\begin{aligned}
\Delta V_k \;&=\; \pi\, {x_k}^2\,\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big) - \pi\, {x_{k-1}}^2\,\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\\
&=\; \pi\,\big({x_k}^2 - {x_{k-1}}^2\big)\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\\
&=\; \pi\,(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\\
&=\; 2\,\pi\,\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\,\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\,\Delta x_k\;;
\end{aligned}$$

noter que $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ peut être vue comme la moyenne des rayons x_{k-1} et x_k. Soit à présent S la surface finie délimitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part, et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et $y = g(x)$. La rotation de S autour de l'axe Oy génère un solide Ω qui peut être vu, grossièrement, comme une réunion de cylindres creux tels que ceux décrits ci-dessus. Le volume de Ω s'obtient donc, approximativement, en sommant les volumes de ces cylindres creux :

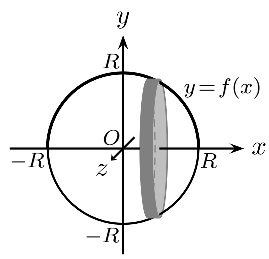
$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} 2\,\pi\,\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\,\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\,\Delta x_k\,.$$

Comme f et g sont continues dans $[a;\, b]$, alors $f - g$ est aussi continue dans $[a;\, b]$. Il peut alors être montré que, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} vers 0, la somme ci-dessus tend vers un nombre réel unique, qui ne dépend ni du choix de la subdivision σ_n, ni, pour chaque subdivision, du choix des nombres réels $\xi_1 \in [x_0;\, x_1], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1};\, x_n]$. Ce nombre est égal, par définition, au volume V de Ω, et s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} 2\,\pi\,\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\,\big(f(\xi_k)-g(\xi_k)\big)\,\Delta x_k \\ &= \int_a^b 2\,\pi\,\frac{x+x}{2}\,\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b 2\,\pi\,x\,\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

8.2.3 Exemple : Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, considérons la boule Ω de rayon R et centrée sur l'origine du système $Oxyz$.

- La boule Ω peut être obtenue par rotation autour de l'axe Ox du demi-disque D_1, se trouvant dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ généré par les axes Ox et Oy, délimité par l'axe Ox et le demi-cercle d'équation $y = f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. La boule Ω peut alors être vue comme la réunion d'une infinité de disques infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, centrés en $(x;\, 0;\, 0)$, où $x \in [-R;\, R]$, et normaux à l'axe Ox.

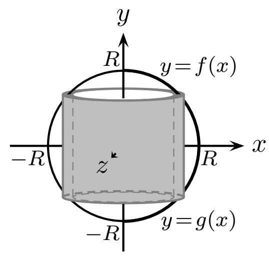


Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces disques étant donné par $\mathrm{d}V = \pi\,\big(\sqrt{R^2-x^2}\,\big)^2\,\mathrm{d}x = \pi\,\big(R^2-x^2\big)\,\mathrm{d}x$, le volume V de Ω est :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi\,\big(R^2-x^2\big)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_0^R \pi\,\big(R^2-x^2\big)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\,\pi\left[R^2\,x-\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^R \\ &= 2\,\pi\left[\left(R^2\,R-\frac{1}{3}\,R^3\right)-\left(R^2\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right] \\ &= 2\,\pi\left[\frac{2}{3}\,R^3-0\right] \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

S'il a été possible d'écrire $\int_{-R}^{R} \pi\,\big(R^2-x^2\big)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^R \pi\,\big(R^2-x^2\big)\,\mathrm{d}x$, c'est grâce au fait que la fonction $x \mapsto \pi\,(R^2-x^2)$ est paire.

- La boule Ω peut être obtenue par rotation autour de l'axe Oy du demi-disque D_{12} qui se trouve dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ généré par les axes Ox et Oy, et qui est délimité par l'axe Oy, le quart de cercle d'équation $y = f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, allant de $(R;\, 0)$ à $(0;\, R)$, ainsi que le quart de cercle d'équation $y = g(x) = -\sqrt{R^2-x^2}$, allant de $(R;\, 0)$ à $(0;\, -R)$. Ω peut alors être vue comme la réunion d'une infinité de cylindres creux infiniment fins,



d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $x \in [0;\, R]$, de hauteurs $f(x)-g(x) = 2\,\sqrt{R^2-x^2}$ et dont l'axe coïncide avec Oy. Le volume $\mathrm{d}V$ de l'un de ces cylindre creux étant donné par $\mathrm{d}V = 2\,\pi\,x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\,\pi\,x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$, le volume V de Ω est :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R 4\,\pi\,x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\,\pi\int_0^R x\left(R^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{4\,\pi}{3}\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R \\ &= \left(-\frac{4\,\pi}{3}\left(R^2-R^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(-\frac{4\,\pi}{3}\left(R^2-0^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) = 0 + \frac{4\,\pi}{3}\left(R^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

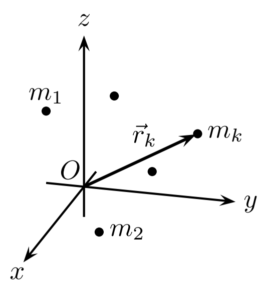
Les deux points de vue conduisent à un seul et même résultat.

8.2.4 Remarque : Les quatre résultats encadrés, obtenus dans la section présente, se transposent sans difficulté à toute situation dans laquelle la (ou les) courbe(s) est (sont) donnée(s) non pas par une (des) équation(s) cartésienne(s) explicite(s), de la forme $y = f(x)$, mais par des équations paramétriques, de la forme $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. La manière de procéder est similaire à celle exposée dans la remarque 8.1.4.

8.3 Centre de masse

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, considérons n corps matériels, ponctuels $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$. Pour chaque $k = 1, \ldots, n$, notons :

- ◇ m_k la masse du corps $\mathcal{P}_k$,
- ◇ $P_k(x_k;\, y_k;\, z_k)$ le point de $\mathbb{R}^3$ où se trouve $\mathcal{P}_k$ (x_k, y_k et z_k étant ses coordonnées cartésiennes),
- ◇ $\vec{r}_k$ le vecteur position de $\mathcal{P}_k$, qui est, par définition :



$$\vec{r}_k = \overrightarrow{OP_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

On appelle *centre de masse* de l'ensemble des corps matériels ponctuels $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ le point $C(x_C;\, y_C;\, z_C)$, dont x_C, y_C et z_C sont les coordonnées cartésiennes, ayant pour vecteur position le vecteur $\vec{r}_C$ donné par :

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\vec{r}_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\,x_k \\ \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\,y_k \\ \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\,z_k \end{pmatrix}, \qquad \text{où } M = \sum_{k=1}^{n} m_k\,.$$

Le concept de centre de masse n'est pas spécifique à un ensemble de corps ponctuels ; on peut également parler de centre de masse d'un solide non ponctuel.

Pour déterminer les coordonnées du centre de masse C d'un solide Ω non ponctuel, de masse M, il convient de décomposer Ω en éléments infinitésimaux de masse $\mathrm{d}m$, dont les coordonnées cartésiennes sont $x_{\mathrm{d}m}$, $y_{\mathrm{d}m}$ et $z_{\mathrm{d}m}$, et d'appliquer la définition précédente, en ayant soin de remplacer le signe $\sum$ par le symbole $\int$:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_\Omega \vec{r}_{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M}\int_\Omega x_{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m \\ \frac{1}{M}\int_\Omega y_{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m \\ \frac{1}{M}\int_\Omega z_{\mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m \end{pmatrix}, \qquad \text{où } M = \int_\Omega \mathrm{d}m\,,$$

$\int_\Omega$ désignant ici une sommation impliquant des éléments infinitésimaux en lien avec le solide Ω. La quantité $\int_\Omega \mathrm{d}m$ exprime ainsi la somme de toutes les masses infinitésimales de Ω ; raison pour laquelle elle est égale à la masse totale M de Ω.

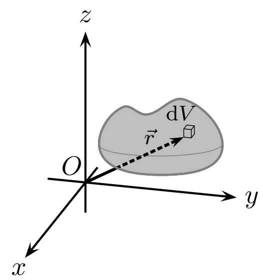
Introduisons à présent la grandeur *masse volumique* ; par définition, la masse volumique d'un corps est le rapport entre sa masse et son volume. Dans le cas d'un élément infinitésimal de masse $\mathrm{d}m$, évoqué précédemment, si ρ est sa masse volumique et $\mathrm{d}V$ son volume, alors :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V\,.$$

Comme ρ peut varier d'un élément infinitésimal à l'autre, il convient de noter $\rho = \rho(x_{\mathrm{d}m}\,;\,y_{\mathrm{d}m}\,;\,z_{\mathrm{d}m})$ et :

$$\mathrm{d}m = \rho(x_{\mathrm{d}m}\,;\,y_{\mathrm{d}m}\,;\,z_{\mathrm{d}m})\,\mathrm{d}V\,.$$

Avec une telle écriture de $\mathrm{d}m$, l'expression de $\vec{r}_C$ donnée plus haut devient :



$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_\Omega \vec{r}_{\mathrm{d}m}\,\rho(x_{\mathrm{d}m}\,;\,y_{\mathrm{d}m}\,;\,z_{\mathrm{d}m})\,\mathrm{d}V\ ;$$

autrement écrit, en abandonnant la notation avec les indices :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_\Omega \vec{r}\,\rho(x;\,y;\,z)\,\mathrm{d}V\,.$$

Un solide est dit *homogène* si tous les éléments infinitésimaux qui le constituent ont la même masse volumique. Supposons que le solide Ω, évoqué précédemment, est homogène. Dans ce cas, ρ est une fonction constante de x, y et z, et alors :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_\Omega \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V = \frac{\int_\Omega \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V}{\int_\Omega \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{\rho\int_\Omega \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\rho\int_\Omega \mathrm{d}V} = \frac{\int_\Omega \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int_\Omega \mathrm{d}V}\ .$$

Or, $\int_\Omega \mathrm{d}V$ est la somme de tous les volumes infinitésimaux de Ω ; elle est donc égale, par définition, au volume de Ω. Ainsi :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega \vec{r}\,\mathrm{d}V\,,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{x_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega x\,\mathrm{d}V\,, \qquad y_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega y\,\mathrm{d}V\,, \qquad z_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega z\,\mathrm{d}V}\,.$$

8.3.1 Remarques :

- Les considérations faites précédemment se justifient par les concepts de subdivisions d'intervalles et de sommes de Riemann. Comme il est question ici de solides quelconques, il convient de considérer des subdivisions selon les trois axes Ox, Oy et Oz, ce qui conduit à de triples sommes de Riemann... Un tel travail ne sera pas réalisé ici.
- Lorsqu'une force est appliquée en un point quelconque d'un solide Ω, le solide en question s'anime, de manière générale, simultanément d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Pour que le solide ne subisse qu'un mouvement de translation, la force en question doit être appliquée en un point bien précis ; ce point est le centre de masse de Ω.

Les précédentes formules encadrées peuvent être ramenées, pour certains types de solides, à des intégrales sur un intervalle. Pour le voir, reprenons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, et considérons le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ généré par les axes Ox et Oy du système $Oxyz$; ces axes Ox et Oy constituent alors le système de coordonnées cartésiennes canonique de $\mathbb{R}^2$.

8.3.1 Corps de révolution autour d'un axe horizontal

Considérons un solide homogène Ω, obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions réelles, définies et continues dans $[a; b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Le solide Ω peut alors être vu comme la réunion d'une infinité de disques creux infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $f(x)$, normaux à Ox, et dont les centres de masse sont en $(x; 0; 0)$. Les coordonnées du centre de masse C de Ω s'écrivent donc, dans ce cas :

$$x_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega x\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b x\,\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$y_C = \frac{1}{V}\int\limits_\Omega y\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b 0\cdot\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

et :

$$z_C = \frac{1}{V}\int\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b 0\cdot\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

V étant le volume de Ω et $\mathrm{d}V = \pi\left[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\right]\mathrm{d}x$. En résumé :

$$\boxed{x_C = \frac{1}{V}\int_a^b x\,\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,, \qquad y_C = 0\,, \qquad z_C = 0}\,.$$

8.3.2 Corps de révolution autour d'un axe vertical

Considérons un solide homogène Ω, obtenu par rotation autour de l'axe Oy de la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée d'une part par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$, d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions réelles, définies et continues dans $[a;\, b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Le solide Ω peut alors être vu comme la réunion d'une infinité de cylindres creux infiniment fins, d'épaisseur $\mathrm{d}x$, de rayons $x \in [a;\, b]$, de hauteurs $f(x) - g(x)$, dont l'axe coïncide avec Oy et dont les centres de masse sont sur Oy, à mi-hauteur, *i.e.* en $\big(0;\, \bar{y};\, 0\big)$, où $\bar{y} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x)\big)$. Les coordonnées du centre de masse C de Ω s'écrivent donc, dans ce cas :

$$x_C = \frac{1}{V}\int\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b 0\cdot 2\,\pi\,x\,\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$y_C = \frac{1}{V}\int\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b \bar{y}\cdot 2\,\pi\,x\,\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

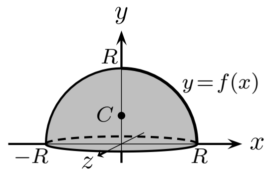
et :

$$z_C = \frac{1}{V}\int\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_a^b 0\cdot 2\,\pi\,x\,\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

V étant le volume de Ω et $\mathrm{d}V = 2\,\pi\,\big(f(x) - \big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x$. En résumé :

$$\boxed{x_C = 0\,, \qquad y_C = \frac{1}{V}\int_a^b \frac{1}{2}\,\big(f(x) + g(x)\big)\,2\,\pi\,x\,\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \qquad z_C = 0}\,.$$

8.3.2 Exemple : Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, considérons la demi-boule de rayon R, obtenue par rotation autour de l'axe Oy du quart de disque S situé dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ généré par les axes Ox et Oy, et qui est délimité par l'axe Oy, l'axe Ox, ainsi que le quart de cercle d'équation



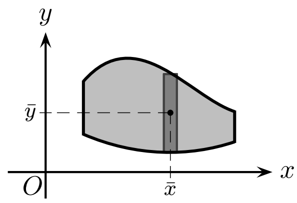
$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, allant de $(R;\, 0)$ à $(0;\, R)$. Cherchons les coordonnées x_C, y_C et z_C du centre de masse C de cet hémisphère. Selon les propos qui viennent d'être tenus, x_C et z_C sont nulles ; quant à la coordonnée y_C, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2} + 0\right) 2\,\pi\, x \left(\sqrt{R^2 - x^2} - 0\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R \pi\, x \left(R^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_0^R \left(R^2 x - x^3\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2 R^3} \left[\frac{1}{2} R^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4\right]_0^R = \frac{3}{4 R^3} \left[R^2 x^2 - \frac{1}{2} x^4\right]_0^R \\ &= \frac{3}{4 R^3} \left[\left(R^4 - \frac{1}{2} R^4\right) - (0 - 0)\right] = \frac{3\,R}{8}\,. \end{aligned}$$

Noter que pour calculer y_C, il est nécessaire de déterminer en premier lieu le volume V de Ω. Ce volume, qui est $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, n'a pas fait l'objet d'un calcul explicite ici ; il a simplement été déduit du volume d'une sphère (*i.e.* d'une boule) de rayon R, qui est $\frac{4}{3}\pi R^3$. En résumé :

$$C\left(0\,;\, \tfrac{3R}{8}\,;\, 0\right).$$

8.3.3 Corps ayant la forme d'une plaque d'épaisseur constante



Considérons un solide homogène Ω, qui a la forme d'une plaque d'épaisseur négligeable, contenue dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, Ω peut être assimilé à une surface $S \subset \mathbb{R}^2$. Supposons que S soit délimitée d'une part par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, et d'autre part par les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, données respectivement par $y = f(x)$ et par $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions réelles, définies et continues dans $[a;\, b]$, et telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Selon les considérations faites dans la première section du présent chapitre, S peut être vue comme une réunion d'une infinité de rectangles, de base $\mathrm{d}x$, de hauteurs $f(x) - g(x)$, dont les centres de masse sont en $(\bar{x};\, \bar{y})$, où $\bar{x} = x$ et $\bar{y} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x)\big)$. Les coordonnées du centre de masse C de S s'écrivent donc, dans ce cas :

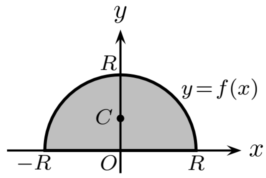
$$x_C = \frac{1}{A}\int_S \bar{x}\,\mathrm{d}A\,, \qquad y_C = \frac{1}{A}\int_S \bar{y}\,\mathrm{d}A\,.$$

Ainsi, en notant que $\mathrm{d}A = \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ (*cf.* première section du présent chapitre) :

$$\boxed{x_C = \frac{1}{A}\int_a^b x\,\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \quad y_C = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x}\,,$$

A étant l'aire de S. Noter que le signe $\int_S$ désigne ici une sommation impliquant des éléments infinitésimaux en lien avec la surface S.

8.3.3 Exemple : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons le demi-disque S de rayon R, centrée en O, délimité par l'axe Ox, *i.e.* par la droite horizontale d'équation $y = 0$, et par la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Cherchons les coordonnées x_C et y_C du centre de masse C de S. Selon les propos tenus ci-dessus, x_C s'écrit :



$$x_C \;=\; \frac{1}{\frac{1}{2}\,\pi\,R^2}\int_{-R}^{R} x\,\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 0\,,$$

du fait que la fonction donnée par $x\,\sqrt{R^2 - x^2}$ est impaire et que l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine de l'axe x vaut 0. Quant à la coordonnée y_C, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} y_C \;&=\; \frac{1}{\frac{1}{2}\,\pi\,R^2}\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\big(\sqrt{R^2 - x^2} + 0\big)\big(\sqrt{R^2 - x^2} - 0\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\pi\,R^2}\int_{-R}^{R}\big(R^2 - x^2\big)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{1}{\pi\,R^2}\left[R^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right]_{-R}^{R} \;=\; \frac{1}{\pi\,R^2}\left[\frac{2}{3}\,R^3 - \left(-\frac{2}{3}\,R^3\right)\right] \;=\; \frac{4\,R}{3\,\pi}\,. \end{aligned}$$

Noter que pour calculer y_C, il est nécessaire de déterminer en premier lieu l'aire A de S. Cette aire, qui est $A = \frac{1}{2}\,\pi\,R^2$, a été simplement déduite de l'aire d'un cercle (*i.e.* d'un disque) de rayon R, qui vaut $\pi\,R^2$. En résumé :

$$C\big(0\,;\,\tfrac{4\,R}{3\,\pi}\big)\,.$$

8.3.4 Remarques : • Les trois formules encadrées, données dans la section présente, se démontrent rigoureusement en recourant aux concepts de subdivisions d'intervalles et de sommes de Riemann. En effet, en prenant une subdivision $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$ d'ordre n de l'intervalle $[a;\, b]$ donné, et en s'inspirant des considérations faites dans les remarques 8.2.1, 8.2.2 et 8.1.2, il ressort que :

◇ pour un *corps de révolution autour d'un axe horizontal* :

$$\begin{aligned} x_C \;&=\; \frac{1}{V}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta_{\sigma_n}\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\,\pi\Big(\big(f(\xi_k)\big)^2 - \big(g(\xi_k)\big)^2\Big)\,\Delta x_k \\ &=\; \frac{1}{V}\int_a^b\frac{x + x}{2}\,\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{1}{V}\int_a^b x\,\pi\Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1, \ldots\,, n$;

◇ pour un *corps de révolution autour d'un axe vertical* :

$$\begin{aligned}
y_C &= \frac{1}{V} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \big(f(\xi_k) + \big(g(\xi_k)\big)\, 2\,\pi\, \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \big(f(\xi_k) - \big(g(\xi_k)\big)\, \Delta x_k \\
&= \frac{1}{V} \int_a^b \frac{1}{2} \big(f(x) + g(x)\big)\, 2\,\pi\, \frac{x+x}{2} \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{V} \int_a^b \frac{1}{2} \big(f(x) + g(x)\big)\, 2\,\pi\, x \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$;

◇ pour un *corps ayant la forme d'une plaque d'épaisseur constante* :

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{1}{A} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \big(\big(f(\xi_k) - g(\xi_k)\big)\, \Delta x_k \\
&= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{x+x}{2} \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{A} \int_a^b x \big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

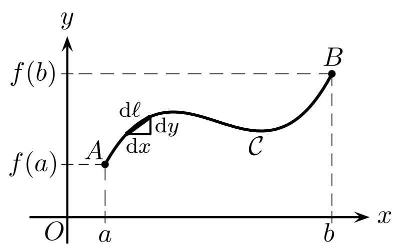
et :

$$\begin{aligned}
y_C &= \frac{1}{A} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \big(f(\xi_k) + g(\xi_k)\big)\big(f(\xi_k) - g(\xi_k)\big)\, \Delta x_k \\
&= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} \big(f(x) + g(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\xi_k \in [x_{k-1};\, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

- Les trois résultats encadrés, obtenus dans la section présente, se transposent sans difficulté à toute situation dans laquelle la (ou les) courbe(s) est (sont) donnée(s) non pas par une (des) équation(s) cartésienne(s) explicite(s), de la forme $y = f(x)$, mais par des équations paramétriques, de la forme $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$.

8.4 Longueur d'une ligne courbe



Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Considérons une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ reliant deux points A et B dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que l'abscisse de A, notée a, est strictement inférieure à l'abscisse de B, notée b. Supposons de plus que $\mathcal{C}$ correspond au morceau du graphe d'une fonction f définie et dérivable dans un intervalle ouvert I contenant l'intervalle fermé $[a;\, b]$; supposons encore que la dérivée f' de f est continue dans I. Prenons un élément infinitésimal $\mathrm{d}x$ selon x, compris entre a et b. À cet élément peut être associé un élément infinitésimal $\mathrm{d}\ell$ de longueur de courbe. Grâce au théorème de Pythagore, $\mathrm{d}\ell$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}\,,$$

où $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ est l'élément infinitésimal selon y associé à $\mathrm{d}x$ et à f. Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 &= \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x^2 = \left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x^2 \\ &= \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\mathrm{d}x^2 = \left(1 + \big(f'(x)\big)^2\right)\mathrm{d}x^2\,.\end{aligned}$$

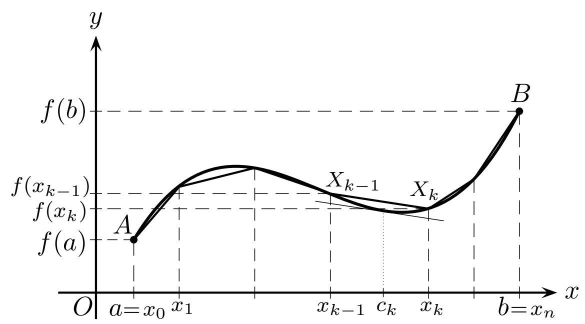
Donc :

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\left(1 + \big(f'(x)\big)^2\right)\mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

La longueur totale L de $\mathcal{C}$ s'obtient alors en sommant tous les éléments infinitésimaux $\mathrm{d}\ell$ constituant $\mathcal{C}$; concrètement :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x}\,.$$

8.4.1 Remarque : La formule précédente se justifie par les considérations faites sur l'intégrale de Riemann dans le chapitre 4. Pour le voir, reprenons la courbe $\mathcal{C}$ du début de la présente section, qui relie les points $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $B\big(b\,;\,f(b)\big)$, où $a < b$; considérons aussi une subdivision $\sigma_n = (x_0;\,x_1;\,\ldots\,;\,x_n)$ d'ordre n de l'intervalle $[a;\,b]$, de pas δ_{σ_n}. Notons X_k le point d'abscisse x_k et d'ordonnée $f(x_k)$, où $k = 0, 1, \ldots\, n$; comme $x_0 = a$ et $x_n = b$ (par définition d'une subdivision d'ordre n de $[a;\,b]$), alors X_0 coïncide avec A et X_n avec B. Les segments $\overline{X_{k-1}X_k}$, où $k = 1, \ldots, n$, mis bout à bout, décrivent alors grossièrement la courbe $\mathcal{C}$. La somme de leurs longueurs est donc approximativement égale à la longueur de $\mathcal{C}$. Grâce au théorème de Pythagore, la longueur du segment $\overline{X_{k-1}X_k}$, notée $\Delta\ell_k$, peut s'écrire :



$$\Delta\ell_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}\,,$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Or, f étant dérivable dans I, et donc en particulier dans $]x_{k-1};\,x_k[$, il existe, selon le théorème des accroissements finis (*cf.*

théorème 3.9.4, section 3.9 du chapitre 3), un nombre $c_k \in \,]x_{k-1};\, x_k[\,$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k)\, \Delta x_k$. Donc :

$$\begin{aligned} \Delta \ell_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{\big(\Delta x_k\big)^2 + \big(f'(c_k)\, \Delta x_k\big)^2} \\ &= \sqrt{\big(\Delta x_k\big)^2 + \big(f'(c_k)\big)^2 \big(\Delta x_k\big)^2} \\ &= \sqrt{\Big(1 + \big(f'(c_k)\big)^2\Big) \big(\Delta x_k\big)^2} \\ &= \sqrt{1 + \big(f'(c_k)\big)^2}\; \Delta x_k\,. \end{aligned}$$

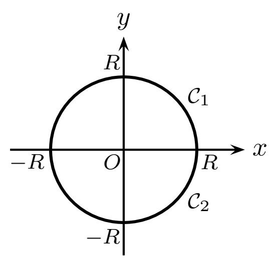
La longueur approximative de $\mathcal{C}$ s'écrit, par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta \ell_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \big(f'(c_k)\big)^2}\; \Delta x_k\,.$$

La fonction $\sqrt{1 + (f')^2}$ est continue dans $[a;\, b]$, vu que f' l'est. La limite de la somme ci-dessus, lorsque n tend vers l'infini et δ_{σ_n} vers 0, existe donc, et ne dépend ni du choix de la subdivision σ_n, ni, pour chaque subdivision, du choix des nombres réels $c_1 \in \,]x_0;\, x_1[\,, \ldots, c_n \in \,]x_{n-1};\, x_n[\,$ (pour autant qu'il y ait le choix). Cette limite est égale, par définition, à la longueur L de $\mathcal{C}$; elle se note :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \big(f'(c_k)\big)^2}\; \Delta x_k \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

8.4.2 Exemple : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy, considérons le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et centré sur l'origine O de Oxy. Ce cercle peut être vu comme la réunion des deux demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, donnés respectivement par $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $y = g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Par symétrie, la longueur L de $\mathcal{C}$, *i.e.* le périmètre de $\mathcal{C}$, est égale à deux fois la longueur L_1 du demi-cercle $\mathcal{C}_1$. Noter que la fonction f décrivant $\mathcal{C}_1$ n'est définie que dans $[-R;\, R]$; et sa dérivée f', qui est donnée par :



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\,(-2\,x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,,$$

uniquement dans $]-R;\, R[$. De fait, en calculant L_1, il convient d'être attentif au fait que l'intégrale est une intégrale généralisée :

$$\begin{aligned}
L \;=\; 2\,L_1 \;&=\; 2\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\int_a^b \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\int_a^b \sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\int_a^b \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} 2\,R\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_a^b \;=\; \lim_{\substack{a\to -R\\ a>-R}}\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}} \left[2\,R\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{b}{R}\right) - 2\,R\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{a}{R}\right)\right]\\
&=\; 2\,R\,\mathrm{Arcsin}(1) - 2\,R\,\mathrm{Arcsin}(-1) \;=\; 2\,R\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \;=\; 2\,\pi\,R\,.
\end{aligned}$$

8.4.3 Remarques : • Les considérations faites dans la section présente s'adaptent sans difficulté à toute situation dans laquelle la courbe $\mathcal{C}$ en question est donnée non pas par une équation cartésienne explicite, de la forme $y = f(x)$, mais par des équations paramétriques, de la forme $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. Concrètement, il suffit de reprendre l'élément infinitésimal $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ introduit en début de section, puis d'écrire $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ en fonction de l'élément $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell \;=\; \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \;&=\; \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathrm{d}t^2}\\
&=\; \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\; \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\ ;
\end{aligned}$$

La longueur L de $\mathcal{C}$ entre deux points $A\big(\varphi(t_a)\,;\,\psi(t_a)\big)$ et $B\big(\varphi(t_b)\,;\,\psi(t_b)\big)$ sur $\mathcal{C}$, où t_a et t_b sont deux nombres réels tels que $t_a < t_b$, est alors donnée par :

$$\boxed{L \;=\; \int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t}\ ,$$

Noter que la condition $t_a < t_b$ est importante ; si elle n'est pas respectée, L n'est plus une grandeur positive. Du reste, c'est cette même condition qui est à l'origine du fait que l'élément $\mathrm{d}t^2$ sous la racine devient $\mathrm{d}t$ (et non $-\mathrm{d}t$) en dehors de la racine, dans le calcul de $\mathrm{d}\ell$ ci-dessus.

- Les équations paramétriques d'une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ se notent souvent (de manière certes un peu abusive) $x = x(t)$ et $y = y(t)$. La précédente expression de L s'écrit alors, avec cette notation :

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\big(\dot{x}(t)\big)^2 + \big(\dot{y}(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

où $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$.

8.4.4 Exemple : Reprenons le cercle $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (*cf.* exemple 8.4.2). Ce cercle peut être décrit, rappelons-le, par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}, \qquad \text{où } t \in [0\,;\,2\pi[\,.$$

Calculons alors son périmètre à l'aide de la formule établie au premier point des remarques précédentes :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(\dot{x}(t)\big)^2 + \big(\dot{y}(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} \sqrt{\big(\dot{x}(t)\big)^2 + \big(\dot{y}(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} \sqrt{\big(-R\sin(t)\big)^2 + \big(R\cos(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} \sqrt{R^2\big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} \sqrt{R^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} \int_0^{b} R\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} R\,t\Big|_0^b = \lim_{\substack{b\to 2\pi \\ b<2\pi}} (R\,b - 0) = 2\,\pi\,R\,. \end{aligned}$$

Noter que l'intégrale est une intégrale généralisée ; ceci en raison du fait que $2\,\pi$ ne fait pas partie de l'intervalle.

8.4.5 Remarques :

- Les considérations faites dans la section présente s'adaptent également à toute situation dans laquelle la courbe $\mathcal{C}$ en question est donnée non pas par une équation cartésienne explicite, de la forme $y = f(x)$, mais par une équation polaire explicite, de la forme $r = f(\theta)$. Concrètement, il suffit de reprendre l'élément infinitésimal $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ introduit dans le premier point des remarques précédentes, d'écrire $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$, et de tenir compte des égalités $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ (*cf.* remarques 2.1.12 de la section 2.1 du chapitre 2), où $r = f(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)^2} \\
&= \sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(f(\theta)\cos(\theta)\big)\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(f(\theta)\sin(\theta)\big)\right)^2}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{\big(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)\big)^2 + \big(f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\big)^2}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{\big(f'(\theta)\big)^2\cos^2(\theta) + \big(f'(\theta)\big)^2\sin^2(\theta) + \big(f(\theta)\big)^2\sin^2(\theta) + \big(f(\theta)\big)^2\cos^2(\theta)}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{\big(f(\theta)\big)^2 + \big(f'(\theta)\big)^2}\;\mathrm{d}\theta\ ;
\end{aligned}$$

les produits $-2\,f'(\theta)\cos(\theta)\,f(\theta)\sin(\theta)$ et $2\,f'(\theta)\sin(\theta)\,f(\theta)\cos(\theta)$ s'annulent entre eux ; raison pour laquelle ils n'ont pas été notés dans la quatrième ligne du calcul qui vient d'être fait. La longueur L de $\mathcal{C}$ entre deux points $A\big(f(\theta_a)\,;\,\theta_a\big)$ et $B\big(f(\theta_b)\,;\,\theta_b\big)$ sur $\mathcal{C}$, où θ_a et θ_b sont deux nombres réels tels que $\theta_a < \theta_b$, est alors donnée par :

$$\boxed{L = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\big(f(\theta)\big)^2 + \big(f'(\theta)\big)^2}\;\mathrm{d}\theta}\ .$$

Ici aussi (à l'image de ce qui a été mentionné dans le premier point des remarques 8.4.3), il est important que $\theta_a < \theta_b$. Si cette condition n'est pas respectée, L n'est plus une grandeur positive. C'est aussi grâce à cette condition que l'élément $\mathrm{d}\theta^2$ sous la racine devient $\mathrm{d}\theta$ (et non $-\mathrm{d}\theta$) en dehors de la racine, dans le calcul de $\mathrm{d}\ell$ ci-dessus.

- L'équation polaire d'une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ se note souvent (de manière certes un peu abusive) $r = r(\theta)$. La précédente expression de L s'écrit alors, avec cette notation :
$$L = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\big(r(\theta)\big)^2 + \big(r'(\theta)\big)^2}\;\mathrm{d}\theta\,.$$

8.4.6 Exemple : Reprenons encore une fois le cercle $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ de rayon R et centré sur l'origine O du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (*cf.* exemple 8.4.2). Ce cercle peut être décrit par l'équation polaire $r = r(\theta) = R$, où $\theta \in [0\,;\,2\,\pi[$. Calculons alors son périmètre L à l'aide de la formule établie au premier point des remarques précédentes :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(r(\theta)\big)^2 + \big(r'(\theta)\big)^2}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \int_0^b \sqrt{\big(r(\theta)\big)^2 + \big(r'(\theta)\big)^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \int_0^b \sqrt{R^2+0^2}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} \int_0^b R\,\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} R\,\theta\Big|_0^b = \lim_{\substack{b\to 2\pi\\ b<2\pi}} (R\,b-0) = 2\,\pi\,R. \end{aligned}$$

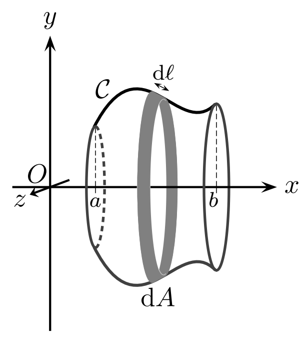
8.5 Aires de surfaces de révolution

On appelle *surface de révolution* toute surface générée par la rotation d'une courbe plane $\mathcal{C}$ reliant un point A à un point B, autour d'un axe situé dans le même plan que $\mathcal{C}$.

Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $Oxyz$ son système de coordonnées cartésiennes canonique (*cf.* section 2.1 du chapitre 3). Les axes Ox et Oy génèrent un plan qui peut être identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$; les axes Ox et Oy forment alors le système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy de ce plan $\mathbb{R}^2$. Considérons alors une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ reliant deux points A et B dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que l'abscisse de A, notée a, est strictement inférieure à l'abscisse de B, notée b. Supposons de plus que $\mathcal{C}$ correspond au morceau du graphe d'une fonction f définie et dérivable dans un intervalle ouvert I contenant l'intervalle fermé $[a;\,b]$; supposons encore que la dérivée f' de f est continue dans I.

8.5.1 Surface de révolution autour d'un axe horizontal

La rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe Ox génère une surface S qui peut être vue comme la réunion d'une infinité de troncs de cône infiniment fins, d'«épaisseur» $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, de rayons $f(x)$, centrés en $(x;\,0;\,0)$, où $x \in [a;\,b]$, et normaux à Ox. L'aire $\mathrm{d}A$ de l'un de ces troncs étant donnée par $\mathrm{d}A = 2\,\pi\,f(x)\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, l'aire totale A de S s'écrit :



$$\boxed{A = \int_a^b 2\,\pi\,f(x)\,\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x}\,.$$

8.5.1 Remarque : La formule ci-dessus se justifie rigoureusement en recourant aux notions de subdivisions d'intervalles et de sommes de Riemann. Pour le voir, considérons une fonction réelle f définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\,b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$; considérons aussi une subdivision $\sigma_n = (x_0;\,x_1;\,\ldots\,;\,x_n)$ d'ordre n de $[a;\,b]$, de pas δ_{σ_n}. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, la rotation autour de l'axe Ox du segment $\overline{X_{k-1}X_k}$, où $X_{k-1}\big(x_{k-1}\,;\,f(x_{k-1})\big)$ et $X_k\big(x_k\,;\,f(x_k)\big)$ sont les points sur le graphe de f d'abscisse x_{k-1} et x_k respectivement, génère dans $\mathbb{R}^3$ un tronc de cône de rayon moyen égal à $\frac{1}{2}\big(f(x_{k-1})+f(x_k)\big)$, centré sur le point $\big(\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)\,;0\,;0\big)$. L'aire ΔA_k de ce tronc de cône s'obtient en l'assimilant à un trapèze de base moyenne égale à $2\pi\cdot\frac{1}{2}\big(f(x_{k-1})+f(x_k)\big)$ et de hauteur égale à $\Delta\ell_k=\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$, où $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ et $c_k\in\,]x_{k-1};\,x_k[$:

$$\Delta A_k \;=\; 2\,\pi\,\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\sqrt{1+\big(f'(c_k)\big)^2}\;\Delta x_k\,.$$

Soit à présent S la surface obtenue en faisant tourner autour de l'axe Ox la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y=f(x)$, où $x\in[a;\,b]$. Cette surface peut être vue, grossièrement, comme une réunion de troncs de cône tels que ceux décrits ci-dessus. L'aire de S s'obtient donc, approximativement, en sommant les aires de ces troncs :

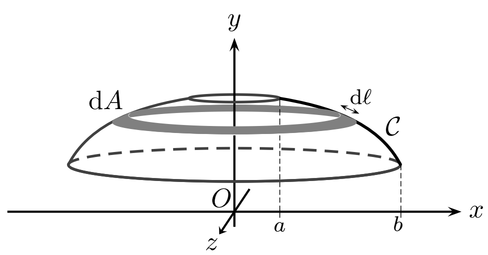
$$\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k \;=\; \sum_{k=1}^{n}2\,\pi\,\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\sqrt{1+\big(f'(c_k)\big)^2}\;\Delta x_k\,.$$

Lorsque n tend vers l'infini et δ tend vers 0, la réunion des troncs de cône correspond à la surface S. L'aire A de S s'obtient donc comme suit :

$$\begin{aligned}A \;&=\; \lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta_{\sigma_n}\to 0}}\sum_{k=1}^{n}2\,\pi\,\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\sqrt{1+\big(f'(c_k)\big)^2}\;\Delta x_k\\ &=\;\int_a^b 2\,\pi\,\frac{f(x)+f(x)}{2}\,\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\;\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b 2\,\pi\,f(x)\,\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\;\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

8.5.2 Surface de révolution autour d'un axe vertical

La rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe Oy génère une surface S qui peut être vue comme la réunion d'une infinité de troncs de cône infiniment fins, de rayons x, où $x\in[a;\,b]$, d'« épaisseur » $\mathrm{d}\ell=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, centrés en $(0;\,f(x);\,0)$, et normaux à Oy. L'aire $\mathrm{d}A$ de l'un de ces troncs étant donnée par $\mathrm{d}A=2\,\pi\,x\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, l'aire totale A de S s'écrit :



$$\boxed{A \;=\; \int_a^b 2\,\pi\,x\,\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\;\mathrm{d}x}\,.$$

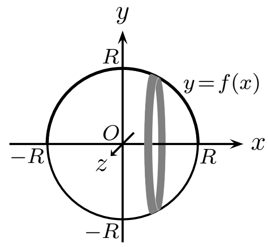
8.5.2 Remarque : La formule ci-dessus se justifie rigoureusement en recourant aux notions de subdivisions d'intervalles et de sommes de Riemann. Le raisonnement est similaire à celui de la remarque 8.5.1. La différence réside dans le fait que la rotation du segment $\overline{X_{k-1}X_k}$ se fait ici autour de l'axe Oy. Le tronc de cône qui en résulte a alors un rayon moyen égal à $\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)$ et est centré sur le point $\big(0\,;\frac{1}{2}\big(f(x_{k-1})+f(x_k)\big)\,;0\big)$. Son aire ΔA_k est alors :

$$\Delta A_k \;=\; 2\,\pi\,\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\,\sqrt{1+\big(f'(c_k)\big)^2}\;\Delta x_k\,,$$

où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et $c_k \in \,]x_{k-1}; x_k[$. De fait, l'aire A de la surface S, obtenue en faisant tourner autour de l'axe Oy la courbe $\mathcal{C}$ donnée par $y = f(x)$, où $x \in [a; b]$, est donnée par :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_{\sigma_n}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} 2\,\pi\, \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \sqrt{1+\big(f'(c_k)\big)^2}\, \Delta x_k \\ &= \int_a^b 2\,\pi\, \frac{x+x}{2} \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b 2\,\pi\, x \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

8.5.3 Exemple : Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$, considérons la sphère $\mathcal{S}$ de rayon R et centrée sur l'origine du système $Oxyz$. Cette sphère peut être obtenue par rotation autour de l'axe Ox du demi-cercle d'équation $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, contenu dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ généré par les axes Ox et Oy. $\mathcal{S}$ peut alors être vue comme la réunion d'une infinité de troncs de cône infiniment fins, d'« épaisseur » $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, de rayons $f(x)$, centrés en $(x; 0; 0)$, et normaux à Ox. L'aire $\mathrm{d}A$ de l'un de ces troncs s'écrit alors :



$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= 2\,\pi\, f(x) \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x = 2\,\pi \sqrt{R^2-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x \\ &= 2\,\pi \sqrt{R^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\,\pi \sqrt{R^2-x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\, \mathrm{d}x \\ &= 2\,\pi \sqrt{R^2-x^2}\, \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\,\pi\, R\, \mathrm{d}x\,; \end{aligned}$$

noter que la simplification des racines, dans le calcul ci-dessus, ne peut être effectuée que si $x^2 \neq R^2 \Leftrightarrow x \neq \pm R$. De fait, $x \in \,]-R; R[$; ce qui implique que l'aire A de $\mathcal{S}$ s'obtient en calculant une intégrale généralisée :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^{R} 2\,\pi\, f(x) \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to -R \\ a>-R}} \lim_{\substack{b\to R \\ b<R}} \int_a^b 2\,\pi\, f(x) \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{a\to -R \\ a>-R}} \lim_{\substack{b\to R \\ b<R}} \int_a^b 2\,\pi\, R\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to -R \\ a>-R}} \lim_{\substack{b\to R \\ b<R}} 2\,\pi\, R\, x\Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to -R \\ a>-R}} \lim_{\substack{b\to R \\ b<R}} 2\,\pi\, R\,(b-a) \\ &= 2\,\pi\, R\,\big(R-(-R)\big) = 4\,\pi\, R^2\,. \end{aligned}$$

Noter que la même sphère $\mathcal{S}$ peut être obtenue par rotation autour de l'axe Oy de deux quarts de cercle dans $\mathbb{R}^2$, l'un allant de $(R; 0)$ à $(0; R)$ et l'autre de $(R; 0)$ à $(0; -R)$. $\mathcal{S}$ peut alors être vue comme la réunion d'une infinité de troncs de cône infiniment fins, normaux à l'axe Oy. L'aire dA de l'un de ces troncs étant :

$$\mathrm{d}A \;=\; 2\,\pi\,x\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\;\mathrm{d}x\;,$$

l'aire A de $\mathcal{S}$ est :

$$A \;=\; 2\int_0^R 2\,\pi\,x\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\;\mathrm{d}x \;=\; 2\lim_{\substack{b\to R\\ b<R}}\int_0^b 2\,\pi\,x\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\;\mathrm{d}x \;=\; 4\,\pi\,R^2\,.$$

À nouveau, il s'agit d'une intégrale généralisée ; le facteur 2 devant l'intégrale vient du fait que $\mathcal{S}$ est construite ici à partir de deux quarts de cercle. Le détail du raisonnement est laissé en exercice.

8.5.4 Remarque : Les deux résultats encadrés, obtenus dans la section présente, se transposent sans difficulté à toute situation dans laquelle la courbe en question est donnée non pas par une fonction, mais par des équations paramétriques, de la forme $x=\varphi(t)$ et $y=\psi(t)$.

Les applications du calcul intégral ne se limitent pas aux situations décrites dans le présent chapitre. Il en existe de nombreuses autres ; en mathématique bien sûr, mais également en physique et dans les sciences de l'ingénierie. Dans les ouvrages consacrés à la mécanique, l'électromagnétisme ou la thermodynamique, les exemples ne manquent pas.

Dans tout domaine de la physique, le calcul intégral, et plus généralement le calcul infinitésimal occupe une place de choix. C'est grâce au calcul infinitésimal, entre autres, qu'il a été possible d'élaborer des modèles théoriques qui concordent si bien avec les observations et les mesures expérimentales.

Annexe A

Suites et séries numériques

Le présent chapitre a pour objectif de présenter et de démontrer un certain nombre de propriétés relatives aux suites de nombres réels. Ces propriétés ont toutes leur importance car elles sont fréquemment invoquées dans les preuves de certains résultats majeurs relatifs aux séries numériques ou aux fonctions continues.

A.1 Propriétés des suites de nombres réels

Rappelons qu'une suite (illimitée) de nombres réels est une famille d'éléments pouvant être indexée par les nombres naturels. Une suite de nombres réels se note généralement (u_n) ; u_n est ce que l'on appelle le terme général de la suite.

A.1.1 Lemme : *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Supposons que (u_n) admet pour limites les deux nombres réels L_1 et L_2 lorsque n tend vers l'infini. Alors nécessairement $L_1 = L_2$. Autrement dit, si une suite de nombre réels (u_n) converge, elle converge vers une seule et unique limite.*

Preuve : Soient ε un nombre réel quelconque, strictement positif, et (u_n) une suite de nombres réels qui admet pour limites à la fois le nombre réel L_1 et le nombre réel L_2. Dire que $\lim_{n\to\infty} u_n = L_1$ revient à dire que, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$; en particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_1 \qquad \Rightarrow \qquad |u_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Aussi, dire que $\lim_{n\to\infty} u_n = L_2$ revient à dire que, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_2| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$; en particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \qquad \Rightarrow \qquad |u_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Par conséquent, pour tout nombre entier $n \geqslant N = \max\{N_1;\, N_2\}$ (*i.e.* N étant le plus grand des deux nombres réels N_1 et N_2) :

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - u_n + u_n - L_2| = \big|(L_1 - u_n) + (u_n - L_2)\big| \\ &\leqslant |L_1 - u_n| + |u_n - L_2| = |u_n - L_1| + |u_n - L_2| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Or, dire que $|L_1 - L_2| \leqslant \varepsilon$, c'est dire que la différence entre L_1 et L_2 peut être aussi petite que souhaitée ; c'est donc dire que la différence entre L_1 et L_2 est nulle ; ce qui revient à dire que L_1 et L_2 sont égales.

A.1.2 Définition : Une suite de nombres réels (u_n) est dite *constante* si $u_n = u_0$ quel que soit le nombre $n \in \mathbb{N}$.

A.1.3 Proposition : *Toute suite de nombres réels (u_n) constante est convergente ; sa limite, lorsque n tend vers l'infini, vaut u_0.*

Preuve : Soient (u_n) une suite de nombres réels constante et ε un nombre réel quelconque, strictement positif. Dire que (u_n) est constante revient à dire que $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $|u_n - u_0| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce qui revient à dire que (u_n) converge et admet pour limite, lorsque n tend vers l'infini, le nombre réel u_0. □

A.1.4 Définitions :

- Une suite de nombres réels (u_n) est dite *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si $u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$) pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$.
- Une suite de nombres réels (u_n) est dite *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si $u_n \geqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$) pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$.

A.1.5 Proposition : *Toute suite de nombres réels (u_n) croissante (respectivement décroissante), pour laquelle il existe un nombre réel b tel que $u_n \leqslant b$ (respectivement un nombre réel a tel que $u_n \geqslant a$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, est convergente.*

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombres réels satisfaisant les hypothèses de la proposition. Le fait que $u_n \leqslant b$ (respectivement $u_n \geqslant a$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique l'existence d'un plus petit nombre réel B (respectivement un plus grand nombre réel A) tel que $u_n \leqslant B$ (respectivement $u_n \geqslant A$) pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce qui implique que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant B - u_N \leqslant \varepsilon$ (respectivement $0 \leqslant u_N - A \leqslant \varepsilon$). Comme la suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante), alors nécessairement $0 \leqslant B - u_n \leqslant \varepsilon$ (respectivement $0 \leqslant u_n - A \leqslant \varepsilon$) pour tout $n \geqslant N$. La définition de la limite d'une suite permet de conclure que la suite (u_n) converge vers B (respectivement vers A). □

A.1.6 Proposition : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels convergentes, qui admettent pour limites respectives, lorsque n tend vers l'infini, les nombres réels L_1*

et L_2. Alors :

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha\, u_n + \beta\, v_n) \;=\; \alpha\, L_1 + \beta\, L_2\,$, *$\alpha$ et β étant deux nombres réels,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n\, v_n) \;=\; L_1\, L_2\,.$

Si, de plus, $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $L_2 \neq 0$, alors :

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \;=\; \dfrac{L_1}{L_2}\,.$

Soient à présent (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de nombres réels pour lesquelles il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ pour tout nombre entier $n \geqslant N_0$. Supposons, en outre, que (u_n) et (v_n) convergent et qu'elles admettent toutes les deux pour limite, lorsque n tend vers l'infini, le même nombre réel L (i.e. $\lim_{n\to\infty} u_n = L = \lim_{n\to\infty} v_n$). Alors :

- $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \;=\; L\,.$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème des deux gendarmes pour les suites.

Preuve : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels convergentes, qui admettent pour limites respectives, lorsque n tend vers l'infini, les nombres réels L_1 et L_2.

- Montrons que $\lim_{n\to\infty}(\alpha\, u_n + \beta\, v_n) = \alpha\, L_1 + \beta\, L_2$, où α et β sont des nombres réels quelconques. Commençons par traiter le cas où $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Le fait que $\lim_{n\to\infty} u_n = L_1 \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, un nombre $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$. En particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_1 \qquad \Rightarrow \qquad |u_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\alpha|} \quad (\alpha \neq 0)\,,$$

où ε est un nombre réel quelconque, strictement positif. Aussi, le fait que $\lim_{n\to\infty} v_n = L_2 \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, un nombre $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_2| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$. En particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \qquad \Rightarrow \qquad |v_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\beta|} \quad (\beta \neq 0)\,.$$

Par conséquent, pour tout nombre entier $n \geqslant N$, où N est le plus grand des deux nombres N_1 et N_2 (ce qui se note $N = \max\{N_1;\, N_2\}$) :

$$\begin{aligned}
\big|(\alpha\, u_n + \beta\, v_n) - (\alpha\, L_1 + \beta\, L_2)\big| \;&=\; \big|\alpha\, u_n + \beta\, v_n - \alpha\, L_1 - \beta\, L_2\big| \\
&=\; \big|\alpha\,(u_n - L_1) + \beta\,(v_n - L_2)\big| \\
&\leqslant\; \big|\alpha\,(u_n - L_1)\big| + \big|\beta\,(v_n - L_2)\big| \\
&=\; |\alpha|\,|u_n - \ell_1| + |\beta|\,|v_n - \ell_2| \\
&\leqslant\; |\alpha|\,\frac{\varepsilon}{2\,|\alpha|} + |\beta|\,\frac{\varepsilon}{2\,|\beta|} \;=\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

ce qui établit que :

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, u_n + \beta\, v_n) \;=\; \alpha\, L_1 + \beta\, L_2\ .$$

Dans le cas où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, la preuve est plus immédiate ; il suffit de dire qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ pour tout nombre entier $n \geqslant N_1$; ce qui implique, toujours pour tout $n \geqslant N_1$:

$$|\alpha\, u_n - \alpha\, L_1| \;=\; \big|\alpha\,(u_n - L_1)\big| \;=\; |\alpha|\,|u_n - L_1| \;\leqslant\; |\alpha|\,\frac{\varepsilon}{|\alpha|} \;=\; \varepsilon\ .$$

Le raisonnement est similaire dans le cas où $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$. Enfin, dans la situation où $\alpha = \beta = 0$, le résultat se déduit du quatrième point de la présente proposition (qui traite de la limite d'une suite constante), dont la preuve est donnée plus bas.

- Montrons que $\lim_{n\to\infty}(u_n\, v_n) = L_1\, L_2$. À cet effet, commençons par nous intéresser à la suite (u_n). Le fait que $\lim_{n\to\infty} u_n = L_1 \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, un nombre $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$. Or :

$$|u_n - L_1| \;\leqslant\; \varepsilon_1 \quad\Leftrightarrow\quad -\varepsilon_1 \;\leqslant\; u_n - L_1 \;\leqslant\; \varepsilon_1 \quad\Leftrightarrow\quad L_1 - \varepsilon_1 \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; L_1 + \varepsilon_1\ .$$

Pour tout $n \geqslant M_1$, u_n est donc limité inférieurement par le nombre réel $L_1 - \varepsilon_1$ et supérieurement par le nombre réel $L_1 + \varepsilon_1$. Or, $u_0, u_1, \ldots\, u_{M_1-1}$ étant tous des nombres réels, il est possible de trouver deux nombres réels γ_1 et γ_2 tels que u_n est limité inférieurement par γ_1 et supérieurement par γ_2 (*i.e.* $\gamma_1 \leqslant u_n \leqslant \gamma_2$) pour tout $n \in \mathbb{N}$; pour s'en convaincre, il suffit de considérer γ_1 comme étant le plus petit des nombres $u_0, u_1, \ldots\, u_{M_1-1}, L_1 - \varepsilon_1$ et γ_2 le plus grand des nombres $u_0, u_1, \ldots\, u_{M_1-1}, L_1 + \varepsilon_1$. Par conséquent, il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que $|u_n| \leqslant \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce nombre γ peut être n'importe quel nombre strictement plus grand que le plus grand des deux nombres $|\gamma_1|$ et $|\gamma_2|$.

Vu qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, un nombre $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$, alors, en particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_1 \qquad\Rightarrow\qquad |u_n - L_1| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2\,\big(1 + |L_2|\big)}\ ,$$

où ε est un nombre réel quelconque, strictement positif. Si c'est $1 + |L_2|$ qui a été considéré au lieu de simplement $|L_2|$, c'est pour éviter des problèmes dans le cas où $L_2 = 0$.

Intéressons-nous à présent à la suite (v_n). Le fait que $\lim_{n\to\infty} v_n = L_2 \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, un nombre $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - L_2| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$. En particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \qquad\Rightarrow\qquad |v_n - L_2| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2\,\gamma} \quad (\text{où } \gamma > 0)\ .$$

Par conséquent, pour tout nombre entier $n \geqslant N$, où N est le plus grand des deux nombres N_1 et N_2 (*i.e.* $N = \max\{N_1;\, N_2\}$:

$$\begin{aligned}
\big|u_n\, v_n - L_1\, L_2\big| &= \big|u_n\, v_n - u_n\, L_2 + u_n\, L_2 - L_1\, L_2\big| \\
&= \big|u_n\,(v_n - L_2) + L_2\,(u_n - L_1)\big| \\
&\leqslant \big|u_n\,(v_n - L_2)\big| + \big|L_2\,(u_n - L_1)\big| \\
&= |u_n|\,|v_n - L_2| + |L_2|\,|u_n - L_1| \\
&\leqslant |u_n|\,|v_n - L_2| + \big(1 + |L_2|\big)\,|u_n - L_1| \\
&\leqslant \gamma\,\frac{\varepsilon}{2\,\gamma} + \big(1 + |L_2|\big)\,\frac{\varepsilon}{2\,\big(1 + |L_2|\big)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,;
\end{aligned}$$

ce qui établit que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n = L_1\, L_2\,.$$

- Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{L_1}{L_2}$, pour autant que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $L_2 \neq 0$. À cet effet, intéressons-nous plus particulièrement à la suite (v_n). Le fait que $\lim_{n\to\infty} v_n = L_2 \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, un nombre $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - L_2| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$. En particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \qquad \Rightarrow \qquad |v_n - L_2| \leqslant \frac{|L_2|}{2}\,.$$

Or :

$$\begin{aligned}
|v_n - L_2| \leqslant \tfrac{|L_2|}{2} \qquad &\Leftrightarrow \qquad -\frac{|L_2|}{2} \leqslant v_n - L_2 \leqslant \tfrac{|L_2|}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad L_2 - \frac{|L_2|}{2} \leqslant \quad v_n \quad \leqslant L_2 + \tfrac{|L_2|}{2}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent :
- ◇ si $L_2 > 0$, alors $|L_2| = L_2$ et la dernière double inégalité ci-dessus se récrit $\frac{L_2}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{3\,L_2}{2}$;
- ◇ si $L_2 < 0$, alors $|L_2| = -L_2$ et la dernière double inégalité ci-dessus se récrit $\frac{3\,L_2}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{L_2}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\,L_2}{2} \geqslant -v_n \geqslant -\frac{L_2}{2}$.

En résumé, $|v_n| \geqslant \frac{|L_2|}{2}$ pour tout $n \geqslant N_2$; ce qui montre que $v_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant N_2$.

Vu qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, un nombre $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - L_2| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$, alors, en particulier, il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un nombre $\tilde{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - L_2| \leqslant \frac{\varepsilon\, {L_2}^2}{2}$ pour tout nombre entier $n \geqslant \tilde{N}_2$. Par conséquent, pour tout nombre entier $n \geqslant N$, où N est le plus grand des deux nombres N_2 et $\tilde{N}_2$ (*i.e.* $N = \max\{N_2;\ \tilde{N}_2\}$) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{L_2}\right| &= \left|\frac{L_2 - v_n}{v_n\, L_2}\right| = \left|\frac{v_n - L_2}{v_n\, L_2}\right| = \frac{|v_n - L_2|}{|v_n|\,|L_2|} \\ &\leqslant \frac{\frac{\varepsilon\, L_2{}^2}{2}}{|v_n|\,|L_2|} \leqslant \frac{\frac{\varepsilon\, L_2{}^2}{2}}{\frac{|L_2|}{2}\,|L_2|} = \frac{\frac{\varepsilon\, L_2{}^2}{2}}{\frac{|L_2|^2}{2}} = \frac{\varepsilon\,\frac{L_2{}^2}{2}}{\frac{L_2{}^2}{2}} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

ce qui établit que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{L_2}\,.$$

Enfin, le fait que la limite du produit de deux suites convergentes est égale au produit de leurs limites respectives (*cf.* point précédent) permet de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(u_n\,\frac{1}{v_n}\right) = L_1\,\frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}\,.$$

Soient à présent (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de nombres réels pour lesquelles il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ pour tout nombre entier $n \geqslant N_0$. Supposons, en outre, que (u_n) et (v_n) convergent et qu'elles admettent toutes les deux pour limite, lorsque n tend vers l'infini, le même nombre réel L (*i.e.* $\lim_{n\to\infty} u_n = L = \lim_{n\to\infty} v_n$).

- Montrons que $\lim_{n\to\infty} w_n = L$. À cet effet, considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Le fait que $\lim_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, un nombre $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - L| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$. En particulier, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad\text{et}\quad n \geqslant N_1 \qquad\Rightarrow\qquad |u_n - L| \leqslant \varepsilon\,,$$

ou, de manière équivalente :

$$n \in \mathbb{N} \quad\text{et}\quad n \geqslant N_1 \qquad\Rightarrow\qquad -\varepsilon \leqslant u_n - L \leqslant \varepsilon\,.$$

Aussi, le fait que $\lim_{n\to\infty} v_n = L$ implique qu'il existe, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, un nombre $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - L| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$. En particulier, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \in \mathbb{N} \quad\text{et}\quad n \geqslant N_2 \qquad\Rightarrow\qquad |v_n - L| \leqslant \varepsilon\,,$$

ou, de manière équivalente :

$$n \in \mathbb{N} \quad\text{et}\quad n \geqslant N_2 \qquad\Rightarrow\qquad -\varepsilon \leqslant v_n - L \leqslant \varepsilon\,.$$

Or, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ pour tout nombre entier $n \geqslant N_0$. Donc, en posant N comme étant le plus grand des trois nombres N_0, N_1 et N_2 (ce qui se note $N = \max\{N_0;\ N_1;\ N_2\}$) :

$$n \in \mathbb{N} \quad\text{et}\quad n \geqslant N \qquad\Rightarrow\qquad -\varepsilon \leqslant u_n - L \leqslant w_n - L \leqslant v_n - L \leqslant \varepsilon\,.$$

Ainsi :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N \qquad \Rightarrow \qquad |w_n - L| \leqslant \varepsilon\,,$$

ce qui établit que :

$$\lim_{n\to\infty} w_n \;=\; L\,. \qquad \square$$

A.1.7 Proposition : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Supposons que (u_n) converge et admet pour limite le nombre réel L_1 ; supposons aussi que (v_n) converge et admet pour limite le nombre réel L_2. Supposons, en outre, qu'il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $L_1 \leqslant L_2$.*

Preuve : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels qui satisfont les hypothèses de la proposition. Supposons (par l'absurde) que $L_1 > L_2$. Soit alors ε un nombre réel quelconque, strictement positif. Le fait que (u_n) converge vers L_1 et que (v_n) converge vers L_2 permet d'affirmer qu'il existe un nombre entier $m > N$ tel que $|u_m - L_1| \leqslant \varepsilon$ et $|v_m - L_2| \leqslant \varepsilon$. En particulier, il existe, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}\,(L_1 - L_2)$, un nombre entier $k > N$ tel que $|u_k - L_1| \leqslant \frac{1}{4}\,(L_1 - L_2)$ et $|v_k - L_2| \leqslant \frac{1}{4}\,(L_1 - L_2)$. Or :

$$\begin{aligned} |u_k - L_1| \;\leqslant\; \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\;\Leftrightarrow&\quad -\tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\leqslant\; u_k - L_1 \;\leqslant\; \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \\ \Leftrightarrow&\quad L_1 - \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\leqslant\; u_k \;\leqslant\; L_1 + \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |v_k - L_2| \;\leqslant\; \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\;\Leftrightarrow&\quad -\tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\leqslant\; v_k - L_2 \;\leqslant\; \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \\ \Leftrightarrow&\quad L_2 - \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\leqslant\; v_k \;\leqslant\; L_2 + \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2)\,; \end{aligned}$$

en particulier, $u_k \geqslant L_1 - \frac{1}{4}\,(L_1 - L_2)$ et $v_k \leqslant L_2 + \frac{1}{4}\,(L_1 - L_2)$. Par conséquent, vu qu'il est supposé que $L_1 > L_2$:

$$\begin{aligned} v_k \;&\leqslant\; L_2 + \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;<\; L_2 + \tfrac{1}{2}\,(L_1 - L_2) \\ &=\; \tfrac{1}{2}\,(L_1 + L_2) \;=\; L_1 - \tfrac{1}{2}\,(L_1 - L_2) \\ &<\; L_1 - \tfrac{1}{4}\,(L_1 - L_2) \;\leqslant\; u_k\,; \end{aligned}$$

en résumé, $u_k > v_k$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant N$. La limite L_1 ne peut donc pas être strictement plus grande que la limite L_2 ; elle ne peut être que plus petite ou égale. $\square$

A.1.8 Lemme : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Si (u_n) converge et admet pour limite le nombre réel L, et si $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors (v_n) converge aussi et admet pour limite le même nombre réel L.*

Preuve : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, où L est un nombre réel, et que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors, en utilisant le premier point de la proposition A.1.6 :

$$\lim_{n\to\infty} v_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\big(u_n + (v_n - u_n)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) \;=\; L + 0 \;=\; L\,.$$

A.2 Propriétés des séries numériques

Rappelons que la série numérique associée à une suite de nombres réels (u_n) est la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Pour être bref, on parle fréquemment de série numérique de terme général u_n. Dire qu'une série numérique converge revient à dire que la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, où $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

A.2.1 Proposition : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Supposons qu'il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout nombre entier $n \geqslant N$.*

- *Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge aussi.*
- *Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge aussi.*

Un tel résultat est connu sous le nom de ***critère de comparaison*** *relatif aux séries numériques.*

Preuve : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout nombre entier $n \geqslant N$. Posons :

$$U_M = \sum_{n=0}^{M} u_n \qquad \text{et} \qquad V_M = \sum_{n=0}^{M} v_n \,.$$

$(U_M)_{M\in\mathbb{N}}$ et $(V_M)_{M\in\mathbb{N}}$ sont alors les suites des sommes partielles associées aux suites (u_n) et (v_n), respectivement. Écrivons, pour tout $M \geqslant N$:

$$U_M = \sum_{n=0}^{M} u_n = \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{n=N}^{M} u_n = \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{k=0}^{K} u_{N+k}$$

et :

$$V_M = \sum_{n=0}^{M} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{n=N}^{M} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \,,$$

où $k = n - N$ et $K = M - N$, et adoptons les notations suivantes :

$$\tilde{U}_K = \sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \qquad \text{et} \qquad \tilde{V}_K = \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \,.$$

Les ensembles $(\tilde{U}_K)_{K\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{V}_K)_{K\in\mathbb{N}}$ forment des suites de nombres réels.

- Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge ; autrement dit, supposons que la suite des sommes partielles $(V_M)_{M\in\mathbb{N}}$ converge. De :

$$V_M = \sum_{n=0}^{M} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{n=N}^{M} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \,,$$

il ressort :

$$\sum_{k=0}^{K} v_{N+k} = \sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{N-1} v_n \,,$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_{N+k} \;=\; \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \;=\; \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{M} v_n - \sum_{n=0}^{N-1} v_n \right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{N-1} v_n \,,$$

vu que $K \to \infty$ si et seulement si $M \to \infty$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} v_{N+k}$ ne peut alors que converger, vu qu'elle s'écrit comme la différence d'une série convergente et d'une somme contenant un nombre fini de termes ; notons L le nombre réel tel que :

$$L \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} v_{N+k} \;=\; \lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M-N} v_{N+k} \;=\; \lim_{K\to\infty} \tilde{V}_K \,.$$

Comparons à présent $\tilde{U}_K$ et $\tilde{V}_K$; l'hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, pour tout nombre entier $n \geqslant N$, implique, d'une part, que les suites $(\tilde{U}_K)$ et $(\tilde{V}_K)$ sont croissantes (vu que $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant N$), et d'autre part que, pour tout nombre entier $K \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \;\leqslant\; \tilde{U}_K \;\leqslant\; \tilde{V}_K \,.$$

Comme :

$$\lim_{K\to\infty} \tilde{V}_K \;=\; \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} v_{N+k} \;=\; L \,,$$

alors, pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{U}_K \;\leqslant\; \tilde{V}_K \;\leqslant\; \lim_{K\to\infty} V_K \;=\; L \,.$$

En résumé, $(\tilde{U}_K)$ est une suite croissante, telle que $\tilde{U}_K \leqslant L$ pour tout $K \in \mathbb{N}$. La proposition A.1.5 permet alors d'affirmer que $(\tilde{U}_K)$ converge ; ce qui revient à dire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k}$ converge. Enfin, le fait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{n=N}^{\infty} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k}$$

et que $\sum_{n=0}^{N-1} u_n$ soit une somme qui ne contient qu'un nombre fini de termes, permet de conclure que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

- Supposons à présent que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge ; autrement dit, supposons que la suite des sommes partielles $(U_M)_{M\in\mathbb{N}}$ diverge. De :

$$U_M \;=\; \sum_{n=0}^{M} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{n=N}^{M} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} u_n + \sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \,,$$

il ressort :

$$\sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \;=\; \sum_{n=0}^{M} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n \,,$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k} \;=\; \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \;=\; \lim_{M\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{M} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n \right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N-1} u_n \;;$$

vu que $K \to \infty$ si et seulement si $M \to \infty$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k}$ ne peut alors que diverger, vu qu'elle s'écrit comme la différence d'une série divergente et d'une somme contenant un nombre fini de termes. Revenons à présent aux propriétés de $\tilde{U}_K$ et $\tilde{V}_K$ obtenues au point précédent ; à savoir que $(\tilde{U}_K)$ et $(\tilde{V}_K)$ sont des suites croissantes, d'une part, et d'autre part que $0 \leqslant \tilde{U}_K \leqslant \tilde{V}_K$ pour tout $K \in \mathbb{N}$. Le fait que $(\tilde{U}_K)$ est une suite croissante implique, compte tenu du fait qu'elle diverge, que :

$$\lim_{K\to\infty} \tilde{U}_K \;=\; \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} u_{N+k} \;=\; \infty \,.$$

Ce résultat, combiné au fait que $\tilde{V}_K \geqslant \tilde{U}_K$ pour tout $K \in \mathbb{N}$, permet alors d'affirmer que $(\tilde{V}_K)$ diverge ; ce qui revient à dire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} v_{N+k}$ diverge. Enfin, le fait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{n=N}^{\infty} v_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{k=0}^{\infty} v_{N+k}$$

et que $\sum_{n=0}^{N-1} v_n$ soit une somme qui ne contient qu'un nombre fini de termes, permet de conclure que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge. □

A.2.2 Proposition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.*

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. Posons $w_n = u_n + |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $0 \leqslant w_n \leqslant 2\,|u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge revient à dire que la suite des sommes partielles $(S_M)_{M\in\mathbb{N}}$ converge, où :

$$S_M \;=\; \sum_{n=0}^{M} |u_n| \,.$$

En conséquence, la suite des sommes partielles $(V_M)_{M\in\mathbb{N}}$, de terme général :

$$V_M \;=\; \sum_{n=0}^{M} 2\,|u_n| \;=\; 2 \sum_{n=0}^{M} |u_n| \,,$$

converge (*cf.* premier point de la proposition A.1.6) ; autrement dit, la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2\,|u_n|$ converge ; notons L le nombre réel tel que $L = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,|u_n|$. En outre, le fait que $|u_n| \geqslant 0$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique que (V_M) est une suite croissante. Soit à présent la suite des sommes partielles $(W_M)_{M\in\mathbb{N}}$, de terme général :

$$W_M = \sum_{n=0}^{M} w_n \,.$$

En vertu des propriétés de (V_M), pour tout $M \in \mathbb{N}$:

$$W_M = \sum_{n=0}^{M} w_n < \sum_{n=0}^{M} 2\,|u_n| < \sum_{n=0}^{\infty} 2\,|u_n| = L \,.$$

En outre, le fait que $w_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique que (W_M) est une suite croissante. Par conséquent, (W_M) converge (*cf.* proposition A.1.5) ; autrement dit, la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ converge. Enfin, de l'égalité $u_n = w_n - |u_n|$, il ressort :

$$\sum_{n=0}^{M} u_n = \sum_{n=0}^{M} \big(w_n - |u_n|\big) = \sum_{n=0}^{M} w_n - \sum_{n=0}^{M} |u_n| \;;$$

et vu que les suites des sommes partielles (S_M) et (W_M) convergent, alors nécessairement la suite de sommes partielles $\big(\sum_{n=0}^{M} u_n\big)_{M\in\mathbb{N}}$ converge (*cf.* premier point de la proposition A.1.6) ; autrement dit, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. □

A.2.3 Remarque : Si la proposition précédente s'avère utile pour achever la preuve de certains critères de convergence relatifs aux séries numériques (les critères de d'Alembert et de la racine, notamment), elle ne permet toutefois pas de traiter la convergence de n'importe quelle série numérique. Typiquement, elle se montre inefficace dans le cas de la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$. D'autres outils sont nécessaires pour prouver la convergence de cette série.

A.2.4 Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels. La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, associée à la suite (u_n), est dite *alternée* si les signes des termes de la somme s'alternent, *i.e.* si $u_n\, u_{n+1} \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A.2.5 Remarque : De la définition précédente découle immédiatement le fait que toute série alternée peut s'écrire sous la forme :

$$\pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, v_n \,,$$

où $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A.2.6 Proposition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que :*

- $u_n\, u_{n+1} \leqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. Un tel résultat est connu sous le nom de ***critère des séries alternées****.*

Preuve : Soit (u_n) une suite de nombres réels qui satisfait les hypothèses de la proposition. Selon les propos tenus dans la remarque précédente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, v_n\,, \qquad \text{avec } v_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,;$$

présentement, $v_n = |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et en tenant compte des hypothèses :

- $v_n \geqslant v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Prouvons la proposition dans le cas où le signe devant la somme est positif (l'autre cas, où le signe est négatif, se traitant de façon analogue). Soit $(U_M)_{M\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, où :

$$U_M \;=\; \sum_{n=0}^{M} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{M} (-1)^n\, v_n \;=\; \sum_{n=0}^{M} (-1)^n\, |u_n|\,.$$

Écrivons les premiers éléments de la suite :

$$\begin{aligned}
U_0 &= \sum_{n=0}^{0} (-1)^n\, |u_n| \;=\; |u_0|\,,\\
U_1 &= \sum_{n=0}^{1} (-1)^n\, |u_n| \;=\; |u_0| - |u_1|\,,\\
U_2 &= \sum_{n=0}^{2} (-1)^n\, |u_n| \;=\; |u_0| - |u_1| + |u_2|\,,\\
U_3 &= \sum_{n=0}^{3} (-1)^n\, |u_n| \;=\; |u_0| - |u_1| + |u_2| - |u_3|\,,\\
U_4 &= \sum_{n=0}^{4} (-1)^n\, |u_n| \;=\; |u_0| - |u_1| + |u_2| - |u_3| + |u_4|\,,\\
\vdots \;\; &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Le fait que $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ permet alors d'écrire :

$$0 \leqslant U_1 \leqslant U_3 \leqslant \ldots \leqslant U_4 \leqslant U_2 \leqslant U_0 \,,$$

et plus généralement :

$$0 \leqslant U_{2k+1} \leqslant U_{2k} \leqslant U_0 \,,$$

avec :

$$U_{2k+1} \leqslant U_{2(k+1)+1} \qquad \text{et} \qquad U_{2k} \geqslant U_{2(k+1)} \,.$$

Les ensembles $(U_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ peuvent être vus comme des suites de nombres réels. Vu les inégalités obtenues ci-dessus, (U_{2k}) est une suite décroissante, telle que $U_{2k} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; et (U_{2k+1}) est une suite croissante, telle que $U_{2k+1} \leqslant U_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. (U_{2k}) et (U_{2k+1}) convergent donc (*cf.* proposition A.1.5). En outre :

$$\lim_{k\to\infty} (U_{2k} - U_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} |u_{2k+1}| = 0 \,,$$

vu que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Le lemme A.1.8 permet alors de conclure que (U_{2k}) et (U_{2k+1}) admettent pour limite, lorsque k tend vers l'infini, le même nombre réel L. En conséquence, la suite des sommes partielles (U_M) admet pour limite, lorsque M tend vers l'infini, le nombre réel L. La suite des sommes partielles (U_M) converge donc ; ce qui revient à dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. $\square$

A.2.7 Exemple : La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge ; en effet, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ satisfait toutes les hypothèses de la proposition précédente. Le fait que la somme commence avec $n = 1$ et non $n = 0$ n'a aucune influence sur la conclusion.

Annexe B

Théorèmes relatifs aux fonctions continues

Le concept de *limite* d'une fonction peut être défini non seulement avec les nombres réels strictement positifs ε et δ, comme cela a été fait dans la section 2.6 du chapitre 2, mais également en faisant appel aux suites de nombres. Si la définition basée sur les suites vaut la peine d'être introduite, c'est parce qu'elle a le mérite de rendre plus abordables les preuves de certains théorèmes relatifs aux fonctions continues (*cf.* section 2.10 du chapitre 2). Montrer l'équivalence des deux définitions de limite requiert un certain travail ; cela étant, l'effort investi est largement récompensé par l'obtention de raisonnements concrets, clairs et simples.

B.1 Limite d'une fonction réelle

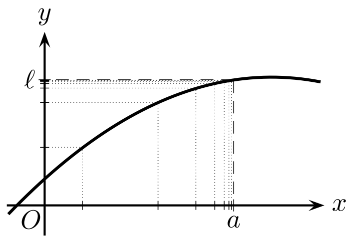
B.1.1 Définition : Soient a un nombre réel et $f\colon D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie dans un voisinage de a (*i.e.* dans un sous-ensemble de D contenant un intervalle ouvert de la forme $]a-\gamma\,;\,a+\gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif), sauf éventuellement en a. On dit que f admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$, si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations :

$$0 < |x-a| \leqslant \delta\,,$$

où $x \in D$, impliquent :

$$\bigl|f(x) - \ell\bigr| \leqslant \varepsilon\,.$$

B.1.2 Définition : Soient a un nombre réel et $f\colon D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie dans un voisinage de a (*i.e.* dans un sous-ensemble de D contenant un intervalle ouvert de la forme $]a-\gamma\,;\,a+\gamma[$, où γ est un nombre réel strictement positif), sauf éventuellement en a. On dit que f admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$, si pour toute suite de nombres réels (u_n) qui converge vers a et telle que $u_n \in D$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite de nombres $\big(f(u_n)\big)$, image par f de (u_n), converge vers ℓ.



B.1.3 Proposition : *Les définitions B.1.1 et B.1.2 sont équivalentes.*

Preuve : Soient a un nombre réel et $f : D \to E$ une fonction réelle, définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a.

Montrons d'abord que la définition B.1.1 implique la définition B.1.2 ; autrement dit, montrons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, implique que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$, quelle que soit la suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans D et qui converge vers a. Par hypothèse, la fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers le nombre a. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un nombre réel $\delta > 0$ tel que :

$$0 < |x-a| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit à présent une suite de nombres réels (u_n) telle que $u_n \in D$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, et telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Pour tout nombre réel $\eta > 0$, il existe alors $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant M$, on a $|u_n - a| \leqslant \eta$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - a| \leqslant \delta$. Par conséquent :

$$n \geqslant N \qquad \Rightarrow \qquad |u_n-a| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(u_n)-\ell\big| \leqslant \varepsilon\,,$$

vu que $u_n \in D$ quel que soit $n \geqslant N$. La suite (u_n) engendre donc une suite $\big(f(u_n)\big)$, dont les éléments sont dans E et qui converge vers ℓ. La définition B.1.1 implique donc la définition B.1.2, vu que la conclusion obtenue est valable pour toute suite dont les éléments sont dans D et qui converge vers a.

Réciproquement, montrons que la définition B.1.2 implique la définition B.1.1 ; autrement dit, montrons que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, quelle que soit la suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans D et qui converge vers a, implique $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Prouver cette implication revient à prouver que $\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell$ implique $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \ell$ pour au moins une suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans D et qui converge vers a. Or, dire que ℓ n'est pas la limite de f lorsque x tend vers a revient à dire qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ pour lequel, quel que soit le nombre réel $\delta > 0$, il existe (au moins un) $x \in D$ tel que :

$$0 < |x-a| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(x)-\ell\big| > \varepsilon\,;$$

en particulier, dans le cas où $\delta = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (au moins un) $x \in D$ tel que :

$$0 < |x-a| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \big|f(x)-\ell\big| > \varepsilon\,.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n l'élément (ou l'un des éléments) pour lequel l'implication ci-dessus est vérifiée. Alors l'ensemble $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme manifestement une suite de nombres qui converge vers a (vu que $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞) et telle que $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ (vu que $|f(u_n) - \ell)| > \varepsilon$, pour un certain $\varepsilon > 0$). Cette conclusion permet, selon ce qui a été évoqué plus haut, d'affirmer que la définition B.1.2 implique la définition B.1.1. $\square$

B.1.4 Proposition : *Soient a un nombre réel et $f : D \to E$ une fonction réelle, définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. Si f admet pour limites les deux nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 lorsque x tend vers a, alors nécessairement $\ell_1 = \ell_2$.*

Preuve : Soient a un nombre réel et $f : D \to E$ une fonction réelle, définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. Montrons que, si f admet pour limites les deux nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 lorsque x tend vers a, alors nécessairement $\ell_1 = \ell_2$. À cet effet, considérons une suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans D et qui converge vers a. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, alors, selon la proposition B.1.3, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell_1$; ce qui revient à dire que la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers ℓ_1. Aussi, comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_2$, alors, toujours selon la proposition B.1.3, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell_2$; ce qui revient à dire que la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge aussi vers ℓ_2. Or, toute suite de nombres réels, si elle converge, converge vers une seule et même limite (*cf.* lemme A.1.1, section A.1 de l'annexe A). Par conséquent, $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

B.1.5 Proposition : *Soient a un nombre réel ; soient aussi $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, ainsi que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux nombres réels. Alors :*

- $\lim\limits_{x\to a} \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big) = \alpha\, \ell_1 + \beta\, \ell_2$ *, où α et β sont deux nombres réels ;*
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\, g(x)\big) = \ell_1\, \ell_2$ *;*
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *, pour autant que $\ell_2 \neq 0$;*

Si, en outre, f est une fonction constante dans $V \setminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, i.e. si $f(x) = c$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, où c est un nombre réel fixe, alors $\ell_1 = c$:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c\,.$

Revenons aux hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g : D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de ℓ_1, sauf éventuellement en ℓ_1. Supposons aussi que $\lim_{x\to\ell_1} g(x) = \ell_3$, où ℓ_3 est un nombre réel. Faisons, en outre, l'hypothèse supplémentaire suivante au sujet de f : $f(x) \neq \ell_1$ quel que soit $x \in V \setminus \{a\}$, où V est un voisinage de a. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a} \big(g \circ f\big)(x) = \lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \ell_3\,.$

Revenons aux hypothèses sur les fonctions $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ formulées initialement.

- *Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; \ell_1 \;\leqslant\; \ell_2 \;=\; \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Reprenons les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$; et soit $h\colon D_3 \to \mathbb{R}$ une troisième fonction réelle ; supposons que f, g et h sont toutes les trois définies dans un voisinage d'un nombre réel b, sauf éventuellement en b.

- *Si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \tilde{V} \smallsetminus \{b\}$, où $\tilde{V}$ est un voisinage de b, et si $\lim_{x\to b} f(x) = \ell = \lim_{x\to b} g(x)$, où ℓ est un nombre réel, alors :*

$$\lim_{x\to b} h(x) = \ell\ ;$$

  ce résultat est connu sous le nom de ***théorème des deux gendarmes****.*

Preuve : Soient a un nombre réel, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, ainsi que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux nombres réels. Considérons alors une suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans $D_1 \cap D_2$ et qui tend vers a lorsque n tend vers l'infini. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, alors, selon la proposition B.1.3, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ_1 lorsque n tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell_1$. Aussi, comme $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, alors, selon la proposition B.1.3, la suite $\big(g(u_n)\big)$ tend vers ℓ_2 lorsque n tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} g(u_n) = \ell_2$.

- Montrons que $\lim_{x\to a} \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big) = \alpha\,\ell_1 + \beta\,\ell_2$, où α et β sont des nombres réels quelconques. À cet effet, raisonnons comme suit. Selon le premier point de la proposition A.1.6 de l'annexe A, la suite $\big(\alpha\, f(u_n) + \beta\, g(u_n)\big)$ tend vers $\alpha\,\ell_1 + \beta\,\ell_2$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \big(\alpha\, f(u_n) + \beta\, g(u_n)\big) \;=\; \alpha\,\ell_1 + \beta\,\ell_2\,.$$

  Par conséquent, selon la proposition B.1.3, la fonction $\alpha\, f + \beta\, g$ admet pour limite le nombre réel $\alpha\,\ell_1 + \beta\,\ell_2$ lorsque la variable x tend vers a :

$$\lim_{x\to a} \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big) \;=\; \alpha\,\ell_1 + \beta\,\ell_2\,.$$

- Montrons que $\lim_{x\to a} \big(f(x)\, g(x)\big) = \ell_1\,\ell_2$. À cet effet, raisonnons comme suit. Selon le deuxième point de la proposition A.1.6 de l'annexe A, la suite $\big(f(u_n)\, g(u_n)\big)$ tend vers $\ell_1\,\ell_2$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(u_n)\, g(u_n)\big) \;=\; \ell_1\,\ell_2\,.$$

  Par conséquent, selon la proposition B.1.3, la fonction fg admet pour limite le nombre réel $\ell_1\,\ell_2$ lorsque la variable x tend vers a :

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\, g(x)\big) \;=\; \ell_1\,\ell_2\,.$$

- Montrons que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, pour autant que $\ell_2 \neq 0$. À cet effet, supposons que la suite (u_n) satisfait $g(u_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, selon le troisième point de la proposition A.1.6 de l'annexe A, la suite $\left(\frac{f(u_n)}{g(u_n)}\right)$ tend vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(u_n)}{g(u_n)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

Par conséquent, selon la proposition B.1.3, la fonction $\frac{f}{g}$ admet pour limite le nombre réel $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ lorsque la variable x tend vers a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

- Montrons que si f est une fonction constante dans $V \setminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, *i.e.* si $f(x) = c$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, où c est un nombre réel fixe, alors $\ell_1 = c$. À cet effet, raisonnons comme suit. Selon la proposition A.1.3 de l'annexe A, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers c lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(u_0) = c\,.$$

Par conséquent, selon la proposition B.1.3, la fonction f admet pour limite le nombre réel c lorsque la variable x tend vers a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = c\,.$$

La limite d'une fonction (si elle existe) étant unique, $\ell_1 = c$.

Revenons aux hypothèses initialement faites sur la fonction $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de ℓ_1, sauf éventuellement en ℓ_1. Supposons aussi que $\lim_{x \to \ell_1} g(x) = \ell_3$, où ℓ_3 est un nombre réel. Faisons, en outre, l'hypothèse supplémentaire suivante au sujet de f : $f(x) \neq \ell_1$ quel que soit $x \in V \setminus \{a\}$, où V est un voisinage de a. Alors :

- Montrons que $\lim_{x \to a} \big(g \circ f\big)(x) = \lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = \ell_3$. À cet effet, commençons par remarquer que le domaine de départ de la fonction $g \circ f$ est l'ensemble de tous les $x \in D_1$ tels que $f(x) \in D_2$. Dans le raisonnement qui suit, il s'agira d'en tenir compte.

  Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel quelconque (strictement positif) et (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers a, telle que $u_n \in D_1$ et $f(u_n) \in D_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$, alors, $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \ell_1$ (*cf.* proposition B.1.3). Autrement dit, pour tout nombre réel $\varepsilon_1 > 0$, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|f(u_n) - \ell_1| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_1$. En outre, le fait que $f(x) \neq \ell_1$, quel que soit $x \in [a - \rho\,;\, a[\cup]a\,;\, a + \rho]$, implique l'existence d'un nombre $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(u_n) \neq \ell_1$ pour tout $n \geqslant M_0$. Enfin, comme $\lim_{x \to \ell_1} g(x) = \ell_3$, alors, pour toute suite (v_n) dont les éléments sont dans D_2 et qui converge vers ℓ_1,

$\lim_{n\to\infty} g(v_n) = \ell_3$ (*cf.* proposition B.1.3). Autrement dit, pour tout nombre réel $\varepsilon_2 > 0$, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|g(v_n) - \ell_3| \leqslant \varepsilon_2$ pour tout nombre entier $n \geqslant M_2$. Ainsi, dans le cas où (v_n) est la suite $\big(f(u_n)\big)$, image par f de (u_n), où $\varepsilon_2 = \varepsilon$ et où $N = \max\{M_0;\, M_2\}$ (*i.e.* le plus grand des deux nombres M_0 et M_2) :

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant N \qquad \Rightarrow \qquad f(u_n) \neq \ell_1 \quad \text{et} \quad \big|g\big(f(u_n)\big) - \ell_3\big| \leqslant \varepsilon\,.$$

Cette implication établit que :

$$\lim_{n\to\infty} g\big(f(u_n)\big) \;=\; \ell_3\,.$$

Finalement, selon la proposition B.1.3 :

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) \;=\; \ell_3\,.$$

Revenons aux hypothèses sur les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ formulées initialement.

- Montrons que si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in V \smallsetminus \{a\}$, où V est un voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \leqslant \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x)$. À cet effet, considérons une suite de nombres réels (u_n), dont les éléments sont dans $D_1 \cap D_2$ et qui tend vers a lorsque n tend vers l'infini. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, alors, selon la proposition B.1.3, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell_1$. Aussi, comme $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$, alors, selon la proposition B.1.3, $\lim_{n\to\infty} g(u_n) = \ell_2$. En outre, par hypothèse, $f(u_n) \leqslant g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, selon la proposition A.1.7, $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Reprenons les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$; et soit $h : D_3 \to \mathbb{R}$ une troisième fonction réelle ; supposons que f, g et h sont toutes les trois définies dans un voisinage d'un nombre réel b, sauf éventuellement en b.

- Montrons que si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \tilde{V} \smallsetminus \{b\}$, où $\tilde{V}$ est un voisinage de b, et si $\lim_{x\to b} f(x) = \ell = \lim_{x\to b} g(x)$, où ℓ est un nombre réel, alors $\lim_{x\to b} h(x) = \ell$. À cet effet, considérons une suite de nombres réels (u_n) qui tend vers b lorsque n tend vers l'infini, et dont les éléments sont dans $\tilde{V}$. Comme $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$, alors, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$ (*cf.* proposition B.1.3). Aussi, comme $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$, alors la suite $\big(g(u_n)\big)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} g(u_n) = \ell$ (*cf.* proposition B.1.3). Ainsi, selon le dernier point de la proposition A.1.6, la suite $\big(h(u_n)\big)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini :

  $$\lim_{n\to\infty} h(u_n) \;=\; \ell\,.$$

  Par conséquent, selon la proposition B.1.3, la fonction h admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque la variable x tend vers b :

  $$\lim_{x\to b} h(x) \;=\; \ell\,. \qquad \square$$

B.2 Propriétés des fonctions continues

B.2.1 Définition : Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D$. On dit que f est *continue* en $x_0 \in D$ si la limite de f lorsque x tend vers x_0 existe et si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; f(x_0)\ ;$$

autrement dit, f est continue en $x_0 \in D$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la relation :

$$|x - x_0| \leqslant \delta\,, \quad \text{où } x \in D\,, \qquad \text{implique la relation :} \qquad \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leqslant \varepsilon\,.$$

B.2.2 Propriétés : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, définies toutes les deux dans un voisinage d'un nombre réel x_0, et continues en x_0. Alors :

- $\alpha\, f + \beta\, g$ est continue en x_0, quels que soient les nombres réels α et β ;
- $f\, g$ est continue en x_0 ;
- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0, pour autant que $g(x_0) \neq 0$.

Gardons les hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g : D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et continue en $f(x_0)$. Alors :

- $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve : Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Supposons, en outre, que f et g sont définies dans un voisinage d'un nombre réel $x_0 \in D_1 \cap D_2$ et qu'elles sont continues en x_0 ; autrement dit, supposons que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; f(x_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \;=\; g(x_0)\,.$$

Alors :

- $\alpha\, f + \beta\, g$ est continue en x_0, quels que soient les nombres réels α et β ; en effet, selon la première des propriétés B.1.5, et du fait de la continuité de f et g en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \bigl(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\bigr) \;=\; \bigl(\alpha\, f(x_0) + \beta\, g(x_0)\bigr)\ ;$$

- $f\, g$ est continue en x_0 ; en effet, selon la deuxième des propriétés B.1.5, et du fait de la continuité de f et g en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \bigl(f(x)\, g(x)\bigr) \;=\; f(x_0)\, g(x_0)\ ;$$

- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0, pour autant que $g(x_0) \neq 0$; en effet, selon la troisième des propriétés B.1.5, et du fait de la continuité de f et g en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\,.$$

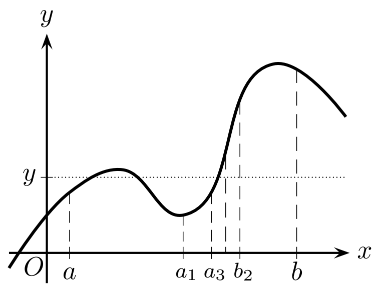
Gardons les hypothèses sur $f : D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g : D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage de $f(x_0)$, et continue en $f(x_0)$. Alors :

- $g \circ f$ est continue en x_0 ; en effet :

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) \;=\; \lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) \;=\; g\big(f(x_0)\big)\,.$$

  Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la preuve de la cinquième des propriétés B.1.5 et de remarquer qu'il n'est pas nécessaire ici de faire l'hypothèse consistant à dire que $f(x) \neq f(x_0)$ pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$, où V est un voisinage de x_0 ; la raison en est que f est définie et continue en x_0. □

B.2.3 Théorème : *Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, f prend, dans $[a;\, b]$, au moins une fois les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, ainsi que toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Ce résultat est connu sous le nom de* ***théorème des valeurs intermédiaires****.*



Preuve : Soit $f : D \to E$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que f prend, dans $[a;\, b]$, au moins une fois les valeurs $f(a)$, $f(b)$, ainsi que toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ revient à prouver que, pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel $c \in [a;\, b]$ pour lequel $f(c) = y$.

Démontrons cette dernière assertion ; pour cela, supposons que $f(a) < f(b)$ (le cas où $f(a) > f(b)$ se prouvant de manière similaire, le cas $f(a) = f(b)$ n'ayant pas besoin d'une preuve car évident). Considérons alors un élément $y \in [f(a)\,;\, f(b)]$ et empruntons la procédure suivante.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis on partage l'intervalle $[a_0;\, b_0]$ en deux intervalles d'égales longueurs, $[a_0;\, c_1]$ et $[c_1;\, b_0]$, où $c_1 = \frac{1}{2}\,(a_0 + b_0)$ est le point (sur l'axe x) tel que $|b_0 - c_1| = |c_1 - a_0|$.
  - ◇ Si $f(c_1) < y$, on pose $a_1 = c_1$ et $b_1 = b_0$;
  - ◇ si $f(c_1) \geqslant y$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_1$.

  Dans les deux cas, $a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 = b$ et $f(a_1) \leqslant y \leqslant f(b_1)$.
- On partage l'intervalle $[a_1;\, b_1]$ en deux intervalles d'égales longueurs, $[a_1;\, c_2]$ et $[c_2;\, b_1]$, où $c_2 = \frac{1}{2}\,(a_1 + b_1)$ est le point (sur l'axe x) tel que $|b_1 - c_2| = |c_2 - a_1|$.
  - ◇ Si $f(c_2) < y$, on pose $a_2 = c_2$ et $b_2 = b_1$;
  - ◇ si $f(c_2) \geqslant y$, on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = c_2$.

  Dans les deux cas, $a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0 = b$ et $f(a_2) \leqslant y \leqslant f(b_2)$.
- On partage l'intervalle $[a_2;\, b_2]$ en deux intervalles d'égales longueurs...

En continuant ainsi de suite, on obtient deux suites de nombres réels, (a_n) et (b_n) ; de par leur construction, ces suites satisfont les conditions suivantes :

- ◇ $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*i.e.* (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante),
- ◇ $a \leqslant a_n \leqslant b$ et $a \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- ◇ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (du fait que $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b-a), \ldots, b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$).

Selon la proposition A.1.5 et le lemme A.1.8 (*cf.* section A.1 de l'annexe A), les suites (a_n) et (b_n) convergent et admettent pour limite un seul et même nombre réel ; ce nombre réel, que l'on note c, est nécessairement dans l'intervalle $[a;\, b]$, vu que $a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, toujours par construction de (a_n) et (b_n), $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence, et grâce à la propriété de continuité de la fonction f dans $[a;\, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant y \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c) \leqslant y \leqslant f(c)\,,$$

d'où :

$$y = f(c)\,.$$

La fonction f atteint donc au moins une fois la valeur $y \in [f(a)\,;\, f(b)]$ dans l'intervalle $[a;\, b]$. $\square$

B.2.4 Théorème : *Soit $f : D \to E$ une fonction réelle (où $D \subset \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$), définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, dans $[a;\, b]$, f atteint une valeur minimale m ainsi qu'une valeur maximale M (cf. définition 2.4.12) ; autrement dit, il existe $x_m \in [a;\, b]$ et $x_M \in [a;\, b]$ tels que $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, où m et M sont deux nombres réels satisfaisant $m = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = M$ pour tout $x \in [a;\, b]$. En outre, f prend au moins une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[m;\, M]$. Un tel résultat est connu sous le nom de* ***théorème du minimum et du maximum****, ou sous le nom de* ***théorème des valeurs extrêmes****.*

Preuve : Soit $f : D \to E$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Montrons alors que, dans $[a;\, b]$, f atteint une valeur minimale m, une valeur maximale M, et prend au moins une fois toutes les valeurs de l'intervalle $[m;\, M]$. À cet effet, commençons par montrer qu'il existe deux nombres réels c et d tels que $c \leqslant f(x) \leqslant d$ pour tout $x \in [a;\, b]$.

Supposons (par l'absurde) qu'il n'existe aucun nombre réel d tel que $f(x) \leqslant d$ quel que soit $x \in [a;\, b]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un élément $a_n \in [a;\, b]$ pour lequel $f(a_n) \geqslant f(a) + n$. Et vu que f est continue dans $[a;\, b]$, et donc en particulier dans $[a;\, a_n]$, il existe, selon le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au moins un élément $\tilde{a}_n \in [a;\, a_n] \subset [a;\, b]$ pour lequel $f(\tilde{a}_n) = f(a) + n$.

- $n = 0$: s'il existe plusieurs éléments $\tilde{a}_0$ pour lesquels $f(\tilde{a}_0) = f(a) + 0$, un seul est retenu : l'élément u_0 tel que $u_0 = a$.

- $n = 1$: s'il existe plusieurs éléments $\tilde{a}_1$ pour lesquels $f(\tilde{a}_1) = f(a) + 1$, tous ces éléments ont un point commun : ils ne sont pas égaux à u_0 (s'ils l'étaient, f ne satisferait pas la définition d'une fonction) ; ces éléments ne peuvent alors qu'être strictement plus grands que u_0, vu que u_0 est le plus petit élément de l'intervalle $[a;\, b]$. Parmi ces éléments (à supposer qu'il y en a plusieurs), un seul est retenu : c'est l'élément u_1, qui est le plus petit nombre réel strictement plus grand que u_0, pour lequel $f(u_1) = f(a) + 1$ [I].
- $n = 2$: s'il existe plusieurs éléments $\tilde{a}_2$ pour lesquels $f(\tilde{a}_2) = f(a) + 2$, ces éléments ne peuvent être que strictement plus grands que u_1. En effet, si ce n'était pas le cas, *i.e.* s'il y avait un élément $\tilde{a}_2$ compris strictement entre u_0 et u_1 ($u_0 < \tilde{a}_2 < u_1$), alors il devrait exister un élément $\bar{a}_1$ compris strictement entre u_0 et $\tilde{a}_2$ ($u_0 < \bar{a}_1 < \tilde{a}_2$), satisfaisant $f(\bar{a}_1) = f(a) + 1$ (vu que, selon le théorème des valeurs intermédiaires, f prendrait, dans l'intervalle $[u_0\,;\, \tilde{a}_2]$, toutes les valeurs de l'intervalle $[f(u_0)\,;\, f(\tilde{a}_2)]$, *i.e.* toutes les valeurs de l'intervalle $[f(a)\,;\, f(a)+2]$, en particulier la valeur $f(a)+1$) ; ce qui serait en contradiction avec le fait que u_1 est le plus petit nombre strictement plus grand que u_0 pour lequel $f(u_1) = f(a) + 1$. Parmi les éléments $\tilde{a}_2$ pour lesquels $f(\tilde{a}_2) + 2$ (à supposer qu'il y en a plusieurs), un seul est retenu : c'est l'élément u_2, qui est le plus petit nombre réel strictement plus grand que u_1 [II].
- $n = 3$: ...

En raisonnant ainsi de suite, on parvient à exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'égalité $f(u_n) = f(a)+n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui est strictement croissante (*i.e.* telle que $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et dont les éléments sont tous dans l'intervalle $[a;\, b]$ (*i.e.* $a \leqslant u_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La proposition A.1.5 et le lemme A.1.8 (*cf.* section A.1 de l'annexe A) permettent alors d'affirmer que la suite (u_n) converge ; notons u sa limite. Ainsi, en résumé :

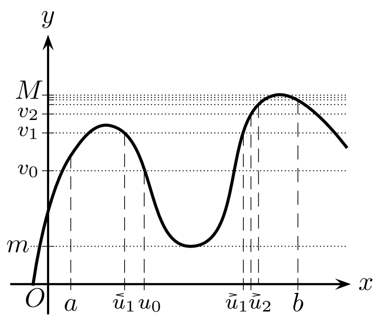
$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(a) + n\big) = \infty\,,$$

ce qui est contradictoire avec la propriété de continuité de f dans $[a;\, b]$. En conséquence, il existe un nombre réel d tel que $f(x) \leqslant d$ pour tout $x \in [a;\, b]$. Un raisonnement similaire à celui qui vient d'être mené permet de conclure qu'il existe aussi un nombre réel c tel que $c \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$.

Le fait qu'il existe un nombre réel c tel que $c \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, ainsi qu'un nombre réel d tel que $f(x) \leqslant d$ pour tout $x \in [a;\, b]$, permet de dire, plus généralement, qu'il existe des nombres réels qui sont tous plus petits ou égaux à $f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, ainsi que des nombres réels qui sont tous plus grands ou égaux à $f(x)$

I. L'élément u_1 ne peut pas être infiniment proche de u_0 ; dire qu'il pourrait l'être reviendrait à dire que f n'est pas continue en u_0 (vu que $f(u_0) = f(a)$ et $f(u_1) = f(a) + 1$). Aussi, u_1 ne peut pas être infiniment proche d'un élément $\ell \neq u_0$ (sur l'axe x) tel que $f(\ell) \neq f(a) + 1$; dire qu'il pourrait l'être reviendrait à dire que f n'est pas continue en ℓ (vu que $f(\ell) \neq f(a) + 1 = f(u_1)$. De tels propos montrent que le concept de *plus proche élément de* u_0 *dont l'image par* f *vaut* $f(a) + 1$ est bien défini.

II. Un tel élément est bien défini ; pour s'en convaincre, il suffit de raisonner comme cela a été fait précédemment avec l'élément u_1.



pour tout $x \in [a;\, b]$. Parmi les nombres réels plus petits ou égaux à $f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, il en existe un, noté m, qui est le plus grand possible ; et parmi les nombres réels plus grands ou égaux à $f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, il en existe un, noté M, qui est le plus petit possible. Par définition, $m \leqslant M$. Si $m = M$, la conclusion du théorème est immédiate ; en effet, si $m = M$, alors nécessairement $f(a) = m = M = f(b)$, ce qui montre qu'il existe au moins un élément dans $[a;\, b]$ où f atteint son minimum m (respectivement son maximum M). Supposons à présent que $m < M$; montrons alors qu'il existe au moins un élément $x_m \in [a;\, b]$ tel que $m = f(x_m)$, ainsi qu'au moins un élément $x_M \in [a;\, b]$ tel que $M = f(x_M)$.

- Au nombre réel $v_0 = \frac{1}{2}(m + M)$ peut être assigné au moins un nombre réel dans $[a;\, b]$ tel que f évaluée en ce nombre est égale à v_0. S'il existe plusieurs de ces nombres, on en choisit un et on le note u_0.
- Au nombre réel $v_1 = \frac{1}{2}(v_0 + M)$ peut être assigné au moins un nombre réel dans $[a;\, b]$ tel que f évaluée en ce nombre est égale à v_1. S'il existe plusieurs de ces nombres, ceux-ci ne peuvent qu'être strictement plus petits ou strictement plus grands que u_0. Parmi ces nombres, deux sont retenus :
  - ◇ l'élément $\overleftarrow{u}_1$, qui, s'il existe, est le plus grand nombre réel strictement plus petit que u_0, pour lequel $f(\overleftarrow{u}_1) = v_1$;
  - ◇ l'élément $\overrightarrow{u}_1$, qui, s'il existe, est le plus petit nombre réel strictement plus grand que u_0, pour lequel $f(\overrightarrow{u}_1) = v_1$.

  Noter que $\overleftarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_1$ n'existent pas nécessairement tous les deux, mais l'un d'eux, au moins, existe[III].
- Au nombre réel $v_2 = \frac{1}{2}(v_1 + M)$ peut être assigné au moins un nombre réel dans $[a;\, b]$ tel que f évaluée en ce nombre est égale à v_2. S'il existe plusieurs de ces nombres, ceux-ci ne peuvent qu'être strictement plus petits que $\overleftarrow{u}_1$ ou strictement plus grands $\overrightarrow{u}_1$. En effet, s'il y avait, par exemple, un élément $\tilde{u}_2$ compris strictement entre $\overleftarrow{u}_1$ et u_0 ($\overleftarrow{u}_1 < \tilde{u}_2 < u_0$), alors il devrait exister un élément $\bar{u}_1$ compris strictement entre $\tilde{u}_2$ et u_0 ($\tilde{u}_2 < \bar{u}_1 < u_0$), satisfaisant $f(\bar{u}_1) = v_1$ (vu que, selon le théorème des valeurs intermédiaires, f prendrait, dans l'intervalle $[\tilde{u}_2\,;\, u_0]$, toutes les valeurs de l'intervalle $[f(u_0)\,;\, f(\tilde{u}_2)]$, *i.e.* toutes les valeurs de l'intervalle $[v_0\,;\, v_2]$, en particulier la valeur v_1) ; ce qui serait en contradiction avec le fait que $\overleftarrow{u}_1$ est le plus grand élément strictement plus petit que u_0 pour lequel $f(\overleftarrow{u}_1) = v_1$. Tout élément tel que f évaluée en cet élément est égale à v_2 est donc effectivement soit strictement plus petit que $\overleftarrow{u}_1$, soit strictement plus grand

---

III. L'élément $\overleftarrow{u}_1$, s'il existe, ne peut pas être infiniment proche de u_0 ; dire qu'il pourrait l'être reviendrait à dire que f n'est pas continue en u_0 (vu que $f(u_0) = v_0$ et $f(\overleftarrow{u}_1) = v_1$). Aussi, $\overleftarrow{u}_1$ ne peut pas être infiniment proche d'un élément $\ell \neq u_0$ (sur l'axe x) tel que $f(\ell) \neq v_1$; dire qu'il pourrait l'être reviendrait à dire que f n'est pas continue en ℓ (vu que $f(\ell) \neq v_1 = f(\overleftarrow{u}_1)$. Le même type de raisonnement s'applique à $\overrightarrow{u}_1$. De tels propos montrent que le concept de *plus proche élément de* u_0 *dont l'image par* f *vaut* v_1 est bien défini.

que $\overset{>}{u}_1$. Parmi ces éléments, deux sont retenus :
- ◇ l'élément $\overset{<}{u}_2$, qui, s'il existe, est le plus grand nombre réel strictement plus petit que $\overset{<}{u}_1$, pour lequel $f(\overset{<}{u}_2) = v_2$;
- ◇ l'élément $\overset{>}{u}_2$, qui, s'il existe, est le plus petit nombre réel strictement plus grand que $\overset{>}{u}_1$, pour lequel $f(\overset{>}{u}_2) = v_2$.

Noter que $\overset{<}{u}_2$ et $\overset{>}{u}_2$ n'existent pas nécessairement tous les deux, mais l'un d'eux au moins existe[IV]. Typiquement, si $\overset{<}{u}_1$ n'existe pas, $\overset{<}{u}_2$ n'existe pas non plus ; ou si $\overset{>}{u}_1$ n'existe pas, $\overset{>}{u}_2$ n'existe pas non plus.

- Au nombre réel $v_3 = \frac{1}{2}\,(v_2 + M)$ peut être assigné au moins un nombre réel dans $[a;\, b]$ tel que f évaluée en ce nombre est égale à v_3 ...

Remarquer que, pour chaque v_n, où $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un élément $u_n \in [a;\, b]$; si ce n'était pas le cas, cela impliquerait que f n'est pas continue dans $[a;\, b]$, et/ou m n'est pas le plus grand nombre réel tel que $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a;\, b]$, et/ou M n'est pas le plus petit nombre réel tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a;\, b]$. En continuant ainsi de suite le raisonnement précédent, on arrive à exhiber au moins une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant l'égalité $f(u_n) = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui est soit strictement croissante (*i.e.* telle que $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), soit strictement décroissante (*i.e.* telle que $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), et dont les éléments sont tous dans l'intervalle $[a;\, b]$ (*i.e.* $a \leqslant u_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La proposition A.1.5 et le lemme A.1.8 (*cf.* section A.1 de l'annexe A) permettent alors d'affirmer que la suite (u_n) converge ; notons x_M sa limite. Par ailleurs, comme :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{1}{2}\,(m+M)\,,\\
v_1 &= \frac{1}{2}\,(v_0+M) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,(m+M)+M\right) = \frac{1}{2^2}\,m + \left(1-\frac{1}{2^2}\right)M\,,\\
v_2 &= \frac{1}{2}\,(v_1+M) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}\,m + \left(1-\frac{1}{2^2}\right)M + M\right] = \frac{1}{2^3}\,m + \left(1-\frac{1}{2^3}\right)M\,,\\
\vdots\ &\ \vdots \qquad \vdots\\
v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\,m + \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)M\,,\\
\vdots\ &\ \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

alors $\lim_{n\to\infty} v_n = M$. Ainsi, en résumé :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x_M \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} v_n = M\,.$$

Le fait que f est continue dans $[a;\, b]$ permet alors de conclure qu'il existe un nombre réel $x_M \in [a;\, b]$ tel que $f(x) \leqslant f(x_M) = M$ pour tout $x \in [a;\, b]$; autrement dit, f atteint

IV. Un tel élément est bien défini ; pour s'en convaincre, il suffit de raisonner comme cela a été fait précédemment avec les éléments $\overset{<}{u}_1$ et $\overset{>}{u}_1$.

une valeur maximale (qui est M) dans $[a;\, b]$. Un raisonnement similaire dans le cas du nombre m mène à la conclusion qu'il existe aussi un nombre réel $x_m \in [a;\, b]$ tel que $f(x) \geqslant f(x_m) = m$ pour tout $x \in [a;\, b]$; autrement dit, f atteint une valeur minimale (qui est m) dans $[a;\, b]$.

Enfin, le fait que f prend, dans $[a;\, b]$, au moins une fois les valeurs m et M, ainsi que toutes les valeurs comprises entre m et M est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires : comme f est continue dans $[a;\, b]$, et vu que $x_m, x_M \in [a;\, b]$ (où x_m et x_M sont les éléments obtenus précédemment, tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$), alors f est continue dans l'intervalle fermé délimité par x_m et x_M ; d'où la conclusion. □

B.2.5 Proposition : *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Supposons que $J = f(I)$; autrement dit, supposons que J est l'ensemble image I_f de f. Alors :*

- *$f : I \to J$ est bijective ;*
- *l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;*
- *$f : I \to J$ admet une fonction réciproque ${}^r\!f : J \to I$ qui est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J.*

Preuve : Soit $f : I \to J$ une fonction continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle dans $\mathbb{R}$. Supposons que $J = f(I)$.

- Montrons que $f : I \to J$ est bijective ; autrement dit, montrons que $f : I \to J$ est à la fois injective et surjective.
  - ◇ Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$. Comme f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, alors nécessairement $f(x_1) \neq f(x_2)$. En effet, soit $x_1 < x_2$ et donc $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$), soit $x_2 < x_1$ et donc $f(x_2) < f(x_1)$ (respectivement $f(x_2) > f(x_1)$) ; dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$; ce qui prouve l'injectivité de $f : I \to J$.
  - ◇ La surjectivité de $f : I \to J$ est garantie par le fait que $J = f(I)$.
- Montrons que $J = f(I)$ est un intervalle. À cet effet, considérons deux éléments $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Le fait que $f : I \to J$ est bijective permet d'affirmer qu'il existe un unique élément $x_1 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et un unique élément $x_2 \in I$ tel que $y_2 = f(x_2)$; et comme f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, alors $x_1 < x_2$ (respectivement $x_1 > x_2$). En outre :
  - ◇ vu que $f : I \to J$ est bijective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, alors, à tout nombre réel x tel que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ (respectivement $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$) correspond un nombre réel $y = f(x)$ tel que $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$;
  - ◇ vu que f est continue dans I, et donc en particulier dans $[x_1\,;\, x_2]$ (respectivement dans $[x_2\,;\, x_1]$), alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in [y_1\,;\, y_2]$, il existe un élément $x \in [x_1\,;\, x_2]$ (respectivement

$x \in [x_2;\, x_1])$ tel que $y = f(x)$; cet élément x est unique, vu que $f\colon I \to J$ est bijective.

Les observations qui viennent d'être faites peuvent être synthétisées comme suit : $f([x_1\,;\,x_2]) = [y_1\,;\,y_2]$ (respectivement $f([x_2\,;\,x_1]) = [y_1\,;\,y_2]$) ; ce qui revient à dire que l'image par f d'un segment de droite (d'extrémités x_1 et x_2), sur l'axe x, est un segment de droite (d'extrémités y_1 et y_2), sur l'axe y (les axes x et y étant ceux du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy du plan euclidien $\mathbb{R}^2$). Le fait que ce résultat soit valable pour tous $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$ permet de conclure que l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle.

Montrons encore que l'intervalle J est ouvert. Pour cela, considérons un élément $y_0 \in J$ quelconque. Le fait que $f : I \to J$ est bijective permet d'affirmer qu'il existe un unique élément $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Aussi, I étant un intervalle ouvert, il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que $[x_0 - \gamma\,;\, x_0 + \gamma] \subset I$. Notons $x_1 = x_0 - \gamma$ et $x_2 = x_0 + \gamma$; notons aussi $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Vu que $f\colon I \to J$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) et continue dans I, alors $f([x_1\,;\,x_2]) = [y_1\,;\,y_2] \subset J$ (respectivement $[y_2\,;\,y_1] \subset J$) d'une part, et d'autre part :

$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}} f(x) = f(x_1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} f(x) = f(x_2)\,.$$

Par conséquent :

$$f\big(]x_1\,;\,x_2[\big) =]f(x_1)\,;\,f(x_2)[\subset J\,.$$

En résumé, à tout élément $y_0 \in J$, il est possible d'associer un intervalle ouvert dans J, qui est une image par f d'un intervalle ouvert dans I. Cette conclusion prouve que l'intervalle J est ouvert. En effet, si J n'était pas ouvert, il ne serait pas possible d'assigner à tout élément de J un intervalle ouvert qui serait entièrement dans J ; cela ne serait typiquement pas possible en une borne de J.

- Montrons que la fonction $f\colon I \to J$ admet une fonction réciproque ${}^{\mathrm{r}}\!f\colon J \to I$ qui est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J. Pour cela, commençons par rappeler que $f\colon I \to J$ est bijective ; $f\colon I \to J$ admet donc une réciproque ${}^{\mathrm{r}}\!f\colon J \to I$ qui est elle aussi bijective.
  - ◇ ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J. Pour s'en convaincre, il convient de considérer deux éléments $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Le fait que f est bijective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I implique qu'il existe un unique élément $x_1 \in I$ et un unique élément $x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et $x_1 < x_2$ (respectivement $x_1 > x_2$) ; en effet, x_1 ne peut en aucun cas être égal à x_2 : si c'était le cas, f ne serait alors pas une fonction ; aussi, x_1 ne peut pas être strictement plus grand (respectivement strictement plus petit) que x_2 : si c'était le cas, alors f ne serait pas strictement croissante (respectivement décroissante). Or, $x_1 = {}^{\mathrm{r}}\!f(y_1)$ et $x_2 = {}^{\mathrm{r}}\!f(y_2)$. Donc, en résumé, si $y_1 < y_2$, alors ${}^{\mathrm{r}}\!f(y_1) < {}^{\mathrm{r}}\!f(y_2)$ (respectivement ${}^{\mathrm{r}}\!f(y_1) > {}^{\mathrm{r}}\!f(y_2)$).

- ◇ ${}^{r}\!f : J \to I$ est continue dans J. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que f est surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante), puis de reprendre le deuxième point de la preuve du corollaire qui suit et de l'appliquer à ${}^{r}\!f$. □

B.2.6 Corollaire : *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Supposons que J est un intervalle dans $\mathbb{R}$. Alors :*

- *f est continue dans I ;*
- *$f : I \to J$ est bijective ;*
- *l'intervalle J est ouvert ;*
- *$f : I \to J$ admet une fonction réciproque ${}^{r}\!f : J \to I$ qui est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J.*

Preuve : Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, où I est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Supposons que J est un intervalle dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que f est continue dans I. Pour cela, considérons un nombre réel $\varepsilon > 0$ quelconque et $x_0 \in I$ un élément quelconque de I. Comme I est un intervalle ouvert, il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que $[x_0 - \gamma\,;\, x_0 + \gamma] \subset I$. Notons $x_1 = x_0 - \gamma$ et $x_2 = x_0 + \gamma$; notons aussi $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme $f : I \to J$ est surjective et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, et que $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, alors :

$$[y_1\,;\, y_2] = f\big([x_1\,;\, x_2]\big) \qquad \text{(respectivement } [y_2\,;\, y_1] = f\big([x_1\,;\, x_2]\big)\,\text{)}\,.$$

  En effet, comme J est un intervalle et que $y_1, y_2 \in J$, alors $[y_1\,;\, y_2] \subset J$ (respectivement $[y_2\,;\, y_1] \subset J$) ; aussi, comme $f : I \to J$ est surjective, il existe, pour tout élément $y \in [y_1\,;\, y_2]$ (respectivement pour tout élément $y \in [y_2;\, y_1]$), un élément $x \in I$ tel que $y = f(x)$; et vu que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante dans I), l'élément x est nécessairement dans $[x_1\,;\, x_2]$, de sorte que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ implique bien $f(x_1) = y_1 \leqslant f(x) = y \leqslant f(x_2) = y_2$ (respectivement $f(x_1) = y_1 \geqslant f(x) = y \geqslant f(x_2) = y_2$). Posons à présent $\zeta = \min\big\{|y_1 - y_0|\,;\, |y_2 - y_0|\big\}$ (*i.e.* posons ζ comme étant la plus petite des deux distances $|y_1 - y_0|$ et $|y_2 - y_0|$) ; alors $[y_0 - \zeta\,;\, y_0 + \zeta] \subset [y_1\,;\, y_2] \subset J$. Posons ensuite $\eta = \min\{\zeta; \varepsilon\}$ (*i.e.* posons η comme étant le plus petit des deux nombres ζ et ε). Alors $[y_0 - \eta\,;\, y_0 + \eta] \subset [y_0 - \zeta\,;\, y_0 + \zeta] \subset J$; les éléments y_3 et y_4, donnés respectivement par $y_3 = y_0 - \eta$ et $y_4 = y_0 + \eta$, sont donc dans J. En conséquence, comme f est surjective, il existe deux éléments $x_3, x_4 \in I$ tels que $y_3 = f(x_3)$ et $y_4 = f(x_4)$. Posons finalement $\delta = \min\big\{|x_3 - x_0|\,;\, |x_4 - x_0|\big\}$; alors $[x_0 - \delta\,;\, x_0 + \delta] \subset [x_3\,;\, x_4]$. Et comme f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans I, alors :

$$f\big([x_0 - \delta\,;\, x_0 + \delta]\big) \subset [y_0 - \varepsilon\,;\, y_0 + \varepsilon]\,.$$

Ainsi, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que :

$$x \in [x_0 - \delta\,;\, x_0 + \delta] \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in [y_0 - \varepsilon\,;\, y_0 + \varepsilon]\,,$$

ou, de manière équivalente :

$$|x - x_0| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \bigl|f(x) - y_0\bigr| = \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leqslant \varepsilon\,.$$

La fonction $f\colon I \to J$ est donc continue en $x_0 \in I$. Le raisonnement étant valable pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f\colon I \to J$ est continue dans tout l'intervalle ouvert I.

- Pour montrer que $f : I \to J$ est bijective, il suffit de raisonner comme dans le premier point de la preuve de la proposition précédente ; noter que la surjectivité de $f\colon I \to J$ n'a pas besoin d'être prouvée ici, vu qu'elle figure dans les hypothèses du corollaire.
- Pour montrer que l'intervalle J est ouvert, il suffit de raisonner comme dans le deuxième point de la preuve de la proposition précédente.
- Pour montrer que la fonction $f : I \to J$ admet une fonction réciproque ${}^{\mathrm{r}}\!f : J \to I$ qui est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) dans J, il suffit de raisonner comme dans le troisième point de la preuve de la proposition précédente. $\square$

Annexe C

Fonctions usuelles

C.1 Fonctions polynomiales

C.1.1 Expression d'une fonction polynomiale

On appelle *fonction polynomiale* toute fonction de la forme :

$$\begin{array}{rcl} P: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = P(x)\,, \end{array}$$

où :

$$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0\,, \tag{C.1.1}$$

a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 étant des coefficients réels et n un nombre naturel. Dans le cas où $a_n \neq 0$, on dit que P est *de degré* n.

C.1.2 Domaine de définition et ensemble image

Le domaine de définition D_P de la fonction P, donnée par l'expression C.1.1, est l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité. Quant à l'ensemble image, il s'agit :

- de l'ensemble $\mathbb{R}$ si le degré de P est impair,
- d'un intervalle de la forme $[a; \infty[$ ou $]-\infty; b]$, où a et b sont des nombres réels, si le degré de P est pair.

C.1.3 Continuité

La fonction P est continue dans $\mathbb{R}$. Elle ne possède, en outre, aucune asymptote, ni verticale, ni horizontale, ni oblique.

C.1.4 Dérivée

Pour pouvoir écrire l'expression de la dérivée d'une fonction polynomiale, il convient d'énoncer en premier lieu le résultat suivant.

C.1.1 Proposition : *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} p_k : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^k\,, \end{array}$$

où k est un nombre naturel non nul. Alors p_k est dérivable dans tout $\mathbb{R}$. En outre, la dérivée p'_k de p_k s'écrit :

$$p'_k(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ k\,x^{k-1} & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases} .$$

Preuve : Soit $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $p_k(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

- $k = 1$: dans ce cas, $p_k(x) = x$; et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p'_k(x) \;&=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_k(x+\Delta x) - p_k(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} 1 \;=\; 1\,. \end{aligned}$$

- $k \geqslant 2$: dans ce cas, en se référant au triangle de Pascal (*cf.* section 1.2 du chapitre 1) :

$$\begin{aligned} p'_k(x) \;&=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_k(x+\Delta x) - p_k(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^k + k\,x^{k-1}\Delta x + \ldots + k\,x\,\Delta x^{k-1} + \Delta x^k - x^k}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\,x^{k-1}\Delta x + \ldots + k\,x\,\Delta x^{k-1} + \Delta x^k}{\Delta x} \\ &=\; \lim_{\Delta x \to 0} \big(k\,x^{k-1} + \ldots + k\,x\,\Delta x^{k-2} + \Delta x^{k-1}\big) \;=\; k\,x^{k-1}\,; \end{aligned}$$

  en effet, les termes de l'expression $+\ldots + k\,x\,\Delta x^{k-2} + \Delta x^{k-1}$ tendent tous vers 0 lorsque Δx tend vers 0, vu qu'ils contiennent chacun Δx à une puissance entière, positive et non nulle.

Les expressions obtenues ici montrent, en outre, que p'_k est définie dans tout $\mathbb{R}$, *i.e.* que p_k est dérivable dans tout $\mathbb{R}$. □

C.1.2 Remarques : • On peut se demander pourquoi, dans la proposition précédente, on n'a pas écrit l'expression de p'_k en une seule fois (sans distinguer les cas $k = 1$ et $k \geqslant 2$) ; car en effet, à $p_k(x) = x$ correspond $p'_k(x) = 1$, ce qui peut *a priori* s'écrire $p'_k(x) = 1 = x^0 = 1 \cdot x^{1-1}$. On peut aussi se demander pourquoi le cas $k = 0$ n'est pas inclus ; car en effet, à $p_k(x) = 1$, qui peut se noter *a priori* $p_k(x) = 1 = x^0$, correspond $p'_k(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$, ce qui est en accord avec le fait que la dérivée d'une fonction constante dans $\mathbb{R}$ est la fonction qui vaut zéro dans tout $\mathbb{R}$. La réponse à ces questions se trouve dans le fait que l'expression x^0 n'est pas définie en $x = 0$ (0^0 étant une forme indéterminée), alors que la fonction constante et égale à 1, elle, est définie dans tout $\mathbb{R}$.

- Le résultat $p'_k(x) = k\,x^{k-1}$, donné dans la proposition précédente, s'applique également dans le cas où $k \in \mathbb{Z}^*_-$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Pour le voir, il convient de remarquer, en premier lieu, que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*_-$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x^k = \frac{1}{x^{|k|}}\,.$$

Ainsi, en apppliquant la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^{|k|}}\right) = -\frac{|k|\,x^{|k|-1}}{\left(x^{|k|}\right)^2} = -\frac{-k\,x^{|k|-1}}{x^{2|k|}}\\ &= k\,x^{|k|-1-2|k|} = k\,x^{-|k|-1} = k\,x^{-(-k)-1} = k\,x^{k-1}\,.\end{aligned}$$

La fonction polynomiale P, donnée par l'expression C.1.1, admet pour dérivée la fonction $P'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui s'écrit :

$$\boxed{P'(x) = a_n\,n\,x^{n-1} + a_{n-1}\,(n-1)\,x^{n-2} + \ldots + a_1}\,.$$

C.1.3 Remarques :

- L'expression précédente se déduit de la proposition énoncée précédemment, ainsi que de la propriété de linéarité de l'opération de dérivation.
- La dérivée d'une fonction polynomiale de degré n est, manifestement, une fonction polynomiale de degré $n-1$.

C.1.4 Exemple : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale du deuxième degré, donnée par $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 4$. Alors f admet pour dérivée la fonction $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f'(x) = 3 \cdot 2\,x^1 - 5 \cdot 1 = 6\,x - 5\,.$$

C.2 Fonctions rationnelles

C.2.1 Expression d'une fonction rationnelle

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme :

$$\begin{aligned} R:\ D_R &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto y = R(x)\,,\end{aligned}$$

où :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \tag{C.2.1}$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des fonctions polynomiales.

C.2.2 Domaine de définition et ensemble image

Le domaine de définition D_R de la fonction R, donnée par l'expression C.2.1, est l'ensemble de tous les nombres réels x qui n'annulent pas le dénominateur $Q(x)$:

$$D_R = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x) \neq 0\}\,.$$

Pour ce qui est de l'ensemble image, sa forme dépend sensiblement des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$. Il n'est, de fait, pas envisageable d'exhiber une expression générale ici.

C.2.3 Continuité et asymptotes

La fonction R est continue en chaque point de son domaine de définition. Si elle possède une ou plusieurs discontinuité(s), celle(s)-ci ne peu(ven)t être que de type trou ou de type asymptotique.

La fonction R peut posséder une ou plusieurs asymptotes verticales, ainsi qu'une asymptote horizontale ou une asymptote oblique.

- ◇ Si R admet une asymptote verticale, cette asymptote passe nécessairement par un point de l'axe x qui n'appartient pas au domaine de définition.
- ◇ R admet une asymptote horizontale si et seulement si $k \leqslant \ell$, où k est le degré de $P(x)$ et ℓ le degré de $Q(x)$. Ce résultat découle de la définition même d'asymptote horizontale.
- ◇ R admet une asymptote oblique si et seulement si $k = \ell + 1$, où k est le degré de $P(x)$ et ℓ le degré de $Q(x)$. Ce résultat découle de la définition même d'asymptote oblique.

Si R admet une asymptote horizontale, cette asymptote est la même à droite et à gauche. Il en est de même dans le cas d'une asymptote oblique.

C.2.4 Dérivée

La fonction rationnelle R, donnée par l'expression C.2.1, admet pour dérivée la fonction $R' : D_{R'} \to \mathbb{R}$, qui s'écrit :

$$\boxed{R'(x) = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{\big(Q(x)\big)^2}}\,.$$

C.2.1 Remarques :

- L'expression précédente se déduit directement de la formule de dérivation d'un quotient de fonctions. Le fait que la dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale et que le produit de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale permet d'affirmer que R' est, comme R, une fonction rationnelle.
- La fonction R et sa dérivée R' ont le même domaine de définition. Ce résultat s'explique par le fait que le(s) éventuel(s) nombre(s) réel(s) qui annulent $\big(Q(x)\big)^2$ dans la précédente expression sont exactement ceux qui annulent $Q(x)$ dans l'expression C.2.1.

C.2.2 Exemple : Soit f la fonction rationnelle donnée par :

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - 4\,x + 5}{x - 2} \,.$$

Cette fonction admet pour dérivée la fonction f' qui s'écrit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4\,x-4)(x-2) - (2\,x^2 - 4\,x + 5)\cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4\,x^2 - 12\,x + 8 - 2\,x^2 + 4\,x - 5}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2\,x^2 - 8\,x + 3}{(x-2)^2} \,. \end{aligned}$$

Noter que le domaine de définition $D_{f'}$ de f' est le même que le domaine de définition D_f de f :

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \,.$$

C.3 Fonctions logarithmes

C.3.1 Définition d'un logarithme

On appelle *logarithme*, et on note Log, toute fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Log} : \ \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \mathrm{Log}(x) \,, \end{aligned} \tag{C.3.1}$$

qui satisfait les trois conditions suivantes :

- Log n'est pas la fonction qui vaut zéro dans tout $\mathbb{R}_+^*$,
- Log est continue dans $\mathbb{R}_+^*$,
- Log transforme un produit en une somme :

$$\mathrm{Log}(x_1\,x_2) = \mathrm{Log}(x_1) + \mathrm{Log}(x_2) \,, \quad \text{pour tous } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^* \,.$$

C.3.2 Sens du terme logarithme

Le terme *logarithme* est une traduction française de l'expression latine *logarithmus*, expression qui a pour origine deux mots grecs :

- $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*logos*), qui se traduit ici par *rapport*,
- $\alpha\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ (*arithmos*), qui signifie *nombre*.

Les fonctions dont il est question dans la présente section sont définies non pas par une expression qui indique comment se transforme un nombre réel, mais par la façon dont se métamorphose un *rapport*, *i.e.* un *lien* entre *nombres* réels : un produit qui devient une somme. Le qualificatif *logarithme* est donc tout à fait adapté au contexte.

