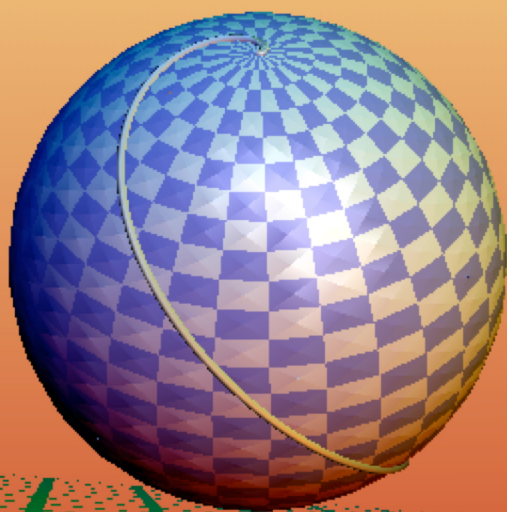


Enseignement des mathématiques

Cours de géométrie

2^e édition

Marc Troyanov



EPFL PRESS

Cours de géométrie

2^e édition

Ce cours d'introduction à la géométrie propose une vision et une pensée solides ainsi qu'une initiation aux applications de la géométrie ■ Rigoureuse dans son approche, la matière est exposée sous forme de principes premiers, dont tous les théorèmes sont démontrés. L'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie est par ailleurs justifiée mathématiquement et non uniquement de façon heuristique ■ L'exposé débute par une fondation axiomatique de l'espace euclidien, avant que ne soient prouvées les propriétés algébriques des vecteurs. Une présentation complète de la géométrie vectorielle ainsi qu'une introduction à la géométrie différentielle complètent l'ouvrage. Les notions étudiées sont illustrées d'exemples et d'applications concrètes, et chaque chapitre se clôt par de nombreux exercices ■ Ce manuel est principalement destiné aux étudiants de premier cycle en sciences et sciences de l'ingénieur, et constitue aussi une solide référence pour les physiciens et les mathématiciens.

Marc Troyanov effectue ses études à Genève où il obtient son doctorat en mathématiques en 1987. Il passe ensuite deux années de postdoc à Paris où il collabore avec l'École polytechnique et l'Université d'Orsay, dont il obtient une habilitation. Il est ensuite visiting professor à Salt Lake City, puis professeur-assistant à l'Université du Québec à Montréal et il est nommé à l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) en 1993. Il enseigne la géométrie et l'analyse. Son domaine de recherche est la géométrie différentielle.»

Cours de géométrie

Marc Troyanov

Cours de géométrie

2^e édition

EPFL PRESS

L'auteur et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) pour le soutien apporté à la publication de cet ouvrage.

La collection «Enseignement des mathématiques» est dirigée par le professeur Robert C. Dalang

Direction générale : Lucas Giossi

Directions éditoriale et commerciale : Sylvain Collette et May Yang

Responsable de production : Christophe Borlat

Éditorial : Alice Micheau-Thiébaud et Jean Rime

Graphisme : Kim Nanette

Promotion et diffusion : Manon Reber

Comptabilité : Daniela Castan

Logistique : Émile Razafimanjaka

EPFL Press est une maison d'édition de la Fondation des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), qui publie principalement les travaux d'enseignement et de recherche de l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), des universités et des hautes écoles.

PPUR, EPFL-Rolex Learning Center, Station 20, CH-1015 Lausanne,
info@epflpress.org, tél.: +41 21 693 21 30.

www.epflpress.org

Deuxième édition, 2025

© EPFL Press

ISBN 978-2-8323-2316-8 (pour l'ebook PDF), doi.org/10.55430/3128CDGMT

Ce livre est sous licence :



Cette licence Creative Commons vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur, la source et l'éditeur original, sans modification du texte ou de l'extrait et sans utilisation commerciale.

Geometry is not so much a branch of mathematics as a way of thinking that permeates all branches of mathematics.

Sir Michael Francis Atiyah

Avant-propos

Objectifs de ce livre. Ce livre est basé sur un cours donné à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Il est principalement destiné aux ingénieurs, mais il sera aussi utile aux physiciens et aux mathématiciens, sans doute en complément d'autres textes.

L'objectif de ce cours est de donner au lecteur de solides connaissances de base en géométrie au niveau du premier cycle universitaire. Il s'agit d'un cours théorique, avec un certain nombre d'applications illustrant les notions abordées. Les connaissances préalables requises correspondent à l'équivalent d'un semestre en algèbre linéaire et en analyse.

L'ouvrage couvre les notions de bases concernant la géométrie vectorielle, les isométries et la théorie des courbes, avec une introduction à la géométrie des surfaces. Le lecteur apprendra à appliquer le calcul différentiel et l'algèbre linéaire à des problèmes géométriques à l'aide d'exemples concrets. Le but pour le lecteur est de développer son sens de l'espace et son intuition géométrique, afin qu'il soit capable de reconnaître l'aspect géométrique d'un problème, et d'y faire face.

Pourquoi la géométrie ? La géométrie est l'une des rares sciences, avec l'astronomie et l'arithmétique, dont l'origine remonte à l'Antiquité. Cette discipline n'a cessé d'être vivante, chaque génération de mathématiciens apportant son lot de découvertes fondamentales et d'applications les plus diverses. C'est un sujet qui a toujours fait partie du bagage indispensable du scientifique et de l'ingénieur.

De nombreuses lois physiques s'expriment à partir de concepts géométriques. Euler a par exemple découvert le rôle joué par la notion géométrique de *courbure* dans l'étude des déformations des tiges élastiques. La science a énormément évolué depuis Euler, mais les notions géométriques les plus modernes et les plus avancées jouent toujours un rôle central en physique contemporaine : la théorie de la gravitation ou les théories de jauge (qui décrivent les interactions entre particules élémentaires) sont des exemples de théories géométriques : on parle de « géométrisation de la physique ».

Il n'y a d'ailleurs pas besoin d'être physicien théoricien pour être confronté à la géométrie : de nombreuses disciplines appliquées ou théoriques telles que l'infographie, la vision artificielle, l'analyse d'images et la tomographie, la navigation

et la robotique, la cristallographie ou la modélisation des protéines, sans oublier l'imagerie de synthèse et d'autres disciplines artistiques, nécessitent une bonne maîtrise d'outils géométriques sophistiqués.

Mais la géométrie n'est pas qu'un instrument et il est important pour l'ingénieur et le scientifique de savoir *penser géométriquement*. Par exemple en algèbre, un système d'équations s'interprète comme un problème d'intersection entre une surface et une courbe, ou d'autres objets semblables. L'analyse hilbertienne est une géométrie en dimension infinie. En analyse toujours, un système d'équations différentielles s'interprète comme un champ de vecteurs sur un espace de phase. En mécanique, la dynamique hamiltonienne est une géométrie sur l'espace des phases. La cinématique peut être vue comme l'étude de la géométrie d'une courbe sur un groupe de transformations.

Finalement, le scientifique et l'ingénieur ont besoin d'une bonne intuition géométrique du plan et de l'espace, et la pratique de la géométrie est certainement l'un des meilleurs moyens de développer cette intuition. Platon disait que la géométrie élève l'âme de celui qui l'étudie.

Contenu. Le livre est divisé en trois parties relativement indépendantes :

I. Les notions fondamentales. Cette partie débute par une construction axiomatique de l'espace euclidien menant rapidement à l'outil vectoriel. Le langage vectoriel est ensuite exploité pour décrire le système de coordonnées cartésien et la géométrie affine des droites et des plans de l'espace. Nous abordons ensuite les coordonnées barycentriques et leurs applications à quelques théorèmes de géométrie et terminons par une application à la colorimétrie.

II. Méthodes vectorielles en géométrie euclidienne. Cette partie présente les opérations vectorielles qui contiennent les informations essentielles de la géométrie euclidienne vectorielle. Il s'agit principalement du produit scalaire, puis des produits vectoriel, mixte et extérieur. Ces outils sont exploités pour décrire les relations trigonométriques dans un triangle du plan, un tétraèdre et un triangle sphérique. La géométrie des droites est développée au moyen des coordonnées de Plücker, qui nous permettent d'écrire des formules compactes pour les problèmes de distances entre droites ou d'intersection de droites et de plans. Cette deuxième partie se termine par la théorie des transformations affines et une classification de toutes les isométries de l'espace.

III. La géométrie différentielle. Cette partie est consacrée à l'étude des courbes et des surfaces, étudiées d'un point de vue paramétrique et local. La seconde moitié du dernier chapitre étudie la courbure des surfaces et demande une bonne capacité à suivre de longs calculs, toutefois les notions mathématiques utilisées restent du niveau de première année d'étude (il s'agit de calculs vectoriels, de dérivées partielles et d'algèbre linéaire, avec quelques incursions vers les équations différentielles et le calcul des variations). Le livre se termine par une preuve du théorème de Gauß sur la nature intrinsèque de la courbure totale des surfaces.

Prérequis. Les prérequis minimaux sont les suivants : pour débiter le livre, l'étudiant(e) doit avoir quelques notions élémentaires sur les ensembles et sur la structure de la droite réelle (y compris la notion de fonction continue). On suppose aussi que le lecteur connaît un peu de géométrie plane telle qu'elle est enseignée dans les écoles secondaires, en particulier la trigonométrie.

Dès le deuxième chapitre, nous supposons connues les notions fondamentales de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, bases et dimensions, calcul matriciel, déterminants). Le lecteur aura sans doute déjà une certaine pratique de la géométrie vectorielle proprement dite, mais ceci n'est nullement un prérequis.

Pour aborder la deuxième partie, il faut avoir les connaissances correspondant à un semestre d'algèbre linéaire et comprendre l'interprétation géométrique de l'algèbre linéaire telle qu'elle est exposée au chapitre 2.

Pour la troisième partie, on suppose le lecteur familier avec les bases de l'analyse (différentiabilité, dérivées partielles, intégrales simples et doubles), avec également une bonne maîtrise de la géométrie vectorielle.

Comment lire ce livre ? Le premier chapitre est consacré aux fondements axiomatiques de la géométrie vectorielle. Le débutant peut se contenter d'une lecture rapide de ce chapitre en omettant les détails. Les chapitres 2 à 7 débutent par plusieurs sections de base, et se poursuivent par des sujets plus spécialisés, des applications ou des approfondissements. Le lecteur peut choisir de commencer par étudier les sections de bases et revenir au gré de ses besoins sur les sujets spécialisés qui lui semblent importants.

Dès le second chapitre, les sections de base sont les suivantes :

Chapitre 2	sections 2.1 à 2.7
Chapitre 3	sections 3.1 à 3.7 et 3.10
Chapitre 4	sections 4.1 à 4.6
Chapitre 5	sections 5.1 à 5.8
Chapitre 6	sections 6.1 à 6.8 et 6.10 à 6.11
Chapitre 7	sections 7.1 à 7.7 et 7.10 à 7.12

Remerciements. Ce livre a bénéficié de nombreux apports et échanges. Je voudrais d'abord remercier les étudiants et les assistants de l'École polytechnique fédérale de Lausanne qui stimulent depuis de nombreuses années ma réflexion sur l'enseignement de la géométrie. Je remercie chaleureusement mes collègues Peter Buser et Klaus-Dieter Semmler pour les très nombreux moments partagés et les échanges d'idées et de points de vue sur le sujet. J'ai apprécié la gentillesse et la disponibilité de Libero Zuppiroli qui m'a éclairé de ses lumières sur les couleurs et leur belle théorie. Mes remerciements vont également à Stéphane Félix, Mathias Rime, Olivier Prosperi, Patrick Verovic ainsi qu'à l'expert anonyme, pour leur lecture attentive du texte et les améliorations qu'ils m'ont

permis d'y apporter. Finalement, je suis reconnaissant aux Presses polytechniques et universitaires romandes pour leur grande patience et le soin qui a été mis dans la préparation de cet ouvrage.

Marc Troyanov, 2009

Note pour la deuxième édition révisée. Quinze ans se sont écoulés depuis la parution de la première édition de ce *Cours de géométrie*. Au fil des réimpressions, le texte s'est avéré solide, bien que perfectible sur un certains nombre de points.

La présente édition révisée reprend donc l'ouvrage dans son architecture originelle, mais dans cette édition nous avons clarifié un certains nombre d'arguments et certaines démonstrations ont été réécrites. Nous avons aussi corrigé un certain nombre de coquilles et d'imprécisions. J'espère que ces retouches rendront la lecture plus fluide et l'apprentissage plus efficace.

Marc Troyanov, printemps 2025

Table des matières

I	Notions fondamentales	15
1	Du point aux vecteurs	17
1.1	Distances, droites et rapports de sections	18
1.2	Applications à la statique	22
1.3	Le plan	23
1.4	Droites parallèles	24
1.5	Triangles et parallélogrammes	27
1.6	Dédoulement d'un parallélogramme	28
1.7	Le théorème de Thalès	30
1.8	Prismes et parallélépipèdes	33
1.9	La notion de vecteur fixe	34
1.10	Orthogonalité	38
1.11	Le rectangle	40
1.12	Le plan euclidien \mathbb{E}^2	41
1.13	Exercices	42
1.14	Annexe : L'axiomatisation de la géométrie	44
2	Bases de la géométrie vectorielle et géométrie affine	47
2.1	Vecteurs fixes	47
2.2	La notion de vecteur libre	48
2.3	Repères affines	52
2.4	La géométrie analytique	57
2.5	Changements de repères et transformations de coordonnées . .	62
2.6	La géométrie vectorielle dans le plan euclidien \mathbb{E}^2	63
2.7	Orientation du plan et de l'espace	63
2.8	Coordonnées homogènes	65
2.9	Coordonnées barycentriques	68
2.10	La géométrie des couleurs	78
2.11	Exercices	84

II	Méthodes vectorielles en géométrie euclidienne	87
3	Produit scalaire	89
3.1	Norme et orthogonalité des vecteurs	89
3.2	Le théorème de Pythagore	92
3.3	Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre	95
3.4	Le produit scalaire	98
3.5	Repères orthonormés	101
3.6	Matrice de Gram	102
3.7	Premières applications du produit scalaire	105
3.8	Aire d'une région plane	109
3.9	Mesure des angles	110
3.10	Sur les fonctions trigonométriques	112
3.11	Applications à la géométrie du triangle	115
3.12	Exercices	124
4	Produits extérieur, vectoriel et mixte	127
4.1	Le produit extérieur dans un plan orienté	127
4.2	Géométrie des droites dans le plan orienté	132
4.3	Faisceaux de droites dans un plan	135
4.4	La trigonométrie dans un plan orienté	137
4.5	Le produit vectoriel	145
4.6	Volume orienté et produit mixte	149
4.7	Base duale d'une base quelconque de \mathbb{V}^3	153
4.8	Géométrie des droites dans l'espace	154
4.9	Relations entre droites et plans	159
4.10	Projections	163
4.11	Le tétraèdre	168
4.12	La trigonométrie sphérique	171
4.13	Exercices	174
5	Transformations affines et isométries	179
5.1	Transformations affines	179
5.2	Forme algébrique d'une application affine	183
5.3	Compositions et inversions	184
5.4	Premiers exemples	185
5.5	Isométries	191
5.6	Théorème de Chasles en dimension 2	193
5.7	Le Théorème d'Euler	195
5.8	Théorème de Chasles dans l'espace	198
5.9	Écriture d'une transformation affine en coordonnées homogènes	202
5.10	Conjugaison	203
5.11	Application aux bras manipulateurs de robots	204
5.12	Distorsion des transformations affines	206

5.13	Décomposition d'une transformation affine	208
5.14	La notion de groupe	210
5.15	Exercices	212

III Géométrie différentielle 217

6 Géométrie des courbes 219

6.1	Qu'est ce qu'une courbe ?	219
6.2	Notions fondamentales	220
6.3	Champs de vecteurs le long d'une courbe	225
6.4	Longueur et abscisse curviligne	227
6.5	Changement de paramétrage d'une courbe	230
6.6	Quantités géométriques et quantités cinématiques	232
6.7	Paramétrage naturel d'une courbe régulière	233
6.8	Courbure d'une courbe de \mathbb{R}^n	235
6.9	Contact entre deux courbes	238
6.10	Courbes dans \mathbb{R}^3	241
6.11	Courbes dans un plan orienté	251
6.12	Courbes planes en coordonnées polaires	257
6.13	Développante et développée	261
6.14	Epicycloïdes	263
6.15	Courbes planes définies implicitement	266
6.16	Quelques applications de la substitution $t = \tan(\theta/2)$	274
6.17	Tangentes et normales à une courbe définie implicitement	276
6.18	Dérivation implicite	276
6.19	Enveloppe d'une famille de courbes planes	280
6.20	Exercices	282

7 Surfaces 289

7.1	Qu'est-ce qu'une surface ?	289
7.2	Surfaces définies implicitement	290
7.3	Le plan tangent	293
7.4	Surfaces paramétrées	296
7.5	Le tenseur métrique	299
7.6	Aire d'une surface paramétrée	304
7.7	Longueur d'une courbe tracée sur une surface	305
7.8	La loxodrome	307
7.9	Géodésiques sur une surface	308
7.10	Courbures normales d'une surface	311
7.11	Courbure moyenne	313
7.12	Courbures principales	314
7.13	Surface uniformément extensible	316
7.14	Dérivée du repère adapté	319

7.15 La deuxième forme fondamentale 321

7.16 L'application de Weingarten 322

7.17 Accélération des courbes tracées sur une surface 323

7.18 Courbure des courbes tracées sur une surface 324

7.19 Courbure d'une surface 327

7.20 La troisième forme fondamentale 330

7.21 Retour aux exemples 331

7.22 Surfaces parallèles 335

7.23 Sur les symboles de Christoffel 338

7.24 Sur la courbure de Gauß 340

7.25 Les équations de Codazzi-Mainardi 344

7.26 Surfaces isométriques et géométrie intrinsèque 345

7.27 Exercices 347

Première partie

Notions fondamentales

Chapitre 1

Du point aux vecteurs

Au début de la géométrie, il y a le point et le nombre. Du point, il n'y a pas grand-chose à dire : *le point est ce qui n'a aucune partie* nous dit Euclide. Nous admettons donc que *l'espace est constitué de points*¹.

Du nombre en revanche, nous supposerons quelques connaissances préalables. Il faut en connaître l'ordre (le plus petit, le plus grand), les opérations (l'addition et la multiplication) et le caractère de continuité et de complétude (entre deux nombres il en existe toujours une multitude infinie, et toute suite de nombres, croissante mais bornée, possède une limite). L'ensemble des nombres réels se note \mathbb{R} et s'appelle parfois la *droite réelle* – c'est déjà un langage géométrique. Ces notions sur les nombres ont été décrites dès l'Antiquité par Eudoxe, puis par Archimède ; plus récemment au XIX^e siècle par Cantor et Dedekind. Les mathématiciens résument ce qu'il faut savoir sur les nombres en disant que \mathbb{R} est un *corps ordonné complet vérifiant l'axiome d'Archimède* (cet axiome dit simplement qu'aucun nombre réel n'est plus grand que tous les entiers).

Le fait qui fonde la géométrie est celui-ci : deux points quelconques sont séparés par une *distance*, et cette distance est un nombre. C'est à partir du concept de distance que l'on construit toutes les notions de la géométrie, à commencer par la droite. *La droite est la ligne qui est entre chacun de ses points également répartie* nous dit encore Euclide. Nous donnerons un sens précis à cette définition euclidienne en nous fondant sur la notion de distance.

Notre premier chapitre est consacré à une présentation de quelques notions géométriques fondamentales : Il s'agit des notions de distance, de droite, de rapport de section et de parallélisme. Cette introduction rapide suffira à nous fournir des bases rigoureuses à la géométrie vectorielle.

Étudier les fondements n'est pas facile. Si le lecteur éprouve quelques difficultés à lire ce premier chapitre, qu'il ne se décourage pas. Il peut négliger les preuves

1. Ce que certains philosophes ont contesté avec l'argument suivant : puisque entre deux points il y en a toujours une multitude d'autres, le point est un objet qui nous échappe, qui ne peut qu'être défini comme *limite* et qui ne saurait donc être à la base de notre conception de l'espace. L'argument ne manque pas de pertinence, mais la *théorie des ensembles* nous fournit un cadre adéquat et rigoureux pour concevoir l'espace comme un ensemble de points.

qui lui semblent difficiles, il peut même se contenter de lire la section 1.9 puis passer au deuxième chapitre. Il lui sera toujours possible de revenir plus tard à l'étude des fondements.

1.1 Distances, droites et rapports de sections

Pour décrire mathématiquement la géométrie de l'espace nous utilisons le langage ensembliste : nous admettons donc que l'espace est un *ensemble*, que nous notons \mathbb{E}^3 , et dont les éléments s'appellent les *points*. Les sous-ensembles de \mathbb{E}^3 s'appellent les *figures géométriques*.

Nous accepterons quelques propriétés sans démonstration : ce sont les *axiomes*. Notre axiome fondamental dit qu'on peut mesurer une distance entre deux points quelconques.

Axiome 0 (axiome fondamental) *On admet qu'à toute paire de points $A, B \in \mathbb{E}^3$ est associé un nombre réel, que l'on note $d(A, B)$, et qui vérifie les propriétés suivantes pour tout $A, B, C \in \mathbb{E}^3$:*

- i) $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$;
- ii) $d(A, B) = d(B, A)$;
- iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

On dit que $d(A, B)$ est la *distance* entre A et B , et on la note aussi \overline{AB} . La propriété iii) porte le nom d'*inégalité du triangle* : elle signifie qu'on ne peut pas diminuer la distance entre deux points en choisissant de transiter par un troisième point.

REMARQUES

1. Un ensemble abstrait muni d'une distance vérifiant les trois propriétés citées dans l'axiome fondamental s'appelle un *espace métrique*.
2. L'inégalité du triangle se généralise à plusieurs points, par exemple

$$d(A, E) \leq d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, E).$$

3. En utilisant les trois propriétés de l'axiome fondamental, on voit que pour deux points $A, B \in \mathbb{E}^3$, on a toujours

$$0 = d(A, A) \leq d(A, B) + d(B, A) = 2d(A, B).$$

En particulier, les distances sont toujours positives (ou nulles si $A = B$).

4. On peut aussi facilement vérifier que si A, B, C sont trois points quelconques de \mathbb{E}^3 , alors

$$d(A, B) \geq |d(A, C) - d(B, C)|.$$

Le concept de distance nous permet de définir les notions de segment, de points alignés et de droite.

Définitions.

1. On appelle *segment de droite* (ou simplement *segment*) reliant les points A et B l'ensemble de tous les points $P \in \mathbb{E}^3$ vérifiant la relation

$$d(A, B) = d(A, P) + d(P, B).$$

Cet ensemble est noté $[A, B]$.

2. On dit qu'un point $P \in \mathbb{E}^3$ est situé *entre* A et B si $P \in [A, B]$.
3. Trois points $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ sont *alignés* si l'un des points appartient au segment reliant les deux autres, par exemple $C \in [A, B]$ (ou $B \in [A, C]$ ou $A \in [B, C]$).
4. La *droite* définie par deux points distincts A et $B \in \mathbb{E}^3$ est l'ensemble des points alignés sur A et B . Cette droite est notée L_{AB} ou simplement (AB) . Si un point P appartient à une droite L nous disons que L *passse* par le point P et on note $P \in L$.

REMARQUE. Par l'inégalité du triangle, on sait qu'on a toujours

$$|d(A, C) - d(C, B)| \leq d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Les trois points A, B, C sont alignés si et seulement si l'une de ces deux inégalités est une égalité.

Nous admettons que deux points déterminent une unique droite.

Axiome 1 *Par deux points distincts $A, B \in \mathbb{E}^3$, il passe une et une seule droite.*

Cet axiome dit que si P et Q sont deux points distincts sur la droite L_{AB} , alors les droites L_{PQ} et L_{AB} coïncident.

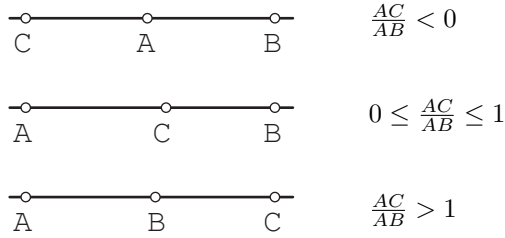
Lorsqu'on a choisi deux points A et B sur une droite L , on peut considérer que le point A marque l'*origine* et la distance $d(A, B)$ représente l'*unité*; chaque point de la droite correspond alors à un nombre réel et vice versa.

Cette intuition est formalisée par le concept de *rapport de section* qui est l'invariant géométrique fondamental associé à trois points alignés.

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{E}^3$ deux points distincts. Pour tout point C aligné sur A et B le *rapport de section* de C par rapport à AB , noté $\rho_{A,B}(C)$ ou $\frac{AC}{AB}$, est le nombre défini par

$$\rho_{A,B}(C) = \frac{AC}{AB} \stackrel{\text{déf}}{=} \pm \frac{d(A, C)}{d(A, B)},$$

où le signe est « $-$ » si A est entre C et B , et « $+$ » dans le cas contraire.



On montre facilement qu'un point C sur L_{AB} appartient au segment $[A, B]$ si et seulement si $0 \leq \frac{AC}{AB} \leq 1$.

REMARQUE. La propriété fondamentale de la géométrie des droites dit que la position d'un point sur la droite $L = L_{AB}$ est repérée par son rapport de section.

Axiome 2 Soient A et B deux points distincts et $t \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Alors il existe un unique point $P_t \in \mathbb{E}^3$ qui est aligné avec A et B et tel que

$$\frac{AP_t}{AB} = t.$$

Cet axiome nous dit que la fonction

$$\rho_{A,B} : L_{AB} \rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective. L'application inverse

$$\begin{aligned} \rho_{A,B}^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow L_{AB} \\ t &\mapsto P_t \end{aligned}$$

qui associe au nombre t le point P_t sur la droite L_{AB} tel que $\frac{AP_t}{AB} = t$ s'appelle la *représentation paramétrique affine* de la droite L . On dit parfois que t est le *paramètre affine* (ou la *coordonnée affine*) du point P par rapport au « repère affine » sur la droite L déterminé par AB .

Le point P_t se note aussi

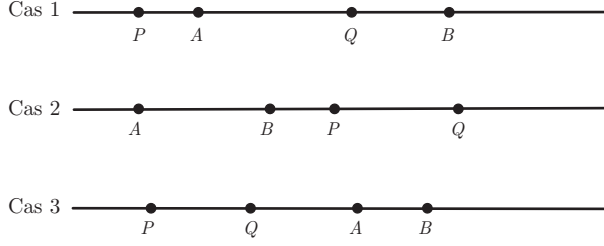
$$P_t = A + t \cdot \overrightarrow{AB},$$

où \overrightarrow{AB} est le « vecteur » reliant A à B . Cette notation sera justifiée et expliquée plus tard.

Proposition 1.1 Soient P et Q deux points alignés sur A et B . Si $A \neq B$, alors

$$d(P, Q) = |\rho_{A,B}(P) - \rho_{A,B}(Q)| d(A, B).$$

PREUVE. Quitte à échanger les points P et Q , on peut supposer que $\rho_{AB}(P) \leq \rho_{AB}(Q)$. Plusieurs cas se présentent selon la position des points P et Q sur la droite L_{AB} .



Cas 1 Si $\rho_{AB}(P) \leq 0 \leq \rho_{AB}(Q)$, alors A est entre P et Q et on a donc $d(P, Q) = d(P, A) + d(A, Q)$. En divisant cette égalité par $d(A, B)$, on obtient

$$\frac{d(P, Q)}{d(A, B)} = \frac{d(P, A)}{d(A, B)} + \frac{d(A, Q)}{d(A, B)} = -\rho_{AB}(P) + \rho_{AB}(Q)$$

car $\rho_{AB}(P) = -\frac{d(A, P)}{d(A, B)}$ et $\rho_{AB}(Q) = +\frac{d(A, Q)}{d(A, B)}$.

Cas 2 Si $0 \leq \rho_{AB}(P) \leq \rho_{AB}(Q)$, alors P est entre A et Q et on a donc $d(A, Q) = d(A, P) + d(P, Q)$. Par conséquent

$$\frac{d(P, Q)}{d(A, B)} = \frac{d(A, Q)}{d(A, B)} - \frac{d(A, P)}{d(A, B)} = \rho_{AB}(Q) - \rho_{AB}(P).$$

Cas 3 Si $\rho_{AB}(P) \leq \rho_{AB}(Q) \leq 0$, alors Q est entre P et A et on a donc $d(P, Q) = d(P, A) - d(A, Q)$, donc

$$\frac{d(P, Q)}{d(A, B)} = \frac{d(P, A)}{d(A, B)} - \frac{d(A, Q)}{d(A, B)} = -\rho_{AB}(P) + \rho_{AB}(Q).$$

Dans les trois cas, on a obtenu

$$\frac{d(P, Q)}{d(A, B)} = |\rho_{AB}(P) - \rho_{AB}(Q)|.$$

□

Définition. Le *point milieu* du segment $[A, B]$ est l'unique point $M \in [A, B]$ tel que $d(A, M) = d(M, B) = \frac{1}{2}d(A, B)$.

Le point milieu M appartient au segment $[A, B]$ car

$$d(A, B) = d(A, M) + d(M, B).$$

Il est facile de voir que si $A \neq B$, alors on peut caractériser le point M par la relation

$$\frac{MB}{MA} = -1,$$

et aussi par la relation

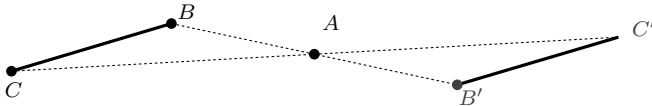
$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Définition. Le point *symétrique* (ou *opposé*) de B par rapport à A est l'unique point $B' \in L_{AB}$ tel que A est le milieu de $[B, B']$. Si $A \neq B$, alors B' est caractérisé par

$$\frac{AB'}{AB} = -1.$$

Axiome 3 (axiome de symétrie) La symétrie de centre A respecte les distances : si A, B, C sont trois points quelconques et B', C' sont les points symétriques de B et C par rapport A , alors on a

$$d(B', C') = d(B, C).$$



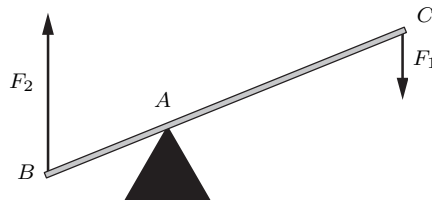
1.2 Applications à la statique

Dans ce paragraphe, nous faisons un petit détour par la physique, plus précisément la statique, pour illustrer deux exemples d'application du rapport de section.

- La première application du rapport de section est le *principe d'Archimède*. Considérons un levier rectiligne BAC avec point d'appui en A . Soit \vec{F}_1 une force verticale exercée en C , alors une force verticale \vec{F}_2 est produite en B , et ces forces vérifient par la relation

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{AC}{AB}.$$

Si le point d'appui A est situé entre B et C , alors $\frac{F_2}{F_1} < 0$. Cela correspond physiquement au fait que les forces sont dirigées dans des sens opposés.

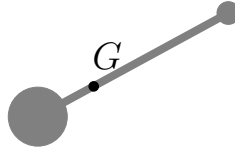


Remarquons que si le point B tend vers A , alors $F_2 \rightarrow \infty$. Toutefois le déplacement effectué par cette force tend vers 0 et le travail reste fini. Archimède

disait qu'avec un bon levier on peut soulever le monde. Certes, mais à une hauteur infime.

- La seconde application est la détermination du *centre de gravité*. Soit AB une barre constituée d'un matériau homogène, et les masses m_A et m_B que nous supposons attachées aux extrémités de cette barre. Alors le centre de gravité du système obtenu est le point G sur AB déterminé par

$$\frac{GB}{GA} = -\frac{m_A}{m_B}.$$



Remarquons que l'on a

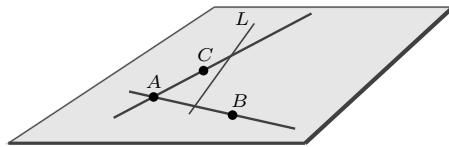
$$\frac{AG}{AB} = \frac{m_B}{m_A + m_B},$$

d'où le nom de coordonnée barycentrique pour ce nombre (le mot *barycentre* signifie centre de gravité).

Retournons à la géométrie.

1.3 Le plan

Définition. Le *plan* Π_{ABC} engendré par trois points non alignés $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ est la réunion de toutes les droites L_{PQ} telles que $P \in L_{AB}$, $Q \in L_{AC}$ et $P \neq Q$.



Une famille de points ou de figures sont dits *coplanaires* s'ils sont contenus dans un même plan. Nous regroupons les propriétés fondamentales du plan en un unique axiome.

Axiome 4 On admet les propriétés suivantes :

- (i) Il existe au moins un plan (i.e. l'espace \mathbb{E}^3 contient au moins trois points non alignés).
- (ii) Si P et Q sont deux points distincts d'un plan Π , alors Π contient toute la droite L_{PQ} .

- (iii) Par trois points non alignés $P, Q, R \in \mathbb{E}^3$ passe un et un seul plan.
- (iv) Si Π est un plan, alors $\Pi \neq \mathbb{E}^3$ (i.e. au moins un point de l'espace n'est pas dans le plan Π).
- (v) Deux plans de \mathbb{E}^3 ne peuvent jamais se rencontrer en un seul point.

Définitions

1. Deux plans sont dits *parallèles* s'ils sont confondus ou disjoints (c'est à dire d'intersection vide).
2. Un plan et une droite sont dits *parallèles* si le plan contient la droite ou si le plan est disjoint de la droite.
3. Deux droites sont dites *parallèles* si elles sont confondues ou si elles sont disjointes et coplanaires (i.e. dans un même plan).
4. Deux droites sont dites *gauches* si elles ne sont pas coplanaires.
5. On dit qu'un plan Π et une droite L sont *transverses* s'ils ne sont pas parallèles.

On note $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ pour « Π_1 parallèle à Π_2 », etc.

Remarquons que la propriété *iii*) de l'axiome 4 nous dit que Π et L sont transverses si et seulement si la droite L rencontre le plan Π en un et un seul point.

Proposition 1.2 *Deux plans non parallèles se coupent le long d'une droite.*

PREUVE. Soient Π_1 et Π_2 deux plans non parallèles et non confondus. Par la propriété *v*) de l'axiome 4, on sait que l'intersection $\Pi_1 \cap \Pi_2$ contient au moins 2 points A et B . Donc, par la propriété *ii*), la droite L_{AB} est contenue dans chacun des deux plans, ainsi

$$L_{AB} \subset \Pi_1 \cap \Pi_2.$$

Supposons que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq L_{AB}$. Alors il existe un point C non aligné sur AB tel que $C \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Comme le plan passant par trois points non alignés est unique, on a $\Pi_1 = \Pi_2$; ce qui contredit nos hypothèses.

On a donc montré que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = L_{AB}$. □

1.4 Droites parallèles

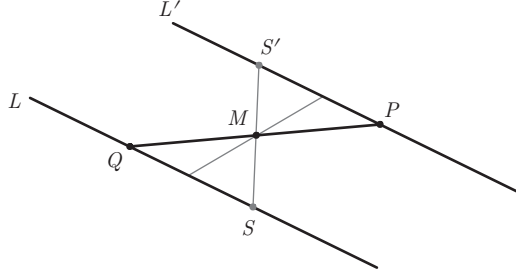
Rappelons que les droites L et L' sont parallèles si elles coïncident ou si elles sont coplanaires et disjointes. On note cette relation $L \parallel L'$.

Proposition 1.3 Soient L une droite et P un point extérieur à L . Donnons-nous un point Q sur L et notons M le milieu de $[P, Q]$.

Alors l'ensemble L' des points S' qui sont symétriques aux points de L par rapport à M , i.e. l'ensemble

$$L' = \{S' \mid \text{il existe } S \in L \text{ tel que } M \text{ est le milieu de } [S, S']\}$$

est une droite, et cette droite est parallèle à L .



Définition. On dit que la droite L' est obtenue à partir de L par symétrie de centre M .

PREUVE. Soient S'_1, S'_2, S'_3 trois points de L' . Notons S_1, S_2, S_3 les points symétriques par rapport à M . Alors, par construction, ces points appartiennent à la droite L et ils sont donc alignés. Quitte à les renuméroter, nous avons

$$d(S_1, S_3) = d(S_1, S_2) + d(S_2, S_3).$$

L'axiome 3 dit que la symétrie respecte les distances, donc $d(S'_i, S'_j) = d(S_i, S_j)$ pour tous i, j , et donc

$$d(S'_1, S'_3) = d(S'_1, S'_2) + d(S'_2, S'_3).$$

Ceci montre que L' est bien une droite. Il reste à voir qu'elle est parallèle à L . Il est clair que L' est contenue dans le plan Π défini par la droite L et le point M , donc L' et L sont bien coplanaires. Ces deux droites sont aussi disjointes car s'il existait un point $I \in L \cap L'$ contenu dans l'intersection, alors le point I' symétrique à I par rapport à M serait aussi contenu dans les deux droites. Ainsi les deux droites L et L' passeraient par les points I et I' , et on aurait $L = L'$ par l'axiome 1. \square

La droite construite dans la proposition précédente est unique, cela ne peut se prouver et c'est l'objet du célèbre *postulat des parallèles*.

Axiome 5 (postulat des parallèles) *Par un point P extérieur à une droite L , il passe une unique droite L' qui est parallèle à L .*

L'une des propriétés de base du parallélisme est le théorème suivant.

Théorème 1.4 *Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.*

Cette propriété s'appelle la *transitivité du parallélisme*.

Nous avons besoin d'un résultat préliminaire pour démontrer ce théorème.

Lemme 1.5 *Soient Π_1 et Π_2 deux plans distincts qui se rencontrent selon une droite $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$ et $L_1 \subset \Pi_1$, $L_2 \subset \Pi_2$ deux droites contenues dans chacun de ces plans. Si L_1 et L_2 sont parallèles, alors la droite d'intersection L est parallèle à L_1 et à L_2 .*

PREUVE. Il est clair que L est coplanaire à L_1 , il faut donc seulement montrer que ces deux droites coïncident ou sont disjointes. Si elles ne sont pas disjointes, alors il existe un point $Q \in L \cap L_1$ dans l'intersection. Dans ce cas $Q \in \Pi_2$ car $L \subset \Pi_2$. Or L_1 est la droite parallèle à L_2 passant par Q , donc L_1 et L_2 sont contenues dans le plan Π_2 , mais cela signifie que $L_1 = \Pi_1 \cap \Pi_2 = L$. On a montré que L est parallèle à L_1 et le même argument montre que L est parallèle à L_2 . \square

PREUVE DU THÉORÈME. Soient L_1, L_2, L_3 trois droites telles que L_3 est parallèle à L_1 et à L_2 , nous devons prouver que L_1 est parallèle à L_2 . Nous distinguons deux cas.

Cas 1 Les trois droites sont coplanaires. Il faut montrer que L_1 et L_2 sont disjointes ou qu'elles coïncident. Si elles ne sont pas disjointes, alors il existe un point $Q \in L_1 \cap L_2$ dans l'intersection, et donc L_1 et L_2 sont deux droites parallèles à L_3 passant par Q . Le postulat des parallèles nous dit alors que $L_1 = L_2$.

Cas 2 Si les trois droites ne sont pas dans un même plan, on utilise le lemme précédent pour prouver que $L_1 \parallel L_2$. Choisissons des points $P \in L_3$ et $Q \in L_2$, et introduisons la droite auxiliaire L'_2 passant par Q et parallèle à L_1 : on va prouver que $L'_2 = L_2$.

Notons Π_1 le plan passant par L_1 et P et Π_2 le plan passant par L'_2 et P , le lemme nous dit que la droite $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est parallèle à L_1 et L'_2 . Mais L_3 est l'unique parallèle à L_1 passant par P , comme $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, on en déduit que $L_3 = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Ainsi $L_3 \parallel L'_2$, donc L'_2 et L_2 sont deux parallèles à L_3 passant par Q , il s'ensuit par le postulat des parallèles que $L_2 = L'_2$. On a prouvé que $L_2 = L'_2$ est parallèle à L_1 . \square

1.5 Triangles et parallélogrammes

Définitions

1. Le *triangle* défini par trois points $A, B, C \in \mathbb{E}^3$ est la réunion des trois segments reliant ces points. On le note $\mathcal{T}(ABC)$, \triangle_{ABC} ou simplement ABC :

$$\mathcal{T}(ABC) \stackrel{\text{déf}}{=} [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$$

Les points A, B, C sont les *sommets* et les segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ sont les *côtés* du triangle.

2. Le triangle $\mathcal{T}(ABC)$ est *dégénéré* si les trois sommets A, B, C sont alignés, il est *isocèle en C* si $d(A, C) = d(B, C)$ et il est *équilatéral* si $d(A, C) = d(B, C) = d(A, B)$.
3. On appelle *médiane* d'un triangle un segment reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé.
4. Deux triangles $\mathcal{T}(ABC)$ et $\mathcal{T}(A'B'C')$ sont *congrus* si $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ et $d(C, A) = d(C', A')$.

On dit que quatre points A, B, C, D forment un *parallélogramme* si les milieux des segments $[A, C]$ et $[B, D]$ coïncident : $M_{AC} = M_{BD}$. On le note $ABCD$.

Les points A, B, C, D sont les *sommets* du parallélogramme. Les segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$ sont les *côtés* et $[A, C]$ et $[B, D]$ sont les *diagonales*. Le *milieu du parallélogramme* est le milieu commun M des deux diagonales. Si M est le milieu d'un parallélogramme, alors on dit que ce parallélogramme est *centré en M*.

On dit que $ABCD$ est un *parallélogramme dégénéré* si les sommets sont alignés, dans le cas contraire il est dit *non-dégénéré*.

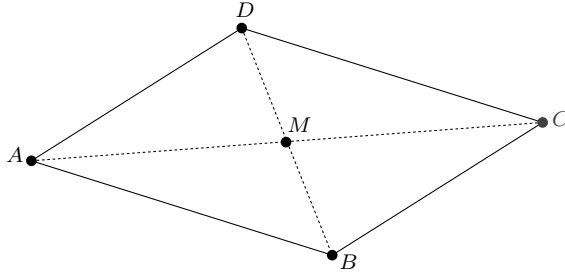
REMARQUE. L'axiome 3 nous dit que les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur : si $ABCD$ est un parallélogramme, alors

$$d(A, B) = d(C, D) \quad \text{et} \quad d(A, D) = d(B, C)$$

Lorsque tous les côtés ont même longueur, on dit que le parallélogramme est un *losange*.

Lemme 1.6 *Étant donnés trois points $A, B, C \in \mathbb{E}^3$, il existe un unique point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.*

PREUVE. Soit M le milieu de $[A, C]$. Le point D cherché est le point symétrique de B par rapport M . □



L'appellation de parallélogramme est justifiée par la proposition 1.7.

Proposition 1.7 Soient A, B, C, D quatre points parmi lesquels trois ne sont jamais alignés. Alors $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les côtés opposés sont parallèles : $L_{AB} \parallel L_{CD}$ et $L_{AD} \parallel L_{BC}$.

PREUVE. Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors les diagonales ont le même milieu $M = M_{AC} = M_{BD}$. La proposition 1.3 entraîne alors que $L_{AB} \parallel L_{CD}$ et $L_{AD} \parallel L_{BC}$. Supposons inversement que $L_{AB} \parallel L_{CD}$ et $L_{AD} \parallel L_{BC}$ et notons $M = M_{AC}$ le milieu de $[A, C]$. Comme la droite L_{CD} est parallèle à L_{AB} , elle coïncide avec la droite obtenue à partir de L_{AB} par symétrie de centre M . En particulier le point B' symétrique de B par rapport à M appartient à L_{CD} .