C.3.3 Aspect historique

Le concept de logarithme a vu le jour au tournant du XVIe au XVIIe siècle. Après avoir quasiment effleuré l'esprit de *Simon Stevin*[I], il a germé chez *Jobst Bürgi*[II], ainsi que chez *John Napier*[III], et ce indépendamment, sans que ces deux hommes n'aient correspondu. Napier ayant publié ses travaux avant Bürgi, l'invention des logarithmes a été attribuée au premier et non au deuxième.

Que ce soit Napier ou Bürgi, tous les deux visaient le même objectif : simplifier les calculs numériques particulièrement fastidieux. À cet effet, ils ont créé, chacun de leur côté, une table mettant en relation les éléments d'une suite géométrique avec les éléments d'une suite arithmétique. La correspondance entre suite géométrique et suite arithmétique, Napier l'a baptisée *logarithme*.

Il est intéressant de relever que le logarithme de Napier n'est pas une fonction logarithme au sens de la définition C.3.1 ; et pour cause : il ne transforme pas un produit en une somme. D'une étude des deux conditions suivantes :

- transformation d'un produit en une somme,
- transformation d'une suite géométrique en une suite arithmétique,

il ressort que la première est plus forte que la deuxième : une correspondance qui transforme une suite géométrique en une suite arithmétique ne transforme pas nécessairement un produit en une somme ; alors que toute correspondance transformant un produit en une somme transforme une suite géométrique en une suite arithmétique. Cette dernière assertion se vérifie aisément en prenant le terme général u_n d'une suite géométrique quelconque (u_n) et en lui appliquant une fonction logarithme telle que donnée dans la définition C.3.1 ; concrètement, en écrivant :

$$u_n = u_0\, q^n\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

q étant la raison de la suite et u_0 le zéroième terme, il vient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(u_n) &= \operatorname{Log}(u_0\, q^n) = \operatorname{Log}(u_0\, \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{= q^n}) \\
&= \operatorname{Log}(u_0) + \underbrace{\operatorname{Log}(q) + \ldots + \operatorname{Log}(q)}_{= n \operatorname{Log}(q)} \\
&= \operatorname{Log}(u_0) + n \operatorname{Log}(q)\ ;
\end{aligned}$$

I. Simon Stevin était, entre autres, un mathématicien et un ingénieur flamand, né à Bruges (à l'époque dans les Pays-Bas espagnols, aujourd'hui en Belgique) en 1548 et mort à Leyde (à l'époque dans les Provinces-Unies, aujourd'hui aux Pays-Bas) en 1620. Il est demeuré célèbre notamment pour l'invention d'un système d'écriture décimale des nombres.

II. Jobst (noté parfois Joost, ou Jost) Bürgi était un horloger et mathématicien helvétique, né en 1552 à Lichtensteig (dans le Toggenburg) et mort en 1632 à Kassel, dans le Land de Hesse (dans l'actuelle Allemagne).

III. John Napier était un mathématicien écossais, né en 1550 à Merchiston Castle (dans le manoir familial, se trouvant près d'Edimbourg) et mort en 1617 dans le même lieu. Son nom de famille a eu, semble-t-il, des orthographes très diverses. Si c'est l'écriture *Neper* qui a été retenue dans la langue française, c'est en raison du fait que la prononciation française du mot *Neper* correspond au mieux à la prononciation écossaise du nom *Napier*.

or, $\mathrm{Log}(u_0) + n\,\mathrm{Log}(q)$ peut être vu comme le terme général v_n d'une suite arithmétique (v_n) : $v_n = v_0 + n\,r$, où $r = \mathrm{Log}(q)$ est la raison de la suite et $v_0 = \mathrm{Log}(u_0)$ le zéroième terme.

Plus explicite, la condition de transformation d'un produit en une somme s'est imposée petit à petit dans la définition de logarithme, au détriment de la condition moins forte de transformation d'une suite géométrique en une suite arithmétique ; elle est devenue officielle, en quelque sorte, à partir du milieu du XVII$^{\text{e}}$ siècle.

C.3.4 Concept de table logarithmique

Les tables construites par Napier et Bürgi sont les prototypes de ce que l'on appelle communément des *tables de logarithmes*, ou *tables logarithmiques.* Avec l'apparition de telles tables, au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, des calculs numériques réputés jusqu'alors pénibles sont devenus abordables, voire élémentaires. À titre d'exemple, on peut mentionner l'extraction de la racine n-ième d'un nombre : avec une table logarithmique, l'opération se réduit à une division par n, ce qui est effectivement plus simple. Explicitons la procédure d'un tel calcul ; à cet effet, considérons une table logarithmique formée de deux colonnes de nombres, les nombres de la colonne de droite étant obtenus à partir des nombres de la colonne de gauche au moyen d'un logarithme, *i.e.* au moyen d'une correspondance qui transforme un produit en une somme. Pour un nombre a dont on cherche la racine n-ième :

- dans la colonne de gauche de la table, on cherche le nombre $\hat{a}$ le plus proche de a ;
- dans la colonne de droite, on relève le nombre $\hat{\alpha} = \mathrm{Log}(\hat{a})$;
- on calcule le nombre $\hat{\gamma} = \frac{\mathrm{Log}(\hat{a})}{n}$;
- dans la colonne de droite, on cherche le nombre $\check{\gamma}$ le plus proche de $\hat{\gamma}$;
- dans la colonne de gauche, on relève le nombre $\check{c}$ dont le logarithme est le nombre $\check{\gamma}$ dans la colonne de droite ; le nombre $\check{c}$ est alors approximativement égal à la racine n-ième de a.

Cette marche à suivre se justifie par le fait que si c est la racine n-ième du nombre a, alors $c^n = a$ et donc :

$$\mathrm{Log}(c^n) \;=\; \mathrm{Log}(a) \qquad \Leftrightarrow \qquad n\,\mathrm{Log}(c) \;=\; \mathrm{Log}(a)\,.$$

x	$\mathrm{Log}(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$\check{c}$ ←	$\mathrm{Log}(\check{c})$
$\vdots$	$\vdots$
$\hat{a}$ →	$\mathrm{Log}(\hat{a})$
$\vdots$	$\vdots$

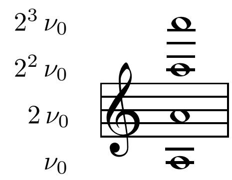
Noter que l'approximation $\check{c}$ de c est d'autant meilleure que la table est « dense », *i.e.* que le quotient entre deux éléments consécutifs de la colonne de gauche, dans la table, est proche de 1.

Les tables logarithmiques ont été largement utilisées jusqu'au milieu de XX$^{\text{e}}$ siècle ; avec l'apparition des machines à calculer électroniques, dans la deuxième moitié du même siècle, elles sont peu à peu tombées en désuétude.

C.3.5 Les logarithmes dans la perception humaine

Plusieurs phénomènes physiques perçus par l'être humain ont un lien avec le concept de logarithme. Un exemple : la hauteur d'un son. Sur le plan physique, la hauteur d'un son est caractérisée par une grandeur appelée *fréquence*, notée généralement ν. Sur le plan physiologique (*i.e.* sur le plan de la perception humaine), la hauteur d'un son se mesure par rapport à un son de référence, appelé généralement *fondamentale*, et elle est caractérisée par ce que l'on appelle un *intervalle* : une *prime*, une *seconde*, une *tierce*, une *quarte*, une *quinte*, une *sixte*, une *septième*, une *octave*... Lorsqu'un son passe d'une fréquence ν_0 à une fréquence $\nu_1 = 2\,\nu_0$, il est perçu, par l'être humain, comme étant monté d'une octave ; à un rapport de fréquence égal à 2, sur le plan physique, correspond donc, sur le plan physiologique, un intervalle d'une octave. Lorsque le son passe de la fréquence ν_1 à la fréquence $\nu_2 = 2\,\nu_1$, il est à nouveau perçu comme étant monté d'une octave, vu que le rapport de fréquence entre ν_2 et ν_1 vaut 2 également. En conséquence, lorsque le son passe de la fréquence ν_0 à la fréquence ν_2, où $\nu_2 = 2 \cdot 2\,\nu_0 = 4\,\nu_0$, il est perçu comme étant monté de deux octaves. Et plus généralement, lorsque le son passe de la fréquence ν_0 à la fréquence $2^n\,\nu_0$, il est perçu comme étant monté de n octaves. Les fréquences ν_0, $\nu_1 = 2\,\nu_0$, $\nu_2 = 4\,\nu_0$ peuvent être vues comme les premiers éléments d'une suite (ν_n) de terme général :

$$\nu_n \;=\; \nu_0 \cdot 2^n \;;$$



cette suite est manifestement géométrique. Quant aux éléments *fondamentale*, *fondamentale et une octave*, *fondamentale et deux octaves*, il peuvent être considérés comme les premiers éléments d'une suite (v_n) de terme général :

$$v_n \;=\; \text{fondamentale} + n \cdot \text{octave} \;;$$

cette suite, elle, est arithmétique. Vu les caractères géométrique de (ν_n) et arithmétique de (v_n), une conclusion s'impose : la relation entre les deux suites est de nature logarithmique. Cette nature se retrouve jusque dans les termes utilisés : sur le plan physique, on parle de *rapport* de fréquence (terme en lien avec des opérations telles que le produit et le quotient), alors que sur le plan physiologique, on parle d'*intervalle* (terme en lien avec des opérations telles que l'addition et la soustraction).

C.3.6 Propriétés générales des logarithmes

De la condition de transformation d'un produit en une somme, $\mathrm{Log}(a\,b) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$, peuvent être déduites plusieurs autres propriétés. Le fait que les nombres réels a et b doivent être strictement positifs est justifié dans la sous-section suivante.

- De la condition $\mathrm{Log}(a\,b) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs, peut être déduite l'égalité $\mathrm{Log}(1) = 0$:

$$\mathrm{Log}(a) \;=\; \mathrm{Log}(1 \cdot a) \;=\; \mathrm{Log}(1) + \mathrm{Log}(a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Log}(1) \;=\; 0\,,$$

ainsi que la relation $\operatorname{Log}(a^n) = n \operatorname{Log}(a)$, où $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Log}(a^n) \;=\; \operatorname{Log}(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{=a^n}) \;=\; \underbrace{\operatorname{Log}(a) + \ldots + \operatorname{Log}(a)}_{=n \operatorname{Log}(a)} \;=\; n \operatorname{Log}(a)\,,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et pour $n = 0$, $\operatorname{Log}(a^0) = \operatorname{Log}(1) = 0 = 0 \operatorname{Log}(a)$.

- De l'égalité $\operatorname{Log}(1) = 0$, peut être déduite la relation $\operatorname{Log}\big(\frac{a}{b}\big) = \operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(b)$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs :

$$0 \;=\; \operatorname{Log}(1) \;=\; \operatorname{Log}\left(\frac{b}{b}\right) \;=\; \operatorname{Log}\left(b\,\frac{1}{b}\right) \;=\; \operatorname{Log}(b) + \operatorname{Log}\left(\frac{1}{b}\right)\,,$$

d'où :

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{b}\right) \;=\; -\operatorname{Log}(b)\;;$$

et ainsi :

$$\operatorname{Log}\left(\frac{a}{b}\right) \;=\; \operatorname{Log}\left(a\,\frac{1}{b}\right) \;=\; \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}\left(\frac{1}{b}\right) \;=\; \operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(b)\,.$$

- La relation $\operatorname{Log}(a^n) = n \operatorname{Log}(a)$ peut être généralisée au cas où $n \in \mathbb{Z}$; pour s'en convaincre, il suffit de noter que $n = -|n|$ lorsque $n \in \mathbb{Z}^*_-$ puis d'utiliser les relations établies dans les deux points précédents :

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(a^n) \;&=\; \operatorname{Log}(a^{-|n|}) \;=\; \operatorname{Log}\left(\frac{1}{a^{|n|}}\right)\\ &=\; -\operatorname{Log}(a^{|n|}) \;=\; -|n| \operatorname{Log}(a)\\ &=\; n \operatorname{Log}(a)\,.\end{aligned}$$

- La relation $\operatorname{Log}(a^n) = n \operatorname{Log}(a)$ s'applique aussi dans le cas où n est un nombre rationnel ; on utilise dans ce cas la lettre r plutôt que la lettre n. Pour se convaincre de cette extension, il convient de prendre un nombre rationnel r, de l'écrire sous la forme $r = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, puis de développer l'expression $q \operatorname{Log}(a^r)$, et enfin d'utiliser la relation $\operatorname{Log}(a^n) = n \operatorname{Log}(a)$, où $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}q \operatorname{Log}(a^r) \;&=\; \operatorname{Log}\big((a^r)^q\big) \;=\; \operatorname{Log}(a^p)\\ &=\; p \operatorname{Log}(a) \;=\; q\,\big(r \operatorname{Log}(a)\big)\,,\end{aligned}$$

vu que q et $p = r\,q$ sont des nombres entiers ; d'où :

$$\operatorname{Log}(a^r) \;=\; r \operatorname{Log}(a)\,, \qquad r \in \mathbb{Q}\,.$$

- Il peut être montré que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{I}$, en tant que sous-ensembles de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, possèdent la propriété importante suivante : entre deux nombres rationnels distincts, sur la droite réelle, se trouve au moins un nombre irrationnel ; et entre deux nombres irrationnels distincts, sur la droite réelle, se trouve au moins un nombre rationnel. Cette propriété a pour conséquence le résultat suivant : tout nombre irrationnel peut être approché autant que souhaité par un nombre rationnel. Vu cette réalité, il paraît naturel et judicieux d'étendre la relation $\mathrm{Log}(a^r) = r\,\mathrm{Log}(a)$ à l'ensemble des nombres réels, rationnels comme irrationnels ; on utilise dans ce cas la lettre y plutôt que la lettre r :

$$\mathrm{Log}(a^y) \;=\; y\,\mathrm{Log}(a)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

C.3.7 Domaine de définition des fonctions logarithmes

Toute fonction Log, dès lors qu'elle doit satisfaire à la fois la propriété de continuité et la propriété de transformation d'un produit en une somme, ne peut être définie que pour les nombres réels x strictement positifs. En effet, si ce n'était pas le cas, *i.e.* :

- si x pouvait prendre des valeurs négatives, la relation $\mathrm{Log}(x^y) = y\,\mathrm{Log}(x)$, établie au point précédent, n'aurait de sens que pour certaines valeurs de y, mais pas pour tout $y \in \mathbb{R}$; typiquement, dans le cas où $y = \frac{1}{2}$, la relation n'aurait aucun sens, vu que $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, où $x < 0$, n'existe pas dans $\mathbb{R}$;
- si x valait 0, alors, selon la condition de transformation d'un produit en somme, $\mathrm{Log}(0) = \mathrm{Log}(0 \cdot b) = \mathrm{Log}(0) + \mathrm{Log}(b)$, ce qui impliquerait que $\mathrm{Log}(b) = 0$, quel que soit le nombre b, résultat contradictoire avec la définition même de Log.

C.3.8 Ensemble image des fonctions logarithmes

Revenons à la relation $\mathrm{Log}(a^y) = y\,\mathrm{Log}(a)$ établie précédemment. Penchons-nous sur l'expression a^y, qui apparaît dans le logarithme du côté gauche de l'égalité. Dans le cas où y s'écrit $y = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, la quantité a^y peut être interprétée comme suit :

$$a^y \;=\; \begin{cases} \sqrt[q]{a^p} & \text{si } p \in \mathbb{Z}^*_+ \text{ et } q \in \mathbb{N} \setminus \{0;\,1\} \\[2ex] a^p & \text{si } p \in \mathbb{Z}^*_+ \text{ et } q = 1 \\[2ex] 1 & \text{si } p = 0 \\[1ex] \dfrac{1}{a^{|p|}} & \text{si } p \in \mathbb{Z}^*_- \text{ et } q = 1 \\[1ex] \dfrac{1}{\sqrt[q]{a^{|p|}}} & \text{si } p \in \mathbb{Z}^*_- \text{ et } q \in \mathbb{N} \setminus \{0;\,1\} \end{cases}$$

où :

- a^p désigne un produit dans lequel a apparaît p fois, lorsque $p \in \mathbb{Z}^*_+$,

- $a^{|p|}$ désigne un produit dans lequel a apparaît $|p|$ fois, lorsque $p \in \mathbb{Z}_-^*$,
- $\sqrt[q]{\ }$ est le symbole de la racine q-ième ;

noter que la racine q-ième peut être vue comme une fonction réelle ; il s'agit de la fonction réciproque de la fonction puissance q-ième.

Intéressons-nous à présent à la correspondance qui envoie tout y de la forme $y = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, sur a^y. Le fait :

- qu'à chaque $p \in \mathbb{Z}$ corresponde un et un unique nombre réel a^p,
- qu'à chaque $q \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0;\, 1\}$ corresponde un et un unique nombre réel $\sqrt[q]{b}$, où b est un nombre réel strictement positif (présentement $b = a^p$ si $p \in \mathbb{Z}_+^*$ et $b = a^{|p|}$ si $p \in \mathbb{Z}_-^*$)

permet d'affirmer que la correspondance en question est une fonction réelle ; à chaque y donné correspond donc un et un unique nombre réel a^y.

Revenons maintenant à la quantité a^y. Le nombre réel a, rappelons-le, ne peut être ni nul, ni strictement négatif (*cf.* sous-section précédente). En tant que nombre réel strictement positif, il peut soit être compris strictement entre 0 et 1, soit valoir 1, soit être strictement supérieur à 1.

- $a > 1$. Dans ce cas, $a^{y_1} < a^{y_2}$ si $y_1 < y_2$, où $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$. Pour s'en convaincre, il convient de prendre deux nombres rationnels y_1 et y_2 quelconques, tels que $y_1 < y_2$; comme ils sont rationnels, ces nombres peuvent s'écrire sous la forme :

$$y_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{p_2}{q_2}\,,$$

où $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$. Le fait que q_1 et q_2 sont des nombres entiers strictement positifs permet de dire qu'il existe un nombre $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = n_1\, q_1$ et $q = n_2\, q_2$, où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$; q est ce que l'on appelle un multiple commun de q_1 et q_2. En conséquence, les nombres y_1 et y_2 peuvent s'écrire, aussi :

$$y_1 = \frac{\tilde{p}_1}{q} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{\tilde{p}_2}{q}\,,$$

où $\tilde{p}_1 = n_1\, p_1 \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{p}_2 = n_2\, p_2 \in \mathbb{Z}$; ici, q est ce que l'on appelle le dénominateur commun de y_1 et y_2. Ainsi, si $y_1 < y_2$, alors nécessairement $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_2$; et donc, comme $a > 1$:

$$a^{\tilde{p}_1} < a^{\tilde{p}_2} \quad \Rightarrow \quad \left(a^{\tilde{p}_1}\right)^{\frac{1}{q}} < \left(a^{\tilde{p}_2}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{\tilde{p}_1}{q}} < a^{\frac{\tilde{p}_2}{q}} \quad \Rightarrow \quad a^{y_1} < a^{y_2}\,.$$

En résumé :

$$y_1 < y_2 \qquad \Rightarrow \qquad a^{y_1} < a^{y_2}\,.$$

Remarquer qu'une telle implication établit que la fonction qui envoie $y \in \mathbb{Q}$ sur a^y est strictement croissante dans $\mathbb{Q}$. Noter, en outre, que cette fonction :

◇ tend vers 0 lorsque y tend vers $-\infty$,
◇ tend vers ∞ lorsque y tend vers ∞.

Un tel résultat se déduit d'une part de la propriété de croissance stricte de la fonction en question, et d'autre part du fait que, dans le cas où $y = \frac{p}{1} = p$ (p étant un nombre entier) :

$$\lim_{y\to-\infty} a^y = \lim_{p\to-\infty} a^p = \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{a^{|p|}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to\infty} a^y = \lim_{p\to\infty} a^p = \infty\,.$$

- $a = 1$. Dans ce cas, $a^y = 1^y = 1$ quel que soit $y \in \mathbb{Q}$.
- $0 < a < 1$. Dans ce cas, des raisonnements similaires à ceux menés dans le cas où $a > 1$ permettent de conclure que la fonction qui envoie $y \in \mathbb{Q}$ sur a^y est strictement décroissante dans $\mathbb{Q}$, d'une part, et d'autre part que cette même fonction :
  - ◇ tend vers 0 lorsque y tend vers ∞,
  - ◇ tend vers ∞ lorsque y tend vers $-\infty$.

En conclusion, quel que soit le nombre $a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$, l'expression a^y, où $y \in \mathbb{Q}$, prend des valeurs réparties dans tout $\mathbb{R}_+^*$ et non seulement dans un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ plus restreint.

De l'étude de l'expression a^y qui vient d'être faite, ressort le résultat important suivant.

C.3.1 Lemme : *L'image de l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$, par toute fonction logarithme, est l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité.*

Preuve : Toute fonction Log: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ étant une fonction réelle, son ensemble image est nécessairement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Ce qu'il reste à montrer, c'est que cet ensemble image est l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité.

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 ; soit aussi y_1 et y_2 deux nombres rationnels tels que :

- $y_1 > y_2$ si $0 < a < 1$,
- $y_1 < y_2$ si $a > 1$.

Posons $x_1 = a^{y_1}$ et $x_2 = a^{y_2}$. Selon les propos tenus précédemment au sujet de l'expression a^y, les nombres x_1 et x_2 se trouvent dans l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$; en outre, $x_1 < x_2$.

La fonction Log étant continue dans $\mathbb{R}_+^*$, par hypothèse, elle est continue dans l'intervalle fermé $[x_1;\, x_2]$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* théorème 2.10.1, section 2.10 du chapitre 2), Log prend alors, dans $[x_1;\, x_2]$, toutes les valeurs comprises entre $\mathrm{Log}(x_1)$ et $\mathrm{Log}(x_2)$; *i.e.* toutes les valeurs comprises entre $y_1 \,\mathrm{Log}(a)$ et $y_2 \,\mathrm{Log}(a)$, vu que :

$$\mathrm{Log}(x_1) = \mathrm{Log}(a^{y_1}) = y_1 \,\mathrm{Log}(a)\,,$$
$$\mathrm{Log}(x_2) = \mathrm{Log}(a^{y_2}) = y_2 \,\mathrm{Log}(a)\,.$$

En conséquence, tout nombre réel u compris entre $y_1 \,\mathrm{Log}(a)$ et $y_2 \,\mathrm{Log}(a)$ peut être vu comme l'image par Log d'un nombre $x \in [x_1;\, x_2] \subset \mathbb{R}_+^*$. Le fait que y_1 et y_2 peuvent être n'importe quels nombres rationnels tels que $y_1 > y_2$ ou $y_1 < y_2$ permet de conclure :

tout nombre réel peut être vu comme l'image par une fonction logarithme d'un nombre réel strictement positif ; ce qui revient à dire que l'ensemble image de toute fonction $\mathrm{Log}\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ dans son intégralité. $\square$

C.3.9 Base d'un logarithme

Le fait que tout nombre réel peut être vu comme l'image, par une fonction logarithme, d'un nombre réel strictement positif (*cf.* lemme de la sous-section précédente) permet d'affirmer qu'il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathrm{Log}(a) = 1$. Appelé *base* du logarithme, ce nombre a peut s'écrire à partir de n'importe quel nombre $b \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$, comme suit :

$$a \;=\; b^{\frac{1}{\mathrm{Log}(b)}} \;;$$

pour s'en convaincre, il suffit d'observer que :

$$1 \;=\; \frac{1}{\mathrm{Log}(b)}\,\mathrm{Log}(b) \;=\; \mathrm{Log}\big(b^{\frac{1}{\mathrm{Log}(b)}}\big)\,.$$

Noter que la base d'un logarithme ne peut jamais valoir 1. Et pour cause : vu que toutes les fonction Log satisfont $\mathrm{Log}(1) = 0$, il n'est pas envisageable que l'une d'elles satisfasse en même temps $\mathrm{Log}(1) = 0$ et $\mathrm{Log}(1) = 1$.

C.3.10 Logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif, différent de 1. On appelle *fonction logarithme de base a* (ou simplement *logarithme de base a*), et on note $\log_a$, la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y \;=\; \log_a(x)\,, \end{array} \tag{C.3.2}$$

qui satisfait les deux conditions suivantes :

- $\diamond$ $\log_a$ est continue dans $\mathbb{R}_+^*$,
- $\diamond$ $\log_a(x_1\, x_2) \;=\; \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$,

et qui vérifie la relation :

$$\log_a(a) \;=\; 1\,.$$

C.3.2 Remarque : Si, dans la définition de $\log_a$, la condition « $\log_a$ n'est pas la fonction qui vaut zéro dans $\mathbb{R}_+^*$ » n'a pas été formulée, c'est en raison du fait qu'elle apparaît de manière sous-jacente dans l'expression $\log_a(a) = 1$.

C.3.11 Propriétés de la fonction logarithme de base a

La fonction $\log_a$ satisfait les relations suivantes :

- $\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)\,,$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$;
- $\log_a(b^y) = y\log_a(b)\,,$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$;
- $\log_a(a^y) = y\log_a(a) = y\,,$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Ces relations sont des conséquences de la définition de $\log_a$ ainsi que des propriétés générales des fonctions logarithmes (*cf.* sous-section C.3.6).

C.3.12 Asymptotes de la fonction logarithme de base a

Reprenons les propos tenus dans la sous-section C.3.8, au sujet de l'expression a^y (où $a \in \mathbb{R}^* \smallsetminus \{1\}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- Cas où $a > 1$. Dans ce cas, rappelons-le, $y_1 < y_2 \Rightarrow a^{y_1} < a^{y_2}$, quels que soient $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$. Ainsi, si $x_1 = a^{y_1}$ et $x_2 = a^{y_2}$, alors $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$; en effet :

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \log_a(x_1) = \log_a(a^{y_1}) = y_1 < y_2 = \log_a(a^{y_2}) = \log_a(x_2)\,.$$

Soit à présent $x = a^p$, où $p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a(x) = \lim_{p\to-\infty} \log_a(a^p) = \lim_{p\to-\infty} p = -\infty\,.$$

Les raisonnements menés ici, associés au fait que les fonctions logarithmes sont définies et continues dans $\mathbb{R}_+^*$, suffisent pour conclure que la fonction $\log_a$:

◇ est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$,

◇ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- Cas où $0 < a < 1$. Dans ce cas, rappelons-le, $y_1 < y_2 \Rightarrow a^{y_1} > a^{y_2}$, quels que soient $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$; et donc aussi $y_1 > y_2 \Rightarrow a^{y_1} < a^{y_2}$. Ainsi, si $x_1 = a^{y_1}$ et $x_2 = a^{y_2}$, alors $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$; en effet :

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \log_a(x_1) = \log_a(a^{y_1}) = y_1 > y_2 = \log_a(a^{y_2}) = \log_a(x_2)\,.$$

Soit à présent $x = a^p$, où $p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a(x) = \lim_{p\to\infty} \log_a(a^p) = \lim_{p\to\infty} p = \infty\,.$$

Les raisonnements menés ici, associés au fait que les fonctions logarithmes sont définies et continues dans $\mathbb{R}_+^*$, suffisent pour conclure que la fonction $\log_a$:

◇ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+^*$,

◇ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Étudions à présent le comportement de $\log_a(x)$ lorsque x tend vers ∞. À cet effet, prenons un nombre réel x pouvant s'écrire sous la forme $x = a^p$, où p est un nombre entier, puis raisonnons comme suit.

- Si $a > 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) \;=\; \lim_{p\to\infty} \log_a(a^p) \;=\; \lim_{p\to\infty} p\log_a(a) \;=\; \lim_{p\to\infty} p \;=\; \infty\,,$$

  du fait que l'expression $x = a^p$ tend vers ∞ si et seulement si p tend vers ∞ dans le cas où $a > 1$.
- Si $0 < a < 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) \;=\; \lim_{p\to-\infty} \log_a(a^p) \;=\; \lim_{p\to-\infty} p\log_a(a) \;=\; \lim_{p\to-\infty} p \;=\; -\infty\,,$$

  du fait que l'expression $x = a^p$ tend vers ∞ si et seulement si p tend vers $-\infty$ dans le cas où $0 < a < 1$.

Ces observations, associées au fait que les fonctions logarithmes sont continues dans tout $\mathbb{R}_+^*$, permettent de conclure que $\log_a$ n'admet pas d'asymptote horizontale à droite. Noter que $\log_a$ ne possède pas d'asymptote oblique à droite non plus ; en effet, certes :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a(x)}{x} \;=\; 0\,,$$

ce qui se démontre à l'aide de la règle de Bernoulli-L'Hôpital (*cf.* section 3.9 du chapitre 3), mais :

$$\lim_{x\to\infty} \big(\log_a(x) - 0\,x\big) \;=\; \lim_{x\to\infty} \log_a(x) \;=\; \begin{cases} \infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}\,.$$

En résumé, la fonction $\log_a$:

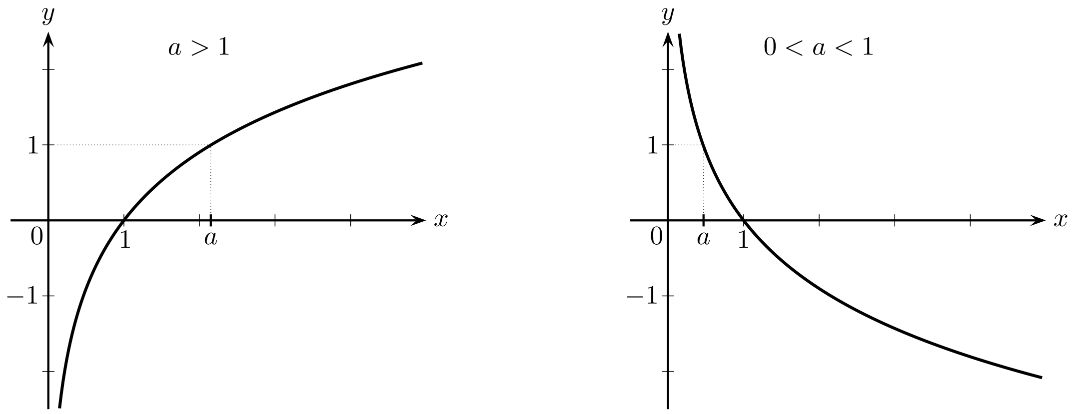
- admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$,
- ne possède pas d'asymptote horizontale à droite,
- n'a aucune asymptote oblique à droite.

De plus, vu qu'elle est définie dans $\mathbb{R}_+^*$, $\log_a$ ne peut pas :

- avoir une ou plusieurs autre(s) asymptote(s) verticale(s),
- posséder une asymptote horizontale à gauche,
- admettre une asymptote oblique à gauche.

C.3.13 Graphe de la fonction logarithme de base a

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Grâce aux propos tenus dans la sous-section précédente, il est possible de tracer relativement précisément, dans $\mathbb{R}^2$, le graphe de la fonction $\log_a$; un échantillon est représenté ci-dessous à gauche, dans le cas où $a > 1$, et ci-dessous à droite dans le cas où $0 < a < 1$. Remarquer que $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$ dans les deux cas.



C.3.14 Bijectivité de la fonction logarithme de base a

La fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ étant définie, continue et :

- strictement croissante si $a > 1$,
- strictement décroissante si $0 < a < 1$

dans $\mathbb{R}_+^*$ (*cf.* sous-section C.3.12), elle est injective. Comme elle est aussi surjective (*cf.* sous-section C.3.8), elle est bijective.

Dire que $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, c'est dire que pour tout nombre réel y, il existe un et un unique nombre réel strictement positif x tel que $y = \log_a(x)$. Or, selon les propriétés de $\log_a$ (*cf.* sous-section C.3.11), $y = y\log_a(a) = \log_a(a^y)$. Donc, $\log_a(x) = \log_a(a^y)$; d'où $x = a^y$, du fait de la bijectivité de $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

En résumé, tout nombre réel x strictement positif peut s'écrire sous la forme $x = a^y$, où y est un nombre réel.

C.3.15 Unicité de la fonction logarithme de base a

Il existe une infinité de fonctions définies et continues dans $\mathbb{R}_+^*$, qui transforment un produit en une somme. En revanche, il n'existe qu'une seule fonction définie et continue dans $\mathbb{R}_+^*$, qui transforme un produit en une somme, et qui envoie le nombre $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ sur le nombre 1 ; cette fonction, c'est $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Pour se convaincre de cette assertion, il suffit de supposer l'existence d'une autre fonction, que l'on notera g, définie et continue dans $\mathbb{R}_+^*$, qui transforme un produit en une somme et qui envoie a sur 1, puis de voir que cette autre fonction n'est autre que $\log_a$. Pour cela, il convient de prendre un nombre réel x strictement positif et de l'écrire sous la forme $x = a^y$, où $y \in \mathbb{R}$; comme g transforme un produit en une somme, elle transforme une puissance en un produit (*cf.* sous-section C.3.6) ; ainsi :

$$g(x) = g(a^y) = y\,g(a) = y = y\log_a(a) = \log_a(a^y) = \log_a(x)\,.$$

$g(x) = \log_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; g et $\log_a$ ne sont donc qu'une seule et même fonction.

C.3.16 Compatibilité entre la condition de continuité et la condition de transformation d'un produit en une somme

Lors de la formulation de la définition de la fonction $\log_a$, la question de savoir si la condition de continuité et la condition de transformation d'un produit en une somme sont compatibles entre elles ne s'est jamais posée. Elle est légitime, pourtant. Existe-t-il une fonction, au moins, qui satisfait les deux conditions à la fois ? Les outils fournis par le calcul intégral permettent de répondre par l'affirmative à cette question ; les détails seront discutés en temps voulu (*cf.* sous-section C.3.21). À ce stade, on peut formuler le résultat intéressant suivant : toute fonction logarithme est continue dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle est continue en $x = 1$; en effet, en posant $u = \frac{x}{x_0}$ et en notant que x tend vers x_0 si et seulement si u tend vers 1 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \log_a(x) - \log_a(x_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \big(\log_a(x) - \log_a(x_0)\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \log_a\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{u\to 1} \log_a(u) = 0\,.
\end{aligned}$$

En conséquence, la condition de continuité dans $\mathbb{R}_+^*$ peut être remplacée, dans la définition de la fonction $\log_a$, par la condition de continuité en $x = 1$.

Le raisonnement qui vient d'être mené montre que les conditions de continuité et de transformation d'un produit en somme ont un impact l'une sur l'autre ; ces conditions ne semblent toutefois pas incompatibles entre elles.

C.3.17 Formule de changement de base

Deux fonctions logarithmes, l'une de base a et l'autre de base b, où $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, sont liées entre elles par la relation suivante :

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}}\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

Appelée *formule de changement de base*, cette expression se déduit en effectuant un raisonnement en deux étapes, comme suit.

- Si $\log_a$ (où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) est une fonction qui transforme un produit en une somme, alors $k \log_a$, où $k \in \mathbb{R}$, est également une fonction qui transforme un produit en une somme :

$$\begin{aligned}
k \log_a(x_1\, x_2) &= k\,\big(\log_a(x_1\, x_2)\big) \\
&= k\,\big(\log_a(x_1) + \log_a(x_2)\big) \\
&= k \log_a(x_1) + k \log_a(x_2)\ ;
\end{aligned}$$

$k\log_a$ est donc aussi une fonction logarithme. Si $k \neq 1$, alors $k\log_a(a) \neq 1$ et donc $k\log_a$ est un logarithme ayant pour base un nombre différent de a.

- Soit $\log_b$ la fonction logarithme de base b (où $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$). Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\log_b(x) = k\log_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Vu que $\log_b$ est l'unique fonction qui transforme un produit en une somme et qui vaut 1 lorsque $x = b$, alors :

$$1 \;=\; \log_b(b) \;=\; k\log_a(b) \qquad \Leftrightarrow \qquad k \;=\; \frac{1}{\log_a(b)}\;.$$

  k existe donc ; $\log_b$ peut, de fait, s'écrire sous la forme $\log_b = k\log_a$.

Des relations $\log_b = k\log_a$ et $k = \frac{1}{\log_a(b)}$ découle immédiatement le résultat encadré.

C.3.18 Bases logarithmiques les plus utilisées

Ce sont les bases $a = 10$, $a = 2$ et $a = \mathrm{e}$.

- $a = 10$; dans ce cas, on parle de *logarithme décimal* ; on le note log (l'indice 10 étant omis) ; le logarithme décimal est parfois aussi appelé *logarithme de Briggs*[IV] ; plus rarement *logarithme à base vulgaire*, ou simplement *logarithme vulgaire*.
- $a = 2$; dans ce cas, on parle de *logarithme binaire* ; ce logarithme est essentiellement utilisé dans le monde de l'informatique.
- $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \approx 2{,}71828.....$; dans ce cas, on parle de *logarithme naturel*, ou de *logarithme népérien* (en l'honneur de John Napier, dont le nom francisé est Neper) ; on le note ln. Le nombre e est un nombre *transcendant*, *i.e.* un nombre irrationnel qui n'est la racine d'aucun polynôme à coefficients réels ; il est généralement présenté comme la limite de la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$; parfois aussi comme la limite de l'expression $(1+u)^{1/u}$, où $u \in \mathbb{R}$, lorsque u tend vers 0 :

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,, \qquad\qquad \mathrm{e} \;=\; \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\;.$$

  Il n'est pas rare, en outre, de le voir apparaître sous la forme :

$$\mathrm{e} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \;=\; \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \;=\; 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots$$

  où, par définition :

$$\begin{aligned} n! \;&=\; n\,(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(n-2)\big)\big(n-(n-1)\big) \\ &=\; n\,(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 \end{aligned}$$

IV. Henry Briggs était un mathématicien anglais, né en 1556 à Warley Wood (dans le Yorkshire) et mort en 1630 à Oxford. Il est le premier scientifique à avoir construit une table de logarithmes de base 10.

et, par convention, $0! = 1$; $n!$ est appelé *factorielle de n*. Les expressions $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\mathrm{e} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$ seront discutées en détail plus loin, dans la sous-section C.3.21 ; quant à la formule $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, elle est prouvée dans la section 5.6 du chapitre 5, consacrée aux développements illimités.

C.3.19 Application aux équations exponentielles

On appelle *équation exponentielle* toute équation dans laquelle l'inconnue est un exposant. Parmi les exemples les plus simples, on peut mentionner $4^y = 32$, $3^y = 19$, $\mathrm{e}^y = 7$, etc.

Certaines équations exponentielles peuvent être résolues de façon élémentaire, par identification de facteurs communs ; c'est le cas, par exemple, de l'équation $4^y = 32$:

$$\begin{aligned} 4^y = 32 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(2^2\right)^y = 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2y} = 2^5 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{2}\,. \end{aligned}$$

La technique illustrée ici ne constitue toutefois pas une méthode générale de résolution, applicable en toutes circonstances ; elle ne convient pas, en effet, à l'équation $3^y = 19$, par exemple.

Là où des facteurs communs ne peuvent pas être identifiés, le concept de logarithme révèle son utilité : en appliquant un logarithme aux deux côtés de l'équation $3^y = 19$, il est possible, grâce à la propriété de transformation d'une puissance en un produit, d'isoler la quantité y :

$$\begin{aligned} 3^y = 19 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3^y) = \ln(19) \quad &\Leftrightarrow \quad y\ln(3) = \ln(19) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{\ln(19)}{\ln(3)}\,. \end{aligned}$$

Tout autre logarithme pourrait être utilisé pour trouver y ; par exemple $\log_3$, ce qui donnerait $y = \log_3(19)$. Si le choix s'est porté sur le logarithme naturel, c'est en raison du fait que cette fonction se trouve sur n'importe quelle machine à calculer dotée des fonctions usuelles, même les machines les plus simples, et qu'il est, par conséquent, possible d'écrire la solution de l'équation donnée sous la forme d'un résultat numérique : $y = \frac{\ln(19)}{\ln(3)} \approx 2{,}68014.....$ Noter qu'un tel résultat n'est qu'approximatif, vu que les machines à calculer ne fournissent qu'un nombre fini de décimales.

C.3.20 Dérivée de la fonction logarithme de base a

La fonction ln admet pour dérivée la fonction $\ln' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}\,.$$

En effet (en posant $u = \frac{\Delta x}{x}$ et en notant que $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$) :

$$\begin{aligned}
\ln'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \big(\ln(x+\Delta x) - \ln(x)\big) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \overset{u = \frac{\Delta x}{x}}{=} \frac{1}{x} \ln\Big[\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\Big] \ ;
\end{aligned}$$

l'introduction de la limite dans l'argument du logarithme se justifie par le fait que ln est une fonction continue. Or, $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}$ (*cf.* sous-section C.3.18). En conséquence :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \ln\Big[\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\Big] = \frac{1}{x} \ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{x} \,.$$

Connaissant la dérivée du logarithme naturel, il est aisé, grâce à la formule de changement de base, de déterminer la dérivée de la fonction $\log_a$, où $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$; il s'agit de la fonction ${\log_a}' \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{{\log_a}'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}} \,.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
{\log_a}'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{\ln(a)} \ln(x)\right) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) \\
&= \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(a)} \,.
\end{aligned}$$

C.3.21 Le logarithme naturel en tant que primitive de la fonction inverse

Grâce aux travaux menés par *Bonaventura Cavalieri* et *Evangelista Toricelli*[V] d'une part, et par *Gilles Personne de Roberval*[VI], *René Descartes* et *Pierre de Fermat* d'autre

V. Evangelista Toricelli était un physicien et mathématicien né le 15 octobre 1608 à Faenza, en Émilie-Romagne (dans l'actuelle Italie), et mort le 25 octobre 1647 à Florence, en Toscane. Il est demeuré célèbre notamment pour son invention du baromètre.

VI. Gilles Personne de Roberval était un mathématicien français né le 10 août 1602 dans le village de Roberval (à l'époque dans le royaume de France, aujourd'hui dans la région des Hauts-de-France) et mort le 27 octobre 1675 à Paris.

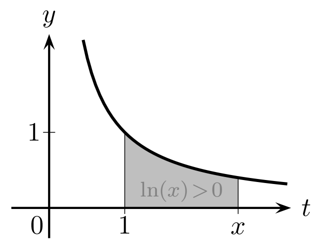
part, on savait, dès les années 1640, que la quadrature[VII] de la courbe d'équation $y = \alpha\, x^r$, α étant un paramètre réel fixe, strictement positif, et r un nombre rationnel différent de -1, pouvait être obtenue à partir de l'expression $\frac{\alpha\, x^{r+1}}{r+1}$. Dès lors, on était au fait que la quadrature de la courbe d'équation $y = \alpha\, x^{-1}$ constituait un cas à part, qui ne pouvait être traité de la même manière.

Parmi les premiers mathématiciens qui ont étudié en détail le cas de la courbe d'équation $y = \alpha\, x^{-1}$, il convient de mentionner *Grégoire de Saint-Vincent*. Dans son ouvrage intitulé *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni*, publié en 1647, on trouve un résultat fondamental en la matière, qui, dans un langage mathématique d'aujourd'hui, pourrait être formulé comme suit :

> *Soit A_n l'aire de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = \alpha\, x^{-1}$ (où α est un paramètre réel fixe, strictement positif), l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b_n$, où a et b_n sont deux nombres réels tels que $0 < a < b_n$. Si b_n est le n-ième terme d'une suite géométrique, alors A_n est le n-ième terme d'une suite arithmétique.*

De cette assertion, il ressort que les quantités b_n et A_n, qui y sont mentionnées, sont liées entre elles par une relation de nature logarithmique. Se pose alors la question de la forme précise de cette relation, ainsi que du logarithme qui y est impliqué.

Étudier l'aire sous la courbe d'équation $y = \alpha\, x^{-1}$, c'est étudier l'intégrale $\int_a^x \alpha\, t^{-1}\, \mathrm{d}t$, où a et x sont des nombres strictement positifs. Dans la présente sous-section, il va être question, non pas de $\int_a^x \alpha\, t^{-1}\, \mathrm{d}t$, mais de $\int_1^x t^{-1}\, \mathrm{d}t$. S'il est vrai que cette dernière expression est moins générale que la première, il n'en demeure pas moins vrai que ses propriétés se transposent sans difficulté au cas plus général.

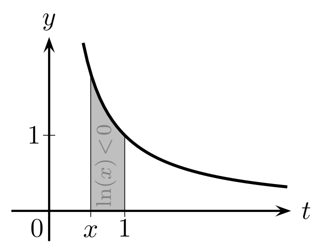


C.3.3 Proposition : *La fonction réelle :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \end{array}$$

et la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *ne sont qu'une seule et même fonction. Autrement dit :*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t\,,$$



pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. *En outre, le nombre réel* e, *dont le logarithme naturel vaut* 1, *peut être vu comme la limite de la quantité* $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ *lorsque la variable réelle* u *tend vers* 0 :

$$\mathrm{e} = \lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\,.$$

VII. Ce que l'on entend par *quadrature* d'une courbe d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction de la variable x, c'est l'aire de la surface, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), délimitée par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Preuve : Soit $P(x)$ la grandeur donnée par :

$$P(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Selon la proposition 4.2.6, énoncée dans la section 4.2 du chapitre 4, $P : x \mapsto P(x)$ peut être vue comme une fonction réelle. Cette fonction est bien définie, à condition que l'intervalle délimité par 1 et x soit contenu dans le domaine dans lequel la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Ce domaine étant $\mathbb{R}^*$, x ne peut être qu'un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Le domaine de définition de P est donc $\mathbb{R}_+^*$. En outre, P satisfait les trois propriétés mentionnées dans les points ci-dessous.

- P n'est pas la fonction qui vaut zéro pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\frac{1}{t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et d'appliquer le quatrième point des propriétés 4.3.5, présentées dans la section 4.3 du chapitre 4.
- P est continue dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $P'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (*cf.* proposition 4.2.6, section 4.2 du chapitre 4), ce qui montre que P' est définie dans tout $\mathbb{R}_+^*$, puis d'appliquer la proposition 3.2.10, donnée dans la section 3.2 du chapitre 3.
- $P(x_1\,x_2) = P(x_1) + P(x_2)$, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Cette égalité se prouve en raisonnant comme suit.
  - ◇ Soit $v = \gamma\,x$, où γ est un nombre réel strictement positif. Alors, selon la proposition 4.2.6 (*cf.* section 4.2 du chapitre 4), d'une part :

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,,$$

    et d'autre part :

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{\gamma x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\int_1^{v} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{v}\,\gamma = \frac{1}{\gamma\,x}\,\gamma = \frac{1}{x}\,.$$

    $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto P(\gamma\,x)$ sont donc toutes les deux des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En conséquence, selon le lemme 4.2.3 (*cf.* section 4.2 du chapitre 4), $P(\gamma\,x) = P(x) + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, où C est un nombre réel.
  - ◇ Comme $P(\gamma\,x) = P(x) + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $P(\gamma \cdot 1) = P(1) + C$. Or, $P(1) = 0$, vu que $\int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$. Donc :

    $$P(\gamma) = P(\gamma \cdot 1) = P(1) + C = C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = P(\gamma)\,.$$

    Ainsi :

    $$P(\gamma\,x) = P(\gamma) + P(x)\,.$$

  Pour obtenir le résultat cherché, il ne reste qu'à rebaptiser γ par x_1 et x par x_2.

En résumé, P est une fonction réelle, définie et continue dans $\mathbb{R}_+^*$, qui transforme un produit en une somme. P est donc un logarithme.

Cherchons à présent la base du logarithme P. À cet effet, déterminons la dérivée P' de P. D'une part, selon la proposition 4.2.6 :

$$P'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{x}\,.$$

D'autre part, en reprenant la définition de la dérivée d'une fonction, et en tenant compte du fait que P est un logarithme (et qu'il satisfait donc les propriétés générales des logarithmes (*cf.* sous-section C.3.6) :

$$\begin{aligned}
P'(x) \;&=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\big(P(x+\Delta x)-P(x)\big)\\
&=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\,P\!\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\,P\!\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\
&=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{x}{\Delta x}\,P\!\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \;=\; \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\,P\!\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\
&\overset{u=\frac{\Delta x}{x}}{=}\; \frac{1}{x}\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\,P(1+u) \;=\; \frac{1}{x}\lim_{u\to 0}P\!\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right) \;=\; \frac{1}{x}\,P\!\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)\;;
\end{aligned}$$

l'introduction de la limite dans l'argument de P se justifie par le fait que P est continue dans $\mathbb{R}_+^*$. Les deux expressions de P' devant être égales, nécessairement :

$$P\!\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right) \;=\; 1\,.$$

Cette égalité montre qu'il existe un nombre réel dont le logarithme P vaut 1 ; et que ce nombre réel, noté e, est donné par :

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\,.$$

En résumé, P est un logarithme ; il s'agit du logarithme qui satisfait $P(\mathrm{e}) = 1$. P est donc le logarithme naturel : $P = \log_{\mathrm{e}} = \ln$. $\square$

C.3.4 Remarque : La fonction P, donnée par :

$$P(x) \;=\; \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

est strictement croissante dans son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$. En effet, comme $\frac{1}{t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t > 0$, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 < x_2$; et donc :

$$P(x_1) \;=\; \int_1^{x_1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;<\; \int_1^{x_1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^{x_2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; P(x_2)\,.$$

C.3.5 Lemme : *Le nombre réel e peut être vu comme la limite de la suite de terme général* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *lorsque* n *tend vers l'infini :*

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Preuve : Selon la proposition précédente :

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} .$$

En particulier :

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}(1+u)^{\frac{1}{u}} .$$

Ainsi, en posant $s=\frac{1}{u}$:

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}(1+u)^{\frac{1}{u}} \overset{s=\frac{1}{u}}{=} \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s ;$$

noter que $s\in\mathbb{R}$, vu que $u\in\mathbb{R}$. Or, si e est la limite de $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ lorsque s tend vers l'infini, s étant un nombre réel, alors e est aussi la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini, n étant un nombre entier. La conclusion du lemme s'ensuit. $\square$

C.3.6 Lemme : *Le nombre réel e est strictement supérieur à* $\frac{5}{2}$ *et strictement inférieur à 3 :*

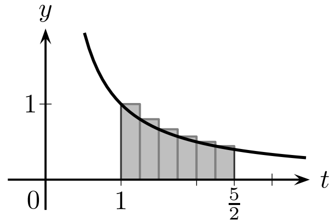
$$\frac{5}{2} \;<\; e \;<\; 3 .$$

Preuve : Soit ${}_{\mathrm{r}}\sigma_6 = \left(\frac{4}{4}\,;\,\frac{5}{4}\,;\,\frac{6}{4}\,;\,\frac{7}{4}\,;\,\frac{8}{4}\,;\,\frac{9}{4}\,;\,\frac{10}{4}\right)$ la subdivision régulière d'ordre 6 de l'intervalle $\left[1;\,\frac{5}{2}\right]$. Alors, par définition de la somme de Darboux supérieure $\overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_6}$ de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ associée à ${}_{\mathrm{r}}\sigma_6$ (*cf.* définition 4.1.5, section 4.1 du chapitre 4), et selon les propos tenus dans la remarque 4.6.16 (*cf.*section 4.6.2 du chapitre 4) :

$$\int_1^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_6} .$$

Or :

$$\begin{aligned}\overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_6} \;&=\; \frac{1}{\frac{4}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{6}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{7}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{8}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{9}{4}}\cdot\frac{1}{4}\\ &=\; \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9} \;=\; \frac{2509}{2520} \;<\; 1 .\end{aligned}$$



Par conséquent :

$$\ln\left(\tfrac{5}{2}\right) \;=\; \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_6} \;<\; 1 \;=\; \ln(\mathrm{e}) ;$$

et comme la fonction logarithme naturel est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{5}{2} < \mathrm{e}\,.$$

Aussi, soit ${}_{\mathrm{r}}\sigma_8 = \left(\frac{4}{4}\,;\,\frac{5}{4}\,;\,\frac{6}{4}\,;\,\frac{7}{4}\,;\,\frac{8}{4}\,;\,\frac{9}{4}\,;\,\frac{10}{4}\,;\,\frac{11}{4}\,;\,\frac{12}{4}\right)$ la subdivision régulière d'ordre 8 de l'intervalle [1; 3]. Alors, par définition de la somme de Darboux inférieure $\underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_8}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ associée à ${}_{\mathrm{r}}\sigma_8$ (*cf.* définition 4.1.5, section 4.1 du chapitre 4), et selon les propos tenus dans la remarque 4.6.16 (*cf.*section 4.6.2 du chapitre 4) :

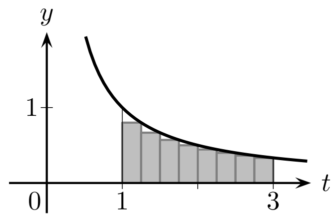
$$\int_1^3 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_8}\,.$$

Or :

$$\begin{aligned}\underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_8} &= \frac{1}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{6}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{7}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{8}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{9}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{10}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{11}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{12}{4}}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12} = \frac{28\,271}{27\,720} > 1\,.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\ln(3) = \int_1^3 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_8} > 1 = \ln(\mathrm{e})\,;$$



et comme la fonction logarithme naturel est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$3 > \mathrm{e}\,.$$

En résumé, $\frac{5}{2} < \mathrm{e} < 3$. □

C.3.7 Remarques : • Dans la sous-section C.3.16, a été abordée, rappelons-le, la question de la compatibilité entre la propriété de continuité et la propriété de transformation d'un produit en une somme. Si l'étude qui y a été faite a révélé une répercussion de la deuxième propriété sur la première, l'étude en question n'a cependant pas été en mesure d'indiquer s'il y a antagonisme entre elles ou non. Grâce aux résultats énoncés dans la présente sous-section, le sujet peut être définitivement clos :

- ◇ le fait que $\ln(x)$ peut s'écrire sous la forme $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (*cf.* proposition C.3.3), montre qu'il y a compatibilité, dans la définition du logarithme naturel, entre la propriété de continuité dans $\mathbb{R}_+^*$ et la propriété de transformation d'un produit en une somme;
- ◇ les propos tenus dans le point précédent, associés au fait que $\log_a(x)$ peut s'écrire sous la forme $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (*cf.* sous-section C.3.17), montrent qu'il y a compatibilité, dans la définition de tout logarithme, entre la propriété de continuité dans $\mathbb{R}_+^*$ et la propriété de transformation d'un produit en une somme.

En conclusion, la définition de logarithme, donnée au début de la présente section, fait pleinement sens.

- Dans la sous-section C.3.12, a été discutée, rappelons-le, la propriété de croissance/décroissance des fonctions logarithmes. Il est intéressant de relever que les résultats qui y ont été obtenus peuvent être retrouvés ici en s'appuyant sur la remarque C.3.4 et en tenant compte du fait que $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$ (*cf.* sous-section C.3.17) : dès lors que ln est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$,
  - ◇ si $a > 1$, $\log_a$ est une fonction strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$ (vu que $\ln(a)$ est strictement positif dans ce cas),
  - ◇ si $0 < a < 1$, $\log_a$ est une fonction strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+^*$ (vu que $\ln(a)$ est strictement négatif dans ce cas).

  Noter que les raisonnements présentés ici sont plus concis que ceux menés dans la sous-section C.3.12.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour domaine de définition l'ensemble $\mathbb{R}^*$ (et non $\mathbb{R}_+^*$). Si la fonction $x \mapsto \ln(x)$ constitue une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$, elle ne l'est certainement pas dans un quelconque intervalle contenu dans $\mathbb{R}_-^*$, vu qu'elle n'est pas définie dans $\mathbb{R}_-^*$. Une fonction qui peut remplir le rôle de primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_-^*$ est la fonction $x \mapsto \ln(-x)$: cette fonction est, en effet, définie dans $\mathbb{R}_-^*$ et elle admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(-x) \;=\; \frac{1}{-x}\,(-1) \;=\; \frac{1}{x}\,.$$

  Des considérations qui viennent d'être faites, il ressort que l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, dans tout intervalle $H \subset \mathbb{R}^*$, peut s'écrire, en toute généralité :

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln|x| + C\,, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}\,;$$

  si :
  - ◇ $H \subset \mathbb{R}_+^*$, alors $|x| = x$ et $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C$;
  - ◇ $H \subset \mathbb{R}_-^*$, alors $|x| = -x$ et $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C$.

  Noter, pour terminer, que $\ln|x| + C$ peut être mis sous la forme $\ln(K|x|)$, où $K = \exp(C)$ (exp étant le symbole de la fonction *exponentielle de base* e, *cf.* section suivante) :

$$\ln|x| + C \;=\; \ln|x| + \ln\big(\exp(C)\big) \;=\; \ln\big(\exp(C)\,|x|\big) \;=\; \ln(K|x|)\,.$$

C.4 Fonctions exponentielles

La fonction $\log_a\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (où $a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$) étant bijective, elle admet une réciproque. Cette réciproque est ce que l'on appelle l'*exponentielle de base a*.

C.4.1 Exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif, différent de 1. On appelle *fonction exponentielle de base* a (ou simplement *exponentielle de base* a), et on note $\exp_a$, la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & y \;=\; \exp_a(x)\,, \end{array} \tag{C.4.1}$$

définie comme suit :

$$y \;=\; \exp_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_a(y) \;=\; x\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

C.4.2 Expression alternative de l'exponentielle de base a

Rappelons que $\log_a(a^x) \;=\; x\log_a(a) \;=\; x$ (où $a \;\in\; \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$). Or, par définition de l'exponentielle de base a, $\log_a\big(\exp_a(x)\big) = x$. Donc, vu que $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, nécessairement :

$$a^x \;=\; \exp_a(x)\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

a^x et $\exp_a(x)$ ne sont qu'une seule et même entité ; a^x peut être vue comme une écriture alternative de $\exp_a(x)$.

L'expression a^x, où a est un nombre réel fixe strictement positif et différent de 1, et x une variable réelle, peut s'interpréter comme suit.

- Lorsque x est un nombre rationnel, x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. L'expression a^x peut alors être considérée comme la racine q-ième de la puissance p-ième de a : $a^x \;=\; a^{\frac{p}{q}} \;=\; \sqrt[q]{a^p}$.
- Lorsque x est un nombre irrationnel, x ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; mais il peut ête approché autant que souhaité par une expression de ce type. En conséquence, grâce à la continuité de la fonction exponentielle de base a, la quantité a^x peut être approchée autant que souhaité par une expression de la forme $a^{\frac{p}{q}}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. C'est ainsi qu'il est possible de donner un sens à a^x lorsque x est irrationnel.

C.4.1 Remarques :

- Comme indiqué en début de section, la base a d'une exponentielle est un nombre réel strictement positif et différent de 1. Noter, cependant, que la quantité a^x fait également sens dans le cas où $a = 1$; cette quantité vaut alors 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si la correspondance qui envoie tout $x \in \mathbb{R}$ sur 1^x (*i.e.* $x \mapsto 1^x$) a la structure d'une fonction réelle, elle ne peut toutefois en aucun cas être vue comme la réciproque d'une fonction logarithme ; et pour cause : $x \mapsto 1^x$ étant une fonction constante, elle n'est pas bijective.
- L'expression a^x fait également sens dans le cas où $a = 0$. Mais dans ce cas, $x \in \mathbb{R}_+^*$; car la quantité 0^x n'est pas définie lorsque x est négative ou nulle.

C.4.3 Propriétés de l'exponentielle de base a

La fonction $\exp_a$ satisfait les relations suivantes :

- $\exp_a(x_1 + x_2) \;=\; \exp_a(x_1)\exp_a(x_2)$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- $\exp_a(0) \;=\; 1$;
- $\exp_a(-x) \;=\; \dfrac{1}{\exp_a(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\exp_a(x_1 - x_2) \;=\; \dfrac{\exp_a(x_1)}{\exp_a(x_2)}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- $\big(\exp_a(x)\big)^s \;=\; \exp_a(s\,x)$, pour tous $x, s \in \mathbb{R}$.
- $\log_a\big(\exp_a(x)\big) \;=\; x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\exp_a\big(\log_a(x)\big) \;=\; x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Ces égalités peuvent aussi s'écrire de la manière suivante :

- $a^{x_1+x_2} \;=\; a^{x_1}\,a^{x_2}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
- $a^0 \;=\; 1$;
- $a^{-x} \;=\; \dfrac{1}{a^x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $a^{x_1-x_2} \;=\; \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- $\big(a^x\big)^s \;=\; a^{sx}$, pour tous $x, s \in \mathbb{R}$.
- $\log_a(a^x) \;=\; x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $a^{\log_a(x)} \;=\; x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Les identités formulées ici découlent directement du fait $\exp_a$ est la fonction réciproque de $\log_a$. Par exemple, la première identité, qui met en évidence le fait que $\exp_a$ transforme une somme en un produit, découle du fait que $\log_a$ transforme un produit en une somme.

C.4.4 Domaine de définition et ensemble image

La fonction $\exp_a$ admet pour domaine de définition l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité et pour ensemble image l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$.

C.4.5 Continuité et asymptote

La fonction $\exp_a$ est continue dans $\mathbb{R}$. En conséquence, elle ne possède aucune asymptote verticale.

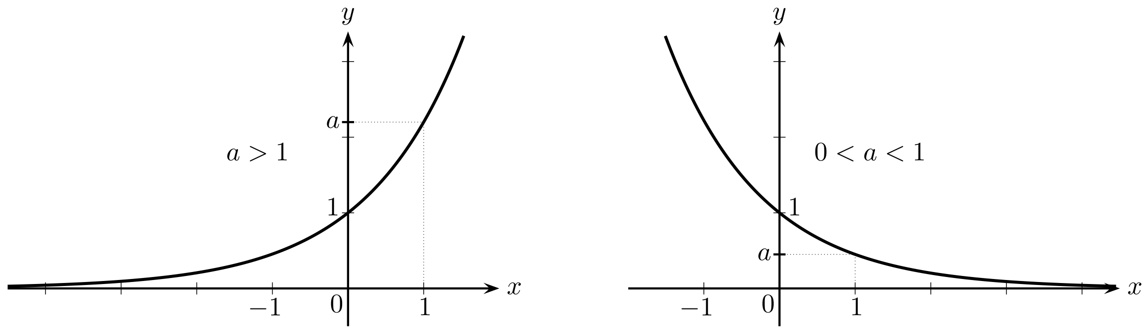
$\exp_a$ admet une unique asymptote ; il s'agit d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$; l'asymptote est :

- à gauche dans le cas où $a > 1$;
- à droite dans le cas où $0 < a < 1$.

C.4.6 Graphe

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

La fonction $\exp_a$ étant la réciproque de $\log_a$, son graphe, dans $\mathbb{R}^2$, peut être déduit de celui de $\log_a$: il suffit de prendre le graphe de $\log_a$ et de lui appliquer une symétrie axiale, dans $\mathbb{R}^2$, dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.



Un échantillon du graphe de $\exp_a$ est donné ci-dessus à gauche, dans le cas où $a > 1$, et ci-dessus à droite, dans le cas où $0 < a < 1$. Noter que $\exp_a$ est :

- strictement croissante dans $\mathbb{R}$, dans le cas où $a > 1$,
- strictement décroissante dans $\mathbb{R}$, dans le cas où $0 < a < 1$.

Ces résultats sont une conséquence de la proposition 2.10.6 (*cf.* section 2.10 du chapitre 2) et du fait que $\log_a$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$ si $a > 1$, strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+^*$ si $0 < a < 1$.

C.4.7 Exponentielle de base e

L'exponentielle de base e se note simplement exp ; l'indice e est omis. Pour rappel, e = 2,71828..... (*cf.* sous-section C.3.18, dans la section précédente).

C.4.8 Dérivée

La fonction exp (*i.e.* $\exp_{\mathrm{e}}$) admet pour dérivée la fonction $\exp' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, donnée par :

$$\boxed{\exp'(x) \;=\; \exp(x)} \;; \qquad \text{autrement écrit :} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x \;=\; \mathrm{e}^x} \;.$$

Pour prouver cette formule, il convient de remarquer, en premier lieu, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \ln\bigl(\exp(x)\bigr) \;=\; x \\ \Leftrightarrow \qquad & \ln\bigl(\exp(x)\bigr) - x \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \ln(y) - x \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

où $y = \exp(x)$. En dérivant l'expression $\ln(y) - x = 0$ des deux côtés par rapport à x, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x, il vient alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(y) - x\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\,.$$

Or, $y = \exp(x)$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \exp'(x)$. D'où le résultat.

Quant à la fonction $\exp_a$, où $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, elle admet pour dérivée la fonction $\exp_a{}'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, donnée par :

$$\boxed{\exp_a{}'(x) = \ln(a)\exp_a(x)}\;; \qquad \text{autrement écrit :} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln(a)\,a^x}\,.$$

Pour prouver ce résultat, il convient de remarquer que $\exp_a(x) = \exp\big(x\ln(a)\big)$:

$$\exp_a(x) = \exp\big[\ln\big(\exp_a(x)\big)\big] = \exp\big(\ln(a^x)\big) = \exp\big(x\ln(a)\big)\,,$$

puis de faire appel à la règle de dérivation de la composition d'une fonction, tout en notant que la dérivée de l'exponentielle (de base e) est l'exponentielle (de base e) :

$$\exp_a{}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp_a(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\big(x\ln(a)\big) = \ln(a)\exp\big(x\ln(a)\big)\,.$$

C.5 Fonctions puissances

C.5.1 Expression d'une fonction puissance

On appelle *fonction puissance* toute fonction de la forme :

$$\begin{aligned} p_a :\ \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = p_a(x)\,, \end{aligned}$$

où :

$$p_a(x) = x^a\,, \tag{C.5.1}$$

a étant un nombre réel fixe.