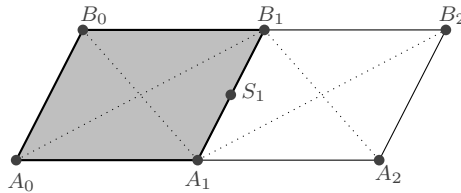
Mais on suppose aussi $L_{AD} \parallel L_{BC}$, donc L_{AD} coïncide avec la droite obtenue à partir de L_{BC} par symétrie de centre M et on doit avoir $B' \in L_{AD}$. Ainsi

$$B' \in L_{AD} \cap L_{CD} = D,$$

ce qui prouve que D est le symétrique de B par rapport à M et donc $M_{BD} = M = M_{AC}$. □

1.6 Dédoublément d'un parallélogramme

Proposition 1.8 Soit $A_0B_0B_1A_1$ un parallélogramme. Notons S_1 le milieu de $[A_1, B_1]$, puis notons A_2 le point symétrique de B_0 par rapport à S_1 et B_2 le point symétrique de A_0 par rapport à S_1 .



Alors les points A_0, A_1, A_2 sont alignés et de même pour B_0, B_1, B_2 . De plus $A_1B_0B_1A_2$, $A_0B_0B_2A_2$, $A_0B_1B_2A_1$ et $A_1B_1B_2A_2$ sont des parallélogrammes.

PREUVE. Les droites $L_{A_0A_1}$ et $L_{B_0B_1}$ sont parallèles, donc $L_{B_0B_1}$ est la droite obtenue par symétrie de centre S_1 à partir de $L_{A_0A_1}$. En particulier le point B_2 appartient à la droite $L_{B_0B_1}$ car $A_0 \in L_{A_0A_1}$. De même, le point A_2 appartient à la droite $L_{A_0A_1}$ car $B_0 \in L_{B_0B_1}$.

Le quadrilatère $A_1B_0B_1A_2$ est un parallélogramme centré en S_1 car S_1 est le milieu de $[A_1, B_1]$ et de $[B_0, A_2]$. De même $A_0B_0B_2A_2$ est un parallélogramme car S_1 est le milieu de $[A_0, B_2]$ et de $[B_0, A_2]$.

Finalement le quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles. \square

Définition. On dit que le parallélogramme $A_0B_0B_2A_2$ est obtenu à partir de $A_0B_0B_1A_1$ par *dédoublément* depuis le côté $[A_1, B_1]$.

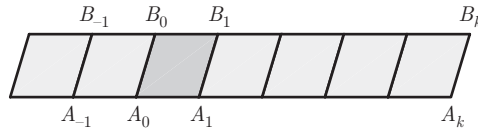
Corollaire 1.9 Soit $A_0B_0B_1A_1$ un parallélogramme et k un entier. Soient $A_k \in L_{A_0A_1}$ le point aligné sur A_0A_1 de rapport de section k et $B_k \in L_{B_0B_1}$ le point aligné sur B_0B_1 de rapport de section k . Alors $A_0B_0B_kA_k$ est un parallélogramme. En particulier, on a

$$d(A_k, B_k) = d(A_0, B_0)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

PREUVE. Supposons d'abord que $k > 0$. Dans la proposition précédente, nous avons déjà construit le parallélogramme $A_0B_0B_2A_2$. En dédoublant $A_1B_1B_2A_2$ depuis le côté $[A_2, B_2]$, on obtient un parallélogramme $A_2B_2B_3A_3$. Il est clair que $A_0B_0B_3A_3$ est un parallélogramme puisque ses côtés opposés sont parallèles.

En dédoublant $A_2B_2B_3A_3$ depuis le côté $[A_3, B_3]$, puis en continuant de la sorte, on obtient au bout de la $k^{\text{ième}}$ étape le parallélogramme $A_0B_0B_kA_k$.



Si k est un entier négatif, alors on procède de la même manière, mais en commençant par dédoubler $A_0B_0B_1A_1$ depuis le côté $[A_0, B_0]$. On note $A_0B_0B_{-1}A_{-1}$ le parallélogramme obtenu, puis on construit itérativement $A_0B_0B_{-2}A_{-2}$, $A_0B_0B_{-3}A_{-3}$ etc. \square

1.7 Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est l'un des résultats les plus importants de la géométrie euclidienne. On peut l'énoncer comme suit.

Théorème 1.10 (Théorème de Thalès) *Soient OPQ un triangle et $P' \in L_{OP}$, $Q' \in L_{OQ}$ des points tels que les droites $L_{P'Q'}$ et L_{PQ} sont parallèles. Alors les rapports de sections de Q' sur OQ et de P' sur OP sont égaux :*

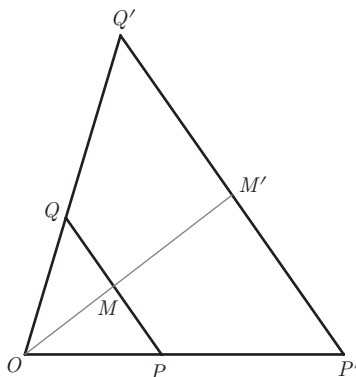
$$\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OP'}{OP}.$$

Ce résultat est le théorème 2 du livre 6 des *Éléments* d'Euclide². Dans sa très belle preuve, Euclide utilise la notion d'*aire*, que nous n'avons pas encore établie, nous devons donc utiliser d'autres arguments. Commençons par énoncer et prouver un résultat qui complète le théorème de Thalès.

Théorème 1.11 *Soient OPQ un triangle et $P' \in L_{OP}$, $Q' \in L_{OQ}$ des points tels que $\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OP'}{OP}$. Notons encore M le milieu de $[PQ]$ et M' le milieu de $[P'Q']$, alors*

- a) *les droites $L_{P'Q'}$ et L_{PQ} sont parallèles.*
- b) $\frac{d(P', Q')}{d(P, Q)} = \left| \frac{OQ'}{OQ} \right| = \left| \frac{OP'}{OP} \right|.$
- c) *les points O , M et M' sont alignés.*

Remarquons que l'affirmation (a) de ce théorème est la réciproque du théorème de Thalès.



2. L'appellation *théorème de Thalès* pour ce résultat est une tradition francophone qui remonte à la fin du XIX^e siècle, voir l'article [33]. Les textes anglais l'appellent *The Similarity Theorem*.

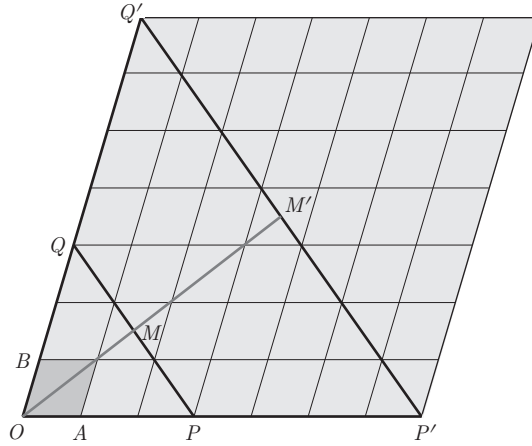
PREUVE. Par un argument de continuité et d'approximation, on peut supposer que le rapport de section $\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OP'}{OP}$ est un nombre rationnel. Notons alors

$$\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OP'}{OP} = \frac{k}{\ell}$$

avec $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et supposons d'abord que $k, \ell > 0$.

Notons A le point sur la droite LOP tel que $\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\ell}$ et B le point sur la droite LOQ tel que $\frac{OB}{OQ} = \frac{1}{\ell}$, et observons que

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} = \ell \quad \text{et} \quad \frac{OP'}{OA} = \frac{OQ'}{OB} = k.$$



La preuve du théorème avec $\frac{k}{\ell} = \frac{7}{3}$.

Pour des entiers i, j , on va noter P_i le point de LOP tel que $\frac{OP_i}{OA} = i$ et Q_j le point de LOQ tel que $\frac{OQ_j}{OB} = j$. Puis on note $C_{i,j}$ le point tel que $OP_i C_{i,j} Q_j$ est un parallélogramme. Nous avons créé une famille de parallélogrammes : pour tout entier $i, j, m > 0$, les points

$$C_{i,j}, C_{i+m,j}, C_{i+m,j+m}, C_{i,j+m}$$

sont les sommets d'un parallélogramme car $L_{C_{i,j}, C_{i+m,j}}$ et $L_{C_{i,j+m}, C_{i+m,j+m}}$ sont deux droites parallèles à LOP (donc parallèles entre elles) et $L_{C_{i,j}, C_{i,j+m}}$ et $L_{C_{i+m,j}, C_{i+m,j+m}}$ sont deux droites parallèles à LOQ . Remarquons que $C_{i,0} = P_i$ et $C_{0,j} = Q_j$.

La droite $LPQ = L_{C_{\ell,0}, C_{0,\ell}}$ est égale à $L_{P, C_{1,\ell-1}}$ et la proposition 1.8 nous dit qu'elle est parallèle à L_{AB} , de même $LP'Q' \parallel L_{AB}$. Par transitivité du parallélisme (théorème 1.4), on a donc $LP'Q' \parallel LPQ$. L'affirmation a) du théorème est démontrée.

Plus généralement, la proposition 1.8 montre que les points

$$C_{i,j}, C_{i-1,j+1}, C_{i,j+1}, C_{i+1,j}$$

forment un parallélogramme dont les cotés sont parallèles et de même longueurs que $ABC_{1,1}C_{2,0}$.

Le segment $[P, Q]$ contient les $\ell + 1$ points alignés suivants :

$$P = C_{\ell,0}, C_{\ell-1,1}, C_{\ell-2,2}, \dots, C_{0,\ell} = Q,$$

donc

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= d(C_{\ell,0}, C_{\ell-1,1}) + d(C_{\ell-1,1}, C_{\ell-2,2}) + \dots + d(C_{1,\ell-1}, C_{0,\ell}) \\ &= \ell d(A, B) \end{aligned}$$

De même, le segment $[P', Q']$ contient les $k + 1$ points alignés

$$P' = C_{k,0}, C_{k-1,1}, C_{k-2,2}, \dots, C_{0,k} = Q',$$

donc

$$\begin{aligned} d(P', Q') &= d(C_{k,0}, C_{k-1,1}) + d(C_{k-1,1}, C_{k-2,2}) + \dots + d(C_{1,k-1}, C_{0,k}) \\ &= k d(A, B). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{d(P', Q')}{d(P, Q)} = \frac{k}{\ell} = \frac{OP'}{OP},$$

ce qui prouve l'affirmation *b*).

Il nous reste à montrer finalement que O , M et M' sont alignés. Si $k = 2m$ est pair, alors M est le point $C_{m,m}$ qui est aligné sur la droite reliant O et C_{11} . Si $k = 2m + 1$ est impair, alors M est le milieu du segment $[C_{m+1,m}, C_{m,m+1}]$. Ce point est aussi le milieu de $[C_{m,m}, C_{m+1,m+1}]$, et est donc aligné sur la droite reliant O et C_{11} .

On raisonne de la même manière pour M' : donc M et M' appartiennent à la droite reliant O et C_{11} il s'ensuit que O est aligné sur M et M' , ce qui démontre l'affirmation *c*).

La preuve est terminée dans le cas où $\frac{OP'}{OP} > 0$. Si $\frac{OP'}{OP} < 0$, alors on remplace simplement P' et Q' par leur symétrique depuis O . \square

PREUVE DU THÉORÈME 1.10 (THÉORÈME DE THALÈS). Le triangle OPQ est donné, ainsi que les points $P' \in L_{OP}$, $Q' \in L_{OQ}$ tels que $L_{P'Q'}$ et L_{PQ} sont parallèles. Considérons le point $Q'' \in L_{OQ}$ tel que $\frac{OQ''}{OQ} = \frac{OP'}{OP}$. Par le théorème 1.11, on sait que les droites $L_{P'Q''}$ et L_{PQ} sont parallèles. Par l'axiome 5, la droite parallèle à L_{PQ} passant par le point P' est unique. Donc $L_{P'Q''} = L_{P'Q'}$ et on a

$$Q'' = L_{P'Q''} \cap L_{OQ} = L_{P'Q'} \cap L_{OQ} = Q',$$

et donc

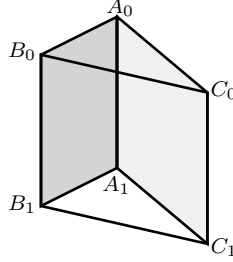
$$\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OQ''}{OQ} = \frac{OP'}{OP}.$$

\square

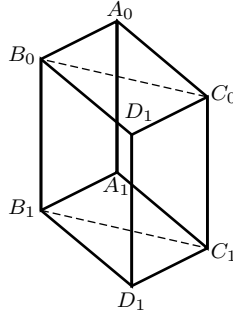
1.8 Prismes et parallélépipèdes

Le parallélépipède est une généralisation en trois dimensions du parallélogramme. Sa construction est fondée sur le théorème suivant ³.

Théorème 1.12 (Théorème du prisme) *Soient $A_0B_0C_0$ et $A_1B_1C_1$ deux triangles dans \mathbb{E}^3 tels que $B_0A_0A_1B_1$ et $C_0A_0A_1C_1$ sont deux parallélogrammes. Alors $B_0C_0C_1B_1$ est aussi un parallélogramme.*



Définition. La figure $A_0B_0C_0A_1B_1C_1$ dans ce théorème s'appelle un *prisme*. En ajoutant les points D_0 et D_1 tels que $A_0B_0D_0C_0$ et $A_1B_1D_1C_1$ sont des parallélogrammes, on obtient un *parallélépipède*.



PREUVE. Soit Q_1 le point tel que $B_0C_0Q_1B_1$ est aussi un parallélogramme. On doit prouver que $Q_1 = C_1$. On va faire ceci en montrant que $d(C_1, Q_1) = 0$.

Notons $A_k \in L_{A_0A_1}$, $B_k \in L_{B_0B_1}$, $C_k \in L_{C_0C_1}$ et $Q_k \in L_{C_0Q_1}$ les points sur les droites indiquées de rapport de section k :

$$\frac{A_0A_k}{A_0A_1} = \frac{B_0B_k}{B_0B_1} = \frac{C_0C_k}{C_0C_1} = \frac{C_0Q_k}{C_0Q_1} = k,$$

où k est un entier.

3. Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général qui s'appelle le *théorème de Desargues* (Girard Desargues, architecte et mathématicien français 1591-1661). Voir la section 13.1 du livre [7] de Coxeter

Par le corollaire 1.9, on sait que

$$d(A_k, B_k) = d(A_0, B_0), \quad d(A_k, C_k) = d(A_0, C_0), \quad \text{et} \quad d(B_k, Q_k) = d(B_0, C_0),$$

on a donc, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(C_k, Q_k) &\leq d(C_k, A_k) + d(A_k, B_k) + d(B_k, Q_k) \\ &= d(C_0, A_0) + d(A_0, B_0) + d(B_0, C_0) \\ &= \delta_0, \end{aligned}$$

où l'on a noté δ_0 le périmètre du triangle $A_0B_0C_0$, i.e.

$$\delta_0 = d(C_0, A_0) + d(A_0, B_0) + d(B_0, C_0).$$

Par le théorème 1.11 b), on sait que

$$d(C_k, Q_k) = \left| \frac{C_0Q_k}{C_0Q_1} \right| d(C_1, Q_1) = k d(C_1, Q_1).$$

Par conséquent, nous avons

$$d(C_1, Q_1) = \frac{1}{k} d(C_k, Q_k) \leq \frac{\delta_0}{k}$$

pour tout entier k . Cela n'est possible que si $d(C_1, Q_1) = 0$. □

1.9 La notion de vecteur fixe

Définition. Un vecteur fixe de \mathbb{E}^3 est une paire ordonnée de points (A, B) dans \mathbb{E}^3 . On le note \overrightarrow{AB} et on le représente comme un segment orienté ou une flèche reliant les deux points on dit que le point A est *l'origine* du vecteur et B son *extrémité*. Un vecteur fixe est parfois appelé un *bi-point*.

On note \mathbb{V}_A^3 l'ensemble des vecteurs fixes d'origine A , un élément de \mathbb{V}_A^3 est souvent désigné par une lettre grasse ou une lettre surfléchée ; le vecteur $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ est représenté géométriquement par une flèche reliant l'origine A à l'extrémité B .



Si $B = A$, on dit que le vecteur est *nul* et on note $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

La raison pour laquelle on introduit les vecteurs en géométrie vient de la possibilité de définir des opérations algébriques. Ces opérations nous permettent d'utiliser les méthodes de l'algèbre linéaire dans l'étude de problèmes géométriques : il s'agit là d'un outil très puissant.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

La première opération algébrique est la multiplication d'un vecteur par un nombre réel (habituellement appelé un *scalaire* dans le contexte de la géométrie vectorielle).

Étant donnés deux points distincts A et $B \in \mathbb{E}^3$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait par l'axiome 2 qu'il existe un unique point P_λ qui est aligné sur A, B et dont le rapport de section est $\frac{AP_\lambda}{AB} = \lambda$.

Définition. Le produit du vecteur \overrightarrow{AB} par le scalaire λ est par définition le vecteur $\overrightarrow{AP_\lambda}$:

$$\lambda \overrightarrow{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{AP_\lambda}.$$

Pour le vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ on convient que $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$, pour tout λ .

Terminologie

On dit que deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} sont *colinéaires* s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul tel que $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

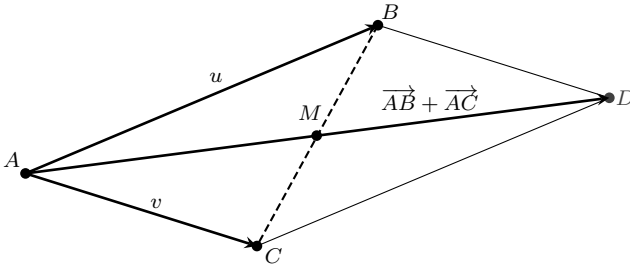
Dans le cas où $\lambda > 0$, le vecteur $\lambda \overrightarrow{AB}$ a le même sens que \overrightarrow{AB} et dans le cas où $\lambda < 0$, il a le sens opposé. Si $\lambda = -1$, on écrit simplement $-\overrightarrow{AB}$ au lieu de $(-1) \cdot \overrightarrow{AB}$.

Somme vectorielle

La seconde opération est la *somme vectorielle* : soient $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \in \mathbb{V}_A^3$ deux vecteurs fixes d'origine A . On définit leur somme par la relation

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

où M est le milieu du segment $[B, C]$.

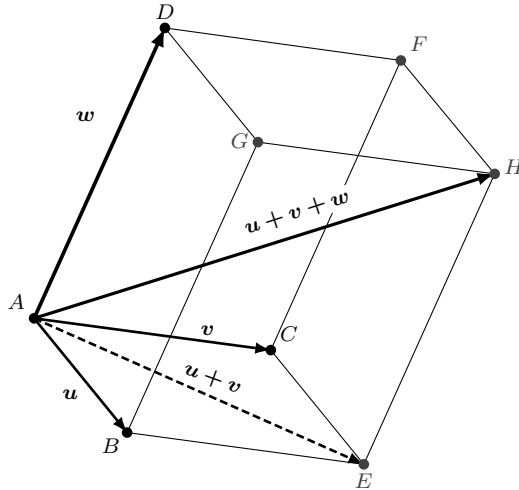


Si $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de \mathbb{V}_A^3 alors il existe un unique point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme (lemme 1.6) ; on dit que ce parallélogramme est *construit sur les vecteurs* \mathbf{u} et \mathbf{v} et on le note $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Observons que la somme vectorielle $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est donnée par la diagonale de ce parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

De même, si $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs d'origine A , alors, en utilisant le lemme 1.6 et le théorème du prisme 1.12, on peut construire des points E et G, H tels que $ABECDGHE$ est un parallélépipède. On note $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ce parallélépipède et on dit qu'il est *construit sur ces trois vecteurs*.



Théorème 1.13 *La somme de trois vecteurs $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ de \mathbb{V}_A^3 est la grande diagonale du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.*

PREUVE. Observons que $BGDA$ et $BGHE$ sont des parallélogrammes. le théorème du prisme (1.12) nous dit alors que $ADHE$ est un parallélogramme. Le vecteur $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AE}$ est la diagonale du parallélogramme $ABEC$, par conséquent $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}$ est la diagonale du parallélogramme $ADHE$. Ce vecteur est donc bien la grande diagonale du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. \square

Théorème 1.14 *Les opérations de multiplication par un scalaire et de somme vectorielle possèdent les propriétés suivantes (où $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_A^3$ sont des vecteurs fixes d'origine A et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des nombres) :*

- | | |
|--|---|
| (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (2) $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ |
| (3) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ | (4) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ |
| (5) $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$ | (6) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$ |
| (7) $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$ | (8) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. |

En d'autres termes, \mathbb{V}_A^3 est un espace vectoriel⁴.

4. Nous supposons le lecteur familier avec les notions élémentaires de l'algèbre linéaire :

On verra plus tard avec la proposition 2.7 que \mathbb{V}_A^3 est un espace vectoriel de dimension 3.

PREUVE. Nous laissons la preuve des propriétés (1) à (5) en exercice, et nous démontrons les propriétés (6), (7) et (8).

Pour prouver (6), on note $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $\lambda\mathbf{v} = \overrightarrow{AB'}$ et $\mu\mathbf{v} = \overrightarrow{AB''}$.



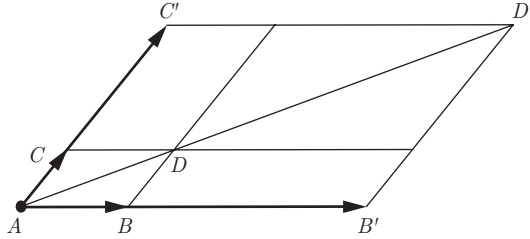
Par la proposition 1.1, on sait que $d(B', B'') = |\mu - \lambda|d(A, B)$. Soit M le point défini par $\overrightarrow{AM} = (\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2})\mathbf{v}$, alors le même résultat entraîne que

$$d(B', M) = \left| \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} \right| d(A, B) = d(M, B'').$$

Le point M est donc le milieu de $[B', B'']$. On a donc en utilisant la propriété (5),

$$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB''} = 2\overrightarrow{AM} = 2 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \mathbf{v} = (\lambda + \mu)\mathbf{v}.$$

La propriété (7) est une conséquence du théorème de Thalès. Soient $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$, et notons B' , C' les points tels que $\lambda\mathbf{v} = \overrightarrow{AB'}$ et $\lambda\mathbf{w} = \overrightarrow{AC'}$. Notons aussi D et D' les points tels que $ABDC$ et $AB'D'C'$ sont des parallélogrammes.



Comme les droites $L_{AC'}$, L_{BD} et $L_{B'D'}$ sont parallèles, on a

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AB'}{AB} = \lambda.$$

C'est-à-dire $\overrightarrow{AD'} = \lambda\overrightarrow{AD}$. On a donc

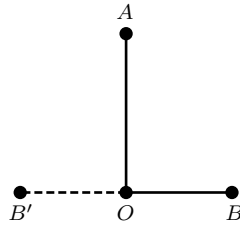
$$\lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD'} = \lambda\overrightarrow{AD} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

La propriété (8) est une conséquence évidente du théorème 1.13. □

1.10 Orthogonalité

Définition. On dit que le segment $[O, A]$ est *orthogonal* à $[O, B]$, et on note $[O, A] \perp [O, B]$, si $d(A, B') = d(A, B)$ où B' est le point symétrique de B par rapport à O .

Observons que dans cette définition, le triangle ABB' est isocèle en A .



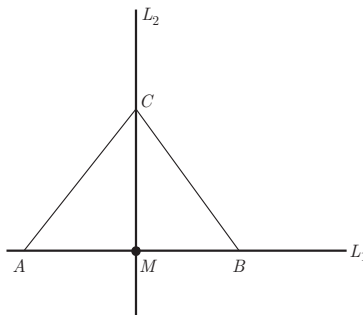
Une propriété fondamentale de l'orthogonalité est qu'elle concerne les droites portées par les segments plutôt que les segments eux-mêmes. Cette propriété ne se démontre pas et se formule donc comme un axiome.

Axiome 6 Si O, A, B sont trois points tels que $A \neq O$ et $B \neq O$ et $[O, A] \perp [O, B]$, alors $[O, A'] \perp [O, B']$ pour tous points $A' \in L_{OA}$ et $B' \in L_{OB}$.

Nous pouvons formuler cet axiome dans le langage vectoriel : l'axiome 6 dit que si les vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} sont orthogonaux, alors c'est aussi le cas des vecteurs $s\vec{OA}$ et $t\vec{OB}$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

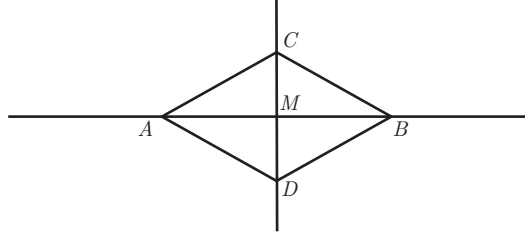
Cet axiome fonde et justifie la définition suivante.

Définition. On dit que la droite L_1 est *orthogonale* (ou *perpendiculaire*) à L_2 , et on note $L_2 \perp L_1$, si ces deux droites se coupent en un point O et s'il existe des points $A \in L_1$ et $B \in L_2$ tels que $A \neq O$ et $B \neq O$ et $[O, A]$ est perpendiculaire à $[O, B]$.



L'axiome 6 nous dit que la définition des droites perpendiculaires ne dépend en réalité pas du choix des points $A \in L_1$ et $B \in L_2$.

Proposition 1.15 *Soient L_1 et L_2 deux droites quelconques. Si $L_2 \perp L_1$, alors $L_1 \perp L_2$.*



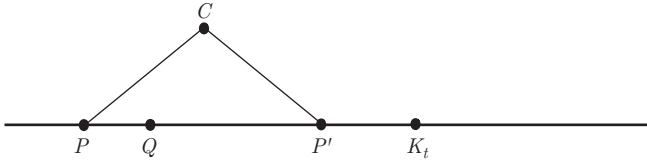
PREUVE. Par hypothèse, les deux droites se coupent en un point $M = L_1 \cap L_2$, et il existe un triangle ABC qui est isocèle en C , avec $A, B \in L_1$, $C \in L_2$ et tel que M est le milieu de $[A, B]$.

Soit $D \in L_2$ le point symétrique à C depuis M , alors $ACBD$ est un parallélogramme car les diagonales $[A, B]$ et $[C, D]$ se coupent en leur milieu M . Par conséquent

$$d(D, B) = d(C, A) = d(C, B),$$

donc le triangle DBC est isocèle en B et le milieu de $[D, C]$ est le point d'intersection des deux droites, ce qui signifie que $L_1 \perp L_2$. \square

Proposition 1.16 (construction d'une perpendiculaire) *Considérons un point C et une droite L ne passant pas par C . Alors il existe une droite perpendiculaire à L passant par C .*



PREUVE. Montrons d'abord qu'il existe deux points distincts P, P' sur L tels que $d(C, P) = d(C, P')$ (i.e. le triangle PCP' est isocèle en C).

Choisissons deux points distincts arbitraires $P, Q \in L$. Si $d(C, P) = d(C, Q)$, la preuve est finie. Sinon on peut supposer (quitte à échanger les deux points) que $d(C, P) > d(C, Q)$. Notons $K_t \in L$ le point tel que $\frac{PK_t}{PQ} = t$, et notons $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = d(C, K_t)$. On remarque que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t) - f(s)| = |d(C, K_t) - d(C, K_s)| \leq d(K_t, K_s) = d(P, Q) |t - s|.$$

On en déduit que si $t \rightarrow s$, alors $f(t) \rightarrow f(s)$, la fonction f est donc continue. Observons aussi que

$$f(t) = d(C, K_t) \geq d(P, K_t) - d(P, C) = |t| d(P, Q) - d(P, C),$$

donc $f(t) \geq d(P, C)$ si $t \geq 2 \frac{d(P, C)}{d(P, Q)}$. Mais d'autre part, on a

$$f(1) = d(C, K_1) = d(C, Q) < d(C, P).$$

Le théorème de la valeur intermédiaire nous dit alors qu'il existe t_0 dans l'intervalle $1 < t_0 \leq 2 \frac{d(P, C)}{d(P, Q)}$ tel que $f(t_0) = d(C, P)$.

Le point $P' = K_{t_0}$ vérifie la condition voulue :

$$d(C, P') = d(C, K_{t_0}) = f(t_0) = d(C, P).$$

Soit $M \in L$ le milieu du segment $[P, P']$, alors la droite L_{CM} passant par C et M est orthogonale à L . \square

REMARQUE. Nous admettrons sans démonstration que cette perpendiculaire est unique : ceci fait l'objet de notre dernier axiome.

Axiome 7 *Pour toute droite L et tout point P extérieur à L il existe une et une seule droite perpendiculaire à L et passant par P .*

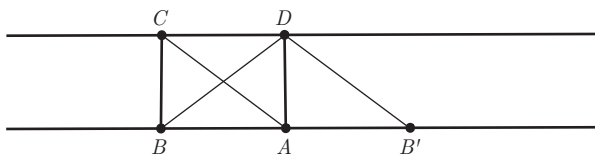
Nous étudierons la relation d'orthogonalité avec plus de détails dans le chapitre 3, lorsque nous serons plus familiers avec les méthodes vectorielles. Nous démontrerons alors le théorème de Pythagore et d'autres propriétés.

1.11 Le rectangle

Parmi tous les parallélogrammes, il convient de distinguer le rectangle.

Définition. Un parallélogramme s'appelle un *rectangle* s'il possède deux côtés qui sont perpendiculaires.

Proposition 1.17 *Le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle si et seulement si les diagonales ont même longueur : $d(A, C) = d(B, D)$.*



PREUVE. Notons B' le point symétrique de B par rapport A , alors $d(B', D) = d(B, D)$ car les droites L_{AB} et L_{AD} sont orthogonales. D'autre part $AB'DC$ est un parallélogramme puisque AB' et CD sont parallèles et

$$d(A, B') = d(A, B) = d(C, D).$$

Ainsi les côtés opposés de $AB'DC$ ont même longueur, et donc

$$d(A, C) = d(B', D) = d(B, D).$$

La réciproque se prouve par le même raisonnement : si $d(A, C) = d(B, D)$, alors $d(B', D) = d(A, C) = d(B, D)$ et les droites L_{AB} et L_{AD} sont donc orthogonales. \square

Proposition 1.18 *Soient L, L' et L'' trois droites coplanaires telles que $L' \perp L$. Alors L'' est perpendiculaire à L si et seulement si L' et L'' sont parallèles :*

$$L'' \perp L \quad \Leftrightarrow \quad L'' \parallel L'$$

PREUVE. Supposons d'abord que $L' \perp L$ et $L'' \parallel L'$. Notons $A = L' \cap L$ et $B = L'' \cap L$. Choisissons ensuite un point $C \neq B$ sur L'' et notons D le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Observons que $D \in L'$ car $L' \parallel L''$; d'autre part $d(C, A) = d(D, B)$ car $ABCD$ est un rectangle (appliquer la proposition précédente).

Notons A' le point symétrique de A par rapport B , alors $BDCA'$ est un parallélogramme et on a donc

$$d(C, A) = d(D, B) = d(C, A'),$$

ce qui signifie que $L'' \perp L$.

La réciproque se démontre à partir des axiomes 5 et 7. Supposons que $L' \perp L$ et $L'' \perp L$ et choisissons un point $P \in L''$ quelconque. Notons L''' l'unique droite parallèle à L' passant par P : nous venons de prouver que $L''' \perp L$, donc $L''' = L''$ par l'axiome 7. Ceci montre que L'' est parallèle à L' . \square

1.12 Le plan euclidien \mathbb{E}^2

L'espace euclidien \mathbb{E}^3 que nous avons décrit dans ce chapitre est un modèle mathématique de l'espace physique, l'espace à trois dimensions qui nous entoure. Pour décrire le modèle géométrique d'un espace \mathbb{E}^2 à deux dimensions (que l'on peut se représenter par une feuille de papier ou un tableau noir qui seraient illimités), nous devons remplacer l'axiome 4 par un axiome affirmant que tous les points sont coplanaires et qui peut s'énoncer ainsi :

Il existe au moins trois points non alignés A, B, C dans \mathbb{E}^2 ; et tout point P de \mathbb{E}^2 appartient à (au moins) une droite rencontrant $L_{AB} \cup L_{AC}$ en deux points distincts.

Il est clair que tous les résultats du présent chapitre restent valables dans le plan euclidien \mathbb{E}^2 , à l'exception de ceux faisant explicitement mention de système de points non coplanaires ou de plans distincts (ces résultats devenant sans objet).

Notons que le théorème du prisme 1.12 reste valable et important, même si dans \mathbb{E}^2 , tous les prismes et les parallélépipèdes sont dégénérés.

Dans la suite du livre, nous noterons \mathbb{E}^n (ou \mathbb{E}) lorsque les raisonnements seront indépendants de la dimension et s'appliqueront aussi bien au plan \mathbb{E}^2 qu'à l'espace \mathbb{E}^3 .

1.13 Exercices

1.13.1 Prouver que si A, B, C sont trois points de \mathbb{E}^3 , alors

$$d(A, B) \geq |d(A, C) - d(B, C)|.$$

1.13.2 Montrer à partir de l'inégalité du triangle, que si A, B, C, D sont quatre points quelconques, alors $d(A, D) \leq d(A, B) + d(B, C) + d(C, D)$.
Formuler et prouver une généralisation à un nombre quelconque de points.

1.13.3 Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 15, 9 et 4 ?

1.13.4 Prouver que si $A \neq B$, alors C est aligné sur AB si et seulement si

$$d(A, B) = |d(A, C) \pm d(C, B)|.$$

1.13.5 Il y a deux synonymes de « rapport de section » dans le texte. Quels sont-ils ?

1.13.6 Étant donné deux points A, B , construire les points $P, Q, R \in L_{AB}$ sachant que $\frac{AP}{AB} = 5$, $\frac{AQ}{AB} = \frac{3}{4}$ et $\frac{AR}{AB} = -\frac{3}{2}$.

1.13.7 Sachant que $\frac{AQ}{AB} = 3$, que vaut $\frac{QB}{QA}$?

1.13.8 Sachant que $\frac{AP}{AB} = \lambda$, que vaut $\frac{BA}{BP}$?

1.13.9 Le milieu M du segment $[A, B]$ est défini par la condition $d(A, M) = d(M, B) = \frac{1}{2}d(A, B)$ (définition 1.1) .

Prouver que l'on peut caractériser ce point par la relation $\frac{MB}{MA} = -1$, et aussi par la relation $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. En déduire que le point milieu d'un segment est bien unique.

1.13.10 Montrer qu'un point C sur L_{AB} appartient au segment $[A, B]$ si et seulement si $0 \leq \frac{AC}{AB} \leq 1$.

1.13.11 Soient $A, B \in \mathbb{E}^3$ deux points quelconques. Montrer que si $0 \leq s \leq d(A, B)$, alors il existe un unique point $P \in [A, B]$ tel que $d(A, P) = s$.

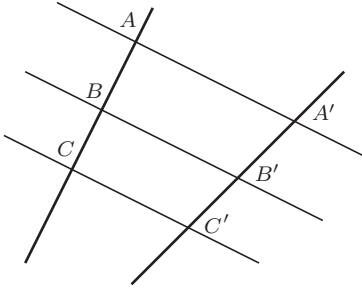
1.13.12 Les *demi-droites* définies par deux points distincts A et B sont les ensembles

$$\ell_{AB}^+ := \left\{ P \in L_{AB} \mid \frac{AP}{AB} > 0 \right\} \quad \text{et} \quad \ell_{AB}^- := \left\{ P \in L_{AB} \mid \frac{AP}{AB} < 0 \right\}$$

Montrer que deux points $P, Q \in L_{AB}$, différents de A , appartiennent à la même demi-droite d'origine A si et seulement si $A \notin [P, Q]$.

1.13.13 Démontrer le Théorème de Varignon : *dans un quadrilatère quelconque, les milieux des côtés forment les sommets d'un parallélogramme.*

1.13.14 Prouver que trois droites coplanaires et parallèles coupent des segments selon un même rapport de section : Si ABC et $A'B'C'$ sont alignés et si $L_{AA'}$, $L_{BB'}$ et $L_{CC'}$ sont parallèles, alors $\frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'}$.



$$\boxed{\frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'}}$$

1.13.15 Vérifier les propriétés (1) à (5) du théorème 1.14.

1.13.16 Montrer que si \mathbf{b} est un vecteur non nul et si $t\mathbf{b} = s\mathbf{b}$, alors $s = t$.

1.13.17 Montrer que le milieu du segment $[P, Q]$ est donné par $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

1.13.18 Prouver que l'axiome 3 peut se déduire du théorème 1.11. Ce fait entraîne-t-il que l'on pourrait se passer de l'axiome 3?

1.13.19 (*) Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si la fonction $f(t) = d(P_t, Q_t)$ est une fonction bornée où $P_t \in L_{AB}$ et $Q_t \in L_{DC}$ sont les points dont les rapports de section sont $\frac{AP_t}{AB} = \frac{DQ_t}{DC} = t$ (on suppose $A \neq B$ et $C \neq D$).

Avec plus de travail, prouver ensuite que $f(t)$ est en réalité constante si $ABCD$ est un parallélogramme.

1.13.20 Prouver que deux droites L et L' sont parallèles si et seulement s'il existe des suites de points $\{P_k\}$ sur L et $\{P'_k\}$ sur L' telles que

$$d(P_k, P_0) \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad d(P_k, P'_k) \text{ est bornée.}$$

En déduire une nouvelle preuve de la transitivité du parallélisme (théorème 1.4).

1.13.21 Le livre I des *Éléments* d'Euclide s'ouvre avec 23 définitions. Trouver ces définitions (dans une bibliothèque, une encyclopédie ou sur l'internet), les lire et les commenter.

1.14 Annexe : L'axiomatisation de la géométrie

L'axiomatisation d'une théorie mathématique poursuit deux buts. Le premier est d'ordre pédagogique, il s'agit de mettre clairement en évidence les faits fondamentaux que l'on suppose donnés à la base de la théorie. Les axiomes doivent être reconnus comme évidents et tous les autres résultats de la théorie doivent pouvoir ensuite se prouver à partir des axiomes.

Le second but de l'axiomatisation est de rendre le théorie absolument rigoureuse en formalisant toutes les démonstrations qui doivent se déduire par un enchaînement logique remontant aux axiomes. Le but est d'évacuer toute référence à l'intuition qui est considérée comme source d'erreurs possibles. Les deux buts visés par l'axiomatisation peuvent sensiblement différer.

L'axiomatique présentée dans les *Éléments* d'Euclide a été considérée comme le modèle parfait de la rigueur scientifique jusqu'au 19^e siècle : elle est en outre assez simple et intuitive. L'axiomatique euclidienne n'est cependant plus considérée comme assez rigoureuse aujourd'hui, notamment parce qu'elle utilise plusieurs notions mal définies.

David Hilbert a construit en 1899 une axiomatisation formelle de la géométrie fondée sur un système de 21 axiomes. Le lecteur intéressé trouvera une présentation détaillée dans [23]. À partir des années 1930, plusieurs mathématiciens (en particulier Birkhoff, Tarski et Von Neuman) ont proposé des axiomatiques de la géométrie plus simples que celle de Hilbert, avec l'objectif annoncé d'en faire un outil pédagogique (y compris pour l'enseignement secondaire). Le gain de simplicité provient principalement du fait que l'on suppose que l'étudiant connaît a priori la droite réelle \mathbb{R} et éventuellement quelques rudiments du langage ensembliste ainsi que des notions telles que celles de limite ou de continuité. Chez Euclide, ces notions apparaissent sous la forme d'une *théorie des proportions* ; théorie développée à partir du cinquième livre des *Éléments* et due à Eudoxe.

L'axiomatique chez Euclide La conception de la géométrie en tant que science déductive dont les propositions sont des *théorèmes* qui se démontrent par des raisonnements rigoureux à partir d'un petit nombre de principes évidents (les axiomes) remonte au moins à Platon puis à Aristote, et peut-être déjà à l'école pythagoricienne. Au troisième siècle avant J.-C., Euclide d'Alexandrie (env. 325-265) rédige un traité en treize livres qu'il appelle simplement les *Éléments*, et qui rassemble l'essentiel de la géométrie et de l'arithmétique théoriques connues à son époque. Jusqu'au dix-huitième siècle,

c'est l'un des ouvrages le plus lu, édité et commenté après la Bible. Euclide propose cinq *postulats*⁵ pour fonder la géométrie, qui sont rédigés de la façon suivante.

Il est demandé d'admettre :

- 1.) *que l'on peut mener une ligne droite de tout point à tout point,*
- 2.) *et prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée,*
- 3.) *et décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle,*
- 4.) *que tous les angles droits soient égaux entre eux,*
- 5.) *et que si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

Cette axiomatique n'est pas parfaite ; par exemple Euclide ne précise pas que la droite passant par deux points distincts est unique. Mais c'est le cinquième postulat qui a posé le plus de problèmes : il ne semble en rien évident, et de nombreuses et vaines tentatives ont été élaborées pour le démontrer à partir des quatre premiers postulats (et en faire ainsi un théorème). En 1820, Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792–1856) a construit une géométrie consistante pour laquelle le 5^e postulat est faux, c'est la *géométrie non euclidienne* de Lobatchevskii (aussi appelée *géométrie hyperbolique*). L'existence d'une géométrie non euclidienne consistante prouve qu'il est impossible de démontrer le 5^e postulat à partir des quatre premiers.

Au cinquième siècle après J.-C., Proclus (411-485) rédige des précisions et commentaires sur les *Éléments* d'Euclide. Il découvre une façon simplifiée d'énoncer le cinquième postulat : *par un point extérieur à une droite donnée, il passe une et une seule parallèle à cette droite* (cette formulation est parfois attribuée à John Playfair, 1748-1819). C'est le postulat des parallèles tel que nous l'énonçons habituellement et tel que nous l'utilisons dans ce livre.

Il faut bien sûr que la présentation des axiomes soit précédée de quelques définitions. Euclide en est conscient et débute son texte par 35 définitions. Les définitions données ne sont pas toutes très claires ou rigoureuses. Par exemple la quatrième définition est celle de la droite, Euclide l'énonce ainsi : *une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle*. Cette définition reste un peu obscure et Legendre (1752-1833) propose la définition suivante, qui est sans doute la plus familière : *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* (cette définition sera justifiée rigoureusement au chapitre 6, proposition 6.6). Dans le présent texte, nous définissons la droite passant par deux points comme *le lieu des points alignés sur ces deux points*. Notons que cette définition est rigoureuse, puisque la notion d'alignement est définie à partir de celle de distance.

L'axiomatique dans ce livre L'axiomatique présentée dans ce livre est nouvelle, mais elle se situe dans l'esprit de Birkhoff et de ses suiveurs. Nous avons décidé de supposer connues les notions élémentaires de la théorie des ensembles et de la structure du corps des réels, et nous pouvons donc supposer d'emblée que l'espace euclidien est un ensemble et un espace métrique. Nous nous autorisons à utiliser des raisonnements algébriques et quelques arguments élémentaires de continuité. Mathématiquement, cette axiomatique vise à construire rapidement la notion de vecteur, avec la structure d'espace vectoriel associée. Cette axiomatique s'en tient à la notion de distance

5. Euclide fait une distinction entre les *axiomes* et les *postulats*, cette distinction n'est plus faite aujourd'hui. Le mot *postulat* signifie *demande* ; c'est une hypothèse dont on demande qu'elle soit acceptée sans preuve.

comme unique notion fondamentale. Nous ne parlons donc pas d'aire, de volume ou d'angle, ces notions pouvant être avantageusement construites ultérieurement, lorsque les outils de l'algèbre linéaire sont disponibles.

Rappelons nos axiomes sous une forme synthétique :

Axiome 0 (axiome fondamental) *A toute paire de points A, B est associée un nombre réel $d(A, B)$ tel que pour tous A, B, C :*

- i) $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$;*
- ii) $d(A, B) = d(B, A)$;*
- iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.*

Axiome 1 *Par deux points distincts A, B , il passe une et une seule droite.*

Axiome 2 *Le rapport de section associé à deux points distincts décrit une bijection entre les points de la droite passant par ces deux points et la droite réelle \mathbb{R} .*

Axiome 3 *La symétrie de centre A respecte les distances.*

Axiome 4

- i) Il existe au moins un plan.*
- ii) Si un plan contient deux points, il contient toute la droite passant par ces deux points.*
- iii) Trois points non alignés appartiennent à un plan unique.*
- iv) Aucun plan n'est tout l'espace.*
- v) Deux plans non disjoints se rencontrent en plusieurs points.*

Axiome 5 (postulat des parallèles)

Par un point extérieur à une droite, il passe une unique droite parallèle à cette droite.

Axiome 6 *Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors il en est de même de tout multiple de ces vecteurs.*

Axiome 7 *Pour toute droite L et tout point P extérieur à L il existe une et une seule droite perpendiculaire à L et passant par P .*

Remarquons pour terminer qu'une axiomatisation idéale se doit d'être économique. Il ne devrait donc pas y avoir de redondance et chaque axiome devrait être indépendant de tous les autres. Cela n'est pas exactement le cas ici, l'axiome 7 est en réalité une conséquence des six autres : c'est donc un théorème (voir par exemple les articles [24, 26] cités dans la bibliographie). Cependant, la démonstration de l'unicité de la perpendiculaire nous éloignerait trop de nos méthodes qui se veulent élémentaires et il est ainsi commode de l'accepter en tant qu'axiome.

Mentionnons enfin qu'il existe une riche littérature sur le problème des fondements de la géométrie. Le lecteur intéressé trouvera une introduction accessible à ces questions dans le livre [39].

Chapitre 2

Bases de la géométrie vectorielle et géométrie affine

La géométrie affine est l'étude des propriétés de l'espace qui ne dépendent que des notions de droite et de rapport de section. Les notions de plan et de parallélisme appartiennent à la géométrie affine, mais pas les notions d'angle, d'orthogonalité ou de volume. Les axiomes 6 et 7 du premier chapitre ne jouent aucun rôle en géométrie affine.

Il n'est pas facile de retrouver l'étymologie du mot « affine » en géométrie. Une origine possible remonte à Euler et son célèbre livre *Introductio in analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse des infiniment petits) publié à Lausanne en 1748. Le chapitre 18 du second tome a pour titre *De Similitudine & Affinitate Linearum Curvarum* (De la similitude et de l'affinité des courbes). Après avoir discuté de la géométrie des courbes dans les chapitres précédents, Euler s'intéresse au changement de coordonnées de type $(x, y) \rightarrow (ax, by)$. Il remarque que ce changement de coordonnées transforme une courbe en une courbe semblable si et seulement si $a = b$. Lorsque $a \neq b$, les courbes ne sont plus semblables (par exemple un cercle est transformé en ellipse), mais Euler dit qu'elles conservent une certaine « affinité » entre elles. La géométrie affine étudie les propriétés géométriques des figures qui sont conservées par le genre de transformations que considérait Euler.

Pour étudier la structure affine de l'espace euclidien \mathbb{E}^3 , il est très utile d'introduire les notions de *vecteur libre* et de *repère affine*, nous le faisons dans ce chapitre et nous appliquons ces concepts à l'étude des plans et des droites et de quelques propriétés affines des triangles.

2.1 Vecteurs fixes

Rappelons qu'un vecteur fixe dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 est un couple ordonné de points (A, B) de l'espace et qu'on le représente par le segment orienté reliant

ces deux points. On note un tel vecteur par \overrightarrow{AB} et on dit que A est l'*origine* et B l'*extrémité* du vecteur. L'ensemble de tous les vecteurs d'origine A est noté par \mathbb{V}_A^3 . Si $A = B$, on dit que le vecteur est nul et on note $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

Si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul, et $\rho \in \mathbb{R}$ est un nombre, on définit un nouveau vecteur $\rho \cdot \mathbf{v} = \rho \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ qui a la même origine et dont l'extrémité B' vérifie les trois conditions suivantes :

- B' est aligné sur A et B ,
- $d(A, B') = |\rho|d(A, B)$,
- le point A est situé entre B et B' si et seulement si $\rho < 0$.

Le nombre ρ s'appelle le *rapport de section* de B' par rapport à A et B , il se note $\rho_{AB}(B')$ ou $\frac{AB'}{AB}$.

Si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs fixes de même origine A , alors la somme de ces deux vecteurs est le vecteur \overrightarrow{AD} où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

L'ensemble \mathbb{V}_A des vecteurs d'origine A est un *espace vectoriel* pour les deux opérations que nous venons de définir, cela signifie que les règles de calcul suivantes sont valides :

$$\begin{array}{ll}
 (1) \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} & (2) \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \\
 (3) 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} & (4) 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \\
 (5) \lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v} & (6) (\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} \\
 (7) \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} & (8) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).
 \end{array}$$

Ces règles de calcul sont de nature algébrique, mais pour les démontrer, il faut raisonner géométriquement. C'est ce que nous avons fait au chapitre 1.

2.2 La notion de vecteur libre

Si deux vecteurs fixes $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_A^3$ et $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_C^3$ ont des origines distinctes $A \neq C$, alors la somme $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ n'est a priori pas définie, ce qui peut être ennuyeux. Pour résoudre ce problème, on introduit le concept de *vecteur libre*. Nous commençons par définir la notion d'équipollence¹.

Définition. Deux vecteurs fixes $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \in \mathbb{V}_A^3$ et $\mathbf{w} = \overrightarrow{CD} \in \mathbb{V}_C^3$ sont dits *équipollents* si $ABDC$ est un parallélogramme.

1. Le mot vient du latin, *equipollens* qui signifie *de même importance*. La notion d'équipollence semble avoir été introduite vers 1835 par Giusto Bellavitis.

Intuitivement, deux vecteurs sont équipollents si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même longueur. On peut aussi dire que \mathbf{v} est équipollent à \mathbf{w} si on peut déplacer « parallèlement à lui-même » \mathbf{v} sur \mathbf{w} .

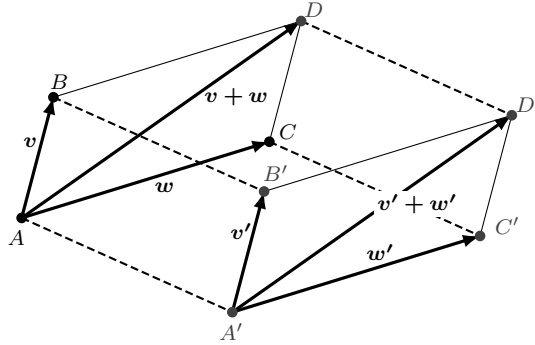


Lemme 2.1 Deux vecteurs équipollents à un troisième sont équipollents entre eux.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du théorème du prisme 1.12. \square

Proposition 2.2 Soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_A^3$, $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in \mathbb{V}_{A'}^3$, quatre vecteurs fixes et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Si \mathbf{v}' est équipollent à \mathbf{v} et \mathbf{w}' est équipollent à \mathbf{w} , alors

- i) $\mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ est équipollent à $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, et
- ii) $\lambda \mathbf{v}'$ est équipollent à $\lambda \mathbf{v}$.

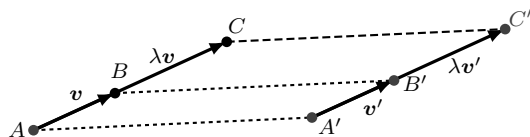


PREUVE

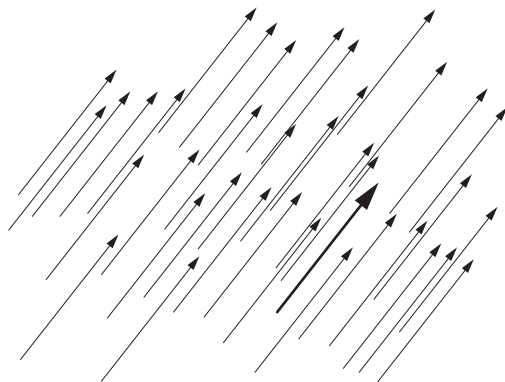
i) Supposons que $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{A'B'}$ et $\mathbf{w}' = \overrightarrow{A'C'}$, alors $\mathbf{v} + \mathbf{w} \equiv \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme et $\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = \overrightarrow{A'D'}$ où D' est le point tel que $A'B'D'C'$ est un parallélogramme.

Par le théorème du prisme 1.12, on sait que $ADD'A'$ est aussi un parallélogramme, ce qui signifie que $\overrightarrow{A'D'}$ et \overrightarrow{AD} sont équipollents.

ii) Ce résultat se déduit du théorème de Thalès et de la figure suivante :



Définition. L'ensemble des vecteurs équipollents à un vecteur fixe donné \mathbf{v} s'appelle le *vecteur libre* associé à \mathbf{v} .



Un vecteur libre est l'ensemble de tous les vecteurs équipollents à un vecteur fixe.

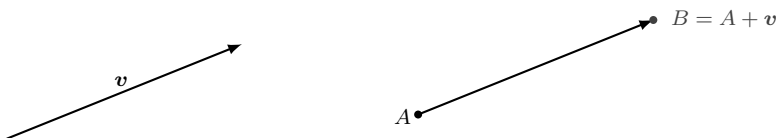
Un vecteur libre est donc un objet géométrique abstrait qui possède une direction, un sens et une longueur, mais qui n'a ni origine ni extrémité fixée.

On représente géométriquement un vecteur libre de la même manière qu'un vecteur fixe (par un segment orienté), mais ce segment peut se déplacer librement dans l'espace, parallèlement à lui-même, tout en représentant le même vecteur libre. L'ensemble de tous les vecteurs libres de \mathbb{E}^3 se note \mathbb{V}^3 .

Notation Le vecteur libre associé à \overrightarrow{AB} est noté \overrightarrow{AB} , on dit aussi que le vecteur fixe \overrightarrow{AB} *représente* le vecteur libre \overrightarrow{AB} .

REMARQUE. Pour tout vecteur libre $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^3$ et tout point A , il existe un unique point $B \in \mathbb{E}^3$ tel que $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. On le note $B = A + \mathbf{v}$.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du lemme 1.6 qui dit que pour trois points donnés P, Q, A dans \mathbb{E}^3 , il existe un quatrième point B , uniquement déterminé, tel que $PQBA$ est un parallélogramme. \square



La somme d'un point A et d'un vecteur libre \mathbf{v} est donc simplement l'extrémité du vecteur fixe d'origine A représentant le vecteur libre \mathbf{v} .

Opérations algébriques sur les vecteurs libres

Prenons deux vecteurs libres $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}^3$ et un scalaire λ . Pour définir la somme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et le produit $\lambda \mathbf{u}$, on choisit un point quelconque $A \in \mathbb{E}^3$ et on note $B = A + \mathbf{u}$ et $C = A + \mathbf{v}$.

Définition. La somme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ est le vecteur libre associé au vecteur fixe $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et le produit $\lambda \mathbf{u}$ est le vecteur libre associé au vecteur fixe $\lambda \overrightarrow{AB}$.

La proposition 2.2 nous garantit que cette définition est indépendante du point A choisi.

Dans la pratique, on passe fréquemment et sans inconvénient d'un vecteur libre à un vecteur fixe qui le représente et vice-versa, et il n'y a souvent pas lieu de faire la distinction entre les deux concepts de vecteurs. La discussion précédente justifie cette façon de procéder. Le théorème 2.3 résume la situation.

Théorème 2.3 *L'ensemble \mathbb{V}^3 des vecteurs libres de \mathbb{E}^3 est un espace vectoriel et l'application*

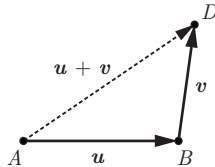
$$\begin{aligned} \mathbb{V}_A^3 &\rightarrow \mathbb{V}^3 \\ \overrightarrow{AB} &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

qui fait correspondre à un vecteur fixe de \mathbb{V}_A^3 le vecteur libre associé est un isomorphisme d'espaces vectoriels. \square

Concrètement, ce théorème signifie que l'application qui à chaque vecteur fixe associe le vecteur libre correspondant est bijective et qu'elle est compatible avec les opérations vectorielles : si $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$.

Règle de Chasles

Pour additionner deux vecteurs libres $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}^3$, on choisit d'abord un point quelconque $A \in \mathbb{E}^3$, puis on note $B = A + \mathbf{u}$ et $D = B + \mathbf{v}$ (i.e. $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{BD}$). La somme des deux vecteurs est alors donnée par $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.



Le théorème 1.12 (théorème du prisme) justifie cette méthode; en effet, la somme de deux vecteurs libres obtenue par cette règle ne dépend pas du choix

du point A et correspond bien à la définition 2.2 de la somme de deux vecteurs libres.

REMARQUE. La règle de Chasles a plusieurs conséquences importantes :

1. La règle de Chasles entraîne que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$, par conséquent

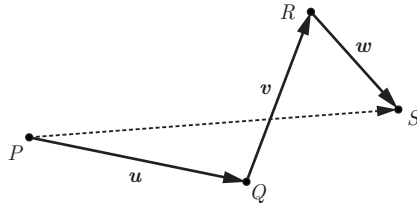
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

2. On sait que $P = A + \mathbf{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{AP} = \mathbf{v}$, or la règle de Chasles dit que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, par conséquent

$$P = A + \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \mathbf{v}.$$

3. La règle de Chasles nous donne une nouvelle explication de l'associativité de la somme vectorielle :

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$



En effet, si $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$ et $\mathbf{w} = \overrightarrow{RS}$, alors

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}.$$

□

Généralisation

Pour construire la somme de plusieurs vecteurs libres $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_n$, on choisit les représentants de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tels que l'extrémité du premier vecteur coïncide avec l'origine du deuxième, l'extrémité du deuxième avec l'origine du troisième, etc. La somme $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_n$ est alors donnée par le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du dernier vecteur.

2.3 Repères affines

Repères sur une droite

Un *repère affine* sur la droite L est simplement la donnée de deux points distincts A et $B \in L$ donnés dans un certain ordre.

On note ce repère (A, B) ou parfois simplement AB ; remarquons que (B, A) est un autre repère de la même droite puisque les points apparaissent dans un autre ordre.

Proposition 2.4 *Choisissons un repère affine (A, B) sur la droite L . Alors pour tout point $P \in L$ il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. Réciproquement, pour tout nombre $t \in \mathbb{R}$ il existe un unique point $P \in L$ tel que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$.*

Cette proposition est essentiellement une reformulation de l'axiome 2 du chapitre 1.

PREUVE. Notons t le rapport de section $t = \frac{AP}{AB}$, alors par définition de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, t est l'unique nombre pour lequel $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$.

Réciproquement, on sait par l'axiome 2 que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un unique $P \in L$ tel que $t = \frac{AP}{AB}$ et donc $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. \square

Cette proposition nous dit que la droite $L = L_{AB}$ s'écrit donc sous la forme suivante, où $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} L &= \{P = A + t\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{P \in \mathbb{E} \mid \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AP} = t\mathbf{b}\}. \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow L \\ t &\mapsto P_t = A + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

s'appelle la *représentation paramétrique affine* de la droite L relative au repère affine (A, B) .

On dit aussi \mathbf{b} est le *vecteur directeur* ou la *base* associé au repère affine (A, B) de la droite L . Notons que ce vecteur n'est pas univoquement associé à la droite (tout multiple non nul de \mathbf{b} est aussi un vecteur directeur de L).

REMARQUE. La représentation paramétrique affine de la droite L_{AB} est donc donnée par la formule $P_t = A + t\overrightarrow{AB}$. Si une origine $O \in \mathbb{E}^3$ a été choisie, le vecteur position du point $P_t \in L$ est donné par

$$\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}.$$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, on a $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, et donc

$$\overrightarrow{OP_t} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}.$$

Il est important de réaliser que cette écriture est indépendante du choix de O , ainsi, si O' est une autre origine, alors on a aussi

$$\overrightarrow{O'P_t} = t\overrightarrow{O'B} + (1-t)\overrightarrow{O'A}.$$

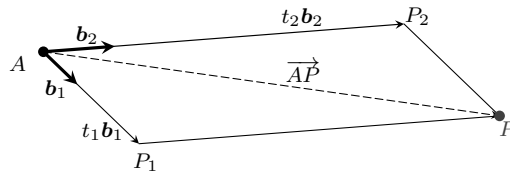
Observons par ailleurs que le point P_t appartient au segment $[A, B]$ si et seulement si $\overrightarrow{OP_t} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$ avec $0 \leq t \leq 1$.

Repères dans un plan

Pour repérer les points dans un plan Π on procède de manière analogue en se servant de *trois* points de référence.

Définition. Un *repère affine dans un plan* Π est un triplet de points non alignés (A, B_1, B_2) de Π .

Étant donné un tel repère, on appelle les deux droites $L_1 = L_{AB_1}$, $L_2 = L_{AB_2}$ passant par A et les points de référence B_1, B_2 les *axes de coordonnées du plan* associés au repère.



Proposition 2.5 Soit (A, B_1, B_2) un repère dans le plan Π et posons $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{AB_i}$, $i = 1, 2$. Alors pour tout $P \in \Pi$ il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, uniquement déterminés, tels que

$$\overrightarrow{AP} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2.$$

Réciproquement, tout point $P \in \mathbb{E}^3$ tel que $\overrightarrow{AP} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2$ appartient au plan Π .

PREUVE. Notons M_1 la droite parallèle à L_1 passant par P et M_2 la parallèle à L_2 passant par P .

Notons ensuite P_1 l'intersection de M_2 avec L_1 et P_2 l'intersection de M_1 avec L_2 . La figure AP_1PP_2 est un parallélogramme et donc

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}.$$

Par la proposition 2.4 on sait qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AP_1} = t_1 \overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{AP_2} = t_2 \overrightarrow{AB_2}$; par conséquent

$$\overrightarrow{AP} = t_1 \overrightarrow{AB_1} + t_2 \overrightarrow{AB_2} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2.$$

Montrons que cette écriture est unique. Supposons pour cela que $\overrightarrow{AP} = s_1 \mathbf{b}_1 + s_2 \mathbf{b}_2$ et notons $Q_i := A + s_i \mathbf{b}_i$ (i.e. $\overrightarrow{AQ_i} = s_i \overrightarrow{AB_i}$).

Alors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ_1} + \overrightarrow{AQ_2}$ et AQ_1PQ_2 est un parallélogramme. L'unicité de la parallèle à L_2 passant par P (axiome 5) entraîne que $Q_1 = P_1$. De même $Q_2 = P_2$, et donc $s_1 = t_1$ et $s_2 = t_2$.

Il reste à prouver la réciproque. Soit donc $P \in \mathbb{E}^3$ un point satisfaisant $\overrightarrow{AP} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2$. Sur chaque droite L_i on a le point P_i défini par $\overrightarrow{AP_i} = t_i \overrightarrow{AB_i}$ (proposition 2.4). Avec ces points on obtient $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}$, et AP_1PP_2 est un

parallélogramme. Puisque les sommets d'un parallélogramme sont coplanaires et $A, P_1, P_2 \in \Pi$, on en déduit que $P \in \Pi$. \square

Cette proposition 2.5 nous dit que le plan Π est l'ensemble

$$\Pi = \{P = A + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

On note aussi le point $P = P_{(t_1, t_2)}$ et on dit que (t_1, t_2) sont les *coordonnées* ou les *paramètres affines* de ce point relatifs au repère affine (A, B_1, B_2) . L'application

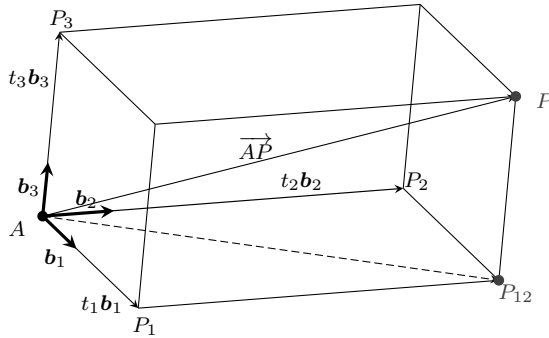
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi \\ (t_1, t_2) &\mapsto P_{(t_1, t_2)} = A + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

s'appelle la *représentation paramétrique affine du plan*.

Repères dans l'espace

Pour repérer les points dans l'espace \mathbb{E}^3 la procédure est la même, mais avec quatre points de référence.

Définition. Un *repère affine de \mathbb{E}^3* est la donnée de quatre points non coplanaires (A, B_1, B_2, B_3) de \mathbb{E}^3 .



Proposition 2.6 Soit $AB_1B_2B_3$ un repère affine de \mathbb{E}^3 , alors pour tout point $P \in \mathbb{E}^3$ il existe $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, uniquement déterminés, tels que

$$\overrightarrow{AP} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + t_3 \mathbf{b}_3$$

où $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{AB_i}$, $i = 1, 2, 3$.

PREUVE. Notons Π_{12} le plan passant par A, B_1, B_2 et $L_3 = L_{AB_3}$.

La droite M_3 qui passe par P et qui est parallèle à L_3 rencontre Π_{12} en un unique point que nous notons P_{12} .

Si $P_3 \in L_3$ est le point tel que $AP_{12}PP_3$ est un parallélogramme, alors

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_{12}} + \overrightarrow{AP_3}.$$

Par les propositions 2.4 et 2.5, on sait qu'il existe $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AP_{12}} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2$, et $\overrightarrow{AP_3} = t_3 \mathbf{b}_3$; nous avons donc $\overrightarrow{AP} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + t_3 \mathbf{b}_3$.

Pour prouver l'unicité de cette écriture, supposons que l'on a

$$\overrightarrow{AP} = t'_1 \mathbf{b}_1 + t'_2 \mathbf{b}_2 + t'_3 \mathbf{b}_3 = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + t_3 \mathbf{b}_3.$$

Notons $P'_{12} \in \Pi_{12}$ et $P'_3 \in L_3$ les points définis par $\overrightarrow{AP'_{12}} = t'_1 \mathbf{b}_1 + t'_2 \mathbf{b}_2$ et $\overrightarrow{AP'_3} = t'_3 \mathbf{b}_3$. Alors $AP'_{12}P'_3P$ est un parallélogramme; en particulier la droite M'_3 parallèle à L_3 et passant par P'_{12} passe par P . Par conséquent elle coïncide avec M_3 . Puisque cette dernière coupe Π_{12} en un point unique, il s'ensuit que $P'_{12} = P_{12}$. La partie unicité de la proposition 2.5 implique que $t'_1 = t_1$ et $t'_2 = t_2$.

Ces relations entraînent que $P'_3 = P_3$, ainsi $t'_3 \mathbf{b}_3 = t_3 \mathbf{b}_3$ et on a donc $t'_3 = t_3$. \square

Cette proposition 2.6 nous dit que l'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ donnée par

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto P = P_{(t_1, t_2, t_3)} = A + t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + t_3 \mathbf{b}_3 \quad (2.1)$$

est bijective. On dit que (t_1, t_2, t_3) sont les *coordonnées* du point P relatives au repère affine (A, B_1, B_2, B_3) .

Donnons quelques rappels d'algèbre linéaire. On dit qu'un espace vectoriel V est de *dimension* n s'il existe n éléments distincts e_1, e_2, \dots, e_n de V tels que tout élément $x \in V$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces éléments :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

où les x_i sont des nombres réels. On dit alors que (e_1, e_2, \dots, e_n) est une *base vectorielle* de V et que (x_1, x_2, \dots, x_n) sont les *composantes* de x dans cette base. Un théorème fondamental du cours d'algèbre linéaire dit que toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre n d'éléments. La notion de dimension d'un espace vectoriel est donc bien définie.

Proposition 2.7 \mathbb{V}_A^3 est un espace vectoriel de dimension 3.

PREUVE. La proposition précédente 2.6 nous dit que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_A^3$ il existe $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, uniquement déterminés, tels que

$$\mathbf{v} = t_1 \mathbf{b}_1 + t_2 \mathbf{b}_2 + t_3 \mathbf{b}_3, \quad (2.2)$$

par conséquent les vecteurs $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{AB_i}$, $i = 1, 2, 3$, forment une base de l'espace vectoriel \mathbb{V}_A^3 . \square

REMARQUE. Il est clair, grâce au théorème 2.3, que l'ensemble \mathbb{V}^3 des vecteurs libres de \mathbb{E}^3 forme également un espace vectoriel de dimension 3 (qui est isomorphe à \mathbb{V}_A^3).

Définition. Les coefficients $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ dans l'équation (2.2) s'appellent les *composantes* du vecteur \mathbf{v} dans la base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Remarquons que les coordonnées d'un point P dans un repère affine (A, B_1, B_2, B_3) sont les composantes du vecteur position \overrightarrow{AP} dans la base vectorielle $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

On indique le repère indifféremment par ses quatre points : (A, B_1, B_2, B_3) ou par son origine et la base vectorielle : $\{A, (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\}$. Les droites $L_i = L_{AB_i}$, $i = 1, 2, 3$, sont les *axes de coordonnées de l'espace* associés au repère. Les plans Π_{ij} passant par les droites L_i et L_j (où $ij = 12, 23, 31$) sont les *plans de coordonnées*.

2.4 La géométrie analytique

En 1637, René Descartes publie l'un des premiers livres de philosophie écrit en français : le *Discours de la méthode*. Ce texte est suivi de trois essais : *La dioptrique*, *Les météores* et *La géométrie* qui sont présentés comme des illustrations de la méthode cartésienne.

C'est dans la *Géométrie* de Descartes que se trouvent clairement formulés pour la première fois le concept de *coordonnées d'un point* et l'usage qu'on peut en faire dans la résolution de problèmes géométriques (ce qu'on appelle communément la *géométrie analytique*).

La notion de repère affine permet de faire le lien entre le point de vue de la géométrie vectorielle et celui de la géométrie analytique de Descartes.

Identification de \mathbb{V}^3 à \mathbb{R}^3

Étant donné une base vectorielle $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de l'espace \mathbb{V}^3 , on peut écrire simplement

$$\mathbf{v} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

pour le vecteur $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ de composantes v_1, v_2, v_3 . On identifie ainsi l'espace \mathbb{V}^3 à \mathbb{R}^3 .

Dans cette formule nous avons écrit \doteq pour souligner le fait que l'identification du vecteur à un élément de \mathbb{R}^3 n'est pas absolue mais dépend du choix de la base.

Si on a deux vecteurs $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$ dans \mathbb{V}^3 et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, les règles de calcul dans un espace vectoriel (théorème 1.14) entraînent que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 + w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3 \\ &= (v_1 + w_1)\mathbf{e}_1 + (v_2 + w_2)\mathbf{e}_2 + (v_3 + w_3)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{v} &= \lambda(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda v_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda v_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda v_3)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda\mathbf{v} \doteq \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}.$$

On peut résumer ces formules en disant qu'il y a un *isomorphisme d'espaces vectoriels* entre \mathbb{V}^3 et \mathbb{R}^3 .

Identification de \mathbb{E}^3 à \mathbb{R}^3

Si l'on se donne maintenant un repère affine $\{O, (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\}$ de \mathbb{E}^3 , alors le point $P = O + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3$ de coordonnées p_1, p_2, p_3 peut s'écrire

$$P \doteq \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons à nouveau le symbole \doteq pour souligner le fait que l'identification du point à un élément de \mathbb{R}^3 est relative au choix du repère affine.

Par cette écriture, on identifie l'espace euclidien \mathbb{E}^3 à \mathbb{R}^3 . Les propriétés algébriques de cette identification sont contenues dans la proposition suivante.

Proposition 2.8 *Prenons un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ de l'espace et considérons trois points $A, P, Q \in \mathbb{E}^3$ donnés par leurs coordonnées dans ce repère :*

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad P \doteq \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad Q \doteq \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Soit également un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^3$ donné par ses composantes dans la base $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{v} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

i) Le point $A + \mathbf{v}$ s'écrit

$$A + \mathbf{v} \doteq \begin{pmatrix} a_1 + v_1 \\ a_2 + v_2 \\ a_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

ii) et le vecteur \overrightarrow{PQ} s'écrit

$$\overrightarrow{PQ} \doteq \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}.$$

PREUVE

(i) C'est une conséquence du fait que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \mathbf{v} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) + (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (a_1 + v_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + v_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + v_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

(ii) La règle de Chasles dit que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, par conséquent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3) - (p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (q_1 - p_1) \mathbf{e}_1 + (q_2 - p_2) \mathbf{e}_2 + (q_3 - p_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

□

En résumé, lorsqu'un repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ a été fixé, on peut identifier les espaces \mathbb{E}^3 , \mathbb{V}^3 et \mathbb{R}^3 (les points, les vecteurs et les triplets de nombres réels). Les vecteurs s'identifient à leurs composantes et les points à leurs coordonnées, vus comme éléments de \mathbb{R}^3 .

REMARQUE. On écrit souvent un vecteur en ligne :

$$\mathbf{v} \doteq (v_1, v_2, v_3),$$

c'est plus pratique pour des raisons typographiques, mais lorsqu'on doit faire du calcul matriciel, on doit revenir à l'écriture en colonne.

Paramétrage affine d'une droite dans l'espace cartésien

On a vu à la proposition 2.4 que la représentation paramétrique affine de la droite L passant par $A, B \in L$ s'écrit :

$$P = A + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ et $t = \frac{AP}{AB}$. Si $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, alors la proposition 2.8 nous permet d'écrire cette représentation paramétrique en coordonnées sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + tb_1 \\ a_2 + tb_2 \\ a_3 + tb_3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.1 On veut calculer le point d'intersection de la droite L passant par les points² $A \doteq (2, 1, 9)$ et $B \doteq (1, 2, 8)$ avec le plan de coordonnées Π_{13} .

SOLUTION. Soit $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (-1, 1, -1)$. La représentation paramétrique de L est donnée par

$$P = A + t\mathbf{v} \doteq (2 - t, 1 + t, 9 - t), \quad t \in \mathbb{R},$$

on cherche t tel que $P \in \Pi_{13}$, i.e. tel que $p_2 = 1 + t = 0$. La solution est $t = -1$, et le point d'intersection cherché est donc $P = (3, 0, 10)$.

Paramétrage affine d'un plan

Soient Π un plan dans \mathbb{E}^3 , et A, B, C trois points *non alignés* dans Π ; notons

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{AC} \doteq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

La proposition 2.5 dit qu'un point $P \in \mathbb{E}^3$ appartient au plan Π si et seulement s'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = A + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}.$$

En coordonnées cette représentation paramétrique prend la forme

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Équation d'un plan

Soit $\Pi = \Pi_{ABC} \subset \mathbb{E}^3$ le plan passant par les trois points non alignés A, B et C . On sait qu'un point P appartient à Π si et seulement s'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$. Comme les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont linéairement indépendants (car les points A, B et C sont non alignés), on peut reformuler cette condition sous la forme

$$P \in \Pi \iff \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont linéairement dépendants.}$$

2. Lorsque c'est plus commode, on représente les coordonnées des points en ligne et non en colonne.

On apprend dans le cours d'algèbre linéaire que trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 sont linéairement dépendants si et seulement si le déterminant de taille 3×3 formé par les composantes de ces vecteurs dans une base quelconque s'annule.

En supposant que l'on ait, dans un repère fixé,

$$P \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A \doteq \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B \doteq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

alors le point P appartient au plan Π si et seulement si le déterminant suivant s'annule :

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cette égalité s'appelle l'équation cartésienne du plan Π .

Exemple 2.2 Illustrons l'utilité d'une telle équation par un petit problème : notons $\Pi = \Pi_{ABC}$ le plan passant par les points $A \doteq (2, 1, 0)$, $B \doteq (0, 0, -3)$ et $C \doteq (1, 1, 1)$ et L la droite passant par $D \doteq (-3, 2, 1)$ et $F \doteq (0, 1, -2)$.

Problème Trouver l'intersection P de L avec Π , puis trouver les nombres s_1, s_2 tels que $P = A + s_1 \overrightarrow{AB} + s_2 \overrightarrow{AC}$.

SOLUTION. L'équation cartésienne du plan Π passant par les points est donnée par

$$\begin{vmatrix} (x - 2) & -2 & -1 \\ (y - 1) & -1 & 0 \\ z & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x - 5y + z + 3 = 0.$$

D'autre part, comme P appartient à L , on peut écrire

$$\begin{aligned} P &= D + t \cdot \overrightarrow{DF} \\ &\doteq (-3, 2, 1) + t \cdot (3, -1, -3) \\ &= (-3 + 3t, 2 - t, 1 - 3t). \end{aligned}$$

Puisque P appartient aussi à Π , on doit avoir

$$0 = x - 5y + z + 3 = (-3 + 3t) - 5(2 - t) + (1 - 3t) + 3 = 0.$$

On a donc $5t - 9 = 0$, c'est-à-dire $t = \frac{9}{5}$. On obtient ainsi le point

$$P \doteq \left(-3 + 3 \cdot \frac{9}{5}, 2 - \frac{9}{5}, 1 - 3 \cdot \frac{9}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{22}{5}\right).$$

Pour trouver s_1, s_2 tels que $P = A + s_1 \overrightarrow{AB} + s_2 \overrightarrow{AC}$, on doit simplement résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} 12/5 &= 2 - 2s_1 - s_2 \\ 1/5 &= 1 - s_1 \\ -22/5 &= 0 - 3s_1 + s_2 \end{cases}.$$

On trouve facilement que $s_1 = \frac{4}{5}$ et $s_2 = -2$. C'est la bonne réponse puisque

$$\begin{aligned} A + s_1 \overrightarrow{AB} + s_2 \overrightarrow{AC} &\doteq (2, 1, 0) + \frac{4}{5} \cdot (-2, -1, -3) - 2 \cdot (-1, 0, 1) \\ &= \left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{22}{5} \right) \doteq P. \end{aligned}$$

2.5 Changements de repères et transformations de coordonnées

Considérons deux repères $\{O, (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)\}$ et $\{A, (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)\}$. Tout point $P \in \mathbb{E}^3$ admet des coordonnées affines par rapport aux deux repères. Notons-les x_i et y_i :

$$P = O + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = A + y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3. \quad (2.3)$$

Nous voulons étudier les relations entre les x_i et les y_i . Supposons que

$$\overrightarrow{OA} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{v}_j = v_{1j} \mathbf{e}_1 + v_{2j} \mathbf{e}_2 + v_{3j} \mathbf{e}_3 \quad j = 1, 2, 3.$$

Alors on a dans les coordonnées associées au repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_j \doteq \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Relativement au second repère le point P est donné par $P = A + y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3$. On a donc dans les coordonnées associées au repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ou encore, en écrivant chaque coordonnée individuellement,

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + v_{i1}y_1 + v_{i2}y_2 + v_{i3}y_3 \\ &= a_i + \sum_{j=1}^3 v_{ij}y_j, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Écriture matricielle

On observe que l'équation (2.5) ci-dessus s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ relativement au repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ s'appelle la *matrice de passage* de la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vers la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

2.6 La géométrie vectorielle dans le plan euclidien \mathbb{E}^2

Le plan euclidien \mathbb{E}^2 est une version simplifiée de l'espace \mathbb{E}^3 ; la géométrie vectorielle se développe donc de la même manière tout en étant plus simple puisque il n'y a qu'un plan.

Les notions de vecteurs libres et de vecteurs fixes, ainsi que les opérations de somme vectorielle et de multiplication par un scalaire, se définissent comme dans \mathbb{E}^3 . On note \mathbb{V}_A^2 l'ensemble des vecteurs fixes d'origine $A \in \mathbb{E}^2$ et \mathbb{V}^2 l'ensemble des vecteurs libres d'origine $A \in \mathbb{E}^2$.

\mathbb{V}_A^2 et \mathbb{V}^2 sont des espaces vectoriels de dimension 2. La correspondance $\overrightarrow{AB} \mapsto \overline{AB}$ qui associe à un vecteur fixe le vecteur libre correspondant est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.

Un repère affine de \mathbb{E}^2 est la donnée de trois points non alignés A, B_1, B_2 . Le choix d'un tel repère définit une base $\mathbf{b}_1 = \overline{AB_1}$, $\mathbf{b}_2 = \overline{AB_2}$ de \mathbb{V}_A^2 (ou de \mathbb{V}^2); cette base permet de représenter tout vecteur par ses deux composantes, et tout point par ses deux coordonnées.

Un raisonnement similaire à celui de la page 61 montre que l'équation de la droite passant par les points $A \doteq (a_1, a_2)$ et $B \doteq (b_1, b_2)$ est

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.7 Orientation du plan et de l'espace

On connaît les expressions *s'orienter*, *avoir le sens de l'orientation*, *être désorienté*. Étymologiquement, le mot « orienter » signifie diriger vers l'orient, mais plus familièrement, ce mot signifie *distinguer les différentes directions* : gauche-droite, haut-bas, etc.

La notion d'orientation d'une droite en géométrie reflète cette signification familière : on dit qu'une droite L est orientée lorsqu'on a choisi un sens de parcours sur cette droite. La droite L est donc orientée lorsque pour chaque paire de points $A, B \in L$ on peut déclarer que l'un des points est antérieur à l'autre. On représente l'orientation de L en dessinant une flèche sur la droite.

Dans le cas du plan \mathbb{E}^2 ou de l'espace \mathbb{E}^3 , une orientation doit être donnée par un critère cohérent permettant de classer les repères affines en deux classes : les repères *directs* (ou d'*orientation positive*) et les repères *indirects* (ou d'*orientation négative*).

Dire que cette classification est cohérente signifie que si un repère direct se déplace ou se déforme continûment, alors il reste à chaque instant un repère direct.

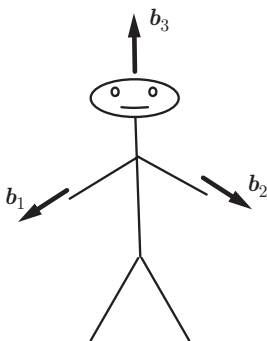
Rappelons que les bases de deux repères se comparent algébriquement au moyen de la matrice de changement de base. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition. On dit que deux repères affines $\{O, (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)\}$ et $\{A, (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)\}$ (ou que les bases $\{\mathbf{a}_i\}$ et $\{\mathbf{e}_j\}$) *ont la même orientation* si la matrice de passage M de la base $\{\mathbf{a}_i\}$ vers la base $\{\mathbf{e}_j\}$ a un déterminant positif. Si le déterminant est négatif, on dit que les repères ont des orientations *opposées*.

Si nous étions en apesanteur, nous ne pourrions pas nous fonder sur la gravitation pour distinguer le haut et le bas, pourtant ces notions garderaient un sens relatif à la position de notre corps. Je peux en effet utiliser mon propre corps pour orienter l'espace : Si je me tiens droit en ouvrant les bras dans un écart naturel, je peux *me penser moi-même* comme un repère affine dont l'origine O est mon cœur, le premier vecteur \mathbf{b}_1 est donné par mon bras droit, le second vecteur \mathbf{b}_2 par mon bras gauche et le troisième vecteur \mathbf{b}_3 pointe en direction de ma tête.

Dans notre vie quotidienne, nous sommes constamment conscients de cette orientation de l'espace. C'est cette conscience d'un espace orienté qui nous permet d'utiliser un tourne-vis ou un tire-bouchon ; c'est elle qui nous permet de monter sur un escalier en colimaçon sans être dérouté à chaque marche et de distinguer dans un miroir une image de la réalité.

Pour le petit enfant, cette conscience de l'orientation n'est pas innée. Elle est acquise en général vers le début de l'âge scolaire. Des difficultés d'orientation peuvent conduire à des difficultés d'apprentissage, en particulier de l'écriture (dyslexie).



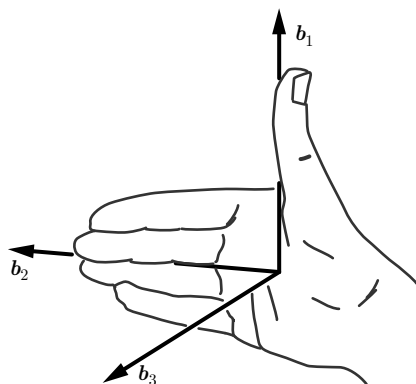
Règle de la main droite

Une manière commode d'orienter l'espace est donnée par la convention suivante.

Soit $\{O, (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\}$ un repère de \mathbb{E}^3 . Plaçons notre main droite sur le plan engendré par $O\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$, le pouce pointant vers \mathbf{b}_1 et les autres doigts vers \mathbf{b}_2 .

Le côté de la paume de la main est le côté *positif* de l'espace, le côté du revers de la main est le côté *négalif* de l'espace.

Le repère $\{O, (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)\}$ est *direct* (ou positivement orienté) si le vecteur \mathbf{b}_3 pointe du côté positif (relativement à $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$).



Choix d'une orientation avec la main droite.

Dans le cas du plan \mathbb{E}^2 , la convention d'orientation usuelle est la suivante : on convient de dire qu'un repère A_0, A_1, A_2 est direct si le cycle

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_0$$

est parcouru dans le sens contraire des aiguille d'une montre.

2.8 Coordonnées homogènes

Les coordonnées sont une manière de représenter un objet géométrique par un système de nombres. On a vu dans ce chapitre comment représenter un point par des coordonnées affines. On peut aussi vouloir représenter d'autres objets, par exemple une droite, par un système de nombres.

Une droite L dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 se définit par son équation cartésienne

$$ax + by + c = 0,$$

et on peut donc considérer que a, b, c sont des « coordonnées » décrivant la droite L . Mais il est clair que si $\lambda \neq 0$, alors l'équation

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$$

représente la même droite. Seules les proportions entre a, b, c sont significatives et il faut donc identifier les deux triplets de nombres

$$(a : b : c) = (\lambda a : \lambda b : \lambda c).$$

On exprime cela en disant que $(a : b : c)$ est un *système de coordonnées homogènes* représentant une droite dans \mathbb{R}^2 .

La situation est semblable pour un plan Π dans l'espace \mathbb{R}^3 , il se décrit par son équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0,$$

et on peut prendre $(a : b : c : d)$ comme coordonnées homogènes du plan. Ces coordonnées ne sont bien définies qu'à multiplication par un scalaire non nul près.

Définition. On dit que $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont les *coordonnées homogènes* d'un point x dans un espace à n -dimensions \mathbb{P}^n lorsque

- a) au moins l'une des coordonnées x_i est non nulle ;
- b) les coordonnées $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ et $(\lambda x_1 : \lambda x_2 : \dots : \lambda x_{n+1})$ représentent le même point de \mathbb{P}^n pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

L'espace \mathbb{P}^n s'appelle alors un *espace projectif* de dimension n .