En toute généralité, l'expression x^a, où a est un nombre réel fixe et x une variable réelle strictement positive, s'interprète à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme :

$$x^a = \exp\big(a\ln(x)\big)\,.$$

En effet, comme $\ln(x^a) = a\ln(x)$, alors $x^a = \exp\big(\ln(x^a)\big) = \exp\big(a\ln(x)\big)$.

C.5.1 Remarques : • Si la fonction p_a a été définie comme ci-dessus, au moyen d'un logarithme et d'une exponentielle, c'est dans le but de pouvoir donner un sens à l'expression x^a, quel que soit le nombre réel a, qu'il soit rationnel ou irrationnel.

- Lorsque a est un nombre rationnel, ou même un nombre entier, l'expression x^a peut s'interpréter non seulement à l'aide d'un logarithme et d'une exponentielle, mais également au moyen d'une puissance entière et éventuellement d'une racine.
  ▷ $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x^a = \begin{cases} \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ fois}} & \text{si } a \in \mathbb{Z}_+^* \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ \dfrac{1}{\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ fois}}} & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases} .$$

  ▷ $a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, a peut s'écrire sous la forme $a = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (la situation où $n = 1$ se ramenant au cas où $a \in \mathbb{Z}$) ; et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\,\right)^m .$$

C.5.2 Domaine de définition et ensemble image

L'expression de la fonction p_a s'interprétant en toute généralité comme l'exponentielle d'un logarithme, son domaine de définition D_{p_a} est celui d'un logarithme :

$$D_{p_a} = \mathbb{R}_+^* .$$

C.5.2 Remarque : Lorsque a est un nombre rationnel, ou même un nombre entier, l'expression de p_a peut s'interpréter non seulement à l'aide d'un logarithme et d'une exponentielle, mais également au moyen d'une puissance entière et éventuellement d'une racine. Dans de telles circonstances, il se peut que le domaine de définition puisse être étendu.

▷ $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas :
  ◇ $D_{p_a} = \mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}_-$,
  ◇ $D_{p_a} = \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{Z}_+^*$.

▷ $a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, a peut s'écrire sous la forme $a = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (la situation où $n = 1$ se ramenant au cas où $a \in \mathbb{Z}$), et donc $p_a(x) = x^a = x^{\frac{m}{n}}$. Si l'on peut écrire $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x}\,)^m$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (ou même pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ lorsque $m \geqslant 1$), on ne peut en revanche pas écrire, en général, de telles égalités lorsque $x \in \mathbb{R}_-^*$. En effet, par exemple, pour $m = 2$ et $n = 6$:
  ◦ si $x \geqslant 0$, alors $x^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x}\,)^2$,
  ◦ si $x < 0$, alors $\sqrt[6]{x^2}$ est définie, alors que $(\sqrt[6]{x}\,)^2$ ne l'est pas.

Certes, il peut sembler légitime de vouloir définir des expressions telles que $x^{\frac{1}{3}}$ dans tout $\mathbb{R}$ (vu que $\sqrt[3]{x^1} = (\sqrt[3]{x}\,)^1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Cependant, comme $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, alors $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}}$, avec $x^{\frac{1}{3}}$ qui serait définie dans tout $\mathbb{R}$ et $x^{\frac{2}{6}}$ qui ne serait définie que dans $\mathbb{R}_+$; ce qui ne serait pas cohérent. Un tel exemple montre qu'il n'est pas opportun de vouloir définir l'expression $x^{\frac{m}{n}}$ dans $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi, comme dans le cas où a est irrationnel, lorsque a est rationnel, le domaine de définition de p_a ne peut pas contenir les nombres réels strictement négatifs. Cela étant, lorsque a est rationnel, le domaine de définition de p_a peut, dans certaines circonstances, contenir le nombre 0. En effet, l'expression $x^{\frac{m}{n}}$ peut être définie lorsque $m \geqslant 1$; en effet, $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0 = (\sqrt[n]{0}\,)^m$. En résumé :

- ◇ $D_{p_a} = \mathbb{R}_+^*$ si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}_-$ et $n \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$,
- ◇ $D_{p_a} = \mathbb{R}_+$ si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$.

En ce qui concerne l'ensemble image I_{p_a} de p_a, dès lors que $D_{p_a} = \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$I_{p_a} = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \in \mathbb{R}^* \\ \{1\} & \text{si } a = 0 \end{cases} .$$

Ce résultat est une conséquence directe du fait que l'ensemble image de la fonction ln est $\mathbb{R}$, que l'ensemble image de la fonction exp est $\mathbb{R}_+^*$ et du fait que $x^a = \exp\big(a\ln(x)\big)$.

C.5.3 Remarque : Comme mentionné dans la remarque précédente, lorsque a est un nombre rationnel, ou même un nombre entier, le domaine de définition D_{p_a} de p_a peut être étendu dans certaines circonstances ; or, une extension du domaine de définition peut engendrer, dans certains cas, une extension de l'ensemble image I_{p_a} de p_a.

- ▷ $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas :
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}_+^*$ si a est un nombre entier pair et strictement négatif,
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}^*$ si a est un nombre entier impair et strictement négatif,
  - ◇ $I_{p_a} = \{1\}$ si $a = 0$,
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}_+$ si a est un nombre entier, pair et strictement positif,
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}$ si a est un nombre entier, impair et strictement positif.
- ▷ $a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, a peut s'écrire sous la forme $a = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$ (la situation où $n = 1$ se ramenant au cas où $a \in \mathbb{Z}$), et donc $p_a(x) = x^a = x^{\frac{m}{n}}$. Alors :
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}_+^*$ si $m \in \mathbb{Z}_-$,
  - ◇ $I_{p_a} = \mathbb{R}_+$ si $m \in \mathbb{Z}_+^*$.

C.5.3 Parité

En toute généralité, la fonction p_a n'est ni paire ni impaire. Et pour cause : le domaine de définition D_{p_a} de p_a, qui est $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas symétrique par rapport à 0.

C.5.4 Remarques : • Comme mentionné précédemment, lorsque a est un nombre rationnel, ou même un nombre entier, l'expression de p_a peut s'interpréter également au moyen d'une puissance entière et éventuellement d'une racine. Dans de telles circonstances, il se peut que p_a soit paire ou impaire.

▷ $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, le domaine de définition D_{p_a} de p_a, qui est $\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}_-$ et $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{Z}_+^*$, est symétrique par rapport à 0. En outre, pour tout $x \in D_{p_a}$:

◇ si a est pair, alors :

$$p_a(-x) = (-x)^a = x^a = p_a(x) \;;$$

◇ si a est impair, alors :

$$p_a(-x) = (-x)^a = -x^a = -p_a(x)\,.$$

En résumé, p_a est paire si a est pair, et p_a est impaire si a est impair.

▷ $a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la fonction p_a n'est ni paire ni impaire ; et pour cause : le domaine de définition D_{p_a} de p_a, qui est $\mathbb{R}_+^*$ si $a \leqslant 0$ et $\mathbb{R}_+$ si $a > 0$, n'est pas symétrique par rapport à 0.

• Il pourrait être légitime de penser qu'une fonction telle que $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est impaire ; car, en effet, si l'on remplaçait $x^{\frac{1}{3}}$ par $\sqrt[3]{x^1}$ (ou, de manière équivalente, par $(\sqrt[3]{x}\,)^1$), on aurait $\sqrt[3]{(-x)^1} = \sqrt[3]{-x^1} = -\sqrt[3]{x^1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (avec $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0). Cela étant, dès lors que $x^{\frac{1}{3}}$ n'est définie que dans $\mathbb{R}_+$ (et qu'elle ne coïncide avec $\sqrt[3]{x^1}$ que dans $\mathbb{R}_+$), il n'est pas possible de conclure autrement qu'en disant que la fonction puissance $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ n'est ni paire ni impaire.

• Le point précédent montre que les fonctions puissances rationnelles ne peuvent pas être identifiées à des compositions de fonctions puissances entières et racines. Certes, les compositions de puissances entières et de racines peuvent servir à donner une interprétation des fonctions puissances rationnelles dans $\mathbb{R}_+^*$, voire dans $\mathbb{R}_+$, mais elles ne permettent en aucun cas une identification. Voilà qui permet de comprendre pourquoi les deux affirmations suivantes ne sont pas contradictoires :

◇ la fonction puissance rationnelle $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ n'est ni paire ni impaire, car définie uniquement dans $\mathbb{R}_+$,

◇ la fonction racine cubique, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ (qui ne doit pas être identifiée à la fonction puissance $\frac{1}{3}$), est impaire : elle est définie dans tout $\mathbb{R}$ et $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

C.5.4 Continuité

La fonction p_a est continue en chaque point de son domaine de définition D_{p_a}. Ce qui permet de l'affirmer, c'est le fait que :

• les fonctions exponentielle et logarithme naturel sont toutes les deux continues dans leurs domaines de définitions respectifs ;

- la fonction puissance p_a est prolongeable par continuité en $x = 0$, lorsque $a > 0$; en effet :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \exp\big(a \ln(x)\big) \;=\; 0 \qquad \text{lorsque } a > 0\,,$$

ce qui conduit à poser $p_a(0) = 0$ lorsque $a > 0$.

C.5.5 Asymptotes et graphe

Dans certaines circonstances, la fonction puissance p_a possède des asymptotes. Le comportement asymptotique dépend de la valeur que prend le nombre réel a.

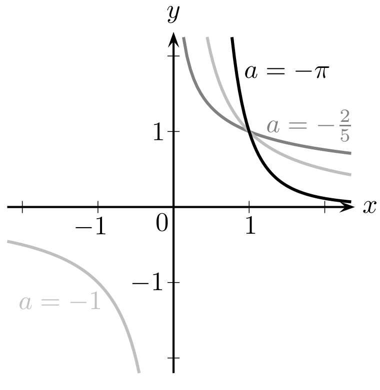
- $a < 0$. Dans ce cas, p_a admet une asymptote verticale, d'équation $x = 0$, ainsi qu'une asymptote horizontale à droite, d'équation $y = 0$. En effet, en posant $u = \ln(x)$, d'une part :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} p_a(x) \;&=\; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^a \;=\; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \exp\big(a \ln(x)\big) \;=\; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \exp\big(-|a| \ln(x)\big) \\ &=\; \lim_{u \to -\infty} \exp\big(-|a|\, u\big) \;=\; \infty\,, \end{aligned}$$

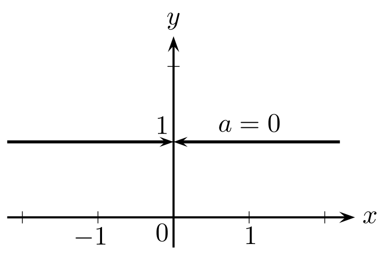
d'autre part :

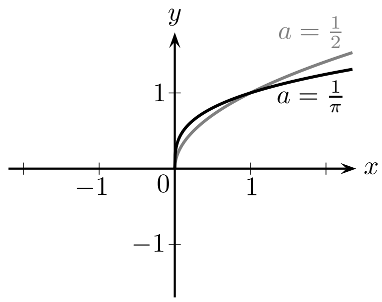
$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} p_a(x) \;&=\; \lim_{x \to \infty} x^a \;=\; \lim_{x \to \infty} \exp\big(a \ln(x)\big) \;=\; \lim_{x \to \infty} \exp\big(-|a| \ln(x)\big) \\ &=\; \lim_{u \to \infty} \exp\big(-|a|\, u\big) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

En outre, dans le cas où elle est définie dans $\mathbb{R}^*$, p_a possède également une asymptote horizontale à gauche, d'équation $y = 0$; ce en raison du fait que p_a est nécessairement soit paire, soit impaire lorsqu'elle est définie dans $\mathbb{R}^*$. La figure ci-contre représente le graphe de p_a, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), pour différentes valeurs strictement négatives de a.



- $a = 0$. Dans ce cas, $p_a = p_0$, où $p_0(x) = x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; p_0 n'est pas définie en $x = 0$ (vu que $p_0(0) = 0^0$, qui est une forme indéterminée). La figure ci-contre représente le graphe de p_0, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy) : il s'agit d'une droite horizontale passant par le point (1; 1) et entrecoupée en (0; 1).





- $0 < a < 1$. Dans ce cas, p_a n'admet aucune asymptote, ni verticale ni horizontale, ni oblique. En effet, d'une part :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} p_a(x) \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\bigl(a\ln(x)\bigr) \;=\; 0\,,$$

d'autre part :

$$\lim_{x\to\infty} p_a(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} x^a \;=\; \lim_{x\to\infty} \exp\bigl(a\ln(x)\bigr) \;=\; \infty\;;$$

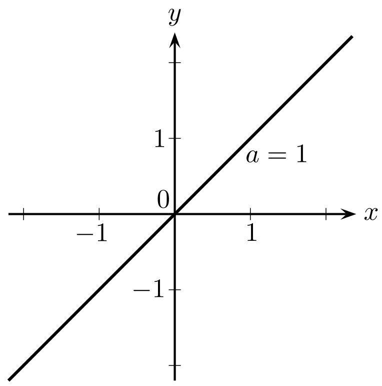
enfin, certes :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_a(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} x^{a-1} \;=\; \lim_{x\to\infty} \exp\bigl(\underbrace{(a-1)}_{<1}\ln(x)\bigr) \;=\; 0\,,$$

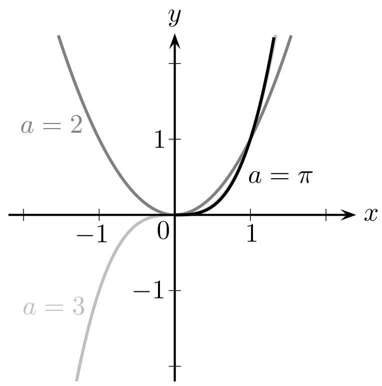
mais :

$$\lim_{x\to\infty} \bigl(p_a(x) - 0\,x\bigr) \;=\; \lim_{x\to\infty} (x^a - 0\,x) \;=\; \lim_{x\to\infty} x^a \;=\; \infty\,.$$

Noter que lorsqu'elle est définie dans $\mathbb{R}$, p_a est soit paire, soit impaire ; en conséquence, si p_a n'admet aucune asymptote horizontale ou oblique à droite, elle ne possède aucune asymptote horizontale ou oblique à gauche non plus. La figure ci-dessus représente le graphe de p_a, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), pour différentes valeurs de a comprises strictement entre 0 et 1.



- $a = 1$. Dans ce cas, $p_a = p_1$, où $p_1(x) = x^1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La figure ci-contre représente le graphe de p_1, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy) : il s'agit de la droite d'équation $y = x$.



- $a > 1$. Dans ce cas, p_a n'admet aucune asymptote, ni verticale ni horizontale, ni oblique. Pour s'en convaincre, il convient de mener un raisonnement similaire à celui effectué dans le cas où $0 < a < 1$; le détail des calculs est laissé en exercice. La figure ci-contre représente le graphe de p_a, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), pour différentes valeurs de a strictement supérieures à 1.

Noter que les propos tenus dans la présente sous-section, ainsi que dans la précédente, permettent de justifier les considérations faites dans la sous-section C.5.2, au sujet de l'ensemble image I_{p_a} de p_a.

C.5.6 Dérivée

La fonction p_a, telle que définie en début de section, admet pour dérivée la fonction ${p_a}'\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\boxed{{p_a}'(x) \;=\; a\,x^{a-1}}\;.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

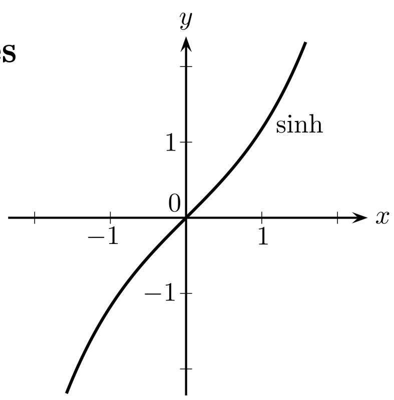
$$\begin{aligned} {p_a}'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_a(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^a \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\bigl(a\ln(x)\bigr) \\ &=\; \exp\bigl(a\ln(x)\bigr)\, a\,\frac{1}{x} \;=\; x^a\,\frac{a}{x} \;=\; \frac{a\,x^a}{x} \;=\; a\,x^{a-1}\,. \end{aligned}$$

C.5.5 Remarque : Lorsque a est un nombre rationnel, ou même un nombre entier, l'expression de p_a peut, rappelons-le, s'interpréter également au moyen d'une puissance entière et éventuellement d'une racine. Dans de telles circonstances, il se peut que la dérivée ${p_a}'$ de p_a soit définie dans un domaine plus étendu que $\mathbb{R}_+^*$.

- ▷ $a \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, la fonction p_a admet une dérivée non seulement dans $\mathbb{R}_+^*$, mais également dans $\mathbb{R}_-^*$; et même en 0 lorsque $a \geqslant 1$. En outre, la formule ${p_a}'(x) = a\,x^{a-1}$ s'applique à tout $x \in \mathbb{R}$ si $a \geqslant 2$ et à tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $a \leqslant 1$. Aussi, lorsque $a = 1$, ${p_a}'(0)$ existe et vaut 1. Noter que tous ces résultats ont déjà été prouvés dans la section C.1, consacrée aux fonctions polynomiales.
- ▷ $a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la fonction p_a peut, si elle est définie dans $\mathbb{R}_+$, admettre une dérivée à droite en $x = 0$.
  - ◇ Si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$ et $m > n$, la dérivée à droite de p_a en 0 est nulle.
  - ◇ Si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$ et $0 < m < n$, la dérivée à droite de p_a en 0 est infinie.

C.6 Fonctions hyperboliques

C.6.1 Sinus, cosinus et tangente hyperboliques



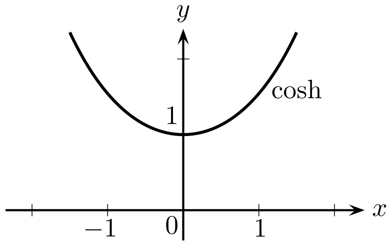
On appelle *sinus hyperbolique* la fonction :

$$\begin{aligned} \sinh :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sinh(x) \end{aligned}$$

donnée par :

$$\sinh(x) \;=\; \frac{1}{2}\bigl(\exp(x) - \exp(-x)\bigr)\,.$$

On appelle *cosinus hyperbolique* la fonction :

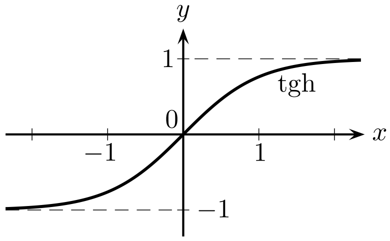


$$\begin{array}{rcl} \cosh: \mathbb{R} & \longrightarrow & [1; \infty[\\ x & \longmapsto & y = \cosh(x) \end{array}$$

donnée par :

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)\,.$$

On appelle *tangente hyperbolique* la fonction :



$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tgh}: \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1; 1[\\ x & \longmapsto & y = \mathrm{tgh}(x) \end{array}$$

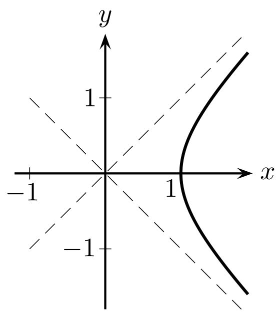
donnée par :

$$\mathrm{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}\,.$$

C.6.2 Origine des termes

La dénomination *sinus*, apparaissant dans l'expression *sinus hyperbolique*, vient du fait que la formulation de sinh en termes d'exponentielles est très similaire à celle de la fonction trigonométrique portant le même nom (*cf.* section C.8). Il en est de même pour les autres fonctions hyperboliques.

Pour ce qui est du qualificatif *hyperbolique*, il vient du fait que les équations paramétriques :



$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cosh(t) \\ y(t) & = & \sinh(t) \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

décrivent, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), ce que l'on appelle une *branche d'hyperbole*.

C.6.3 Le cosinus hyperbolique en architecture

Lorsqu'une corde, une chaîne ou une chaînette est suspendue par ses deux extrémités, elle s'incurve sous son propre poids.

La forme que prend une chaînette suspendue a suscité l'intérêt de plusieurs scientifiques ayant vécu au XVII$^{\text{e}}$ siècle.

- Galilée en parlait comme d'un morceau de parabole.
- *Christiaan Huygens*[VIII] était convaincu qu'il s'agissait d'un autre type de courbe.

VIII. Christiaan Huygens était un scientifique néerlandais, né en 1629 à La Haie (à l'époque dans les Provinces-Unies, aujourd'hui aux Pays-Bas) et mort en 1695 dans la même ville. Il est demeuré célèbre pour ses travaux en physique (notamment la théorie ondulatoire de la lumière) et en astronomie (découverte de Titan, satellite de Saturne, description des anneaux de Saturne).

La description correcte de la forme d'une chaînette a été obtenue pour la première fois vers la fin du XVII^e^ siècle ; on la doit à Jean Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz et également à Christiaan Huygens. Si les trois savants ont étudié la question pratiquement simultanément, ils l'ont résolue de façon indépendante. Tous les trois sont arrivés aux mêmes conclusions ; conclusions qui excluent toute forme parabolique.

Pont suspendu Charles Kuonen
Vallée de Zermatt, Suisse

Le problème de la forme d'une chaînette suspendue se résout en considérant un morceau de chaînette de longueur infiniment petite et en analysant les forces qui agissent sur le morceau en question. Toutes les forces étant contenues dans un seul plan vertical, la chaînette se trouve nécessairement dans ce même plan. En plaçant un système de coordonnées cartésiennes Oxy dans le plan de la chaînette, de sorte que Ox soit horizontal et Oy vertical, orienté vers le haut, puis en effectuant les calculs dans le détail, on arrive finalement à une expression du type :

$$y - y_0 \;=\; a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) ,$$

où x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque sur la chaînette, x_0 et $y_0 + a$ les coordonnées du point de la chaînette le plus bas ; pour ce qui est de a, il s'agit d'un paramètre réel fixe, qui dépend de la masse de la chaînette, ainsi que de la tension à laquelle la chaînette est soumise.

Lorsqu'il s'agit de construire une arche, une voûte ou une coupole, se pose la question de la forme idéale, pour laquelle la stabilité est maximale.

- Dans la deuxième moitié du XVII^e^ siècle, *Robert Hooke*[IX] a apporté la solution suivante : toute voûte doit avoir un profil identique à celui d'une chaînette suspendue, mais inversé.

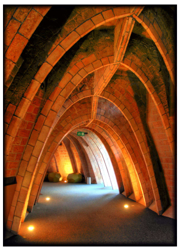
Le résultat obtenu par Hooke fait sens : alors que dans une chaînette suspendue, les forces en jeu ne sont que des forces de traction, dans une arche en forme de chaînette renversée, les forces en jeu ne sont que des forces de compression ; or les forces de compression sont les forces les mieux supportées par les matériaux de construction.

Nombre d'édifices voûtés ont pour forme un morceau de graphe du cosinus hyperbolique ; par exemple :

- l'arc du palais *Taq-e Kisra*, construit en 540 à *Ctésiphon*, ancienne ville perse située non loin de l'actuelle Bagdad, en Irak ;
- des couloirs de la *Casa Milà*, à Barcelone, en Catalogne (œuvre de l'architecte catalan *Antoni Gaudi*) ;
- le *Sheffield Winter Garden*, à Sheffield, en Angleterre (œuvre du cabinet d'ingénierie *Buro Happold*).

IX. Robert Hooke était un scientifique anglais, né en 1635 à Freshwater, sur l'île de Wight (en Angleterre), et mort en 1703 à Londres. Il a été un savant touche-à-tout, qui s'est illustré dans divers domaines : physique, astronomie, architecture, etc.

Palais Taq-e Kisra



Casa Milà

Sheffield Winter Garden

C.6.4 Relation fondamentale

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques satisfont la relation fondamentale :

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) \; = \; 1}\,, \qquad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}\,;$$

en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) \; &= \; \big(\cosh(x)\big)^2 - \big(\sinh(x)\big)^2 \\
&= \; \left[\frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)\right]^2 \\
&= \; \frac{1}{4}\Big(\big(\exp(x)\big)^2 + 2\exp(x)\exp(-x) + \big(\exp(-x)\big)^2\Big) + \\
&\qquad -\frac{1}{4}\Big(\big(\exp(x)\big)^2 - 2\exp(x)\exp(-x) + \big(\exp(-x)\big)^2\Big) \\
&= \; \frac{1}{4}\cdot 2\exp(x)\exp(-x) + \frac{1}{4}\cdot 2\exp(x)\exp(-x) \\
&= \; \exp(x)\exp(-x) \; = \; \frac{\exp(x)}{\exp(x)} \; = \; 1\,.
\end{aligned}$$

C.6.5 Domaines de définition et ensembles image

Le domaine de définition de la fonction sinh est l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité ; il en est de même pour les fonctions cosh et tgh. Pour ce qui est de l'ensemble image, il diffère d'une fonction à l'autre :

- la fonction sinh a pour ensemble image l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité ;
- la fonction cosh a pour ensemble image l'intervalle $[1; \infty[$;
- la fonction tgh a pour ensemble image l'intervalle $]-1; 1[$.

Ces résultats se déduisent essentiellement des propos tenus dans la sous-sections C.6.8 ci-dessous.

C.6.6 Parité

Les fonctions sinh et tgh sont toutes les deux impaires ; quant à la fonction cosh, elle est paire.

- La fonction sinh est impaire. En effet, son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0 ; en outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(-x) - \exp(-(-x))\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\exp(-x) - \exp(x)\big) \\
&= -\frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big) \\
&= -\sinh(x)\,.
\end{aligned}$$

- La fonction cosh est paire. En effet, son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0 ; en outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cosh(-x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(-x) + \exp(-(-x))\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\exp(-x) + \exp(x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big) \\
&= \cosh(x)\,.
\end{aligned}$$

- La fonction tgh est impaire. En effet, son domaine de définition, qui est $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0 ; en outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{tgh}(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\operatorname{tgh}(x)\,.$$

C.6.7 Zéros

Les fonctions sinh et tgh s'annulent en $x = 0$, et uniquement en $x = 0$. Quant à la fonction cosh, elle ne s'annule jamais.

- sinh s'annule en $x = 0$ et uniquement en $x = 0$; en effet :

$$\begin{aligned}
\sinh(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exp(x) - \exp(-x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exp(2\,x) - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0\,.
\end{aligned}$$

- cosh ne s'annule jamais ; en effet :

$$\begin{aligned} \cosh(x) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(x)+\exp(-x) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(2\,x)+1 \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exp(2\,x) \;=\; -1\;; \end{aligned}$$

or, cette dernière équation ne possède aucune solution réelle.

- tgh s'annule en $x=0$ et uniquement en $x=0$; en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{tgh}(x) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sinh(x) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

C.6.8 Continuité et asymptotes

Les fonctions sinh, cosh et tgh sont toutes continues dans $\mathbb{R}$. Ces résultats se déduisent du fait que la fonction exp est continue dans $\mathbb{R}$, ainsi que du fait que :

- le sinus hyperbolique est essentiellement une différence d'exponentielles,
- le cosinus hyperbolique est essentiellement une somme d'exponentielles,
- la tangente hyperbolique est le quotient du sinus hyperbolique, qui est continu dans $\mathbb{R}$, et du cosinus hyperbolique, qui est continu et ne s'annule jamais dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions sinh, cosh, et tgh étant toutes continues dans $\mathbb{R}$, aucune d'elles ne possède une quelconque asymptote verticale.

Ni la fonction sinh, ni la fonction cosh n'admet une quelconque asymptote horizontale ou oblique. Pour ce qui est de la fonction tgh, elle admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y=1$, ainsi qu'une asymptote horizontale à gauche d'équation $y=-1$.

- La fonction sinh ne possède ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique ; en effet :

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big) \;=\; \frac{1}{2}\,(\infty-0) \;=\; \infty$$

et :

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big) \;=\; \frac{1}{2}\,(0-\infty) \;=\; -\infty\;;$$

aussi, grâce à la règle de Bernoulli-L'Hôpital (B-H) :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{x} \;&=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2\,x} \\ &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \;=\; \frac{\infty+0}{2} \;=\; \infty \end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2\,x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \frac{0+\infty}{2} = \infty\,.$$

- La fonction cosh ne possède ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique ; en effet :

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty\,;$$

aussi :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh(x)}{x} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty\,.$$

Les calculs étant similaires à ceux du point précédent, ils ne sont pas détaillés ici.

- La fonction tgh admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 1$, ainsi qu'une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = -1$; en effet :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh}(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)\big(1-\exp(-2\,x)\big)}{\exp(x)\big(1+\exp(-2\,x)\big)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\exp(-2\,x)}{1+\exp(-2\,x)} = \frac{1-0}{1+0} = 1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh}(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(-x)\big(\exp(2\,x)-1\big)}{\exp(-x)\big(\exp(2\,x)+1\big)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(2\,x)-1}{\exp(2\,x)+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1\,.\end{aligned}$$

C.6.9 Dérivées

La fonction sinh admet pour dérivée la fonction cosh ; autrement dit, la fonction sinh admet pour dérivée la fonction $\sinh'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\sinh'(x) = \cosh(x)}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big) = \frac{1}{2}\Big[\exp(x)-\big(-\exp(-x)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big) = \cosh(x)\,.\end{aligned}$$

La fonction cosh admet pour dérivée la fonction sinh ; autrement dit, la fonction cosh admet pour dérivée la fonction $\cosh'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\cosh'(x) \;=\; \sinh(x)}\;.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cosh'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)\right)\\
&=\; \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)\\
&=\; \frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big) \;=\; \sinh(x)\,.
\end{aligned}$$

La fonction tgh admet pour dérivée la fonction $\mathrm{tgh}'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{tgh}'(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\cosh^2(x)} & \text{ou} \\[2ex] 1-\mathrm{tgh}^2(x) & \end{cases}}\;.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tgh}'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{tgh}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) \;=\; \frac{\cosh(x)\cosh(x)-\sinh(x)\sinh(x)}{\big(\cosh(x)\big)^2}\\
&=\; \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\cosh^2(x)} & \text{ou} \\[2ex] 1-\mathrm{tgh}^2(x) & \end{cases}\;;
\end{aligned}$$

les deux expressions derrière l'accolade sont équivalentes ; ce sont deux écritures différentes pour le même objet.

C.6.10 Bijectivité

Les fonctions sinh et tgh sont strictement croissantes dans $\mathbb{R}$; quant à la fonction cosh, elle est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$.

Pour prouver ces assertions, il suffit de prendre deux éléments $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$, puis d'appliquer le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[x_1; x_2]$ (*cf.* théorème 3.9.4, section 3.9 du chapitre 3). Noter que le théorème est applicable vu que sinh, cosh et tgh sont toutes continues et dérivables dans $\mathbb{R}$.

- Dans le cas de la fonction sinh, il vient :

$$\sinh(x_2)-\sinh(x_1) \;=\; \sinh'(c)\,(x_2-x_1)\;,$$

où c est un nombre réel dans l'intervalle $]x_1; x_2[$. Or, $\sinh'(c) = \cosh(c) > 0$, vu que $\cosh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\sinh(x_2) - \sinh(x_1) \;=\; \cosh(c)\,(x_2 - x_1) \;>\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sinh(x_1) \;<\; \sinh(x_2)\,,$$

ce qui montre la croissance stricte de sinh dans $\mathbb{R}$.

- Dans le cas de la fonction cosh, il vient :

$$\cosh(x_2) - \cosh(x_1) \;=\; \cosh'(c)\,(x_2 - x_1)\;,$$

où c est un nombre réel dans l'intervalle $]x_1; x_2[$. Or, $\cosh'(c) = \sinh(c)$; et $\sinh(c) < 0$ si $c < 0$, $\sinh(c) > 0$ si $c > 0$. Donc :

$$\cosh(x_2) - \cosh(x_1) \;=\; \sinh(c)\,(x_2 - x_1) \begin{cases} <\;0 & \text{si } x_1 < x_2 \leqslant 0 \\ >\;0 & \text{si } 0 \leqslant x_1 < x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cosh(x_1) \;>\; \cosh(x_2) & \text{si } x_1 < x_2 \leqslant 0 \\ \cosh(x_1) \;<\; \cosh(x_2) & \text{si } 0 \leqslant x_1 < x_2 \end{cases}\,,$$

ce qui montre que cosh est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante dans $\mathbb{R}_+$.

- Dans le cas de la fonction tgh, il vient :

$$\operatorname{tgh}(x_2) - \operatorname{tgh}(x_1) \;=\; \operatorname{tgh}'(c)\,(x_2 - x_1)\;,$$

où c est un nombre réel dans l'intervalle $]x_1; x_2[$. Or, $\operatorname{tgh}'(c) = 1 - \operatorname{tgh}^2(c) > 0$, vu que $-1 < \operatorname{tgh}(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\operatorname{tgh}(x_2) - \operatorname{tgh}(x_1) \;=\; \bigl(1 - \operatorname{tgh}^2(c)\bigr)\,(x_2 - x_1) \;>\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tgh}(x_1) \;<\; \operatorname{tgh}(x_2)\,,$$

ce qui montre la croissance stricte de tgh dans $\mathbb{R}$.

Les résultats qui viennent d'être établis, associés aux propos tenus dans la sous-section C.6.5, permettent de formuler les conclusions suivantes.

- La fonction $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
- La fonction :
  - ◇ $\cosh : \mathbb{R}_- \to [1; \infty[$ (dont le domaine de définition est restreint à $\mathbb{R}_-$) est bijective,
  - ◇ $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1; \infty[$ (dont le domaine de définition est restreint à $\mathbb{R}_+$) est bijective.
- La fonction $\operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \to\,]-1; 1[$ est bijective.

En effet, dès lors qu'une fonction réelle est strictement croissante ou strictement décroissante dans un ensemble, elle est nécessairement injective dans cet ensemble ; en outre, si elle a pour ensemble d'arrivée son ensemble image, la fonction en question est également surjective ; elle est, par conséquent, bijective.

C.6.11 Autres fonctions hyperboliques

À partir des fonctions sinh, cosh et tgh, il est possible de définir d'autres fonctions hyperboliques, telles :

- la *sécante hyperbolique*, notée sech,
- la *cosécante hyperbolique*, notée csch,
- la *cotangente hyperbolique*, notée ctgh.

Par définition :

$$\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}\,, \qquad \operatorname{csch} = \frac{1}{\sinh}\,, \qquad \operatorname{ctgh} = \frac{1}{\operatorname{tgh}}\,.$$

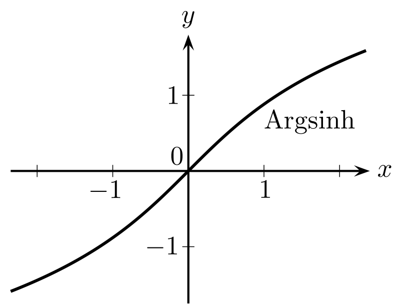
Les propriétés des fonctions sech, csch et ctgh se déduisent des propriétés de sinh, cosh et tgh.

C.7 Fonctions hyperboliques réciproques

C.7.1 Arguments sinus, cosinus et tangente hyperboliques

On appelle *argument sinus hyperbolique* la fonction réciproque du sinus hyperbolique, *i.e.* la fonction :

$$\begin{aligned}\operatorname{Argsinh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto y = \operatorname{Argsinh}(x)\end{aligned}$$

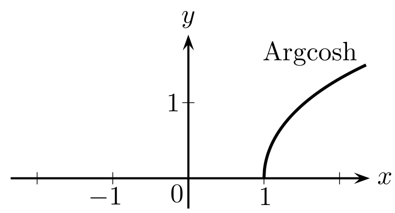


donnée par :

$$y = \operatorname{Argsinh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \sinh(y) = x\,, \quad \text{où } x \in \mathbb{R}\,.$$

On appelle *argument cosinus hyperbolique* la fonction réciproque du cosinus hyperbolique ayant pour ensemble image les nombres réels positifs ; il s'agit de la fonction :

$$\begin{aligned}\operatorname{Argcosh} : [1; \infty[&\longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x &\longmapsto y = \operatorname{Argcosh}(x)\end{aligned}$$

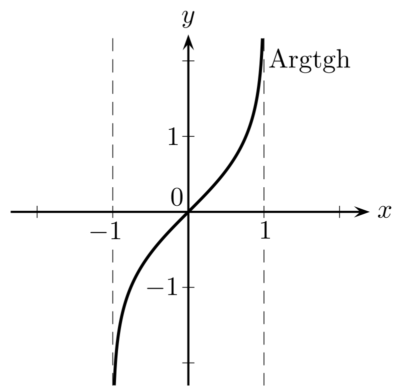


donnée par :

$$y = \operatorname{Argcosh}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \cosh(y) = x\,, \text{ où } x \in [1; \infty[\,.$$

On appelle *argument tangente hyperbolique* la fonction réciproque de la tangente hyperbolique, *i.e.* la fonction :

$$\begin{aligned}\operatorname{Argtgh} :]-1; 1[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto y = \operatorname{Argtgh}(x)\end{aligned}$$



donnée par :

$$y = \operatorname{Argtgh}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{tgh}(y) = x\,, \qquad \text{où } x \in \,]-1;\, 1[\;.$$

C.7.1 Remarques :

- Les fonctions :

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \cosh : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1;\, \infty[\;, \qquad \operatorname{tgh} : \mathbb{R} \longrightarrow\,]-1;\, 1[$$

  sont, rappelons-le, toutes bijectives. Les définitions données ci-dessus font donc pleinement sens.
- La fonction Argsinh étant la réciproque de la fonction sinh, ses propriétés peuvent être, pour la plupart, déduites directement des propriétés de sinh. Il en est de même pour Argcosh et cosh, ainsi que pour Argtgh et tgh.

C.7.2 Origine des termes

Le terme *argument*, qui apparaît dans les noms des fonctions hyperboliques réciproques, trouve son origine dans la théorie générale sur les fonctions réciproques.

Si $f : D \to E$ est une fonction bijective, donnée par $y = f(x)$, cette fonction admet une réciproque ${}^{r}\!f : E \to D$, donnée par ${}^{r}\!f(y) = x$. ${}^{r}\!f$ permet donc de retrouver, à partir de l'élément $y = f(x)$, l'élément x duquel dépend f. Or, cet élément x n'est autre que ce que l'on appelle communément l'argument de f.

Par exemple, dans le cas de la fonction argument sinus hyperbolique :

$$y = \sinh(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Argsinh}(y) = x\,,$$

x étant effectivement l'argument de la fonction sinh.

C.7.3 Expressions alternatives des fonctions hyperboliques réciproques

Les fonctions hyperboliques réciproques peuvent être exprimées au moyen du logarithme naturel.

- La fonction Argsinh peut s'écrire :

$$\boxed{\operatorname{Argsinh}(x) = \ln\!\big(x + \sqrt{x^2+1}\,\big)}\;.$$

  Pour prouver cette égalité, il convient de poser l'équation $x = \sinh(y)$, puis de la résoudre par rapport à y. Concrètement :

$$\begin{aligned}
& & x &= \sinh(y) \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{1}{2}\big(\exp(y) - \exp(-y)\big) \\
&\Leftrightarrow & 2\,x\exp(y) &= \exp(y)\exp(y) - \exp(-y)\exp(y) \\
&\Leftrightarrow & 2\,x\exp(y) &= \big(\exp(y)\big)^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow & 0 &= \big(\exp(y)\big)^2 - 2\,x\exp(y) - 1\;;
\end{aligned}$$

noter qu'une multiplication par $2\exp(y)$ a été effectuée pour passer de la deuxième à la troisième ligne du calcul. La dernière égalité obtenue n'étant rien d'autre qu'une équation du deuxième degré en $\exp(y)$, elle admet pour solutions :

$$\begin{aligned}
\exp(y) &= \frac{2\,x \pm \sqrt{(-2\,x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\
&= \frac{2\,x \pm \sqrt{4\,x^2 + 4}}{2} = \frac{2\,x \pm \sqrt{4\,(x^2+1)}}{2} \\
&= \frac{2\,x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Remarquer que la solution $x - \sqrt{x^2+1}$ n'est pas envisageable ; et pour cause : $x - \sqrt{x^2+1} < x - \sqrt{x^2} = x - |x| \leqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, alors que $\exp(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\exp(y) = x + \sqrt{x^2+1}$, d'où :

$$y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)\,.$$

- La fonction Argcosh peut s'écrire :

$$\boxed{\operatorname{Argcosh}(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)}\,.$$

Pour prouver cette égalité, il convient de poser $x = \cosh(y)$, puis de procéder comme au point précédent. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
x = \cosh(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\bigl(\exp(y) + \exp(-y)\bigr) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = \bigl(\exp(y)\bigr)^2 - 2\,x\exp(y) + 1\,,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\exp(y) &= \frac{2\,x \pm \sqrt{(-2\,x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2\,x \pm 2\sqrt{x^2-1}}{2} \\
&= \frac{2\,x \pm \sqrt{4\,x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Or, l'expression $x \pm \sqrt{x^2-1}$ n'est définie que pour $x \in \,]-\infty;\, -1] \cup [1;\, \infty[$; en outre :

$$\begin{cases} x \pm \sqrt{x^2-1} < 0 & \text{si } x \in \,]-\infty;\, -1] \\ x \pm \sqrt{x^2-1} > 0 & \text{si } x \in [1;\, \infty[\end{cases}.$$

En conséquence, l'égalité $\exp(y) = x \pm \sqrt{x^2-1}$ n'a de sens que si $x \in [1;\, \infty[$. Aussi, pour tout $x \in [1;\, \infty[$:

$$\begin{cases} 0 < x - \sqrt{x^2-1} \leqslant 1 \\ 1 \leqslant x + \sqrt{x^2-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln\bigl(x - \sqrt{x^2-1}\bigr) \leqslant 0 \\ \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Or, par définition de l'argument cosinus hyperbolique, $y \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, l'expression $\ln\bigl(x - \sqrt{x^2-1}\bigr)$ doit être abandonnée ; et donc :

$$y \;=\; \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)\,.$$

- La fonction $\mathrm{Argtgh}(x)$ peut s'écrire :

$$\boxed{\mathrm{Argtgh}(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\,.$$

Pour prouver cette égalité, il convient de poser l'équation $x = \sinh(y)$, puis de la résoudre par rapport à y. Concrètement :

$$\begin{aligned}
& & x &= \mathrm{tgh}(y)\\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{\exp(y)+\exp(-y)}\\
&\Leftrightarrow & x\exp(y)+x\exp(-y) &= \exp(y)-\exp(-y)\\
&\Leftrightarrow & x\exp(y)\exp(y)+x\exp(-y)\exp(y) &= \exp(y)\exp(y)-\exp(-y)\exp(y)\\
&\Leftrightarrow & x\exp(2\,y)+x &= \exp(2\,y)-1\\
&\Leftrightarrow & x\exp(2\,y)-\exp(2\,y) &= -1-x\\
&\Leftrightarrow & (x-1)\exp(2\,y) &= -(1+x)\\
&\Leftrightarrow & -(1-x)\exp(2\,y) &= -(1+x)\\
&\Leftrightarrow & \exp(2\,y) &= \frac{1+x}{1-x}\;;
\end{aligned}$$

d'où :

$$2\,y \;=\; \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad\Leftrightarrow\qquad y \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,.$$

C.7.4 Domaines de définition et ensembles image

Les fonctions Argsinh, Argcosh et Argtgh ont des domaines de définition différents :

- le domaine de définition d'Argsinh est $\mathbb{R}$;
- le domaine de définition d'Argcosh est $[1; \infty[$;
- le domaine de définition d'Argtgh est $]-1; 1[$.

Elles n'ont, en outre, pas toutes le même ensemble image :

- l'ensemble image d'Argsinh est $\mathbb{R}$;
- l'ensemble image d'Argcosh est $\mathbb{R}_+$;
- l'ensemble image d'Argtgh est $\mathbb{R}$.

Tous ces résultats découlent des définitions mêmes des fonctions Argsinh, Argcosh et Argtgh.

C.7.5 Parité

Les fonctions Argsinh et Argtgh sont impaires ; quant à la fonction Argcosh, elle n'est ni paire, ni impaire.

C.7.6 Zéros

Les fonctions Argsinh et Argtgh s'annulent en $x = 0$, et uniquement en $x = 0$. Pour ce qui est de la fonction Argcosh, elle s'annule en $x = 1$, et uniquement en $x = 1$.

C.7.7 Continuité et asymptotes

La fonction Argsinh est continue dans son domaine de définition ; il en est de même pour les fonctions Argcosh et Argtgh.

Ni Argsinh, ni Argcosh ne possède une quelconque asymptote. Pour ce qui est d'Argtgh, elle admet deux asymptotes verticales, l'une d'équation $x = -1$, l'autre d'équation $x = 1$; ce sont les seules asymptotes qu'elle possède.

C.7.8 Dérivées

La fonction Argsinh admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Argsinh}'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Argsinh}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argsinh}'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Argsinh}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\,\bigr)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\,\sqrt{x^2+1}}\,2\,x\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.
\end{aligned}$$

La fonction Argcosh admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Argcosh}' :]1; \infty[\to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Argcosh}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}\;.$$

La preuve de cette formule étant similaire à celle de la dérivée de Argsinh, elle est laissée en exercice.

La fonction Argtgh admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Argtgh}' :]-1; 1[\to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Argtgh}'(x) \;=\; \frac{1}{1-x^2}}\;.$$

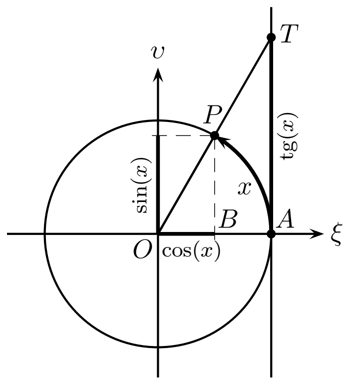
En effet, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argtgh}'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Argtgh}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] \\
&=\; \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\ln(1+x)-\ln(1-x)\big] \\
&=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\,(-1)\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \\
&=\; \frac{1}{2}\,\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} \;=\; \frac{1}{1-x^2}\;.
\end{aligned}$$

C.8 Fonctions trigonométriques

C.8.1 Sinus, cosinus et tangente

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $O\xi\upsilon$ un système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$, comme indiqué sur la figure ci-contre (où l'axe $O\xi$ est horizontal et va vers la droite, l'axe $O\upsilon$ est vertical et va vers le haut). Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 1, centré en O. Ce cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe $O\xi$ en deux points, l'un de coordonnées $(-1; 0)$, l'autre de coordonnées $(1; 0)$; appelons A le point de coordonnées $(1; 0)$. Considérons un axe, (*i.e.* une droite réelle) et nommons-le x. Enroulons cet axe autour du cercle $\mathcal{C}$, de sorte que l'origine de l'axe (*i.e.* le point de l'axe où $x = 0$) soit au point A, que les x positifs soient sur $\mathcal{C}$ en allant, depuis A, dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, et que les x négatifs soient sur $\mathcal{C}$ en allant, depuis A, dans le sens des aiguilles d'une montre.



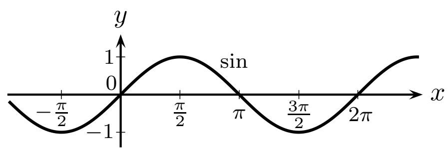
Considérons un nombre réel x sur l'axe enroulé autour de $\mathcal{C}$. À ce x peut être associé un point P sur $\mathcal{C}$ de la manière suivante : P est l'unique point sur $\mathcal{C}$ pour lequel l'arc de cercle $\widehat{AP}$ vaut x ; autrement dit, P est l'unique point sur $\mathcal{C}$:

- pour lequel la longueur de l'arc de cercle entre A et P vaut $|x|$,
- qui est atteint, depuis le point A, en allant dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (respectivement en allant dans le sens des aiguilles d'une montre) si $x \geqslant 0$ (respectivement si $x < 0$).

Soient ξ_P et υ_P les coordonnées de P, où ξ_P est un élément sur l'axe $O\xi$ et υ_P un élément sur l'axe $O\upsilon$. Il est d'usage d'appeler *cosinus* de x la coordonnée ξ_P de P et *sinus* de x la coordonnée υ_P de P ; quant au cercle $\mathcal{C}$, il est communément appelé *cercle trigonométrique*. Lorsque la quantité x est considérée comme une variable qui peut prendre *a priori* toutes les valeurs réelles possibles, le cosinus et le sinus peuvent être vus comme des fonctions réelles de la variable réelle x.

On appelle *sinus* la fonction :

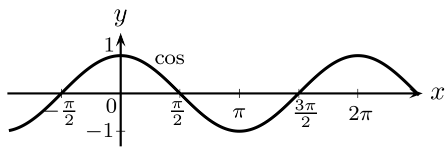
$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;\, 1] \\ & x & \longmapsto & y = \sin(x)\ , \end{array}$$



où $\sin(x)$ est la coordonnée υ_P de l'unique point $P(\xi_P;\, \upsilon_P) \in \mathcal{C}$ pour lequel l'arc de cercle $\widehat{AP}$ vaut x.

On appelle *cosinus* la fonction :

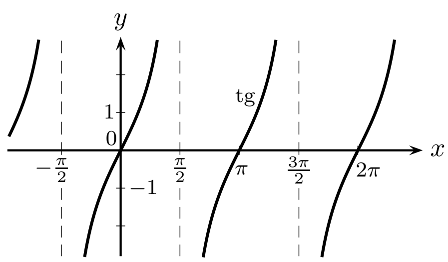
$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;\, 1] \\ & x & \longmapsto & y = \cos(x)\ , \end{array}$$



où $\cos(x)$ est la coordonnée ξ_P de l'unique point $P(\xi_P;\, \upsilon_P) \in \mathcal{C}$ pour lequel l'arc de cercle $\widehat{AP}$ vaut x.

On appelle *tangente* la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tg} : & \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \mathrm{tg}(x)\ , \end{array}$$



où $\mathrm{tg}(x)$ est définie par la relation :

$$\mathrm{tg}(x) \;=\; \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ .$$

Noter que $\mathrm{tg}(x)$ peut être également définie comme étant la coordonnée υ_T du point $T(\xi_T\,;\, \upsilon_T)$, représenté sur la première figure de la présente sous-section, résultant de l'intersection de la droite passant par O et P et de la droite parallèle à l'axe $O\upsilon$, passant par A. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les triangles OAT et OBP sont *semblables*[X] ; il vient alors :

$$\frac{BP}{OB} = \frac{AT}{OA} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\upsilon_T}{1}\,,$$

et ce quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C.8.2 Origine des termes

On appelle *trigonométrie* le domaine des mathématiques qui traite des relations entre les côtés et les angles des triangles plans. Le terme trigonométrie a pour origine deux mots grecs :

- *τρίγωνος* (*trigonos*), qui signifie *triangulaire*,
- *μέτρον* (*metron*), qui signifie *mesure*.

Les fonctions *sinus*, *cosinus* et *tangente*, définies dans la sous-section précédente, sont des fonctions dites *trigonométriques*. Si ces fonctions portent un tel qualificatif, c'est en raison du fait qu'elles ont un lien étroit avec la notion de triangle ; la première figure de la sous-section précédente le met en évidence :

- $\sin(x)$ est la longueur du côté $\overline{BP}$, dans le triangle OBP,
- $\cos(x)$ est la longueur du côté $\overline{OB}$, dans le triangle OBP,
- $\mathrm{tg}(x)$ est la longueur du côté $\overline{AT}$, dans le triangle OAT.

Dans ce contexte, la grandeur x peut être interprétée comme étant l'angle, ou plus précisément une mesure de l'angle entre les côtés $\overline{OB}$ (respectivement $\overline{OA}$) et OP (respectivement $\overline{OT}$) du triangle OBP (respectivement OAT).

Parfois, on parle de fonctions *circulaires*, au lieu de fonctions *trigonométriques* ; ce en raison du fait que les fonctions sinus, cosinus et tangente ont un lien étroit non seulement avec le concept de triangle, mais aussi avec la notion de cercle (*cf.* cercle trigonométrique défini dans la sous-section précédente).

C.8.3 Les fonctions trigonométriques dans la nature

Nombre de phénomènes naturels cycliques peuvent être décrits à l'aide de fonctions trigonométriques. Un exemple : la durée de l'ensoleillement chaque jour, en un point de la Terre situé entre les cercles polaires arctique et antarctique.

En Suisse, en tout endroit où l'horizon est dégagé dans toutes les directions, la durée de l'ensoleillement, notée $\mathit{\Gamma}(t)$, mesurée en heures (h), peut être approximativement

X. Deux triangles sont dits *semblables* si l'un d'eux peut être obtenu à partir de l'autre par une transformation géométrique qui conserve les angles ; de sorte que les trois angles dans l'un des triangles se retrouvent dans l'autre. Il peut être montré que deux triangles sont semblables si $\alpha' = \alpha$ et $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, où a et b (respectivement a' et b') sont deux côtés d'un triangle (respectivement de l'autre triangle) et α (respectivement α') l'angle entre les côtés a et b (respectivement entre les côtés a' et b'). Dès lors que deux triangles sont semblables, ils ont des côtés proportionnels.

décrite par l'expression :

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}(t) &= 12\,\mathrm{h} + (4\,\mathrm{h})\sin\left(\frac{2\,\pi}{365{,}24\,\mathrm{j}}\,(t - 81\,\mathrm{j})\right)\\ &= 12\,\mathrm{h} + (4\,\mathrm{h})\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{365{,}24\,\mathrm{j}} - 1{,}39\right)\,,\end{aligned}$$

où t est le temps qui s'écoule ; il se mesure en jours (jour se notant ici j). L'instant $t = 1\,\mathrm{j}$ correspond au 1er janvier.

- Au temps $t = 81\,\mathrm{j}$, la durée de l'ensoleillement est de 12 h. Appelé *équinoxe de printemps*, ce temps correspond au 22 mars ; au 21 mars lors d'une année bissextile. À cette date, le Soleil passe autant d'heures au-dessus de l'horizon qu'en dessous.
- Au temps $t = 172\,\mathrm{j}$, la durée de l'ensoleillement est de 16 h. Appelé *solstice d'été*, ce temps correspond au 21 juin ; au 20 juin lors d'une année bissextile. À cette date, la durée du jour est la plus longue de toute l'année et la durée de la nuit la plus courte.
- Au temps $t = 264\,\mathrm{j}$, la durée de l'ensoleillement est de 12 h. Appelé *équinoxe d'automne*, ce temps correspond au 21 septembre ; au 20 septembre lors d'une année bissextile. À cette date, le Soleil passe autant d'heures au-dessus de l'horizon qu'en dessous.
- Au temps $t = 355\,\mathrm{j}$, la durée de l'ensoleillement est de 8 h. Appelé *solstice d'hiver*, ce temps correspond au 21 décembre ; au 20 décembre lors d'une année bissextile. À cette date, la durée du jour est la plus courte de toute l'année et la durée de la nuit la plus longue.

Noter que les dates données ci-dessus ne correspondent pas toutes exactement à celles que l'on trouve dans l'éphéméride. La raison en est que l'expression de $\mathit{\Gamma}(t)$ donnée ci-dessus ne tient pas compte de l'ellipticité de l'orbite terrestre autour du Soleil ; ce phénomène ayant pour corollaire la non-constance de la vitesse de la Terre le long de sa trajectoire, ce qui a pour conséquence des périodes équinoxe-solstice et solstice-équinoxe non égales.

C.8.4 Identités et relations trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus satisfont plusieurs propriétés, dont voici une liste non exhaustive.

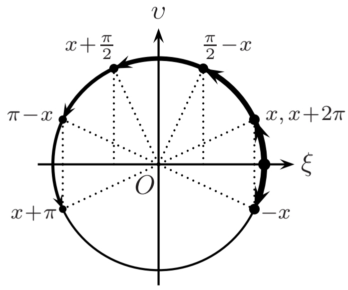
- **Relation fondamentale** :

  $$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\,, \qquad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}\,.$$

  Ce résultat se déduit en appliquant le théorème de Pythagore au triangle OBP, présent dans la première figure de la sous-section C.8.1.

- **Relations de symétrie et de décalage** :

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x)\,, & \cos(-x) &= \cos(x)\,, \\ \sin\!\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x)\,, & \cos\!\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x)\,, \\ \sin(\pi-x) &= \sin(x)\,, & \cos(\pi-x) &= -\cos(x)\,, \\ \sin\!\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\,, & \cos\!\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x)\,, \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x)\,, & \cos(x+\pi) &= -\cos(x)\,, \\ \sin(x+2\,\pi) &= \sin(x)\,, & \cos(x+2\,\pi) &= \cos(x)\,, \end{aligned}$$



quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Ces expressions se déduisent directement de la figure ci-dessus (dans laquelle tous les triangles rectangles en pointillé sont *isométriques*[XI]).

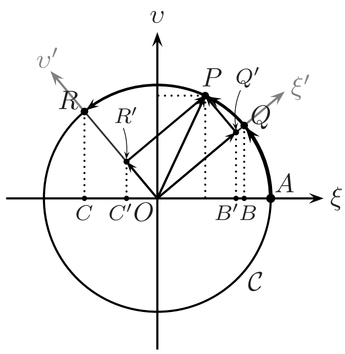
- **Relations d'addition et de différence** :

$$\begin{aligned} \sin(x_1+x_2) &= \sin(x_1)\cos(x_2)+\cos(x_1)\sin(x_2)\,, \\ \cos(x_1+x_2) &= \cos(x_1)\cos(x_2)-\sin(x_1)\sin(x_2)\,, \\ \sin(x_1-x_2) &= \sin(x_1)\cos(x_2)-\cos(x_1)\sin(x_2)\,, \\ \cos(x_1-x_2) &= \cos(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_1)\sin(x_2)\,, \end{aligned}$$

quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ces formules se déduisent en raisonnant comme suit.

▷ Sur le cercle trigonométrique, que l'on note $\mathcal{C}$, on place trois points, P, Q et R, de sorte que les arcs de cercle entre A et P, entre A et Q et entre A et R valent respectivement $x_1 + x_2$, x_1 et $x_1 + \frac{\pi}{2}$ (*cf.* figure ci-dessous).

▷ On place deux axes comme suit : l'un, noté $O\xi'$, passant par O et Q, l'autre, noté $O\upsilon'$, passant par O et R (*cf.* figure ci-dessous). On remarque ensuite que ces deux axes forment un système de coordonnées cartésiennes (vu que les deux axes sont perpendiculaires) ; on le note $O\xi'\upsilon'$.



▷ On relève les coordonnées du point P relatives au système de coordonnées $O\xi'\upsilon'$: $P(\xi'_P;\ \upsilon'_P)$, où $\xi'_P = \cos(x_2)$ et $\upsilon'_P = \sin(x_2)$.

▷ Sur l'axe $O\xi'$, on place le point Q' de sorte que l'angle entre les segments $\overline{Q'O}$ et $\overline{Q'P}$ vaille $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* qu'il soit droit) ; sur l'axe $O\upsilon'$, on place le point R' de sorte que l'angle entre les segments $\overline{R'O}$ et $\overline{R'P}$ vaille $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* qu'il soit droit).

▷ Sur l'axe $O\xi$, on place le point B (respectivement B') de sorte que l'angle entre les segments $\overline{BO}$ (respectivement $\overline{B'O}$) et $\overline{BQ}$ (respectivement $\overline{B'Q'}$) vaille $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* qu'il soit droit) ; sur le même axe, on place le point C (respectivement C')

XI. Deux triangles sont dits *isométriques* si l'un d'eux peut être obtenu à partir de l'autre par une transformation géométrique qui conserve les angles et les distances ; de sorte que les trois angles dans l'un des triangles se retrouvent dans l'autre ; et que les longueurs des côtés d'un triangle se retrouvent dans l'autre.

de sorte que l'angle entre les segments CO (respectivement $\overline{C'O}$) et $\overline{CR}$ (respectivement $\overline{C'R'}$) vaille $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* qu'il soit droit).

▷ On note que les triangles OBQ et $OB'Q'$ sont semblables ; ce qui permet alors d'écrire :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{B'Q'}{BQ} \ .$$

Or :

- ⋄ $OB' = \xi_{Q'}$ et $B'Q' = \upsilon_{Q'}$, où $\xi_{Q'}$ et $\upsilon_{Q'}$ sont les coordonnées de Q' relatives au système $O\xi\upsilon$;
- ⋄ $OB = \xi_Q$ et $BQ = \upsilon_Q$, où ξ_Q et υ_Q sont les coordonnées de Q relatives au système $O\xi\upsilon$; ces coordonnées valent $\xi_Q = \cos(x_1)$ et $\upsilon_Q = \sin(x_1)$;
- ⋄ $OQ' = \xi'_P$, où ξ'_P est la première coordonnée de P relative au système $O\xi'\upsilon'$; cette coordonnée vaut $\xi'_P = \cos(x_2)$;
- ⋄ $OQ = 1$, vu que Q est sur $\mathcal{C}$.

Ainsi, d'une part :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OQ'}{OQ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\xi_{Q'}}{\cos(x_1)} = \frac{\cos(x_2)}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{Q'} = \cos(x_1)\cos(x_2) \ ;$$

d'autre part :

$$\frac{B'Q'}{BQ} = \frac{OQ'}{OQ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\upsilon_{Q'}}{\sin(x_1)} = \frac{\cos(x_2)}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon_{Q'} = \sin(x_1)\cos(x_2) \ .$$

▷ On remarque que les triangles OCR et $OC'R'$ sont semblables ; ce qui permet alors d'écrire :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OR'}{OR} = \frac{C'R'}{CR} \ .$$

Or :

- ⋄ $OC' = \xi_{R'}$ et $C'R' = \upsilon_{R'}$, où $\xi_{R'}$ et $\upsilon_{R'}$ sont les coordonnées de R' relatives au système $O\xi\upsilon$;
- ⋄ $OC = \xi_R$ et $CR = \upsilon_R$, où ξ_R et υ_R sont les coordonnées de R relatives au système $O\xi\upsilon$; ces coordonnées valent $\xi_R = \cos\big(x_1+\frac{\pi}{2}\big)$ et $\upsilon_R = \sin\big(x_1+\frac{\pi}{2}\big)$;
- ⋄ $OR' = \upsilon'_P$, où υ'_P est la deuxième coordonnée de P relative au système $O\xi'\upsilon'$; cette coordonnée vaut $\upsilon'_P = \sin(x_2)$;
- ⋄ $OR = 1$, vu que R est sur $\mathcal{C}$.

Ainsi, d'une part, en notant que $\cos\big(x_1 + \frac{\pi}{2}\big) = -\sin(x_1)$ (*cf.* point précédent, consacré aux relations de symétrie et de décalage) :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OR'}{OR} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\xi_{R'}}{-\sin(x_1)} = \frac{\sin(x_2)}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{R'} = -\sin(x_1)\sin(x_2) \ ;$$

d'autre part, en notant que $\sin\big(x_1 + \frac{\pi}{2}\big) = \cos(x_1)$:

$$\frac{C'R'}{CR} = \frac{OR'}{OR} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\upsilon_{R'}}{\cos(x_1)} = \frac{\sin(x_2)}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon_{R'} = \cos(x_1)\sin(x_2) \ .$$

▷ On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ'}$ et $\overrightarrow{Q'P}$, et on les écrit en composantes, relativement au système $O\xi\upsilon$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(x_1+x_2) \\ \sin(x_1+x_2) \end{pmatrix} ,$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)\cos(x_2) \\ \sin(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix} ,$$

et :

$$\overrightarrow{Q'P} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\sin(x_2) \\ \cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix} .$$

On note ensuite que :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'P} ;$$

en composantes :

$$\begin{pmatrix} \cos(x_1+x_2) \\ \sin(x_1+x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)\cos(x_2) \\ \sin(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\sin(x_2) \\ \cos(x_1)\sin(x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \cos(x_1+x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2) \\ \sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2) \end{cases}$$

Les deux équations du système ci-dessus ne sont rien d'autre que les deux premières formules écrites au début du présent alinéa.

Les deux premières formules du présent alinéa sont ainsi démontrées. Pour prouver les deux dernières, il suffit de reprendre les deux premières, d'y remplacer x_2 par $-x_2$, et d'utiliser les relations de symétrie et de décalage.

- **Transformations de produit en somme** :

$$\sin(x_1)\sin(x_2) = \frac{1}{2}\big(\cos(x_1-x_2) - \cos(x_1+x_2)\big) ,$$

$$\sin(x_1)\cos(x_2) = \frac{1}{2}\big(\sin(x_1+x_2) + \sin(x_1-x_2)\big) ,$$

$$\cos(x_1)\sin(x_2) = \frac{1}{2}\big(\sin(x_1+x_2) - \sin(x_1-x_2)\big) ,$$

$$\cos(x_1)\cos(x_2) = \frac{1}{2}\big(\cos(x_1+x_2) + \cos(x_1-x_2)\big) ,$$

quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ces expressions se déduisent des relations d'addition et de différence vues au point précédent ; en effet, par exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)\big) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_1)\sin(x_2)+ \\
&\qquad -\big(\cos(x_1)\cos(x_2)-\sin(x_1)\sin(x_2)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_1)\sin(x_2)+ \\
&\qquad -\cos(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_1)\sin(x_2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\big(0+2\sin(x_1)\sin(x_2)\big) \\
&= \sin(x_1)\sin(x_2)\ ;
\end{aligned}$$

les autres formules se démontrent de manière analogue.