Coordonnées homogènes affines

Tout point $x = (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n$ tel que $x_{n+1} \neq 0$ peut être vu comme un point de l'espace cartésien \mathbb{R}^n , il suffit pour cela de diviser toutes les coordonnées par x_{n+1} :

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n \quad \longmapsto \quad \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Réciproquement, tout point de \mathbb{R}^n peut être vu comme un point de l'espace projectif \mathbb{P}^n en ajoutant une coordonnée égale à 1

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \longmapsto \quad (x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1) \in \mathbb{P}^n.$$

On parle de coordonnées *homogènes affines* lorsque la dernière coordonnée est égale à 1.

Les points $x = (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n$ tels que $x_{n+1} = 0$ ne correspondent à aucun point de l'espace \mathbb{R}^n , on les appelle les *points à l'infini*.

Les coordonnées homogènes jouent un rôle important dans l'étude des projections et des transformations de l'espace.

Voyons immédiatement une application des coordonnées homogènes affines : la recherche de l'équation d'une droite dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 .

Proposition 2.9 *L'équation cartésienne de la droite L passant par les points $P \doteq (p_1, p_2)$ et $Q \doteq (q_1, q_2)$ est donnée par*

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu que l'équation de L peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & x_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, les propriétés du déterminant nous disent que :

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ p_2 & q_2 - p_2 & x_2 - p_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & x_2 - p_2 \end{vmatrix}.$$

□

Voyons une autre explication de l'équation (2.6) : On sait que la droite L est donnée par une équation cartésienne du type

$$L : ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

l'équation (2.6) est précisément une équation de ce type. De plus, cette équation est clairement satisfaite pour $(x_1, x_2) = (p_1, p_2)$ et pour $(x_1, x_2) = (q_1, q_2)$, elle décrit donc la droite passant par (p_1, p_2) et (q_1, q_2) .

Cette méthode est en général la manière la plus rapide d'écrire l'équation de la droite passant par deux points.

Exemple 2.3 Trouver l'équation de la droite passant par les points $(1, 2)$ et $(5, -1)$.

SOLUTION. En appliquant l'équation (2.6), on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x_1 + 4x_2 - 11 = 0.$$

La proposition précédente (prop. 2.9) se généralise à l'espace à trois dimensions.

Proposition 2.10 *L'équation cartésienne du plan Π passant par les points $P \doteq (q_1, q_2, q_3)$, $Q \doteq (s_1, s_2, s_3)$ et $S \doteq (x_1, x_2, x_3)$ est donnée par*

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & s_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & s_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & s_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

DÉMONSTRATION. On a vu précédemment (p. 61) que l'équation du plan Π peut s'écrire sous la forme d'annulation du déterminant 3×3

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & s_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & s_2 - p_2 & x_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & s_3 - p_3 & x_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

or un calcul semblable à la démonstration de la proposition précédente basé sur les propriétés des déterminants montre que :

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & s_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & s_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & s_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 - p_1 & s_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & s_2 - p_2 & x_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & s_3 - p_3 & x_3 - p_3 \end{vmatrix}.$$

□

2.9 Coordonnées barycentriques

Les coordonnées affines et homogènes sont deux manières de représenter un point par un système de nombres. Les coordonnées barycentriques sont une troisième manière.

Proposition 2.11 *Soit $(A_0A_1A_2)$ un repère affine d'un plan Π . Alors pour tout point $P \in \Pi$ il existe un unique triplet (u_0, u_1, u_2) de nombres réels tels que*

i) $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, et

ii) $u_0 \overrightarrow{PA_0} + u_1 \overrightarrow{PA_1} + u_2 \overrightarrow{PA_2} = \mathbf{0}$.

PREUVE. Prouvons d'abord l'existence. Développons le vecteur $\overrightarrow{A_0P}$ dans la base $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}$:

$$\overrightarrow{A_0P} = u_1 \overrightarrow{A_0A_1} + u_2 \overrightarrow{A_0A_2}.$$

Par la règle de Chasles, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0P} &= u_1(\overrightarrow{A_0P} + \overrightarrow{PA_1}) + u_2(\overrightarrow{A_0P} + \overrightarrow{PA_2}) \\ &= u_1 \overrightarrow{A_0P} + u_1 \overrightarrow{PA_1} + u_2 \overrightarrow{A_0P} + u_2 \overrightarrow{PA_2}. \end{aligned}$$

En regroupant les termes contenant $\overrightarrow{A_0P}$ et en utilisant $\overrightarrow{A_0P} = -\overrightarrow{PA_0}$, on obtient

$$(1 - u_1 - u_2) \overrightarrow{PA_0} + u_1 \overrightarrow{PA_1} + u_2 \overrightarrow{PA_2} = \mathbf{0}.$$

On obtient le triplet voulu en posant $u_0 = (1 - u_1 - u_2)$.

Pour démontrer l'unicité, on suppose que

$$u_0 \overrightarrow{PA_0} + u_1 \overrightarrow{PA_1} + u_2 \overrightarrow{PA_2} = v_0 \overrightarrow{PA_0} + v_1 \overrightarrow{PA_1} + v_2 \overrightarrow{PA_2} = \mathbf{0}$$

avec $u_0 + u_1 + u_2 = v_0 + v_1 + v_2 = 1$. En remontant le calcul précédent on obtient

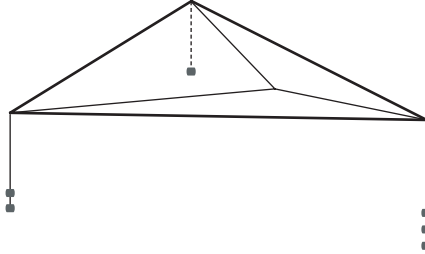
$$\overrightarrow{A_0P} = u_1 \overrightarrow{A_0A_1} + u_2 \overrightarrow{A_0A_2} = v_1 \overrightarrow{A_0A_1} + v_2 \overrightarrow{A_0A_2}.$$

Comme $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ sont linéairements indépendants on a $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$, et par conséquent

$$v_0 = 1 - v_1 - v_2 = 1 - u_1 - u_2 = u_0.$$

□

Définition. Les nombres u_0, u_1, u_2 obtenus dans la proposition précédente s'appellent les *coordonnées barycentriques* de P (relativement au repère $(A_0A_1A_2)$).



Le point de coordonnées barycentriques $(\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6})$.

Ces coordonnées ont une interprétation simple en statique (du moins dans le cas où elles sont positives). Si m_0, m_1, m_2 sont des masses attachées aux points A_0, A_1, A_2 , alors le centre de gravité du système obtenu est le point P de coordonnées barycentriques

$$u_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad u_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Cette interprétation justifie l'étymologie : le *barycentre* est le centre de gravité (le mot grec $\beta\alpha\rho\omicron\varsigma$ signifie *lourd*).

Proposition 2.12 Soit $(A_0A_1A_2)$ un repère affine du plan Π , et soit $O \in \mathbb{E}^3$ un point quelconque. Alors pour tout point $P \in \Pi$ de coordonnées barycentriques u_0, u_1, u_2 on a

$$\overrightarrow{OP} = u_0 \overrightarrow{OA_0} + u_1 \overrightarrow{OA_1} + u_2 \overrightarrow{OA_2}. \quad (2.8)$$

PREUVE. C'est un calcul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP} + \underbrace{(u_0 \overrightarrow{PA_0} + u_1 \overrightarrow{PA_1} + u_2 \overrightarrow{PA_2})}_{=0} \\ &= u_0(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_0}) + u_1(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_1}) + u_2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_2}) \\ &= u_0 \overrightarrow{OA_0} + u_1 \overrightarrow{OA_1} + u_2 \overrightarrow{OA_2}. \end{aligned}$$

□

REMARQUE. Il est important de bien noter que l'écriture (2.8) est indépendante de l'origine O choisie. Le point P de coordonnées barycentriques (u_0, u_1, u_2) s'écrit aussi de façon simplifiée

$$P = u_0 A_0 + u_1 A_1 + u_2 A_2, \quad (2.9)$$

(c'est la condition $u_0 + u_1 + u_2 = 1$ qui garantit que cette écriture n'est pas ambiguë).

Exemple 2.4 Le point $P = u_0 A_0 + u_1 A_1 + u_2 A_2$ appartient à la droite $L_{A_1 A_2}$ si et seulement si $u_0 = 0$. Dans ce cas on a

$$\frac{A_1 P}{A_1 A_2} = u_2, \quad \frac{A_2 P}{A_2 A_1} = u_1, \quad \text{et} \quad \frac{P A_1}{P A_2} = -\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1 - 1}{u_1}.$$

(Pour vérifier ces relations, il suffit de choisir $O = A_1$, puis $O = A_2$ et $O = P$ dans l'équation (2.8).)

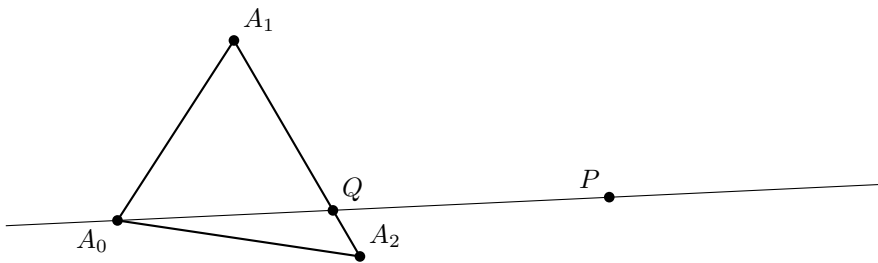
Proposition 2.13 Soit $(A_0 A_1 A_2)$ un repère affine d'un plan Π et $P \in \Pi$ un point de ce plan. Supposons que les droites $L_{A_1 A_2}$ et $L_{A_0 P}$ ne sont pas parallèles et notons $Q = L_{A_1 A_2} \cap L_{A_0 P}$ l'intersection de ces deux droites. Alors on a

$$\frac{Q A_2}{Q A_1} = -\frac{u_1}{u_2}, \quad \text{et} \quad \frac{A_1 Q}{A_1 A_2} = \frac{u_2}{u_1 + u_2} = \frac{u_2}{1 - u_0},$$

on a aussi

$$\frac{A_0 P}{A_0 Q} = 1 - u_0$$

où (u_0, u_1, u_2) sont les coordonnées barycentriques de P dans le repère $(A_0 A_1 A_2)$.



PREUVE. On utilise la proposition 2.12 avec le choix de $O = Q$. On a donc l'équation

$$\overrightarrow{Q P} = u_0 \overrightarrow{Q A_0} + u_1 \overrightarrow{Q A_1} + u_2 \overrightarrow{Q A_2},$$

qui peut aussi s'écrire

$$u_1 \overrightarrow{Q A_1} + u_2 \overrightarrow{Q A_2} = \overrightarrow{Q P} + u_0 \overrightarrow{A_0 Q}. \quad (2.10)$$

On remarque que le terme de gauche de cette équation est colinéaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$ et le terme de droite est colinéaire à $\overrightarrow{A_0P}$. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, l'équation (2.10) signifie que

$$u_1\overrightarrow{QA_1} + u_2\overrightarrow{QA_2} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QP} + u_0\overrightarrow{A_0Q} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

La première équation dit que $\frac{QA_2}{QA_1} = -\frac{u_1}{u_2}$. Comme $\overrightarrow{QA_2} = \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1Q}$ cette première équation de (2.11) peut aussi s'écrire

$$u_2\overrightarrow{A_1A_2} - (u_1 + u_2)\overrightarrow{A_1Q} = \mathbf{0},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A_1Q}{A_1A_2} = \frac{u_2}{u_1 + u_2}.$$

Et comme $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{A_0P} - \overrightarrow{A_0Q}$, la seconde équation peut s'écrire

$$\overrightarrow{A_0P} + (u_0 - 1)\overrightarrow{A_0Q} = \mathbf{0},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A_0P}{A_0Q} = 1 - u_0.$$

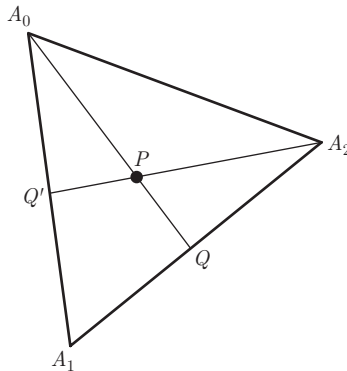
□

Remarque. Cette proposition nous permet de localiser un point P dont on connaît les coordonnées barycentriques (u_0, u_1, u_2) . Nous pouvons par exemple localiser d'abord le point Q sur $L_{A_1A_2}$ tel que

$$\frac{QA_2}{QA_1} = -\frac{u_1}{u_2},$$

puis chercher le point P sur L_{A_0Q} tel que

$$\frac{A_0P}{A_0Q} = (1 - u_0).$$



Nous pouvons aussi localiser les points Q sur $L_{A_1A_2}$ et Q' sur $L_{A_0A_1}$ tels que

$$\frac{QA_2}{QA_1} = -\frac{u_1}{u_2} \quad \text{et} \quad \frac{Q'A_1}{Q'A_0} = -\frac{u_0}{u_1},$$

Le point P est alors

$$P = L_{A_0Q} \cap L_{A_2Q'}.$$

Proposition 2.14 *Soient $P, Q, X \in \Pi$ des points de coordonnées barycentriques (p_0, p_1, p_2) , (q_0, q_1, q_2) et (x_0, x_1, x_2) avec $P \neq Q$. Alors le point X appartient à la droite L_{PQ} si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} p_0 & q_0 & x_0 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

PREUVE. Le point X est aligné sur P et Q si et seulement s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{PX} = \rho \overrightarrow{PQ}$. Par la règle de Chasles, on a donc pour tout point O $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \rho(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$. Cette relation peut aussi s'écrire

$$(\rho - 1)\overrightarrow{OP} - \rho\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OX} = \mathbf{0}.$$

Le corollaire 2.12 entraîne alors que

$$(\rho - 1)p_i - \rho q_i + x_i = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.13)$$

ou, si l'on préfère,

$$\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & x_0 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho - 1 \\ -\rho \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Ceci n'est possible que si le déterminant (2.12) est nul.

Supposons inversement que le déterminant (2.12) est nul. Alors il existe trois nombres r, s, t , non tous nuls, tels que

$$\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & x_0 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$rp_i + sq_i + tx_i = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.15)$$

En additionnant ces trois relations, et en utilisant que $p_0 + p_1 + p_2 = q_0 + q_1 + q_2 = x_0 + x_1 + x_2 = 1$, on trouve que $r + s + t = 0$, et donc

$$tx_i = (t + s)p_i - sq_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Ces relations entraînent que

$$t\overrightarrow{OX} = (t+s)\overrightarrow{OP} - s\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{QP},$$

ce qui signifie que $t\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{QP}$. Or il est impossible que $t = 0$, car sinon on aurait $rp_i + sq_i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$ et donc

$$r = r(p_0 + p_1 + p_2) = -s(q_0 + q_1 + q_2) = -s,$$

mais ceci entraînerait que $P = Q$, contrairement à ce que nous avons supposé. On a donc $\overrightarrow{PX} = \frac{s}{t}\overrightarrow{QP}$ et X est bien aligné sur PQ . \square

La proposition 2.14 nous dit en particulier que l'équation d'une droite en coordonnées barycentriques est du type

$$L : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

Proposition 2.15 *Trois droites dont les équations en coordonnées barycentriques sont $L_i : a_ix_0 + b_ix_1 + c_ix_2 = 0$ ($i = 1, 2, 3$) sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

PREUVE. Ce déterminant est nul si et seulement si l'équation

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

a une solution non triviale. Dans le cas où $r + s + t \neq 0$, alors le point

$$P = \frac{r}{r+s+t}A_0 + \frac{s}{r+s+t}A_1 + \frac{t}{r+s+t}A_2$$

(i.e. le point de coordonnées barycentriques $(\frac{r}{r+s+t}, \frac{s}{r+s+t}, \frac{t}{r+s+t})$) appartient aux trois droites).

Dans le cas où $r + s + t = 0$, alors les trois droites sont parallèles (l'argument sera donné plus tard, dans la preuve de la proposition 4.11). \square

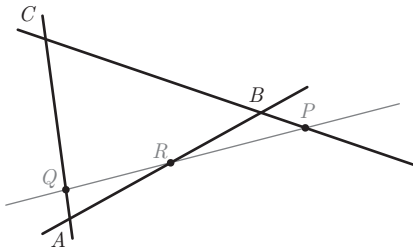
Voyons maintenant quelques applications géométriques des coordonnées barycentriques. Prenons un triangle non dégénéré ABC et trois points P, Q, R tels que $P \in L_{BC}$, $Q \in L_{CA}$ et $R \in L_{AB}$. On suppose aussi que $P \neq C$, $Q \neq A$ et $R \neq B$. Dans ces conditions, on a les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.16 (théorème de Ménélaüs) *Les points P, Q, R , sont alignés si et seulement si*

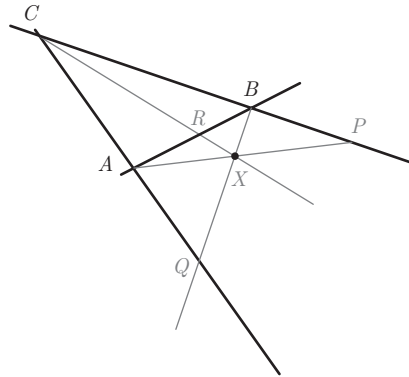
$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1.$$

Théorème 2.17 (théorème de Ceva) *Les droites L_{AP} , L_{BQ} , L_{CR} , sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = -1.$$



Théorème de Ménélaüs.



Théorème de Ceva.

Les coordonnées barycentriques des points P, Q, R dans le repère ABC sont du type

$$P = (0, p, 1 - p), \quad Q = (1 - q, 0, q), \quad \text{et} \quad R = (r, 1 - r, 0).$$

Notons que p, q, r sont non nuls car $P \neq C$, $Q \neq A$ et $R \neq B$ par hypothèse. On sait d'autre part que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{p-1}{p}, \quad \frac{QC}{QA} = \frac{q-1}{q}, \quad \text{et} \quad \frac{RA}{RB} = \frac{r-1}{r}$$

(voir l'exemple 2.4). Ainsi

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$$

PREUVE DU THÉORÈME DE MÉNÉLAÛS. On sait par la proposition 2.14 que les points P, Q, R sont alignés si et seulement si le déterminant formé par leurs coordonnées barycentriques s'annule ; ce déterminant est de la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-q & r \\ p & 0 & 1-r \\ 1-p & q & 0 \end{vmatrix} = pqr + (1-p)(1-q)(1-r) \\ = pqr \left(1 - \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} \right).$$

Ce déterminant s'annule si et seulement si le produit des trois rapports de section est égal à 1.

PREUVE DU THÉORÈME DE CEVA. L'équation de la droite L_{AP} en coordonnées barycentriques est

$$L_{AP} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & p & x_1 \\ 0 & 1-p & x_2 \end{vmatrix} = px_2 - (1-p)x_1 = 0,$$

car les coordonnées de A sont $(1, 0, 0)$. De même, l'équation de L_{BQ} et celle de L_{CR} sont données par

$$L_{BQ} : qx_0 - (1-q)x_2 = 0, \quad \text{et} \quad L_{CR} : rx_1 - (1-r)x_0 = 0.$$

Par la proposition 2.15, les droites L_{AP} , L_{BQ} , L_{CR} , sont donc concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & p-1 & p \\ q & 0 & q-1 \\ r-1 & r & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$pqr + (p-1)(q-1)(r-1) = 0.$$

Donc

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr} = -1.$$

□

Le centre de gravité d'un triangle

Une *médiane* d'un triangle est une droite reliant un sommet au milieu du côté opposé. Le théorème de Ceva entraîne immédiatement que les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes. En effet, soient P le milieu du segment $[B, C]$, Q le milieu de $[C, A]$ et R le milieu de $[A, B]$. Alors $\frac{PB}{PC} = \frac{QC}{QA} = \frac{RA}{RB} = -1$, et, en particulier, $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = -1$.

Notons G l'intersection des médianes, ce point s'appelle le *centre de gravité* ou le *barycentre* du triangle. Soient (g_A, g_B, g_C) les coordonnées barycentriques de G par rapport au triangle ABC . Les coordonnées barycentriques de P sont $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, car P est le milieu de $[B, C]$. Comme A, G et P sont alignés, la proposition 2.14 nous dit que

$$\begin{vmatrix} g_A & 0 & 1 \\ g_B & \frac{1}{2} & 0 \\ g_C & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et donc $g_B = g_C$. De même $g_A = g_B$, et comme $g_A + g_B + g_C = 1$, on a

$$g_A = g_B = g_C = \frac{1}{3}.$$

La proposition 2.13 nous dit maintenant que

$$\frac{AG}{AP} = 1 - g_A = \frac{2}{3},$$

ou, de façon équivalente,

$$\frac{GA}{GP} = -2.$$

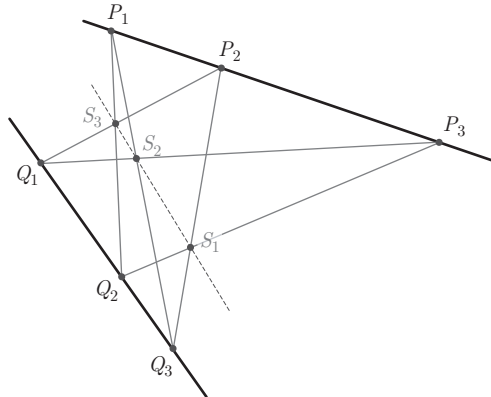
En résumé, on a prouvé que *les trois médianes d'un triangle ABC se rencontrent en un point G appelé le centre de gravité du triangle. Les coordonnées barycentriques de G sont $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, et le rapport de section de G entre un sommet et le milieu du côté opposé vaut $\frac{2}{3}$.*

Le théorème de Ménélaüs (théorème 2.16) implique le résultat suivant.

Théorème 2.18 (théorème de Pappus) *Soient P_1, P_2, P_3 trois points alignés dans un plan et soient Q_1, Q_2, Q_3 trois autres points alignés dans le même plan. Si les points*

$$S_1 = L_{P_2Q_3} \cap L_{P_3Q_2}, \quad S_2 = L_{P_3Q_1} \cap L_{P_1Q_3}, \quad S_3 = L_{P_1Q_2} \cap L_{P_2Q_1}$$

existent, alors ils sont alignés.



Le théorème de Pappus.

PREUVE. Pour simplifier nous nous limitons au cas où les droites $L_{P_1Q_2}$, $L_{P_2Q_3}$ et $L_{P_3Q_1}$ forment un triangle non-dégénéré, i.e. les points

$$A = L_{P_3Q_1} \cap L_{P_2Q_3}, \quad B = L_{P_1Q_2} \cap L_{P_3Q_1}, \quad C = L_{P_1Q_2} \cap L_{P_2Q_3}$$

existent et sont non alignés (les autres cas peuvent s'obtenir par un argument de continuité). Alors on peut appliquer le théorème de Ménélaüs aux cinq triplets de points

$$S_3P_2Q_1, \quad Q_2S_1P_3, \quad P_1Q_3S_2, \quad P_1P_2P_3, \quad Q_2Q_3Q_1,$$

qui sont alignés sur les côtés du triangle ABC . On a donc

$$\frac{S_3B}{S_3C} \cdot \frac{P_2C}{P_2A} \cdot \frac{Q_1A}{Q_1B} = \frac{Q_2B}{Q_2C} \cdot \frac{S_1C}{S_1A} \cdot \frac{P_3A}{P_3B} = \frac{P_1B}{P_1C} \cdot \frac{Q_3C}{Q_3A} \cdot \frac{S_2A}{S_2B} = 1$$

et

$$\frac{P_1B}{P_1C} \cdot \frac{P_2C}{P_2A} \cdot \frac{P_3A}{P_3B} = \frac{Q_2B}{Q_2C} \cdot \frac{Q_3C}{Q_3A} \cdot \frac{Q_1A}{Q_1B} = 1$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{S_3B}{S_3C} \frac{P_2C}{P_2A} \frac{Q_1A}{Q_1B}\right) \left(\frac{Q_2B}{Q_2C} \frac{S_1C}{S_1A} \frac{P_3A}{P_3B}\right) \left(\frac{P_1B}{P_1C} \frac{Q_3C}{Q_3A} \frac{S_2A}{S_2B}\right)}{\left(\frac{P_1B}{P_1C} \frac{P_2C}{P_2A} \frac{P_3A}{P_3B}\right) \left(\frac{Q_2B}{Q_2C} \frac{Q_3C}{Q_3A} \frac{Q_1A}{Q_1B}\right)} = 1,$$

soit, après simplifications,

$$\frac{S_3B}{S_3C} \cdot \frac{S_1C}{S_1A} \cdot \frac{S_2A}{S_2B} = 1.$$

Cette identité entraîne, grâce au théorème de Ménélaüs, que les points S_1, S_2, S_3 sont alignés. \square

Coordonnées barycentriques dans l'espace

Les coordonnées barycentriques dans l'espace se définissent comme dans le cas d'un plan. Nous énonçons dans ce paragraphe deux résultats tout en laissant les démonstrations en exercice. (Les démonstrations sont semblables à celles du paragraphe précédent.)

Proposition 2.19 *Soit $A_0A_1A_2A_3 \in \mathbb{E}^3$ un repère affine et soit $O \in \mathbb{E}^3$ un point. Alors pour tout point $P \in \mathbb{E}^3$, il existe quatre nombres uniquement déterminés u_0, u_1, u_2, u_3 tels que $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1$ et*

$$\overrightarrow{OP} = u_0 \overrightarrow{OA_0} + u_1 \overrightarrow{OA_1} + u_2 \overrightarrow{OA_2} + u_3 \overrightarrow{OA_3}.$$

De plus, ces quatre nombres ne dépendent pas de O . \square

Définition. Les nombres u_0, u_1, u_2, u_3 ci-dessus s'appellent les *coordonnées barycentriques* du point P par rapport au repère A_0, A_1, A_2, A_3 .

Comme application nous donnons l'équation d'un plan en coordonnées barycentriques. C'est l'analogue de la proposition 2.14 qui donne l'équation d'une droite dans un plan.

Proposition 2.20 *Soient $A_0A_1A_2A_3$ un repère affine de \mathbb{E}^3 et $P, Q, R, S \in \mathbb{E}^3$ quatre points quelconques. Alors P, Q, R, S sont coplanaires si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} p_0 & q_0 & r_0 & s_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0$$

où p_0, p_1, p_2, p_3 sont les coordonnées barycentriques de P dans le repère $A_0A_1A_2A_3$ etc. \square

2.10 La géométrie des couleurs

Dans cette section, nous montrons à titre d'illustration comment les notions développées dans ce chapitre, en particulier les coordonnées barycentriques, s'appliquent à la théorie des couleurs.

Rappels sur la lumière

La lumière est une superposition d'ondes électromagnétiques, dont la longueur d'onde est comprise entre 400 et 700 nanomètres environ. Le spectre électromagnétique représente un continuum de couleurs que l'on divise de façon conventionnelle en six couleurs³ correspondant au rouge (env. 620-700 nm), orange (591-620 nm), jaune (580-590 nm), vert (500-579 nm), bleu (446-500 nm) et violet (400-445 nm). Les couleurs spectrales s'observent en résolvant une lumière blanche à travers un prisme de verre (ainsi que l'a expérimenté Newton en 1666) ; on les retrouve partiellement dans l'arc-en-ciel.



Les couleurs spectrales.

La couleur d'un point de vue physiologique

Physiologiquement, la couleur est la sensation produite par l'action de la lumière sur l'œil. Nous percevons la lumière par la *rétine* qui est une couche de cellules nerveuses tapissant le fond de notre globe oculaire. Au début du XIX^e siècle, Thomas Young a émis l'hypothèse que la rétine est formée de trois types de capteurs (sensibles au rouge, vert et bleu) capables de réaliser la synthèse de toutes les autres couleurs. La physiologie moderne a partiellement confirmé l'intuition de Young. On sait que la rétine humaine comporte deux familles de cellules nerveuses sensibles à la lumière : les *cônes* et les *bâtonnets* et qu'il y a trois types de cônes sensibles à différentes longueurs d'onde.

Mélange de couleur-lumières, synthèse additive

Imaginons un écran noir sur lequel nous projetons plusieurs lumières de couleurs différentes. En chaque point de l'écran, notre œil ne perçoit qu'une couleur unique, les couleurs de nos projecteurs vont donc se « mélanger » dans notre perception. En modifiant la puissance des différents projecteurs, on modifie la couleur obtenue et on parle de *synthèse additive* des couleurs.

Toutes les nuances de couleur perçues par l'œil humain s'obtiennent par synthèse des couleurs spectrales. Notons que le noir et le blanc ne sont pas des couleurs spectrales ; le noir est l'absence de lumière, alors que le blanc est une

3. Newton ajoutait une septième couleur, l'indigo qu'il situe entre le bleu et le violet.

synthèse de plusieurs couleurs spectrales. Le gris est un mélange de blanc et de noir d'intensité variable. Les couleurs blanche, grise et noire sont les *couleurs neutres*. Deux couleurs sont dites *complémentaires* si on peut obtenir une couleur neutre en les mélangeant ; le bleu est par exemple complémentaire du jaune.

Les couleurs du milieu du spectre (proches du vert) n'ont aucune couleur complémentaire dans le spectre, mais on obtient tout de même une complémentaire en mélangeant du bleu-violet et du rouge et on appelle *pourpre* cette famille de couleurs. On dit qu'une couleur est *pure* si c'est une couleur du spectre ou si elle est complémentaire d'une couleur spectrale (et donc un pourpre). Deux couleurs pures sont dites *indépendantes* si elle n'ont pas la même teinte et ne sont pas complémentaires.

Teinte, saturation et luminosité

Si la notion de *lumière colorée* appartient à la physique, la perception des couleurs ressort de la physiologie. En particulier, deux mélanges de lumières colorées distincts peuvent être perçus comme identiques. Par exemple, un mélange de rouge et de vert peut coïncider avec un mélange de jaune et de bleu (et donner un jaune pâle) ; on appelle cela le *métamérisme des couleurs*.

L'expérience montre que toute couleur est équivalente (par métamérisme) à la synthèse d'une couleur pure et d'une couleur neutre. La couleur pure utilisée est appelée la *teinte* du mélange, et le degré de pureté est appelé la *saturation* (une couleur peu saturée est proche d'un gris alors qu'une couleur fortement saturée est vive). Un troisième paramètre mesure la quantité de lumière, c'est la *luminosité*. Toute couleur se décrit donc à partir de ces trois paramètres :

- La *teinte* est définie par la longueur d'onde de la lumière spectrale monochromatique équivalente (ou complémentaire dans le cas des pourpres).
- La *saturation* se définit par la quantité de couleur neutre mélangée à la couleur pure.
- La *luminosité* représente le niveau de clarté ou d'obscurité de la couleur, elle tient compte à la fois de l'énergie du flux lumineux et de la sensibilité de l'œil à la densité spectrale de ce flux (à énergie égale, un jaune est plus lumineux qu'un rouge ou un bleu).

Ces trois paramètres peuvent varier continuellement et indépendamment les uns des autres, l'*espace des couleurs* est donc un espace à trois dimensions. On peut le représenter comme un cube, une sphère ou d'autres formes géométriques.

Les lois de Grassmann

Les couleurs obtenues par synthèse additive obéissent à des lois empiriques qui ont été établies au XIX^e siècle par Thomas Young et principalement James Clerk Maxwell ; il faut également citer les travaux de Hermann Von Helmholtz et Ewald Hering. Ces lois ont été formulées mathématiquement par Hermann Grassmann ; on les appelle les *lois de la colorimétrie* ou *lois de Grassmann*.

Ces lois sont basées sur le métamérisme, elle ne tiennent compte que de la perception des couleurs et non de leur nature physique.

La première loi de Grassmann dit que *toute couleur peut être synthétisée à partir de trois lumières colorées*.

Pratiquement, nous choisissons trois couleurs et nous les appelons les *couleurs primaires* ; elles peuvent être choisies de façon presque arbitraire, il suffit que les trois couleurs primaires soient indépendantes, i.e. qu'aucune des ces couleurs ne s'obtienne par mélange des deux autres.

Il est habituel de choisir comme couleurs primaires un rouge, un vert et un bleu, c'est le système RVB. Il est utilisé pour les écrans de télévision et les moniteurs d'ordinateurs. La première loi de Grassmann nous dit que toute couleur C peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire

$$C = rR + vV + bB \quad (2.18)$$

où $r, v, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres représentant la puissance des trois éclairages ou l'intensité lumineuse correspondante.

Il faut préciser que cette loi suppose que l'on peut avoir des *coefficients négatifs* dans l'équation (2.18). Physiquement, une équation du type $C = -0.2R + 0.7V + 0.5B$ doit se lire

$$C + 0.2R = 0.7V + 0.5B,$$

et on la vérifie expérimentalement en prenant *quatre* lampes de couleurs R, V, B et C dont on réglera les puissances selon les coefficients 1, 0.2, 0.7 et 0.5.

La deuxième loi de Grassmann dit que *le mélange de deux couleurs C_1 et C_2 peut être obtenu à partir des couleurs primaires en additionnant les intensités correspondantes aux deux couleurs sources* : si $C_1 = r_1R + v_1V + b_1B$ et $C_2 = r_2R + v_2V + b_2B$, alors

$$C_1 + C_2 = (r_1 + r_2)R + (v_1 + v_2)V + (b_1 + b_2)B.$$

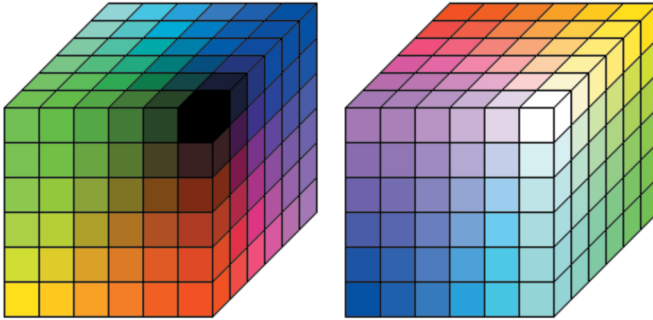
La troisième et dernière loi de Grassmann dit que *la qualité d'une couleur est indépendante de la luminosité*. Voici par exemple un même bleu décliné en différentes luminosités.



La troisième loi de Grassmann n'est pas absolue, elle est prise en défaut dans le cas des lumières de très faible ou très forte énergie (vision nocturne ou éblouissement).

Le cube RVB

Sur l'écran d'une télévision ou sur un moniteur d'ordinateur, chaque pixel reçoit un triple éclairage de couleurs rouge, verte et bleue calibrées de façon très précise. L'intensité des trois éclairages est réglable, de sorte que chaque pixel émet une couleur donnée par l'équation (2.18). Les trois intensités varient de 0 à 1 et donc chaque couleur réalisable par le moniteur correspond à un point du cube unité dans un système de coordonnées (r, v, b) .



Le cube RVB.

Les huit sommets de ce cube correspondent aux couleurs suivantes :

$(0, 0, 0)$ noir	$(1, 1, 1)$ blanc
$(1, 0, 0)$ rouge	$(0, 1, 1)$ cyan
$(0, 1, 0)$ vert	$(1, 0, 1)$ magenta
$(0, 0, 1)$ bleu	$(1, 1, 0)$ jaune

La diagonale reliant le sommet noir au sommet blanc est l'*axe achromatique*, c'est l'ensemble des couleurs neutres (noir, gris ou blanc) pour lesquelles $r = v = b$.

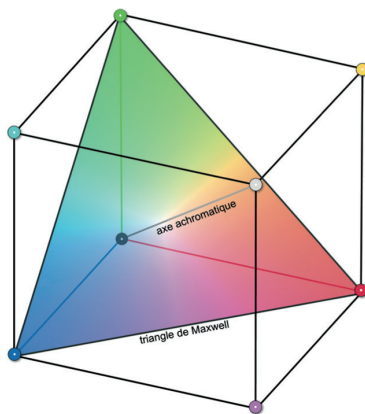
Rappelons que deux couleurs ont la même *teinte* si on obtient l'une de ces couleurs en ajoutant une couleur neutre à l'autre et/ou en modifiant l'intensité. Ainsi les couleurs

$$C = rR + vV + bB \quad \text{et} \quad C' = \lambda(C + xW) = \lambda(r+x)R + \lambda(v+x)V + \lambda(b+x)B$$

ont le même *teinte* où $W = (1, 1, 1)$ représente le blanc et $\lambda \geq 0$. Deux couleurs sont *complémentaires* si on peut obtenir une couleur neutre en les mélangeant, i.e. si

$$W = \lambda C + \mu C', \quad \lambda, \mu > 0.$$

Deux couleurs sont *indépendantes* si elle n'ont pas la même *teinte* et ne sont pas complémentaires. Dans le langage algébrique, deux couleurs C et C' sont donc complémentaires ou de même *teinte* si et seulement si C, C' et W sont linéairement dépendants.



Source : Jacques Gaudin, *Colorimétrie appliquée à la vidéo*, fig. 5.3, Dunod, 2006

Le triangle reliant les sommets rouge (R), vert (V) et bleu (B) s'appelle *le triangle de Maxwell*, c'est l'ensemble des points du cube tels que $r+v+b = 1$. La troisième loi de Grassmann dit que toute couleur est équivalente à une couleur du triangle de Maxwell, à condition de faire abstraction de la luminosité. La relation $r + v + b = 1$ nous dit que le code RVB d'une couleur est donné par les coordonnées barycentriques du point correspondant dans le triangle de Maxwell.



Triangle de Maxwell.

On préfère souvent représenter le triangle de Maxwell en augmentant la luminosité des couleurs pour obtenir une meilleure perception des nuances. Pour cela, on peut par exemple remplacer la couleur (r, v, b) par la couleur de coordonnées

$$r' = \frac{r}{m}, \quad v' = \frac{v}{m}, \quad b' = \frac{b}{m},$$

où $m = \max\{r, v, b\}$. Le point central gris $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ devient un blanc $(1, 1, 1)$.

Les notions de la colorimétrie se voient clairement sur le triangle de Maxwell : par exemple que deux couleurs sont indépendantes si les points correspondants ne sont pas alignés sur le centre. Elles sont complémentaires si la couleur neutre (le centre) est un point du segment reliant ces deux couleurs et elles ont la même teinte si l'une des couleurs appartient au segment reliant l'autre couleur à la



Triangle de Maxwell corrigé.

couleur neutre. Le rapport de section

$$\frac{NC'}{NC}$$

peut être utilisé comme mesure de la clarté relative de C' par rapport à C (il vaut 0 si C est la couleur neutre et 1 si $C = C'$). Observons aussi que

- Le périmètre du triangle de Maxwell contient les couleurs les plus saturées (i.e. les plus pures).
- Chaque paire de couleurs complémentaires est alignée sur le centre (rouge-cyan, vert-magenta, bleu-jaune).
- En mélangeant deux couleurs primaires, on obtient une couleur complémentaire à la troisième (rouge+vert = jaune, vert+bleu = cyan, rouge+bleu = magenta).
- En mélangeant les trois couleurs primaires en quantité égale, on trouve la couleur neutre (au centre du triangle).
- On peut désaturer (éclaircir) une couleur en lui ajoutant sa complémentaire (ajouter du magenta pour désaturer un vert ou du cyan pour éclaircir du rouge).

La synthèse soustractive

On obtient également une vaste palette de couleurs en mélangeant des peintures, des colorants ou des encres. On parle alors de *synthèse soustractive* car, contrairement aux couleur-lumières, la fonction de chaque pigment présent dans le mélange est d'*absorber* une partie de la lumière et non d'en *émettre*. Les couleurs primaires traditionnelles du peintre ont été longtemps le bleu, le jaune et le rouge, mais elles sont aujourd'hui souvent remplacées par le cyan, le jaune et le magenta. C'est aussi le choix que font les imprimeurs.

Les lois de Grassmann s'appliquent approximativement dans la synthèse soustractive; nous pouvons en particulier construire un triangle de couleurs de sommets C (cyan), M (magenta) et J (jaune), ce triangle est l'ensemble des points du cube RVB tels que $r + v + b = 2$.

Remarquons que les couleurs CMJ et RVB sont reliées par les équations

$$C = W - R, \quad M = W - V, \quad J = W - B.$$



Triangle CMJ.

Donc, si le code d'une couleur F dans le système CMJ est

$$F = cC + mM + jJ, \quad \text{avec } c + m + j = 1,$$

alors cette même couleur dans le code RVB s'écrit

$$F = W - (cR + mV + jB).$$

Ajouter du cyan revient à soustraire du rouge, de même ajouter du magenta ou du jaune revient à soustraire du vert ou du bleu.

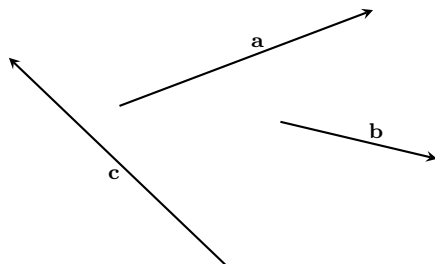
Ces formules ne sont malheureusement pas utilisables sans précautions et adaptations; et le passage du code RVB au code CMJ est l'un des problèmes délicats de la gestion des couleurs. Ce problème se pose très concrètement lorsqu'il s'agit d'imprimer fidèlement une image couleur que l'on a produite sur un écran d'ordinateur. L'écran fonctionne en synthèse additive et l'imprimante en synthèse soustractive, et le passage de l'un à l'autre peut réserver quelques surprises désagréables.

Pour en savoir plus

Dans ce paragraphe, nous n'avons fait qu'esquisser quelques notions de théorie des couleurs. Pour en savoir davantage, on consultera les ouvrages [14, 20, 42, 43].

2.11 Exercices

2.11.1 Trouver graphiquement les nombres α et β tels que $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.



2.11.2 Montrer que si $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{E}^3$, sont des points quelconques et si $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4 , et $\mathbf{v}_5 = \overrightarrow{P_5 P_1}$, alors

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{0},$$

puis faire un dessin.

2.11.3 Montrer que le milieu du segment $[P, Q]$ est donné par $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

2.11.4 Montrer par une méthode vectorielle que les médianes d'un triangle se coupent en un point (on appelle ce point le *barycentre* du triangle).

2.11.5 Donner une nouvelle preuve du théorème de Varignon par la méthode vectorielle.

2.11.6 Dans un repère de l'espace $\{O, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\}$ que vous choisirez, représenter les points suivants : $A = (5, 2, -1)$, $B = (2, -2, 1)$ et $C = (1, 1, 3)$.

2.11.7 Soient L la droite passant par $A = (2, -1, 0)$ et $B = (-1, 7, 4)$ et L' la droite passant par $C = (3, 2, -2)$ et $D = (1, 0, s)$.

Pour quelle valeur de $s \in \mathbb{R}$ ces droites sont-elles parallèles ?

2.11.8 Trouver l'équation du plan Π passant par les points $A = (2, 3, 0)$, $B = (5, -1, -1)$ et $C = (0, 1, -2)$.

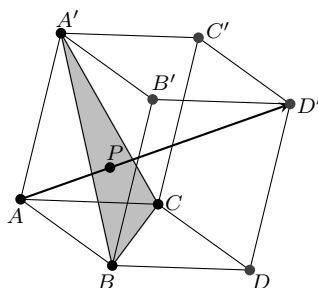
Calculer ensuite l'intersection I de ce plan avec la droite passant par $P = (9, 10, 2)$ et $Q = (3, 2, 0)$. Puis exprimer le point I en fonction de A, B et C .

2.11.9 Calculer une représentation paramétrique du plan d'équation $\Pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$. Dessiner ensuite ce plan dans un repère de l'espace.

2.11.10 La droite passant par les points $A = (-1, 0, 2)$ et $B = (-7, -2, 1)$ coupe le plan $\Pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$ en un point C . Trouver le rapport de section $\frac{AC}{AB}$.

2.11.11 Dans le parallélépipède $ABCD A' B' C' D'$ la grande diagonale AD' coupe la surface du triangle CBA' en un point P . Quel est le rapport de section $\frac{AP}{AD'}$?

Identifier le point P relativement au triangle CBA' .



2.11.12

1. Montrer que les bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$ définissent des orientations opposées.
2. et que les bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ et $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ définissent la même orientation.
3. Les bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ définissent-elles des orientations opposées ?

2.11.13 Dessiner un triangle de référence ABC dans le plan affine. Puis repérer les points P, Q, R dont les coordonnées barycentriques sont : $(2, -3, 2)$, $(1/2, 3/10, 2/10)$ et $(-7/2, 6, -3/2)$.

2.11.14 Soit ABC un triangle non dégénéré de \mathbb{E}^2 . Les trois droites L_{AB} , L_{AC} et L_{BC} partagent le plan en sept régions. Faire un dessin qui montre le signe des trois coordonnées barycentriques dans chacune de ces régions.

2.11.15 Montrer que le théorème de Ceva dans le cas où les droites L_{PA} , L_{QB} et L_{RC} sont parallèles peut se déduire du théorème de Thalès.

2.11.16 Choisir trois points de couleurs différentes sur la couverture de ce livre et trouver les coordonnées (approximatives) de ces couleurs dans le système RGB.

Deuxième partie

**Méthodes vectorielles en
géométrie euclidienne**

Chapitre 3

Produit scalaire

Dans le chapitre précédent, la géométrie vectorielle a été étudiée d'un point de vue affine ; i.e. sans faire explicitement appel aux notions d'orthogonalité ou de distance (seule la notion de rapport de section a été utilisée lors de la définition du produit d'un vecteur par un scalaire). Dans le présent chapitre, les notions métriques reviennent en force ; elles nous permettront de construire le produit scalaire, qui est l'un des outils fondamentaux de la géométrie vectorielle.

Les notions développées dans ce chapitre s'appliquent aussi bien aux vecteurs libres qu'aux vecteurs fixes ; nous passerons quelquefois sans commentaire d'un cas à l'autre.

Dans ce chapitre, nous utiliserons le symbole \mathbb{E} pour désigner soit le plan euclidien \mathbb{E}^2 soit l'espace tridimensionnel \mathbb{E}^3 . De même, on utilise \mathbb{V} pour désigner \mathbb{V}^2 ou \mathbb{V}^3 .

3.1 Norme et orthogonalité des vecteurs

Nous commençons par revisiter les notions de distance et d'orthogonalité dans le langage vectoriel.

Définition. La *norme* (ou *longueur*) d'un vecteur fixe \overrightarrow{AB} , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est simplement la distance entre ses extrémités :

$$\|\overrightarrow{AB}\| \stackrel{\text{déf}}{=} d(A, B).$$

La *norme* d'un vecteur libre \mathbf{v} est par définition la norme d'un vecteur fixe représentant \mathbf{v} . Ainsi, si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, alors

$$\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \stackrel{\text{déf}}{=} \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B).$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix du représentant. En effet, si \overrightarrow{CD} est un autre représentant du vecteur libre \mathbf{v} , alors $ABDC$ est un parallélogramme et les côtés $[A, B]$ et $[C, D]$ ont donc la même longueur.

Propriétés de la norme

- i) $\|\mathbf{v}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- ii) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$;
- iii) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$;
- iv) $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

PREUVE.

i) Soit $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{v}\| = 0$ si et seulement si $d(A, B) = 0$, ce qui équivaut à $A = B$, c'est à dire $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

ii) On sait que les distances sont toujours positives ou nulles (voir la remarque c), p. 18), on a donc $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) \geq 0$.

L'inégalité iii) est équivalente à l'inégalité du triangle. En effet, si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$, alors $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ (par la règle de Chasles) et donc

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

Finalement, la condition iv) est une conséquence de la définition du produit d'un vecteur par un scalaire : Si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}$, alors P est aligné sur AB et $\frac{AP}{AB} = \lambda$. En particulier, on a $d(A, P) = |\lambda|d(A, B)$ et donc $\|\lambda\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = d(A, P) = |\lambda|d(A, B) = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$. \square

Orthogonalité de deux vecteurs

La notion d'orthogonalité de deux segments a été définie à la section 1.10. Dans le langage vectoriel, on peut formuler cette définition de la façon suivante.

Définition. On dit que deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ sont *orthogonaux* ou *perpendiculaires*, et on écrit $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, si

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b} + \mathbf{a}\|.$$

Remarquons que, dans cette définition, l'un ou l'autre des vecteurs peut être nul. Le vecteur nul $\mathbf{0}$ est clairement orthogonal à lui-même et à tout autre vecteur. Remarquons également que l'orthogonalité est une relation symétrique : $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ si et seulement si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

REMARQUE. L'axiome 6 du chapitre 1 peut se reformuler en disant que si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, alors $s\mathbf{a} \perp t\mathbf{b}$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Voyons quelques propriétés fondamentales de la notion d'orthogonalité.

Lemme 3.1 Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ sont deux vecteurs de même norme, alors

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

PREUVE. Celle-ci est très simple : on a

$$\|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})\| = \|2\mathbf{b}\| = 2\|\mathbf{b}\|,$$

et

$$\|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\| = \|2\mathbf{a}\| = 2\|\mathbf{a}\|.$$

Donc, si $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, alors $\|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})\| = \|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\|$. □

Remarquons que ce lemme dit que les diagonales d'un losange sont orthogonales (un losange est un parallélogramme dont les quatre côtés sont de même longueur).

Corollaire 3.2 Si $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, alors $\|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| = \|\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

PREUVE. Puisque $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, nous avons $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ et donc $s \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp t \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ par la remarque précédente (p. 90). Cela signifie par définition que $\|s \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + t \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})\| = \|s \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - t \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})\|$, et donc

$$\|(s+t)\mathbf{a} + (s-t)\mathbf{b}\| = \|(s-t)\mathbf{a} + (s+t)\mathbf{b}\|.$$

Choisissons s, t tels que $(s+t) = \lambda$ et $(s-t) = \mu$ (donc $s = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$ et $t = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)$), alors on a bien $\|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| = \|\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\|$. □

Corollaire 3.3 Si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ et $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, alors

$$(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) \perp (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

PREUVE. Notons d'abord que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \perp \mu\mathbf{b}$ pour tous λ, μ , donc

$$\|\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}\| = \|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\|.$$

Choisissons $\lambda = (s+t)$ et $\mu = (s-t)$, alors nous avons d'une part

$$\|\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}\| = \|(s+t)\mathbf{a} - (s-t)\mathbf{b}\| = \|(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) + (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})\|,$$

et d'autre part, comme $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ le corollaire précédent entraîne que,

$$\|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| = \|\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\| = \|(s-t)\mathbf{a} + (s+t)\mathbf{b}\| = \|(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) - (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})\|.$$

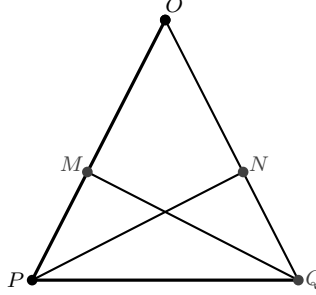
Les trois identités précédentes entraînent que

$$\|(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) + (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})\| = \|(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) - (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})\|,$$

c'est à dire $(\mathbf{sa} + \mathbf{tb}) \perp (\mathbf{ta} - \mathbf{sb})$. □

Le résultat suivant est un principe de symétrie pour les hauteurs d'un triangle isocèle.

Corollaire 3.4 Soient OPQ un triangle isocèle en O , et $M \in [O, P]$ et $N \in [O, Q]$ deux points tels que $d(O, M) = d(O, N)$. Supposons que $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{QM}$, alors $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PN}$.



PREUVE. Nos hypothèses disent que $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\|$, $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\|$ et $\|\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{OP}\|$. Notons $\lambda = \frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OQ}$, alors $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP}$, et $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} - \lambda \overrightarrow{OP}$. Donc

$$\|(\lambda + 1)\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \|(\lambda - 1)\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\|.$$

Le corollaire 3.2 implique alors que

$$\|(\lambda + 1)\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| = \|(\lambda - 1)\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\|.$$

Mais $\lambda \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON}$, donc on a

$$\|\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\|,$$

et comme $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PN}$, on obtient $\|\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{OQ}\|$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PN}$. \square

3.2 Le théorème de Pythagore

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Pythagore. Sous une forme vectorielle il prend la forme suivante :

Théorème 3.5 (Théorème de Pythagore) Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs orthogonaux, alors

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2. \quad (3.1)$$

PREUVE. Si l'un des vecteurs est nul il n'y a rien à montrer, on peut supposer sans perdre de généralité que $\|\mathbf{a}\| \neq 0$ et $\|\mathbf{b}\| \neq 0$. Quitte à diviser les deux

membres de l'équation (3.1) par $\|\mathbf{a}\|$, nous pouvons supposer que $\|\mathbf{a}\| = 1$. On doit donc prouver que

$$\text{si } \|\mathbf{a}\| = 1 \text{ et } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \text{ alors } \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = 1 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Posons

$$t = \|\mathbf{b}\| + \sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \quad \text{et} \quad s = \|\mathbf{b}\| - \sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2},$$

et remarquons que $t > 1$ et $s \cdot t = -1$, on a donc $1/t = -s$. Posons également $\mathbf{c} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$, alors on a

$$\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| = 1,$$

et le corollaire 3.3 entraîne que $(\mathbf{a} + t\mathbf{c}) \perp (t\mathbf{a} - \mathbf{c})$. On peut multiplier le second vecteur par $1/t = -s$, on a donc

$$(\mathbf{a} + t\mathbf{c}) \perp (\mathbf{a} + s\mathbf{c}),$$

ce qui signifie que

$$\|(\mathbf{a} + t\mathbf{c}) + (\mathbf{a} + s\mathbf{c})\| = \|(\mathbf{a} + t\mathbf{c}) - (\mathbf{a} + s\mathbf{c})\|,$$

c'est-à-dire

$$\|2\mathbf{a} + (t + s)\mathbf{c}\| = \|(t - s)\mathbf{c}\|.$$

Or

$$(t + s) = 2\|\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad (t - s) = 2\sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2},$$

en tenant compte de la définition de \mathbf{c} , on a donc $(t + s)\mathbf{c} = 2\mathbf{b}$ et $\|(t - s)\mathbf{c}\| = 2\sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2}$, par conséquent

$$2\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = 2\sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|^2}.$$

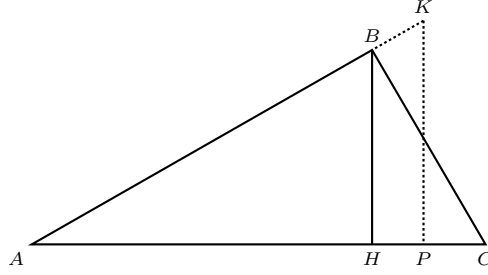
□

La démonstration précédente pourra peut-être sembler trop algébrique aux goûts de certains lecteurs. Nous proposons donc ci-dessous une autre preuve plus géométrique. Le théorème de Pythagore apparaît comme une conséquence du « théorème d'Euclide ». Mais d'abord quelques définitions.

Définition. Un triangle ABC tel que $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ s'appelle un *triangle rectangle* en B . Le segment $[B, H]$ tel que $H \in [A, C]$ et $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ s'appelle la *hauteur* du triangle issue du sommet B et le point H s'appelle le *pied de la hauteur* issue de B , il est unique par l'axiome 7 du chapitre 1.

Théorème 3.6 (Théorème d'Euclide) Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$, et soit $H \in [A, C]$ le pied de la hauteur issue de B , i.e. $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$. Alors

$$d(A, B)^2 = d(A, C) \cdot d(A, H).$$



PREUVE. Notons P le point de $[A, C]$ tel que $d(A, P) = d(A, B)$ et K le point de L_{AB} tel que $d(A, K) = d(A, H)$. Alors ABP et AKH sont des triangles isocèles et comme $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ par hypothèse, on a $\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{AB}$ par le corollaire précédent.

On déduit de la proposition 1.18 que les droites L_{KP} et L_{BC} sont parallèles. Par le théorème de Thalès, on a donc

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AK}{AB},$$

et donc $d(A, B) \cdot d(A, P) = d(A, C) \cdot d(A, K)$. Mais comme $d(A, P) = d(A, B)$ et $d(A, K) = d(A, H)$, on a bien $d(A, B)^2 = d(A, C) \cdot d(A, H)$. \square

Nous pouvons maintenant donner notre seconde preuve du théorème de Pythagore, que nous formulons de la façon suivante :

Théorème 3.7 (Théorème de Pythagore, deuxième version)

Si ABC est un triangle rectangle en B , alors

$$d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2.$$

PREUVE. Soit H le pied de la hauteur issue de B . Le théorème d'Euclide dit que $\overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$, mais aussi que $\overline{BC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{AC}$ (échanger les rôles de A et C). Le point H est entre A et C , par conséquent $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}$ et donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC} + \overline{HC} \cdot \overline{AC} = (\overline{AH} + \overline{HC}) \cdot \overline{AC} = \overline{AC}^2.$$

\square

REMARQUE. Il est bien sûr élémentaire de démontrer cette version du théorème de Pythagore à partir de la version algébrique : puisque $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ on a

$$\begin{aligned} d(A, C)^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= d(A, B)^2 + d(B, C)^2. \end{aligned}$$

Corollaire 3.8 (Théorème de la hauteur) *Dans le même triangle, on a*

$$\overline{HB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HC}.$$

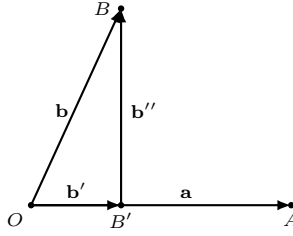
Nous laissons la preuve en exercice.

3.3 Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre

Proposition 3.9 Soient \mathbf{b} et \mathbf{a} deux vecteurs libres. Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, alors il existe $\rho \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathbb{V}$ tels que

$$\mathbf{b}' = \rho \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}'' \quad \text{et} \quad \mathbf{b}' \perp \mathbf{b}''.$$

Les vecteurs $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ (et donc le scalaire ρ) sont déterminés de façon uniques.



PREUVE. Choisissons un point O et notons $A := O + \mathbf{a}$ et $B := O + \mathbf{b}$. Notons M la droite perpendiculaire à $L = L_{OA}$ passant par le point B , cette droite est unique par l'axiome 7 du chapitre 1. Notons aussi $B' := L_{OA} \cap M$. Soient $\mathbf{b}' = \overrightarrow{OB'}$ et $\mathbf{b}'' = \overrightarrow{B'B}$ les vecteurs reliant O à B' et B' à B . Par construction, on a $\mathbf{b}'' \perp \mathbf{b}'$ et par la règle de Chasles, on a

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''.$$

Le scalaire ρ tel que $\mathbf{b}' = \rho \mathbf{a}$ est alors donné par $\rho := \frac{OB'}{OA}$.

L'unicité des vecteurs \mathbf{b}' et \mathbf{b}'' se déduit de l'unicité de la perpendiculaire M à la droite L passant par B . \square

Définitions

1. Le vecteur \mathbf{b}' s'appelle la *projection orthogonale* de \mathbf{b} sur \mathbf{a} et se note

$$\mathbf{b}' := \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}).$$

2. Le nombre ρ s'appelle le *coefficient de projection* de \mathbf{b} sur \mathbf{a} et se note

$$\rho := \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}).$$

3. Le vecteur \mathbf{b}'' s'appelle la *composante normale* de \mathbf{b} relative à \mathbf{a} et se note

$$\mathbf{b}'' := \text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}).$$

Nous voulons calculer le coefficient de projection $\rho = \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Nous avons par définition

$$\mathbf{b}'' = (\mathbf{b} - \rho \cdot \mathbf{a}) \perp \mathbf{a}.$$

Comme

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}') + \mathbf{b}'' = (1 + \rho)\mathbf{a} + \mathbf{b}'',$$

et $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}''$, on a par le théorème de Pythagore

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (1 + \rho)^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2. \quad (3.2)$$

De même, on a

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}') - \mathbf{b}'' = (1 - \rho)\mathbf{a} - \mathbf{b}'',$$

par conséquent

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (1 - \rho)^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2. \quad (3.3)$$

En soustrayant les équations (3.2) et (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= ((1 + \rho)^2 - (1 - \rho)^2) \|\mathbf{a}\|^2 \\ &= 4\rho \cdot \|\mathbf{a}\|^2. \end{aligned}$$

On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition 3.10 *Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, alors :*

$$\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\frac{1}{4} (\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Une autre conséquence importante des identités (3.2) et (3.3) est la « règle du parallélogramme » qui généralise le théorème de Pythagore. Elle dit que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale au double de la somme des carrés des deux côtés.

Proposition 3.11 (Règle du parallélogramme) *Pour tous vecteurs \mathbf{a}, \mathbf{b} on a :*

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$$

PREUVE. En additionnant les équations (3.2) et (3.3) on obtient

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\rho^2 \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2.$$

Mais on a

$$\rho \cdot \|\mathbf{a}\| = \|\rho \cdot \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}'\|,$$

donc

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}'\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2.$$

□

Corollaire 3.12 Si deux vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont orthogonaux à un vecteur \mathbf{a} , alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2$ est aussi orthogonale à \mathbf{a} :

$$(\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}) \Rightarrow (\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) \perp \mathbf{a}.$$

PREUVE. Nous savons déjà que si $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ alors $\lambda \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, il nous suffit donc de considérer les sommes vectorielles. Supposons donc que $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{a}$ et $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a}$, alors

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}_1\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}_1\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a} + \mathbf{b}_2\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}_2\|. \quad (3.4)$$

Appliquons la règle du parallélogramme aux vecteurs $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}_2$, elle dit que

$$\|(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}_2)\|^2 + \|(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a} + \mathbf{b}_2)\|^2 = 2(\|\mathbf{a} + \mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}_2\|^2),$$

c'es-à-dire

$$\|2\mathbf{a} + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\|^2 + \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|^2 = 2(\|\mathbf{a} + \mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{a} + \mathbf{b}_2\|^2).$$

De même, la règle du parallélogramme aux vecteurs $\mathbf{x}' = \mathbf{a} - \mathbf{b}_1$ et $\mathbf{y}' = \mathbf{a} - \mathbf{b}_2$ entraîne :

$$\|2\mathbf{a} - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\|^2 + \|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|^2 = 2(\|\mathbf{a} - \mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}_2\|^2).$$

Si l'on soustrait les deux dernières identités et on utilise (3.4), on obtient

$$\|2\mathbf{a} + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\|^2 - \|2\mathbf{a} - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\|^2 = 0,$$

ce qui signifie que $2\mathbf{a} \perp (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$. □

Théorème 3.13 L'application $\rho_{\mathbf{a}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, i.e.

$$\rho_{\mathbf{a}}(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) = \lambda_1 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) + \lambda_2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2)$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{V}$.

PREUVE. La fonction $\rho_{\mathbf{a}}$ est définie par la condition que pour tout vecteur \mathbf{b} on a

$$(\mathbf{b} - \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}) \perp \mathbf{a}.$$

Considérons deux nombres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 quelconques et posons

$$\mathbf{b}_1'' = \mathbf{b}_1 - \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2'' = \mathbf{b}_2 - \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{a}.$$

Alors $\mathbf{b}_1'' \perp \mathbf{a}$ et $\mathbf{b}_2'' \perp \mathbf{a}$, et il découle du corollaire précédent que

$$(\lambda_1 \mathbf{b}_1'' + \lambda_2 \mathbf{b}_2'') \perp \mathbf{a}.$$

Donc si $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2$, alors le vecteur

$$\mathbf{b} - (\lambda_1 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) + \lambda_2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2)) \cdot \mathbf{a} = (\lambda_1 \mathbf{b}_1'' + \lambda_2 \mathbf{b}_2'')$$

est orthogonal à \mathbf{a} . Nous avons donc montré que si $\rho = \lambda_1 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) + \lambda_2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2)$, alors

$$(\mathbf{b} - \rho \cdot \mathbf{a}) \perp \mathbf{a},$$

ce qui signifie que $\rho = \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Par conséquent

$$\rho_{\mathbf{a}}(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) = \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \rho = \lambda_1 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) + \lambda_2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2).$$

□

3.4 Le produit scalaire

La proposition précédente motive la définition suivante :

Définition. Le *produit scalaire* (aussi appelé *produit intérieur*) de deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ est le nombre défini par

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2).$$

Le produit scalaire est aussi noté

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

REMARQUE. On peut exprimer le produit de deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ en fonction de leur somme et de leur différence par la formule élémentaire

$$xy = \frac{1}{4} (|x + y|^2 - |x - y|^2);$$

le produit scalaire est donc un analogue de cette formule pour les vecteurs.

Proposition 3.14 (Propriétés élémentaires du produit scalaire)

- i) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$;
- ii) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$;
- iii) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ si et seulement si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

PREUVE

i) Évident.

ii) Nous avons $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{a} + \mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{a}\|^2) = \frac{1}{4} \|2\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2$.

iii) Rappelons que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ signifie par définition que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$; ce qui est clairement équivalent à $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

□

Proposition 3.15 *Le coefficient de projection est relié au produit scalaire par la formule :*

$$\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

PREUVE. Il s'agit simplement d'une reformulation de la Proposition 3.10. \square

REMARQUE. Comme $\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\mathbf{a}$, on a aussi la formule suivante :

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

qui nous donne en passant une nouvelle interprétation géométrique du produit scalaire.

Nous avons parfois besoin non de la projection $\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ elle-même, mais seulement de sa norme. Celle-ci est donnée par

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\| = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{\|\mathbf{a}\|}$$

Rappelons que deux vecteurs sont colinéaires si l'un est multiple de l'autre. La proposition ci-dessous nous dit que \mathbf{a} et \mathbf{b} sont colinéaires si et seulement si

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \pm \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Plus généralement, nous avons :

Proposition 3.16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ on a*

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|,$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

PREUVE. La preuve est immédiate si $\mathbf{a} = 0$; on suppose donc $\mathbf{a} \neq 0$ et on pose $\mathbf{b}' = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\mathbf{a}$. Notons aussi $\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$, alors on a $\mathbf{b}'' \perp \mathbf{b}'$, donc $\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{b}'\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2$. On a en particulier

$$\|\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}'\| \leq \|\mathbf{b}\|,$$

et donc

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = |\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})| \|\mathbf{a}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\mathbf{b}'' = \mathbf{0}$, ce qui correspond à $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$; c'est-à-dire au cas où \mathbf{b} et \mathbf{a} sont colinéaires. \square

Théorème 3.17 *Le produit scalaire est une application bilinéaire $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Cela signifie que ce produit est linéaire en chacune des deux variables :*

- a) $\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
- b) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_2 \rangle$;
- c) $\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle$.

PREUVE. Comme le produit scalaire est symétrique, i.e. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$, il suffit de montrer ces propriétés sur la seconde variable. Par le théorème 3.13 et la proposition 3.15, on a

$$\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 \rho_{\mathbf{a}}(\lambda \mathbf{b}) = \lambda \|\mathbf{a}\|^2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

De même

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \rangle &= \|\mathbf{a}\|^2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \|\mathbf{a}\|^2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1) + \|\mathbf{a}\|^2 \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_2) \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_2 \rangle. \end{aligned}$$

□

La bilinéarité du produit scalaire peut aussi s'écrire de façon condensée :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2 \rangle &= \lambda_1 \mu_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + \lambda_1 \mu_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle + \lambda_2 \mu_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Plus généralement, si $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{b}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^k y_j \mathbf{b}_j$, alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i y_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle.$$

Corollaire 3.18 *Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ peut s'exprimer sous la forme*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2),$$

ou encore

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2).$$

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2; \end{aligned}$$

et donc

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2.$$

De même

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, -\mathbf{b} \rangle + \langle -\mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2; \end{aligned}$$

et donc

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2.$$

□

3.5 Repères orthonormés

Définition. Une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{V}^3 est dite *orthonormée* si les vecteurs \mathbf{e}_i sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, i.e.

a) $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$;

b) $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$.

Un repère affine $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ de \mathbb{E}^3 est *orthonormé* si la base correspondante est orthonormée.

Théorème 3.19 Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de composantes x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{V}^3 , alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

et

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

PREUVE. Il est clair que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base orthonormée si et seulement si

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Nous avons donc, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 \rangle \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \end{aligned}$$

En choisissant $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, on obtient

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

□

Corollaire 3.20 En coordonnées cartésiennes, la distance entre deux points $P, Q \in \mathbb{E}^3$ de coordonnées p_1, p_2, p_3 et q_1, q_2, q_3 est donnée par

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

PREUVE. On a vu dans la proposition 2.8 que

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1)\mathbf{e}_1 + (q_2 - p_2)\mathbf{e}_2 + (q_3 - p_3)\mathbf{e}_3.$$

Donc, par le théorème 3.19, nous avons

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2.$$

□

Procédé d'orthogonalisation

Étant donné une base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ de \mathbb{V}^3 , on voudrait construire une nouvelle base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ qui soit orthonormée et dont le premier vecteur est colinéaire à \mathbf{b}_1 .

Comme premier vecteur de base, on choisit donc

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|},$$

(on dit que \mathbf{e}_1 est obtenu en *normalisant* \mathbf{b}_1). Pour construire un vecteur orthogonal à \mathbf{e}_1 , on peut maintenant prendre \mathbf{b}_2 et lui soustraire sa projection orthogonale sur \mathbf{e}_1 , cela nous donne le vecteur

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{e}_1.$$

On vérifie facilement que $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{e}_1$, en effet

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1 \rangle - \underbrace{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle}_{=1} = 0.$$

Il suffit alors de normaliser ce vecteur pour obtenir \mathbf{e}_2 :

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{\mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \mathbf{e}_1\|}.$$

Pour construire un troisième vecteur orthogonal à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , on soustrait à \mathbf{b}_3 sa projection orthogonale sur \mathbf{e}_1 et sur \mathbf{e}_2 , cela nous donne le vecteur

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{b}_3) - \text{proj}_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_2.$$

On vérifie facilement que ce vecteur est orthogonal à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . On obtient donc le vecteur \mathbf{e}_3 de longueur 1 en posant :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{\mathbf{b}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{b}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \mathbf{e}_2\|}.$$

Cette méthode pour orthonormaliser une base s'appelle le *procédé de Gram-Schmidt*.

3.6 Matrice de Gram

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs développés dans une base quelconque, nous ne pouvons pas utiliser les formules du théorème 3.19. Il est commode d'utiliser la matrice de Gram de cette base.

Définition. La *matrice de Gram* \mathbf{G} d'une famille de k vecteurs

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{V}$$

est la matrice carrée de taille $k \times k$ dont les coefficients sont les produits scalaires de ces vecteurs :

$$\mathbf{G} := (\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle).$$

Remarquons qu'une matrice de Gram est toujours une matrice symétrique : $\mathbf{G} = \mathbf{G}^t$ puisque $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle = g_{ji}$.

Observons aussi qu'une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{V}^3 est une base orthonormée si et seulement si la matrice de Gram associée est la matrice identité.

REMARQUE. La matrice de Gram associée à deux vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{V}$ peut se déduire de la géométrie du parallélogramme construit sur ces vecteurs. On a en effet

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Si c_1, c_2 sont les longueurs des côtés de $\mathcal{P}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ et d_1, d_2 les longueurs des deux diagonales (avec $d_1 = \|\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\|$ et $d_2 = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|$), alors on a

$$\begin{aligned} g_{11} &= \|\mathbf{b}_1\|^2 = c_1^2, & \text{et} & & g_{22} &= \|\mathbf{b}_2\|^2 = c_2^2, \\ g_{12} &= g_{21} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = \frac{1}{4}(d_1^2 - d_2^2). \end{aligned}$$

Observons de plus que grâce au corollaire 3.18, on peut aussi déterminer la matrice de Gram à partir des longueurs des deux côtés et d'une seule diagonale du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$:

$$g_{12} = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 - d_2^2) = \frac{1}{2}(d_1^2 - c_1^2 - c_2^2).$$

Inversement, la matrice de Gram d'un système de deux vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 détermine complètement la géométrie du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ construit sur ces vecteurs. En particulier : les longueurs des côtés du parallélogramme sont données par $\|\mathbf{b}_1\| = \sqrt{g_{11}}$ et $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{g_{22}}$.

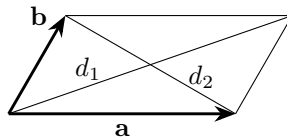
Les longueurs des diagonales sont données par

$$d_1 = \|\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}_1\|^2 + 2\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle + \|\mathbf{b}_2\|^2} = \sqrt{g_{11} + 2g_{12} + g_{22}}$$

et

$$d_2 = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}_1\|^2 - 2\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle + \|\mathbf{b}_2\|^2} = \sqrt{g_{11} - 2g_{12} + g_{22}}.$$

Exemple 3.1 Supposons que la matrice de Gram des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} est donnée par $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors les côtés du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mesurent $\|\mathbf{a}\| = 2$ et $\|\mathbf{b}\| = 1$ et les diagonales valent $d_1 = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{7}$ et $d_2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{3}$. Il est maintenant aisé de dessiner les deux vecteurs.



Produit scalaire dans une base quelconque

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on voit que la matrice de Gram $\mathbf{G} = (g_{ij})$ d'une base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ de \mathbb{V}^2 permet de calculer le produit scalaire de deux combinaisons linéaires $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2$ selon la formule suivante

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2, y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 \rangle \\ &= g_{11}x_1y_1 + g_{12}x_1y_2 + g_{21}x_2y_1 + g_{22}x_2y_2,\end{aligned}$$

que nous pouvons aussi écrire sous forme matricielle :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Les considérations précédentes se généralisent sans autre aux vecteurs de l'espace à trois dimensions. Soient $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ une base de \mathbb{V}^3 et $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + y_3\mathbf{b}_3$ deux vecteurs, alors on a

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3, y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + y_3\mathbf{b}_3 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x_i y_j \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{G} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Proposition 3.21 *Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{V}$ sont linéairement dépendants si et seulement si*

$$\det \mathbf{G} = 0$$

où \mathbf{G} est la matrice de Gram associée aux vecteurs \mathbf{v}_i .

PREUVE. Choisissons une base orthonormée $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de \mathbb{V} et notons

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

la matrice de taille $n \times k$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est formée des coefficients de \mathbf{v}_i , i.e.

$$\mathbf{v}_i = x_{1i}\mathbf{e}_1 + x_{2i}\mathbf{e}_2 + \dots x_{ni}\mathbf{e}_n.$$

Comme la base est orthonormée, on a

$$\mathbf{G} = A^t \cdot A.$$

Si les \mathbf{v}_i sont linéairement dépendants, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ qui ne sont pas tous nuls et tels que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

ce qui est équivalent à $A \cdot \lambda = \mathbf{0}$ où

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Mais cette équation entraîne que

$$\mathbf{G} \cdot \lambda = A^t \cdot A \cdot \lambda = A^t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

et donc $\det(\mathbf{G}) = 0$.

Inversement, supposons que $\det(\mathbf{G}) = 0$, alors il existe $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ non nul tel que $\mathbf{G} \cdot \lambda = \mathbf{0}$. Posons $\mathbf{x} := \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$, alors

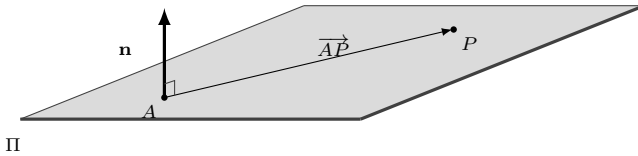
$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda^t \cdot \mathbf{G} \cdot \lambda = 0.$$

Ainsi $\mathbf{x} := \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ et on a donc montré que les \mathbf{v}_i sont linéairement dépendants. \square

3.7 Premières applications du produit scalaire

Équation normale d'un plan

À la page 61, nous avons obtenu l'équation d'un plan à partir d'un déterminant. Une autre façon de trouver une telle équation est basée sur le choix d'un vecteur normal (i.e. orthogonal) au plan.



Proposition 3.22 Si $A \in \mathbb{E}^3$ est un point et $\mathbf{n} \in \mathbb{V}^3$ est un vecteur non nul, alors l'ensemble

$$\Pi = \{P \in \mathbb{E}^3 \mid \overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}\}$$

est un plan.

PREUVE. En utilisant le produit scalaire, on peut écrire cet ensemble sous la forme

$$\Pi = \{P \in \mathbb{E} \mid \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle = 0\}. \quad (3.5)$$

Considérons maintenant un repère orthonormé $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point P et les composantes n_1, n_2, n_3 du vecteur \mathbf{n} relativement à ce repère sont déterminées par

$$\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3.$$

Notons aussi $\overrightarrow{OA} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, alors on a

$$\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle = \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \rangle = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OA} \rangle.$$

Le point P appartient donc à Π si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0, \quad (3.6)$$

où

$$n_4 \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OA} \rangle = -(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3).$$

Or on a vu à la page 61, que l'équation (3.6) était bien la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan, cela démontre la proposition. □

REMARQUE. Observons à l'inverse que si un plan Π admet l'équation

$$\Pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

dans un repère orthonormé, alors le vecteur $\mathbf{n} = (a, b, c)$ est orthogonal au plan Π . En particulier, on peut facilement trouver un vecteur normal à un plan dont on connaît l'équation cartésienne.

Problème Un plan $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ partage l'espace en deux demi-espaces \mathbb{E}_+ et \mathbb{E}_- . Étant donné un point $P \in \mathbb{E}^3$ non contenu dans le plan Π , comment peut-on décider dans quel demi-espace il se trouve ?

SOLUTION. Choisissons un point $A \in \Pi$ et un vecteur \mathbf{n} normal à Π et dirigé vers \mathbb{E}_+ . Alors $P \in \mathbb{E}_+$ si $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle > 0$, et $P \in \mathbb{E}_-$ si $\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle < 0$.

Des raisonnements similaires s'appliquent à l'équation d'une droite dans le plan \mathbb{E}^2 .

Distance d'un point à un plan

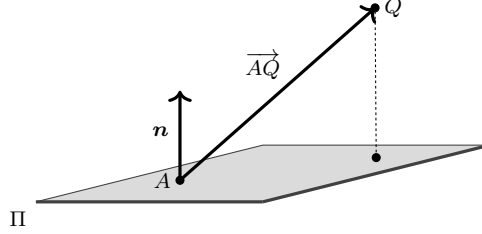
Soient $Q = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ un point de l'espace et $A = (a_1, a_2, a_3)$ un point appartenant au plan Π d'équation

$$\Pi : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0, \quad (3.7)$$

dans un repère orthonormé. Nous cherchons la distance $\text{dist}(Q, \Pi)$ entre Q et le plan Π . Puisque le vecteur $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est orthogonal au plan Π , la

distance entre Q et Π est égale à la norme de la projection du vecteur \overrightarrow{AQ} sur \mathbf{n} . Par la seconde formule encadrée de la page 99, on a donc

$$\text{dist}(Q, \Pi) = \left\| \text{proj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{AQ}) \right\| = \frac{|\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AQ} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$



Comme les coordonnées de A satisfont l'équation (3.7) et $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$, on a

$$\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AQ} \rangle = \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OQ} \rangle - \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OA} \rangle = n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 + n_4;$$

et donc

$$\text{dist}(Q, \Pi) = \frac{|n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \quad (3.8)$$

On a une formule similaire pour le calcul de la distance d'un point à une droite dans le plan.

Remarquons en particulier que la distance du plan à l'origine est donnée par

$$\text{dist}(O, \Pi) = \frac{|n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

On écrit souvent l'équation d'un plan $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ sous la forme

$$\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p,$$

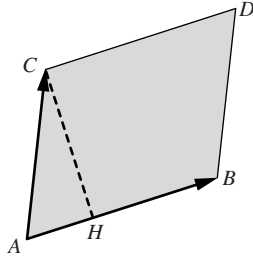
où on a posé $p = -n_4$. On a alors $\mathbf{n} \perp \Pi$ et $|p|/\|\mathbf{n}\|$ est la distance du plan à l'origine.

L'aire d'un parallélogramme

Rappelons que l'aire d'un parallélogramme est le produit de la base par la hauteur. L'aire du parallélogramme $ABDC$ est donc donnée par

$$\text{Aire}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CH}\| \quad (3.9)$$

où $[C, H]$ est la hauteur issue de C (i.e. $H \in L_{AB}$ et $L_{CH} \perp L_{AB}$), et $[A, B]$ joue le rôle de la « base ».



Le fait que cette définition ne dépend pas du sommet choisi est une conséquence de l'identité suivante :

$$\boxed{(\text{Aire } ABDC)^2 = \|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AC}\|^2 - \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle^2} \quad (3.10)$$

PREUVE. Notons $\mathbf{u} := \vec{AB}$, $\mathbf{v} := \vec{AC}$ et $\mathbf{w} := \vec{HC}$ et observons que

$$\mathbf{w} = \text{norm}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \rho \cdot \mathbf{u}$$

avec

$$\rho = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}.$$

Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{w} sont perpendiculaires, on a donc par le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 - \rho^2 \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^4} \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2}. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient :

$$\text{Aire}(ABDC) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}.$$

□

Remarquons que ce résultat exprime aussi que l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est égale à la racine carrée du déterminant de la matrice de Gram de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$:

$$\boxed{\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\det \mathbf{G}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}}$$

où

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \|\mathbf{b}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Ce déterminant est positif ou nul, puisqu'il représente le carré d'une aire. Observons que cela nous donne une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.8 Aire d'une région plane

Définition. Un *polygone* du plan est une région $G \subset \mathbb{E}^2$ qui est une réunion d'un nombre fini de triangles :

$$G = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \cdots \cup \triangle_n.$$

On peut supposer que ces triangles ne se chevauchent pas, c'est-à-dire que l'intersection $\triangle_i \cap \triangle_j$ ne contient aucun triangle non dégénéré.

L'*aire* du polygone G est par définition la somme des aires de ces triangles :

$$\text{Aire}(G) = \text{Aire}(\triangle_1) + \text{Aire}(\triangle_2) + \cdots + \text{Aire}(\triangle_n).$$

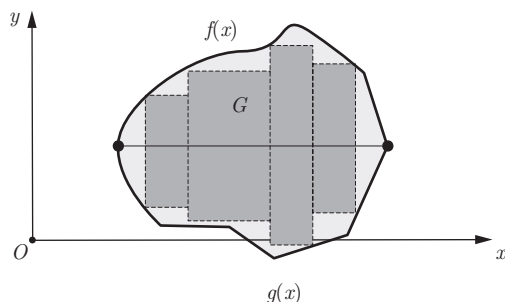
On peut subdiviser chaque triangle \triangle_j en les remplaçant par plusieurs triangles plus petits. Cette opération ne change pas le polygone G ni son aire. Ainsi *l'aire de G ne dépend que de G et non de sa décomposition en triangles.*

Nous voulons étendre cette notion d'aire à des régions du plan limitées par des courbes.

Définition. Une région du plan est dite *simple* si elle est limitée par deux fonctions continues. Plus précisément, la région G est simple si, dans un repère orthonormé $O\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ du plan \mathbb{E}^2 , elle se décrit par des inégalités

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

où $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.



L'aire de G est l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

On peut alors approximer l'aire de la région G en la remplissant par une réunion de rectangles verticaux et en calculant l'aire du domaine polygonal obtenu. En passant à la limite, on obtient une intégrale au sens de Riemann. Nous prenons donc comme définition formelle de l'aire :

$$\text{Aire}(G) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

À titre d'exemple, le disque de rayon R centré en l'origine est l'ensemble

$$\begin{aligned} D_R &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ &= \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R \text{ et } -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\text{Aire}(D_R) = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi R^2,$$

où $\pi = 3.14159\dots$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des intégrales prouvées dans le cours d'analyse de première année. On les admet sans démonstration.

Propriétés de l'aire

Pour toute région simple G dans le plan, on a

- i) Si G est une région polygonale, alors les deux définitions proposées de l'aire coïncident.
- ii) Si $G \subset G'$ alors $\text{Aire}(G) \leq \text{Aire}(G')$.
- iii) Si G_1 et G_2 ne se chevauchent pas, alors

$$\text{Aire}(G_1 \cup G_2) = \text{Aire}(G_1) + \text{Aire}(G_2).$$

- iv) Plus généralement, on a

$$\text{Aire}(G_1 \cup G_2) = \text{Aire}(G_1) + \text{Aire}(G_2) - \text{Aire}(G_1 \cap G_2).$$

- v) L'aire ne dépend pas du choix du repère orthonormé.

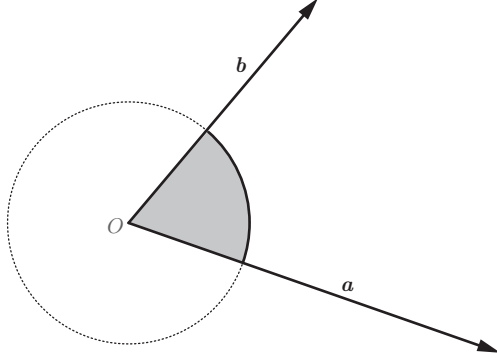
Ces propriétés nous permettent de définir aussi l'aire d'une région plus compliquée, dès qu'elle peut se décomposer en régions simples. Il suffit d'additionner les aires des parties simples dans une décomposition sans chevauchement.

3.9 Mesure des angles

Nous voulons associer à chaque paire de vecteurs non nuls \mathbf{a}, \mathbf{b} un nombre $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ qui mesure l'angle entre ces vecteurs. Nous avons d'abord besoin de quelques définitions préliminaires.

Définitions

1. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ deux vecteurs linéairement indépendants. On dit alors qu'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ se trouve *entre* \mathbf{a} et \mathbf{b} s'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$.
2. Deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ sont dit *opposés* s'il existe $\mu \leq 0$ tel que $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$.
3. Fixons une origine $O \in \mathbb{E}$. Le *secteur* $\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ associé à deux vecteurs linéairement indépendants \mathbf{a}, \mathbf{b} est l'ensemble des points P tels que \overrightarrow{OP} est entre \mathbf{a} et \mathbf{b} et $d(O, P) \leq 1$.



Définition. La mesure de l'angle entre les vecteurs non nuls \mathbf{a} et \mathbf{b} est définie par

$$\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2\text{Aire}(\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants.

Lorsque $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, on pose

$$\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \text{ si } \mu > 0 \quad \text{et} \quad \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi \text{ si } \mu < 0$$

Si l'un des vecteurs est nul, alors $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ n'est pas défini.

Si A, B sont deux points distincts d'un point P , on note

$$\angle_P AB = \vartheta(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$$

l'angle entre les directions de \overrightarrow{PA} et \overrightarrow{PB} .