- **Transformations de somme en produit** :

$$\begin{aligned}
\sin(x_1)+\sin(x_2) &= 2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\ , \\
\sin(x_1)-\sin(x_2) &= 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\ , \\
\cos(x_1)+\cos(x_2) &= 2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\ , \\
\cos(x_1)-\cos(x_2) &= -2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\ ,
\end{aligned}$$

quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ces expressions s'obtiennent en faisant appel aux formules de transformation de produit en somme et en posant :

$$x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

par exemple :

$$\begin{aligned}
& \sin(x_1)\sin(x_2) = \frac{1}{2}\big(\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\cos(\beta)-\cos(\alpha)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(\beta)-\cos(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ ,
\end{aligned}$$

du fait que $x_1 + x_2 = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\,\alpha+0}{2} = \alpha$ et que $x_1 - x_2 = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{0+2\,\beta}{2} = \beta$. La dernière expression obtenue correspond bien à la quatrième formule énoncée ci-dessus ; il convient simplement d'y rebaptiser α par x_1 et β par x_2. Les autres relations se démontrent de manière analogue.

Des relations qui viennent d'être présentées peuvent être déduites d'autres égalités, impliquant également la fonction tangente.

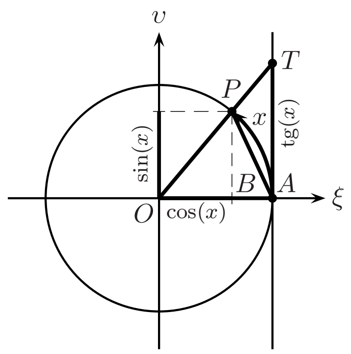
Les fonctions trigonométriques satisfont aussi un certain nombre d'inégalités. Les deux qui sont exposées ci-dessous vont s'avérer particulièrement utiles par la suite.

- Quel que soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\left|\sin(x)\right| \leqslant |x| \leqslant \left|\mathrm{tg}(x)\right| .$$

Pour prouver cette double inéquation, il convient de traiter en premier lieu le cas où $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, puis ensuite le cas où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$.

▷ Soit la figure ci-contre. Sur cette figure :



- ◇ O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ (le cercle trigonométrique) et aussi l'origine du système de coordonnées cartésiennes $O\xi v$,
- ◇ A est le point sur $\mathcal{C}$ dont les coordonnées relatives au système $O\xi v$ sont (1; 0),
- ◇ P est un point sur $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{AP}$ est plus grand que 0 et strictement plus petit que $\frac{\pi}{2}$,
- ◇ x est la longueur de l'arc $\widehat{AP}$,
- ◇ T est le point d'intersection entre la droite verticale passant par A et la droite passant par O et P.

Manifestement, l'aire du secteur circulaire d'arc x est plus grande que l'aire du triangle OAP et plus petite que l'aire du triangle OAT. En notant que :

- ◇ l'aire du triangle OAP vaut $\frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{BP}\|$, *i.e.* $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin(x)$,
- ◇ l'aire du secteur circulaire d'arc x est égal à $\frac{x}{2\,\pi}\cdot\pi$ (par symétrie du cercle $\mathcal{C}$ et du fait que l'aire de $\mathcal{C}$ vaut $\pi\cdot 1^2$),
- ◇ l'aire du triangle OAT vaut $\frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{AT}\|$, *i.e.* $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\mathrm{tg}(x)$,

il vient alors :

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin(x) \leqslant \frac{x}{2\,\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\mathrm{tg}(x) \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \mathrm{tg}(x)\,,$$

d'où $\left|\sin(x)\right| \leqslant |x| \leqslant \left|\mathrm{tg}(x)\right|$, vu que x, $\sin(x)$ et $\mathrm{tg}(x)$ sont toutes positives lorsque $x \in [0;\,\frac{\pi}{2}[$.

▷ Dans le cas où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$, la double inégalité se prouve en remarquant que $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant -x < \frac{\pi}{2}$ et en reprenant le résultat du point précédent : comme $0 \leqslant -x < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(-x) \leqslant -x \leqslant \mathrm{tg}(-x)$. Or, $\sin(-x) = -\sin(x)$

et $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)$. En conséquence :

$$\begin{aligned}\sin(-x) \leqslant -x \leqslant \operatorname{tg}(-x) \quad &\Leftrightarrow \quad -\sin(x) \leqslant -x \leqslant -\operatorname{tg}(x)\\ &\Leftrightarrow \quad \big|\sin(x)\big| \leqslant |x| \leqslant \big|\operatorname{tg}(x)\big|\,,\end{aligned}$$

en raison du fait que $x \leqslant 0$, $\sin(x) \leqslant 0$ et $\operatorname{tg}(x) \leqslant 0$, vu que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]$.

- La première inégalité de la double inéquation exposée au point précédent ne se limite pas à $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$\big|\sin(x)\big| \leqslant |x|\,.$$

  Ce résultat se justifie par le fait que la fonction sinus ne croît pas indéfiniment et que ses valeurs sont toujours comprises entre -1 et 1, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

  ▷ pour tout $x \geqslant \frac{\pi}{2}$:

  $$\sin(x) \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x \quad \Rightarrow \quad \sin(x) < x \quad \Leftrightarrow \quad \big|\sin(x)\big| < |x|\,;$$

  ▷ pour tout $x \leqslant -\frac{\pi}{2}$:

  $$\begin{aligned}\sin(x) \geqslant -1 > -\frac{\pi}{2} \geqslant x \quad \Rightarrow \quad \sin(x) > x \quad &\Leftrightarrow \quad -\sin(x) < -x\\ &\Leftrightarrow \quad \big|\sin(x)\big| < |x|\,.\end{aligned}$$

C.8.5 Domaines de définition et ensembles image

Le domaine de définition de la fonction sin est l'ensemble $\mathbb{R}$ dans son intégralité ; il en est de même pour la fonctions cos. La fonction tg, elle, a pour domaine de définition $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

L'ensemble image de la fonction sin est $[-1;\,1]$; il en est de même pour la fonction cos. La fonction tg, elle, a pour ensemble image $\mathbb{R}$ dans son intégralité. Ces résultats se déduisent essentiellement des propos tenus dans la sous-section C.8.9 ci-dessous.

C.8.6 Parité

Les fonctions sin et tg sont toutes les deux impaires ; quant à la fonction cos, elle est paire.

- Que la fonction sin est impaire se déduit de l'une des relations de symétrie et de décalage.
- Que la fonction cos est paire se déduit également de l'une des relations de symétrie et de décalage.
- Que la fonction tg est impaire se déduit du fait que son domaine de définition, $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, est symétrique par rapport à 0, et du fait que sin est impaire et cos paire :

  $$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)\,,$$

  pour tout $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C.8.7 Périodicité

Sin et cos sont des fonctions périodiques, de période 2π toutes les deux. Quant à tg, il s'agit d'une fonction périodique, de période π.

- Que sin et cos sont des fonctions 2π-périodiques se déduit des définitions mêmes de ces fonctions.
- Que tg est une fonction π-périodique se déduit des relations de symétrie et de décalage :

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)\,,$$

  ainsi que du fait qu'il n'existe aucun nombre $T \in \,]0;\pi[$ pour lequel $\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg}(x)$.

C.8.8 Zéros

Les fonctions sin et tg s'annulent en $x = k\,\pi$, et uniquement en $x = k\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. La fonction cos, elle, s'annule en $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, et uniquement en $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

C.8.9 Continuité et asymptotes

Les fonctions sin, cos et tg sont toutes les trois continues dans leurs domaines de définition respectifs.

- La fonction sin est continue dans son domaine de définition, *i.e.* dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|x - x_0| \leqslant \delta$, où $x, x_0 \in \mathbb{R}$, implique l'inégalité $\big|\sin(x) - \sin(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que $\big|\sin(x) - \sin(x_0)\big| \leqslant |x - x_0|$, puis de poser $\delta = \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\big|\sin(x) - \sin(x_0)\big| &= \left|2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&= |2|\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = 2\,\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|\,.
\end{aligned}$$

  Dans ce calcul, la première égalité n'est autre qu'une des formules de transformation de somme en produit ; pour ce qui est de l'inégalité entre la deuxième et la troisième ligne, elle se justifie par le fait que $\big|\cos(\alpha)\big| \leqslant 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\big|\sin(\beta)\big| \leqslant |\beta|$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

- La fonction cos est continue dans son domaine de définition, *i.e.* dans $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que :

$$\begin{aligned}
\left|\cos(x) - \cos(x_0)\right| &= \left|-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&= |-2|\left|\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = 2\,\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|\,,
\end{aligned}$$

  puis de raisonner comme au point précédent.
- La fonction tg est continue dans son domaine de définition ; autrement dit, tg est continue dans $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ce résultat découle du fait que les fonctions sin et cos sont continues dans $\mathbb{R}$ et que $\cos(x)=0$ si et seulement si $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Les fonctions sin et cos étant définies et continues dans $\mathbb{R}$, elles ne possèdent aucune asymptote verticale. La fonction tg, elle, possède des asymptotes verticales en $x = \frac{\pi}{2}+k\,\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$. En effet :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x<\frac{\pi}{2}+k\pi}} \operatorname{tg}(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x<\frac{\pi}{2}+k\pi}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \infty$$

et :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x>\frac{\pi}{2}+k\pi}} \operatorname{tg}(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x>\frac{\pi}{2}+k\pi}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty\,.$$

En outre, aucune des fonctions sin, cos et tg n'admet une quelconque asymptote horizontale ou oblique ; si elles n'en possèdent pas, c'est en raison de leur périodicité.

C.8.10 Expressions alternatives des fonctions trigonométriques

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\exp(\mathrm{i}\,x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\,,$$

où i est le nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Appelée *formule d'Euler*[XII], cette relation peut être déduite des séries de MacLaurin de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\exp(\mathrm{i}\,x)$ (*cf.* section 5.6 du chapitre 5).

En remplaçant x par $-x$ dans l'égalité ci-dessus, et en tenant compte du fait que cos est paire et sin impaire, il vient :

$$\exp(-\mathrm{i}\,x) = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)\,.$$

XII. Leonhard Euler était un mathématicien et physicien suisse, né le 15 avril 1707 à Bâle (en Suisse) et mort le 7 septembre 1783 à Saint-Petersbourg (dans l'Empire russe). Il est une figure incontournable de l'histoire des mathématiques, tant son œuvre est importante, que ce soit dans le calcul différentiel et intégral, l'algèbre, la trigonométrie, la théorie des nombres ou la géométrie.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}\,x) + \exp(-\mathrm{i}\,x) &= 2\cos(x) &\Leftrightarrow\quad \cos(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}\,x) + \exp(-\mathrm{i}\,x)\big)\,,\\
\exp(\mathrm{i}\,x) - \exp(-\mathrm{i}\,x) &= 2\,\mathrm{i}\sin(x) &\Leftrightarrow\quad \sin(x) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(\exp(\mathrm{i}\,x) - \exp(-\mathrm{i}\,x)\big)\,.
\end{aligned}$$

Chacune de ces expressions est aussi appelée *formule d'Euler*. La relation impliquant le cosinus est très similaire à l'expression qui sert de définition au cosinus hyperbolique ; il en est de même pour la relation impliquant le sinus et l'expression qui sert de définition au sinus hyperbolique (*cf.* section C.6, consacrée aux fonctions hyperboliques). D'une lecture attentive, il ressort que :

$$\cosh(\mathrm{i}\,x) = \cos(x)$$

et :

$$\sinh(\mathrm{i}\,x) = \mathrm{i}\sin(x)\,.$$

C.8.11 Dérivées

La fonction sin admet pour dérivée la fonction cos ; autrement dit, la fonction sin admet pour dérivée la fonction $\sin'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x) + \cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x)\big(\cos(\Delta x) - 1\big) + \cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\sin(x)\,\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x)\,\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\\
&= \sin(x)\,\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{=0} + \cos(x)\,\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1} = \cos(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour se convaincre du fait que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$, il convient de raisonner comme suit.

- On reprend la double inégalité $\left|\sin(u)\right| \leqslant |u| \leqslant \left|\mathrm{tg}(u)\right|$, valable pour tout $u \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ (*cf.* sous-section C.8.4), et on la transforme comme suit :

$$\begin{array}{cccccc} & \left|\sin(u)\right| & \leqslant & |u| & \leqslant & \left|\mathrm{tg}(u)\right| \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\left|\sin(u)\right|} & \geqslant & \dfrac{1}{|u|} & \geqslant & \dfrac{1}{\left|\mathrm{tg}(u)\right|} \\ \Leftrightarrow & 1 & \geqslant & \dfrac{\left|\sin(u)\right|}{|u|} & \geqslant & \left|\cos(u)\right| \\ \Leftrightarrow & 1 & \geqslant & \left|\dfrac{\sin(u)}{u}\right| & \geqslant & \left|\cos(u)\right|\,; \end{array}$$

  noter que le passage de la deuxième à la troisième ligne de calcul s'effectue en multipliant toutes les quantités présentes dans la deuxième ligne par $\left|\sin(u)\right|$ et en remarquant que :

$$\left|\mathrm{tg}(u)\right| \left|\sin(u)\right| = \frac{|\cos(u)|}{|\sin(u)|} \left|\sin(u)\right| = \left|\cos(u)\right|.$$

- De la dernière inégalité obtenue au point précédent, on déduit, en observant que les expressions 1 et $\cos(u)$ tendent toutes les deux vers 1 lorsque u tend vers 1, puis en appliquant le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{u \to 0} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| = 1\,.$$

- On remarque que u et $\sin(u)$ ont le même signe quel que soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; on en déduit que $\frac{\sin(u)}{u} > 0$ quel que soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; et donc que :

$$\lim_{u \to 0} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| = \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1\,.$$

Pour prouver que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$, il convient d'effectuer le calcul suivant (dont l'aboutissement s'appuye sur l'identité trigonométrique $\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1$ ainsi que sur le résultat qui vient d'être établi) :

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} &= \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} \, \frac{\cos(u) + 1}{\cos(u) + 1} = \lim_{u \to 0} \frac{\cos^2(u) - 1}{u\big(\cos(u) + 1\big)} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{-\sin^2(u)}{u\big(\cos(u) + 1\big)} = \lim_{u \to 0} \left(-\frac{\sin(u)}{u} \, \frac{\sin(u)}{\cos(u) + 1} \right) \\ &= -\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{\cos(u) + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0\,. \end{aligned}$$

La fonction cos admet pour dérivée la fonction $-\sin$; autrement dit, la fonction cos admet pour dérivée la fonction $\cos'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\cos'(x) \;=\; -\sin(x)}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \cos(x) - \sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\big(\cos(\Delta x) - 1\big) - \sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos(x)\,\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x)\,\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \cos(x)\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1} \;=\; -\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

La fonction tg admet pour dérivée la fonction $\operatorname{tg}'\colon \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\operatorname{tg}'(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \text{ou} \\[2ex] 1 + \operatorname{tg}^2(x) \end{cases}}\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \;=\; \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\big(-\sin(x)\big)}{\big(\cos(x)\big)^2} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \text{ou} \\[2ex] 1 + \operatorname{tg}^2(x) \end{cases} \;;
\end{aligned}$$

les deux expressions derrière l'accolade sont équivalentes ; ce sont deux écritures différentes pour le même objet.

C.8.1 Remarque : La variable x apparaissant dans les fonctions trigonométriques est, rappelons-le, une mesure d'un angle entre deux demi-droites. Les expressions des dérivées de sin, cos et tg, telles que données ci-dessus dans les encadrés, sont valables pour autant que x représente la longueur d'un arc de cercle du cercle trigonométrique (*i.e.* un arc de cercle de rayon 1). Si x est une autre mesure d'angle, exprimée par exemple en *degrés* (où 360 degrés (noté 360°) correspond à un tour complet du cercle trigonométrique), les formules données ne sont plus correctes en l'état ; elles doivent être adaptées.

C.8.12 Bijectivité

La fonction sin est strictement croissante dans $\left[\left(2\,k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ et strictement décroissante dans $\left[\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{3}{2}\right)\pi\right]$, où $k\in\mathbb{Z}$. La fonction cos, elle, est strictement croissante dans $[(2\,k-1)\,\pi\,;\,2\,k\,\pi]$ et strictement décroissante dans $[2\,k\,\pi\,;\,(2\,k+1)\,\pi]$, où $k\in\mathbb{Z}$. Quant à la fonction tg, elle est strictement croissante dans $\left]\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$.

- Pour prouver que sin est strictement croissante dans $\left[\left(2\,k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ et strictement décroissante dans $\left[\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{3}{2}\right)\pi\right]$, où $k\in\mathbb{Z}$, il convient de considérer deux éléments $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $x_1<x_2$, puis d'appliquer le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[x_1;\,x_2]$ (*cf.* théorème 3.9.4, section 3.9 du chapitre 3) ; noter que le théorème est applicable vu que sin est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$. Selon ce théorème, il existe un nombre réel $c\in\,]x_1;\,x_2[$ tel que :

$$\sin(x_2)-\sin(x_1)\;=\;\sin'(c)\,(x_2-x_1)\;.$$

  Or, $\sin'(c)=\cos(c)$; et $\cos(c)>0$ si $c\in\left]\left(2\,k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$, $\cos(c)<0$ si $c\in\left]\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(2\,k+\frac{3}{2}\right)\pi\right[$, où $k\in\mathbb{Z}$. Donc :

$$\sin(x_2)-\sin(x_1)\;=\;\cos(c)\,(x_2-x_1)\begin{cases}>0 & \text{si } \left(2\,k-\frac{1}{2}\right)\pi\leqslant x_1<x_2\leqslant\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\\ <0 & \text{si } \left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\leqslant x_1<x_2\leqslant\left(2\,k+\frac{3}{2}\right)\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\sin(x_1)\;<\;\sin(x_2) & \text{si } \left(2\,k-\frac{1}{2}\right)\pi\leqslant x_1<x_2\leqslant\left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\\ \sin(x_1)\;>\;\sin(x_2) & \text{si } \left(2\,k+\frac{1}{2}\right)\pi\leqslant x_1<x_2\leqslant\left(2\,k+\frac{3}{2}\right)\pi\end{cases}\;,$$

  d'où le résultat.
- Pour prouver que cos est strictement croissante dans $[(2\,k-1)\,\pi\,;\,2\,k\,\pi]$ et strictement décroissante dans $[2\,k\,\pi\,;\,(2\,k+1)\,\pi]$, où $k\in\mathbb{Z}$, il convient de raisonner comme au point précédent. Le détail des calculs est laissé en exercice.
- Pour prouver que tg est strictement croissante dans $\left]\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$, où $k\in\mathbb{Z}$, il convient de considérer deux éléments $x_1,x_2\in\left]\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$ tels que $x_1<x_2$, puis d'appliquer le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[x_1;\,x_2]$; noter que le théorème est applicable vu que tg est continue et dérivable dans $\left]\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$. Selon ce théorème, il existe un nombre réel $c\in\,]x_1;\,x_2[$ tel que :

$$\mathrm{tg}(x_2)-\mathrm{tg}(x_1)\;=\;\mathrm{tg}'(c)\,(x_2-x_1)\;.$$

  Or, $\mathrm{tg}'(c)=1+\mathrm{tg}^2(c)$; et $1+\mathrm{tg}^2(c)>0$ quel que soit $c\in\left]\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,;\,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$\mathrm{tg}(x_2) - \mathrm{tg}(x_1) \;=\; \big(1 + \mathrm{tg}^2(c)\big)(x_2 - x_1) \;>\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{tg}(x_1) \;<\; \mathrm{tg}(x_2)\,,$$

d'où le résultat.

Les résultats qui viennent d'être établis, associés aux propos tenus dans la sous-section C.8.5, permettent de formuler les conclusions suivantes.

- La fonction :
  - $\sin :\ \big[\big(2\,k - \frac{1}{2}\big)\,\pi\,;\ \big(2\,k + \frac{1}{2}\big)\,\pi\big] \longrightarrow [-1;\ 1]$ (dont le domaine de définition est restreint à l'intervalle fermé délimité par $(2\,k - \frac{1}{2})\,\pi$ et $(2\,k + \frac{1}{2})\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$) est bijective,
  - $\sin :\ \big[\big(2\,k + \frac{1}{2}\big)\,\pi\,;\ \big(2\,k + \frac{3}{2}\big)\,\pi\big] \longrightarrow [-1;\ 1]$ (dont le domaine de définition est restreint à l'intervalle fermé délimité par $(2\,k + \frac{1}{2})\,\pi$ et $(2\,k + \frac{3}{2})\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$) est bijective.
- La fonction :
  - $\cos :\ \big[(2\,k{-}1)\,\pi\,;\ 2\,k\,\pi\big] \longrightarrow [-1;\ 1]$ (dont le domaine de définition est restreint à l'intervalle fermé délimité par $(2\,k - 1)\,\pi$ et $2\,k\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$) est bijective,
  - $\cos :\ \big[2\,k\,\pi\,;\ (2\,k{+}1)\,\pi\big] \longrightarrow [-1;\ 1]$ (dont le domaine de définition est restreint à l'intervalle fermé délimité par $2\,k\,\pi$ et $(2\,k + 1)\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$) est bijective.
- $\mathrm{tg} :\ \big]\big(k - \frac{1}{2}\big)\,\pi\,;\ \big(k + \frac{1}{2}\big)\,\pi\big[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ (dont le domaine de définition est restreint à l'intervalle ouvert délimité par $(k - \frac{1}{2})\,\pi$ et $(k + \frac{1}{2})\,\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$) est bijective.

En effet, dès lors qu'une fonction réelle est strictement croissante ou strictement décroissante dans un ensemble, elle est nécessairement injective dans cet ensemble ; en outre, si elle a pour ensemble d'arrivée son ensemble image, la fonction en question est également surjective ; elle est, par conséquent, bijective.

C.8.13 Autres fonctions trigonométriques

À partir des fonctions sin, cos et tg, il est possible de définir d'autres fonctions trigonométriques, telles :

- la *sécante*, notée sec,
- la *cosécante*, notée csc,
- la *cotangente*, notée ctg.

Par définition :

$$\sec = \frac{1}{\cos}\,, \qquad \csc = \frac{1}{\sin}\,, \qquad \mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}}\,.$$

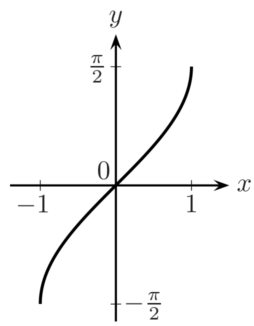
Les propriétés des fonctions sec, csc et ctg se déduisent des propriétés de sin, cos et tg.

C.9 Fonctions trigonométriques réciproques

C.9.1 Arc sinus, cosinus et tangente

On appelle *arc sinus* la fonction réciproque du sinus ayant pour ensemble image l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$; il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \text{Arcsin}: & [-1;\,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & y = \text{Arcsin}(x) \end{array}$$



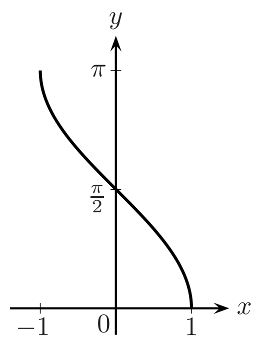
donnée par :

$$y \;=\; \text{Arcsin}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) \;=\; x\,,$$

où $x \in [-1;\,1]$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

On appelle *arc cosinus* la fonction réciproque du cosinus ayant pour ensemble image l'intervalle $[0\,;\,\pi]$; il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \text{Arccos}: & [-1;\,1] & \longrightarrow & [0\,;\,\pi] \\ & x & \longmapsto & y = \text{Arccos}(x) \end{array}$$



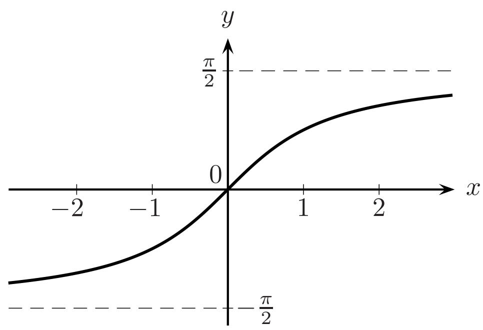
donnée par :

$$y \;=\; \text{Arccos}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) \;=\; x\,,$$

où $x \in [-1;\,1]$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

On appelle *arc tangente* la fonction réciproque de la tangente ayant pour ensemble image l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$; il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \text{Arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & y = \text{Arctg}(x) \end{array}$$



donnée par :

$$y \;=\; \text{Arctg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}(y) \;=\; x\,,$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

C.9.1 Remarques :

- Les fonctions :

$$\sin: \left[-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;\,1]\,, \quad \cos: [0\,;\,\pi] \longrightarrow [-1;\,1]\,, \quad \text{tg}: \left]-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

  sont toutes bijectives (*cf.* sous-section C.8.12 de la section précédente). Les définitions données ci-dessus font donc pleinement sens.
- La fonction Arcsin étant une réciproque de la fonction sin, ses propriétés peuvent être, pour la plupart, déduites directement des propriétés de sin. Il en est de même pour Arccos et cos, ainsi que pour Arctg et tg.

C.9.2 Origine des termes

Le préfixe *Arc*, qui apparaît dans les noms des fonctions trigonométriques réciproques, vient du fait que les valeurs que prennent ces fonctions peuvent être interprétées comme étant des longueurs d'arcs de cercle ; ces arcs ne sont rien d'autre que des portions du cercle trigonométrique (*cf.* sous-section C.8.1, dans la section précédente).

C.9.3 Domaines de définition et ensembles image

Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctg n'ont pas toutes le même domaine de définition :
- le domaine de définition d'Arcsin est $[-1;\, 1]$;
- le domaine de définition d'Arccos est $[-1;\, 1]$;
- le domaine de définition d'Arctg est $\mathbb{R}$.

Elles n'ont, en outre, pas toutes le même ensemble image :
- l'ensemble image d'Arcsin est $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$;
- l'ensemble image d'Arccos est $[0\,;\,\pi]$;
- l'ensemble image d'Arctg est $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Tous ces résultats découlent des définitions mêmes des fonctions Arcsin, Arccos et Arctg.

C.9.4 Parité

Les fonctions Arcsin et Arctg sont impaires ; quant à la fonction Arccos, elle n'est ni paire, ni impaire.

C.9.5 Zéros

Les fonctions Arcsin et Arctg s'annulent en $x = 0$, et uniquement en $x = 0$. Pour ce qui est de la fonction Arccos, elle s'annule en $x = 1$, et uniquement en $x = 1$.

C.9.6 Continuité et asymptotes

La fonction Arcsin est continue dans son domaine de définition ; il en est de même pour les fonctions Arccos et Arctg.

Ni Arcsin, ni Arccos ne possède une quelconque asymptote. Pour ce qui est d'Arctg, elle admet deux asymptotes horizontale, l'une à gauche, d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$, l'autre à droite, d'équation $x = \frac{\pi}{2}$; ce sont les seules asymptotes que possède cette fonction.

C.9.7 Dérivées

La fonction Arcsin admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Arcsin}'\colon\,]-1;\,1[\, \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\;.$$

Pour prouver cette formule, il convient de remarquer, en premier lieu, que pour tout $x \in [-1;\, 1]$:

$$\sin\big(\mathrm{Arcsin}(x)\big) \;=\; x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\big(\mathrm{Arcsin}(x)\big) - x \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) - x \;=\; 0\,,$$

où $y = \mathrm{Arcsin}(x)$. En dérivant l'expression $\sin(y) - x = 0$ des deux côtés par rapport à x, tout en gardant à l'esprit que y dépend de x, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(y) - x\big) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \qquad \Leftrightarrow \qquad & \cos(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \cos(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{1}{\cos(y)}\,. \end{aligned}$$

Noter que la dernière expression obtenue n'est définie que si $\cos(y) \neq 0$. Elle n'est, de fait, définie que pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right[$; en effet, d'une part Arcsin ne prend que les valeurs de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, et d'autre part cos ne s'annule, dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, qu'en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$. Ces observations, combinées au fait que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, permet alors d'écrire $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$ (et non $-\sqrt{1 - \sin^2(y)}$, du fait que $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc que $\cos(y) > 0$). Par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

vu que $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ et donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Arcsin}'(x)$.

La fonction Arccos admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Arccos}' : \left]-1;\, 1\right[\to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Arccos}'(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}\,.$$

Pour prouver cette formule, il convient de raisonner comme précédemment, dans le cas de la fonction Arcsin. Le détail des calculs est présenté dans le deuxième des exemples 3.6.9 (*cf.* section 3.6, chapitre 3).

La fonction Arctg admet pour dérivée la fonction $\mathrm{Arctg}' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$\boxed{\mathrm{Arctg}'(x) \;=\; \frac{1}{1 + x^2}}\,.$$

Le raisonnement permettant de prouver cette formule est similaire à celui exposé plus haut, dans le cas d'Arcsin, quoique plus simple. Le détail des calculs est laissé en exercice.

Annexe D

L'intégrale de Riemann

Le théorème 4.1.8, exposé dans la section 4.1 du chapitre 4, n'a été prouvé que de manière très lacunaire. S'il en a été ainsi, c'est en raison d'un manque de moyens mathématiques à disposition lors de la formulation de l'énoncé.

Le présent chapitre a pour objectif de fournir les outils nécessaires à l'élaboration d'une démonstration complète dudit théorème. Ces outils sont :

- la notion de continuité uniforme,
- le concept de suite de subdivisions.

D.1 Notion de continuité uniforme

D.1.1 Définition : Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans I, où I est :

- ◇ soit un intervalle ouvert,
- ◇ soit un intervalle fermé qui n'est pas réduit à un seul point.

On dit que f est *uniformément continue* dans I si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tous $\hat{x}, \check{x} \in I$ obéissant à l'inégalité :

$$|\check{x} - \hat{x}| \leqslant \delta\,,$$

la relation suivante est satisfaite :

$$\bigl|f(\check{x}) - f(\hat{x})\bigr| \leqslant \varepsilon\,.$$

D.1.2 Remarques : • La définition précédente peut être reformulée comme suit :

> On dit qu'une fonction réelle f, définie dans un intervalle I (non réduit à un seul point), est *uniformément continue* dans I si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tous $x_0, x \in I$ satisfaisant $|x - x_0| \leqslant \delta$, la relation suivante est satisfaite : $\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leqslant \varepsilon$.

Pour rappel, voici la définition de la continuité d'une fonction f dans un intervalle I (non réduit à un seul point) :

> On dit qu'une fonction f, définie dans un intervalle I (non réduit à un seul point), est continue dans I si, pour tout élément $x_0 \in I$ et tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$, où $x \in I$, implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$.

Dans cette dernière définition, le nombre δ dépend *a priori* (rappelons-le) non seulement de ε, mais également du nombre x_0. Alors que dans la définition de la continuité uniforme, le nombre δ ne dépend ni de x_0, ni de x, mais seulement de ε.

- Des propos tenus au point précédent, il ressort que la notion de continuité uniforme est plus forte que la notion de continuité ; en ce sens que toute fonction uniformément continue dans un intervalle est continue dans l'intervalle en question, alors que toute fonction continue dans un intervalle n'est pas nécessairement uniformément continue dans l'intervalle en question.

D.1.3 Exemples : 1. La fonction sin est uniformément continue dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ obéissant à l'inégalité $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, la relation suivante est satisfaite : $\big|\sin(x_2) - \sin(x_1)\big| \leqslant \varepsilon$. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que $\big|\sin(x_2) - \sin(x_1)\big| \leqslant |x_2 - x_1|$, puis de poser $\delta = \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\big|\sin(x_2) - \sin(x_1)\big| &= \left|2\cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right| \\
&= |2|\left|\cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\right| \\
&\leqslant 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| = 2\,\frac{|x_2 - x_1|}{2} = |x_2 - x_1|\,.
\end{aligned}$$

2. La fonction f donnée par $f(x) = x^2$ est continue dans tout $\mathbb{R}$; mais n'est pas uniformément continue dans tout $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, il convient de poser $\varepsilon = 2$, de choisir ensuite $x_1 = \frac{1}{\delta}$ et $x_2 = \frac{1}{\delta} + \delta$, où δ est un nombre réel strictement positif quelconque, puis de remarquer que :

$$|x_2 - x_1| = \left|\delta + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\right| = |\delta| = \delta \leqslant \delta\,,$$

alors que :

$$\begin{aligned}
\big|{x_2}^2 - {x_1}^2\big| &= \left|\left(\frac{1}{\delta} + \delta\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = \left|\frac{1}{\delta^2} + 2 + \delta^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| \\
&= \big|2 + \delta^2\big| = 2 + \delta^2 = \varepsilon + \delta^2 \geqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

D.1.4 Remarque : Si l'assertion *continuité d'une fonction f dans un intervalle I implique continuité uniforme de f dans I* est généralement fausse, elle devient correcte dans le cas d'un intervalle fermé et borné, *i.e.* dans le cas d'un intervalle de la forme $[a;\, b]$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$).

D.1.5 Théorème : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue dans $[a;\, b]$, f est uniformément continue dans $[a;\, b]$. Ce résultat est connu sous le nom de* ***théorème de Heine****.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Supposons, par l'absurde, que f est continue dans $[a;\, b]$, mais pas uniformément continue dans $[a;\, b]$.

Dire que f n'est pas uniformément continue dans $[a;\, b]$, c'est dire qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe deux éléments $\hat{x}, \check{x} \in [a;\, b]$ tels que $|\check{x} - \hat{x}| \leqslant \delta$ et $\big|f(\check{x}) - f(\hat{x})\big| > \varepsilon$. Soit alors $\delta = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Selon ce qui vient d'être formulé, il existe, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, deux éléments $\hat{x}_n, \check{x}_n \in [a;\, b]$ tels que $|\check{x}_n - \hat{x}_n| \leqslant \delta$ et $\big|f(\check{x}_n) - f(\hat{x}_n)\big| > \varepsilon$.

Les éléments $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots$ forment une suite de nombres réels ; notons $(\hat{x}_n)$ cette suite. Par construction, tous les éléments de $(\hat{x}_n)$ sont dans $[a;\, b]$.

- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis partageons l'intervalle $[a_0;\, b_0]$ en deux intervalles d'égales longueurs, $[a_0;\, c_1]$ et $[c_1;\, b_0]$, où $c_1 = \frac{1}{2}\,(a_0 + b_0)$ est le point (sur l'axe x), tel que $|b_0 - c_1| = |c_1 - a_0|$. Vu que les éléments de $(\hat{x}_n)$ sont tous dans $[a;\, b]$, *i.e.* dans $[a_0;\, b_0]$, alors il y a nécessairement une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$ soit dans $[a_0;\, c_1]$, soit dans $[c_1;\, b_0]$, soit dans les deux intervalles $[a_0;\, c_1]$ et $[c_1;\, b_0]$. Gardons alors l'intervalle qui contient une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$ (s'il n'y en a qu'un des deux qui contient une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$) ou un des deux intervalles (si les deux intervalles contiennent une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$) ; notons $[a_1;\, b_1]$ cet intervalle ($[a_1;\, b_1] = [a_0;\, c_1]$ ou $[a_1;\, b_1] = [c_1;\, b_0]$).
- Partageons l'intervalle $[a_1;\, b_1]$ en deux intervalles d'égales longueurs, $[a_1;\, c_2]$ et $[c_2;\, b_1]$, où $c_2 = \frac{1}{2}\,(a_1 + b_1)$ est le point (sur l'axe x) tel que $|b_1 - c_2| = |c_2 - a_1|$. Vu qu'il y a une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$ dans $[a_1;\, b_1]$, alors il y a nécessairement une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$ soit dans $[a_1;\, c_2]$, soit dans $[c_2;\, b_1]$, soit dans les deux intervalles $[a_1;\, c_2]$ et $[c_2;\, b_1]$. Gardons alors l'intervalle qui contient une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$ (s'il n'y en a qu'un des deux qui contient une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$) ou un des deux intervalles (si les deux intervalles contiennent une infinité d'éléments de $(\hat{x}_n)$) ; notons $[a_2;\, b_2]$ cet intervalle ($[a_2;\, b_2] = [a_1;\, c_2]$ ou $[a_2;\, b_2] = [c_2;\, b_1]$).
- Partageons l'intervalle $[a_2;\, b_2]$ en deux intervalles d'égales longueurs...

En continuant ainsi de suite, on obtient deux suites de nombres réels, (a_n) et (b_n) ; de par leur construction, ces suites satisfont les conditions suivantes :

- ◇ $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*i.e.* (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante),

- $a \leqslant a_n \leqslant b$ et $a \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (du fait que $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b-a), \ldots, b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$).

Le fait que (a_n) et (b_n) satisfont ces propriétés permet d'affirmer, compte tenu de la proposition A.1.5 et du lemme A.1.8 (*cf.* section A.1 de l'annexe A), que les suites (a_n) et (b_n) convergent et qu'elles admettent pour limite un seul et même nombre réel ; ce nombre réel, que l'on note c, est nécessairement dans l'intervalle $[a;\, b]$, vu que $a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_n;\, b_n]$ contient une infinité d'éléments de la suite $(\hat{x}_n)$. Ces observations permettent de conclure qu'il existe, dans la suite $(\hat{x}_n)$, une infinité d'éléments qui a la structure d'une suite convergente, qui converge vers c ; notons $(\hat{u}_m)$ cette suite convergente.

Intéressons-nous à présent aux éléments $\check{x}_1, \check{x}_2, \check{x}_3, \ldots$ Ces éléments forment une suite de nombres réels, dont tous les éléments sont dans $[a;\, b]$. Un raisonnement similaire à celui qui a été mené ci-dessus (dans le cas de $(\hat{x}_n)$) permet d'affirmer qu'il existe, dans la suite $(\check{x}_n)$, une infinité d'éléments qui a la structure d'une suite convergente. En outre, le fait que $|\check{x}_n - \hat{x}_n| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc que $\lim_{n\to\infty} |\check{x}_n - \hat{x}_n| = 0$, permet de déduire qu'il existe, dans la suite $(\check{x}_n)$, une infinité d'éléments qui a la structure d'une suite convergente, qui converge vers le nombre réel c introduit plus haut ; notons $(\check{u}_m)$ cette suite convergente.

En résumé, il existe deux suites $(\hat{u}_m)$ et $(\check{u}_m)$:

- dont tous les éléments sont dans $[a;\, b]$,
- qui convergent toutes les deux vers le nombre réel $c \in [a;\, b]$ évoqué précédemment,
- telles que $\big|f(\check{u}_m) - f(\hat{u}_m)\big| > \varepsilon$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

De ces observations, il ressort que pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe deux éléments $\hat{u}, \check{u} \in [c-\delta\,;\, c+\delta] \cap [a;\, b]$ pour lesquels $\big|f(\check{u}) - f(\hat{u})\big| > \varepsilon$, et donc pour lesquels :

$$\big|f(\hat{u}) - f(c)\big| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ou} \qquad \big|f(\check{u}) - f(c)\big| > \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

En effet, soit $|f(\hat{u}) - f(c)| = |f(\check{u}) - f(c)|$, soit $|f(\hat{u}) - f(c)| < |f(\check{u}) - f(c)|$, soit $|f(\hat{u}) - f(c)| > |f(\check{u} - f(c)|$; dans tous les cas, l'une des deux quantités $|f(\hat{u}) - f(c)|$ et $|f(\check{u}) - f(c)|$, au moins, est strictement supérieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, vu que la quantité $|f(\check{u}) - f(\hat{u})|$ est strictement supérieure à ε. Or, une telle déduction est en contradiction avec l'hypothèse de continuité de f dans $[a;\, b]$. En effet, si f est continue dans $[a;\, b]$, alors, pour tout élément $x_0 \in [a;\, b]$ et pour nombre réel $\tilde{\varepsilon} > 0$ (en particulier pour $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$, où $x \in [a;\, b]$, implique $\big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \tilde{\varepsilon}$; ce qui n'est pas le cas ici.

En conclusion, il n'est pas possible que f soit continue dans $[a;\, b]$ sans qu'elle n'y soit uniformément continue ; le théorème de Heine est ainsi démontré. $\square$

D.2 Existence de l'intégrale de Riemann

Dans la définition de l'intégrale, telle que l'a formulée Cauchy, puis Riemann, et telle qu'exposée dans la définition 4.1.2, il est question d'une subdivision σ_n d'ordre n, quelconque, ayant la propriété suivante : lorsque n tend vers l'infini, le pas δ_{σ_n} de la subdivision tend vers 0.

Dire que n tend vers l'infini, c'est dire que n prend une certaine valeur $N \in \mathbb{N}^*$, puis la valeur $N+1$, puis $N+2$, $N+3$, etc. Parler d'une subdivision σ_n d'ordre n, avec n qui tend vers l'infini, c'est donc, en réalité, parler d'une subdivision σ_N d'ordre N, puis d'une subdivision σ_{N+1} d'ordre $N+1$, puis d'une subdivision σ_{N+2} d'ordre $N+2$, etc. C'est donc, en fin de compte, parler d'un ensemble qui a la structure d'une suite infinie, dont les éléments sont des subdivisions.

Vu l'analyse qui vient d'être faite, il semble judicieux de définir l'intégrale de Riemann non pas avec une subdivision d'ordre n (dont le pas tend vers 0 lorsque n tend vers ∞), mais avec une suite de subdivisions (dont l'« infinitième » élément est une subdivision de pas nul). C'est avec une telle définition qu'il est possible de montrer proprement l'existence de l'intégrale de Riemann dans le cadre des fonctions continues dans un intervalle fermé donné.

D.2.1 Définition : Soit $[a;\, b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *suite de subdivisions* de $[a;\, b]$ tout ensemble de la forme :

$$\big(\sigma_1;\, \sigma_2;\, \sigma_3;\, \ldots\big)\,,$$

où σ_k est une subdivision d'ordre k de l'intervalle $[a;\, b]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Une suite de subdivisions se note généralement $\big(\sigma_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou simplement (σ_n). Ainsi :

$$\big(\sigma_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\sigma_n) = \big(\sigma_1;\, \sigma_2;\, \sigma_3;\, \ldots\big)\,.$$

D.2.2 Remarques :

- Une subdivision d'orde n d'un intervalle $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$ (a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$) est, rappelons-le, une suite finie de nombres réels $\sigma_n = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Le pas de σ_n est le nombre réel δ_{σ_n} donné par :

  $$\delta_{\sigma_n} = \max\big\{(x_k - x_{k-1})\,\big|\, k = 1,\, \ldots\,, n\big\}\,.$$

  où $\max\big\{(x_k - x_{k-1})\,\big|\, k = 1,\, \ldots\,, n\big\}$ désigne le plus grand des nombres réels $(x_1 - x_0), \ldots, (x_n - x_{n-1})$.
- Dans toute suite de subdivisions d'un intervalle fermé $[a;\, b]$ (où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$), le premier élément est une subdivision d'ordre 1 de $[a;\, b]$, le deuxième élément une subdivision d'ordre 2 de $[a;\, b]$, etc., l'« infinitième » élément une subdivision d'ordre « infini » de $[a;\, b]$. Noter que le pas de la subdivision d'ordre « infini » n'est pas nécessairement nul : les éléments que compte la subdivision d'ordre « infini », bien qu'ils soient en nombre infini, peuvent très bien être disposés dans $[a;\, b]$ de sorte que l'écart entre deux de ces éléments ne soit pas nul.
- Dans les pages qui suivent, ne seront considérées que des suites de subdivisions (d'un intervalle fermé $[a;\, b]$) dont l'« infinitième » élément a un pas nul ; autrement dit, ne seront considérées que les suites de subdivisions (σ_n) (de $[a;\, b]$) telles que $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$.

- Dire qu'une suite de subdivisions (σ_n) d'un intervalle fermé $[a;\, b]$ satisfait la condition $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$ (où δ_{σ_n} est le pas de la subdivision σ_n), c'est dire que pour tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta_{\sigma_n} \leqslant \delta$ pour tout $n \geqslant N$.

D.2.3 Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. On dit que l'*intégrale de f entre a et b existe* (ou, de manière équivalente, que f *est intégrable (au sens de Riemann) dans* $[a;\, b]$) si, quelle que soit la suite de subdivisions (σ_n) de $[a;\, b]$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n} = I = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\sigma_n} \ ,$$

où I est un nombre réel qui ne dépend pas du choix de la suite de subdivisions (σ_n), $\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ sont les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à la subdivision σ_n (*cf.* définition 4.1.5, section 4.1 du chapitre 4). I est alors appelé l'*intégrale de (Cauchy-) Riemann de f entre a et b*.

D.2.4 Remarque : La définition précédente est cohérente avec la définition 4.1.2 donnée dans la section 4.1 du chapitre 4 ; il s'agit d'une reformulation de la définition 4.1.2 qui prend en compte le lemme 4.1.7 d'une part, et le concept de suite de subdivisions d'autre part.

D.2.5 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue dans $[a;\, b]$, alors l'intégrale de f entre a et b existe ; autrement dit, si f est continue dans $[a;\, b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) dans $[a;\, b]$.*

Preuve : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\, b] \subset D$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

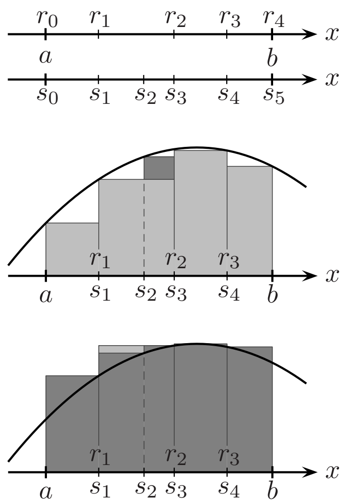
La démonstration se fait en trois étapes. La première étape consiste à prouver la proposition dans le cas d'une suite de subdivisions (ς_n) de $[a;\, b]$, satisfaisant la condition $\lim_{n\to\infty} \delta_{\varsigma_n} = 0$ (où δ_{ς_n} est le pas de la subdivision ς_n) et possédant la propriété suivante : pour tout $n \geqslant 1$, la subdivision ς_{n+1} est constituée de tous les éléments de la subdivision ς_n, et d'un élément qui n'est pas dans ς_n ; avec un tel type de suite de subdivisions, il est possible de définir le nombre réel I mentionné dans la définition D.2.3. La deuxième étape a pour objectif d'établir que $\underline{S}_{\sigma_n} \leqslant I \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}$ quelle que soit la subdivision σ_n de $[a;\, b]$ ($\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ étant les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à σ_n). Quant à la troisième étape, elle vise à prouver que, quelle que soit la suite de subdivisions (σ_n) satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$ ($\delta_{\sigma_n} \neq 0$ étant le pas de la subdivision σ_n), la quantité $\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ ($\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ étant les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à σ_n). La combinaison des résultats obtenus dans chacune de ces étapes mène alors à la conclusion de la proposition.

- *Première étape* :
  Soit (ς_n) une suite de subdivisions de l'intervalle fermé $[a; b]$, satisfaisant les propriétés suivantes :
  - ◇ $\lim_{n\to\infty} \delta_{\varsigma_n} = 0$, où δ_{ς_n} est le pas de la subdivision ς_n ;
  - ◇ pour tout $n \geqslant 1$, la subdivision ς_{n+1} se compose de tous les éléments de la subdivision ς_n et d'un élément supplémentaire, qui n'est pas dans ς_n.

  Notons $\varsigma_n = (r_0; \ldots ; r_n)$ et $\varsigma_{n+1} = (s_0; \ldots ; s_{n+1})$. Alors, par définition de ς_{n+1} :

$$a = s_0 = r_0 \,,\ \ldots\ ,\ s_{k-1} = r_{k-1}\,,\ s_{k+1} = r_k\,,\ \ldots\ ,\ s_{n+1} = r_n = b\,.$$

  et :



$$r_{k-1} < s_k < r_k\,,$$

  pour un certain $k \in \{1; \ldots ; n\}$ (*cf.* figure ci-contre) ; l'élément s_k est le « nouvel » élément, présent dans ς_{n+1} et absent dans ς_n. Notons aussi :
  - ◇ m et M le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[a; b]$,
  - ◇ $m_{r,j}$ et $M_{r,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[r_{j-1} ; r_j]$, où $j \in \{1; \ldots ; n\}$,
  - ◇ $m_{s,j}$ et $M_{s,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[s_{j-1} ; s_j]$, où $j \in \{1; \ldots ; n+1\}$.

  Remarquer que ces nombres sont bien définis, vu que f est continue dans $[a; b]$ et que tous les intervalles considérés sont fermés. Par définition de ς_n et ς_{n+1}, d'une part :

$$m_{r,1} = m_{s,1}\ ,\ \ldots\ ,\ m_{r,k-1} = m_{s,k-1}\ ,\ m_{r,k+1} = m_{s,k+2}\ ,\ \ldots\ ,\ m_{r,n} = m_{s,n+1}$$

  et :

$$m_{r,k} = \min\{m_{s,k} ; m_{s,k+1}\}\,,$$

  où $\min\{m_{s,k} ; m_{s,k+1}\}$ désigne le plus petit des deux nombres réels $m_{s,k}$ et $m_{s,k+1}$; d'autre part :

$$M_{r,1} = M_{s,1}\ ,\ \ldots\ ,\ M_{r,k-1} = M_{s,k-1}\ ,\ M_{r,k+1} = M_{s,k+2}\ ,\ \ldots\ ,\ M_{r,n} = M_{s,n+1}$$

  et :

$$M_{r,k} = \max\{M_{s,k} ; M_{s,k+1}\}\,,$$

  où $\max\{M_{s,k} ; M_{s,k+1}\}$ désigne le plus grand des deux nombres réels $M_{s,k}$ et $M_{s,k+1}$. Soient à présent $\underline{S}_{\varsigma_n}$ et $\overline{S}_{\varsigma_n}$ les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à la subdivision ς_n ; soient aussi $\underline{S}_{\varsigma_{n+1}}$ et $\overline{S}_{\varsigma_{n+1}}$ les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à la subdivision ς_{n+1}.

▷ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant \underline{S}_{\varsigma_{n+1}}$ et $\overline{S}_{\varsigma_n} \geqslant \overline{S}_{\varsigma_{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet :

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\varsigma_n} &= \sum_{j=1}^{n} m_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) \\
&= m_{r,1}\,(r_1 - r_0) + \ldots + m_{r,k}\,(r_k - r_{k-1}) + \ldots + m_{r,n}\,(r_n - r_{n-1}) \\
&= m_{s,1}\,(s_1 - s_0) + \ldots + m_{r,k}\,(s_{k+1} - s_{k-1}) + \ldots + m_{s,n+1}\,(s_{n+1} - s_n) \\
&= m_{s,1}\,(s_1 - s_0) + \ldots + m_{r,k}\,(s_k - s_{k-1}) \\
&\qquad\qquad + m_{r,k}\,(s_{k+1} - s_k) + \ldots + m_{s,n+1}\,(s_{n+1} - s_n) \\
&\leqslant m_{s,1}\,(s_1 - s_0) + \ldots + m_{s,k}\,(s_k - s_{k-1}) \\
&\qquad\qquad + m_{s,k+1}\,(s_{k+1} - s_k) + \ldots + m_{s,n+1}\,(s_{n+1} - s_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} m_{s,j}\,(s_j - s_{j-1}) \;=\; \underline{S}_{\varsigma_{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de manière analogue.

▷ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant \overline{S}_{\varsigma_n}$ et $\underline{S}_{\varsigma_{n+1}} \leqslant \overline{S}_{\varsigma_{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet :

$$\underline{S}_{\varsigma_n} = \sum_{j=1}^{n} m_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) = \overline{S}_{\varsigma_n}\,,$$

du fait que $m_{r,j} \leqslant M_{r;j}$ pour tout $j \in \{1; \ldots ; n\}$. La deuxième inégalité se démontre de manière analogue.

▷ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant M\,(b-a)$ et $\overline{S}_{\varsigma_n} \geqslant m\,(b-a)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, par définition du maximum M de f dans $[a;\, b]$:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\varsigma_n} &= \sum_{j=1}^{n} m_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} M\,(r_j - r_{j-1}) = M \sum_{j=1}^{n} (r_j - r_{j-1}) \\
&= M\,\big((r_1 - r_0) + (r_2 - r_1) + \ldots + (r_n - r_{n-1})\big) \\
&= M\,(r_n - r_0) = M\,(b-a)\,.
\end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre de manière analogue.

▷ $\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\big) = 0$. Pour s'en convaincre, il convient de noter, en premier lieu, que la continuité de f dans $[a;\, b]$ implique la continuité uniforme de f

dans ce même intervalle (*cf.* théorème D.1.5) ; ce qui signifie que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in [a;\, b]$ remplissant la condition $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, la relation $\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leqslant \varepsilon$ est satisfaite. Remarquer ensuite que la condition $\lim_{n\to\infty} \delta_{\varsigma_n} = 0$ se traduit par l'assertion suivante : pour tout nombre réel $\tilde{\delta} > 0$, il existe un nombre $\tilde{N}_\varsigma \in \mathbb{N}^*$ tel que la relation $n \geqslant \tilde{N}_\varsigma$ implique l'inégalité $\delta_{\varsigma_n} \leqslant \tilde{\delta}$. De cette assertion ressort le fait qu'il existe un nombre entier $N_\varsigma \in \mathbb{N}^*$ tel que l'inégalité $n \geqslant N_\varsigma$ implique l'inégalité $\delta_{\varsigma_n} \leqslant \delta$, où δ est le nombre réel qui vient d'être évoqué, lors de la continuité uniforme de f dans $[a;\, b]$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\varsigma$:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n} &= \sum_{j=1}^{n} M_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_{r,j}\,(r_j - r_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (M_{r,j} - m_{r,j})\,(r_j - r_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_{M_{r,j}}) - f(x_{m_{r,j}})\big)\,(r_j - r_{j-1}) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\,(r_j - r_{j-1}) \;=\; \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (r_j - r_{j-1}) \\
&= \varepsilon\,(r_1 - r_0 + r_2 - r_1 + \ldots + r_n - r_{n-1}) \\
&= \varepsilon\,(r_n - r_0) \;=\; \varepsilon\,(b-a)\,,
\end{aligned}$$

où $x_{m_{r,j}}$ (respectivement $x_{M_{r,j}}$) est l'élément (ou l'un des éléments), dans $[r_{j-1}\,;\, r_j]$, où f atteint son minimum (respectivement son maximum) dans $[r_{j-1}\,;\, r_j]$; comme $r_j - r_{j-1} \leqslant \delta_{\varsigma_n} \leqslant \delta$, alors $\left|f(x_{M_{r,j}}) - f(x_{M_{r,j}})\right| \leqslant \varepsilon$. En résumé, pour tout $n \geqslant N_\varsigma$:

$$\frac{1}{b-a}\left(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\right) \;\leqslant\; \varepsilon\,,$$

ce qui revient à noter :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\left(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\right) \;=\; 0\,.$$

Et vu que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\left(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\right) = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\right)$, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\right) \;=\; 0\,.$$

Les ensembles $(\,\underline{S}_{\varsigma_1}\,;\, \underline{S}_{\varsigma_2}\,;\, \underline{S}_{\varsigma_3}\,;\, \ldots)$ et $(\,\overline{S}_{\varsigma_1}\,;\, \overline{S}_{\varsigma_2}\,;\, \overline{S}_{\varsigma_3}\,;\, \ldots)$, notés de façon compacte $(\,\underline{S}_{\varsigma_n})$ et $(\,\overline{S}_{\varsigma_n})$, peuvent être vus commes des suites de nombres réels. Des quatre points qui viennent d'être traités, il ressort que ces suites satisfont les conditions suivantes :

- ◇ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant \underline{S}_{\varsigma_{n+1}}$ et $\overline{S}_{\varsigma_n} \geqslant \overline{S}_{\varsigma_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*i.e.* $(\underline{S}_{\varsigma_n})$ est une suite croissante et $(\overline{S}_{\varsigma_n})$ une suite décroissante),
- ◇ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant M\,(b-a)$ et $\overline{S}_{\varsigma_n} \geqslant m\,(b-a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- ◇ $\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}_{\varsigma_n} - \underline{S}_{\varsigma_n}\big) = 0$.

Selon la proposition A.1.5 et le lemme A.1.8 (*cf.* section A.1 de l'annexe A), les suites $(\underline{S}_{\varsigma_n})$ et $(\overline{S}_{\varsigma_n})$ convergent et admettent pour limite un seul et même nombre réel. Ce nombre réel va être noté I :

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\varsigma_n} \;=\; I \;=\; \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\varsigma_n}\;.$$

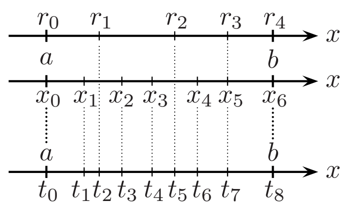
- *Deuxième étape* :

Soit σ_p une subdivision d'ordre p de l'intervalle fermé $[a;\,b]$. Soit aussi ς_n la subdivision d'ordre n de la suite de subdivisions (ς_n) introduite dans l'étape précédente. La réunion de σ_p et ς_n, notée $\sigma_p \cup \varsigma_n$, peut être vue comme une subdivision τ_q. Notons $\sigma_p = (x_0;\, x_1;\, \ldots\,;\, x_p)$, $\varsigma_n = (r_0;\, r_1;\, \ldots\,;\, r_n)$ et $\tau_q = (t_0;\, t_1;\, \ldots\,;\, t_q)$. Par définition de ς_n, σ_p et τ_q :

$$a = r_0 = x_0 = t_0 \qquad \text{et} \qquad b = r_n = x_p = t_q\,.$$

Remarquer que l'ordre q de τ_q est un nombre entier compris entre le plus grand des deux nombres n et p (dans le cas où tous les éléments de σ_p sont dans ς_n ou tous les éléments de ς_n sont dans σ_p), et $n+p-1$ (dans le cas où les éléments de ς_n sont tous différents de ceux de σ_p, à l'exception de r_0 et x_0, qui sont nécessairement égaux, tout comme r_n et x_p). Notons aussi :

- ◇ $m_{x,j}$ et $M_{x,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[x_{j-1}\,;\,x_j]$, où $j \in \{1;\,\ldots\,;\,p\}$,
- ◇ $m_{r,j}$ et $M_{r,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[r_{j-1}\,;\,r_j]$, où $j \in \{1;\,\ldots\,;\,n\}$,
- ◇ $m_{t,j}$ et $M_{t,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[t_{j-1}\,;\,t_j]$, où $j \in \{1;\,\ldots\,;\,q\}$.



Observer que ces nombres sont bien définis, vu que f est continue dans $[a;\,b]$ et que tous les intervalles considérés sont fermés. Par définition de τ_q, quel que soit $k \in \{1;\,\ldots\,;\,q\}$, l'intervalle $[x_{k-1}\,;\,x_k]$ peut être vu comme une réunion d'intervalles de la forme $[t_{\alpha-1}\,;\,t_\alpha]$ (où $\alpha \in \{1;\,\ldots\;q\}$) :

$$[x_{k-1}\,;\,x_k] \;=\; \bigcup_{\alpha=\iota}^{\kappa} [t_{\alpha-1}\,;\,t_\alpha]\,,$$

où ι et κ sont deux nombres entiers tels que $1 \leqslant \iota \leqslant \kappa \leqslant q$. En conséquence :

$$m_{x,k} \;=\; \min\big\{m_{t,\iota}\,;\,\ldots\,;\,m_{t,\kappa}\big\} \qquad \text{et} \qquad M_{x,k} \;=\; \max\big\{M_{t,\iota}\,;\,\ldots\,;\,M_{t,\kappa}\big\}\,,$$

où min (respectivement max) désigne le plus petit (respectivement le plus grand) des nombres entre accolades. Ainsi :

$$\begin{aligned} m_{x,k}\,(x_k - x_{k-1}) \;&=\; m_{x,k} \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &=\; \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} m_{x,k}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &\leqslant\; \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} m_{t,\alpha}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} M_{x,k}\,(x_k - x_{k-1}) \;&=\; M_{x,k} \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &=\; \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} M_{x,k}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &\geqslant\; \sum_{\alpha=\iota}^{\kappa} M_{t,\alpha}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1})\,. \end{aligned}$$

Aussi, toujours par définition de τ_q, quel que soit $k \in \{1; \ldots ; p\}$, l'intervalle $[r_{k-1}\,;\, r_k]$ peut être vu comme une réunion d'intervalles de la forme $[t_{\alpha-1}\,;\, t_\alpha]$ (où $\alpha \in \{1; \ldots\ q\}$) :

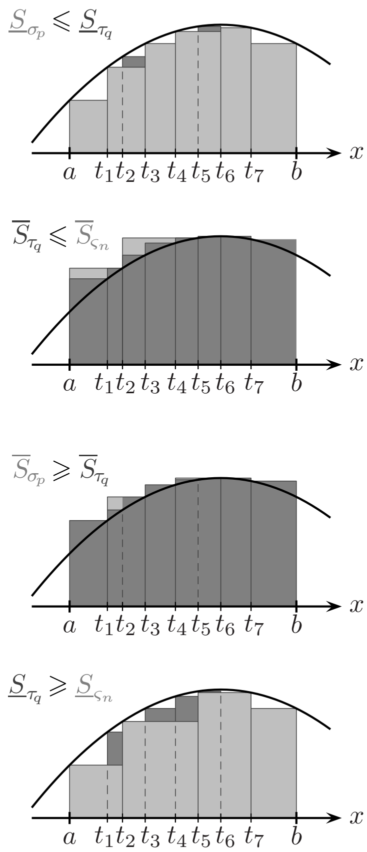
$$[r_{k-1}\,;\, r_k] \;=\; \bigcup_{\alpha=\mu}^{\nu} \,[t_{\alpha-1}\,;\, t_\alpha]\,,$$

où μ et ν sont deux nombres entiers tels que $1 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant q$. En conséquence :

$$m_{r,k} \;=\; \min\bigl\{m_{t,\mu}\,; \,\ldots\, ;\, m_{t,\nu}\bigr\} \qquad \text{et} \qquad M_{r,k} \;=\; \max\bigl\{M_{t,\mu}\,; \,\ldots\, ;\, M_{t,\nu}\bigr\}\,,$$

où min (respectivement max) désigne le plus petit (respectivement le plus grand) des nombres entre accolades. Ainsi :

$$\begin{aligned} m_{r,k}\,(r_k - r_{k-1}) \;&=\; m_{r,k} \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &=\; \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} m_{r,k}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &\leqslant\; \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} m_{t,\alpha}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \end{aligned}$$



et :

$$\begin{aligned} M_{x,k}\,(x_k - x_{k-1}) &= M_{x,k} \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &= \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} M_{x,k}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \\ &\geqslant \sum_{\alpha=\mu}^{\nu} M_{t,\alpha}\,(t_\alpha - t_{\alpha-1})\,. \end{aligned}$$

Soient à présent $\underline{S}_{\sigma_p}$, respectivement $\underline{S}_{\varsigma_n}$, $\underline{S}_{\tau_q}$ la somme de Darboux inférieure associée à la subdivision σ_p, respectivement ς_n, τ_q ; et $\overline{S}_{\sigma_p}$, respectivement $\overline{S}_{\varsigma_n}$, $\overline{S}_{\tau_q}$ la somme de Darboux supérieure associée à la subdivision σ_p, respectivement ς_n, τ_q. Des considérations qui viennent d'être faites, il ressort que :

▷ $\underline{S}_{\sigma_p} \leqslant \underline{S}_{\tau_q}$ et $\overline{S}_{\sigma_p} \geqslant \overline{S}_{\tau_q}$,

▷ $\underline{S}_{\varsigma_n} \leqslant \underline{S}_{\tau_q}$ et $\overline{S}_{\varsigma_n} \geqslant \overline{S}_{\tau_q}$.

En outre, $\underline{S}_{\tau_q} \leqslant \overline{S}_{\tau_q}$, vu que $m_{t,\alpha} \leqslant M_{t,\alpha}$ quel que soit $\alpha \in \{1; \ldots ; q\}$. Par conséquent :

$$\underline{S}_{\sigma_p} \leqslant \overline{S}_{\varsigma_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{S}_{\sigma_p} \geqslant \underline{S}_{\varsigma_n}\ .$$

Les résultats obtenus étant valables pour tout élément ς_n de la suite (ς_n), il vient, par passage à la limite :

$$\underline{S}_{\sigma_p} \leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\varsigma_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{S}_{\sigma_p} \geqslant \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\varsigma_n}\ ;$$

autrement écrit, avec $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\varsigma_n} = I = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\varsigma_n}$:

$$\underline{S}_{\sigma_p} \leqslant I \leqslant \overline{S}_{\sigma_p}\ .$$

- *Troisième étape* :

Soit (σ_n) une suite de subdivisions satisfaisant la condition $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$, où δ_{σ_n} est le pas de la subdivision σ_n. Notons $\sigma_n = (x_0; \ldots ; x_n)$, où $x_0 = a$ et $x_n = b$; notons aussi :

◇ $m_{x,j}$ et $M_{x,j}$ le minimum et le maximum de f, respectivement, dans $[x_{j-1}\,; x_j]$, où $j \in \{1; \ldots ; n\}$,

◇ $\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ les sommes de Darboux inférieure et supérieure, respectivement, associées à la subdivision σ_n.