Théorème 3.23 Les propriétés usuelles de la notion d'aire se transposent en propriétés de l'angle. Nous avons donc pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$:

a) $0 \leq \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$.

b) Si \mathbf{v} est entre \mathbf{a} et \mathbf{b} , alors

$$\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{v}) + \vartheta(\mathbf{v}, \mathbf{b}) = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

c) Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ et tout $\theta \in [0, \pi]$ il existe un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{V}$ tel que $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$.

d) $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ si et seulement si $\left\langle \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}, \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} \right\rangle$.

e) $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

f) $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \vartheta(\mathbf{b}, -\mathbf{a}) = \pi$.

g) $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{b} = \rho\mathbf{a}$ avec $\rho > 0$.

h) Si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, alors $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$.

i) Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$, alors $0 \leq \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \frac{\pi}{2}$ (on dit alors que l'angle est aigu).

j) Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$, alors $\frac{\pi}{2} < \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$ (on dit alors que l'angle est obtus).

REMARQUE. Les trois dernières conditions entraînent que $\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/2$ si et seulement si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

3.10 Sur les fonctions trigonométriques

Définitions. Le *sinus* de l'angle $\theta = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ entre deux vecteurs non nuls \mathbf{a} et $\mathbf{b} \in \mathbb{V}$ est défini par

$$\sin \theta := \frac{\|\mathbf{b}''\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

où $\mathbf{b}'' = \text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ est la composante normale de \mathbf{b} relative à \mathbf{a} .

Le *cosinus* de $\theta = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est défini par

$$\cos \theta := \varepsilon \cdot \frac{\|\mathbf{b}'\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

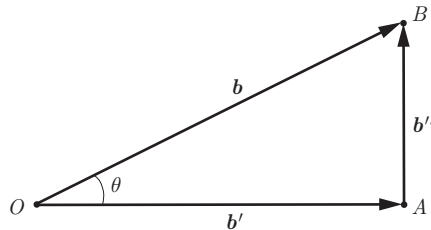
où $\mathbf{b}' = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ est la projection de \mathbf{b} sur \mathbf{a} et $\varepsilon = +1$ si θ est un angle aigu et $\varepsilon = -1$ si θ est obtus.

Et la *tangente* de $\theta = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est définie par

$$\tan \theta := \varepsilon \cdot \frac{\|\mathbf{b}''\|}{\|\mathbf{b}'\|} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Lorsque l'angle est aigu, on peut voir les fonctions trigonométriques dans un simple triangle rectangle. Fixons un point O , et notons $B = O + \mathbf{b}$ et $A = O + \mathbf{b}'$. Alors OAB est un triangle rectangle dont l'angle en O mesure θ et donc

$$\sin(\theta) = \frac{d(A, B)}{d(O, B)}, \quad \cos(\theta) = \frac{d(O, A)}{d(O, B)} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{d(A, B)}{d(O, A)}.$$



Remarquons que $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}''$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$. Le théorème de Pythagore entraîne donc que

$$\frac{\|\mathbf{b}'\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2}{\|\mathbf{b}\|^2} = \frac{\|\mathbf{b}' + \mathbf{b}''\|^2}{\|\mathbf{b}\|^2} = 1,$$

d'où la relation

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Lemme 3.24 *Le cosinus d'un angle est donné par*

$$\cos \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

On écrit souvent cette formule sous la forme

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

PREUVE. On sait par les propositions 3.9 et 3.15 que $\mathbf{b}' = \rho \mathbf{a}$ avec $\rho = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}$, on a donc (en notant $\theta = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$)

$$\cos \theta := \varepsilon \cdot \frac{\|\mathbf{b}'\|}{\|\mathbf{b}\|} = \varepsilon \cdot \frac{|\rho| \|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \varepsilon \cdot \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Mais ε est le signe de $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ et donc $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$. □

Corollaire 3.25 *L'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ peut s'exprimer sous la forme*

$$\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

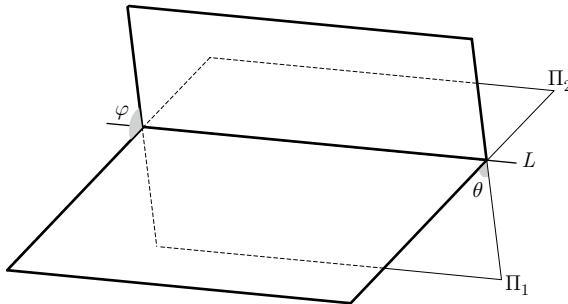
PREUVE. On a

$$\begin{aligned} (\text{Aire } \mathcal{P})^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - (\cos \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^2) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (\sin \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^2. \end{aligned}$$

□

Angles diédraux

Deux plans Π_1 et Π_2 non parallèles et non confondus se coupent suivant une droite L et partagent l'espace en quatre régions appelées *dièdres*. Un plan orthogonal à la droite L rencontre Π_1 et Π_2 suivant deux droites qui forment quatre angles de mesure $\theta, \varphi, \theta, \varphi$ (où $\theta + \varphi = \pi$). Ce sont les *angles diédraux*.



La méthode la plus simple pour calculer un angle diédral est d'utiliser les vecteurs normaux aux plans. En effet, l'angle correspondant à un dièdre est donné par l'angle entre un vecteur normal à Π_1 pointant vers l'intérieur de ce dièdre et un vecteur normal à Π_2 pointant vers l'extérieur du dièdre.

Concrètement, si P est un point intérieur au dièdre et si A_i est un point de Π_i et \mathbf{m}_i est un vecteur normal à Π_i , alors l'angle φ correspondant à ce dièdre est donné par

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle}{\|\mathbf{m}_1\| \|\mathbf{m}_2\|} \quad (3.11)$$

à condition que $\langle \mathbf{m}_1, \overrightarrow{A_1 P} \rangle > 0$ et $\langle \mathbf{m}_2, \overrightarrow{A_2 P} \rangle < 0$ (ou l'inverse). Si cette condition sur les signes n'est pas respectée, alors on a

$$\cos(\varphi) = -\frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle}{\|\mathbf{m}_1\| \|\mathbf{m}_2\|} \quad (3.12)$$

Voyons un exemple : Supposons que dans un système de coordonnées ortho-normé nos deux plans sont donnés par les équations

$$\Pi_1 : x + y - z = 1,$$

et

$$\Pi_2 : y + 3z = 9,$$

et que le dièdre considéré soit celui contenant le point $P = (1, 1, 0)$.

On trouve facilement un point A dans l'intersection $\Pi_1 \cap \Pi_2$, par exemple $A = (0, 3, 2)$. Le vecteur $\mathbf{m}_1 := (1, 1, -1)$ est normal à Π_1 et le vecteur $\mathbf{m}_2 := (0, 1, 3)$ est normal à Π_2 . Nous avons $\overrightarrow{AP} = (1, -2, -2)$ et donc

$$\langle \mathbf{m}_1, \overrightarrow{AP} \rangle = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{m}_2, \overrightarrow{AP} \rangle = -8 < 0.$$

Par conséquent, l'angle diédral φ cherché est donné par la formule (3.11) :

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle}{\|\mathbf{m}_1\| \|\mathbf{m}_2\|} = -\frac{2}{\sqrt{30}}.$$

Si on considère le dièdre contenant le point $Q = (0, 0, 1)$, alors $\overrightarrow{AQ} = (0, -3, -1)$ et donc

$$\langle \mathbf{m}_1, \overrightarrow{AQ} \rangle = -2 < 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{m}_2, \overrightarrow{AQ} \rangle = -6 < 0.$$

Comme ces deux produits scalaires ont le même signe, l'angle diédral θ cherché est donné par la formule (3.12) :

$$\cos(\theta) = -\frac{\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle}{\|\mathbf{m}_1\| \|\mathbf{m}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{30}};$$

c'est l'angle supplémentaire à φ .

Résumons dans un tableau les principales propriétés du produit scalaire.

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{4} (\ \mathbf{a} + \mathbf{b}\ ^2 - \ \mathbf{a} - \mathbf{b}\ ^2)$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \ \mathbf{a}\ ^2$
$ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ $
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \cos(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$
$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\ \mathbf{a}\ ^2} \mathbf{a}$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\ \mathbf{a} + \mathbf{b}\ ^2 - \ \mathbf{a}\ ^2 - \ \mathbf{b}\ ^2)$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\ \mathbf{a}\ ^2 + \ \mathbf{b}\ ^2 - \ \mathbf{a} - \mathbf{b}\ ^2)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

Rappelons également que si $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{e}_i$, alors

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} a_i b_j$$

où $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. En particulier, lorsque $\{\mathbf{e}_i\}$ est une base orthonormée on a

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

3.11 Applications à la géométrie du triangle

Donnons-nous un triangle ABC et introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}.$$

La relation de Chasles s'écrit

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{a}.$$

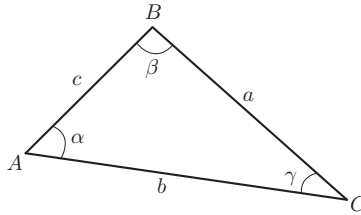
Notons encore

$$a = d(B, C) = \|\mathbf{a}\|, \quad b = d(A, C) = \|\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad c = d(A, B) = \|\mathbf{c}\|$$

les côtés du triangle ABC et

$$\begin{aligned} \alpha &= \vartheta(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{b}), \\ \beta &= \vartheta(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \vartheta(\mathbf{a}, -\mathbf{c}) \\ \gamma &= \vartheta(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \vartheta(-\mathbf{b}, -\mathbf{a}) = \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \end{aligned}$$

ses trois angles.



Il est bien connu que la somme des trois angles est égale à deux angles droits, voici la preuve.

Proposition 3.26 *Pour tout triangle ABC , on a*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

PREUVE. Rappelons que $\alpha = \vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, $\gamma = \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ et $\beta = \vartheta(\mathbf{a}, -\mathbf{c})$. Par la relation de Chasles, on a $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$; en particulier \mathbf{b} est entre \mathbf{a} et \mathbf{c} et donc

$$\alpha + \gamma = \vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Mais comme

$$\vartheta(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \pi - \vartheta(\mathbf{a}, -\mathbf{c}) = \pi - \beta$$

(voir le théorème 3.23), on a $\alpha + \gamma = \pi - \beta$. □

L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. On a donc par le corollaire 3.25

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha).$$

Une première conséquence de cette formule est la *formule du sinus* :

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{2 \text{ Aire}(ABC)}{abc}}.$$

Proposition 3.27 *Le produit scalaire de \mathbf{b} et \mathbf{c} est donné par*

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

On a déjà démontré cette formule au numéro 3.18; rappelons tout de même la preuve qui est très courte :

$$\begin{aligned} a^2 = \|\mathbf{a}\|^2 &= \langle \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle \\ &= \|\mathbf{b}\|^2 - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + \|\mathbf{c}\|^2 \\ &= b^2 - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + c^2. \end{aligned}$$

□

Rappelons que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \cos(\alpha)$, on a donc le

Corollaire 3.28

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

□

Cette formule s'appelle le *théorème du cosinus de Al-Kashi*¹, on l'écrit aussi sous la forme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$

Voyons quelques conséquences du théorème du cosinus :

a) *Deux triangles congrus ont des angles correspondant égaux.*

Rappelons que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont congrus si $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ et $d(C, A) = d(C', A')$.

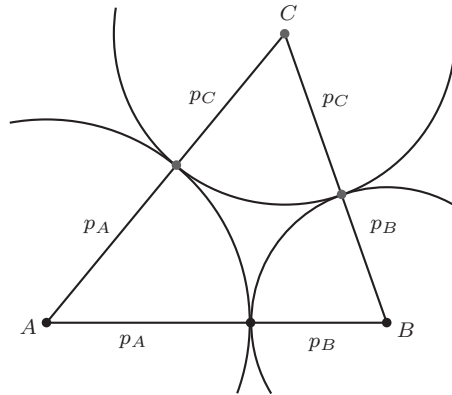
b) *Si le triangle ABC est isocèle en A , i.e. $b = c$, alors $\beta = \gamma$.*

c) *Le cosinus et le sinus de $\pi/3$ sont donnés par*

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En effet, supposons le triangle ABC équilatéral, i.e. $a = b = c$, alors $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, mais on a alors $\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problème On considère les trois cercles qui sont centrés aux sommets A, B, C du triangle et qui sont deux à deux tangents. Quels sont les rayons de ces trois cercles ?



1. Al-Kashi : mathématicien et astronome perse (1380-1429).

SOLUTION. Notons p_A le rayon du cercle centré en A et de même pour les deux autres cercles. On a alors

$$p_A + p_B = c, \quad p_A + p_C = b, \quad p_B + p_C = a.$$

On a donc

$$(a + b + c) = 2(p_A + p_B + p_C).$$

Posons

$$p = (p_A + p_B + p_C) = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

alors on a

$$p_A = p - (p_B + p_C) = p - a = \frac{1}{2}(-a + b + c).$$

Et de même

$$p_B = p - b = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad p_C = p - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

On voit aussi que

$$p = p_A + p_B + p_C = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

est le demi-périmètre du triangle.

Définition. Les nombres p_A , p_B , p_C s'appellent *les rayons de tangence* du triangle ABC , et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ est le *demi-périmètre*.

Proposition 3.29 Le produit scalaire de $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ vaut

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = p \cdot p_A - p_B \cdot p_C.$$

PREUVE. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{2}((p_A + p_B)^2 + (p_A + p_C)^2 - (p_B + p_C)^2) \\ &= p_A^2 + p_A p_B + p_A p_C - p_B p_C \\ &= p p_A - p_B p_C. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.30 (La formule de Heron) *L'aire du triangle ABC vérifie*

$$\text{Aire}(ABC) = \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}.$$

PREUVE. On a grâce à la proposition précédente :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(ABC)^2 &= \frac{1}{4}(\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle^2) \\
 &= \frac{1}{4}((p_A + p_B)^2(p_A + p_C)^2 - (pp_A - p_Bp_C)^2) \\
 &= \frac{1}{4}((p_A^2 + p_Ap_B + p_Ap_C + p_Bp_C)^2 - (pp_A - p_Bp_C)^2) \\
 &= \frac{1}{4}((pp_A + p_Bp_C)^2 - (pp_A - p_Bp_C)^2) \\
 &= pp_Ap_Bp_C.
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.31 Nous pouvons exprimer l'angle α par :

$$\cos(\alpha) = \frac{p \cdot p_A - p_B \cdot p_C}{bc} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{2}{bc} \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}.$$

PREUVE. On a

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|} = \frac{p \cdot p_A - p_B \cdot p_C}{bc}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{2 \text{ Aire}(ABC)}{bc} = \frac{2 \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}}{bc}.$$

□

Le cercle

Avant d'aller plus loin dans l'étude du triangle, nous étudions un peu le cercle.

Définitions. Le *cercle* $\mathcal{C}_{\Pi, O, r}$ de centre O et rayon $r > 0$ contenu dans un plan $\Pi \subset \mathbb{E}$ est l'ensemble des points du plan situés à distance r du centre :

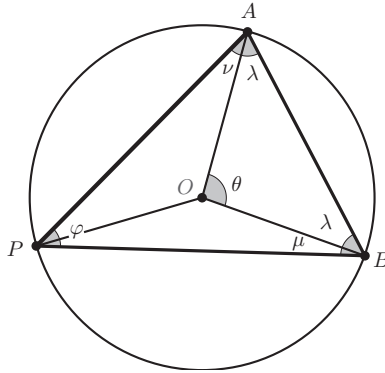
$$\mathcal{C}_{\Pi, O, r} := \{P \in \Pi \mid d(O, P) = r\}.$$

On dit que le segment $[A, B]$ est une *corde* du cercle \mathcal{C} si A, B sont deux points de \mathcal{C} . Un *diamètre* est une corde passant par le centre.

Toute corde partage le cercle en deux parties qui s'appellent des *arcs de cercles*. Si la corde est un diamètre, alors chaque arc s'appelle un *demi-cercle*.

Proposition 3.32 Soit $[A, B]$ une corde du cercle $\mathcal{C}_{\Pi, O, r}$ et P un point du cercle. Si P et le centre O sont situés du même côté de la droite AB , alors

$$\sphericalangle_P AB = \frac{1}{2} \sphericalangle_O AB.$$



Si P et O sont situés de part et d'autre de la droite AB , alors

$$\sphericalangle_P AB = \pi - \frac{1}{2} \sphericalangle_O AB.$$

PREUVE. C'est une conséquence simple de la proposition 3.26 ; notons $\theta = \sphericalangle_O AB$ et $\varphi = \sphericalangle_P AB$.

Si P et O sont situés du même côté de la droite AB , on pose

$$\lambda = \sphericalangle_A BO = \sphericalangle_B OA, \quad \mu = \sphericalangle_B PO = \sphericalangle_P OB \quad \text{et} \quad \nu = \sphericalangle_A OP = \sphericalangle_P AO.$$

On a alors

$$2\lambda + 2\mu + 2\nu = \pi = 2\lambda + \theta$$

or $\varphi = \mu + \nu$, donc $\theta = \pi - 2\lambda = 2\mu + 2\nu = 2\varphi$.

Si P et O sont séparés par la droite AB , on pose $\varphi' = \sphericalangle_A PO = \sphericalangle_P OA$, $\varphi'' = \sphericalangle_B OP = \sphericalangle_P BO$, $\theta' = \sphericalangle_O AP$ et $\theta'' = \sphericalangle_O PB$. On a

$$\theta' + 2\varphi' = \pi = \theta'' + 2\varphi'' \quad , \quad \theta = \theta' + \theta'' \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi' + \varphi''$$

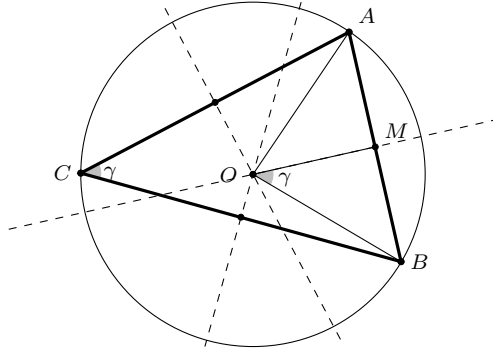
d'où l'on déduit que $2\varphi + \theta = 2\pi$. □

Corollaire 3.33 *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires.* □

Rayon du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle dans un plan Π . Rappelons que la médiatrice du segment $[A, B]$ est l'ensemble des points situés à égale distance des points A et B . De même, tout point de la médiatrice de $[B, C]$ est situé à égale distance de B et de C . L'intersection O de ces deux médiatrices est donc située à égale distance R des trois points A , B et C . Cet argument montre que

Les trois médiatrices d'un triangle ABC se coupent en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle (i.e. le cercle passant par les sommets).



Cherchons la valeur du rayon $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ de ce cercle. Notons M le milieu du segment $[A, B]$. Par la proposition 3.32, on a $\angle_O AB = 2\gamma$, mais d'autre part l'angle $\angle_O AB = 2\angle_O MB$ donc $\angle_O MB = \gamma$.

Par définition du sinus, nous avons maintenant $\overline{OB} \sin \gamma = \overline{MB} = \frac{1}{2}c$, c'est-à-dire $2R \sin \gamma = c$. En échangeant le rôle des sommets A, B et C , nous avons finalement

$$2R = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

On a vu au corollaire 3.31 que $\sin(\alpha) = \frac{2}{bc} \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}$, par conséquent

$$R = \frac{1}{4} \frac{abc}{\sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}}$$

Une autre preuve du résultat précédent

Notons \mathbf{G} la matrice de Gram des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ où O est le centre du cercle circonscrit. On a

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle = R^2,$$

et

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{1}{2}(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2) = R^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

Les autres produits scalaires se calculent de la même manière et on trouve

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} R^2 & R^2 - \frac{1}{2}c^2 & R^2 - \frac{1}{2}b^2 \\ R^2 - \frac{1}{2}c^2 & R^2 & R^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ R^2 - \frac{1}{2}b^2 & R^2 - \frac{1}{2}a^2 & R^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est

$$\det(\mathbf{G}) = \frac{1}{4} (2R^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) - R^2(a^4 + b^4 + c^4) - a^2b^2c^2).$$

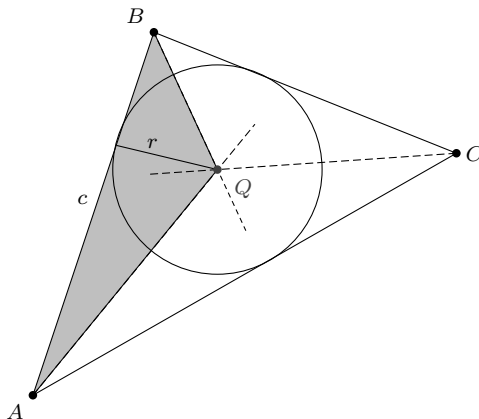
Mais ce déterminant doit s'annuler, puisque le parallélépipède construit sur les vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} est de volume nul (les trois vecteurs sont linéairement dépendants). On a donc

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 b^2 c^2}{2(b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2}{16 p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Le rayon du cercle inscrit dans un triangle

Tout point de la bissectrice de l'angle $\sphericalangle_A(B, C)$ est situé à égale distance des droites L_{AB} et L_{AC} . De même, tout point de la bissectrice de $\sphericalangle_B(A, C)$ est situé à égale distance des droites L_{AB} et L_{BC} . L'intersection Q de ces deux droites est située à égale distance r des trois droites L_{AB} , L_{AC} et L_{BC} . Cet argument montre que

Les trois bissectrices intérieures du triangle ABC se coupent en un point Q qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



Pour calculer le rayon r du cercle inscrit, on observe que

$$\text{Aire}(ABQ) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot r = \frac{1}{2} cr;$$

de même

$$\text{Aire}(BCQ) = \frac{1}{2} ar \quad \text{et} \quad \text{Aire}(ACQ) = \frac{1}{2} br.$$

Par conséquent

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = p \cdot r$$

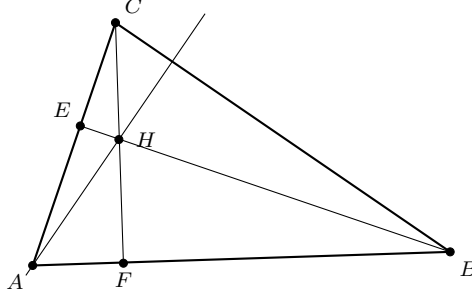
où $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. On a donc grâce à la formule de Heron

$$r = \frac{1}{p} \text{Aire}(ABC) = \frac{1}{p} \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C}.$$

On a ainsi montré que le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC est donné par

$$r = \sqrt{\frac{p_A \cdot p_B \cdot p_C}{p}}.$$

Pour compléter cette discussion sur les droites remarquables du triangle, nous donnons encore le résultat sur les hauteurs :



Théorème 3.34 *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

PREUVE. La preuve découle de la règle de Chasles et de la bilinéarité du produit scalaire. Soient $[B, E]$ et $[C, F]$ deux hauteurs du triangle ABC et soit H l'intersection des deux droites L_{BE} et L_{CF} . Nous devons montrer que \overrightarrow{BC} est orthogonal à \overrightarrow{HA} . Nous savons que $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}$, donc

$$0 = \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \rangle = \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC} \rangle - \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA} \rangle$$

De même $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$, donc

$$0 = \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} \rangle = \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB} \rangle - \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA} \rangle$$

En soustrayant ces deux équations on obtient :

$$0 = \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA} \rangle - \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA} \rangle,$$

et donc

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HA} \rangle = \langle \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA} \rangle = \langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA} \rangle - \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA} \rangle = 0.$$

□

La droite d'Euler

Notons O le centre du cercle circonscrit et G le barycentre du triangle ABC . Si ABC n'est pas un triangle équilatéral, alors $G \neq O$ (le lecteur pourra le vérifier!).

Notons encore M le milieu de $[B, C]$ et $K = O + 3\overrightarrow{OG}$. Alors K est le point aligné sur OG tel que $\frac{OK}{OG} = 3$, i.e. $\frac{GK}{GO} = -2$.

Rappelons que OM est orthogonal à BC et que G est le point de $[A, M]$ tel que $\frac{GA}{GM} = -2$ (voir page 75).

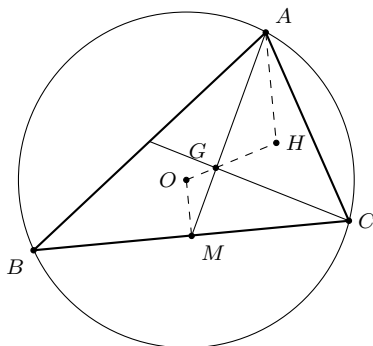
Comme $\frac{GK}{GO} = \frac{GA}{GM}$, le théorème 1.11 nous dit que les droites L_{OM} et L_{KA} sont parallèles; en particulier L_{KA} est perpendiculaire à L_{BC} .

De même L_{KB} est perpendiculaire à L_{AC} et L_{KC} est perpendiculaire à L_{AB} .

Le point K est donc l'orthocentre H du triangle ABC et on a en particulier démontré le théorème d'Euler sur les triangles :

Dans tout triangle non équilatéral ABC , le barycentre G , l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit sont alignés. \square

La droite passant par ces trois points s'appelle la *droite d'Euler du triangle*.



3.12 Exercices

3.12.1 On rappelle que deux vecteurs sont colinéaires si l'un est multiple de l'autre. Montrer que \mathbf{v} et \mathbf{w} sont colinéaires si et seulement si

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \pm \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

.

3.12.2 Sachant que $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}$ et $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\frac{2}{3}$. Calculer le produit scalaire

$$\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 3\mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle,$$

en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

3.12.3 Montrer que pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ on a

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2).$$

Redémontrer ensuite cette identité au moyen de la géométrie élémentaire en se référant au théorème de Pythagore. Constater que cette identité est en fait équivalente au théorème de Pythagore.

3.12.4 Prouver que tout triangle isocèle possède deux médianes de même longueur.

3.12.5 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $d(A, B) = 3$, $d(A, C) = 5$ et $d(A, D) = 8$. Trouver $d(B, C)$.

3.12.6 Soit ABC un triangle tel que $d(A, B) = 3$, $d(A, C) = 7$ et $d(B, C) = 5$. Calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$, puis trouver la projection orthogonale du vecteur \overrightarrow{AC} sur \overrightarrow{AB} .

3.12.7 Dans un repère orthonormé on a les vecteurs $\mathbf{w} = (2, 4, -1)$ et $\mathbf{v} = (-2, -1, 3)$. Calculer la projection de \mathbf{w} sur \mathbf{v} .

3.12.8 Trois vecteurs sont donnés dans une base orthonormée par $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, 0)$ et $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$. Calculer la nouvelle base orthonormée obtenue par le procédé de Gram-Schmidt à partir de $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

3.12.9 Montrer que si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base orthonormée, alors les composantes d'un vecteur quelconque \mathbf{u} de \mathbb{V}^3 sont données par $u_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{u} \rangle$. En d'autres termes, on a

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_3.$$

3.12.10 Refaire l'exercice 3.10.2 en utilisant la matrice de Gram.

3.12.11 Dessiner les deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sachant que leur matrice de Gram est

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 9 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

3.12.12 Calculer la norme et le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{u} = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$ et $\mathbf{v} = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ sachant que la matrice de Gram des \mathbf{b}_i est

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.12.13 Soit $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ une base de \mathbb{V}^3 dont la matrice de Gram est celle de l'exercice précédent. On donne trois points A, B, C de coordonnées (dans cette base) $A = (1, -2, 2)$, $B = (3, 0, -1)$ et $C = (0, 1, 1)$. Calculer :

- Les longueurs des trois côtés du triangle : $d(A, B)$, $d(A, C)$ et $d(B, C)$;
- L'angle en A du triangle ABC ;
- L'aire du triangle ABC .

3.12.14 Montrer que la projection orthogonale sur un vecteur \mathbf{a} , notée $\text{proj}_{\mathbf{a}}$, est une application linéaire et qu'elle raccourcit les longueurs des vecteurs.

3.12.15 On a vu que le coefficient de projection est noté avec la lettre grecque ρ (Rhô). C'est aussi l'une des notations du rapport de section. Est-il justifié d'utiliser une même notation pour ces deux notions ?

3.12.16 Trouver l'équation du plan passant par le point $A = (-1, 0, 4)$ et orthogonal au vecteur $\mathbf{m} := \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ (où $\{O, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\}$ est un repère orthonormé de \mathbb{E}^3). Calculer ensuite la distance entre ce plan et le point $Q = (3, 2, 0)$.

3.12.17 Trouver l'équation du lieu géométrique des points équidistants de $A = (-1, 0, 4)$ et $B = (3, 2, 0)$ de \mathbb{R}^3 , puis donner une paramétrisation de cet ensemble.

3.12.18 Montrer que le cosinus d'un angle est toujours compris entre -1 et $+1$.

3.12.19 Dans le plan \mathbb{E}^2 muni d'un repère orthonormé, on considère le triangle donné par $A = (1, 2)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, -1)$.

(a) Calculer l'aire de ce triangle.

(b) Trouver l'angle en A .

(c) Trouver la projection du vecteur \overrightarrow{BC} sur les droites L_{AB} et L_{AC} .

3.12.20 Trouver l'angle diédral entre les plans

$$\Pi_1 : 2x - z = 1 \quad \text{et} \quad \Pi_2 : 5x + 3y = 0,$$

correspondant au dièdre contenant le point $P = (0, -1, 0)$.

3.12.21 Trouver les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit dans un triangle de côté 2, 3, 4.

3.12.22 On considère un triangle ABC tel que $a = \overline{BC} = 3$, $b = \overline{AC} = 5$ et $c = \overline{AB} = 6$.

Calculer les quantités suivantes :

a) l'aire de ce triangle ;

b) la hauteur h_A issue de A ;

c) le sinus de γ (où γ est l'angle en C) ;

d) le rayon du cercle inscrit dans le triangle ;

e) la matrice de Gram \mathbf{G} de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

f) constater que la racine carrée du déterminant de \mathbf{G} est le double de l'aire du triangle ; expliquer la raison !

3.12.23 Trouver une formule exprimant la hauteur h_A issue du sommet A du triangle ABC en fonction des trois côtés a, b, c et du demi-périmètre p .

Chapitre 4

Produits extérieur, vectoriel et mixte

Dans ce chapitre, nous enrichissons notre boîte à outil de trois nouvelles opérations sur les vecteurs. Contrairement au produit scalaire, ces opérations ne sont pas définies pour toutes les dimensions. Il s'agit du produit extérieur, défini en dimension 2, et des produits vectoriels et mixtes définis en dimension 3. Ces produits nous permettent de traiter efficacement les questions d'aires et de volumes orientés, ils jouent un rôle important dans toute la géométrie vectorielle et en physique. Nous les utiliserons pour étudier les angles orientés, pour développer la géométrie des droites dans le plan et dans l'espace ainsi que pour décrire les relations trigonométriques dans les tétraèdres et les triangles sphériques.

4.1 Le produit extérieur dans un plan orienté

Dans ce paragraphe et le suivant nous travaillons dans le plan \mathbb{E}^2 muni d'une orientation ; on se donne également un repère orthonormé d'orientation positive $\{O, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\}$.

Les vecteurs $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$, etc., s'écrivent simplement $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, etc. Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement indépendants, alors (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est une *base d'orientation positive* (ou une *base directe*) si elle a la même orientation que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *d'orientation négative*. Par définition on a donc

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ est d'orientation positive} \iff a_1b_2 - a_2b_1 > 0.$$

L'opérateur \mathbf{J}

Pour chaque vecteur non nul $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^2$, il existe un unique vecteur $\mathbf{v}' \in \mathbb{V}^2$ qui est orthogonal à \mathbf{v} , de même longueur et tel que le couple \mathbf{v}, \mathbf{v}' est d'orientation

positive. On peut donc définir une application

$$\mathbf{J} : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$$

caractérisée par les propriétés :

- i) $\|\mathbf{J}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ (en particulier $\mathbf{J}\mathbf{0} = \mathbf{0}$),
- ii) $\mathbf{J}\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$,
- iii) Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, alors le couple $\mathbf{v}, \mathbf{J}\mathbf{v}$ est d'orientation positive.

Proposition 4.1 *Si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ est une base orthonormée directe, alors*

$$\mathbf{J}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = -v_2\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_2.$$

PREUVE. Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, il n'y a rien à montrer ; supposons donc $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Notons $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ et $\mathbf{w} = \mathbf{J}\mathbf{v} = (w_1, w_2)$. Nous devons avoir $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ et donc

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 = 0.$$

Cette équation entraîne que

$$w_1 = -\lambda v_2 \quad \text{et} \quad w_2 = \lambda v_1$$

où λ est un scalaire qui reste à déterminer. Nous devons avoir d'autre part $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$; c'est-à-dire

$$\|(-\lambda v_2, \lambda v_1)\|^2 = \lambda^2 (v_2^2 + v_1^2) = \|(v_1, v_2)\|^2,$$

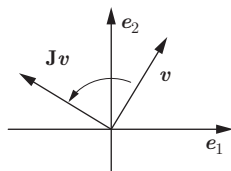
ce qui entraîne que $\lambda^2 = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$.

Finalement \mathbf{v}, \mathbf{w} est une base d'orientation positive. On a donc

$$v_1w_2 - v_2w_1 = \lambda(v_1^2 + v_2^2) > 0,$$

ce qui entraîne que $\lambda > 0$. On a ainsi $\lambda = +1$ et donc $\mathbf{J}\mathbf{v} = \mathbf{w} = (-v_2, v_1)$. \square

Géométriquement, l'opérateur \mathbf{J} est la rotation qui fait tourner le vecteur \mathbf{v} d'un quart de tour dans le sens positif.



Proposition 4.2 L'application $\mathbf{J} : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$ est linéaire.

PREUVE. Il suffit de le vérifier dans une base orthonormée directe : on a

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{J}((u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2) = -(u_2 + v_2)\mathbf{e}_1 + (u_1 + v_1)\mathbf{e}_2 \\ &= -u_2\mathbf{e}_1 + u_1\mathbf{e}_2 - v_2\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\lambda\mathbf{u}) &= \mathbf{J}(\lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2) = -\lambda u_2\mathbf{e}_1 + \lambda u_1\mathbf{e}_2 \\ &= \lambda(-u_2\mathbf{e}_1 + u_1\mathbf{e}_2) = \lambda\mathbf{J}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

□

Définition. Le produit extérieur de deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}^2$ est le nombre $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ défini par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle.$$

Lemme 4.3 Dans une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, le produit extérieur de $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ est donné par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

PREUVE. Ce lemme est une conséquence immédiate de la proposition 4.1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \langle -a_2\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \rangle \\ &= a_1b_2 - a_2b_1.\end{aligned}$$

□

Proposition 4.4 Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ (antisymétrie) ;
- ii) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ si et seulement si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont colinéaires ;
- iii) si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, alors $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \pm \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$;
- iv) le produit extérieur est bilinéaire :

$$\begin{aligned}(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2) \wedge (\mu_1\mathbf{b}_1 + \mu_2\mathbf{b}_2) \\ = \lambda_1\mu_1(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1) + \lambda_1\mu_2(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_2) + \lambda_2\mu_1(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_1) + \lambda_2\mu_2(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

PREUVE.

i) L'antisymétrie est une conséquence immédiate du lemme 4.3.

ii) \mathbf{a} et \mathbf{b} sont colinéaires si et seulement si $\mathbf{J}\mathbf{a}$ et \mathbf{b} sont orthogonaux, i.e. si et seulement si $\langle \mathbf{J}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$.

iii) Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont orthogonaux, alors \mathbf{Ja} et \mathbf{b} sont colinéaires : $\mathbf{Ja} = \lambda \mathbf{b}$. On a alors $\langle \mathbf{Ja}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \|\mathbf{b}\|^2$ et $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{Ja}\| = |\lambda| \|\mathbf{b}\|$ et donc $\langle \mathbf{Ja}, \mathbf{b} \rangle = \pm \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$.

iv) La bilinéarité découle du fait que \mathbf{J} est linéaire et que le produit scalaire est bilinéaire. Elle peut aussi se vérifier directement à partir du lemme 4.3. \square

Aire orientée d'un parallélogramme

Nous avons obtenu, dans l'équation (3.10) page 107, une formule donnant l'aire d'un parallélogramme qui utilise le produit scalaire. Voici une autre formule basée sur le produit extérieur.

Proposition 4.5 *L'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ construit sur les vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}^2$ est donnée par*

$$\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|. \quad (4.1)$$

PREUVE. Calculons dans une base orthonormée en utilisant la formule (3.10) de la page 107. On a

$$\begin{aligned} (\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 \\ &= (u_1 v_2)^2 + (u_2 v_1)^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

\square

Soulignons que nous avons démontré en passant la formule

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2.$$

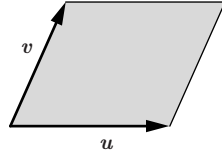
Voici une autre preuve, plus géométrique, de la proposition précédente. Choisissons \mathbf{u} comme base du parallélogramme, la hauteur est alors égale à $|\langle \mathbf{J}(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}), \mathbf{v} \rangle|$.

En observant que $\mathbf{J}(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{J}(\mathbf{u})$, et avec la définition « aire = base \times hauteur », nous obtenons :

$$\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \cdot \left| \left\langle \mathbf{J} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right), \mathbf{v} \right\rangle \right| = |\langle \mathbf{J}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle| = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|.$$

On interprète le produit extérieur comme une *aire orientée* :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \text{Aire}_{or} \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \begin{cases} \text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{si } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ est d'orientation positive,} \\ -\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{si } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ est d'orientation négative.} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Expression de \mathbf{J} et du produit extérieur dans une base quelconque

Cherchons l'expression de l'opérateur \mathbf{J} dans une base directe quelconque $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de \mathbb{V}^2 . Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2$, alors le vecteur

$$\mathbf{w} := \mathbf{J}\mathbf{u} = w_1\mathbf{b}_1 + w_2\mathbf{b}_2$$

doit satisfaire trois conditions. La première dit que $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$; cette condition s'écrit

$$g_{11}u_1w_1 + g_{12}(u_1w_2 + u_2w_1) + g_{22}u_2w_2 = 0 \quad (4.3)$$

où

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

est la matrice de Gram de $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. La seconde condition dit que $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|$, c'est-à-dire

$$g_{11}w_1^2 + 2g_{12}w_1w_2 + g_{22}w_2^2 = g_{11}u_1^2 + 2g_{12}u_1u_2 + g_{22}u_2^2. \quad (4.4)$$

La dernière condition dit que $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ est d'orientation positive :

$$u_1w_2 - u_2w_1 > 0. \quad (4.5)$$

La solution du système formé par les équations (4.3) et (4.4), et la condition (4.5) est donnée par

$$w_1 = -\frac{g_{12}u_1 + g_{22}u_2}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{g_{11}u_1 + g_{12}u_2}{\sqrt{\Delta}}$$

où

$$\Delta = \det \mathbf{G} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2;$$

on a obtenu

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = -(g_{12}u_1 + g_{22}u_2)\frac{\mathbf{b}_1}{\sqrt{\Delta}} + (g_{11}u_1 + g_{12}u_2)\frac{\mathbf{b}_2}{\sqrt{\Delta}}.$$

Le produit extérieur peut maintenant se calculer. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \langle \mathbf{J}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle w_1 \mathbf{b}_1 + w_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{v} \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \langle -(g_{12}u_1 + g_{22}u_2)\mathbf{b}_1 + (g_{11}u_1 + g_{12}u_2)\mathbf{b}_2, v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (-g_{11}(g_{12}u_1 + g_{22}u_2)v_1 - g_{12}(g_{12}u_1 + g_{22}u_2)v_2 \\
 &\quad + g_{12}(g_{11}u_1 + g_{12}u_2)v_1 + g_{22}(g_{11}u_1 + g_{12}u_2)v_2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(u_1v_2 - v_1u_2) \\
 &= \sqrt{\Delta}(u_1v_2 - v_1u_2).
 \end{aligned}$$

On a donc démontré la formule

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \sqrt{\det \mathbf{G}} (u_1v_2 - v_1u_2).$$

4.2 Géométrie des droites dans le plan orienté

Considérons une droite L dans le plan orienté \mathbb{E}^2 et un vecteur \mathbf{w} parallèle à L . On observe que si P et P' sont deux points de L , alors

$$\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w} = \overrightarrow{OP'} \wedge \mathbf{w}.$$

En effet, le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ est un multiple de \mathbf{w} ; disons $\overrightarrow{PP'} = \lambda \mathbf{w}$, et donc

$$\overrightarrow{OP'} \wedge \mathbf{w} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}) \wedge \mathbf{w} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}$$

puisque $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = 0$.

Le nombre $m = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}$ s'appelle le *moment* du vecteur \mathbf{w} par rapport à l'origine O . Le moment m est donc l'aire orientée du parallélogramme de sommets $O, P, P + \mathbf{w}, O + \mathbf{w}$.

Rappelons qu'on appelle *vecteur directeur* d'une droite L tout vecteur libre \mathbf{w} non nul et parallèle à L .

Définition. Les *coordonnées de Plücker* d'une droite $L \subset \mathbb{E}^2$ relatives à un repère $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ sont définies par

$$\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; m) = (w_1 : w_2; m)$$

où \mathbf{w} est un *vecteur directeur* de L et m est le moment de \mathbf{w} par rapport à l'origine O .

REMARQUE. Les coordonnées de Plücker ne sont pas définies de manière unique. De fait, si \mathbf{w}' est un autre vecteur directeur de L , alors \mathbf{w}' et \mathbf{w} sont colinéaires : $\mathbf{w}' = \lambda \mathbf{w}$ et le moment associé à \mathbf{w}' est $m' = \lambda m$ car

$$m' = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}' = \overrightarrow{OP} \wedge (\lambda \mathbf{w}) = \lambda (\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}) = \lambda m.$$

On voit donc que les coordonnées de Plücker sont définies à un multiple près : $(w_1 : w_2; m)$ et $(w'_1 : w'_2; m')$ sont des coordonnées de Plücker de la même droite L si et seulement s'il existe un scalaire λ non nul tel que

$$(w'_1 : w'_2; m') = \lambda(w_1 : w_2; m).$$

On peut exprimer cela en disant que les coordonnées de Plücker forment un système de *coordonnées homogènes* sur l'« espace des droites du plan ».

Lemme 4.6 *Les coordonnées de Plücker de la droite L passant par les points (distincts) du plan $A, B \in \mathbb{E}^2$ sont données par*

$$\text{Plück}(L) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}).$$

PREUVE. Il est clair que $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de L . Il suffit donc de montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est le moment correspondant :

$$m = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{w} = \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} - \underbrace{\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA}}_{=0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}.$$

□

Dans un repère orthonormé, on a le

Lemme 4.7

a) *La droite $L \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; m) = (w_1 : w_2; m)$ admet pour équation cartésienne*

$$L : w_2 x - w_1 y - m = 0.$$

b) *La droite d'équation $L : ax + by + c = 0$ admet pour coordonnées de Plücker*

$$\text{Plück}(L) = (-b : a; -c).$$

PREUVE. Par définition du moment, on a pour tout point $(x, y) \in L$

$$m = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \wedge (w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2) = w_2 x - w_1 y$$

ce qui démontre la première affirmation.

La seconde affirmation est une conséquence directe de la première.

□

Retenons en particulier qu'un vecteur directeur de L est donné par $\mathbf{w} = (-b, a)$.

Proposition 4.8 (intersection de deux droites du plan) *Soient L_1 et L_2 deux droites non parallèles du plan \mathbb{E}^2 . Le vecteur position de l'intersection $P = L_1 \cap L_2$ est donné par*

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{m_2 \mathbf{w}_1 - m_1 \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2}} \quad (4.6)$$

où $(\mathbf{w}_1; m_1)$ et $(\mathbf{w}_2; m_2)$ sont les coordonnées de Plücker de L_1 et L_2 .

Observons que cette formule n'a pas de sens lorsque $\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 = 0$, cela correspond au cas où les droites sont parallèles.

PREUVE. Notons $\mathbf{x} := \overrightarrow{OP}$ le vecteur position de l'intersection $L_1 \cap L_2$, ce vecteur doit vérifier le système d'équations

$$\begin{cases} \mathbf{x} \wedge \mathbf{w}_1 = m_1 \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{w}_2 = m_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Cherchons ce vecteur sous la forme d'une combinaison linéaire

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2.$$

Les équations (4.7) nous disent que

$$\begin{cases} \lambda_2 \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}_1 = m_1 \\ \lambda_1 \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 = m_2. \end{cases}$$

On a donc $\lambda_1 = \frac{m_2}{\gamma}$ et $\lambda_2 = -\frac{m_1}{\gamma}$ où l'on a posé $\gamma = \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$; par conséquent

$$\mathbf{x} = \frac{m_2}{\gamma} \mathbf{w}_1 - \frac{m_1}{\gamma} \mathbf{w}_2 = \frac{m_2 \mathbf{w}_1 - m_1 \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2}.$$

□

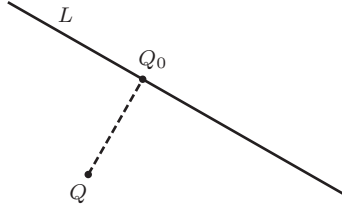
Proposition 4.9 (distance d'un point du plan à une droite) *La distance entre une droite L du plan et un point $Q \in \mathbb{E}^2$ est donnée par*

$$\boxed{\text{dist}(Q, L) = \frac{|\overrightarrow{OQ} \wedge \mathbf{w} - m|}{\|\mathbf{w}\|}}$$

où $(\mathbf{w}; m)$ sont les coordonnées de Plücker de L .

PREUVE. Notons $\delta = \text{dist}(Q, L)$ et soit Q' la projection orthogonale du point Q sur L ; nous avons donc $\delta = d(Q, Q')$. Comme $\overrightarrow{QQ'}$ est orthogonal à \mathbf{w} , on a

$$|\overrightarrow{QQ'} \wedge \mathbf{w}| = \|\overrightarrow{QQ'}\| \cdot \|\mathbf{w}\|,$$



d'où

$$\delta = d(Q, Q') = \frac{|\overrightarrow{QQ'} \wedge \mathbf{w}|}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Or nous avons $\overrightarrow{OQ'} \wedge \mathbf{w} = m$ puisque $Q' \in L$; par conséquent

$$\overrightarrow{QQ'} \wedge \mathbf{w} = (\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ}) \wedge \mathbf{w} = \overrightarrow{OQ'} \wedge \mathbf{w} - \overrightarrow{OQ} \wedge \mathbf{w} = m - \overrightarrow{OQ} \wedge \mathbf{w}.$$

La proposition découle immédiatement des deux équations précédentes. □

Corollaire 4.10 *En coordonnées cartésiennes, la distance entre le point $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ et la droite $L : ax + by + c = 0$ est donnée par*

$$\text{dist}(Q, L) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

PREUVE. On a vu que les coordonnées de Plücker de la droite $L : ax + by + c = 0$ sont $\text{Plück}(L) = (-b : a; -c)$. La proposition précédente entraîne alors

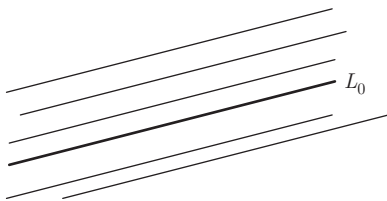
$$\text{dist}(Q, L) = \frac{|(q_1, q_2) \wedge (-b, a) - (-c)|}{\|(-b, a)\|} = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

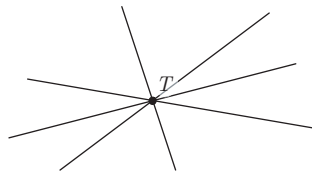
4.3 Faisceaux de droites dans un plan

Définition. Une famille de droites passant par un même point T est un *faisceau concourant*, le point T est le *centre* ou *point de concours* du faisceau. Une famille de droites du plan parallèle à une droite L_0 est un *faisceau parallèle*.

Le faisceau est dit *complet* s'il contient toutes les droites passant par le centre (dans le cas du faisceau concourant) ou toutes les droites parallèles à L_0 (dans le cas du faisceau parallèle). Observons qu'un faisceau complet \mathcal{F} est déterminé par deux droites distinctes $L_0, L_1 \in \mathcal{F}$.



Un faisceau parallèle



un faisceau concourant.

Proposition 4.11 Soit \mathcal{F} un faisceau complet du plan \mathbb{R}^2 déterminé par deux droites L_0 et L_1 d'équations

$$\begin{cases} L_0 : a_0x + b_0y + c_0 = 0 \\ L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Alors une droite $L : ax + by + c = 0$ appartient au faisceau \mathcal{F} si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad (4.9)$$

L'annulation de ce déterminant signifie qu'il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a, b, c) = \lambda(a_0, b_0, c_0) + \mu(a_1, b_1, c_1).$$

On peut donc dire que le faisceau engendré par les droites L_0 et L_1 du plan est l'ensemble des droites qui sont des combinaisons linéaires de L_0 et L_1 et écrire symboliquement

$$L = \lambda L_1 + \mu L_0. \quad (4.10)$$

Le lemme 4.7, nous dit que l'on peut aussi écrire cette combinaison linéaire en coordonnées de Plücker :

$$\text{Plück}(L) = \lambda \text{Plück}(L_1) + \mu \text{Plück}(L_0).$$

PREUVE. Supposons d'abord que \mathcal{F} soit un faisceau concourant de centre $T = (t_1, t_2)$. En particulier, les droites L_1 et L_0 passent par $T = L_0 \cap L_1$ et donc (t_1, t_2) est solution du système d'équations (4.8).

Si le déterminant (4.9) est nul, alors (t_1, t_2) est également solution de l'équation

$$ax + by + c = 0$$

ce qui signifie que la droite L passe par T , et donc $L \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, si la droite $L : ax + by + c = 0$ appartient au faisceau \mathcal{F} , alors (t_1, t_2) vérifie $at_1 + bt_2 + c = 0$. Par conséquent on a

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui n'est possible que si le déterminant (4.9) est nul.

Dans le cas où \mathcal{F} est un faisceau parallèle, les droites L_0 et L_1 sont parallèles, ce qui entraîne que (a_0, b_0) et (a_1, b_1) sont proportionnels. En particulier si le déterminant (4.9) est nul, alors (a, b) est aussi proportionnel à (a_0, b_0) . Par conséquent la droite $L : ax + by + c = 0$ est parallèle à L_0 (et donc appartient au faisceau \mathcal{F}).

Réciproquement, si la droite $L \in \mathcal{F}$, alors les droites L_0 , L_1 et L sont parallèles ce qui entraîne que (a_0, b_0) , (a_1, b_1) et (a, b) sont proportionnels. On peut donc écrire

$$(a, b) = \kappa(a_0, b_0) \quad \text{et} \quad (a_1, b_1) = \nu(a_0, b_0).$$

Posons $\alpha := \kappa c_1 - \nu c$, $\beta := c - \kappa c_0$ et $\gamma := \nu c_0 - c_1$, alors un calcul montre que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne l'annulation du déterminant (4.9). □

Exemple 4.1 Trouver l'équation de la droite L passant par le point $T = (4, 3)$ et par l'intersection des droites L' et L'' d'équation

$$\begin{cases} L' : & 2x + y = 0 \\ L'' : & x - 3y + 1 = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

SOLUTION. La droite L appartient au faisceau engendré par L' et L'' . Cherchons-la sous la forme $L = v L' + (1 - v) L''$:

$$L : (2v + (1 - v))x + (v - 3(1 - v))y + (1 - v) = 0,$$

le point $(4, 3)$ est sur cette droite ; on a par conséquent

$$(v + 1)4 + (4v - 3)3 + (1 - v) = 0,$$

et donc $v = \frac{4}{15}$. L'équation de L est donc $\frac{4}{15} L' + \frac{11}{15} L''$, que l'on peut écrire

$$L : 19x - 29y + 11 = 0.$$

4.4 La trigonométrie dans un plan orienté

Angles orientés

Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs linéairement indépendants d'un plan orienté \mathbb{E}^2 , alors on définit la *mesure de l'angle orienté* par

$$\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq 0 \\ -\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} < 0. \end{cases}$$

Rappelons que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} > 0$ si et seulement si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est une base directe de \mathbb{V}^2 .

Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs non nuls linéairement dépendants, alors on définit $\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ comme dans le cas non orienté : $\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ou π selon que ces vecteurs sont de même sens ou de sens opposé.

La proposition suivante est évidente :

Proposition 4.12 *La mesure de l'angle orienté vérifie les propriétés suivantes :*

- i) $-\pi < \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$;
- ii) $0 < \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \pi$ si et seulement si \mathbf{a}, \mathbf{b} est une base directe de \mathbb{V}^2 ;
- iii) $\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{J}\mathbf{a}) = \frac{\pi}{2}$;
- iv) $\vartheta_{or}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

□

Le cosinus d'un angle ne dépend pas de son orientation, il n'en va pas de même pour son sinus.

Le sinus et la tangente d'un angle orienté

Dans le plan orienté \mathbb{E}^2 , on définit le *sinus* de l'angle orienté associé à deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}^2$ par

$$\sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) := \cos(\vartheta(\mathbf{J}\mathbf{a}, \mathbf{b})),$$

et la *tangente* de cet angle par

$$\tan(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) := \frac{\sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))}{\cos(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))}.$$

Le cosinus de l'angle orienté est simplement le cosinus de cet angle :

$$\cos(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) := \cos(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

Notons $\mathbf{b}' = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ la projection de \mathbf{b} sur \mathbf{a} et $\mathbf{b}'' = \text{proj}_{\mathbf{J}\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ la projection de \mathbf{b} sur $\mathbf{J}\mathbf{a}$, nous avons alors

$$|\cos \theta| := \frac{\|\mathbf{b}'\|}{\|\mathbf{b}\|}, \quad |\tan \theta| := \frac{\|\mathbf{b}''\|}{\|\mathbf{b}'\|} \quad \text{et} \quad |\sin \theta| := \frac{\|\mathbf{b}''\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

où $\theta = \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Le sinus d'un angle non orienté défini à la section 3.10 est donc la valeur absolue du sinus de l'angle orienté correspondant.

REMARQUE. La mesure d'un angle non orienté est comprise entre 0 et π et le sinus d'un tel angle est toujours positif, alors que la mesure d'un angle orienté est comprise entre $-\pi$ et π . Pour les angles orientés, on a $\sin \theta \geq 0$ si $0 \leq \theta \leq \pi$ et $\sin \theta \leq 0$ si $-\pi \leq \theta \leq 0$.

Observons aussi que le sinus d'un angle orienté change de signe avec cet angle, alors que le cosinus ne dépend pas du signe,

$$\sin(-\vartheta) = -\sin(\vartheta), \quad \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta).$$

Le sinus et le cosinus d'un angle orienté se calculent vectoriellement par les formules suivantes.

Proposition 4.13 *Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux vecteurs non nuls dans un plan orienté, alors*

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

où $\theta = \vartheta_{or}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

PREUVE. La formule donnant le cosinus a été obtenue à la section 3.10. Pour le sinus, nous avons

$$\sin(\vartheta_{or}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \cos(\vartheta(\mathbf{J}\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{\langle \mathbf{J}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

□

Un angle orienté est déterminé par son cosinus et son sinus ; plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 4.14 *Si \mathbf{a} est un vecteur non nul dans un plan orienté et si $c^2 + s^2 = 1$, alors il existe un vecteur non nul \mathbf{b} tel que*

$$\cos(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = c \quad \text{et} \quad \sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = s.$$

Ce vecteur est unique à multiplication par un scalaire positif près.

PREUVE. Posons $\mathbf{b} = c\mathbf{a} + s\mathbf{J}\mathbf{a}$, alors par définition on a $\cos(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = c$ et $\sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = s$.

Si \mathbf{b}' est un autre vecteur non nul dans le même plan tel que $\cos(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')) = c$ et $\sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')) = s$, alors on peut écrire ce vecteur $\mathbf{b}' = x\mathbf{a} + y\mathbf{J}\mathbf{a}$, et donc

$$c = \cos(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}'\|} = \frac{x}{\|\mathbf{a}\|^2 (x^2 + y^2)}$$

et

$$s = \sin(\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')) = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}'}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}'\|} = \frac{y}{\|\mathbf{a}\|^2 (x^2 + y^2)}.$$

On en déduit que $\mathbf{b}' = \lambda \mathbf{b}$ avec $\lambda = \|\mathbf{a}\|^2 (x^2 + y^2) > 0$.

□

Quelques propriétés supplémentaires des fonctions trigonométriques

La mesure de l'angle orienté prend ses valeurs entre $-\pi$ et π ; mais on préfère parfois remplacer une valeur θ comprise entre $-\pi$ et 0 par la valeur $(2\pi - \theta)$ qui est comprise entre π et 2π .

D'une façon générale, il est commode de considérer que la mesure orientée d'un angle θ est non pas un nombre réel, mais un *nombre réel défini modulo 2π* .

Cette expression signifie que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les nombres θ et $\theta + k2\pi$ représentent le même angle. D'une manière générale, on écrit

$$\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

lorsque $\varphi = \theta + k2\pi$ pour un entier k .

Proposition 4.15 *Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont trois vecteurs non nuls dans un plan orienté, alors*

$$\vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \vartheta_{or}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \pmod{2\pi}.$$

□

Choisissons un repère orthonormé direct $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ de \mathbb{E}^2 et, pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, notons \mathbf{e}_θ l'unique vecteur de \mathbb{V}^2 tel que $\vartheta_{or}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_\theta) = \theta \pmod{2\pi}$. Par définition des fonctions trigonométriques, on a

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$

Puisque $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta+2k\pi}$ pour tout entier k , il est évident que les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques :

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta).$$

Rappelons la relation fondamentale

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

et voici dans le tableau suivant quelques autres propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques.

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$

Les formules d'addition pour le sinus et le cosinus sont données dans le théorème 4.16.

Théorème 4.16 *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

PREUVE. Posons $\mathbf{a} := \mathbf{e}_{-\alpha} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{b} := \mathbf{e}_\beta = \cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2$, alors

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1, \quad \text{et} \quad \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha + \beta \pmod{2\pi}.$$

Par la proposition 4.13, nous avons donc

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \cos(\alpha)\mathbf{e}_1 - \sin(\alpha)\mathbf{e}_2, \cos(\beta)\mathbf{e}_1 + \sin(\beta)\mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= (\cos(\alpha)\mathbf{e}_1 - \sin(\alpha)\mathbf{e}_2) \wedge (\cos(\beta)\mathbf{e}_1 + \sin(\beta)\mathbf{e}_2) \\ &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.17 *Les fonctions trigonométriques du demi-angle vérifient*

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \\ 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 + \cos \alpha \\ 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \cos \alpha. \end{aligned}$$

PREUVE. Prenons deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} de longueur 1 tels que $\alpha = \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Posons $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, alors $\frac{\alpha}{2} = \vartheta_{or}(\mathbf{a}, \mathbf{d})$ et

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle = 1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Par conséquent, d'après la proposition 4.13,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{d}}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle} = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

On a aussi

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{d}\|} = \frac{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

et

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}.$$

□

Voyons dans le tableau suivant quelques valeurs particulières des fonctions trigonométriques.

$\cos(0) = 1$	$\sin(0) = 0$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{\pi}{3})$ ont été obtenues à la page 117. Les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$ se déduisent de $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et de la proposition précédente car

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement

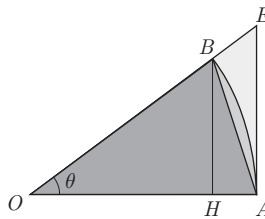
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{3})}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Proposition 4.18 *Pour tout $\theta \geq 0$, on a les inégalités suivantes :*

$$\sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta).$$



PREUVE. Construisons un triangle OAB dont l'angle en O mesure θ et tel que $d(O, A) = d(O, B) = 1$. Notons H le pied de la hauteur du triangle OAB issu de B et E l'intersection de la droite LOB avec la perpendiculaire à LOA passant par A . Considérons également le secteur circulaire $\mathcal{S} = \mathcal{S}(OAB)$ centré en O et limité par les points A et B .

On voit que le triangle OAB est contenu dans le secteur \mathcal{S} qui est lui-même contenu dans le triangle OAE , par conséquent

$$\text{Aire}(OAB) \leq \text{Aire}(\mathcal{S}) \leq \text{Aire}(OAE).$$

Par définition, nous avons $\theta = \angle_O AB = 2\text{Aire}(\mathcal{S})$. D'autre part $d(O, A) = 1$ et $d(B, H) = \sin(\theta)$, donc

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}d(O, A) \cdot d(B, H) = \frac{1}{2}\sin(\theta).$$

Observons également que, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{d(A, E)}{d(O, A)} = \frac{d(H, B)}{d(O, H)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

donc $d(A, E) = \tan(\theta)$ et

$$\text{Aire}(OAE) = \frac{1}{2}d(O, A) \cdot d(A, E) = \frac{1}{2}\tan(\theta).$$

Ainsi on obtient

$$\sin(\theta) = 2\text{Aire}(OAB) \leq 2\text{Aire}(\mathcal{S}) = \theta,$$

et

$$\theta = 2\text{Aire}(\mathcal{S}) \leq 2\text{Aire}(OAE) = \tan(\theta).$$

□

Corollaire 4.19 *Pour tout θ , on a*

$$0 \leq 1 - \cos(\theta) \leq \theta^2.$$

PREUVE. Comme $\cos(\theta) \leq 1$, la première inégalité est banale ; il suffit donc de montrer la seconde inégalité. Pour cette preuve, on peut supposer que $\theta \geq 0$, car dans le cas contraire il suffit de changer le signe de θ .

Supposons d'abord que $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Alors on a $\theta^2 \geq \frac{\pi^2}{4} \simeq \frac{9.87}{4} > 2.46$, et donc $1 - \cos(\theta) \leq 2 < \frac{\pi^2}{4} \leq \theta^2$.

Si, au contraire, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(\theta) > 0$. Donc $(1 + \cos(\theta)) > 1$ et on a par la proposition précédente

$$1 - \cos(\theta) \leq (1 - \cos(\theta))(1 + \cos(\theta)) = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2 \leq \theta^2.$$

□

Les deux résultats précédents nous permettent de calculer d'importantes limites.

Proposition 4.20 *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\theta)}{\theta} \right) = 1.$$

PREUVE. La première limite est une conséquence évidente du corollaire 4.19. Observons en particulier que cette limite entraîne que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = 1$.

Pour prouver la seconde limite, on récrit les inégalités de la proposition 4.18 sous la forme suivante (en supposant $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$)

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{\tan(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)},$$

ou encore

$$\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1,$$

et on fait tendre $\theta \rightarrow 0$. □

Corollaire 4.21 *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables et*

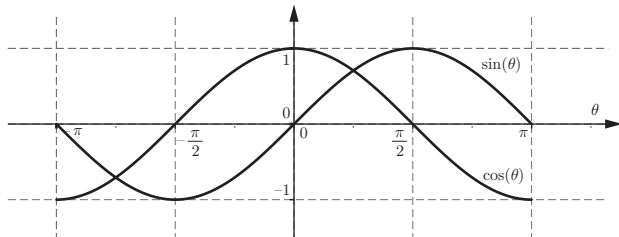
$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \sin'(\theta) = \cos(\theta).$$

PREUVE. On a $\cos(\theta + h) = \cos(\theta)\cos(h) - \sin(\theta)\sin(h)$, par conséquent

$$\begin{aligned} \cos'(\theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta + h) - \cos(\theta)}{h} \\ &= \cos(\theta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(\theta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(\theta) \cdot 0 - \sin(\theta) \cdot 1 = -\sin(\theta). \end{aligned}$$

La preuve de $\sin'(\theta) = \cos(\theta)$ est similaire. □

On déduit immédiatement de ce résultat que sinus et cosinus sont des fonctions continues, que cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$ et croissante sur l'intervalle $[-\pi, 0]$ et que sinus est croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[-\pi, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$. On peut maintenant facilement établir un tableau des variations et dessiner le graphe de ces fonctions.



Fonctions trigonométriques inverses

La fonction $\theta \rightarrow \cos \theta$ est une bijection continue et décroissante de l'intervalle $[0, \pi]$ vers l'intervalle $[-1, 1]$; la fonction inverse s'appelle l'*arccosinus* :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

La fonction $\theta \rightarrow \sin \theta$ est une bijection continue et croissante de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers l'intervalle $[-1, 1]$; la fonction inverse s'appelle l'*arcsinus* :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

4.5 Le produit vectoriel

Dans ce paragraphe, revenons à l'étude des vecteurs dans l'espace orienté à trois dimensions \mathbb{E}^3 .

Définition. Etant donné deux vecteurs \mathbf{a}, \mathbf{b} de \mathbb{V}^3 , on définit le vecteur $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{V}^3$ par les trois conditions suivantes :

- a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$;
- b) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- c) Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement indépendants, alors $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ est une base d'orientation positive de \mathbb{V}^3 .

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ s'appelle le *produit vectoriel* des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Théorème 4.22 *On a les propriétés suivantes :*

- a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si et seulement si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement dépendants ;
- b) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
- c) l'application $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ donnée par $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est bilinéaire.

PREUVE. a) et b) sont clairs. Pour prouver c), on note $\mathbf{K} : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ l'application qui à chaque paire de vecteurs \mathbf{a}, \mathbf{b} de \mathbb{V}^3 associe le vecteur $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Il faut montrer que cette application est bilinéaire.

Supposons \mathbf{a} non nul ; on peut trouver une base orthonormée directe $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ telle que $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{u}_1$. Nous affirmons que si $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3$, alors

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\alpha \beta_3 \mathbf{u}_2 + \alpha \beta_2 \mathbf{u}_3. \quad (4.12)$$

Pour justifier cette affirmation, on note $\mathbf{d} = -\alpha \beta_3 \mathbf{u}_2 + \alpha \beta_2 \mathbf{u}_3$; il est alors clair que $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$ et $\mathbf{d} \perp \mathbf{b}$. On a d'autre part

$$\begin{aligned} (\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \\ &= \alpha^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \alpha^2 \beta_1^2 \\ &= \alpha^2 (\beta_2^2 + \beta_3^2) \\ &= \|\mathbf{d}\|^2. \end{aligned}$$

Finalement, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ est une base d'orientation positive dès que \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement indépendants puisque

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\alpha\beta_3 \\ 0 & \beta_3 & \alpha\beta_2 \end{pmatrix} = \alpha^2(\beta_2^2 + \beta_3^2) > 0.$$

La formule (4.12) est démontrée.

La formule (4.12) montre que \mathbf{K} est linéaire en la seconde variable, i.e.

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \lambda\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{c});$$

mais comme $\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, cette application est aussi linéaire en la première variable. \square

REMARQUE. Le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace est souvent noté $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. On prendra garde à ne pas le confondre avec le produit extérieur de deux vecteurs du plan. Dans ce livre, nous utiliserons toujours la notation $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dans l'espace et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dans le plan. (En particulier $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est un nombre et $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est un vecteur.)

Cherchons une formule exprimant l'application \mathbf{K} dans une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{V}^3 .

Remarquons d'abord qu'il existe exactement deux vecteurs qui sont orthogonaux à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 et de longueur 1 : il s'agit de \mathbf{e}_3 et $-\mathbf{e}_3$; par conséquent $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \pm\mathbf{e}_3$. Comme le triplet $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ doit être d'orientation positive, on doit avoir

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3.$$

En raisonnant de la même façon avec tous les couples de vecteurs $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$, on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = & -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = & -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = & -\mathbf{e}_2. \end{array}$$

D'autre part, $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ est nul pour tout vecteur \mathbf{v} , on a donc

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Comme le produit vectoriel est bilinéaire, on en déduit que si $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

On peut formellement écrire cette formule comme un déterminant :

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \mathbf{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \mathbf{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}.$$

Résumons les propriétés du produit vectoriel que nous avons vues jusqu'ici.

Proposition 4.23 *Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

- i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.
- ii) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- iii) Deux vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{b} \in \mathbb{V}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- iv) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antisymétrie).
- v) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- vi) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
- vii) Si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ est une base orthonormée d'orientation positive et si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

□

Il y a un certain nombre d'autres formules importantes concernant le produit vectoriel.

Proposition 4.24 *Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{V}^3$ on a*

- i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$ (*1^{re} Identité de Grassmann*),
- ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$ (*2^e Identité de Grassmann*).
- iii) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (*Identité de Lagrange*).
- iv) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.

PREUVE. On simplifie les calculs en choisissant une base orthonormée d'orientation positive $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ telle que \mathbf{e}_1 et \mathbf{a} sont alignés, et telle que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{b} sont dans un même plan (si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement indépendants, on peut toujours trouver une telle base, voir le paragraphe « Procédé d'orthogonalisation », p. 102).

Dans cette base, nous avons $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$. Donc $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2\mathbf{e}_3$ et par conséquent

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = a_1b_2c_1\mathbf{e}_2 - a_1b_2c_2\mathbf{e}_1.$$

On vérifie d'autre part facilement que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} = a_1 b_2 c_1 \mathbf{e}_2 - a_1 b_2 c_2 \mathbf{e}_1;$$

la première identité de Grassmann est donc démontrée.

La seconde identité de Grassmann se prouve de la même manière. On peut aussi la voir comme conséquence de la première identité de Grassmann et de l'antisymétrie du produit vectoriel.

Pour prouver l'identité de Lagrange, on développe le vecteur $\mathbf{d} = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{e}_3$ et on observe que

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = (c_2 d_3 - c_3 d_2) \mathbf{e}_1 + (c_3 d_1 - c_1 d_3) \mathbf{e}_2 + (c_1 d_2 - d_1 c_2) \mathbf{e}_3.$$

On a toujours $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 \mathbf{e}_3$, par conséquent

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = a_1 b_2 (c_1 d_2 - d_1 c_2).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= a_1 c_1 (b_1 d_1 + b_2 d_2) - a_1 d_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \\ &= a_1 c_1 b_2 d_2 - a_1 d_1 b_2 c_2. \end{aligned}$$

Les deux égalités précédentes prouvent l'identité de Lagrange.

La dernière identité se prouve aisément à partir de la première identité de Grassmann et de celle de Lagrange. \square

Observons que l'identité de Lagrange est une généralisation de l'identité suivante, qui est vraie par définition :

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = (\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^2.$$

Corollaire 4.25 *Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{V}^3$ on a*

$$i) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0 \quad (1^{\text{re}} \text{ Identité de Jacobi})$$

$$ii) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (2^{\text{e}} \text{ Identité de Jacobi})$$

Nous laissons la preuve en exercice. \square

Les identités de Grassmann et de Lagrange sont très utiles pour réduire des produits vectoriels (fastidieux à calculer) à des produits scalaires (de calculs aisés). Voici un exemple : rappelons que si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs de \mathbb{V}^3 , $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, alors on a la décomposition $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$ où $\mathbf{b}' = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ est la projection orthogonale de \mathbf{b} sur \mathbf{a} et $\mathbf{b}'' = \text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ est la composante normale (voir la proposition 3.9).

Proposition 4.26 *La composante normale est donnée par*

$$\mathbf{b}'' = \text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

PREUVE. On sait que $\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$, on a donc par la première identité de Grassmann

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \\ &= \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \\ &= \text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

□

4.6 Volume orienté et produit mixte

Définition. Le *produit mixte* de trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ est le nombre réel noté $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ et défini par

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

Cherchons l'expression du produit mixte dans une base orthonormée d'orientation positive $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de \mathbb{V}^3 . Pour cela, développons les vecteurs $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$.

On a alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \end{aligned}$$

Le produit mixte est donc un déterminant 3×3 :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Proposition 4.27 *Le produit mixte est trilinéaire, cela signifie que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \in \mathbb{V}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}] = \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

et

- i) $[\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}]$,
- ii) $[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}', \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}]$,

$$\text{iii)} \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{c}'] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'].$$

De plus, on a

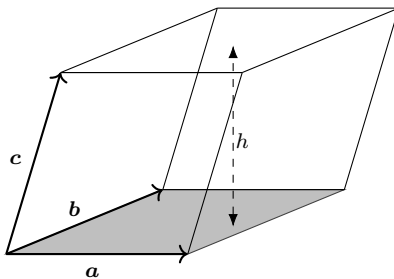
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}].$$

PREUVE. Ces propriétés se déduisent immédiatement des propriétés des déterminants. \square

Interprétation géométrique

Le *volume* du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ construit sur trois vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ est défini par

$$\text{Vol } \mathcal{P} = (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$



Choisissons comme base le parallélogramme $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, son aire est égale à

$$\text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

La hauteur correspondante est la norme de la projection du vecteur \mathbf{c} sur un vecteur perpendiculaire à $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; elle est donc donnée par

$$h := \frac{|\langle \mathbf{m}, \mathbf{c} \rangle|}{\|\mathbf{m}\|}$$

où \mathbf{m} est orthogonal à \mathbf{a} et \mathbf{b} (voir formule (3.15)). On peut choisir $\mathbf{m} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ce qui nous donne la hauteur

$$h = \frac{|\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|},$$

et on a donc

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot h = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|.$$

Rappelons que $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]| = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]|$; par conséquent le volume reste inchangé si on choisit $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ou $\mathcal{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ comme base du parallélépipède.

Complétons la définition en posant $\text{Vol } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ si les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont linéairement dépendants.

Définition. Le *volume orienté* du parallélépipède construit sur trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ est le volume de $\text{Vol } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ affecté du signe $+$ si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ est une base directe, et du signe $-$ dans le cas contraire (lorsque les vecteurs sont linéairement dépendants, le volume orienté est nul).

Les résultats précédents entraînent donc la proposition suivante.

Proposition 4.28 *Le volume orienté du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ est donné par*

$$\text{Vol}_{or}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

□

Une autre façon de calculer un volume (non orienté) est d'utiliser la matrice de Gram.

Corollaire 4.29 *On a*

$$\text{Vol}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \sqrt{\det \mathbf{G}}.$$

où \mathbf{G} est la matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

PREUVE. Supposons que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dans un système de coordonnées orthonormé. Notons M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

et \mathbf{G} la matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Rappelons que $\mathbf{G} = M^t \cdot M$, par conséquent on a

$$\begin{aligned} (\text{Vol } \mathcal{P})^2 &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2 = (\det M)^2 = \det(M) \det(M) \\ &= \det(M^t) \det(M) = \det(M^t \cdot M) = \det(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.30 *Le déterminant de la matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ est nul si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement dépendants.*

Le produit mixte permet d'exprimer simplement les quadruples produits vectoriels.

Proposition 4.31 *Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ on a*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}.$$

PREUVE. On utilise la seconde identité de Grassmann

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{d}$$

avec $\mathbf{v} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. On a donc

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{d}.$$

□

Résumé sur les produits vectoriel et mixte

- 1) Le produit vectoriel est bilinéaire.
- 2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- 3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$
- 4) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \text{Aire } \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- 5) Deux vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{b} \in \mathbb{V}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.
- 6) Dans une base orthonormée d'orientation positive on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

- 7) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$ (1^{re} Identité de Grassmann)
- 8) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$ (2^e Identité de Grassmann)
- 9) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (Identité de Lagrange)
- 10) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.
- 11) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$ (1^{re} Identité de Jacobi)
- 12) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ (2^e Identité de Jacobi)
- 13) Le *produit mixte* de trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ est le nombre noté $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ et défini par

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle.$$

Dans une base orthonormée le produit mixte est le déterminant 3×3 :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- 14) Le produit mixte est trilinéaire.

$$15) [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}].$$

16) Le produit mixte permet d'exprimer les quadruples produits vectoriels :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}.$$

17) Le volume orienté du parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ est donné par

$$\text{Vol}_{or}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Le volume (non orienté) du parallélépipède est aussi donné par :

$$\text{Vol}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \sqrt{\det G}$$

où G est la matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. En particulier, le déterminant de la matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ est nul si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

4.7 Base duale d'une base quelconque de \mathbb{V}^3

Soit $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ une base quelconque de \mathbb{V}^3 . Alors les trois vecteurs définis par

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]}$$

forment une nouvelle base qu'on appelle la *base duale* de la base $\{\mathbf{b}_i\}$. Cette base est utile grâce à la propriété importante suivante, qui se vérifie facilement :

$$\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (4.13)$$

La base duale est utile pour trouver les coefficients d'un vecteur \mathbf{v} dans la base $\{\mathbf{b}_i\}$:

Proposition 4.32 *Les composantes v_i du vecteur \mathbf{v} dans la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sont données par*

$$v_i = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{v} \rangle.$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{v} \rangle &= v_1 \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{b}_1 \rangle + v_2 \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{b}_2 \rangle + v_3 \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{b}_3 \rangle \\ &= v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 \\ &= v_1. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que $v_2 = \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{v} \rangle$ et $v_3 = \langle \mathbf{c}_3, \mathbf{v} \rangle$. □

La base duale est aussi utilisée pour calculer des produits vectoriels dans une base non orthonormée :

Proposition 4.33 Soient $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ une base quelconque de \mathbb{V}^3 et $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$, $\mathbf{w} = w_1\mathbf{b}_1 + w_2\mathbf{b}_2 + w_3\mathbf{b}_3$ deux vecteurs développés dans cette base. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est alors donné par

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \cdot ((v_2w_3 - v_3w_2)\mathbf{c}_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\mathbf{c}_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\mathbf{c}_3).$$

PREUVE. Cela découle immédiatement de la bilinéarité et de l'antisymétrie du produit vectoriel ainsi que de la définition des vecteurs $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. \square

REMARQUE. Observons que la dualité est une propriété symétrique : si \mathbf{b}_i est la base duale de \mathbf{c}_j , alors \mathbf{c}_j est la base duale de \mathbf{b}_i et on a donc pour tout vecteur

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^3 \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{v} \rangle \mathbf{c}_j.$$

4.8 Géométrie des droites dans l'espace

Définition. Les *coordonnées de Plücker* d'une droite L de \mathbb{E}^3 par rapport à l'origine O sont les coordonnées des deux vecteurs $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$ où \mathbf{w} est un vecteur directeur de L et $\mathbf{m} := \overrightarrow{OA} \times \mathbf{w}$ où A est un point de la droite.

Le vecteur \mathbf{m} s'appelle le *moment*¹ de la droite par rapport à l'origine O . Observons que si B est un autre point de L , alors

$$\overrightarrow{OB} \times \mathbf{w} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{w} = \mathbf{m}.$$

En effet, $\overrightarrow{OB} \times \mathbf{w} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \times \mathbf{w} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{w}$. Le moment \mathbf{m} est donc indépendant du point choisi sur la droite.

Le moment \mathbf{m} est donc un vecteur orthogonal au plan passant par l'origine O et la droite L . Il est de norme $\|\mathbf{m}\| = \text{Aire } \mathcal{P}(\overrightarrow{OA}, \mathbf{w})$.

En coordonnées cartésiennes, une droite $L \subset \mathbb{E}^3$ est ainsi déterminée par ses six coordonnées de Plücker

$$\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m}) = (w_1 : w_2 : w_3 ; m_1 : m_2 : m_3).$$

Ces coordonnées ne sont pas indépendantes, nous avons en effet la relation

$$w_1m_1 + w_2m_2 + w_3m_3 = 0$$

qui vient de l'orthogonalité des vecteurs \mathbf{w} et $\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{w}$.

1. Observons que le moment d'un vecteur dans l'espace est un autre vecteur, alors que dans le cas du plan, le moment est un nombre.

D'autre part, ces coordonnées sont des coordonnées homogènes : si l'on multiplie les 6 coordonnées par un scalaire λ non nul, on obtient des coordonnées de Plücker pour la même droite ; ce que l'on peut écrire

$$(w_1 : w_2 : w_3 : m_1 : m_2 : m_3) = (\lambda w_1 : \lambda w_2 : \lambda w_3 : \lambda m_1 : \lambda m_2 : \lambda m_3).$$

Les coordonnées de Plücker de la droite L passant par les points (distincts) $A, B \in \mathbb{E}^3$ sont données par

$$\text{Plück}(L) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}),$$

En effet, on peut choisir $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur, alors

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \times (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$$

Équation d'une droite donnée par ses coordonnées de Plücker

Proposition 4.34 Soit $L \subset \mathbb{E}^3$ une droite dont les coordonnées de Plücker sont $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$. Un point x appartient à $L \subset \mathbb{E}^3$ si et seulement si

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \mathbf{m} \quad (4.14)$$

où \mathbf{x} est le vecteur position de x .

PREUVE. L'équation vectorielle (4.14) est nécessairement satisfaite par définition du moment. Il faut donc montrer que si le point x n'est pas situé sur L , alors $\mathbf{x} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{m}$. Choisissons un point $A \in L$ quelconque et notons \mathbf{a} son vecteur position. Alors les vecteurs \mathbf{w} et $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sont linéairement indépendants puisque $x \notin L$, ainsi $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times \mathbf{w} \neq 0$ et donc

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times \mathbf{w} + \mathbf{a} \times \mathbf{w} = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times \mathbf{w}}_{\neq 0} + \mathbf{m} \neq \mathbf{m}.$$

□

Exemple 4.2 Soit L la droite passant par $A = (2, 1, -2)$ et $B = (3, 2, 0)$. Un vecteur directeur de L est $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$, et le moment de \mathbf{w} est

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{w} = (4, -6, 1).$$

Les coordonnées de Plücker de L sont donc

$$\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m}) = (1 : 1 : 2 ; 4 : -6 : 1)$$

et l'équation de L est

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = (2x_2 - x_3, -2x_1 + x_3, x_1 - x_2) = \mathbf{m},$$

c'est-à-dire

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x_2 & - & x_3 = 4 \\ -2x_1 & + & x_3 = -6 \\ x_1 & - & x_2 = 1 \end{array} \right\}.$$

On remarque que ces trois équations ne sont pas indépendantes (la somme des deux premières équations est égale à moins deux fois la troisième).

Cela s'explique par le fait que chacune de ces équations représente un plan, le système décrit donc la droite L comme intersection de trois plans, il y a redondance puisque l'intersection de deux plans distincts de l'espace est précisément une droite.

Il est facile de paramétrer une droite lorsqu'on connaît ses coordonnées de Plücker.

Lemme 4.35 *Un paramétrage affine de la droite L est donnée par*

$$\mathbf{x}_t = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} + t \mathbf{w}$$

où $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$.

PREUVE. Il faut montrer que \mathbf{x}_t vérifie l'équation (4.14). Multiplions vectoriellement \mathbf{x}_t par \mathbf{w} , on obtient

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} + t \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

Mais la première identité de Grassmann dit que

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{m} - \langle \mathbf{m}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}.$$

Comme $\mathbf{w} \perp \mathbf{m}$, on a

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|^2 \mathbf{m},$$

et donc $\mathbf{x}_t \times \mathbf{w} = \mathbf{m}$. C'est la condition pour que \mathbf{x}_t soit le vecteur position d'un point sur L . \square

Corollaire 4.36 *La projection orthogonale \mathbf{p} d'un point $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ sur la droite L est le point*

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} + \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}$$

où $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$.

PREUVE. On sait par le lemme 4.35 que ce point est de la forme

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} + t \mathbf{w},$$

il faut seulement trouver t . Mais comme \mathbf{p} est la projection orthogonale de \mathbf{q} sur la droite L , les vecteurs $(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ et \mathbf{w} sont orthogonaux. Donc

$$0 = \langle (\mathbf{q} - \mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = \left\langle \left(\mathbf{q} - \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} - t \mathbf{w} \right), \mathbf{w} \right\rangle,$$

On en déduit que $\langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle - t \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$, et donc que

$$t = \frac{\langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.$$

□

Proposition 4.37 (Distance d'un point à une droite) *La distance entre un point $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^3$ et une droite $L \subset \mathbb{E}^3$ est donnée par*

$$\text{dist}(\mathbf{q}, L) = \frac{\|\mathbf{q} \times \mathbf{w} - \mathbf{m}\|}{\|\mathbf{w}\|}$$

où $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$.

PREUVE. Notons \mathbf{p} la projection orthogonale de \mathbf{q} sur L , alors $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{w}$, donc

$$\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{w}\| = \|(\mathbf{q} - \mathbf{p})\| \cdot \|\mathbf{w}\|.$$

Par conséquent

$$\text{dist}(\mathbf{q}, L) = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\|\mathbf{q} \times \mathbf{w} - \mathbf{m}\|}{\|\mathbf{w}\|}.$$

□

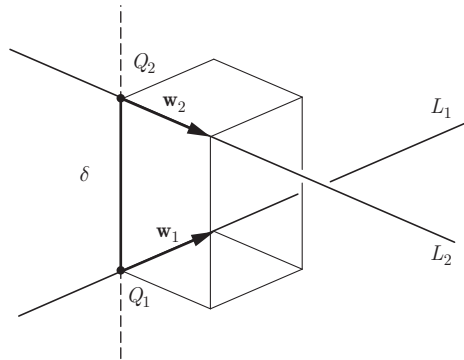
Proposition 4.38 (Distance entre deux droites gauches) *La distance entre deux droites non parallèles $L_1, L_2 \subset \mathbb{E}^3$ est donnée par*

$$\boxed{\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m}_2 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1 \rangle|}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|}} \quad (4.15)$$

où $(\mathbf{w}_1; \mathbf{m}_1)$ et $(\mathbf{w}_2; \mathbf{m}_2)$ sont les coordonnées de Plücker de L_1 et L_2 .

REMARQUE. Si $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$, la formule n'a pas de sens. Cela correspond au cas où les droites sont parallèles.

PREUVE. Notons $\delta = \text{dist}(L_1, L_2)$. Les droites L_1 et L_2 possèdent une unique perpendiculaire commune D ; notons $Q_1 = L_1 \cap D$ et $Q_2 = L_2 \cap D$, alors $\delta = \left\| \overrightarrow{Q_1 Q_2} \right\|$.



Distance entre deux droites.

Pour calculer δ , on considère le parallélépipède \mathcal{P} construit à partir des trois vecteurs $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ et $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$. Le volume de ce parallélépipède est donné par

$$V = \text{Vol}(\mathcal{P}) = \delta \cdot \|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|.$$

Mais ce volume est égal, au signe près, au produit mixte

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] &= [\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = [\overrightarrow{OQ_2}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] - [\overrightarrow{OQ_1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] \\ &= -[\mathbf{w}_1, \overrightarrow{OQ_2}, \mathbf{w}_2] - [\overrightarrow{OQ_1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] \\ &= -\langle \mathbf{w}_1, \overrightarrow{OQ_2} \times \mathbf{w}_2 \rangle - \langle \overrightarrow{OQ_1} \times \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle. \\ &= -(\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m}_2 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1 \rangle). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\delta = \frac{|\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m}_2 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1 \rangle|}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|}.$$

□

Corollaire 4.39 Deux droites non parallèles $L_1, L_2 \subset \mathbb{E}^3$ dont les coordonnées de Plücker sont $(\mathbf{w}_1; \mathbf{m}_1)$ et $(\mathbf{w}_2; \mathbf{m}_2)$ se rencontrent si et seulement si

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m}_2 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1 \rangle = 0.$$

□

Une autre application des coordonnées de Plücker concerne la perpendiculaire commune à deux droites gauches.