La fonction f étant continue dans $[a; b]$, elle est, rappelons-le, uniformément continue dans ce même intervalle ; ce qui signifie que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in [a; b]$ remplissant la condition $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, la relation $\big|f(x_2) - f(x_1)\big| \leqslant \varepsilon$ est satisfaite. En outre, vu que $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$, il existe un nombre $N_\sigma \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la relation $n \geqslant N_\sigma$ implique l'inégalité $\delta_{\varsigma_n} \leqslant \delta$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\sigma$:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n} &= \sum_{j=1}^{n} M_{x,j}\,(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_{x,j}\,(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (M_{x,j} - m_{x,j})\,(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_{M_{x,j}}) - f(x_{m_{x,j}})\big)\,(x_j - x_{j-1}) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\,(x_j - x_{j-1}) \;=\; \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \\
&= \varepsilon\,(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) \\
&= \varepsilon\,(x_n - x_0) \;=\; \varepsilon\,(b - a)\,,
\end{aligned}$$

où $x_{m_{x,j}}$ (respectivement $x_{M_{x,j}}$) est l'élément (ou l'un des éléments), dans $[x_{j-1}\,;\,x_j]$, où f atteint son minimum (respectivement son maximum) dans $[x_{j-1}\,;\,x_j]$; comme $x_j - x_{j-1} \leqslant \delta_{\varsigma_n} \leqslant \delta$, alors $\big|f(x_{M_{x,j}}) - f(x_{M_{x,j}})\big| \leqslant \varepsilon$. En résumé, pour tout $n \geqslant N_\sigma$:

$$\frac{1}{b-a}\left(\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}\right) \leqslant \varepsilon\,,$$

ce qui revient à noter :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\left(\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}\right) = 0\,, \qquad \text{ou aussi :} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}\right) = 0\,.$$

Les ensembles $(\,\underline{S}_{\sigma_1}\,;\,\underline{S}_{\sigma_2}\,;\,\underline{S}_{\sigma_3}\,;\,\ldots)$ et $(\,\overline{S}_{\sigma_1}\,;\,\overline{S}_{\sigma_2}\,;\,\overline{S}_{\sigma_3}\,;\,\ldots)$, notés de façon compacte $(\,\underline{S}_{\sigma_n})$ et $(\,\overline{S}_{\sigma_n})$, peuvent être vus comme des suites de nombres réels. Du raisonnement qui vient d'être effectué, il ressort que ces suites satisfont la condition $\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}\big) = 0$.

Récapitulons le travail effectué. Pour toute suite de subdivisions (σ_n) satisfaisant la condition $\lim_{n\to\infty} \delta_{\sigma_n} = 0$ (δ_{σ_n} étant le pas de la subdivision σ_n), les suites de nombres $(\,\underline{S}_{\sigma_n})$ et $(\,\overline{S}_{\sigma_n})$ (où $\underline{S}_{\sigma_n}$ et $\overline{S}_{\sigma_n}$ sont les sommes de Darboux inférieure et supérieure associées à l'élément σ_n de la suite (σ_n)), satisfont les propriétés suivantes :

- ◇ $\underline{S}_{\sigma_n} \leqslant I \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où I est le nombre réel défini dans la première étape,
- ◇ $\lim_{n\to\infty}\big(\overline{S}_{\sigma_n} - \underline{S}_{\sigma_n}\big) = 0$.

En notant alors que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\sigma_n}-\underline{S}_{\sigma_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\sigma_n}-I+I-\underline{S}_{\sigma_n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\sigma_n}-I\right)+\lim_{n\to\infty}\left(I-\underline{S}_{\sigma_n}\right),\end{aligned}$$

il vient :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_{\sigma_n}-I\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(I-\underline{S}_{\sigma_n}\right) = 0\,,$$

du fait que $\overline{S}_{\sigma_n}-I \geqslant 0$ et $I-\underline{S}_{\sigma_n} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement écrit :

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_{\sigma_n} = I = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_{\sigma_n}\,.$$

Ainsi, dès lors que f est continue dans $[a;\,b]$, elle est intégrable (au sens de Riemann) dans $[a;\,b]$. □

D.2.6 Remarque : Soit f une fonction définie et continue dans un intervalle fermé $[a;\,b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Soit aussi (σ_n) une suite de subdivisions satisfaisant la condition $\lim_{n\to\infty}\delta_{\sigma_n} = 0$ (où δ_{σ_n} est le pas de la subdivision σ_n). Par définition des sommes de Darboux inférieure $\underline{S}_{\sigma_n}$ et supérieure $\overline{S}_{\sigma_n}$ associées à la subdivision σ_n, toute somme de Riemann S_{σ_n} (*cf.* définition 4.1.2, section 4.1 du chapitre 4) associée à σ_n satisfait la condition :

$$\underline{S}_{\sigma_n} \leqslant S_{\sigma_n} \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}\,.$$

Comme :

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_{\sigma_n} = I = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_{\sigma_n}\,,$$

où I est un nombre réel, alors nécessairement :

$$\lim_{n\to\infty}S_{\sigma_n} = I\,.$$

Avec ce résultat, on retrouve les propos tenus par Cauchy, puis par Riemann, au sujet de l'intégrabilité d'une fonction continue dans un intervalle fermé donné.

Annexe E

Propriétés des développements limités

Dans le chapitre 5, plusieurs propriétés relatives aux développements limités ont été énoncées sans démonstration. Le présent chapitre a pour objectif de reprendre ces propriétés et de les prouver en détail.

E.1 Propriétés des développements limités

E.1.1 Proposition : *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a.*

- *Si f admet un développement limité d'ordre n autour de a, alors nécessairement f admet un développement limité d'ordre m autour de a, où $m = 0, 1, \ldots, n-1$.*
- *Si f admet un développement limité d'ordre n autour de a, ce développement limité est unique.*
- *Si f admet un développement limité d'ordre n autour de 0, i.e. si f peut s'écrire, pour tout $x \in D \setminus \{0\}$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0 + b_1\,(x-0) + b_2\,(x-0)^2 + \ldots + b_n\,(x-0)^n + R_n^0(x) \\ &= b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)\,, \end{aligned}$$

  où $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont $n+1$ coefficients réels et $R_n^0 \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n^0(x)}{(x-0)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_n^0(x)}{x^n} = 0\,,$$

  alors :

  ◇ *tous les coefficients d'indice impair ($b_1, b_3, b_5, \ldots$) sont nuls si f est paire ;*

  ◇ *tous les coefficients d'indice pair ($b_0, b_2, b_4, \ldots$) sont nuls si f est impaire.*

Preuve : Soit $f\colon D\to\mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a.

- Supposons que f admet un développement limité d'ordre n autour de a ; autrement dit, supposons que f peut s'écrire, pour tout $x\in D\smallsetminus\{a\}$:

$$f(x) \;=\; b_0+b_1\,(x-a)+b_2\,(x-a)^2+\ldots+b_n\,(x-a)^n+R_n^a(x)\,,$$

où $b_0,b_1,b_2,\,\ldots\,,b_n$ sont $n+1$ coefficients réels et $R_n^a\colon D\to\mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n^a(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

Alors, pour tout $x\in D\smallsetminus\{a\}$ et pour tout $m=0,1,\,\ldots\,,n-1$:

$$f(x) \;=\; b_0+b_1\,(x-a)+b_2\,(x-a)^2+\ldots+b_m\,(x-a)^m+R_m^a(x)\,,$$

où $R_m^a\colon D\to\mathbb{R}$ est la fonction réelle donnée par :

$$R_m^a(x) \;=\; b_{m+1}\,(x-a)^{m+1}+\ldots+b_n\,(x-a)^n+R_n^a(x)\,.$$

Or :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{R_m^a(x)}{(x-a)^m} \;&=\; \lim_{x\to a}\frac{b_{m+1}\,(x-a)^{m+1}+\ldots+b_n\,(x-a)^n+R_n^a(x)}{(x-a)^m}\\ &=\; \lim_{x\to a}\left(b_{m+1}\,(x-a)+\ldots+b_n\,(x-a)^{n-m}+\frac{R_n^a(x)}{(x-a)^m}\right)\\ &=\; 0+\ldots+0+0 \;=\; 0\,,\end{aligned}$$

vu que $0\leqslant m<n$. Donc, $f(x) \;=\; b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_m\,(x-a)^m+R_m^a(x)$ est un développement limité d'ordre m de f autour de a. En conclusion, si f admet un développement limité d'ordre n autour de a, alors nécessairement f admet un développement limité d'ordre m autour de a, où $m=0,1,\,\ldots\,,n-1$.

- Supposons que f admet deux développements limités d'ordre n autour de a, différents ; autrement dit, supposons que f peut s'écrire, pour tout $x\in D\smallsetminus\{a\}$, d'une part :

$$f(x) \;=\; b_0+b_1\,(x-a)+b_2\,(x-a)^2+\ldots+b_n\,(x-a)^n+R_n^a(x)\,,$$

où $b_0,b_1,b_2,\,\ldots\,,b_n$ sont $n+1$ coefficients réels et $R_n^a\colon D\to\mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n^a(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,,$$

et d'autre part :

$$f(x) \;=\; c_0+c_1\,(x-a)+c_2\,(x-a)^2+\ldots+c_n\,(x-a)^n+T_n^a(x)\,,$$

où $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont $n+1$ coefficients réels tels que $c_m \neq b_m$ pour au moins un nombre entier m compris entre 0 et n, et $T_n^a \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n^a(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

Soit k le plus petit nombre entier supérieur ou égal à 0 tel que $c_k \neq b_k$. Alors, pour tout $x \in D\smallsetminus\{a\}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x) \;&=\; \big(c_0 + c_1\,(x-a) + \ldots + c_k\,(x-a)^k + \ldots + c_n\,(x-a)^n + T_n^a(x)\big) \\ &\qquad -\big(b_0 + b_1\,(x-a) + \ldots + b_k\,(x-a)^k + \ldots + b_n\,(x-a)^n + R_n^a(x)\big) \\ &=\; (c_k - b_k)(x-a)^k + \ldots (c_n - b_n)(x-a)^n + \big(T_n^a(x) - R_n^a(x)\big)\,, \end{aligned}$$

vu que $c_0 = b_0, c_1 = b_1, \ldots, c_{k-1} = b_{k-1}$. Ainsi, en divisant par $(x-a)^k$, il vient :

$$0 \;=\; (c_k - b_k) + (c_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \ldots + (c_n - b_n)(x-a)^{n-k} + \frac{T_n^a(x)}{(x-a)^k} - \frac{R_n^a(x)}{(x-a)^k}\;;$$

d'où, en passant à la limite lorsque x tend vers a :

$$0 \;=\; (c_k - b_k) + 0 + \ldots + 0 + 0 - 0\,,$$

ce qui montre que $c_k = b_k$. Or, une telle égalité est contradictoire avec le fait que f admet deux développements limités d'ordre n autour de a, différents. En résumé, dès lors que f admet un développement limité d'ordre n autour de a, ce développement est unique.

- Supposons aussi que f admet un développement limité d'ordre n autour de 0 ; autrement dit, supposons que f peut s'écrire, pour tout $x \in D\smallsetminus\{0\}$:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; b_0 + b_1\,(x-0) + b_2\,(x-0)^2 + \ldots + b_n\,(x-0)^n + R_n^0(x) \\ &=\; b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)\,, \end{aligned}$$

où $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont $n+1$ coefficients réels et $R_n^0 \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que :

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^0(x)}{(x-0)^n} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{R_n^0(x)}{x^n} \;=\; 0\,.$$

Supposons, de plus, que f est paire. Dans ce cas, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. Ainsi :

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\,(-x) + b_2\,(-x)^2 + \ldots + b_n\,(-x)^n + R_n^0(-x) \;&=\; f(-x) \\ =\; f(x) \;=\; b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)\,&, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} b_0 - b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,(-x)^n + R_n^0(-x) \;&=\; f(-x) \\ =\; f(x) \;=\; b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)\,&. \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n^0(-x)}{x^n} \overset{\tilde{x}=-x}{=} \lim_{\tilde{x}\to 0}\frac{R_n^0(\tilde{x})}{(-\tilde{x})^n} = \lim_{\tilde{x}\to 0}(-1)^n\frac{R_n^0(\tilde{x})}{\tilde{x}^n} = (-1)^n\cdot 0 = 0\,.$$

En conséquence, $f(x) = b_0 - b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,(-x)^n + R_n^0(-x)$ est également un développement limité d'ordre n de f autour de 0. Comme le développement limité d'ordre n de f autour de 0, dès lors qu'il existe, est unique, alors nécessairement $b_1 = b_3 = \ldots = 0$ (de sorte que les deux écritures $b_0 - b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,(-x)^n + R_n^0(-x)$ et $b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n + R_n^0(x)$ n'en soient qu'une seule et même). En résumé, si f est paire et admet un développement limité d'ordre n autour de 0, tous les coefficients d'indice impair, dans le développement limité, sont nuls. Un raisonnement similaire à celui qui vient d'être mené permet de dire que si f est impaire et admet un développement limité d'ordre n autour de 0, tous les coefficients d'indice pair, dans le développement limité, sont nuls. □

E.2 Opérations entre développements limités

E.2.1 Proposition : *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, définies toutes les deux dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a. Supposons que f et g admettent toutes les deux un développement limité d'ordre n autour de a. Notons :*

$$f(x) = P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) \quad (x \in D_1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

les développements limités d'ordre n autour de a de f et de g, respectivement, $P^a_{f,n}(x)$ et $P^a_{g,n}(x)$ étant les parties principales, $R^a_{f,n}(x)$ et $R^a_{g,n}(x)$ les restes associés. Alors :

- *la fonction $\alpha\,f + \beta\,g$, où α et β sont deux nombres réels, admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$, dont la partie principale, notée $P^a_{\alpha f+\beta g,n}$, est donnée par :*

$$P^a_{\alpha f+\beta g,n}(x) = \alpha\,P^a_{f,n}(x) + \beta\,P^a_{g,n}(x)\;;$$

- *la fonction fg admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$, dont la partie principale, notée $P^a_{fg,n}$, s'obtient en effectuant le produit :*

$$P^a_{f,n}(x)\,P^a_{g,n}(x)$$

  et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n ;
- *si $c_0 \neq 0$, où c_0 est le terme constant dans $P^a_{g,n}(x)$ (i.e. $c_0 = \lim_{x\to a} P^a_{g,n}(x)$), la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1 \cap D_2$ tel que $g(x) \neq 0$, dont la partie principale s'obtient en effectuant une division euclidienne de $P^a_{f,n}(x)$ par $P^a_{g,n}(x)$ selon les puissances croissantes, et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n.*

Gardons les hypothèses sur $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage du nombre réel b_0, sauf éventuellement en b_0, où b_0 est le terme constant dans $P^a_{f,n}(x)$ (i.e. $b_0 = \lim_{x\to a} P^a_{f,n}(x)$). Supposons que g admet un développement limité d'ordre n autour de b_0. Notons :

$$g(x) \;=\; P^{b_0}_{g,n}(x) + R^{b_0}_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

le développement limité d'ordre n de g autour de a, $P^{b_0}_{g,n}(x)$ étant la partie principale et $R^{b_0}_{g,n}$ le reste associé. Alors :

- *la fonction $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n autour de a, défini en tout $x \in D_1$ tel que $f(x) \in D_2$, dont la partie principale s'obtient en composant $P^a_{f,n}(x)$ et $P^{b_0}_{g,n}(x)$ et en ne gardant que les termes qui contiennent $x - a$ à une puissance inférieure ou égale à n.*

Preuve : Soient $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, définies toutes les deux dans un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a. Supposons que f et g admettent toutes les deux un développement limité d'ordre n autour de a. Notons :

$$f(x) \;=\; P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) \quad (x \in D_1) \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

les développements limités d'ordre n de f et de g autour de a, respectivement, $P^a_{f,n}(x)$ et $P^a_{g,n}(x)$ étant les parties principales, $R^a_{f,n}(x)$ et $R^a_{g,n}(x)$ les restes associés. Ces restes, rappelons-le, satisfont :

$$\lim_{x\to a} \frac{R^a_{f,n}(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \frac{R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,;$$

- Soient α et β deux nombres réels. Alors, pour tout $x \in D_1 \cap D_2$:

$$\begin{aligned}
\big(\alpha\, f + \beta\, g\big)(x) \;&=\; \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\\
&=\; \alpha\,\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big) + \beta\,\big(P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)\big)\\
&=\; \big(\alpha\, P^a_{f,n}(x) + \beta\, P^a_{g,n}(x)\big) + \big(\alpha\, R^a_{f,n}(x) + \beta\, R^a_{g,n}(x)\big)\,,
\end{aligned}$$

  avec :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\alpha\, R^a_{f,n}(x) + \beta\, R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n} \;&=\; \lim_{x\to a} \left(\alpha\, \frac{R^a_{f,n}(x)}{(x-a)^n} + \beta\, \frac{R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n}\right)\\
&=\; \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

  $\big(\alpha\, f + \beta\, g\big)(x) \;=\; \big(\alpha\, P^a_{f,n}(x) + \beta\, P^a_{g,n}(x)\big) + \big(\alpha\, R^a_{f,n}(x) + \beta\, R^a_{g,n}(x)\big)$ est donc un développement limité d'ordre n de $\alpha\, f + \beta\, g$ autour de a ; la partie principale de ce développement est $\alpha\, P^a_{f,n}(x) + \beta\, P^a_{g,n}(x)$, où :

$$\begin{aligned}
&\alpha\, P^a_{f,n}(x) + \beta\, P^a_{g,n}(x)\\
=\;& \alpha\,\big(b_0 + b_1\,(x-a) + \ldots + b_n\,(x-a)^n\big)\\
&\quad +\beta\,\big(c_0 + c_1\,(x-a) + \ldots + c_n\,(x-a)^n\big)\\
=\;& (\alpha\, b_0 + \beta\, c_0) + (\alpha\, b_1 + \beta\, c_1)\,(x-a) + \ldots + (\alpha\, b_n + \beta\, c_n)\,(x-a)^n\,.
\end{aligned}$$

Le fait que le développement limité d'ordre n d'une fonction autour d'un point, dès lors qu'il existe, est unique, permet alors de conclure.

- Pour tout $x \in D_1 \cap D_2$:

$$\begin{aligned}\big(fg\big)(x) \;&=\; f(x)\,g(x) \;=\; \big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)\big(P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)\big)\\ &=\; P^a_{f,n}(x)\,P^a_{g,n}(x) + P^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x) + P^a_{g,n}(x)\,R^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x)\,,\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{P^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x) + P^a_{g,n}(x)\,R^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n}\\ &=\; \lim_{x\to a}\left(P^a_{f,n}(x)\,\frac{R^a_{g,n}}{(x-a)^n} + P^a_{g,n}(x)\,\frac{R^a_{f,n}}{(x-a)^n} + (x-a)^n\,\frac{R^a_{f,n}(x)}{(x-a)^n}\,\frac{R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n}\right)\\ &=\; b_0\cdot 0 + c_0\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 0 \;=\; 0\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, le produit $P^a_{f,n}(x)\,P^a_{g,n}(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P^a_{f,n}(x)\,P^a_{g,n}(x) \;=\; S^a_n(x) + T^a_{2n}(x)\,,$$

où $S^a_n(x)$ est un polynôme de degré n en $x-a$ et $T^a_{2n}(x)$ un polynôme en $x-a$ qui ne contient que des termes proportionnels à $(x-a)^m$, où $n+1 \leqslant m \leqslant 2n$. En conséquence :

$$\lim_{x\to a}\frac{T^a_{2n}(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

Ainsi, la quantité $T^a_{2n}(x) + P^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x) + P^a_{g,n}(x)\,R^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\,R^a_{g,n}(x)$ peut être vue comme le reste d'un développement limité d'ordre n de fg autour de a, dont la partie principale est $S^a_n(x)$. Le fait que le développement limité d'ordre n d'une fonction autour d'un point, dès lors qu'il existe, est unique, permet alors de conclure.

- Soient $S^a_n(x)$ le polynôme de degré n en $x-a$, résultant de la division euclidienne de $P^a_{f,n}$ par $P^a_{g,n}$ selon les puissances croissantes, et $T^a_n(x)$ le reste associé. Alors :

$$\frac{P^a_{f,n}(x)}{P^a_{g,n}(x)} \;=\; S^a_n(x) + \frac{T^a_n(x)}{P^a_{g,n}(x)} \qquad\Leftrightarrow\qquad P^a_{f,n}(x) \;=\; S^a_n(x)\,P^a_{g,n}(x) + T^a_n(x)\,.$$

Noter que, la division se faisant selon les puissances croissante, $T^a_n(x)$ est un polynôme en $x-a$ qui ne contient que des termes proportionnels à $(x-a)^m$, où $m \geqslant n+1$. Ainsi, pour tout $x \in D_1 \cap D_2$ tel que $g(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) \;&=\; \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)}{P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)} \;=\; \frac{S^a_n(x)\,P^a_{g,n}(x) + T^a_n(x) + R^a_{f,n}(x)}{P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)}\\ &=\; \frac{S^a_n(x)\,P^a_{g,n}(x) + S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x) - S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x) + T^a_n(x) + R^a_{f,n}(x)}{P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)}\\ &=\; S^a_n(x) + \frac{R^a_{f,n}(x) + T^a_n(x) - S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x)}{P^a_{g,n}(x) + R^a_{g,n}(x)}\,,\end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{R^a_{f,n}(x)+T^a_n(x)-S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x)}{P^a_{g,n}(x)+R^a_{g,n}(x)}}{(x-a)^n} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n}\, \frac{R^a_{f,n}(x)+T^a_n(x)-S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x)}{P^a_{g,n}(x)+R^a_{g,n}(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{P^a_{g,n}(x)+R^a_{g,n}(x)} \left(\frac{R^a_{f,n}(x)}{(x-a)^n} + \frac{T^a_n(x)}{(x-a)^n} - S^a_n(x)\,\frac{R^a_{g,n}(x)}{(x-a)^n}\right)$$

$$= \frac{1}{c_0+0}\left(0+0-\frac{b_0}{c_0}\cdot 0\right) = 0\,,$$

vu que le premier terme de $S^a_n(x)$ est $\frac{b_0}{c_0}$ et que tous les termes de $T^a_n(x)$ sont proportionnels à $(x-a)^m$, où $m \geqslant n+1$. La quantité :

$$\frac{R^a_{f,n}(x)+T^a_n(x)-S^a_n(x)\,R^a_{g,n}(x)}{P^a_{g,n}(x)+R^a_{g,n}(x)}$$

peut donc être vue comme l'expression du reste d'ordre n d'un développement limité de $\frac{f}{g}$, dont la partie principale est $S^a_n(x)$. Le fait que le développement limité d'ordre n d'une fonction autour d'un point, dès lors qu'il existe, est unique, permet alors de conclure.

Gardons les hypothèses sur $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ formulées initialement ; et supposons à présent que $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie dans un voisinage du nombre réel b_0, sauf éventuellement en b_0, où b_0 est le terme constant dans $P^a_{f,n}(x)$ (*i.e.* $b_0 = \lim_{x\to a} P^a_{f,n}(x)$). Supposons que g admet un développement limité d'ordre n autour de b_0. Notons :

$$g(x) = P^{b_0}_{g,n}(x) + R^{b_0}_{g,n}(x) \quad (x \in D_2)$$

le développement limité d'ordre n de g autour de b_0, $P^{b_0}_{g,n}(x)$ étant la partie principale et $R^{b_0}_{g,n}$ le reste associé. Ce reste, rappelons-le, satisfait :

$$\lim_{x\to b_0} \frac{R^{b_0}_{g,n}(x)}{(x-b_0)^n} = 0\,.$$

- Pour tout $x \in D_1$ tel que $f(x) \in D_2$:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) = P^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big) + R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big)\\ &= P^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x)+R^a_{f,n}(x)\big) + R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x)+R^a_{f,n}(x)\big)\,.\end{aligned}$$

  Intéressons-nous d'abord à l'expression $R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x)+R^a_{f,n}(x)\big)$; étudions la limite :

$$\lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x)+R^a_{f,n}(x)\big)}{(x-a)^n}\,.$$

Deux situations peuvent se présenter, lors du calcul de cette limite.

◇ $f(x) \neq b_0$ lorsque x est arbitrairement proche de a (sans qu'il ne touche a) ; dans ce cas, en écrivant concrètement $P^a_{f,n}(x)$:

$$P^a_{f,n}(x) \;=\; b_0 + b_1\,(x-a) + \ldots + b_n\,(x-a)^n \;,$$

et en posant $u = f(x)$, il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big)}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big)}{\big(f(x)-b_0\big)^n}\,\frac{\big(f(x)-b_0\big)^n}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big)}{\big(f(x)-b_0\big)^n}\,\frac{\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) - b_0\big)^n}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big)}{\big(f(x)-b_0\big)^n}\,\lim_{x\to a}\frac{\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) - b_0\big)^n}{(x-a)^n} \\
&= \lim_{u\to b_0} \frac{R^{b_0}_{g,n}(u)}{(u-b_0)^n}\,\lim_{x\to a}\left(\frac{P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) - b_0}{x-a}\right)^n \\
&= 0 \cdot b_1^{\,n} \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

vu que u tend vers b_0 lorsque x tend vers a, et vu que l'expression suivante tend vers b_1 lorsque x tend vers a :

$$\begin{aligned}
&\frac{P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x) - b_0}{x-a} \;= \\
&= \frac{b_0 + b_1\,(x-a) + b_2\,(x-a)^2 + \ldots + b_n\,(x-a)^n + R^a_{f,n}(x) - b_0}{x-a} \\
&= \frac{b_1\,(x-a) + b_2\,(x-a)^2 + \ldots + b_n\,(x-a)^n + R^a_{f,n}(x)}{x-a} \\
&= b_1 + b_2\,(x-a) + \ldots + b_n\,(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\,\frac{R^a_{f,n}(x)}{(x-a)^n}
\end{aligned}$$

◇ $f(x) = b_0$ lorsque x est arbitrairement proche de a (sans qu'il ne touche a) ; dans ce cas, $R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big) = R^{b_0}_{g,n}\big(f(x)\big) = R^{b_0}_{g,n}(b_0) = 0$, ce qui implique que :

$$\lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)}{(x-a)^n} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{0}{(x-a)^n} \;=\; \lim_{x\to a} 0 \;=\; 0\,.$$

Dans tous les cas :

$$\lim_{x\to a} \frac{R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

Intéressons-nous à présent à la quantité $P^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)$; celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$P^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big) \;=\; S^a_n(x) + T^a_{n^2}(x) + U^a_{k\ell}(x)\,,$$

où $S^a_n(x)$ est un polynôme de degré n en $x-a$, $T^a_{n^2}(x)$ un polynôme en $x-a$ qui ne contient que des termes proportionnels à $(x-a)^m$, où $n+1 \leqslant m \leqslant n^2$, et $U^a_{k\ell}$ une expression qui peut s'écrire comme une somme de termes de la forme $\alpha\,(x-a)^k\,(R^a_{f,n}(x))^\ell$, où α est un nombre réel, k et ℓ deux nombres entiers tels que $k \geqslant 0$ et $\ell > 0$. De fait :

$$\lim_{x\to a} \frac{T^a_{n^2}(x) + U^a_{k\ell}(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\,.$$

En résumé, la quantité $T^a_{n^2}(x) + U^a_{k\ell}(x) + R^{b_0}_{g,n}\big(P^a_{f,n}(x) + R^a_{f,n}(x)\big)$ peut être vue comme l'expression du reste d'ordre n d'un développement limité de $g \circ f$, dont la partie principale est donnée par $S^a_n(x)$. Le fait que le développement limité d'ordre n d'une fonction autour d'un point, dès lors qu'il existe, est unique, permet alors de conclure. $\square$

Annexe F

Formulaire

F.1 Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
0	0
x	1
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\mathrm{tg}^2(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathrm{tgh}(x)$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\mathrm{tgh}^2(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^a\ (a\in\mathbb{R})$	$a\,x^{a-1}$
$\exp(x)=\mathrm{e}^x$	$\exp(x)=\mathrm{e}^x$
$\exp_a(x)=a^x$	$\ln(a)\exp_a(x)=\ln(a)\,a^x$
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arccos}(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arctg}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{Argsinh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{Argcosh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Argtgh}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

F.2 Primitives de certaines fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	c	$c\,x$
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\,,\ a \neq -1$	$\exp(x) = \mathrm{e}^x$	$\exp(x) = \mathrm{e}^x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\exp_a(x) = a^x$	$\dfrac{\exp_a(x)}{\ln(a)} = \dfrac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\mathrm{ctg}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\mathrm{tg}^2(x)$	$\mathrm{tg}(x)$	$\dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1+\mathrm{ctg}^2(x)$	$-\mathrm{ctg}(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathrm{tgh}(x)$	$\ln\lvert\cosh(x)\rvert$	$\mathrm{ctgh}(x)$	$\ln\lvert\sinh(x)\rvert$
$\dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\mathrm{tgh}^2(x)$	$\mathrm{tgh}(x)$	$\dfrac{1}{\sinh^2(x)} = \mathrm{ctgh}^2(x)-1$	$\mathrm{ctgh}(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\Big(\dfrac{x}{a}\Big)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctg}(x)$	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\Big(\dfrac{x}{a}\Big)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert$	$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2\,a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$

F.3 Développements de MacLaurin de certaines fonctions usuelles

$f(x)$	Développement de MacLaurin de f
$\exp(x)$	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\sin(x)$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!}$
$\cos(x)$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2\,n)!}$
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\,n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2\,n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2\,n+1}$
$\mathrm{Arctg}(x)$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2\,n+1}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n\, x^n$
$\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2\,x + 3\,x^2 + \ldots + (-1)^n\,(n+1)\,x^n$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{2\cdot 4}\,x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2\,n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2\,n)}\,x^n$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^2 + \ldots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\,n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2\,n)}\,x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$
$\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$	$x - \dfrac{x^3}{3\cdot 1!} + \dfrac{x^5}{5\cdot 2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)\,n!}$

Exercices

Dans les pages qui suivent se trouve un recueil d'exercices[I] traitant de tous les thèmes abordés dans le présent ouvrage. Ce recueil est organisé non pas selon les chapitres de l'ouvrage, mais en séries. Voici quelques informations au sujet de ces séries :

- Il y a trente séries d'exercices.
- Chaque série traite d'un ou de deux sujets.
- Chaque série comporte la donnée d'un certain nombre d'exercices, ainsi que les réponses correspondantes.
- Chaque série requiert, *grosso modo*, une quantité de travail équivalente à celle des autres séries.

Typiquement, dans le cas où le cours traitant du calcul infinitésimal est donné durant toute une année académique, chaque série d'exercices du recueil ci-après correspond à une semaine de travail.

I. Ce recueil comporte des exercices conformes aux énoncés usuels utilisés par diverses sources, dont ils sont inspirés :

- un recueil d'exercices existant à l'école HE-Arc Ingénierie, s'appuyant essentiellement sur le livre *Analyse*, de E. W. Swokowski [3],
- le livre *Calcul différentiel et intégral 3*, de J. Douchet & B. Zwahlen [1],
- le livre *Algèbre*, de E. W. Swokowski & J. A. Cole [11].

Nombres réels

Exercice 1.1

(a) Écrire concrètement les dix plus petits éléments des ensembles suivants :
- $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 5\,n + 1, \text{où } n \in \mathbb{N}^*\}$;
- $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{2\,x+1}{3} \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) Soient les ensembles :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ est impair}\}\,, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ est un nombre premier}\}\,, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2\,n + 3, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}\,. \end{aligned}$$

Expliciter (en fonction de A, B et/ou C) :
- $A \cap B$;
- $A \cup B$;
- $B \cap C$.

Exercice 1.2

Soient les ensembles $E = \{x \in \mathbb{Z} \,\big|\, |x| < 2\}$ et $F = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, -1 < y \leqslant 3\}$.

(a) Donner tous les éléments de $E \times F$.

(b) Expliciter l'ensemble $(E \times F) \cap (F \times E)$.

Exercice 1.3

i. Écrire les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants en notation d'intervalles.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x \leqslant 2\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4 \geqslant 0\}$.

ii. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, représenter le(s) morceau(x) de plan correspondant au produit cartésien $A \times B$, où A et B sont les ensembles définis au point i.

Exercice 1.4
Calculer et simplifier les expressions suivantes :

(a) $\left(2\,a^2\,b^3\,c\right)^4$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$; (b) $\left(u^{-2}\,v^3\right)^{-3}$, où $u, v \in \mathbb{R}^*$;

(c) $\dfrac{8\,x^3\,y^{-5}}{4\,x^{-1}\,y^2}$, où $x, y \in \mathbb{R}^*$; (d) $\left(\dfrac{u^2}{2\,v}\right)^{-3}$, où $u, v \in \mathbb{R}^*$;

(e) $\sqrt[3]{16\,x^3\,y^8\,z^4}$, où $x, y, z \in \mathbb{R}$; (f) $\left(r^2\,s^6\right)^{\frac{1}{3}}$, où $r, s \in \mathbb{R}$;

(g) $\sqrt{3\,a^2\,b^3}\,\sqrt{6\,a^5\,b}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$; (h) $\left(\dfrac{2\,x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \left(\dfrac{3\,x^{-\frac{5}{6}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)$, où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.5
Résoudre les inéquations suivantes, dans l'ensemble $\mathbb{R}$; autrement dit, pour chacune des inéquations suivantes, déterminer tous les $x \in \mathbb{R}$ qui la satisfont.

(a) $x^2 - 2\,x < 3$; (b) $4 + \dfrac{1}{x^2 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x^3 - x}$;

(c) $(x+1)^2 \leqslant |x+3|$; (d) $|x+3| - |x-1| < |x-4|$.

Exercice 1.6
Un réservoir sphérique contient 38 000 L d'eau (L étant le symbole du litre). Calculer l'aire de l'enveloppe extérieure de ce réservoir.

Exercice 1.7
Soient a et b deux nombres réels satisfaisant l'égalité $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$. Qu'implique cette égalité sur a et/ou b ?

Exercice 1.8
Montrer que $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, quels que soient les nombres réels a et b.

Réponse 1.1

(a)
- 6; 11; 16; 21; 26; 31; 36; 41; 46; 51.
- $-\frac{1}{2}\,;\ 1\,;\ \frac{5}{2}\,;\ 4\,;\ \frac{11}{2}\,;\ 7\,;\ \frac{17}{2}\,;\ 10\,;\ \frac{23}{2}\,;\ 13\,.$

(b)
- $B\setminus\{2\}$;
- $A\cup\{2\}$;
- $B\setminus\{2;\,3\}$.

Réponse 1.2

(a) $$E\times F\;=\;\big\{\,(-1;\,0)\,;\;(-1;\,1)\,;\;(-1;\,2)\,;\;(-1;\,3)\,;\;(0;\,0)\,;\;(0;\,1)\,;\;(0;\,2)\,;\;(0;\,3)\,;\;(1;\,0)\,;\;(1;\,1)\,;\;(1;\,2)\,;\;(1;\,3)\,\big\}\,.$$

(b) $(E\times F)\cap(F\times E)\;=\;\{\,(0;\,0)\,;\;(0;\,1)\,;\;(1;\,0)\,;\;(1;\,1)\,\}\,.$

Réponse 1.3

i. (a) $A=\,]-3\,;\,2]$; (b) $B=\,]-\infty\,;\,-2]\cup[2\,;\,+\infty[$.

Réponse 1.4

(a) $16\,a^8\,b^{12}\,c^4$;

(b) $u^6\,v^{-9}=\dfrac{u^6}{v^9}$;

(c) $\dfrac{2\,x^4}{y^7}$;

(d) $\dfrac{8\,v^3}{u^6}$;

(e) $2\,x\,y^2\,z\,\sqrt[3]{2\,y^2\,z}$;

(f) $r^{\frac{2}{3}}\,s^2=s^2\,\sqrt[3]{r^2}$;

(g) $3\,a^3\,b^2\,\sqrt{2\,a}$;

(h) $\dfrac{12\,x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{12\,\sqrt{x}}{y\,\sqrt[3]{y}}$.

Réponse 1.5

(a) $x\in\,]-1\,;\,3[$;

(b) $x\in\,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\,]0\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,\infty[$.

(c) $x\in[-2\,;\,1]$;

(d) $x\in\,]-\infty\,;\,\frac{2}{3}[\,\cup\,]8\,;\,\infty[$.

Réponse 1.6
L'aire de l'enveloppe est d'environ $54{,}7\,\mathrm{m}^2\approx55\,\mathrm{m}^2$.

Réponse 1.7
Soit $a=0$ et $b>0$, soit $a>0$ et $b=0$, ou soit $a=b=0$.

Polynômes

Exercice 2.1

i. Factoriser au maximum les polynômes suivants (jusqu'à l'obtention d'une forme irréductible).

(a) $3\,x^2 - 12\,x + 12$;
(b) $5\,x^2 - 20$;
(c) $25\,x^2 + 25\,x - 150$;
(d) $3\,x^2 - 15\,x + 18$;
(e) $3\,x^3 + 2\,x^2 - 12\,x - 8$;
(f) $x^4 + x^3 - x - 1$.

ii. Factoriser au maximum les expressions suivantes (jusqu'à l'obtention d'une forme irréductible).

(a) $8\,a^3 - 27$;
(b) $81\,x^4 - y^4$;
(c) $16\,x^4 - (y - 2\,z)^2$;
(d) $8\,c^6 - 27\,d^9$.

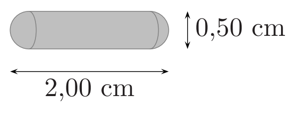
Exercice 2.2

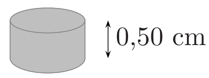
i. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une unique fraction polynomiale (*i.e.* une unique fraction, avec un polynôme au numérateur et un polynôme au dénominateur).

(a) $\dfrac{\dfrac{6\,x^2 - 5\,x - 6}{x^2 - 4}}{\dfrac{2\,x^2 - 3\,x}{x + 2}}$;
(b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + x} - \dfrac{3\,x}{x + 3}$;
(c) $\dfrac{x + x^{-2}}{1 + x^{-2}}$;
(d) $\left(x^{-1} + 3^{-1}\right)^{-1}$.

ii. Y a-t-il une différence entre les expressions $\frac{1}{x+1}$ et $\frac{x-1}{x^2-1}$?

Exercice 2.3





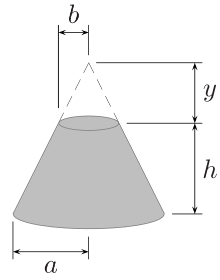
La vitesse à laquelle un comprimé de vitamine C se dissout dépend de la surface qui le délimite. Une première marque de fabrication présente des comprimés ayant la forme d'un hémisphère, d'un cylindre et d'un deuxième hémisphère mis bout à bout (*cf.* figure du haut, ci-contre) ; la longueur totale est de 2,00 cm et le diamètre vaut 0,50 cm. Une seconde marque produit des comprimés qui ont la forme de disques épais (*cf.* figure du bas, ci-contre), d'épaisseur égale à 0,50 cm.

(a) Déterminer le diamètre d que doit avoir le comprimé en forme de disque pour que l'aire de sa surface soit égale à celle du premier comprimé.

(b) Calculer le volume de chaque comprimé.

Exercice 2.4

Les premières embarcations du programme *Apollo* (de la NASA) avaient la forme d'un tronc de cône circulaire, comme le montre la figure ci-contre.



(a) Exprimer y en fonction de h, a et b.

(b) Exprimer le volume V du tronc de cône en fonction de h, a et b.

Exercice 2.5

Décomposer les fractions polynomiales suivantes en éléments simples.

(a) $\dfrac{x+34}{x^2-4\,x-12}$;

(b) $\dfrac{4\,x^2-15\,x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$;

(c) $\dfrac{x^2+x-6}{(x^2+1)(x-1)}$;

(d) $\dfrac{9\,x^2-3\,x+8}{x^3+2\,x}$;

(e) $\dfrac{4\,x^3-x^2+4\,x+2}{(x^2+1)^2}$;

(f) $\dfrac{2\,x^4-2\,x^3+6\,x^2-5\,x+1}{x^3-x^2+x-1}$.

Exercice 2.6

i. La méthode de *Héron d'Alexandrie* (datant du I$^{\text{er}}$ siècle ap. J.-C.) est un procédé illimité de calcul visant à déterminer une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre A donné. La procédure est la suivante : on prend un nombre quelconque a, on calcule la moyenne arithmétique entre a et $\frac{A}{a}$, puis on recommence cette opération autant de fois que l'on veut avec le nouveau résultat obtenu. Dans un langage plus formel, ce mécanisme se traduit par l'expression mathématique :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) \qquad \text{avec } u_0 = a \in \mathbb{R}_+^* \,,$$

qui lie le résultat de l'étape n à celui de l'étape $n+1$. Utiliser cette méthode pour donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{9}$ avec une précision de trois chiffres significatifs. Pour ne pas multiplier les étapes, il est judicieux de choisir a proche de A.

ii. Considérons les suites de nombres suivantes, données par leur formule de récurrence :

(a) $u_{n+1} = u_n + 3$, avec $u_0 = 2$;

(b) $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$, avec $u_0 = 2$.

Donner les cinq premiers termes de chacune de ces suites. Écrire ensuite le terme général u_n de chacune d'elles. Que se passe-t-il lorsque n devient très grand, *i.e.* lorsque n tend vers l'infini ?

Réponse 2.1

i. (a) $3\,(x-2)^2$; (b) $5\,(x+2)(x-2)$;
(c) $25\,(x+3)(x-2)$; (d) $3\,(x-2)(x-3)$;
(e) $(x+2)(x-2)(3\,x+2)$; (f) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

ii. (a) $(2\,a-3)(4\,a^2+6\,a+9)$; (b) $(3\,x+y)(3\,x-y)(9\,x^2+y^2)$;
(c) $(4\,x^2+y-2\,z)(4\,x^2-y+2\,z)$; (d) $(2\,c^2-3\,d^3)(4\,c^4+6\,c^2\,d^3+9\,d^6)$.

Réponse 2.2

i. (a) $\dfrac{3\,x+2}{x\,(x-2)}$, si $x \notin \{-2\,;\,\frac{3}{2}\}$; (b) $\dfrac{-3\,x^3-2\,x^2+2\,x-3}{x\,(x+1)(x+3)}$;
(c) $\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$, si $x \neq 0$; (d) $\dfrac{3\,x}{x+3}$, si $x \neq 0$.

ii. Les deux expressions sont égales pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$.

Réponse 2.3

(a) $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$.

(b) Le comprimé de la première marque a un volume $V_1 = 0{,}360\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}36\,\mathrm{cm}^3$;
le comprimé de la deuxième marque a un volume $V_2 = 0{,}393\,\mathrm{cm}^3 \approx 0{,}39\,\mathrm{cm}^3$.

Réponse 2.4

(a) $y = \dfrac{b\,h}{a-b}$. (b) $V = \dfrac{\pi\,h}{3}\,(a^2+a\,b+b^2)$.

Réponse 2.5

(a) $\dfrac{5}{x-6} - \dfrac{4}{x+2}$; (b) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$;

(c) $\dfrac{3\,x+4}{x^2+1} - \dfrac{2}{x-1}$; (d) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5\,x-3}{x^2+2}$;

(e) $\dfrac{4\,x-1}{x^2+1} + \dfrac{3}{(x^2+1)^2}$; (f) $2\,x + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3\,x}{x^2+1}$.

Réponse 2.6

i. En prenant $a = 2$, trois étapes suffisent pour trouver $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. En prenant $a = 9$, quatre étapes suffisent pour trouver $\sqrt{9} \approx 3{,}00$.

ii. (a) Terme général : $u_n = 2 + 3\,n$; u_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.
(b) Terme général : $u_n = \frac{2}{3^n}$; u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Suites de nombres

Exercice 3.1

i. Les suites de nombres réels données ci-dessous sont des suites arithmétiques. Pour chacune d'elles, expliciter u_4, u_9 et u_n.

(a) $(16;\ 13;\ 10;\ 7;\ \ldots)$; (b) $(-7\,;\ -3{,}9\,;\ -0{,}8\,;\ 2{,}3\,;\ \ldots)$.

ii. Montrer que les suites données ci-dessous par leur terme général sont des suites arithmétiques. Calculer leur raison.

(a) (u_n), où $u_n = 4\,n - 10$; (b) (u_n), où $u_n = 58 - 5\,n$.

Exercice 3.2

(a) D'une suite arithmétique, on donne $u_3 = 7$ et $u_{21} = 43$. Déterminer le terme u_{15} .

(b) Même question pour $u_2 = 1$, $u_{18} = 49$ et u_{10} .

Exercice 3.3

i. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12}(7 - 4\,k)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{4}\,n + 3\right)$.

ii. Déterminer le nombre d'entiers entre 32 et 395 qui sont divisbles par 6. Calculer leur somme.

Exercice 3.4

i. Les suites de nombres réels données ci-dessous sont des suites géométriques. Pour chacune d'elles, expliciter u_4, u_9 et u_n.

(a) $(162;\ -54;\ 18;\ -6;\ \ldots)$; (b) $(1\,;\ -\frac{x}{3}\,;\ \frac{x^2}{9}\,;\ -\frac{x^3}{27}\,;\ \ldots)$.

ii. Montrer que les suites données ci-dessous par leur terme général sont des suites géométriques. Calculer leur raison.

(a) (u_n), où $u_n = \frac{1}{7} \cdot 3^n$; (b) (u_n), où $u_n = 5\,(-\frac{1}{4})^n$.

Exercice 3.5

(a) D'une suite géométrique, on donne $u_4 = 4$ et $u_7 = 12$. Calculer la raison q et le terme u_{10}.

(b) D'une progression géométrique, on donne $u_3 = 4$ et $u_7 = \frac{1}{4}$. Déterminer la ou les valeur(s) possible(s) de la raison q.

Exercice 3.6

i. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole de sommation $\sum$.

(a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$; (b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$.

ii. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} 3^k$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{7} 2^{-n}$.

Exercice 3.7

i. Chacune des sommes suivantes contient une infinité de termes qui appartiennent à une suite géométrique. Calculer, si elle existe, la somme de cette infinité de termes, dans chacun des cas.

(a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$; (b) $250 - 100 + 40 - 16 + \dots$.

ii. Écrire les nombres suivants sous forme rationnelle.

(a) $10{,}\bar{5}$; (b) $0{,}0\overline{71}$.

Exercice 3.8

i. Soient les suites :

(a) (u_n), où $u_n = 3\,n^2$; (b) (u_n), où $u_n = \frac{4\,n+5}{2\,n+2}$; (c) (u_n), où $u_n = (-1)^n\,5^n$.

Pour chacune de ces suites, indiquer s'il s'agit d'une suite arithmétique, géométrique, ou ni arithmétique, ni géométrique. Calculer ensuite la limite de chacune de ces suites, à supposer qu'elle existe.

ii. Soit la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \frac{n^2 + 1}{2\,n^2 + 1} .$$

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que cette suite converge.

Réponse 3.1

i. (a) $u_4 = 4$, $u_9 = -11$ et $u_n = 16 - 3\,n$; (b) $u_4 = 5{,}4$, $u_9 = 20{,}9$ et $u_n = -7 + 3{,}1\,n$.

ii. (a) $r = 4$; (b) $r = -5$.

Réponse 3.2

(a) $u_{15} = 31$.

(b) $u_{10} = 25$.

Réponse 3.3

i. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12}(7 - 4\,k) \;=\; -221$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{4}\,n + 3\right) \;=\; \frac{187}{4}$.

ii. Il y a 60 entiers divisibles par 6 entre 32 et 395. Leur somme vaut 12 780.

Réponse 3.4

i. (a) $u_4 = 2$, $u_9 = -\dfrac{2}{243}$, $u_n = \dfrac{162}{(-3)^n}$; (b) $u_4 = \dfrac{x^4}{81}$, $u_9 = -\dfrac{x^9}{19\,683}$, $u_n = \left(-\dfrac{x}{3}\right)^n$.

ii. (a) $q = 3$; (b) $q = -\dfrac{1}{4}$.

Réponse 3.5

(a) $q = \sqrt[3]{3}$ et $u_{10} = 36$.

(b) q peut valoir $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.

Réponse 3.6

i. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 2^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

ii. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} 3^k \;=\; 29\,524$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{7} 2^{-n} \;=\; \frac{255}{128}$.

Réponse 3.7

i. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 3$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 250 \left(-\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1250}{7}$.

ii. (a) $10{,}\bar{5} = \dfrac{95}{9}$; (b) $0{,}0\overline{71} = \dfrac{71}{990}$.

Réponse 3.8

i. (a) (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique ; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

(b) (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique ; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

(c) (u_n) est géométrique ; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ n'existe pas.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Critères de convergence relatifs aux séries numériques
Relation entre deux grandeurs réelles

Exercice 4.1
Soient les séries numériques suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2\,n+1}}$.

Dans chacun des cas, déterminer si la série converge ou non. Justifier la réponse par des calculs appropriés.

Exercice 4.2
Dans les séries numériques suivantes, a est un nombre réel.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{a^{2n+1}}{2\,n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2\,a)^n}$.

Dans chacun des cas, utiliser le critère du quotient (*i.e.* de d'Alembert) ou le critère de la racine afin de déterminer les valeurs de a pour lesquelles la série donnée converge.

Exercice 4.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Dans chacun des cas suivants, déterminer la figure dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à l'expression donnée.

(a) $y+2 \geqslant 0$; (b) $4\,x^2+y=0$;

(c) $x^2+4\,y^2<4$; (d) $x^2-4\,x+y^2+6\,y=-14$.

Exercice 4.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Montrer qu'une droite de pente m et passant par le point $A(x_0;\, y_0)$ peut être décrite par l'équation $y = m\,(x-x_0)+y_0$. Pour rappel, la pente d'une droite est égale au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, où Δy est la variation de la grandeur y lorsque la grandeur x varie de Δx.

(b) Prouver qu'une droite passant par les points $A(x_0;\, y_0)$ et $B(x_1;\, y_1)$ peut être décrite par l'équation $y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,(x-x_0)+y_0$.

(c) À l'aide d'une représentation graphique et d'un raisonnement, démontrer qu'un cercle de rayon r et de centre $C(x_0;\, y_0)$ peut être décrit par l'équation suivante : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Exercice 4.5
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 4\,t^2 - 5 \\ y = 2\,t + 3 \end{cases}.$$

Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$; esquisser ensuite $\mathcal{C}$.

Exercice 4.6
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Dans les cas suivants, déterminer l'équation polaire de la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ décrite par l'équation cartésienne donnée.

(a) $y = 4$; (b) $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$; (c) $y = 8 - x^2$.

Exercice 4.7
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Dans les cas suivants, déterminer l'équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ décrite par l'équation polaire donnée.

(a) $r\sin(\theta) = -2$; (b) $r^2\left(\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta)\right) = 16$; (c) $r\left(\sin(\theta) + r\cos^2(\theta)\right) = 1$.

Exercice 4.8
Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Montrer que la courbe donnée par l'équation polaire $r = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$, où a et b sont deux nombres réels non nuls, est un cercle. Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 4.9
On considère une barre métallique de longueur $u_0 = \ell$. On la coupe en deux parties égales. Appelons u_1 la longueur de la première partie. On prend la deuxième partie et on la coupe à son tour en deux parties égales. Appelons u_2 la longueur d'une de ces nouvelles parties. On prend l'autre de ces nouvelles parties et on la coupe à nouveau en deux parties égales. On procède ainsi de suite, de sorte à obtenir les termes u_3, u_4, ..., jusqu'à l'infini.

(a) Exprimer le terme général u_n de la suite.
(b) Montrer que (u_n) est une suite géométrique.
(c) Déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sans avoir recours à la formule de sommation infinie d'une suite géométrique. Expliciter le raisonnement menant au résultat.

Réponse 4.1

(a) La série converge.

(b) La série converge.

(c) La série diverge.

(d) La série diverge.

Réponse 4.2

(a) Le critère du quotient ou le critère de la racine permet de conclure qu'il y a convergence si $-1 < a < 1$.

(b) Le critère du quotient ou le critère de la racine permet de conclure qu'il y a convergence si $a < -\frac{1}{2}$ ou si $a > \frac{1}{2}$.

Réponse 4.3

(a) Partie du plan euclidien qui se trouve au-dessus de la droite d'équation $y = -2$.

(b) Parabole concave (*malheureuse*), de sommet $O(0;\, 0)$.

(c) Intérieur d'une ellipse centrée en $O(0;\, 0)$, dont les axes de symétrie sont confondus avec les axes Ox et Oy, et dont le demi-grand axe vaut 2 et le demi-petit axe 1.

(d) Ensemble vide.

Réponse 4.5

$(y-3)^2 \;=\; x+5\,.$

Réponse 4.6

(a) $r = \dfrac{4}{\sin(\theta)}$; (b) $r\,\big(r - 2\cos(\theta)\big) = 0$; (c) $r^2\cos^2(\theta) + r\sin(\theta) - 8 \;=\; 0\,.$

Réponse 4.7

(a) $y = -2$; (b) $x^2 + 4\,y^2 = 16$; (c) $y = 1 - x^2\,.$

Réponse 4.9

(a) $u_n = \dfrac{\ell}{2^n}\;.$

Caractéristiques d'une fonction réelle

Exercice 5.1

(a) Soit f la fonction réelle de la variable réelle x donnée par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

- Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(-2)$.
- Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ et que $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$, pour autant que $x \notin \{-1\,;\,0\,;\,1\}$.

(b) Dans chacun des cas suivants, transformer l'expression donnée afin d'obtenir une forme cartésienne explicite (*i.e.* une expression de la forme $y = f(x)$).

- $x^5\,y - 4\,x + 2 = 0$;
- $x = \dfrac{2+y}{2-y}$;
- $4\,x^2 - 4\,x\,y + y^2 = 0$.

Exercice 5.2

Dans les cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée par $y = f(x)$, où $f(x)$ est l'expression donnée.

(a) $y = x^2 + 4$;
(b) $y = \sqrt{x^2+4}$;
(c) $y = \sqrt{x^2-4}$;
(d) $y = \dfrac{x}{x+3}$;
(e) $y = \dfrac{2\,x}{x^2-x-2}$;
(f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$;
(g) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
(h) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$;
(i) $y = \dfrac{3\,x}{x^3+x}$.

Exercice 5.3

Déterminer la parité de la fonction f donnée, dans les cas suivants (f est-elle paire, impaire, ni paire ni impaire ?).

(a) $f(x) = 5\,x^3 + 2\,x$;
(b) $f(x) = |x| - 3$;
(c) $f(x) = \left(8\,x^3 - 3\,x^2\right)^3$;
(d) $f(x) = \sqrt{3\,x^4 + 2\,x^2 - 5}$;
(e) $f(x) = x\,(x-5)$;
(f) $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
(g) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$, où $a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$;
(h) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$;
(i) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$, où $\mathrm{e} = 2{,}71828.....$

Exercice 5.4
Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions réelles, données respectivement par :

$$f_1(x) = x - 1\ , \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}\ , \qquad f_3(x) = x^3\ , \qquad f_4(x) = x^2 - 3\,x + 2\ .$$

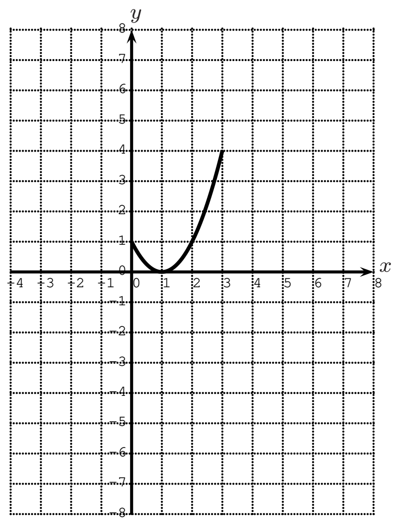
(a) Pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, préciser le domaine de définition D_{f_i} de la fonction f_i ; esquisser ensuite le graphe de f_i.

(b) Pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, indiquer si la fonction $f_i \colon D_{f_i} \to \mathbb{R}$ est injective, surjective, bijective, ou ni injective ni surjective.

(c) Pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, déterminer la parité de la fonction f_i.

(d) Pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, déterminer les plus grands intervalles de départ H_i et d'arrivée J_i pour lesquels la fonction $f_i \colon H_i \to J_i$ est bijective.

Exercice 5.5
La figure ci-contre montre le graphe, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, d'une fonction f définie dans l'intervalle $[0;\, 3]$. Dessiner sur la même figure le graphe de la fonction donnée par :



(a) $y = f(x+3)$; (b) $y = f(x-3)$;

(c) $y = f(x) + 3$; (d) $y = f(x) - 3$;

(e) $y = -2\,f(x)$; (f) $y = -\frac{1}{2}\,f(x)$;

(g) $y = f(2\,x)$; (h) $y = f\left(\frac{1}{2}\,x\right)$;

(i) $y = -f(x+2) - 3$; (j) $y = f(x-2) + 3$.

Exercice 5.6
Dessiner le graphe de la fonction f donnée par son expression ci-dessous à gauche. Même question avec la fonction g donnée par son expression ci-dessous à droite :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x+3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad .$$

Réponse 5.1

(a) $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $f(2) = \frac{1}{3}$ et $f(-2) = 3$.

(b) (a) $y = \dfrac{4x-2}{x^5}$; (b) $y = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$; (c) $y = 2x$.

Réponse 5.2

(a) $D_f = \mathbb{R}$; (b) $D_f = \mathbb{R}$; (c) $D_f = \,]-\infty;\, -2] \cup [2;\, \infty[$;

(d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; (e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;\, 2\}$; (f) $D_f = \,]-3;\, 3[$;

(g) $D_f = \mathbb{R}$; (h) $D_f = [0;\, 2[$; (i) $D_f = \mathbb{R}^*$.

Réponse 5.3

(a) impaire ; (b) paire ; (c) ni paire ni impaire ;

(d) paire ; (e) ni paire ni impaire ; (f) impaire ;

(g) paire ; (h) paire ; (i) impaire.

Réponse 5.4

(a) $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $D_{f_2} = \mathbb{R}$, $D_{f_3} = \mathbb{R}$, $D_{f_4} = \mathbb{R}$.

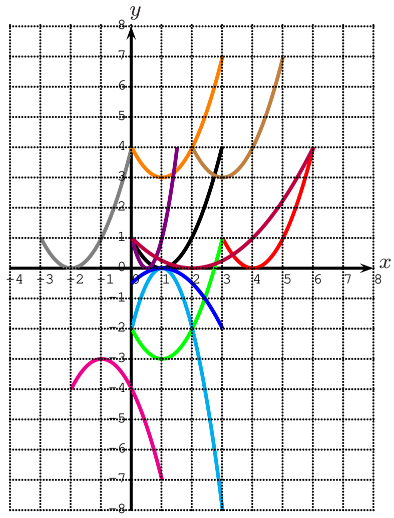
(b) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective,
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective,
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective,
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective.

(c) f_1 n'est ni paire ni impaire, f_2 est paire, f_3 est impaire, f_4 n'est ni paire ni impaire.

(d) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_2 : \mathbb{R}_+ \to \,]0;\, 1]$ ou $f_2 : \mathbb{R}_- \to \,]0;\, 1]$,
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_4 : \,\left]-\infty\,;\, \frac{3}{2}\right] \to \left[-\frac{1}{4}\,;\, \infty\right[$ ou $f_4 : \left[\frac{3}{2}\,;\, \infty\right[\to \left[-\frac{1}{4}\,;\, \infty\right[$.

Réponse 5.5

La figure ci-contre montre le graphe de la fonction f (définie sur l'intervalle $[0;\,3]$), ainsi que le graphe des fonctions données par :



(a) $y = f(x+3)$;
(b) $y = f(x-3)$;
(c) $y = f(x)+3$;
(d) $y = f(x)-3$;
(e) $y = -2\,f(x)$;
(f) $y = -\frac{1}{2}\,f(x)$;
(g) $y = f(2\,x)$;
(h) $y = f\left(\frac{1}{2}\,x\right)$;
(i) $y = -f(x+2)-3$;
(j) $y = f(x-2)+3$.

Opérations entre fonctions réelles

Exercice 6.1
Soient f et g deux fonctions réelles, données respectivement par :

$$f(x) = \frac{2\,x}{x-4} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{x+5}\,.$$

Expliciter $\big(f+g\big)(x)$, $\big(f-g\big)(x)$, $\big(fg\big)(x)$ ainsi que $\big(\frac{f}{g}\big)(x)$. Donner ensuite le domaine de définition de chacune de ces nouvelles fonctions.

Exercice 6.2

i. Soient f et g deux fonctions réelles, données respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 3\,x\,, \qquad g(x) = \sqrt{x+2}\,.$$

(a) Préciser le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
(b) Expliciter $\big(f\circ g\big)(x)$ et donner le domaine de définition de $f\circ g$.
(c) Expliciter $\big(g\circ f\big)(x)$ et donner le domaine de définition de $g\circ f$.

ii. Répéter l'exercice avec les fonctions réelles f et g données par :

$$f(x) = \frac{x}{3\,x+2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2}{x}\,.$$

Exercice 6.3

i. Soit la fonction réelle :

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |2\,x+4|-1 \end{array}$$

(a) Déterminer le(s) plus grand(s) intervalle(s) de départ H dans le(s)quel(s) f est injective.
(b) Trouver l'ensemble $J\subset\mathbb{R}$ qui est l'image par f de l'intervalle H obtenu au point précédent ; autrement dit, trouver $J = f(H)$.
(c) Écrire la fonction réciproque ${}^{r}\!f$ de f qui est compatible avec les ensembles H et J. Tracer, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, un échantillon des graphes de f et de ${}^{r}\!f$.

Indication : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le graphe de f peut être obtenu en prenant le graphe de la fonction $v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $v(x) = |x|$, et en lui appliquant un certain nombre de transformations géométriques...

ii. Répéter l'exercice avec la fonction réelle :

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -2\,x^2 + 8\,x - 5 \end{array}$$

Indication : Il peut être utile d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S$, où a, x_S et y_S sont des nombres réels à déterminer.

Exercice 6.4
Dans chacun des cas suivants, déterminer les plus grands intervalles de départ et d'arrivée pour lesquels la fonction f donnée est bijective ; écrire ensuite la fonction réciproque ${}^{r}\!f$ de f qui est compatible avec les intervalles obtenus.

(a) $f(x) = x^3 - 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

(d) $f(x) = 2\sin(3\,x)$.

Exercice 6.5
Dans les cas suivants, écrire la fonction f sous la forme d'une composition de plusieurs fonctions.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^4}$;

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$.

Réponse 6.1

- $\big(f+g\big)(x) \;=\; \dfrac{3\,x\,(x+2)}{(x-4)(x+5)}\,,\qquad D_{f+g} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-5;\,4\}$;
- $\big(f-g\big)(x) \;=\; \dfrac{x\,(x+14)}{(x-4)(x+5)}\,,\qquad D_{f-g} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-5;\,4\}$;
- $\big(fg\big)(x) \;=\; \dfrac{2\,x^2}{(x-4)(x+5)}\,,\qquad D_{fg} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-5;\,4\}$;
- $\big(\tfrac{f}{g}\big)(x) \;=\; \dfrac{2\,(x+5)}{x-4}\,,\qquad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-5;\,0;\,4\}$.

Réponse 6.2

i. (a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [-2;\,\infty[$;
   (b) $\big(f \circ g\big)(x) \;=\; x + 2 - 3\sqrt{x+2}\,,\qquad D_{f\circ g} = [-2;\,\infty[$;
   (c) $\big(g \circ f\big)(x) \;=\; \sqrt{x^2 - 3\,x + 2}\,,\qquad D_{g\circ f} = \,]-\infty;\,1] \cup [2;\,\infty[$.

ii. (a) $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \big\{-\frac{2}{3}\big\}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$;
   (b) $\big(f \circ g\big)(x) \;=\; \dfrac{1}{x+3}\,,\qquad D_{f\circ g} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-3;\,0\}$;
   (c) $\big(g \circ f\big)(x) \;=\; \dfrac{2\,(3\,x+2)}{x}\,,\qquad D_{g\circ f} = \mathbb{R} \smallsetminus \big\{-\frac{2}{3}\,;\,0\big\}$.

Réponse 6.3

i. (a) $]-\infty;\,-2]$ ou $[-2;\,\infty[$;
   (b) $[-1;\,\infty[$;
   (c) ${}^{r}\!f(x) \;=\; -\dfrac{x+5}{2}$ ou ${}^{r}\!f(x) \;=\; \dfrac{x-3}{2}$.

ii. (a) $]-\infty;\,2]$ ou $[2;\,\infty[$;
   (b) $]-\infty;\,3]$;
   (c) ${}^{r}\!f(x) \;=\; 2 - \sqrt{\dfrac{3-x}{2}}$ ou ${}^{r}\!f(x) \;=\; 2 + \sqrt{\dfrac{3-x}{2}}$.

Réponse 6.4

(a) ${}^r\!f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; \sqrt[3]{x+1}\,.$

(b) ${}^r\!f :\;]0;\,1] \to \mathbb{R}_-$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; -\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

ou bien ${}^r\!f :\;]0;\,1] \to \mathbb{R}_+$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\;.$

(c) ${}^r\!f : [0;\,1] \to [-1;\,0]$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; -\sqrt{1-x^2}$
ou bien ${}^r\!f : [0;\,1] \to [0;\,1]$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; \sqrt{1-x^2}\,.$

(d) Par exemple ${}^r\!f :\; [-2;\,2] \to \left[-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ avec ${}^r\!f(x) \;=\; \frac{1}{3}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right).$

Réponse 6.5

Par exemple :

(a) $f = \ell \circ h \circ g,$ avec : $g(x) = x - 3,$ $h(x) = x^4$ et $\ell(x) = \dfrac{1}{x}$;

(b) $f = \ell \circ h \circ g,$ avec : $g(x) = x + 4,$ $h(x) = \sqrt{x}$ et $\ell(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

Limite d'une fonction

Exercice 7.1
Calculer les limites suivantes, à supposer qu'elles existent.

(a) $\lim_{x\to -2} (3\,x-1)$; (b) $\lim_{x\to 4} x$; (c) $\lim_{x\to 100} 7$;

(d) $\lim_{x\to -1} \pi$; (e) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+4}{2\,x+1}$; (f) $\lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+1)}$;

(g) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; (h) $\lim_{r\to 1} \dfrac{r^2-r}{2\,r^2+5\,r-7}$; (i) $\lim_{k\to 4} \dfrac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$;

(j) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$; (k) $\lim_{\Delta x\to -2} \dfrac{(\Delta x)^3+8}{\Delta x+2}$; (l) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x-4}{x^2-2\,x-8}$.

Exercice 7.2
Calculer les limites suivantes, à supposer qu'elles existent.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5\,x^2-3\,x+1}{2\,x^2+4\,x-7}$; (b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4-7\,x}{2+3\,x}$; (c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2\,x^2-3}{4\,x^3+5\,x}$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+2\,x}{2\,x^2-3}$; (e) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2-x^2}{x+3}$; (f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^2+8}{x\,(x+1)}}$;

(g) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4\,x-3}{\sqrt{x^2+1}}$; (h) $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$.

Exercice 7.3
Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} .$$

(a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
(b) Déterminer la parité de f.
(c) À l'aide de la définition de la notion de limite d'une fonction (avec ε et δ), montrer que :

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$,
- $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$,
- $\lim_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas.

Quelles différences observe-t-on entre ces trois limites ?

(d) Établir le tableau des signes de f.

(e) À l'aide de la définition de la notion de limite à l'infini, montrer que :

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(f) Donner l'équation des asymptotes verticale(s) et horizontale(s) de f.

Exercice 7.4

Calculer les limites suivantes, à supposer qu'elles existent.

(a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} (x^2+3)(x-4)$; (b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2\,x^2+5\,x-3}{6\,x^2-7\,x+2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^4-16}$; (e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$; (f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{x}+5}$; (h) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{3-\sqrt{x}}$; (i) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5\,x-3\,x^3}{x^2-1}}$;

(j) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$; (k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^5-1}$; (l) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} \left(\sqrt{x^2-25}+3\right)$;

(m) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$; (n) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$; (o) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-16}}{x+4}$.

Réponse 7.1

(a) -7 ; (b) 4 ; (c) 7 ; (d) π ; (e) -3 ; (f) $\frac{7}{2}$;
(g) 0 ; (h) $\frac{1}{9}$; (i) 32 ; (j) $2\,x$; (k) 12 ; (l) n'existe pas.

Réponse 7.2

(a) $\frac{5}{2}$; (b) $-\frac{7}{3}$; (c) 0 ; (d) $-\infty$; (e) $+\infty$; (f) 1 ;
(g) -4 ; (h) n'existe pas.

Réponse 7.3

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

(b) f n'est ni paire, ni impaire.

(d) Tableau des signes de f :

x		-1		1	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$

(f) $x = -1$ est l'équation de l'unique asymptote verticale et $y = 0$ est l'équation de l'asymptote horizontale.

Réponse 7.4

(a) $5\,(\sqrt{2} - 4)$; (b) -7 ; (c) n'existe pas ; (d) $-\frac{3}{8}$; (e) $-\frac{1}{4}$;
(f) 2 ; (g) $\frac{72}{7}$; (h) -108 ; (i) -2 ; (j) $-\frac{1}{8}$;
(k) $\frac{3}{5}$; (l) 3 ; (m) 1 ; (n) -1 ;
(o) n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Notion de continuité

Exercice 8.1
Dans chacun des cas suivants, expliquer, à l'aide de la notion de limite, pourquoi la fonction réelle f donnée n'est pas continue en x_0.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}\,, \quad x_0 = -2\ ;$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}\,, \quad x_0 = 3\ ;$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}\,, \ x_0 = 5\ ;$ (d) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}\,, \quad x_0 = 2\,.$

Exercice 8.2
Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}\,.$$

Déterminer les équations de toutes les asymptotes de f.

Exercice 8.3
À l'aide de la définition de la continuité (avec ε et δ), montrer que la fonction réelle f donnée est continue en x_0, dans chacun des cas suivants.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}\,, x_0 \in \mathbb{R}_+^*\,;$ (b) $f(x) = x\cos(x)\,, x_0 \in \mathbb{R}\,;$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\,, x_0 \in \mathbb{R}\,.$

Exercice 8.4
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction réelle f donnée possède une (ou plusieurs) discontinuité(s). Dans l'affirmative, préciser si la discontinuité est de type trou, trou-saut, saut, fluctuant ou asymptotique.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 1 \\ 4-x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}\ ;$ (b) $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \neq -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}\ ;$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}\,.$

Exercice 8.5

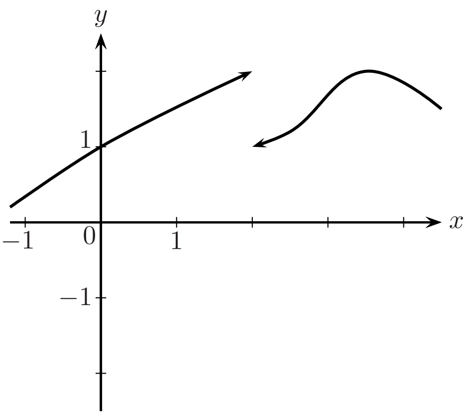
Chacune des figures ci-dessous représente un échantillon du graphe d'une fonction f.

i. Pour chacune des fonctions f données, préciser si la ou les discontinuité(s) que possède f sont de type trou, trou-saut, saut, fluctuant ou asymptotique.

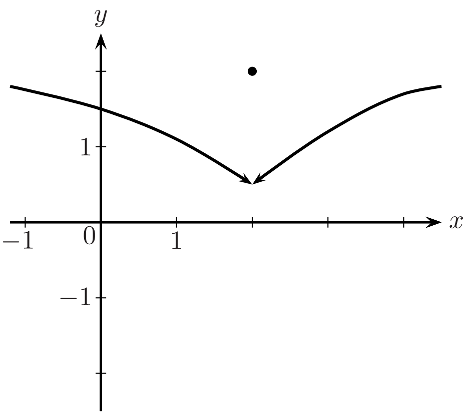
ii. En lisant les graphes, déterminer (si elles existent) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\ ;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\ ;\quad \lim_{x\to 0} f(x)\ ;\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)\ ;\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)\ ;\quad \lim_{x\to 2} f(x)\ .$$

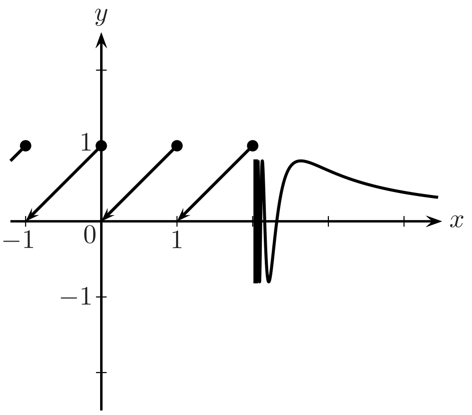
(a)



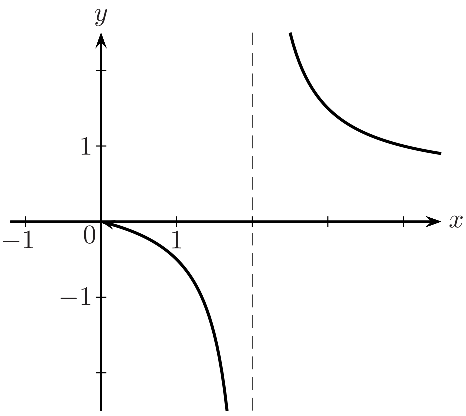
(b)



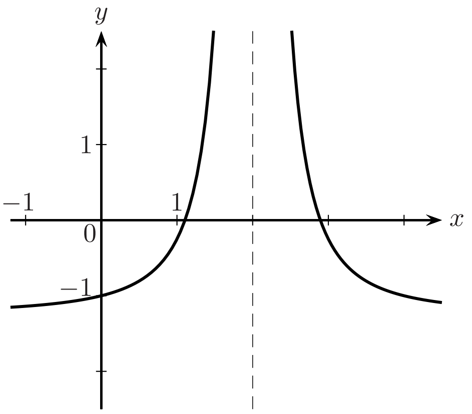
(c)



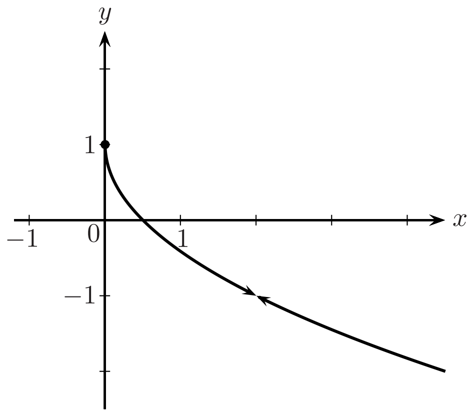
(d)



(e)



(f)



Exercice 8.6
Dans chacun des cas suivants, indiquer si la fonction réelle f donnée peut être prolongée par continuité en x_0 ou non. Justifier la réponse.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8}$, $x_0 = -2$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$.

Réponse 8.1

(a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ n'existe pas ;

(b) $\lim_{x\to 3} f(x) = 6 \neq 4 = f(3)$;

(c) $\lim_{x\to 5} f(x) = 1 \neq 0 = f(5)$;

(d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

Réponse 8.2
La fonction f admet une unique asymptote verticale, d'équation $x = 1$, et une unique asymptote oblique, à droite et à gauche, d'équation $y = -x - 1$.

Réponse 8.4

(a) Type saut ;

(b) pas de discontinuité ;

(c) type trou-saut.

Réponse 8.6

(a) f peut être prolongée par continuité ;

(b) f ne peut pas être prolongée par continuité.

Notion de dérivée

Exercice 9.1
Un point matériel se déplace le long d'un axe gradué z. Sur cet axe, sa position en fonction du temps t peut être décrite par l'expression $z(t) = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,t^2 + 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,t$. La position se mesure en mètres et le temps en secondes.

(a) Calculer la vitesse moyenne du point matériel dans les intervalles $[1{,}00\,\mathrm{s};\ 1{,}20\,\mathrm{s}]$, $[1{,}00\,\mathrm{s};\ 1{,}10\,\mathrm{s}]$ et $[1{,}00\,\mathrm{s};\ 1{,}01\,\mathrm{s}]$.

(b) Calculer la vitesse du point matériel à l'instant $t_1 = 1\,\mathrm{s}$.

Exercice 9.2
Un aéronaute se trouve dans la nacelle de son ballon, à 50 m au-dessus du sol. À un instant donné, il lâche un sac de sable ; au même moment, il enclenche un chronomètre. En bonne approximation, la hauteur du sac de sable $h(t)$ en fonction du temps t indiqué par le chronomètre, peut être décrite, entre l'instant du lâché et l'instant d'impact avec le sol, par l'expression $h(t) = 50\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,t^2$. La hauteur se mesure en mètres et le temps en secondes.

(a) Déterminer la vitesse du sac à l'instant $t_1 = 1\,\mathrm{s}$.

(b) Calculer la vitesse du sac juste avant son impact avec le sol.

Exercice 9.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi f la fonction donnée par $f(x) = 5\,x^2 - 4\,x$ et $P\big(2;\ f(2)\big)$ un point du graphe de f.

(a) Calculer la pente de la tangente au graphe de f en $P\big(2;\ f(2)\big)$.

(b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $P\big(2;\ f(2)\big)$.

Exercice 9.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi f la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ et $P(4;\ 2)$ un point du graphe de f.

(a) Calculer la pente de la tangente au graphe de f en $P(4;\ 2)$.

(b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $P(4;\ 2)$.

(c) Dessiner la courbe et la tangente au point P.

Exercice 9.5
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi f la fonction donnée par $f(x) = 2\,x - \frac{4}{\sqrt{x}}$ et $P(4;\,6)$ un point du graphe de f. Déterminer l'équation de la normale à la tangente au graphe de f en P, qui passe par P.

Exercice 9.6
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

i. Soient f la fonction donnée par $f(x) = -5\,x^2 + 8\,x + 2$ et $P(-1;\,-11)$ un point du graphe de f.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer le domaine de définition de f'.
   (c) Écrire l'équation de la tangente au graphe de f en P.
   (d) En quel(s) éventuel(s) point(s) du graphe de f la tangente est-elle horizontale ?

ii. Mêmes questions pour la fonction g donnée par $g(x) = \frac{1}{x^3}$ et le point $Q\big(2;\,\frac{1}{8}\big)$.

Exercice 9.7
Dans les cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f donnée ; déterminer ensuite le domaine de définition $D_{f'}$ de f'.

(a) $f(x) = \dfrac{5}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = 3\,x^2 - 2\,\sqrt{x}$.

Réponse 9.1

(a) Vitesses moyennes : $11{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $11{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $11{,}04\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(b) Vitesse instantanée : $11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Réponse 9.2

(a) $-10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (b) $-10\sqrt{10}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Réponse 9.3

(a) $m = 16$. (b) $y = 16\,x - 20$.

Réponse 9.4

(a) $m = \frac{1}{4}$. (b) $y = \frac{1}{4}\,x + 1$.

Réponse 9.5

$y = -\frac{4}{9}\,x + \frac{70}{9}$.

Réponse 9.6

i. (a) $f'(x) = -10\,x + 8$; (b) $D_{f'} = \mathbb{R}$; (c) $y = 18\,x + 7$; (d) $\left(\frac{4}{5}\,;\,\frac{26}{5}\right)$.

ii. (a) $g'(x) = -\frac{3}{x^4}$; (b) $D_{g'} = \mathbb{R}^*$; (c) $y = -\frac{3}{16}\,x + \frac{1}{2}$; (d) Aucun.

Réponse 9.7

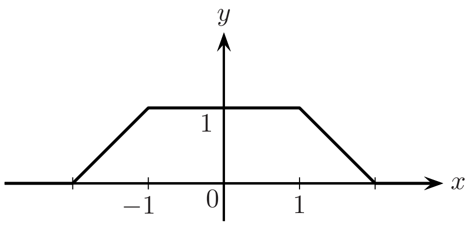
(a) $f'(x) = -\dfrac{10\,x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; (b) $f'(x) = 6\,x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

Dérivées des fonctions puissances rationnelles

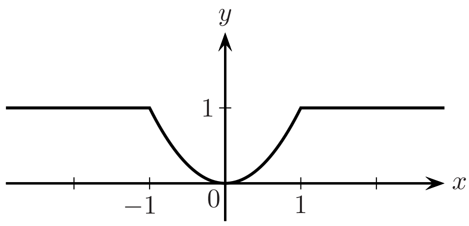
Exercice 10.1

Dans chacun des cas suivants, esquisser le graphe de la dérivée f' à partir du graphe de la fonction f. Indiquer les points où f n'est pas dérivable. *Note* : dans la figure de droite, la partie courbée est un morceau de parabole.

(a)



(b)



Exercice 10.2

Dans chacun des cas suivants, calculer l'expression de la dérivée f' de la fonction f donnée.

(a) $f(x) = 4\,x^6 - 3\,x^4 + 12$;

(b) $f(x) = (2\,x^2 - 4\,x + 1)(6\,x - 5)$;

(c) $f(\nu) = \nu^3\,(-2\,\nu^3 + \nu - 3)$;

(d) $f(x) = (x^5 - 2\,x^3)(7\,x^2 + x - 8)$;

(e) $f(z) = \dfrac{8\,z^2 - 6\,z + 11}{z - 1}$;

(f) $g(x) = \dfrac{2\,x}{x^3 - 7}$;

(g) $f(x) = \dfrac{8\,x + 15}{x^2 - 2\,x + 3}$;

(h) $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

(i) $k(z) = \dfrac{6}{z^2 + z - 1}$;

(j) $f(s) = (3\,s)^4$;

(k) $f(x) = (3\,x + 1)^{-2}$;

(l) $f(x) = \dfrac{\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{x} + 2}$;

(m) $f(x) = 8\,x^{\frac{3}{2}}$;

(n) $f(t) = t^4 - \sqrt[4]{t^3}$;

(o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2\,x^2 - 4\,x + 8}$;

(p) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\,(3\,x^2 - 2\,x + 5)$.

Exercice 10.3
Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine dans lequel la fonction réelle f donnée est continue ; déterminer également le domaine dans lequel la fonction dérivée f' de f est définie (autrement dit, donner le domaine de définition de f').

(a) $f(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2\,x+3 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$

Exercice 10.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}^2$ la parabole d'équation $y = f(x)$, où f une fonction quadratique, *i.e.* une fonction polynomiale du second degré. Il est supposé que la parabole passe par le point $A(1;\,4)$ et que son sommet se trouve en $S(-2;\,5)$.

(a) Déterminer l'expression de la fonction f.

(b) Soit $\mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^2$ la courbe d'équation $y = g(x)$, où g est la fonction donnée par $g(x) = \lambda\,x^2 + x$, λ étant un paramètre réel. Calculer la ou les valeur(s) de λ pour laquelle ou lesquelles les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangentes.

Exercice 10.5
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}^2$ la parabole d'équation $y = f(x)$, où f une fonction quadratique. Soit encore $\mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^2$ la droite d'équation $y = g(x)$, où g est une fonction affine, *i.e.* une fonction de la forme $g(x) = m\,x + h$, où m et h sont des paramètres réels. Il est supposé que la parabole $\mathcal{C}_1$ a pour sommet le point $S\big(\frac{5}{2};\ \frac{5}{4}\big)$, que la pente de $\mathcal{C}_2$ vaut -2, et que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent au point $A(3;\,1)$.

(a) Faire une esquisse de la situation.

(b) Déterminer les expressions des fonctions f et g.

(c) Calculer (en degrés) l'angle aigu sous lequel le graphe de f et la graphe de g se coupent.

Exercice 10.6
Dans chacun des cas suivants, déterminer le(s) point(s) de l'axe x où la fonction réelle f n'est pas dérivable. Pour chaque point identifié, indiquer la raison de la non-dérivabilité de f.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; (b) $f(x) = (x-3)\,\sqrt[3]{x^2}\,.$

Réponses 10.2

(a) $f'(x) = 24\,x^5 - 12\,x^3$;

(b) $f'(x) = 36\,x^2 - 68\,x + 26$;

(c) $f'(\nu) = -12\,\nu^5 + 4\,\nu^3 - 9\,\nu^2$;

(d) $f'(x) = 49\,x^6 + 6\,x^5 - 110\,x^4 - 8\,x^3 + 48\,x^2$;

(e) $f'(z) = \dfrac{8\,z^2 - 16\,z - 5}{(z-1)^2}$;

(f) $g'(x) = -\dfrac{4\,x^3 + 14}{(x^3 - 7)^2}$;

(g) $f'(x) = \dfrac{-8\,x^2 - 30\,x + 54}{(x^2 - 2\,x + 3)^2}$;

(h) $p'(x) = -\dfrac{x^2 + 2\,x + 3}{x^4}$;

(i) $k'(z) = -\dfrac{6\,(2\,z + 1)}{(z^2 + z - 1)^2}$;

(j) $f'(s) = 324\,s^3$;

(k) $f'(x) = -\dfrac{6}{(3\,x + 1)^3}$;

(l) $f'(x) = -\dfrac{16\,x + 12}{x^2\,(2\,x + 3)^2}$;

(m) $f'(x) = 12\,\sqrt{x}$;

(n) $f'(t) = 4\,t^3 - \dfrac{3}{4\,\sqrt[4]{t}}$;

(o) $f'(x) = \dfrac{-3\,x^2 + 2\,x + 4}{\sqrt{x}\,(2\,x^2 - 4\,x + 8)^2}$;

(p) $f'(x) = \dfrac{2\,(12\,x^2 - 5\,x + 5)}{3\,\sqrt[3]{x}}$.

Réponse 10.3

(a) La fonction f est continue dans tout $\mathbb{R}$; la dérivée f' est définie dans $\mathbb{R}^*$.

(b) La fonction f est continue dans $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$; la dérivée f' est définie dans $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$.

Réponse 10.4

(a) $f(x) = -\frac{x^2}{9} - \frac{4\,x}{9} + \frac{41}{9}$;

(b) $\lambda = -\frac{37}{164}$.

Réponse 10.5

(b) $f(x) = -x^2 + 5\,x - 5$ et $g(x) = -2\,x + 7$.

(c) $\theta \approx 18{,}4^\circ \approx 18^\circ$.

Réponse 10.6

(a) La dérivée de f n'est pas définie en $x = 0$.

(b) La dérivée de f n'est pas définie en $x = 0$.

Dérivées des fonctions trigonométriques

Exercice 11.1
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f donnée.

(a) $f(x) = 7\,\mathrm{tg}(x)$; (b) $f(x) = 3\,x\sin(x)$; (c) $f(x) = x^2 + x\sin(x)$;

(d) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$; (e) $f(x) = x^2\sec(x)$; (f) $f(t) = 3\,t^2\sec(t) - t^3\,\mathrm{tg}(t)$;

(g) $f(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$; (h) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)\,\mathrm{ctg}(x)}$; (i) $f(\xi) = \big(\sin(\xi)+\cos(\xi)\big)^2$;

(j) $f(x) = \csc(x)\sin(x)$; (k) $f(\varphi) = \dfrac{1+\sec(\varphi)}{1-\sec(\varphi)}$; (l) $f(x) = \sin(x)\sec(x)$.

Exercice 11.2
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi f la fonction réelle donnée par $f(x) = \sec(x)$. Déterminer les équations de la tangente et de la normale au graphe de f au point $P\big(\frac{\pi}{4};\ f(\frac{\pi}{4})\big)$.

Exercice 11.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi f la fonction réelle donnée par $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

(a) Représenter le graphe de f dans la situation où $x \in [0;\,2\,\pi]$. Pour cela, il peut être utile d'écrire f sous la forme $f(x) = A\sin(x+\varphi)$, où A et φ sont des constantes à déterminer.
(b) Déterminer les points $P\big(x;\ f(x)\big)$ du graphe de f, dans la situation où $x \in [0;\,2\,\pi]$, où la tangente au graphe est horizontale.
(c) Même question que la précédente, sauf que l'intervalle dans lequel se situe x est $\mathbb{R}$ dans son intégralité.

Exercice 11.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = 3 + 2\sin(x)$.

(a) Déterminer l'abscisse (*i.e.* la coordonnée x) de tous les points du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \sqrt{2}\,x - 5$.
(b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 11.5

Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \cos(x)$.

(a) Calculer $f'(x)$, $f''(x) = (f')'(x)$, $f'''(x) = ((f')')'(x)$, ainsi que $f^{(4)}(x) = (((f')')')'(x)$.

(b) Calculer $f^{(99)}(x)$, où $f^{(99)}$ est la dérivée d'ordre 99 de f.

Réponse 11.1

(a) $f'(x) = 7\sec^2(x)$; (b) $f'(x) = 3\sin(x) + 3\,x\cos(x)$;

(c) $f'(x) = 2\,x + x\cos(x) + \sin(x)$; (d) $f'(x) = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x) - 1}{x^2}$;

(e) $f'(x) = 2\,x\sec(x) + x^2\sec(x)\operatorname{tg}(x)$;

(f) $f'(t) = 6\,t\sec(t) + 3\,t^2\operatorname{tg}(t)\sec(t) - 3\,t^2\operatorname{tg}(t) - t^3\sec^2(t)$;

(g) $f'(\theta) = \dfrac{1}{1-\sin(\theta)}$; (h) $f'(x) = \sec(x) + 2\sec(x)\operatorname{tg}^2(x)$;

(i) $f'(\xi) = 2\left(\cos^2(\xi) - \sin^2(\xi)\right) = 2\cos(2\,\xi)$; (j) $f'(x) = 0$;

(k) $f'(\varphi) = \dfrac{2\sin(\varphi)}{\left(\cos(\varphi)-1\right)^2}$; (l) $f'(x) = \sec^2(x)$.

Réponse 11.2

Tangente : $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Normale : $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

Réponse 11.3

(b) $P_1\left(\frac{\pi}{4}\,;\ \sqrt{2}\right)$ et $P_2\left(\frac{5\,\pi}{4}\,;\ -\sqrt{2}\right)$.

(c) $P_{1,k}\left(\frac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k\,;\ \sqrt{2}\right)$ et $P_{2,k}\left(\frac{5\,\pi}{4} + 2\,\pi\,k\,;\ -\sqrt{2}\right)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Réponse 11.4

(a) $\begin{cases} x_{1,k} = \frac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_{2,k} = -\frac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k\,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$; (b) $y - 4 = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Réponse 11.5

(a) $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = f^{(3)}(x) = \sin(x)$ et $f^{(4)}(x) = \cos(x)$.

(b) $f^{(99)}(x) = \sin(x)$.

Dérivées des fonctions logarithmes, exponentielles et hyperboliques

Exercice 12.1

(a) Soit (u_n) la suite géométrique de terme général $u_n = 2^n$, où $n \in \mathbb{N}$; soit aussi (v_n) la suite arithmétique de terme général $v_n = 2\,n$, où $n \in \mathbb{N}$. Trouver une fonction continue $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui transforme u_n en v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Même question que la précédente, dans le cas où $u_n = 3\,\mathrm{e}^n$ et $v_n = 4\,n+1$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{e} = 2{,}71828.....$

Exercice 12.2
Résoudre les équations et inéquation suivantes.

(a) $9^x = 27$; (b) $\mathrm{e}^x = 16$; (c) $\ln(x) = -1$;

(d) $\ln(2\,x-1) = 3$; (e) $\exp(3\,x-4) = 2$; (f) $2^{x-5} = 3$;

(g) $\ln(x)+\ln(x-1) = 1$; (h) $\ln\big(\ln(x)\big) = 1$; (i) $2\,\mathrm{e}^x + 1 - 171\,\mathrm{e}^{-x} = 0$;

(j) $\ln(3-2\,x)+\ln(2)-\ln(2\,x+3) = 0$; (k) $\mathrm{e}^{a\,x} = c\,\mathrm{e}^{b\,x}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $c \in \mathbb{R}_+^*$;

(l) $2^{2\,x} - 3 = 4 \cdot 2^{-2\,x}$; (m) $3\,\mathrm{e}^{2\,x} - 5\,\mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^{2\,x+1}$; (n) $\ln\big(x\,(3-x)\big) \leqslant \ln(2)$.

Exercice 12.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi f et g les deux fonctions réelles données par $f(x) = 2\ln(x)$ et $g(x) = \cosh(x)$.

(a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $P(1;\,0)$.

(b) Déterminer les coordonnées du ou des point(s) du graphe de g où la tangente est parallèle à la tangente au graphe de f en P.

Exercice 12.4
Dans chacun des cas suivants, esquisser le graphe de la fonction f donnée.

(a) $f(x) = \log(x+3) - 1$; (b) $f(x) = \ln(-x)$; (c) $f(x) = \ln|x|$;

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{x-3} - 2$; (e) $f(x) = -\frac{1}{2}\exp(-x) + 2$; (f) $f(x) = \exp(x^2)$.

Exercice 12.5
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f donnée.

(a) $f(x) = \ln(4\,x^3 - x^2 + 2)$;

(b) $f(x) = \ln(x^4 + 1)$;

(c) $f(x) = \ln|4 - 3\,x|$;

(d) $f(x) = \ln\big(|5\,x^2 - 1|^3\big)$;

(e) $f(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$;

(f) $f(x) = \ln(x^3) + \big(\ln(x)\big)^3$;

(g) $f(x) = \log(x^4 + 3\,x^2 + 1)$;

(h) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{4+x^2}{4-x^2}}$;

(i) $f(x) = \log_3|6\,x - 7|$;

(j) $f(x) = \exp(1 - x^3)$;

(k) $f(x) = \mathrm{e}^{3\,x}$;

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$;

(m) $f(x) = \sinh(\sqrt{x}\,) + \sqrt{\sinh(x)}$;

(n) $f(x) = \dfrac{x}{\cosh(x)}$;

(o) $f(x) = x\exp(-x)$;

(p) $f(x) = x^x \;(= \exp(x\ln(x))\,)$;

(q) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x)$;

(r) $f(x) = \ln\big(\log(x)\big)$;

(s) $f(x) = x^\pi \cdot \pi^x$;

(t) $f(x) = \ln\big|\sin(x)\big|$;

(u) $f(x) = \cosh\big(\ln(2\,x)\big)$;

(v) $f(x) = \ln\big(\mathrm{ctg}(x^2)\big)$.

Réponse 12.1

(a) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = 2\log_2(x)$.

(b) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = 4\ln(x) + 1 - 4\ln(3)$.

Réponse 12.2

(a) $x = \frac{3}{2}$;
(b) $x = \ln(16)$;
(c) $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$;
(d) $x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^3 + 1)$;
(e) $x = \frac{1}{3}\big(\ln(2) + 4\big)$;
(f) $x = \frac{\ln(96)}{\ln(2)}$;
(g) $x = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1 + 4\,\mathrm{e}}\big)$;
(h) $x = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$;
(i) $x = \ln(9)$;
(j) $x = \frac{1}{2}$;
(k) $x = \frac{\ln(c)}{a-b}$;
(l) $x = 1$;
(m) $x = \ln\left(\frac{5+\sqrt{37-4\,\mathrm{e}}}{2\,(3-\mathrm{e})}\right)$;
(n) $x \in \,]0;\, 1] \cup [2;\, 3[$.

Réponse 12.3

(a) $y = 2\,x - 2$.
(b) $Q\big(\ln\big(2 + \sqrt{5}\,\big)\ ;\ \sqrt{5}\,\big)$.

Réponse 12.5

(a) $f'(x) = \dfrac{12\,x^2 - 2\,x}{4\,x^3 - x^2 + 2}$;

(b) $f'(x) = \dfrac{4\,x^3}{x^4 + 1}$;

(c) $f'(x) = \dfrac{3}{3\,x - 4}$;

(d) $f'(x) = \dfrac{30\,x}{5\,x^2 - 1}$;

(e) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$;

(f) $f'(x) = \dfrac{3}{x}\Big(1 + \big(\ln(x)\big)^2\Big)$;

(g) $f'(x) = \dfrac{4\,x^3 + 6\,x}{(x^4 + 3\,x^2 + 1)\ln(10)}$;

(h) $f'(x) = \dfrac{8\,x}{16 - x^4}$;

(i) $f'(x) = \dfrac{6}{(6\,x - 7)\ln(3)}$;

(j) $f'(x) = -3\,x^2 \exp(1 - x^3)$;

(k) $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3\,x}$;

(l) $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$;

(m) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cosh\big(\sqrt{x}\,\big)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\cosh(x)}{\sqrt{\sinh(x)}}\right)$;

(n) $f'(x) = \dfrac{\cosh(x) - x\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$;

(o) $f'(x) = (1 - x)\exp(-x)$;

(p) $f'(x) = x^x\big(\ln(x) + 1\big)$;

(q) $f'(x) = 1$;

(r) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$;

(s) $f'(x) = x^{\pi-1}\,\pi^x\,\big(\pi + x\ln(\pi)\big)$;

(t) $f'(x) = \mathrm{ctg}(x)$;

(u) $f'(x) = \dfrac{\sinh\big(\ln(2\,x)\big)}{x}$;

(v) $f'(x) = -2\,x\csc(x^2)\sec(x^2)$.

Dérivation implicite

Exercice 13.1
Dans chacun des cas suivants, calculer $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en appliquant la technique de la dérivation implicite.

(a) $x^2 - x\,y + y^3 = 8$; (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$;

(c) $y^5 + 3\,x^2\,y^2 + 5\,x^4 = 12$; (d) $\cos(x-y) = x\exp(x)$;

(e) $x\sin(y) + \cos(2\,y) = \cos(y)$; (f) $x\,y = \operatorname{ctg}(x\,y)$.

Exercice 13.2
En appliquant la technique de la dérivation implicite, déterminer la dérivée de la fonction f donnée par $y = f(x)$, dans les cas suivants.

(a) $y = f(x) = \mathrm{e}^x$; (b) $y = f(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$; (c) $y = f(x) = \operatorname{Argsinh}(x)$;

(d) $y = f(x) = \operatorname{Arctg}(x)$; (e) $y = f(x) = \operatorname{Arcctg}(x)$; (f) $y = f(x) = \operatorname{Argcosh}(x)$.

Exercice 13.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y^4 + 3\,y - 4\,x^3 = 5\,x + 1$, au point $P(1;\,-2)$.

(b) Soit la courbe d'équation $(y-2)^2\,(x^2+y^2) = 16\,y^2$; une telle courbe est appelée *conchoïde de Nicomède*. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $P(\sqrt{15}\,;\,1)$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $x^2\,y - y^3 = 8$, au point $P(-3;\,1)$. Déterminer également l'équation de la normale à la tangente en P.

Exercice 13.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En se servant de la technique de la dérivation implicite, montrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(x_0;\,y_0)$ peut s'écrire $\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} = 1$.

Exercice 13.5

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe d'équation $y^2 = 2\,x + 3$.

(a) Soit $f : D \to E$ la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{2\,x + 3}$. Déterminer les plus grands ensembles possibles D et E pour lesquels f est bijective.

(b) Donner le plus grand domaine rectangulaire $A \times B$ du plan $\mathbb{R}^2$ pour lequel le graphe de f coïncide avec $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la dérivée de f en utilisant la technique de la dérivation implicite.

(d) Calculer la dérivée de la fonction réciproque ${}^{\mathrm{r}}\!f$ de f.

Exercice 13.6

(a) Soit f la fonction donnée par $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4\,x}}$. Calculer $f''(x)$.

(b) Soit f la fonction donnée par $f(x) = -2\,x^4 - x^3 + 3$. Calculer $f'''(x)$ ainsi que $f^{(5)}(x)$.

Réponse 13.1

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2\,x - y}{x - 3\,y^2}$;

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2\,x\,(10\,x^2 + 3\,y^2)}{y\,(6\,x^2 + 5\,y^3)}$;

(d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(x+1)\exp(x) + \sin(x-y)}{\sin(x-y)}$;

(e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\sin(y)}{x\cos(y) + \sin(y) - 2\sin(2\,y)}$;

(f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y}{x}$.

Réponse 13.2

(a) $y' = \mathrm{e}^x$;

(b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(c) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

(d) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(e) $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(f) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Réponse 13.3

(a) Équation de la tangente : $y = -\frac{17}{29}\,x - \frac{41}{29}$.

(b) Équation de la tangente : $y = \frac{\sqrt{15}}{31}\,x + \frac{16}{31}$.

(c) Équation de la tangente : $y = x + 4$; équation de la normale : $y = -x - 2$.

Réponse 13.5

(a) $D = \left[-\frac{3}{2}\,;\,\infty\right[$ et $E = \mathbb{R}_+$.

(b) $\left[-\frac{3}{2}\,;\,\infty\right[\times \left[0\,;\,\infty\right[$.

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,x+3}}$.

(d) ${}^{r}\!f'(x) = x$.

Réponse 13.6

(a) $f''(x) = \dfrac{9}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{9}{8\,\sqrt{x^5}}$.

(b) $f'''(x) = -48\,x - 6$ et $f^{(5)}(x) = 0$.

Tangentes à une courbe paramétrée
Approximations, calcul d'incertitudes

Exercice 14.1
Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3\,t \\ y(t) = t^2 - 5\,t - 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $P\big(x(2)\,;\,y(2)\big)$.
(b) En quelle(s) valeur(s) de t la tangente à $\mathcal{C}$ en $\big(x(t);\,y(t)\big)$ est-elle horizontale ?

Exercice 14.2
Toute masse de gaz se caractérise essentiellement par sa pression p, sa température T et le volume V qu'elle occupe.

(a) Si la température et la masse d'un gaz demeurent constantes, le produit de sa pression p et du volume V qu'il occupe demeure constant : $p\,V = C$, où C est une constante. Une telle expression porte le nom de *loi de Boyle-Mariotte*.
À un instant donné, on mesure $V = 1200\,\text{cm}^3$ et $p = 2400\,\text{kPa}$; on relève aussi que la pression diminue à la vitesse constante de $140\,\text{kPa}$ par minute. Déterminer, à l'instant en question, la vitesse à laquelle varie le volume.

(b) On appelle *dilatation adiabatique* d'un gaz toute variation de volume du gaz en question qui s'effectue sans transfert de chaleur avec le milieu extérieur à celui du gaz.
La dilatation adiabatique de l'air obéit à la loi $p\,V^{1,4} = C$, où p est la pression d'une masse d'air donnée, V le volume qu'elle occupe et C une constante. À un instant donné, on mesure $V = 400\,\text{cm}^3$ et $p = 80\,\text{kPa}$; on relève aussi que la pression décroît à une vitesse de $10\,\text{kPa/min}$. Calculer la vitesse à laquelle le volume augmente à cet instant.

Exercice 14.3
On appelle *lentille optique* tout solide transparent délimité par deux surfaces, dont l'une au moins est courbe, souvent de forme sphérique.

Toute lentille est caractérisée par une grandeur f appelée *distance focale*. Les lentilles pour lesquelles $f > 0$ sont dites *convergentes* ; les lentilles pour lesquelles $f < 0$ sont dites *divergentes*.

Toute lentille produit, à partir d'un objet lumineux O placé devant la lentille, une image I. Soient p et q les distances objet-lentille et lentille-image, respectivement. Si la lentille est suffisamment mince, on peut montrer que p et q sont liées par l'expression suivante, appelée *loi des lentilles minces* :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,.$$

Considérons une lentille convergente de distance focale $f = 200\,\text{mm}$. Plaçons un objet lumineux à une distance $p > f$ de la lentille. Notons q la distance à laquelle l'image est produite. À un instant donné, on mesure $p = 250\,\text{mm}$; on relève aussi que p augmente à la vitesse constante de $12\,\text{mm/s}$. Déterminer alors la vitesse à laquelle varie la distance q à cet instant.

Exercice 14.4

On tire un bateau vers les docks à l'aide d'une corde ; la corde est attachée à la proue du bateau et passe par une poulie fixée au bord des docks, placée à 1,000 m au-dessus de la proue.

(a) Représenter la situation à l'aide d'un schéma.

(b) Si la corde est tirée à la vitesse constante de $1{,}000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, calculer la vitesse du bateau lorsqu'il est à 8,000 m des docks.

Exercice 14.5

Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Construire une fonction affine g qui soit proche de f au voisinage de $x_0 = 1$; autrement dit, construire une fonction g de la forme $g(x) = m\,x + h$ (où m et h sont des paramètres fixes) telle que $g(x)$ soit proche de $f(x)$ pour tout x « suffisamment » proche de $x_0 = 1$.

(b) Calculer la différence entre g et f en $x = 2$.

Exercice 14.6

Dans les cas suivants, donner une valeur approchée de $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$, où $x_1 = x_0 + \Delta x$, en effectuant une approximation linéaire.

(a) $f(x) = -3\,x^3 + 8\,x - 7$; avec $x_0 = 4{,}00$ et $x_1 = 3{,}96$.

(b) $f(\theta) = 2\sin(\theta) + \cos(\theta)$; avec $\theta_0 = 30°$ et $\theta_1 = 27°$.

(c) $f(\alpha) = \sec(\alpha)$; avec $\alpha_0 = 60°$ et $\alpha_1 = 62°$.

(d) $f(\beta) = \mathrm{tg}(\beta)$; avec $\beta_0 = 30°$ et $\beta_1 = 28°$.

Exercice 14.7

(a) Soit $y = 3\,x^4$ l'expression qui lie un grandeur y à une grandeur x. On suppose que l'on a mesuré une valeur $x_0 = 2{,}00$ avec une incertitude $\Delta x = 0{,}01$. Calculer la valeur $y_0 = 3\,{x_0}^4$ ainsi que l'incertitude Δy due à Δx. Exprimer également l'incertitude relative en pourcents.

(b) Même question dans le cas où $y = 4\sqrt{x} + 3\,x$, avec $x_0 = 4{,}0$ et $\Delta x = 0{,}2$.

Exercice 14.8

La façade d'une maison a la forme d'un carré surmonté d'un triangle équilatéral. On mesure la base et on obtient $(15{,}000 \pm 0{,}025)$ m. Avec cette information, calculer l'aire de cette façade avec son incertitude.

Exercice 14.9

À une distance horizontale de 6,0 m du pied d'un mât, on mesure l'angle d'élévation du sommet du mât et on trouve $60°00'$ avec une incertitude de $15'$. Avec cette information, calculer la hauteur du mât et son incertitude.

Réponse 14.1

(a) $y = -\frac{1}{9}\,x - \frac{61}{9}$. (b) $t = \frac{5}{2}$.

Réponse 14.2

(a) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \approx 70\,\mathrm{cm^3/min} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

(b) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3/min} \approx 6{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Réponse 14.3

$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \approx -192\,\mathrm{mm/s}$.

Réponse 14.4

$v_{\mathrm{bateau}} \approx 1{,}008\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Réponse 14.5

(a) $g(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$. (b) $g(2) - f(2) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0{,}086$.

Réponse 14.6

(a) $f(x_1) \approx -161{,}56 \approx -162$. (b) $f(x_1) \approx 1{,}802 \approx 1{,}8$.

(c) $f(x_1) \approx 2{,}121 \approx 2{,}1$. (d) $f(x_1) \approx 0{,}531 \approx 0{,}53$.

Réponse 14.7

(a) $\Delta y = 0{,}96$ et $\frac{\Delta y}{y} = 0{,}02 = 2\%$.

(b) $\Delta y = 0{,}8$ et $\frac{\Delta y}{y} = 0{,}04 = 4\%$.

Réponse 14.8

$A = (322{,}4 \pm 1{,}1)\,\mathrm{m^2} \approx (322 \pm 1)\,\mathrm{m^2}$.

Réponse 14.9

$h = (10{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m}$.

Théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

Exercice 15.1

(a) Dans les deux cas suivants, montrer que la fonction f donnée satisfait les hypothèses du théorème de Rolle dans l'intervalle fermé donné ; chercher ensuite le(s) nombre(s) c dans l'intervalle en question, sauf sur ses bords, tel(s) que $f'(c) = 0$.
- $f(x) = 3\,x^2 - 12\,x + 11$ dans l'intervalle $[0;\ 4]$;
- $f(x) = \cos(2\,x) + 2\cos(x)$ dans l'intervalle $[0;\ 2\,\pi]$.

(b) Dans les deux cas suivants, analyser si la fonction f donnée satisfait les hypothèses du théorème de Lagrange dans l'intervalle fermé donné ; si tel est le cas, chercher tous les nombres c dans l'intervalle en question, sauf sur ses bords, tels que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.
- $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ dans l'intervalle $[-2;\ 3]$;
- $f(x) = \sin(x)$ dans l'intervalle $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Soient $[a;\ b]$ un intervalle fermé, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, et f une fonction continue dans $[a;\ b]$ et dérivable dans $]a;\ b[$. Supposons, en outre, que la dérivée f' de f s'écrit $f'(x) = m$ pour tout $x \in\ ]a;\ b[$, où m est un nombre réel donné. Démontrer alors que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = m\,x + h$ dans $]a;\ b[$, où h est un nombre réel fixe. *Indication* : appliquer le théorème de Lagrange à f dans l'intervalle $[a;\ x]$, où $x \in\ ]a;\ b[$.

(d) Sur l'île de Saint-Kilda, aux large des Hébrides extérieures (archipel appartenant à l'Écosse), la température peut parfois chuter de 20 °C à 2 °C en seulement 4 heures. Montrer qu'il existe, dans cet intervalle de 4 heures, un instant où la vitesse de variation $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ de la température T dépasse -4 °C/heure.

Exercice 15.2

Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, toutes les deux définies dans un intervalle $[a;\ \infty[\ \subset D_1 \cap D_2$, où a est un nombre réel. Supposons que f et g sont continues dans $[a;\ \infty[$ et dérivables dans $]a;\ \infty[$. Supposons, de plus, que g et g' ne s'annulent en aucun point de $]a;\ \infty[$, et que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to\infty} g(x)$$

ou :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) \;=\; \pm\infty\,.$$

Supposons, en outre, que la limite suivante existe :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

i.e. supposons que cette limite vaut soit un nombre réel ℓ, soit ∞, soit encore $-\infty$. À l'aide de la règle de Bernoulli-L'Hôpital, montrer que :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Ce résultat établit que la règle de Bernoulli-L'Hôpital s'applique également dans le cas de limites à l'infini (le cas d'une limite à $-\infty$ se prouvant de manière similaire à celui d'une limite à ∞).

Exercice 15.3
Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\,x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2\,x^2-5\,x+2}{5\,x^2-7\,x-6}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$;

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{2+\sec(x)}{3\,\mathrm{tg}(x)}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)+\exp(-x)}{x^2}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)}{x+\ln(x)}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arcsin}(3\,x)}{\mathrm{Arcsin}(x)}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3-3^x}{5-5^x}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-\cos(x)}{x}$.

Exercice 15.4

(a) Prouver que $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. Ce résultat montre que *l'exponentielle gagne l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de x.*

(b) Prouver que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$ quel que soit $p > 0$ réel. Ce résultat montre que *le logarithme gagne l'infini moins vite que n'importe quelle puissance positive de x.*

Exercice 15.5
Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$; (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \big(\sin(x)\ln(\sin(x))\big)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{5\,x}$; (f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\mathrm{e}^x-1)^x$;

(g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \big(\mathrm{tg}(x)\big)^x$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$; (i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$;

(j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^{\ln(x)}$; (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\mathrm{ctg}^2(x)-\exp(-x)\big)$; (l) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \big(1+\cos(x)\big)^{\mathrm{tg}(x)}$.

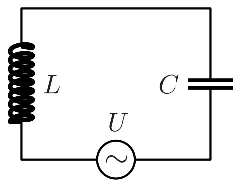
Note : les expressions du type « $0 \cdot \infty$ » deviennent « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » en posant :

$$f\,g \;=\; \frac{f}{\frac{1}{g}} \qquad \text{ou} \qquad f\,g \;=\; \frac{g}{\frac{1}{f}}\,.$$

Aussi, si $y = f(x)^{g(x)}$, il peut être utile d'écrire y sous la forme $y = \exp\bigl(\ln(y)\bigr)$.

Exercice 15.6

Un condensateur de capacité C (où $C > 0$ est un paramètre réel) et une bobine de coefficient d'auto-induction L (où $L > 0$ est également un paramètre réel) sont branchés en série à une source qui délivre une tension alternative $U(t) = U_0 \sin(\omega\,t)$, où $U_0 > 0$ et $\omega > 0$ sont deux paramètres réels.



Soient Q la charge portée par l'une des armatures du condensateur, et I l'intensité du courant dans le circuit. Il peut être montré que, dans le cas où :

- Q à l'instant $t = 0$ vaut Q_0 (où Q_0 est une valeur strictement positive),
- I à l'instant $t = 0$ vaut 0,
- $\omega^2 \neq \frac{1}{L\,C}$,

la charge Q en fonction du temps t est donnée par l'expression (*cf.* exercice 28.8) :

$$Q(t) \;=\; Q_0 \cos\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) - \frac{C\,U_0\,\omega\,\sqrt{L\,C}}{1 - L\,C\,\omega^2}\sin\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + \frac{C\,U_0}{1 - L\,C\,\omega^2}\sin(\omega\,t)$$

ou, de manière équivalente (et en notant $Q_\omega(t)$ à la place de $Q(t)$) :

$$Q_\omega(t) \;=\; Q_0 \cos\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) - \frac{C\,U_0}{1 - L\,C\,\omega^2}\left[\omega\,\sqrt{L\,C}\,\sin\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) - \sin(\omega\,t)\right].$$

À l'aide de la règle de Bernoulli-L'Hôpital, prouver que :

$$\lim_{\omega \to \frac{1}{\sqrt{LC}}} Q_\omega(t) \;=\; \left(Q_0 - \frac{C\,U_0}{2\,\sqrt{L\,C}}\,t\right)\cos\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right) + \frac{C\,U_0}{2}\sin\!\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\right).$$

Note : Cette limite n'est rien d'autre que l'expression de la charge Q portée par l'une des armatures du condensateur, dans la situation où $\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$ (*cf.* exercice 24.8).

Réponse 15.1

(a)
- $c = 2$.
- $c \in \left\{\frac{2\pi}{3}\,;\ \pi\,;\ \frac{4\pi}{3}\right\}$.

(b)
- Hypothèses non satisfaites.
- $c = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Réponse 15.3

(a) $\frac{1}{2}$;	(b) $\frac{3}{13}$;	(c) $\frac{1}{6}$;
(d) $\frac{1}{3}$;	(e) ∞ ;	(f) ∞ ;
(g) 3 ;	(h) $\frac{3}{5}$;	(i) 1 .

Réponse 15.5

(a) 0 ;	(b) 0 ;	(c) 0 ;
(d) 1 ;	(e) e^5 ;	(f) 1 ;
(g) ∞ ;	(h) 2 ;	(i) 0 ;
(j) 1 ;	(k) ∞ ;	(l) e .

Concept d'intégrale

Exercice 16.1
En mathématiques, la *démonstration par récurrence* est un type de raisonnement utilisé pour prouver la véracité d'une formule $\mathcal{F}_n$ dépendant d'un nombre naturel n arbitraire ; le schéma d'une telle démonstration est le suivant :

- on vérifie que la formule $\mathcal{F}_n$ est correcte dans le cas où $n = 0$ (on peut aussi la vérifier dans le cas où $n = 1$, $n = 2$, etc. si l'on en ressent le besoin ; mais ce n'est pas une nécessité) ;
- on démontre que la formule $\mathcal{F}_n$ est correcte dans le cas où $n = k+1$, en faisant la supposition qu'elle l'est dans le cas où $n = k$; une telle supposition est appelée *hypothèse de récurrence*.

En prouvant ces deux points, on montre que la formule est correcte dans le cas $n = 0$, puis dans le cas $n = 0 + 1 = 1$, puis dans le cas $n = 1 + 1 = 2$ et ainsi de suite. On montre ainsi que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Noter que la démonstration par récurrence permet uniquement de démontrer des formules existentes, non de les établir.

(a) Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 \;=\; \frac{m\,(m+1)(2\,m+1)}{6}\,,$$

où :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 \;=\; 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2\,.$$

(b) Démontrer par récurrence la formule de sommation des $N+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r, dont le terme général u_n s'écrit, rappelons-le, $u_n = u_0 + n\,r$, u_0 étant le zéroième terme de la suite :

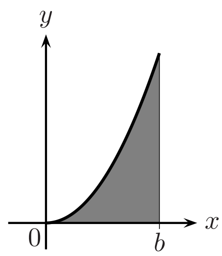
$$\sum_{n=0}^{N} u_n \;=\; \frac{N+1}{2}\,(2\,u_0 + N\,r)\,,$$

où :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \;=\; u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_N \;=\; \sum_{n=0}^{N} (u_0 + n\,r)\,.$$

Exercice 16.2
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^2$.

On aimerait calculer l'aire A de la surface délimitée par l'axe Ox (d'équation $y = 0$), la droite verticale d'équation $x = b$ et le graphe de f. Pour cela, on décompose l'intervalle $[0\,; b]$ en n sous-intervalles de longueurs égales et valant $\frac{b}{n}$. Dans une telle décomposition, le $k^{\text{ème}}$ sous-intervalle est délimité par l'élément x_{k-1} à gauche et par l'élément x_k à droite, où :



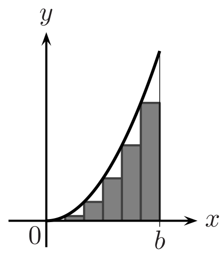
$$x_{k-1} = \frac{(k-1)\,b}{n} \qquad \text{et} \qquad x_k = \frac{k\,b}{n}\,.$$

L'ensemble ${}_{\mathrm{r}}\sigma_n = (x_0; x_1; \ldots ; x_n)$ porte le nom de *subdivision régulière d'ordre* n de l'intervalle $[0; b]$.

(a) Calculer l'aire $\underline{A}_k$ du rectangle $\underline{R}_k$ ayant pour base inférieure le segment de l'axe x délimité par x_{k-1} et x_k, et dont la hauteur est égale à $f(x_{k-1})$. En déduire l'aire suivante :

$$\underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_n} = \sum_{k=1}^{n} \underline{A}_k\,.$$

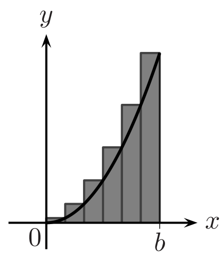
Comme $\underline{R}_k$ a une hauteur égale à $f(x_{k-1})$, sa base supérieure se trouve complètement en dessous du graphe de f (raison pour laquelle il est souvent appelé *rectangle inférieur*). De fait, l'aire $\underline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_n}$, qui est la somme des aires des rectangles $\underline{R}_k$, n'est pas égale mais est inférieure à A. Cette somme est appelée *somme de Darboux inférieure* de f, associée à la subdivision ${}_{\mathrm{r}}\sigma_n$.



(b) Calculer l'aire $\overline{A}_k$ du rectangle $\overline{R}_k$ ayant pour base inférieure le segment de l'axe x délimité par x_{k-1} et x_k, et dont la hauteur est égale à $f(x_k)$. En déduire l'aire suivante :

$$\overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k\,.$$

Comme $\overline{R}_k$ a une hauteur égale à $f(x_k)$, sa base supérieure se trouve complètement au-dessus du graphe de f (raison pour laquelle il est souvent appelé *rectangle supérieur*). De fait, l'aire $\overline{S}_{{}_{\mathrm{r}}\sigma_n}$, qui est la somme des aires des rectangles $\overline{R}_k$, n'est pas égale mais est supérieure à A. Cette somme est appelée *somme de Darboux supérieure* de f, associée à la subdivision ${}_{\mathrm{r}}\sigma_n$.



(c) Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n \qquad \text{ainsi que :} \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n\,.$$

Que constate-t-on ? Que vaut finalement l'aire A ?

Exercice 16.3

Prouver les égalités suivantes :

(a) $\displaystyle\int x^a \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\,,\;\; a \in \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\}$; (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln|x| + C$;

(c) $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\cos(x) + C$; (d) $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sin(x) + C$;

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{tg}(x) + C$; (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,\mathrm{ctg}(x) + C$;

(g) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\ln\big|\cos(x)\big| + C$; (h) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\big|\sin(x)\big| + C$;

(i) $\displaystyle\int \exp(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \exp(x) + C$; (j) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{a^x}{\ln(a)} + C\,,\;\; a \in \mathbb{R}_+^*\smallsetminus\{1\}$;

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{Arctg}(x) + C$; (l) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\Big(\frac{x}{a}\Big) + C$;

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2\,a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$; (n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{Arcsin}(x) + C$;

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{Arcsin}\Big(\frac{x}{a}\Big) + C$; (p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\big|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\big| + C$.

Note : Dans les points (l), (m), (o) et (p), le nombre a est supposé être réel et strictement positif.

Exercice 16.4

Expliciter les expressions suivantes :

(a) $\displaystyle\int x^5\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \big(x + \sqrt{x}\,\big)\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2\mathrm{d}x$.

Réponse 16.2

(a) $\underline{S}_{\mathrm{r}\sigma_n} = \dfrac{2\,n^2 - 3\,n + 1}{6\,n^2}\, b^3$; (b) $\overline{S}_{\mathrm{r}\sigma_n} = \dfrac{2\,n^2 + 3\,n + 1}{6\,n^2}\, b^3$; (c) $A = \dfrac{1}{3}\, b^3$.

Réponse 16.4

(a) $\dfrac{1}{6}\, x^6 + C$; (b) $\dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{2\,\sqrt{x^3}}{3} + C$; (c) $6\,\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x^5}}{10} + C$;

(d) $\dfrac{2\,\sqrt{x^5}}{5} + C$; (e) $\dfrac{4\,\sqrt[4]{x^3}}{3} + C$; (f) $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3\,\sqrt[3]{x^8}}{4} + 3\,\sqrt[3]{x} + C$.

Théorème fondamental du calcul intégral
Méthode d'intégration par parties

Exercice 17.1
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \exp(x)\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_0^b t^2\,\mathrm{d}t\,.$

Exercice 17.2
Expliciter l'ensemble des primitives dans chacun des cas suivants, en se servant de la technique d'intégration par parties.

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \mathrm{Arcsin}(x)\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int x^n\ln(x)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int x\,\mathrm{Arctg}(x)\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int \exp(a\,x)\sin(b\,x)\,\mathrm{d}x\,,$ où $a, b \in \mathbb{R}\,.$ (i) $\displaystyle\int \ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 17.3
Calculer les intégrales suivantes, en se servant de la technique d'intégration par parties.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (3\,t^2-4)\cos(t)\,\mathrm{d}t$;

(c) $\displaystyle\int_0^2 (x-2)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int_0^1 x\,(1-x)^n\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 17.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soient aussi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, données par $f(x) = 2\,x + 8$ et $g(x) = x^2$. Trouver les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et de g ; calculer ensuite l'aire du domaine fini, dans $\mathbb{R}^2$, compris entre ces graphes.

Exercice 17.5
Un météorologue estime que la température (en °C) d'une froide journée d'hiver peut être modélisée par la fonction T du temps t, donnée par :

$$T(t) = \frac{1\,^\circ\mathrm{C}}{36\,\mathrm{h}^3}\, t\,(t - 12\,\mathrm{h})(t - 24\,\mathrm{h}) - 18\,^\circ\mathrm{C}\,,$$

où t se mesure en heures ; $t = 0\,\mathrm{h}\,00$ correspondant à minuit. À l'aide du théorème de la valeur moyenne, calculer la température moyenne entre 6 h 00 (du matin) et 12 h 00.

Exercice 17.6
À la surface de la Terre, on place un axe z vertical et orienté vers le haut, et on fixe son origine au niveau du sol. On lance une bille verticalement, vers le haut, depuis un point dont la coordonnée selon z est $z_0 = 45{,}0\,\mathrm{m}$, avec une vitesse initiale $v_0 = 30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. L'accélération due à la pesanteur est supposée constante, verticale et orientée vers le bas ; sa norme vaut $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Soit $z(t)$ la position de la bille à l'instant t. On appelle *vitesse* et *accélération* de la bille (selon l'axe z) les grandeurs v_z et a_z, respectivement, données par $v_z(t) = \dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ et $a_z(t) = \ddot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t)$. Vu que l'accélération due à la pesanteur est considérée comme constante, $\ddot{z}(t) = -g$, le signe négatif venant du fait que le vecteur accélération est orienté vers le bas (*i.e.* contrairement à l'axe z).

(a) Procéder à une double intégration de la relation $\ddot{z} = -g$ afin d'obtenir une expression de la position z de la pierre en fonction du temps t.

(b) Déterminer l'instant t_1 où la pierre est au niveau du sol. Calculer sa vitesse v_1 juste avant qu'elle ne touche le sol.

Exercice 17.7
En mécanique des fluides, la *loi de Poiseuille* est une formule qui décrit l'écoulement *laminaire* d'un fluide visqueux dans un tuyau cylindrique. Concrètement, elle donne le débit volumique Q du fluide qui s'écoule dans le tuyau en question. Pour rappel, l'écoulement d'un fluide est dit *laminaire* si les particules qui constituent le fluide suivent des lignes de courant qui ne se croisent pas. Quant au *débit volumique*, il est, par définition, le produit de la vitesse moyenne des particules du fluide par unité de surface perpendiculaire.

Considérons un tuyau cylindrique de rayon R. Il peut être montré que la vitesse v des particules qui constituent le fluide dépend de leur distance r par rapport au centre du tuyau, selon l'expression :

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\,\eta\,L}\,(R^2 - r^2)\,,$$

où L est la longueur du tuyau en question, $p_1 - p_2$ la différence de pression entre ses extrémités et η un coefficient, appelé *viscosité dynamique* du fluide. La vitesse v ne dépendant pas d'autre variable géométrique que r, elle est la même en tout point d'un cercle de rayon r, centré sur l'axe du tuyau. Le débit de fluide $\mathrm{d}Q$ dans un anneau centré sur l'axe du tuyau, et d'aire $\mathrm{d}A = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r$, où r est le rayon de l'anneau et $\mathrm{d}r$ son épaisseur, est alors donné par :

$$\mathrm{d}Q \;=\; \frac{p_1 - p_2}{4\,\eta\,L}\,(R^2 - r^2)\,\mathrm{d}A \;=\; \frac{p_1 - p_2}{4\,\eta\,L}\,(R^2 - r^2)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r\,.$$

Le débit total du fluide dans le tuyau s'obtient en sommant les débits $\mathrm{d}Q$, *i.e.* en intégrant $\mathrm{d}Q$ entre $r = 0$ et $r = R$. Par un calcul concret, montrer que :

$$Q \;=\; \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\,\eta\,L}\,(R^2 - r^2)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r \;=\; \frac{\pi\,(p_1 - p_2)\,R^4}{8\,\eta\,L}\,.$$

Ce résultat est ce que l'on appelle la *formule de Poiseuille*.

Réponse 17.1

(a) $\dfrac{1}{5}$; (b) $\mathrm{e} - 1$; (c) 1 ;

(d) $\dfrac{\pi}{4}$; (e) $\ln 2$; (f) $\dfrac{b^3}{3}$.

Réponse 17.2

(a) $x\,\big(\ln(x) - 1\big) + C$; (b) $\dfrac{1}{4}\,x^2\,\big(2\ln(x) - 1\big) + C$;

(c) $\sin(x) - x\cos(x) + C$; (d) $x\,\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$;

(e) $(x - 1)\ln(1 - x) - x + C$; (f) $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$;

(g) $\dfrac{1}{2}\big((x^2 + 1)\,\mathrm{Arctg}(x) - x\big) + C$; (h) $\dfrac{\exp(a\,x)}{a^2 + b^2}\big(a\sin(b\,x) - b\cos(b\,x)\big) + C$;

(i) $x\ln\big(x + \sqrt{x^2 + 1}\big) - \sqrt{x^2 + 1} + C$.

Réponse 17.3

(a) $-\dfrac{4}{15}$; (b) $-6\,\pi$;

(c) $\dfrac{5 - \mathrm{e}^4}{4}$; (d) $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Réponse 17.4
Points d'intersection : $A(-2;\, 4)$ et $B(4;\, 16)$.
Aire : $S = 36$.

Réponse 17.5
$T_{\mathrm{moy}} = -7{,}5\,^\circ\mathrm{C}$.

Réponse 17.6
(a) $x(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + x_0$, avec $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v_0 = 30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $x_0 = 45{,}0\,\mathrm{m}$.
(b) $t_1 \approx 7{,}4\,\mathrm{s}$. Aussi, $v_1 \approx 42\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Intégration par changement de variable

Exercice 18.1
Dans chacun des cas suivants, expliciter l'ensemble des primitives donné, en procédant au besoin à un changement de variable.

(a) $\displaystyle\int \exp(5\,x)\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \sin(a\,x)\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7\,x)}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int \frac{1}{3\,x-7}\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(2\,x)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2\,x^2+3}}\,\mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (k) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2\,x+3}\,\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18.2
Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale donnée, en procédant au besoin à un changement de variable :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\cos\big(\ln(x)\big)}{x}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\exp(x)}{1+\exp(2\,x)}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{\frac{2}{b}}^{\frac{3}{b}} \frac{1}{\sqrt{b^2\,x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$; où $a \in \,]0;\,2[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$; (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\mathrm{Arctg}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_1^2 a^{x^2}\,x\,\mathrm{d}x$, où $a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$.

Exercice 18.3
Dans chacun des cas suivants, expliciter l'ensemble des primitives donné :

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{3\,x^2-2\,x+4}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \frac{3\,x-2}{5\,x^2-3\,x+2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{4\,x^2+4\,x+3}}\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4\,x-4\,x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18.4
Dans chacun des cas suivants, expliciter l'ensemble des primitives donné.

(a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \cos^4(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3(x)\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \cos(4\,x)\cos(7\,x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18.5
Dans chacun des cas suivants, expliciter l'ensemble des primitives donné, en procédant au besoin à une décomposition en éléments simples.

(a) $\displaystyle\int \frac{2\,x-1}{x^2-3\,x+2}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4\,x}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Réponse 18.1

(a) $\frac{1}{5}\exp(5\,x)+C$; (b) $-\frac{1}{a}\cos(a\,x)+C$; (c) $\frac{1}{2}\ln^2(x)+C$;

(d) $\frac{1}{7}\operatorname{tg}(7\,x)+C$; (e) $\frac{1}{3}\ln\left|3\,x-7\right|+C$; (f) $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos(2\,x)\right|+C$;

(g) $\ln\left|\sin(\mathrm{e}^x)\right|+C$; (h) $\frac{1}{3}\sin^3(x)+C$; (i) $\frac{1}{2}\sqrt{2\,x^2+3}+C$;

(j) $\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}^2(x)+C$; (k) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\,x+3\right|+C$; (l) $\ln\left|\ln(x)\right|+C$.

Réponse 18.2

(a) $\dfrac{1}{4}$; (b) $\sin(1)$; (c) $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

(d) $\dfrac{1}{b}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{9-a^2}}{2+\sqrt{4-a^2}}\right)$; (e) $\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{\pi^2}{32}$; (f) $\dfrac{a}{2\ln(a)}\,(a^3-1)$.

Réponse 18.3

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{3\,x-1}{\sqrt{11}}\right)+C$;

(b) $\dfrac{3}{10}\ln\left|5\,x^2-3\,x+2\right|-\dfrac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{10\,x-3}{\sqrt{31}}\right)+C$;

(c) $\dfrac{1}{4}\sqrt{4\,x^2+4\,x+3}+\dfrac{5}{4}\ln\left|\,2\,x+1+\sqrt{4\,x^2+4\,x+3}\,\right|+C$;

(d) $-\dfrac{1}{4}\sqrt{3+4\,x-4\,x^2}+\dfrac{7}{4}\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\,x-1}{2}\right)+C$.

Réponse 18.4

(a) $\frac{1}{3}\cos^3(x)-\cos(x)+C$; (b) $-\frac{1}{5}\cos^5(x)+\frac{2}{3}\cos^3(x)-\cos(x)+C$;

(c) $\frac{1}{7}\cos^7(x)-\frac{1}{5}\cos^5(x)+C$; (d) $\frac{3}{8}\,x-\frac{1}{4}\sin(2\,x)+\frac{1}{32}\sin(4\,x)+C$;

(e) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x)+\ln\left|\cos(x)\right|+C$; (f) $\frac{1}{22}\sin(11\,x)+\frac{1}{6}\sin(3\,x)+C$.

Réponse 18.5

(a) $\ln\left|\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C$;

(b) $\dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2 + 4\,x + \ln\left|\dfrac{x^2\,(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$;

(c) $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\left(\dfrac{2\,x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

Intégrales généralisées

Exercice 19.1

(a) Expliciter l'ensemble des primitives suivant. À cet effet, il peut être utile de poser $u = \sqrt{x^2-1}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x\ .$$

(b) Soit l'ensemble des primitives :

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

où a est un nombre réel strictement positif. Expliciter cet ensemble de primitives, en procédant à un changement de variable faisant intervenir une fonction trigonométrique.

Exercice 19.2

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant le changement de variable indiqué.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\cos(x)}\,\mathrm{d}x$, avec $t = \mathrm{tg}\big(\frac{x}{2}\big)$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\big(1+x^2\big)^2}\,\mathrm{d}x$, avec $x = \mathrm{tg}(t)$.

Exercice 19.3

Les intégrales suivantes convergent-elles ou divergent-elles ? Dans le cas où elles convergent, calculer leur valeur.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}\,\mathrm{d}t$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{8}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-a\,x)\sin(b\,x)\,\mathrm{d}x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.4
Les intégrales suivantes convergent-elles ou divergent-elles ? Justifier la réponse.

$$\text{(a)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;; \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \;; \qquad \text{(c)} \int_0^{\infty} x\sin^2(x)\exp(-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 19.5

(a) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x$ en fonction du nombre réel a.

(b) Soient l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $Oxyz$ son système de coordonnées cartésiennes canonique. Plaçons un électron à l'origine O du système de coordonnées et un deuxième électron au point $P(x; 0; 0)$, où $x > 0$. Ce deuxième électron subit de la part du premier une force électrique, appelée *force de Coulomb* ; cette force s'écrit :

$$\vec{F}_{\mathrm{E}} = k\,\frac{e^2}{x^2}\,\vec{u}_x\;,$$

où e est une constante appelée *charge élémentaire*, k une autre constante, appelée *constante de Coulomb*, et $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire (*i.e.* un vecteur de longueur égale à 1) ayant la même direction et le même sens que l'axe x. Calculer le travail de cette force lorsque le deuxième électron passe de la position R sur l'axe x à l'infini ; autrement dit, calculer $W_{\vec{F}_{\mathrm{E}}}$, où :

$$W_{\vec{F}_{\mathrm{E}}} = \int_R^{\infty} \vec{F}_{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_R^{\infty} k\,\frac{e^2}{x^2}\,\vec{u}_x \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_R^{\infty} k\,\frac{e^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\;;$$

par définition, $\mathrm{d}\vec{x}$ est un vecteur infinitésimal ayant la direction et le sens de l'axe x ; de manière compacte, $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{u}_x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19.6
Sans utiliser directement le *test de l'intégrale*, montrer que la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. Pour cela, il est utile de considérer la fonction *partie entière* de x, notée $\mathrm{E}(x)$, et de se rendre compte que $\frac{1}{\mathrm{E}(x)} \geqslant \frac{1}{x}$ pour tout $x \geqslant 1$. À l'aide d'un calcul d'intégrale, et en constatant que :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{E}(x)}\,\mathrm{d}x = 1\cdot\frac{1}{1} + 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\;,$$

il est possible de conclure.

Réponse 19.1

(a) $\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arctg}\big(\sqrt{x^2-1}\,\big) + C$; (b) $\operatorname{Arccos}\Big(\dfrac{x}{a}\Big) - \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$.

Réponse 19.2

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; (b) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

Réponse 19.3

(a) 2 ; (b) $\dfrac{3}{2}$; (c) 1 ;

(d) divergence ; (e) $\dfrac{1}{2}$; (f) $4\,\pi$;

(g) π ; (h) divergence ; (i) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Réponse 19.4

(a) divergence ; (b) convergence ; (c) convergence.

Réponse 19.5

(a) L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{a-1}$ si $a > 1$. Si $a \leqslant 1$, l'intégrale diverge.

(b) Le travail est $W_{\vec{F}_\mathrm{E}} = k\,\frac{e^2}{R}$.

Réponse 19.6

On obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \geqslant \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = \infty\,.$$

La série diverge donc.

Développements limités

Exercice 20.1
Dans les cas suivants, écrire le développement de MacLaurin d'ordre n de la fonction f donnée.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^5}$, avec $n = 3$;
(b) $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$, avec $n = 3$;
(c) $f(x) = \ln(1-x)$, avec $n = 4$;
(d) $f(x) = \sin(2\,x)$, avec $n = 7$;
(e) $f(x) = \exp\big(\sin(x)\big)$, avec $n = 4$;
(f) $f(x) = \ln\big(1+\sin(x)\big)$, avec $n = 3$.

Exercice 20.2
Dans les cas suivants, écrire le développement limité $P_n^a + R_n^a$ d'ordre n, autour du nombre a, de la fonction f donnée, où P_n^a est le développement de Taylor de f d'ordre n autour de a et R_n^a le reste de Lagrange (d'ordre n) associé à P_n^a.

(a) $f(x) = \cos(x)$, avec $a = \frac{\pi}{4}$ et $n = 3$;
(b) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, avec $a = \frac{\pi}{4}$ et $n = 2$;
(c) $f(x) = x\exp(x)$, avec $a = -1$ et $n = 4$;
(d) $f(x) = \log(x)$, avec $a = 10$ et $n = 2$.

Exercice 20.3
Soient f une fonction réelle et n un nombre naturel, où :

(a) $f(x) = \exp(x)$; (b) $f(x) = \sin(x)$; (c) $f(x) = \cos(x)$; (d) $f(x) = \ln(1+x)$.

i. Dans chacun des cas, écrire le développement de MacLaurin P_n de f d'ordre n.

ii. Dans chacun des cas, considérer $n = 3$ et, en recourant à l'expression du reste de Lagrange R_3 d'ordre 3, déterminer l'erreur maximale commise lorsque f est remplacée par P_3 dans l'intervalle $J = \,]-0{,}1\,;\,0{,}1[$.

Exercice 20.4
Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = 3\,x^4 - 8\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x - 12$.

(a) Écrire le développement limité d'ordre 3 de f autour du nombre 2 ; en d'autres termes, écrire f sous la forme $f(x) = P_3^2(x) + R_3^2(x)$, où R_3^2 est le reste de Lagrange (d'ordre 3) associé au développement de Taylor P_3^2 d'ordre 3 autour de 2.

(b) Déterminer le plus grand intervalle ouvert J centré sur 2, dans lequel l'erreur maximale commise lorsque f est remplacée par P_3^2 n'excède pas 0,1. En d'autres termes, si $J = \,]2-\varepsilon\,;\,2+\varepsilon[\,$, déterminer la plus grande valeur possible de ε telle que l'erreur maximale commise lorsque f est remplacée par P_3^2 dans l'intervalle J n'excède pas 0,1.

(c) Écrire le développement limité d'ordre 4 de f autour de 2. Que vaut le reste de Lagrange R_4^2 (d'ordre 4) associé à P_4^2 ? Que peut-on dire alors de P_4^2 ?

Exercice 20.5

Soient f et g les deux fonctions réelles données, respectivement, par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \exp(x)$.

(a) Calculer la partie principale $P_{f+g,3}$ du développement limité d'ordre 3 autour de 0 de la fonction $f + g$.

(b) Calculer la partie principale $P_{fg,3}$ du développement limité d'ordre 3 autour de 0 de la fonction fg.

(c) Calculer la partie principale $P_{f/g,3}$ du développement limité d'ordre 3 autour de 0 de la fonction $\frac{f}{g}$.

(d) Calculer la partie principale $P_{g\circ f,3}$ du développement limité d'ordre 3 autour de 0 de la fonction $g \circ f$.

Réponse 20.1

(a) $P_3(x) \;=\; 1 - 5\,x + 15\,x^2 - 35\,x^3$;

(b) $P_3(x) \;=\; 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2\,x^2}{25} + \dfrac{6\,x^3}{125}$;

(c) $P_4(x) \;=\; -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$;

(d) $P_7(x) \;=\; 2\,x - \dfrac{4\,x^3}{3} + \dfrac{4\,x^5}{15} - \dfrac{8\,x^7}{315}$;

(e) $P_4(x) \;=\; 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8}$;

(f) $P_4(x) \;=\; x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Réponse 20.2

(a) $P_3^{\frac{\pi}{4}}(x) + R_3^{\frac{\pi}{4}}(x) \;=\; \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \dfrac{\cos(\xi)}{24}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4$,

où ξ est un nombre réel compris strictement entre $\frac{\pi}{4}$ et x ;

(b) $P_2^{\frac{\pi}{4}}(x) + R_2^{\frac{\pi}{4}}(x) \;=\; 1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(1 + \mathrm{tg}^2(\xi)\right)\left(1 + 3\,\mathrm{tg}^2(\xi)\right)\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3$,

où ξ est un nombre réel compris strictement entre $\frac{\pi}{4}$ et x ;

(c) $P_4^{-1}(x) + R_4^{-1}(x) \;=\; -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{(x+1)^2}{2\,\mathrm{e}} + \dfrac{(x+1)^3}{3\,\mathrm{e}} + \dfrac{(x+1)^4}{8\,\mathrm{e}} + \dfrac{(\xi+5)\exp(\xi)\,(x+1)^5}{120}$,

où ξ est un nombre réel compris strictement entre -1 et x ;

(d) $P_2^{10}(x) + R_2^{10}(x) \;=\; 1 + \dfrac{x - 10}{10\ln(10)} - \dfrac{(x-10)^2}{200\ln(10)} + \dfrac{(x-10)^3}{3\,\xi^3\ln(10)}$,

où ξ est un nombre réel compris strictement entre 10 et x .

Réponse 20.3

(a) $P_n(x) \;=\; 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$;

si $n = 3$, l'erreur maximale commise dans $J = \left]-0{,}1\,;\,0{,}1\right[$ est $\mathcal{E}_{\max} \approx 4{,}6 \cdot 10^{-6}$.

(b) $P_{2m+1}(x) \;=\; x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \ldots + (-1)^m\,\dfrac{x^{2m+1}}{(2\,m+1)!} \;=\; \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell\,\frac{x^{2\ell+1}}{(2\,\ell+1)!}$,

où $2\,m + 1 = n$;
si $n = 3$, l'erreur maximale commise dans $J = \left]-0{,}1\,;\,0{,}1\right[$ est $\mathcal{E}_{\max} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-7}$.

(c) $P_{2m}(x) \;=\; 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^m\,\dfrac{x^{2m}}{(2\,m)!} \;=\; \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell\,\frac{x^{2\ell}}{(2\,\ell)!}$,

où $2\,m = n$;
si $n = 3$, l'erreur maximale commise dans $J = \left]-0{,}1\,;\,0{,}1\right[$ est $\mathcal{E}_{\max} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-6}$.

(d) $P_n(x) \,=\, x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\,\dfrac{x^n}{n} \,=\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,\dfrac{x^k}{k}$;

si $n = 3$, l'erreur maximale commise dans $J = \,]-0{,}1\,;\,0{,}1[$ est $\mathcal{E}_{\max} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-5}$.

Réponse 20.4

(a) $P_3^2(x) + R_3^2(x) \,=\, 6 + 27\,(x-2) + 29\,(x-2)^2 + 16\,(x-2)^3 + 3\,(x-2)^4\,.$

(b) $\varepsilon \,=\, \sqrt[4]{\tfrac{1}{30}} \,\approx\, 0{,}43\,.$

(c) $P_4^2(x) + R_4^2(x) \,=\, 6 + 27\,(x-2) + 29\,(x-2)^2 + 16\,(x-2)^3 + 3\,(x-2)^4\,.$

Réponse 20.5

(a) $P_{f+g,3}(x) \,=\, 1 + 2\,x + \dfrac{x^2}{2}\,.$

(b) $P_{fg,3}(x) \,=\, x + x^2 + \dfrac{x^3}{3}\,.$

(c) $P_{f/g,3}(x) \,=\, x - x^2 + \dfrac{x^3}{3}\,.$

(d) $P_{g\circ f,3}(x) \,=\, 1 + x + \dfrac{x^2}{2}\,.$

Applications des développements limités

Exercice 21.1
Dans chacun des cas suivants, donner une valeur approximative de l'intégrale I en effectuant, au préalable, un développement judicieux de MacLaurin. Estimer, en outre, l'erreur maximale commise lors d'un tel calcul. Pour la fonction sinus, on prendra un développement d'ordre 6, pour la fonction cosinus un développement d'ordre 5.

(a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$; (b) $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21.2
À l'aide d'un développement de Taylor, donner une valeur numérique approximative de $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$, avec une précision à trois chiffres significatifs.
Indication : utiliser le résultat de l'exercice 20.1 (b).

Exercice 21.3
Soient $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ et $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles (où $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$), toutes les deux définies dans un intervalle ouvert $I \subset D_1 \cap D_2$. Supposons que I contient un nombre réel a tel que $f(a) = g(a) = 0$ et $f'(a)$ et $g'(a)$ sont définies. À l'aide de développements limités d'ordre 1 de f et g autour de a, démontrer la règle de Bernoulli-L'Hôpital :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Exercice 21.4
À l'aide de développements de Taylor (ou de MacLaurin), calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2\,x)-1}{x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

Exercice 21.5
Prouver, à l'aide des séries de MacLaurin des fonctions exp, sin et cos, la formule d'Euler :

$$\exp(\mathrm{i}\,x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) .$$

Exercice 21.6
Pour chacun des cas ci-dessous :

i. déterminer la série de MacLaurin de la fonction f ;

ii. calculer le domaine de convergence de la série de MacLaurin de f.

(a) $f(x) = \ln(1 + 2\,x)$;

(b) $f(x) = 2^x$.

Réponse 21.1

(a) $I \approx \frac{1703}{1800} \approx 0{,}946\,111$; erreur maximale commise : $\mathcal{H}_{\max} \approx 0{,}000\,028$, soit $0{,}0030\,\%$.

(b) $I \approx \frac{389}{640} \approx 0{,}607\,81$; erreur maximale commise : $\mathcal{H}_{\max} \approx 0{,}000\,19$, soit $0{,}031\,\%$.

Réponse 21.2

Un développement de MacLaurin d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sqrt[5]{1+x}$ suffit ; on obtient alors $\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}09$.

Réponse 21.4

(a) $-\frac{1}{2}$; (b) 2 ; (c) $\frac{1}{2}$.

Réponse 21.6

(a) $P(x) = 2\,x - 2\,x^2 + \dfrac{8\,x^3}{3} - \dfrac{16\,x^4}{4} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(-2\,x)^k}{k}$;

domaine de convergence : $\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

(b) $P(x) = 1 + \big(\ln(2)\big)\,x + \dfrac{\big(\ln(2)\big)^2\,x^2}{2} + \dfrac{\big(\ln(2)\big)^3\,x^3}{6} + \dfrac{\big(\ln(2)\big)^4\,x^4}{24} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(x\ln(2)\big)^k}{k!}$;

domaine de convergence : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Équations différentielles

Exercice 22.1
Une tasse contient du thé qui vient d'être infusé. Initialement, la température du thé est $T_0 = 95\,°\mathrm{C}$. La tasse se trouve dans une pièce dont l'air ambiant a une température $T_{\mathrm{air}} = 20\,°\mathrm{C}$.

(a) Estimer comment évolue la température du thé en fonction du temps qui s'écoule ; esquisser un graphique. À quel instant le thé refroidit-il le plus rapidement ?

(b) Selon la loi de Newton sur le refroidissement, le taux de refroidissement est proportionnel à la différence entre la température du thé et celle de l'air ambiant, pour autant que cette différence ne soit pas trop grande. Écrire une équation (différentielle) traduisant la loi de Newton dans la situation présente.

(c) Résoudre l'équation écrite au point précédent, *i.e.* déterminer la fonction $t \mapsto T(t)$ satisfaisant l'équation obtenue. Représenter graphiquement cette fonction et comparer la figure avec l'esquisse obtenue au point (a). Commenter.

Exercice 22.2
Dans les cas suivants, montrer que l'expression de y donnée satisfait l'équation différentielle correspondante ; C, C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

(a) $y'' - 3\,y' + 2\,y \;=\; 0\,,$ $\qquad y = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(2\,x)\,,$ $\qquad x \in \mathbb{R}\;;$

(b) $2\,x\,y^3 + 3\,x^2\,y^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; 0\,,$ $\qquad y = C\,x^{-\frac{2}{3}}\,,$ $\qquad x \in \mathbb{R}_+^*\;;$

(c) $x^3\,y''' + x^2\,y'' - 3\,x\,y' - 3\,y \;=\; 0\,,$ $\qquad y = C\,x^3\,,$ $\qquad x \in \mathbb{R}\,.$

Exercice 22.3
Soient les équations différentielles suivantes :

(a) $y'(x) \;=\; 3\,x^2\;;$ $\qquad$ (b) $\big(y(x)\big)^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; x^3\;;$

(c) $y'(x)\,\sqrt{4 - x^2} = -x\;;$ $\qquad$ (d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\,\cos\big(y(x)\big) \;=\; x\,.$

Pour chacune de ces équations différentielles, déterminer :

i. sa solution générale ;

ii. la solution maximale satisfaisant la condition $y(0) = 2$.

Exercice 22.4
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $\sec(x)\,\mathrm{d}y - 2\,y\,\mathrm{d}x \;=\; 0$;

(b) $y' \;=\; x - 1 + x\,y - y$;

(c) $(x^3+1)\,y\,y' + x^2\,(1+y^2) \;=\; 0$;

(d) $\exp(y)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \cos^2(x)\,\mathrm{d}y \;=\; 0\,.$

Exercice 22.5
Soient les équations différentielles suivantes :

(a) $y'(x) \;=\; x^3\exp\bigl(-y(x)\bigr)$;

(b) $y'(x) - \bigl(y(x)\bigr)^2 - 4 \;=\; 0\,.$

Pour chacune de ces équations différentielles, déterminer :

i. sa solution générale ;
ii. la solution maximale satisfaisant la condition $y(0)=0$.

Réponse 22.1

(a) Le thé refroidit le plus vite au début, juste après l'infusion.

(b) La température obéit à l'équation différentielle $T'(t) = -k\,\big(T(t) - T_{\text{air}}\big)$, où t est le temps qui s'écoule ($t \geqslant 0$) et k un paramètre réel fixe, strictement positif.

(c) Si $T(0) = T_0 = 95\,°\mathrm{C}$, alors $T(t) = \big(75\exp(-k\,t) + 20\big)\,°\mathrm{C}$.

Réponse 22.3

(a) $y(x) \;=\; x^3 + C\,,$ $\qquad y(x) \;=\; x^3 + 2\,,\;\; x \in \mathbb{R}\;;$

(b) $y(x) \;=\; \sqrt[3]{\tfrac{3}{4}\,x^4 + 3\,C}\,,$ $\qquad y(x) \;=\; \sqrt[3]{\tfrac{3}{4}\,x^4 + 8}\,,\;\; x \in \mathbb{R}\;;$

(c) $y(x) \;=\; \sqrt{4 - x^2} + C\,,$ $\qquad y(x) \;=\; \sqrt{4 - x^2}\,,\;\; x \in \left]-2;\,2\right[\;;$

(d) $y(x) \;=\; \mathrm{Arcsin}\big(\tfrac{x^2}{2} + C\big) + 2\,\pi\,n$ ou $y(x) \;=\; \pi - \mathrm{Arcsin}\big(\tfrac{x^2}{2} + C\big) + 2\,\pi\,n\,,$ où $n \in \mathbb{Z}$.

$\qquad y(x) \;=\; \pi - \mathrm{Arcsin}\big(\tfrac{x^2}{2} + \sin(2)\big)\,,$ $x \in \left]-\sqrt{2 - 2\sin(2)}\,;\; \sqrt{2 - 2\sin(2)}\,\right[\,.$

Réponse 22.4

(a) $y(x) = K\exp\big(2\sin(x)\big)\;;$

(b) $y(x) = K\exp\big(\tfrac{1}{2}\,(x-1)^2\big) - 1\;;$

(c) $y(x) = \pm\sqrt{K\big(x^3+1\big)^{-\frac{2}{3}} - 1}\;;$

(d) $y(x) = -\ln\big(-\tfrac{1}{\cos(x)} - C\big)\,.$

Réponse 22.5

(a) $y(x) = \ln\big(\tfrac{1}{4}\,x^4 + C\big)\,,$ $\qquad y(x) = \ln\big(\tfrac{1}{4}\,x^4 + 1\big)\,,\;\; x \in \mathbb{R}\;;$

(b) $y(x) \;=\; 2\,\mathrm{tg}(2\,x + 2\,C)\,,$ $\qquad y(x) \;=\; 2\,\mathrm{tg}(2\,x + n\,\pi)\,,\;\; x \in \left]-\tfrac{\pi}{4}\,;\,\tfrac{\pi}{4}\right[\,,$ $n \in \mathbb{Z}\,.$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 23.1
Donner l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes. Préciser également s'il s'agit d'une équation différentielle linéaire ou non. Si l'équation en question est linéaire, indiquer si les coefficients sont constants ou non.

(a) $y'(x) + 7\,y(x) \;=\; \exp(2\,x) + \exp(x)$;

(b) $y'(x) \;=\; 3\,x\,\big(y(x)\big)^4$;

(c) $x^3\,y'''(x) + x^2\,y''(x) - 3\,x\,y'(x) - 3\,y(x) \;=\; 0$;

(d) $y^{(98)}(x)\,y'(x) \;=\; 3\,\big(y(x)\big)^2$;

(e) $2\,y(x)\,y'(x)\,y'''(x) \;=\; y'(x)$;

(f) $x^2\,y''(x) - 6\,y(x) \;=\; x^3\ln(x)$.

Exercice 23.2
Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x)+2\,y(x) \;=\; \exp(2\,x)$. Résoudre cette équation :

(a) en recourant à la méthode de la variation de la constante ;

(b) en recourant à la méthode du facteur intégrant.

Quelle conclusion peut-on tirer ?

Exercice 23.3
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes :

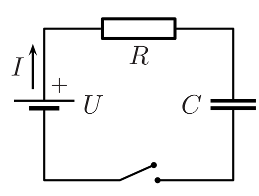
(a) $x\,y' + y + x \;=\; \exp(x)$;

(b) $x^2\,\mathrm{d}y + \big(2\,x\,y - \exp(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$;

(c) $\big(x^2\cos(x) + y\big)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y \;=\; 0$;

(d) $\dfrac{y'}{x} + 2\,y \;=\; 3$.

Exercice 23.4
Un condensateur de capacité C (où $C > 0$ est un paramètre réel) et une résistance R (où $R > 0$ est également un paramètre réel) sont branchés en série à une source de tension U. Un interrupteur permet d'enclencher ou de déclencher le circuit.



De la définition même du courant électrique, ainsi que de celle de la capacité d'un condensateur, il ressort que la charge Q que porte l'une des armatures du condensateur satisfait l'équation différentielle :

$$R\,C\,\dot{Q} + Q \;=\; C\,U\,,$$

où $\dot{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Initialement, l'interrupteur est ouvert et les armatures du condensateur ne sont pas chargées. À l'instant t_0, que l'on suppose être $t_0 = 0$, le circuit est fermé. On peut donc considérer que $Q(0) = 0$.

(a) Déterminer la solution de cette équation différentielle satisfaisant la condition initiale $Q(0) = 0$, dans le cas où la tension U est constante dans le temps : $U(t) = U_0$, où U_0 est un paramètre réel.

(b) Déterminer la solution de cette équation différentielle satisfaisant la condition initiale $Q(0) = 0$, dans le cas où la tension U est une fonction sinusoïdale du temps : $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$, où $U_0 > 0$ est un paramètre réel.

Exercice 23.5

(a) Un réservoir contient initialement un volume V d'eau salée ; la masse initiale de sel dissous dans l'eau est m_0. De l'eau salée, de teneur (*i.e.* de masse par unité de volume) ζ, y est déversée de manière continue, avec un débit volumique δ. Par un trou en bas du réservoir s'écoule de l'eau salée du réservoir, dont le débit volumique vaut également δ. L'eau dans le réservoir est continuellement remuée de sorte que le mélange soit homogène. Déterminer la masse de sel $m(t)$ présente dans le réservoir à l'instant t.

Indication : écrire le taux de variation de la masse $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ en fonction des débits de sel massiques entrant et sortant.

(b) Supposons que le réservoir a un volume $V = 5000\,\mathrm{L}$, qu'il y a $\zeta = 0{,}030\,\mathrm{kg}$ de sel par litre d'eau déversée dans le réservoir, que le débit d'eau salée (à l'entrée comme à la sortie) est $\delta = 25\,\mathrm{L/min}$ et qu'il y a initialement $m_0 = 20\,\mathrm{kg}$ de sel dans le réservoir. Déterminer alors la masse de sel dans le réservoir après $30\,\mathrm{min}$.

Réponse 23.1

(a) Équation différentielle du premier ordre, linéaire et à coefficients constants.

(b) Équation différentielle du premier ordre non linéaire.

(c) Équation différentielle du troisième ordre, linéaire et à coefficients non constants.

(d) Équation différentielle du nonante-huitième ordre non linéaire.

(e) Équation différentielle du troisième ordre non linéaire.

(f) Équation différentielle du deuxième ordre, linéaire et à coefficients non constants.

Réponse 23.2

La solution générale est $y(x) = \frac{1}{4}\exp(2\,x) + C\exp(-2\,x)$, où C est une constante réelle, quelle que soit la méthode utilisée.

Réponse 23.3

(a) $y \;=\; \frac{1}{x}\big(\exp(x) + C\big) - \frac{1}{2}\,x$;

(b) $y \;=\; \frac{1}{x^2}\big(\exp(x) + C\big)$;

(c) $y \;=\; x\,\big(\sin(x) + C\big)$;

(d) $y \;=\; C\exp(-x^2) + \frac{3}{2}$.

Réponse 23.4

(a) $Q(t) \;=\; C\,U_0\left[1 - \exp\!\left(-\dfrac{t}{R\,C}\right)\right].$

(b) $Q(t) \;=\; \dfrac{U_0}{R}\,\dfrac{1}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}\left[\dfrac{1}{R\,C}\sin(\omega\,t) - \omega\cos(\omega\,t) + \omega\exp\!\left(-\dfrac{t}{R\,C}\right)\right].$

Réponse 23.5

(a) $m(t) \;=\; \zeta\,V + (m_0 - \zeta\,V)\exp\!\big(-\frac{\delta}{V}\,t\big)$.

(b) $m(30\,\mathrm{min}) \;\approx\; 38\,\mathrm{kg}$.

Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Exercice 24.1
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $6\,y''(x) - 7\,y'(x) - 3\,y(x) \;=\; 0$; (b) $y''(x) + 4\,y(x) \;=\; 0$;

(c) $4\,y'' + 20\,y' + 25\,y \;=\; 0$; (d) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6\,y \;=\; 0\,.$

Exercice 24.2
Soient $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, homogène et à coefficients constants, et $y_1(x) = C_1 \exp(\lambda_0\,x)$ une solution de cette équation, où C_1 est une constante réelle. Montrer que l'expression $y_2(x) = C_2\,x \exp(\lambda_0\,x)$, où C_2 est une constante réelle quelconque, est également une solution de cette même équation différentielle si et seulement si le discriminant de l'équation caractéristique associée, $a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$, est nul.

Exercice 24.3
Soit L l'opérateur donné par $L = a\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c$, dont l'action sur une fonction réelle $y : I \to \mathbb{R}$ (de la variable x), deux fois dérivable au moins dans un certain intervalle ouvert I, est :

$$L[y] \;=\; \left(a\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c\right)[y] \;=\; a\,y'' + b\,y' + c\,y\;,$$

où a, b et c sont trois coefficients réels fixés. Montrer que L est linéaire, *i.e.* démontrer que :

- $L[C\,y] = C\,L[y]$,
- $L[y_1 \pm y_2] = L[y_1] \pm L[y_2]$,

où $y, y_1, y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles de x, deux fois dérivables (au moins) dans I, et C une constante réelle.

Exercice 24.4
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de la variation des constantes :

(a) $y''(x) + y(x) \;=\; \sec(x)$; (b) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \exp(-3\,x)\,.$

Exercice 24.5
Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$y''(x) - y(x) = 3\exp(2\,x)\,.$$

Résoudre cette équation différentielle :

(a) en utilisant la méthode de la variation des constantes ;

(b) en utilisant la méthode de l'*Ansatz*.

Quelle conclusion peut-on tirer ?

Exercice 24.6
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de l'*Ansatz*.

(a) $y''(x) + y(x) = \sin(5\,x)$; (b) $y'' + 6\,y' + 9\,y = \exp(4\,x)$.

Exercice 24.7
Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes en utilisant la méthode de l'*Ansatz*.

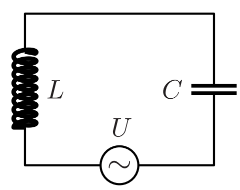
(a) $y''(x) + 6\,y'(x) + 8\,y(x) = (x+3)\exp(-2\,x)$;

(b) $y''(x) + 9\,y(x) = 4\cos(3\,x)$;

(c) $y'' + 3\,y' - 4\,y = x\exp(-x)$;

(d) $2\,y'' + 8\,y' + 8\,y = 12\,x\exp(-2\,x)$.

Exercice 24.8
Un condensateur de capacité C (où $C > 0$ est un paramètre réel) et une bobine de coefficient d'auto-induction L (où $L > 0$ est également un paramètre réel) sont branchés en série à une source qui délivre une tension alternative $U(t) = U_0 \sin(\omega\,t)$, où $U_0 > 0$ et $\omega > 0$ sont deux paramètres réels.



De la loi d'induction électromagnétique, ainsi que des définitions du courant électrique et de la capacité d'un condensateur, il ressort que la charge Q que porte l'une des armatures du condensateur satisfait l'équation différentielle :

$$L\,C\,\ddot{Q} + Q = C\,U_0 \sin(\omega\,t)\,,$$

où $\ddot{Q} = \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2}$. À l'instant t_0, que l'on suppose être $t_0 = 0$, la charge Q est égale à une certaine valeur $Q_0 > 0$ et le courant dans le circuit est nul ; ce qui revient à écrire

$Q(0) = Q_0$ et $I(0) = \dot{Q}(0) = 0$, où $\dot{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ (vu que $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, par définition du courant électrique).

(a) Déterminer la solution de cette équation différentielle qui satisfait les conditions initiales $Q(0) = Q_0$ et $\dot{Q}(0) = 0$, dans le cas où $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

(b) Déterminer la solution de cette équation différentielle qui satisfait les conditions initiales $Q(0) = Q_0$ et $\dot{Q}(0) = 0$, dans le cas où $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Réponses 24.1

(a) $y(x) = C_1 \exp\big(-\frac{1}{3}\,x\big) + C_2 \exp\big(\frac{3}{2}\,x\big)$;

(b) $y(x) = C_1 \cos(2\,x) + C_2 \sin(2\,x)$;

(c) $y(x) = (C_1 + C_2\,x) \exp\big(-\frac{5}{2}\,x\big)$;

(d) $y(x) = \exp(-x)\Big(C_1 \cos\big(\sqrt{5}\,x\big) + C_2 \sin\big(\sqrt{5}\,x\big)\Big)$.

Réponse 24.4

(a) $y(x) = \big(C_1 + \ln|\cos(x)|\big)\cos(x) + (C_2 + x)\sin(x)$;

(b) $y(x) = C_1 + \big(C_2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\,x\big)\exp(-3\,x) = C_1 + \Big(\tilde{C}_2 - \frac{1}{3}\,x\Big)\exp(-3\,x)$.

Réponse 24.5

$y(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 \exp(x) + \exp(2\,x)$.

Réponse 24.6

(a) $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{24}\sin(5\,x)$.

(b) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\exp(-3\,x) + \frac{1}{49}\exp(4\,x)$.

Réponse 24.7

(a) $y(x) = C_1 \exp(-4\,x) + \big(C_2 + \frac{5}{4}\,x + \frac{1}{4}\,x^2\big)\exp(-2\,x)$;

(b) $y(x) = C_1 \cos(3\,x) + \big(C_2 + \frac{2}{3}\,x\big)\sin(3\,x)$;

(c) $y(x) = C_1 \exp(-4\,x) + C_2 \exp(x) - \frac{1}{36}\,(1 + 6\,x)\exp(-x)$;

(d) $y(x) = (C_1 + C_2\,x + 2\,x^3)\exp(-2\,x)$.

Réponse 24.8

(a) $Q(t) = Q_0 \cos\Big(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\Big) - \frac{C\,U_0\,\omega\,\sqrt{L\,C}}{1-L\,C\,\omega^2}\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\Big) + \frac{C\,U_0}{1-L\,C\,\omega^2}\sin(\omega\,t)$.

(b) $Q(t) = \big(Q_0 - \frac{C\,U_0}{2\,\sqrt{L\,C}}\,t\big)\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\Big) + \frac{C\,U_0}{2}\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\,t\Big)$.

Optimisation

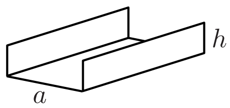
Exercice 25.1
Dans les cas suivants, déterminer les points stationnaires de la fonction réelle f donnée.

(a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$;
(b) $f(w) = w^4 - 32w$;
(c) $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$;
(d) $f(t) = t^2\sqrt[3]{2t - 5}$;
(e) $f(x) = \sec(x^2 + 1)$;
(f) $f(x) = 8\cos^3(x) - 3\sin(2x) - 6x$.

Exercice 25.2
Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 4$. Dans chacun des intervalles suivants, déterminer l'éventuel point où f atteint son maximum, l'éventuel point où f atteint son minimum, le(s) éventuel(s) point(s) où f possède un maximum local, ainsi que le(s) éventuel(s) point(s) où f possède un minimum local.

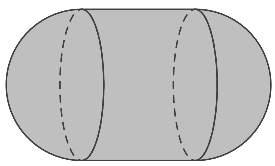
(a) $[0; 9]$;
(b) $]1; 2]$;
(c) $]-7; 2[$;
(d) $[0; 1[$.

Exercice 25.3
On prend une longue bande de zinc, dont la largeur est $\ell = 32\,\text{cm}$, et on la plie de sorte à former une gouttière comme représentée sur la figure ci-contre. Déterminer la hauteur h que doivent avoir les bords pour que la capacité de la gouttière soit maximale.

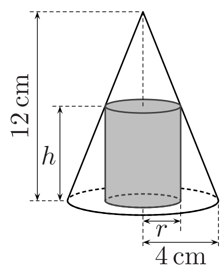


$a = 32\,\text{cm} - 2h$

Exercice 25.4
On projette de construire un réservoir de stockage pour du propane. Le réservoir est censé avoir la forme d'un cylindre droit terminé à chaque extrémité par deux hémisphères. Le coût de la construction au mètre carré est deux fois plus élevé pour les parties sphériques que pour la partie cylindrique. Le volume souhaité est $V = \frac{\pi}{4}\,\text{m}^3$. Déterminer alors les dimensions du réservoir qui minimisent le coût de construction et qui donnent le volume V.

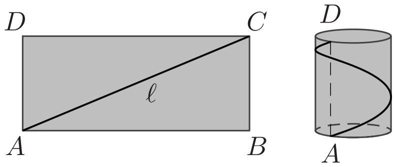


Exercice 25.5
On considère un cône droit dont la hauteur vaut 12 cm et le rayon de la base 4 cm. Parmi tous les cylindres droits inscrits dans ce cône et dont les axes coïncident, trouver celui dont le volume est maximal ; donner ses dimensions et son volume.



Exercice 25.6

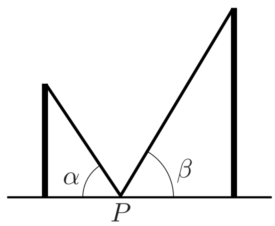
On enroule un rectangle, en reliant les côtés AD et BC (*cf.* figure ci-contre), de sorte à former un cylindre. Afin de le rigidifier, on place un fil de fer de longueur ℓ le long de la diagonale AC du rectangle. Il est supposé que ℓ est fixe, alors que les dimensions du rectangle peuvent varier : selon l'angle d'élévation $\theta = \measuredangle BAC$, le rectangle est plus ou moins long et haut. Déterminer θ pour lequel le volume du cylindre généré est maximal.



Exercice 25.7

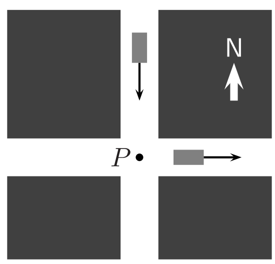
Deux mâts verticaux, chacun ayant une hauteur fixe, sont à une distance L l'un de l'autre. Ils sont arrimés avec une corde unique qui va du sommet du premier mât au sommet du deuxième, en passant par un point P situé sur le pont, entre les mâts. Montrer que la corde est la plus courte lorsque les angles α et β sont égaux (voir figure ci-contre).

Indication : Chercher une expression de la longueur de la corde qui soit une fonction de la distance x entre le mât de gauche et le point P (et non une fonction de l'angle α ou de l'angle β).



Exercice 25.8

Dans une ville, deux rues se coupent à angle droit en un point P ; l'une a la direction nord-sud, l'autre la direction est-ouest. Une voiture, venant de l'ouest et ayant une vitesse constante de 20 km/h, passe en P à 10 h 00. Au même instant, une autre voiture, située à 2,0 km au nord du croisement se dirige vers le sud à la vitesse constante de 50 km/h. Déterminer l'instant où les deux voitures sont les plus proches l'une de l'autre ; calculer la distance séparant les deux véhicules à cet instant.



Réponse 25.1

(a) $x = \frac{3}{8}$; (b) $w = 2$; (c) aucun ;

(d) $t \in \left\{0\,;\ \frac{15}{7}\right\}$; (e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{k\,\pi - 1}\,,\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(f) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ ou } x = -\frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Réponse 25.2

(a) Dans $[0;\,9]$, f atteint son maximum en $x = 9$ et son minimum en $x = 1$; le minimum peut être vu comme un minimum local.

(b) Dans $]1;\,2]$, f atteint son maximum en $x = 2$ et n'atteint pas de minimum.

(c) Dans $]-7;\,2[$, f atteint son minimum en $x = 1$; le minimum peut être vu comme un minimum local et n'atteint pas de maximum.

(d) Dans $[0;\,1[$, f atteint son maximum en $x = 0$ et n'atteint pas de minimum.

Réponse 25.3

$h = 8\,\text{cm}$.

Réponse 25.4

Rayon des hémisphères : $r = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}\,\text{m}$. Longueur du cylindre : $\ell = \sqrt[3]{3}\,\text{m}$.

Réponse 25.5

Le volume V du cylindre est maximal lorsque $r = \frac{8}{3}\,\text{cm}$. Le volume correspondant vaut alors $V = \frac{256\,\pi}{9}\,\text{cm}^3$.

Réponse 25.6

$\theta \approx 35{,}26° \approx 35°$.

Réponse 25.8

Les deux voitures sont les plus proches $\frac{1}{29}\,\text{h}$ plus tard, c'est-à-dire environ 4 secondes après 10 h 02. La distance qui les sépare à cet instant vaut alors 0,74 km environ.

Extrema et points d'inflexion

Exercice 26.1
Dans les cas suivants, trouver les éventuels points de l'axe x où la fonction f donnée atteint un extremum local, en recourant aux expressions de ses dérivées première et d'ordre supérieur.

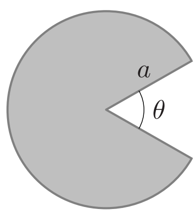
(a) $f(x) = x^3 - 4\,x$;
(b) $f(x) = \frac{1}{2}\,x - \sin(x)$;
(c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
(d) $f(x) = 2\,\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}^2(x)$;
(e) $f(x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 + 6\,x + 16$;
(f) $f(x) = x^5 + 2\,x^4 + x^3$.

Exercice 26.2
Dans les cas suivants, déterminer les éventuels extrema locaux de la fonction f donnée, en recourant aux expressions de ses dérivées première et d'ordre supérieur. Déterminer également les intervalles dans lesquels la fonction est concave, convexe. Calculer enfin les abscisses des éventuels points d'inflexion, puis tracer le graphe de f.

(a) $f(x) = x^3 - 2\,x^2 + x + 1$;
(b) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$;
(c) $f(x) = 2\,x^6 - 6\,x^4$;
(d) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$.

Exercice 26.3
On aimerait construire une boîte sans couvercle, en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, de volume $V = 4\,\mathrm{dm}^3$. Déterminer les dimensions de cette boîte qui minimisent la quantité de matériau nécessaire à sa construction.

Exercice 26.4
On fabrique un cornet en papier de forme conique en rejoignant les bords droits d'un disque de rayon a, amputé d'un secteur circulaire. Déterminer l'angle au centre θ du secteur circulaire découpé pour lequel le volume du cornet obtenu est maximal.



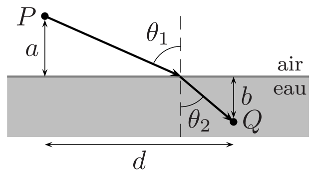
Exercice 26.5
Selon le *principe de Fermat*, la lumière se propage d'un point à un autre en empruntant le chemin qui requiert le moins de temps possible. Une conséquence de ce principe est que la lumière se propage en ligne droite dans un milieu transparent, *homogène* et *isotrope*. Dans l'air, qui est un milieu transparent, homogène et isotrope, la vitesse de la lumière v_1 est supérieure à la vitesse de la lumière v_2 dans l'eau, qui est également un milieu transparent, homogène et isotrope.

Montrer que, si la lumière se propage d'un point P dans l'air à un point Q dans l'eau, elle suit une trajectoire constituée de deux lignes droites, telles que :

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2}\,,$$

où θ_1 et θ_2 sont deux angles comme indiqué sur la figure ci-dessous ; ces angles sont appelés *angle d'incidence* et *angle de réfraction*, respectivement. Il est supposé ici que l'interface air-eau est plane.

Indication : Écrire les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des trajets dans les premier et deuxième milieux, respectivement, en fonction de a, b, d, θ_1 et θ_2. En déduire une expression pour la durée du trajet total.



Réponse 26.1

(a) Maximum local en $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; minimum local en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(b) Maxima locaux en $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, où $k \in \mathbb{Z}$; minima locaux en $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Maximum local en $x = 0$.

(d) Maxima locaux en $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Pas d'extremum local (en particulier, pas d'extremum en $x = -1$).

(f) Maximum local en $x = -1$; minimum local en $x = -\frac{3}{5}$; pas d'extremum local en $x = 0$.

Réponse 26.2

(a) $\left(\frac{1}{3}\,;\ \frac{31}{27}\right)$ sont les coordonnées de l'unique maximum local de f ;
$(1;\ 1)$ sont les coordonnées de l'unique minimum local de f ;
f est concave dans $\left]-\infty\,;\ \frac{2}{3}\right[$ et convexe dans $\left]\frac{2}{3}\,;\ \infty\right[$;
f possède un unique point d'inflexion, en $x = \frac{2}{3}$.

(b) $\left(0\,;\ \sqrt{2}\right)$ sont les coordonnées de l'unique minimum local de f ;
f est convexe dans $\mathbb{R}$ et ne possède donc aucun point d'inflexion.

(c) $\left(-\sqrt{2}\,;\ -8\right)$ et $\left(\sqrt{2}\,;\ -8\right)$ sont les coordonnées des minima locaux de f ;
$(0;\ 0)$ sont les coordonnées de l'unique maximum local de f ;
f est convexe dans $\left]-\infty\,;\ -\sqrt{\frac{6}{5}}\right[$, ainsi que dans $\left]\sqrt{\frac{6}{5}}\,;\ \infty\right[$; elle est concave dans $\left]-\sqrt{\frac{6}{5}}\,;\ \sqrt{\frac{6}{5}}\right[$; f possède deux points d'inflexion, en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ et $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

(d) f ne possède aucun extremum local ;
f est convexe dans $]-\infty;\ 0[$ et concave dans $]0;\ \infty[$;
f possède un unique point d'inflexion, en $x = 0$.

Réponse 26.3

La boîte a une hauteur de $1\,\mathrm{dm}$ et une base carrée dont le côté vaut $2\,\mathrm{dm}$.

Réponse 26.4

$\theta = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Étude d'une fonction

Exercice 27.1
Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition et les éventuels zéros de la fonction f donnée. Déterminer également les éventuels points de l'axe x où f admet un extremum (minimum ou maximum) local, ainsi que l'abscisse (*i.e.* la coordonnée x) des éventuels points d'inflexion du graphe de f. Écrire enfin les équations des éventuelles asymptotes de f.

(a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x+3}$;

(b) $f(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = x^2 \exp(-x)$;

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Exercice 27.2
Étudier la fonction f donnée par :

$$f(x) \;=\; \sqrt{x^2+4\,x+6}\;.$$

Exercice 27.3
Étudier la fonction f donnée par :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\;.$$

Exercice 27.4
Lire l'illustration 7.5.2 (*cf.* section 7.5, chapitre 7).

Réponse 27.1

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; zéros en $x_1 = -2$ et en $x_2 = 2$;
$f'(x) = -\frac{x^2+6\,x+4}{(x+3)^2}$; minimum local en $x_3 = -3-\sqrt{5}$, maximum local en $x_4 = -3+\sqrt{5}$;
$f''(x) = -\frac{10}{(x+3)^3}$; aucun point d'inflexion ;
asymptote verticale d'équation $x = -3$; asymptote oblique d'équation $y = -x+3$.

(b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$; aucun zéro ;
$f'(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x^3}}$; minimum local en $x_1 = 4$;
$f''(x) = \frac{-x+12}{4\sqrt{x^5}}$; point d'inflexion en $x_2 = 12$;
asymptote verticale d'équation $x = 0$; pas d'asymptote horizontale ni oblique.

(c) $D_f = \mathbb{R}$; zéro en $x_1 = 0$;
$f'(x) = -x\,(x-2)\exp(-x)$; minimum local en $x_2 = 0$, maximum local en $x_3 = 2$;
$f''(x) = (x^2-4\,x+2)\exp(-x)$; points d'inflexion en $x_4 = 2-\sqrt{2}$ et en $x_5 = 2+\sqrt{2}$;
pas d'asymptote verticale ; asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

(d) $D_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0;\,1\}$; aucun zéro ;
$f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$; minimum local en $x_1 = \mathrm{e}$;
$f''(x) = \frac{2-\ln(x)}{x\,(\ln(x))^3}$; point d'inflexion en $x_2 = \mathrm{e}^2$;
asymptote verticale d'équation $x = 1$; pas d'asymptote horizontale ni oblique.

Réponse 27.2

i. $D_f = \mathbb{R}$.

ii. f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

iii. f n'a pas de zéro.

iv. f ne possède aucune discontinuité. Elle admet une asymptote oblique à droite d'équation $y = x+2$ et une asymptote oblique à gauche d'équation $y = -x-2$.

v. $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4\,x+6}}$; f admet un minimum local en $x_1 = -2$.

vi. $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{(x^2+4\,x+6)^3}}$; f ne possède aucun point d'inflexion.

viii. f possède un axe de symétrie vertical d'équation $x = -2$.

Réponse 27.3

i. $D_f = \mathbb{R}^*$.

ii. f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

iii. f n'a pas de zéro.

iv. f est discontinue en $x = 0$ (discontinuité asymptotique). Elle admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale, à droite et à gauche, d'équation $y = 0$.

v. $f'(x) = -\frac{2\,x+1}{x^4} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$; f admet un maximum local en $x_1 = -\frac{1}{2}$.

vi. $f''(x) = \frac{6\,x^2+6\,x+1}{x^6} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$; f possède deux points d'inflexion, en $x_2 = \frac{1}{6}\left(-3-\sqrt{3}\right) \approx -0{,}79$ et en $x_3 = \frac{1}{6}\left(-3+\sqrt{3}\right) \approx -0{,}21$.

Aires de surfaces planes

Exercice 28.1
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Tracer, dans $\mathbb{R}^2$, l'hyperbole donnée par l'équation $x\,y = a^2$, où a est un paramètre réel non nul. Déterminer ensuite l'aire A de la surface finie délimitée par cette hyperbole, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = 2\,a$.

(b) Calculer l'aire A du domaine fini de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équations $y^2 = 9\,x$ et $y = 3\,x$. Au besoin, tracer, dans $\mathbb{R}^2$, ces deux courbes pour mieux cerner la situation.

Exercice 28.2
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Trouver l'aire A de la surface finie de $\mathbb{R}^2$, délimitée par les axes Ox, Oy, la droite d'équation $x = a$ et la courbe d'équation :

$$y = f(x) \qquad \text{où :} \qquad f(x) \;=\; a\cosh\Big(\frac{x}{a}\Big) \quad \left(= \;\frac{a}{2}\left[\exp\Big(\frac{x}{a}\Big) + \exp\Big(-\frac{x}{a}\Big)\right] \right),$$

a étant un paramètre réel strictement positif. Au besoin, faire un dessin illustrant la situation.

(b) Trouver l'aire A du domaine fini de $\mathbb{R}^2$ compris entre les paraboles d'équations $y^2 = a\,x$ et $y = a\,x^2$. Au besoin, faire un dessin illustrant la situation.

Exercice 28.3
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

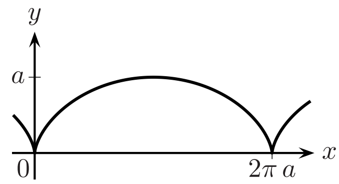
(a) Calculer l'aire du domaine fini délimité par la courbe d'équation $y = \exp(-a\,x)\sin(a\,x)$, où a est un paramètre réel strictement positif, et le segment de l'axe Ox compris entre $x_0 = 0$ et x_1, où x_1 est le plus petit nombre réel strictement positif pour lequel $\exp(-a\,x_1)\sin(a\,x_1) = 0$.

(b) Calculer l'aire de la boucle générée par la courbe d'équation $9\,a\,y^2 = x\,(3\,a - x)^2$, où a est un paramètre réel strictement positif.

Exercice 28.4
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Calculer l'aire A du domaine fini de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x = 7$ et $y = |x^2 - 6\,x + 5|$.

Exercice 28.5

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la courbe décrite par les équations paramétriques :



$$\begin{cases} x = a\big(t - \sin(t)\big) \\ y = a\big(1 - \cos(t)\big) \end{cases},$$

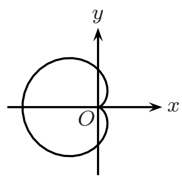
où a est un paramètre réel strictement positif et $t \in \mathbb{R}$. Une telle courbe porte le nom de *cycloïde* ; elle a la forme d'une arche qui se répète périodiquement.

(a) Calculer l'aire A du domaine fini délimité par l'axe Ox et une arche de la cycloïde décrite ci-dessus.

(b) À l'aide du théorème de la valeur moyenne, calculer la valeur moyenne $\bar{y}$ de y sur l'arche de cycloïde considérée au point précédent.

Exercice 28.6

Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni d'un système de coordonnées polaires, caractérisé par les variables r et θ. Considérons l'équation polaire $r = a\big(1 - \cos(\theta)\big)$, où a est un paramètre réel strictement positif, et $\theta \in [0; 2\pi[$. Une telle équation décrit une courbe appelée *cardioïde* ; elle délimite un domaine fini dans $\mathbb{R}^2$. Calculer l'aire A de ce domaine fini.



Réponse 28.1

(a) $A = a^2 \ln(2)$.

(b) $A = \frac{1}{2}$.

Réponse 28.2

(a) $A = a^2 \sinh(1) = \frac{1}{2}\, a^2 \,(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})$.

(b) $A = \frac{1}{3}$.

Réponse 28.3

(a) $A = \frac{1}{2\,a}\big(\exp(-\pi) + 1\big)$.

(b) $A = \frac{8\sqrt{3}}{5}\, a^2$.

Réponse 28.4

$A = \frac{71}{3}$.

Réponse 28.5

(a) $A = 3\,\pi\, a^2$.

(b) $\bar{y} = \frac{3}{2}\, a$.

Réponse 28.6

$A = \frac{3}{2}\,\pi\, a^2$.

Volumes de solides de révolution

Dans les exercices qui suivent, on considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ comme étant le plan formé par les axes Ox et Oy appartenant au système de coordonnées cartésiennes canonique $Oxyz$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Oxy constitue alors le système de coordonnées cartésiennes canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 29.1

Soit, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où a et b sont deux nombres réels, strictement positifs. On appelle ellipsoïde le solide dans $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner l'ellipse donnée autour de l'axe Ox ou autour de l'axe Oy.

(a) Calculer le volume V_1 de l'ellipsoïde obtenu par rotation de l'ellipse donnée autour de l'axe Ox.

(b) Calculer le volume V_2 de l'ellipsoïde obtenu par rotation de l'ellipse donnée autour de l'axe Oy.

Exercice 29.2

Soit, dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), le segment de droite reliant l'origine O (du système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy de $\mathbb{R}^2$) au point $P(a;\, b)$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs. Calculer le volume du cône obtenu en faisant tourner ce segment de droite autour de l'axe Oy.

Exercice 29.3

Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy.

(a) Calculer le volume V du solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équations $f(x) = -2\,x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 1$. Réaliser, au besoin, un croquis de la situation pour mieux la cerner.

(b) Calculer le volume V du solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation, autour de la droite d'équation $y = 2$, de la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 4$. Réaliser, au besoin, un croquis de la situation pour mieux la cerner.

Exercice 29.4
Soit, dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), le cercle d'équation $x^2+(y-b)^2 = a^2$, où a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Calculer le volume V du solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation autour de l'axe Ox de ce cercle ; un tel solide porte le nom de *tore*. Réaliser, au besoin, un croquis de la situation pour mieux la cerner.

Exercice 29.5
Soit, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy), la cycloïde donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\big(t - \sin(t)\big) \\ y = a\big(1 - \cos(t)\big) \end{cases},$$

où a est un paramètre réel strictement positif et $t \in \mathbb{R}$. Calculer le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de l'arche de cette cycloïde délimitée par les points $O(0;\, 0)$ et $P(2\,\pi\, a\,;\, 0)$.

Exercice 29.6
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ la surface plane finie, supposée homogène, délimitée par les courbes d'équations $y^2 = x$ et $-8\,y = x^2$. Déterminer les coordonnées du centre de masse C de S.

(b) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le solide supposé homogène, résultant de la rotation autour de l'axe Ox de la surface finie $S \subset \mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 9$. Déterminer les coordonnées du centre de masse C de ce solide.

Réponse 29.1

(a) $V = \dfrac{4}{3}\,\pi\,a\,b^2\,.$

(b) $V = \dfrac{4}{3}\,\pi\,a^2\,b\,.$

Réponse 29.2

$V = \dfrac{1}{3}\,\pi\,a^2\,b\,.$

Réponse 29.3

(a) $V = \dfrac{16}{5}\,\pi\,.$

(b) $V = \dfrac{40\,\pi}{3}\,.$

Réponse 29.4

$V = 2\,\pi^2\,a^2\,b\,.$

Réponse 29.5

$V = 5\,\pi^2\,a^3\,.$

Réponse 29.6

(a) $C\big(\tfrac{9}{5}\,;\,-\tfrac{9}{10}\big)\,.$

(b) $C(6;\,0;\,0)\,.$

Longueurs de courbes
Aires de surfaces de révolution

Exercice 30.1
Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique.

(a) Calculer la longueur du morceau de courbe d'équation $y = f(x)$, où $f(x) = 2\sqrt{x^3}$, entre les points $A(1;\, 2)$ et $B(2\,;\, 4\sqrt{2}\,)$.

(b) Soit la courbe d'équation $y = f(x)$, où $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, a étant un paramètre réel strictement positif. Calculer la longueur du morceau de cette courbe compris entre les points $A\big(-a\,;\, a\cosh(1)\big)$ et $B\big(a\,;\, a\cosh(1)\big)$.

Exercice 30.2

(a) Soient le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et Oxy son système de coordonnées cartésiennes canonique. Soit aussi $\mathcal{C}$ la cycloïde donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = a\,\big(t - \sin(t)\big) \\ y(t) = a\,\big(1 - \cos(t)\big) \end{cases},$$

où a est un paramètre réel, strictement positif, et $t \in \mathbb{R}$ (*cf.* exercice 28.5). Calculer la longueur d'une arche de cette cycloïde.

(b) Soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (muni de son système de coordonnées cartésiennes canonique Oxy) ; soit aussi le système de coordonnées polaires, caractérisé par les variables r et θ. Soit encore, dans $\mathbb{R}^2$, la cardioïde d'équation polaire $r = a\,\big(1 - \cos(\theta)\big)$, où a est un paramètre réel strictement positif et $t \in [0;\, 2\pi[$ (*cf.* exercice 28.6). Noter que cette courbe est une ligne qui se referme sur elle-même, en ce sens que $r(0) = r(2\pi)$. Calculer la longueur de cette ligne.

Exercice 30.3
Soient l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $Oxyz$ son système de coordonnées cartésiennes canonique. Le plan généré par les axes Ox et Oy peut être identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$; Oxy constitue alors le système de coordonnées cartésiennes canonique de ce plan $\mathbb{R}^2$.

(a) Soit, dans $\mathbb{R}^2$, le segment de droite d'équation $y = 2x$, où $x \in [0;\, 2]$. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de ce segment autour :

  i. de l'axe Ox,
  ii. de l'axe Oy.

(b) Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue en faisant tourner le morceau de parabole *couchée* d'équation $y = 2\sqrt{a\,x}$, où $x \in [0\,;\,3\,a]$, autour de l'axe Ox, a étant un nombre réel strictement positif.

(c) Calculer l'aire de la surface du tore obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox le cercle, dans $\mathbb{R}^2$, ayant pour équation $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, où a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$ (*cf.* exercice 29.4).

Exercice 30.4

Soient l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $Oxyz$ son système de coordonnées cartésiennes canonique. Le plan généré par les axes Ox et Oy peut être identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$; Oxy constitue alors le système de coordonnées cartésiennes canonique de ce plan $\mathbb{R}^2$. Soit aussi, dans $\mathbb{R}^2$, l'arche de cycloïde $\mathcal{C}$ (*cf.* exercice 30.2 (a)) donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\big(t - \sin(t)\big) \\ y &=& a\big(1 - \cos(t)\big) \end{array}\right. ,$$

où a est un paramètre réel strictement positif et $t \in [0;\,2\,\pi]$. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de cette arche autour de la tangente à son sommet.

Réponse 30.1

(a) $\ell = \frac{2}{27}\left(\sqrt{6859} - \sqrt{1000}\,\right)$.

(b) $\ell = 2\,a\sinh(1)$.

Réponse 30.2

(a) $\ell = 8\,a$.

(b) $\ell = 8\,a$.

Réponse 30.3

(a) i. $A = 8\,\pi\,\sqrt{5}$, ii. $A = 4\,\pi\,\sqrt{5}$.

(b) $A = \frac{56}{3}\,\pi\,a^2$.

(c) $A = 4\,\pi^2\,a\,b$.

Réponse 30.4

$A = \frac{32}{3}\,\pi\,a^2$.

Bibliographie

[1] J. Douchet & B. Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral 1, 2 & 3*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1994.

[2] J.-P. Collette, *Histoire des mathématiques 1 & 2*, Montréal, Éditions du renouveau pédagogique, 1979.

[3] E. W. Swokowski, *Analyse*, Bruxelles, Éditions DeBoeck Université, 1991.

[4] J. Stewart, *Analyse, concepts et contextes, volume 1, Fonctions d'une variable*, Bruxelles, Éditions DeBoeck Université, 2004.

[5] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1982.

[6] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 1985.

[7] *The Works of Archimedes*, T. L. Heath, Mineola (éd.), Dover Publications, Inc., 2002.

[8] Nicole Oresme, *Le Livre du ciel et du monde*, A. D. Menut & A. J. Denomy (éd.), The University of Wisconsin Press, 1968.

[9] J. Hamel & L. Amyotte, *Calcul différentiel*, Montréal, Éditions du renouveau pédagogique, 2007.

[10] L. Amyotte, *Calcul intégral*, Montréal, Éditions du renouveau pédagogique, 2008.

[11] E. W. Swokowski & J. A. Cole, *Algèbre*, Lausanne, Loisirs et Pédagogie, 2006.

[12] S. Balac & F. Sturm, *Algèbre et analyse*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.

[13] Ch. Gruber, *Mécanique générale*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1988.

[14] H. Benson, *Physique 3 : Ondes, optique et physique moderne*, Montréal, Éditions du renouveau pédagogique, 2009.

[15] R. Taton, *Calcul infinitésimal : Histoire (Encyclopædia Universalis - Corpus 4)*, pp. 748-754, éditeur à Paris, 1993.

[16] Commission romande de mathématique, de physique et de chimie, *Formulaires et tables*, Genève, Éditions du Tricorne, 1992.

[17] Encyclopædia Universalis en ligne, www.encyclopaedia-universalis.fr

[18] Encyclopédie Larousse en ligne, www.larousse.fr/encyclopedie

[19] Wikipédia, L'encyclopédie libre, fr.wikipedia.org

Index

Remerciements

Par ces quelques lignes, l'auteur tient à remercier toute personne ayant contribué à la publication du présent ouvrage. En particulier :

- Prof. Robert Dalang (directeur de la collection de mathématiques aux Presses polytechniques et universitaires romandes), pour ses remarques pertinentes et ses précieux conseils,
- les experts impliqués, pour la lecture et la critique du manuscrit,
- l'équipe des Presses polytechniques et universitaires romandes, pour l'excellent travail d'édition,
- les collègues de l'école HE-Arc Ingénierie, pour les échanges et leur soutien,
- la direction de l'école HE-Arc Ingénierie, pour son soutien, notamment financier.

Crédits iconographiques

- pp. 65, 67, 71, 74, 108 : Graphiques construits à partir de données fournies par Météosuisse.
- p. 292 :
  - © Brice2000, CC BY-SA 4.0 (haut)
  - © Brice2000, CC BY-SA 4.0 (bas)
- p. 466 : © Theo Lauber/CC BY-SA 4.0
- p. 467 :
  - © Karl Oppolzer, CC BY-SA 3.0 (gauche)
  - © Matthias Ott from Germany, CC BY 2.0 (centre)
  - © Wedesoft, Public domain, via Wikimedia Commons (droite)