Théorème 4.40 (Perpendiculaire commune à deux droites) Soient $L_1, L_2 \subset \mathbb{E}^3$ deux droites non parallèles dont les coordonnées de Plücker sont $(\mathbf{w}_1; \mathbf{m}_1)$ et $(\mathbf{w}_2; \mathbf{m}_2)$. Alors la perpendiculaire commune à ces deux droites est la droite L donnée par $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$ où

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2$$

avec

$$\alpha = \frac{[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_2] \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle - [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1] \|\mathbf{w}_2\|^2}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|^2}$$

et

$$\beta = \frac{[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1] \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle - [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_2] \|\mathbf{w}_1\|^2}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|^2}.$$

PREUVE. Par hypothèse, \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 ne sont pas colinéaires et donc $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ est non nul. C'est clairement un vecteur directeur de la droite L puisque $\mathbf{w} \perp \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w} \perp \mathbf{w}_2$.

Il suffit donc de prouver que la droite L rencontre L_1 et L_2 ; d'après le corollaire 4.39, cela revient à vérifier les conditions

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

En utilisant la définition de \mathbf{m} et en calculant, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m} \rangle &= \alpha \|\mathbf{w}_1\|^2 + \beta \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \\ &= \frac{[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1]}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|^2} \left(-\|\mathbf{w}_1\|^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle^2 \right) = -[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1] \end{aligned}$$

$$\text{car } \left(\|\mathbf{w}_1\|^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle^2 \right) = \|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|^2.$$

Or

$$\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle = [\mathbf{m}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1],$$

donc

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{w} \rangle = -[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1] + [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{m}_1] = 0.$$

On montre de la même manière que $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{m}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$. □

4.9 Relations entre droites et plans

Rappelons (voir p. 105) qu'un plan $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ se décrit par son équation normale

$$\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p,$$

où \mathbf{n} est un vecteur non nul et \mathbf{x} est le vecteur-position d'un point variable du plan. L'interprétation géométrique est la suivante : le vecteur \mathbf{n} est orthogonal au plan et le nombre $|p|/\|\mathbf{n}\|$ est la distance du plan à l'origine. Le couple $(\mathbf{n}; p)$ peut être interprété comme un système de coordonnées du plan. Ces coordonnées sont homogènes.

Nous pouvons exprimer les différentes relations géométriques entre un plan et une droite en fonction de leurs coordonnées $(\mathbf{n}; p)$ et $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$. La première relation évidente est la suivante :

La droite L de coordonnées de Plücker $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$ est parallèle au plan $\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$ si et seulement si $\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Cette droite est perpendiculaire au plan si et seulement si $\mathbf{n} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Condition pour qu'une droite soit contenue dans un plan

On a $L \subset \Pi$ si et seulement si

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{w}, \mathbf{m}, \mathbf{n}] = p \|\mathbf{w}\|^2,$$

où Π est le plan défini par $\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$ et $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$.

PREUVE. La relation $\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = 0$ signifie que la droite est parallèle au plan. On a donc d'après le lemme 4.35 : $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} + t \mathbf{w}$ vérifie l'équation du plan.

$$\begin{aligned} p = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \mathbf{n}, \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{m}}{\|\mathbf{w}\|^2} + t \mathbf{w} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \times \mathbf{m} \rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} [\mathbf{w}, \mathbf{m}, \mathbf{n}]. \end{aligned}$$

□

Le plan passant par une droite et un point donné

Le plan Π passant par le point \mathbf{x} et la droite L telle que $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$ est donné par l'équation

$$\Pi : \langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle = p,$$

avec

$$p = \langle \mathbf{x}, \mathbf{m} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathbf{m} - \mathbf{x} \times \mathbf{w}.$$

Remarquons que si la droite L passe par le point \mathbf{x} , alors aucun plan n'est déterminé par cette droite et ce point, mais dans ce cas, on a précisément $\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \mathbf{m}$ et la formule ci-dessus nous donne un vecteur \mathbf{n} nul.

PREUVE. Choisissons un point $\mathbf{y} \in L$. Alors les vecteurs $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et \mathbf{w} sont deux vecteurs linéairement indépendants et parallèles au plan Π . Le vecteur $\mathbf{n} := (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \times \mathbf{w}$ est donc orthogonal au plan, mais on a alors

$$\mathbf{n} = \mathbf{y} \times \mathbf{w} - \mathbf{x} \times \mathbf{w} = \mathbf{m} - \mathbf{x} \times \mathbf{w}.$$

Pour calculer le paramètre p , on note que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ puisque $\mathbf{x} \in \Pi$, par conséquent

$$p = \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{m} - \mathbf{x} \times \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{m} \rangle.$$

□

Coordonnées de Plücker de l'intersection de deux plans

Cherchons les coordonnées de Plücker $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$ de l'intersection L de deux plans Π_1, Π_2 définis par les équations

$$\Pi_1 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = p_1$$

$$\Pi_2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = p_2.$$

Comme le vecteur \mathbf{n}_1 est orthogonal à Π_1 , ce vecteur est aussi orthogonal au vecteur directeur \mathbf{w} de la droite cherchée L . Il en est de même pour \mathbf{n}_2 . Puisque le vecteur \mathbf{w} est bien défini à multiplication par un scalaire près, on peut donc choisir

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

Pour trouver le moment \mathbf{m} de L , on se donne un point quelconque $P \in L = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Son vecteur position $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ vérifie

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \mathbf{m}.$$

Comme $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, on a aussi

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{n}_1 \rangle = p_1 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{n}_2 \rangle = p_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{x} \times \mathbf{w} \\ &= \mathbf{x} \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle \mathbf{n}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle \mathbf{n}_2 \quad (\text{par Grassmann II}) \\ &= p_2 \mathbf{n}_1 - p_1 \mathbf{n}_2. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré la proposition suivante.

Proposition 4.41 *Les coordonnées de Plücker $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$ de l'intersection L des plans $\Pi_1 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = p_1$ et $\Pi_2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = p_2$ sont données par*

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = p_2 \mathbf{n}_1 - p_1 \mathbf{n}_2.$$

Intersection de droites et de plans

Si l'on cherche l'intersection d'une droite et d'un plan de \mathbb{E}^3 , plusieurs méthodes s'offrent à nous. On peut écrire les deux équations de la droite et l'équation du plan et résoudre le système de trois équations linéaires à trois inconnues ainsi obtenu. Mais on peut aussi paramétriser la droite et injecter ainsi le paramètre dans l'équation du plan; c'est ce que nous avons fait avec l'exemple 2.2 en page 61.

Une troisième méthode utilise les coordonnées de Plücker : cherchons l'intersection de la droite L (telle que $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$) avec le plan Π d'équation

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$. On suppose que L n'est pas parallèle à Π , ainsi $\mathbf{w} \nparallel \mathbf{n}$ et donc $\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$.

Soit P le point d'intersection de la droite L et du plan Π . Son vecteur position $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ vérifie

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{w} &= \mathbf{m} \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle &= p.\end{aligned}$$

Par la seconde identité de Grassmann, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{m} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{w}) \\ &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w} \\ &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{x} - p \mathbf{w}\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant :

Proposition 4.42 (Intersection d'une droite et d'un plan) *L'intersection de la droite L et du plan Π est donnée par*

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{m} + p\mathbf{w}}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle}}$$

où $\Pi : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ et $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m})$.

On a finalement la

Proposition 4.43 (Intersection de trois plans) *L'intersection des trois plans*

$$\begin{cases} \Pi_1 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = p_1 \\ \Pi_2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = p_2 \\ \Pi_3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_3 \rangle = p_3 \end{cases}$$

est le point

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{p_1(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) + p_2(\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1) + p_3(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}{[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3]}}.$$

Cette formule n'a de sens que si les trois vecteurs $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, les trois plans s'intersectent selon une droite ou ne s'intersectent pas du tout (i.e. l'intersection des deux premiers plans est vide ou parallèle au troisième).

PREUVE. Cette formule est une application immédiate de la notion de base duale et de la proposition 4.32, mais on peut aussi la vérifier directement. On a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = \left\langle \frac{p_1(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3)}{[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3]}, \mathbf{n}_1 \right\rangle = p_1;$$

cette équation signifie que \mathbf{x} appartient au plan Π_1 . On a de même

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = p_2 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_3 \rangle = p_3,$$

et donc \mathbf{x} appartient aussi aux plans Π_2 et Π_3 . □

4.10 Projections

Rappels sur les applications

Rappelons qu'une application $f : E \rightarrow E'$ entre deux ensembles est une correspondance qui associe à chaque élément $x \in E$ un et un seul élément $y = f(x) \in E'$. L'ensemble E s'appelle le *domaine de définition* de l'application f et l'ensemble E' est le *but* ou le *co-domaine* de f .

Lorsque $y = f(x)$, on dit que l'élément y est l'*image* de x et que x est une *préimage* de y . Chaque élément $x \in E$ a donc une unique image $y = f(x)$, mais à l'inverse, un élément $y \in E'$ peut avoir plusieurs préimages ou n'en avoir aucune.

L'ensemble des préimages de $y \in E'$ s'appelle l'*image inverse* de y et se note $f^{-1}(y)$, ainsi :

$$x \in f^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) = y.$$

On dit que f est *surjective* si l'image inverse $f^{-1}(y)$ n'est jamais vide, i.e. si pour tout $y \in E'$ il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. L'application f est *injective* si pour tout $y \in E'$, l'ensemble des préimages $f^{-1}(y)$ contient au plus un point, i.e. si chaque fois que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$. Finalement, f est *bijective* si pour tout $y \in E'$, l'ensemble des préimages $f^{-1}(y)$ contient un point unique, i.e. si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, on peut définir l'application inverse $f^{-1} : E' \rightarrow E$ par la condition

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad f(x) = y.$$

Définitions

Une *projection* est une application $f : E \rightarrow \Pi$ où E et Π sont des parties de l'espace, et qui vérifie les deux conditions suivantes :

- a) L'application f est surjective.
- b) L'image inverse $f^{-1}(Q)$ de tout point $Q \in \Pi$ est une droite ou une partie de droite.

Habituellement, l'ensemble des images Π est un plan, on l'appelle le *tableau* ou l'*écran de projection*. Les droites $f^{-1}(Q)$ s'appellent les *projetantes* de la projection.

Les points de E sont parfois appelés *points objets* et les points de Π sont les *points images*. La projection produit une image à partir d'un objet.

On distingue deux types importants de projections :

1. Une projection est dite *parallèle* si l'ensemble des projetantes forme un faisceau parallèle, i.e. si toutes les projetantes sont parallèles à une droite donnée.
2. Une projection est dite *centrale* si l'ensemble des projetantes forme un faisceau concourant, i.e. si toutes les projetantes passent par un point C , qu'on appelle le *centre de projection*. Une projection centrale s'appelle aussi une *perspective*.

Projections parallèles

Les propriétés élémentaires des projections parallèles sont les suivantes :

Proposition 4.44 *Soit f la projection parallèle sur le plan Π en direction de la droite L_0 . Alors*

- i) *L'image par f d'une droite L non parallèle à L_0 est une droite.*
- ii) *Si A, B, C sont trois points distincts sur une telle droite L , alors les images $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ ont le même rapport de section :*

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

- iii) *L'image d'un parallélogramme est aussi un parallélogramme.*
- iv) *Deux droites parallèles sont envoyées sur des droites parallèles.*

PREUVE.

i) L'image par f de L est l'intersection de Π avec le plan passant par L et contenant une projetante (i.e. une droite parallèle L_0). C'est donc l'intersection de deux plans, c'est bien une droite.

ii) Se déduit immédiatement du théorème de Thalès.

iii) La propriété ii) nous dit que la projection respecte les points milieux des segments (l'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image du segment). Donc l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

Finalement, la propriété iv) est une conséquence de iii). □

Une formule pour la projection parallèle

Par définition, la projection parallèle en direction du vecteur non nul \mathbf{w} sur le plan Π d'équation $\Pi : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ est l'application f qui envoie le point P sur l'intersection P' du plan Π avec la droite L de direction \mathbf{w} passant par P .

Si $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, alors $\text{Plück}(L) = (\mathbf{w}; \mathbf{m}) = (\mathbf{w}; \mathbf{x} \times \mathbf{w})$. En utilisant la proposition (4.42), on voit que $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ est donné par

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{m} + p \mathbf{w}}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{w}) + p \mathbf{w}}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle}.$$

Grâce à la seconde identité de Grassmann

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w},$$

on obtient finalement la formule suivante.

Proposition 4.45 *La projection parallèle en direction de \mathbf{w} sur le plan $\Pi : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ est donnée vectoriellement par*

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(\frac{p - \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle} \right) \mathbf{w}} \quad (4.16)$$

□

Il est utile de récrire cette formule dans le langage matriciel. Si on considère que les vecteurs sont représentés par des matrices colonnes dans un système de coordonnées orthonormé :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 = \mathbf{n}^t \mathbf{w}$$

et

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \mathbf{n}^t \mathbf{x}$$

donc

$$\left(\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle} \right) \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{n}^t \mathbf{x}) \mathbf{w}}{\mathbf{n}^t \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w} (\mathbf{n}^t \mathbf{x})}{\mathbf{n}^t \mathbf{w}} = \frac{(\mathbf{w} \mathbf{n}^t) \mathbf{x}}{\mathbf{n}^t \mathbf{w}}.$$

Dans ce calcul, on a utilisé le fait que $(\mathbf{n}^t \mathbf{x})$ est un scalaire ainsi que l'associativité du produit matriciel. La matrice $\mathbf{w} \mathbf{n}^t$ est la matrice carrée de taille 3×3

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^t = \begin{pmatrix} w_1 n_1 & w_1 n_2 & w_1 n_3 \\ w_2 n_1 & w_2 n_2 & w_2 n_3 \\ w_3 n_1 & w_3 n_2 & w_3 n_3 \end{pmatrix}$$

cette matrice se note aussi $\mathbf{w} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{w} \mathbf{n}^t$ et s'appelle le *produit tensoriel* des vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{n} .

La projection parallèle en direction de \mathbf{w} sur le plan Π est donc donnée matriciellement par

$$\boxed{\mathbf{x}' = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n}^t \mathbf{w}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^t \right) \mathbf{x} + \frac{p}{\mathbf{n}^t \mathbf{w}} \mathbf{w}}$$

où \mathbf{I} est la matrice identité 3×3 .

Projection centrale d'un point sur un plan

Prenons un plan Π et un point $C \notin \Pi$. Le plan Ω passant par C et parallèle à Π joue un rôle important. On l'appelle le *plan limite objet*.

Par définition, la perspective (projection centrale) f de centre C sur le plan Π associe à tout point objet $P \notin \Omega$ le point image $P' = \Pi \cap L_{CP}$, intersection du tableau avec la droite passant par C et P . Les points du plan limite Ω n'ont pas d'image.

Les propriétés élémentaires des projections centrales sont les suivantes.

Proposition 4.46 *Soit f la projection centrale de centre C sur le plan Π . Alors*

- i) *L'image par f d'une droite L ne passant pas par C est une droite.*
- ii) *L'image d'un faisceau de droites est un faisceau de droites.*

L'image d'un faisceau parallèle est donc un faisceau. Il est généralement concourant, mais il peut être parallèle dans certaines situations. De même, l'image d'un faisceau concourant est en général un faisceau concourant (mais qui est parfois parallèle).

PREUVE

- i) L'image par f de L est l'intersection de Π avec le plan passant par C et L , c'est donc bien une droite.
- ii) Les faisceaux de droites peuvent se présenter de quatre manières différentes.

- Considérons d'abord le cas d'un faisceau objet \mathcal{F} parallèle mais qui n'est pas parallèle au tableau. Notons L_0 la droite passant par C en direction du faisceau et $F = L_0 \cap \Pi$. Toute droite $L \in \mathcal{F}$ du faisceau a pour image l'intersection L' de Π avec le plan passant par L et C . Ce plan contient la droite L_0 et donc L' passe par le point F . Cela prouve que le faisceau image \mathcal{F}' est un faisceau concourant dont le point de concours est le point F .
- Si le faisceau objet \mathcal{F} est un faisceau parallèle qui est parallèle au tableau, alors le faisceau image \mathcal{F}' est visiblement un faisceau parallèle.
- Si \mathcal{F} est un faisceau concourant dont le point de concours Q n'appartient pas au plan limite Ω , alors toute droite image de ce faisceau doit passer par le point $Q' = \Pi \cap L_{CQ}$. Le faisceau image \mathcal{F}' est donc un faisceau concourant dont le point de concours est Q' .
- Si \mathcal{F} est un faisceau concourant dont le point de concours Q appartient à Ω , alors deux droites images de ce faisceau sont confondues si leur plan commun passe par C et disjointes dans le cas contraire (à cause de l'unicité du plan passant par trois points distincts²). Le faisceau image \mathcal{F}' est donc un faisceau parallèle. □

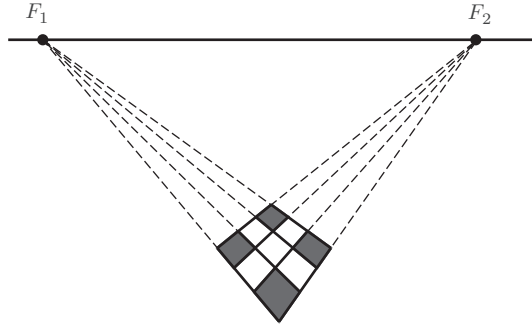
2. Voici le détail du raisonnement. Si les images L'_1 et L'_2 de $L_1, L_2 \in \mathcal{F}$ ont un point commun $P' \in \Pi$, alors le plan passant par C et L_1 possède trois points communs avec le plan passant par C et L_2 , à savoir les points C, Q et P' . Donc ces plans coïncident et les droites images aussi.

Il faut remarquer qu'en général :

- les rapports de section ne sont pas préservés ;
- l'image d'un parallélogramme n'est pas un parallélogramme ;
- des droites parallèles sont envoyées sur des droites non parallèles.

Définition. Soit f une projection centrale sur un plan Π et \mathcal{F} un faisceau objet parallèle et non parallèle au plan limite Ω . Alors le point de concours F du faisceau image \mathcal{F}' s'appelle le *point de fuite* de ce faisceau (ou de la direction du faisceau).

La recherche des points de fuite est l'étape technique essentielle du dessin en perspective. Par exemple un damier est facile à dessiner lorsqu'on connaît ses points de fuite (il y en a deux).



La perspective en formule

Par définition, la *projection centrale* de centre C sur le plan Π : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ d'un point P est l'intersection P' du plan Π avec la droite L_{CP} passant par C et P .

Si $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ et $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, alors

$$\text{Plück}(L_{CP}) = (\mathbf{w}; \mathbf{m}) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}; \mathbf{x} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c})) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}; \mathbf{c} \times \mathbf{x}).$$

Donc $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'} = \Pi \cap L_{CP}$ est donné par la proposition 4.42 :

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{m} + p \mathbf{w}}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) + p (\mathbf{x} - \mathbf{c})}{\langle \mathbf{n}, (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \rangle}.$$

En utilisant la seconde identité de Grassmann

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{x},$$

on obtient finalement le résultat suivant.

Proposition 4.47 *La projection de centre C sur le plan $\Pi : \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = p$ est donnée vectoriellement par*

$$\mathbf{x}' = \frac{(\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle - p) \mathbf{c} - (\langle \mathbf{n}, \mathbf{c} \rangle - p) \mathbf{x}}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{c} \rangle}.$$

□

D'après ce que nous avons vu plus haut, le point de fuite associé à une direction \mathbf{w} est simplement la projection parallèle dans cette direction du centre C sur le tableau. La formule (4.16) entraîne donc que ce point de fuite est donné par

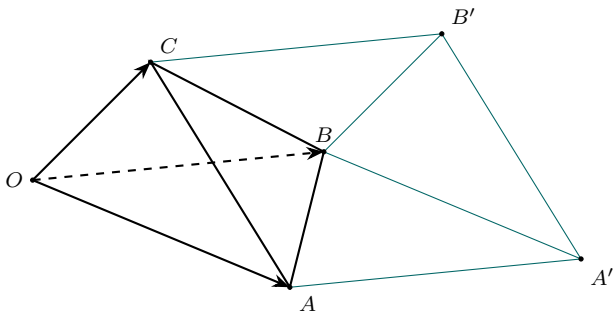
$$\overrightarrow{OF} = \mathbf{c} + \left(\frac{p - \langle \mathbf{n}, \mathbf{c} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle} \right) \mathbf{w},$$

où $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ est le vecteur position du centre de projection.

4.11 Le tétraèdre

Quatre points non coplanaires O, A, B, C de \mathbb{E}^3 déterminent quatre plans $\Pi_{OAB}, \Pi_{OAC}, \Pi_{OBC}$ et Π_{ABC} ; la région de \mathbb{E}^3 limitée par ces quatre plans s'appelle un *tétraèdre*. Les points O, A, B et C sont les quatre *sommets* et les quatre triangles OAB, OAC, OBC et ABC sont les quatre *faces* du tétraèdre. Les six segments $[O, A], [O, B], [O, C], [A, B], [A, C]$ et $[B, C]$ sont ses *arêtes*. On notera $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Lemme 4.48 *Le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à $\frac{1}{6}$ du volume du parallélépipède \mathcal{P} construit sur les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.*

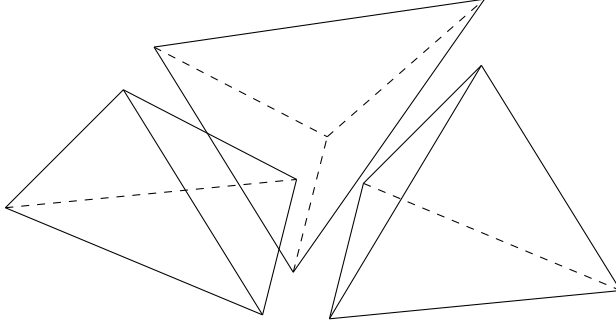


PREUVE. Notons $A' = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $B' = O + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Alors $OABCA'B'$ est un prisme dont le volume vaut clairement la moitié du volume du parallélépipède \mathcal{P} .

Mais ce prisme se compose de trois tétraèdres $OABC$, $AA'B'B$ et $ABB'C$. Lorsqu'on considère ces tétraèdres deux par deux, ils sont de même hauteur et ont des bases de même aire. Les trois tétraèdres ont donc le même volume et finalement

$$\text{Vol}(OABC) = \frac{1}{3} \text{Vol du prisme } (OABCA'B') = \frac{1}{6} \text{Vol}(\mathcal{P}).$$

□



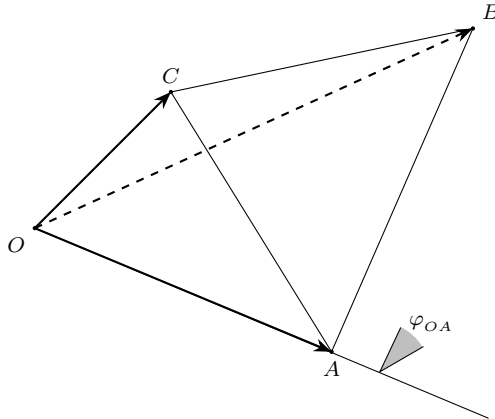
Corollaire 4.49 *On peut donc exprimer le volume du tétraèdre à partir du produit mixte ou de la matrice de Gram \mathbf{G} des trois vecteurs :*

$$\text{Vol}(OABC) = \frac{1}{6} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = \frac{1}{6} \sqrt{\det(\mathbf{G})}.$$

□

Lemme 4.50 *Notons φ_{OA} l'angle diédral limité par les plans Π_{OAB} et Π_{OAC} et contenant le tétraèdre, alors*

$$\varphi_{OA} = \vartheta((\mathbf{a} \times \mathbf{b}), (\mathbf{a} \times \mathbf{c})).$$



PREUVE. Le vecteur $\mathbf{m}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est orthogonal à Π_{OAB} et $\mathbf{m}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ est orthogonal à Π_{OAC} . Choisissons un point P intérieur au dièdre, par exemple $P = O + \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$; alors on a

$$\langle \mathbf{m}_1, \overrightarrow{OP} \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \rangle = \frac{1}{4} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

et

$$\langle \mathbf{m}_2, \overrightarrow{OP} \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathbf{a} \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \rangle = \frac{1}{4} [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}].$$

La proposition 4.27 entraîne donc $\langle \mathbf{m}_2, \overrightarrow{OP} \rangle = -\langle \mathbf{m}_1, \overrightarrow{OP} \rangle$. Cela signifie que si \mathbf{m}_1 est intérieur au dièdre, alors \mathbf{m}_2 est extérieur au dièdre et réciproquement; par conséquent $\varphi_{OA} = \vartheta(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$. \square

Nous avons donc

$$\cos \varphi_{OA} = \frac{\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|} \quad \text{et} \quad \sin \varphi_{OA} = \frac{\|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|}.$$

L'identité de Lagrange entraîne que

$$\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

par conséquent

$$\cos \varphi_{OA} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|}.$$

D'autre part, la proposition 4.31 entraîne que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \mathbf{a}$, on a donc

$$\sin \varphi_{OA} = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| \|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|}.$$

Considérons l'exemple du tétraèdre régulier dont toutes les arêtes sont de longueur 1 : $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$.

Les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté 1. Chacun des angles de ces faces mesure $\frac{\pi}{3}$ et on a donc

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

et

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\| = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'angle diédral entre deux faces du tétraèdre est donné par la formule obtenue plus haut :

$$\cos \varphi_{OA} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

ce qui correspond environ à $\varphi_{OA} = 70.53^0$.

La matrice de Gram de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ est donnée par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \|\mathbf{b}\|^2 & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \|\mathbf{c}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut $\frac{1}{2}$, donc

$$\text{Vol}(OABC) = \frac{1}{6} \sqrt{\det \mathbf{G}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

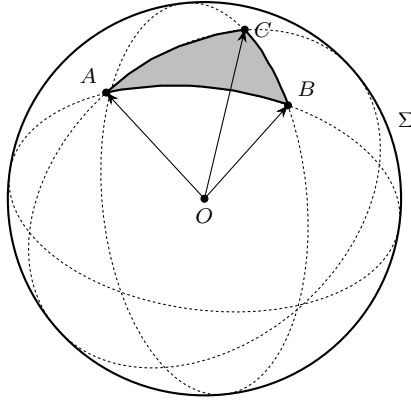
Remarquons que $\|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\| = \sqrt{\det \mathbf{G}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, par conséquent

$$\sin \varphi_{OA} = \frac{\|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\| \|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

On peut vérifier que $(\sin \varphi_{OA})^2 + (\cos \varphi_{OA})^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$.

4.12 La trigonométrie sphérique

Définition. On note $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ la sphère de centre O et de rayon 1. Un *triangle sphérique* Δ est donné par trois points distincts A, B, C de Σ .



Définitions

L'*angle au sommet A* du triangle sphérique est l'angle diédral entre les plans Π_{OAB} et Π_{OAC} correspondant au dièdre contenant le tétraèdre $OABC$; on le note α . Le lemme 4.50 nous dit que

$$\alpha = \vartheta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

où $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

On définit de manière similaire l'angle β au sommet B et l'angle γ au sommet C , on a

$$\beta = \vartheta(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad \text{et} \quad \gamma = \vartheta(\mathbf{c} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

La *mesure* du côté \widehat{AB} est par définition l'angle entre les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b}

$$\widehat{AB} = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

et de même

$$\widehat{AC} = \vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \widehat{BC} = \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

En géométrie sphérique, la mesure \widehat{AB} est l'analogue de la longueur \overline{AB} en géométrie euclidienne.

Théorème 4.51 *On a les relations suivantes entre les mesures des côtés et les angles du triangle sphérique :*

a) $\cos(\alpha) = \frac{\cos \widehat{BC} - \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC}}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC}};$
b) $\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \beta};$
c) $\cos \widehat{BC} = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \sin(\gamma)}.$

PREUVE. Puisque Σ est une sphère de rayon 1, on a $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$, et donc

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BC} &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \sin \widehat{BC} &= \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \\ \cos \widehat{AB} &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \sin \widehat{AB} &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \\ \cos \widehat{AC} &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \sin \widehat{AC} &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|. \end{aligned}$$

D'autre part, le lemme 4.50 nous dit que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|};$$

mais l'identité de Lagrange entraîne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned}$$

On a donc

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|} = \frac{\cos \widehat{BC} - \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC}}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC}},$$

ce qui montre la première identité.

Pour montrer la seconde identité, on part de

$$\sin(\alpha) = \frac{\|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{c}\|}.$$

La proposition 4.31 entraîne que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \mathbf{a}$$

donc

$$\sin(\alpha) = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC}},$$

et l'on obtient

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin \widehat{BC}} = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \sin \widehat{BC}}.$$

Des calculs similaires montrent que

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin \widehat{AC}} = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|}{\sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \sin \widehat{BC}} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin \widehat{AB}}$$

et la seconde identité s'ensuit immédiatement.

Pour prouver la dernière identité, on introduit les vecteurs

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{c} \times \mathbf{a}\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

On observe que

$$\vartheta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \vartheta(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \vartheta(-\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \pi - \alpha,$$

et donc

$$\cos(\alpha) = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

De même $\cos(\beta) = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ et $\cos(\gamma) = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, on a aussi $\sin(\beta) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|$ et $\sin(\gamma) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

Or, par la proposition 4.31, on a :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \|\mathbf{c} \times \mathbf{a}\|} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{\|\mathbf{c} \times \mathbf{a}\| \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \mathbf{c},$$

et

$$\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|} \mathbf{b}.$$

On obtient donc

$$\widehat{BC} = \vartheta(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \vartheta(\mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

En utilisant l'identité de Lagrange, nous avons finalement

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BC} &= \frac{\langle \mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w} \times \mathbf{u}\| \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \frac{-\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w} \times \mathbf{u}\| \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \\ &= \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \sin(\gamma)}. \end{aligned}$$

□

La proposition suivante montre que la mesure \widehat{AB} vérifie les propriétés d'une distance :

Proposition 4.52

- a) $\widehat{AB} = 0$ si et seulement si $A = B$;
- b) $\widehat{AB} = \widehat{BA}$;
- c) $\widehat{AC} \leq \widehat{AB} + \widehat{BC}$.

PREUVE. Nous laissons les deux premières propriétés en exercices. Prouvons la troisième propriété : par la formule (a) du théorème précédent, on a

$$\cos \widehat{AC} = \cos \widehat{AB} \cdot \cos \widehat{BC} + \cos \beta \cdot \sin \widehat{AB} \cdot \sin \widehat{BC}.$$

Or $\cos \beta \geq -1$ et $\sin \widehat{AB} \cdot \sin \widehat{BC} \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AC} &\geq \cos \widehat{AB} \cdot \cos \widehat{BC} - \sin \widehat{AB} \cdot \sin \widehat{BC} \\ &= \cos(\widehat{AB} + \widehat{BC}). \end{aligned}$$

Comme le cosinus est une fonction décroissante, on a donc

$$\widehat{AC} \leq \widehat{AB} + \widehat{BC}.$$

□

4.13 Exercices

4.13.1 Montrer que trois points $A, B, C \in \mathbb{E}^2$ sont alignés si et seulement si

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = 0$$

où $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, et $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

4.13.2 Montrer que l'équation de la droite L passant par les points A et B est donnée vectoriellement par la formule

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

où $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

4.13.3 Trouver l'équation de la droite passant par $A = (3, -2)$, $B = (1, 2)$.

4.13.4 Montrer que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^2$, on a

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b} = 0$$

4.13.5 Utiliser la relation démontrée à l'exercice précédent pour écrire le vecteur $\mathbf{c} = (-3, 4)$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a} = (2, 2)$ et $\mathbf{b} = (0, -1)$.

4.13.6 Soit ABC un triangle non dégénéré de \mathbb{E}^2 et P_1, P_2, P_3 trois points du plan de coordonnées barycentriques $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Montrer que

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}} = \begin{cases} 0 & \text{si } P_1, P_2, P_3 \text{ sont alignés} \\ \pm \frac{\text{Aire}(P_1P_2P_3)}{\text{Aire}(ABC)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire une nouvelle preuve de la proposition 2.14.

4.13.7 Montrer que dans un triangle ABC , l'angle α en A vérifie les formules de Rhäticus³

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

et

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}},$$

où on utilise les notations du paragraphe 3.11.

4.13.8

a) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{16}$.

b) Écrire un programme calculant la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{2^k}$ (où $k \in \mathbb{N}$ est un entier naturel quelconque).

4.13.9 Trouver les coordonnées de Plücker et le vecteur normal de la droite passant par les points $A = (2, 1)$ et $B = (3, -2)$.

3. Georg Joachim von Lauchen - Rhäticus (1514-1574), collaborateur de Nicolas Copernic, astronome et mathématicien. Il est l'auteur de tables de trigonométrie d'une grande valeur.

4.13.10 À quelle condition la droite L dont les coordonnées de Plücker sont $(w; m)$ passe-t-elle par l'origine ?

4.13.11 Étant donné deux points $O, Q \in \mathbb{E}^2$, on considère le lieu géométrique des points P tels que l'aire orientée du triangle OPQ est égale à une constante A . Montrer que ce lieu est une droite et trouver ses coordonnées de Plücker.

4.13.12 Considérons les droites données par les équations cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} L &: 4x + y - 5 = 0 \\ L' &: 2x - 3y - 13 = 0 \end{aligned}$$

- Trouver les coordonnées de Plücker de ces deux droites.
- Chercher l'intersection de L et L' à partir de ces coordonnées.

4.13.13 Donner l'équation cartésienne de la médiatrice (= droite équidistante) de deux points $A, B \in \mathbb{R}^2$. Puis donner les coordonnées de Plücker de cette droite.

4.13.14 Prouver le corollaire 3.33.

4.13.15 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \cos\left(k \frac{\pi}{n}\right) = 0 .$$

4.13.16 Calculer (par récurrence) $\cos \frac{\pi}{2^n}$ où n est un entier positif quelconque.

4.13.17 Montrer que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}^3$, on a $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$.

4.13.18 Dans une base orthonormée, calculer le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{x} = (3, 2, 2)$ et $\mathbf{y} = (1, 0, -2)$.

4.13.19 Calculer l'aire du triangle ABC où $A = (1, -3, 2)$, $B = (4, 0, 1)$ et $C = (-2, -1, 3)$.

4.13.20 Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.

- La base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ est-elle directe ?
- Calculer $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ et $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- Vérifier sur cet exemple l'identité de Grassmann.
- Vérifier sur cet exemple l'identité de Jacobi.

4.13.21 Prouver l'identité de Jacobi.

4.13.22 Trouver les conditions sur $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$ pour que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

4.13.23 Soit $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ une base quelconque de \mathbb{V}^3 et $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ la base duale.

a) Prouver l'équation (4.13) : $\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$.

b) Montrer que $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]^{-1}$.

c) Montrer que $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{b}_3 \times \mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$.

d) Montrer que la matrice de Gram de $\{\mathbf{c}_i\}$ est l'inverse de la matrice de Gram de $\{\mathbf{b}_i\}$.

4.13.24 Soit $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ un vecteur exprimé dans une base orthonormée directe, et soit $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$, l'application linéaire définie par $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Calculer la matrice $M_{\mathbf{a}}$ de $f_{\mathbf{a}}$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

4.13.25 $M_{\mathbf{a}}$ étant défini dans l'exercice précédent, vérifier que

$$M_{\mathbf{a}}M_{\mathbf{b}} - M_{\mathbf{b}}M_{\mathbf{a}} = M_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}.$$

4.13.26 Compléter la preuve de la proposition 4.24 dans le cas où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont linéairement dépendants.

4.13.27 Démontrer le corollaire 4.25.

4.13.28 Calculer les coordonnées de Plücker de la droite passant par $A = (2, 0, -1)$ et $B = (7, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$.

4.13.29 Montrer à partir de la formule (4.15) que la distance entre la droite AB et la droite CD dans l'espace est donnée par

$$\delta = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD} \right] \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|}.$$

4.13.30 Donner les détails de la preuve de la proposition 4.37.

4.13.31 Calculer la projection parallèle sur le plan Π d'équation $\Pi : y = 1$ dans la direction du vecteur $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$.

4.13.32 Calculer la projection parallèle sur le plan $\Pi : x - y + 2z = 3$ dans la direction du vecteur $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$.

4.13.33 Calculer la projection centrale sur le plan $\Pi : y = 1$ avec centre de projection $C = (0, s, 0)$. Puis faire tendre $s \rightarrow -\infty$ et calculer la limite. Commenter le résultat.

4.13.34 Soient $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ et $C = (-1, 2, -7)$.

Calculer l'aire du triangle ABC , le volume du tétraèdre $OABC$ et l'angle diédral entre les faces OAB et OBC .

4.13.35 Trouver l'équation du lieu géométrique des points $D \in \mathbb{R}^3$ tels que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égal à 10, où $A = (1, 2, -2)$, $B = (0, 1, 3)$ et $C = (2, -1, 0)$.

4.13.36 Dans le tétraèdre $OABC$, on note θ les angles faciaux et φ les angles diédraux. Plus précisément

$$\theta_{BC} = \angle OBC, \quad \theta_{AC} = \angle OAC \quad \text{et} \quad \theta_{AB} = \angle OAB$$

et φ_{OA} désigne l'angle diédral entre les faces OAB et OAC .

a) Montrer la relation

$$\cos(\varphi_{OA}) = \frac{\cos(\theta_{BC}) - \cos(\theta_{AB}) \cos(\theta_{AC})}{\sin(\theta_{AB}) \sin(\theta_{AC})}.$$

b) Montrer que le volume V du tétraèdre est donné par

$$6V = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\theta_{AB}) \cdot \sin(\theta_{AC}) \cdot \sin(\varphi_{OA}).$$

c) En déduire la règle du sinus

$$\frac{\sin(\varphi_{OA})}{\sin(\theta_{BC})} = \frac{\sin(\varphi_{OB})}{\sin(\theta_{AC})} = \frac{\sin(\varphi_{OC})}{\sin(\theta_{AB})}.$$

4.13.37 On considère un tétraèdre $OABC$ tel que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2$, et $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 3$.

- Faire un modèle en utilisant la technique de votre choix (en carton, en tube d'aluminium ou faire une infographie).
- Écrire la matrice de Gram \mathbf{G} de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.
- Calculer le volume de ce tétraèdre.
- trouver le cosinus de l'angle diédral φ_{OA} associé à l'arête OA .
- trouver le sinus de l'angle diédral φ_{BC} associé à l'arête BC .

4.13.38 On considère un triangle sphérique ABC sur une sphère de rayon 1. On suppose que l'angle en A vaut $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{AC} = \frac{\pi}{4}$.

Calculer la distance sphérique \widehat{BC} (trouver la valeur exacte).

4.13.39 Trouver la distance terrestre entre Helsinki (latitude $60^\circ 08'$, longitude $25^\circ 00'$) et Montpellier (lat. $43^\circ 36'$, long. $3^\circ 53'$).

(Indication, appliquer la formule du cosinus en trigonométrie sphérique au triangle formé par le pôle nord et les deux villes. On admettra que la terre est une sphère de rayon $R = 6370$ km.)

4.13.40 Roméo habite Montpellier, mais son âme se languit de la belle Juliette qui vit à Helsinki. Vers quel azimut (= angle depuis le nord vers l'est) Roméo doit-il se tourner pour diriger ses yeux vers sa bien-aimée ?

(Nota : Roméo connaît la trigonométrie sphérique. Il dispose d'une boussole, et acceptera de négliger la différence entre le nord magnétique et le nord géographique.)

4.13.41 Montrer que le théorème de Pythagore est approximativement vrai pour les petits triangles rectangles sur la sphère.

Chapitre 5

Transformations affines et isométries

Le lecteur connaît sans doute déjà les transformations du plan les plus familières telles que les translations, les rotations, les symétries et les homothéties. Dans ce chapitre nous abordons les transformations en tant qu'objet mathématique en soi, au même titre que les points ou les figures. Une *transformation* est une application $f : E \rightarrow E$ d'un ensemble E dans lui-même, que nous supposons injective. Lorsque E est l'espace euclidien, on peut parler de *transformations affines* : ce sont celles qui préservent les droites et les rapports de section. Un cas particulier est celui des *isométries* qui préservent toutes les distances.

Dans ce chapitre, nous étudions les fondements de la théorie des transformations affines, et nous montrons comment leur étude peut se ramener à des questions de calcul matriciel. Cela nous permettra en particulier de classer toutes les isométries du plan et de l'espace.

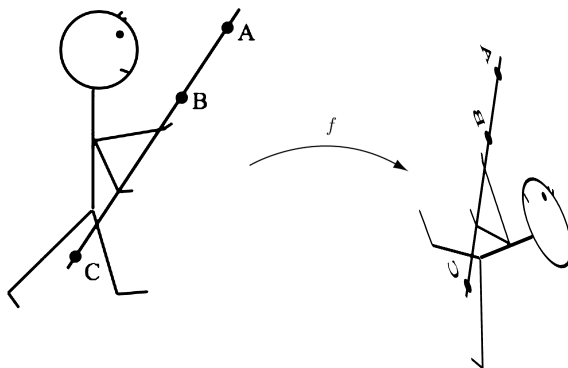
5.1 Transformations affines

Définition. Une *transformation affine* de \mathbb{E}^n est une application $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ vérifiant les conditions suivantes :

- a) f est injective ;
- b) f préserve les droites ;
- c) f préserve les rapports de sections.

Les deux dernières conditions signifient que si A, B, C sont alignés et si $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, alors A', B', C' sont également alignés et

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$



f préserve les droites et les rapports de section.

REMARQUE. On verra plus loin qu'une transformation affine est non seulement injective, mais aussi surjective.

Lemme 5.1 Soit $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ une application et $O \in \mathbb{E}$ une origine. L'application f est affine si et seulement si elle est injective et si pour tous points $A, B, P \in \mathbb{E}$ tels que $A \neq B$ et

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA},$$

on a

$$\overrightarrow{OP'} = t\overrightarrow{OB'} + (1-t)\overrightarrow{OA'}$$

où $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $P' = f(P)$.

Remarquons qu'on peut aussi dire de manière équivalente que si $P = A + t\overrightarrow{AB}$, alors $P' = A' + t\overrightarrow{A'B'}$.

PREUVE. Le point P appartient à la droite L_{AB} si et seulement si le vecteur position de ce point relativement à une origine $O \in \mathbb{E}$ vérifie la relation

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est le rapport de section $t = \frac{AP}{AB}$ (de façon équivalente, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$).

□

Ce lemme n'est donc qu'une reformulation de la définition d'une transformation affine.

Définition. Une *similitude* de \mathbb{E} est une application

$$f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$$

qui multiplie toutes les distances par un même rapport fixe $\lambda > 0$:

$$d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q)$$

pour tous $P, Q \in \mathbb{E}$.

Le nombre λ s'appelle le *rapport de similitude*.

Proposition 5.2 *Toute similitude est une transformation affine.*

PREUVE. L'application f est injective, car si $f(P) = f(Q)$ alors

$$0 = d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q),$$

ce qui entraîne que $d(P, Q) = 0$ et donc $P = Q$.

Pour montrer que f préserve les points alignés, considérons trois points alignés $A, B, C \in \mathbb{E}$. L'un des points est donc entre les deux autres, disons $C \in [A, B]$. Alors $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Notons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. Alors $d(A', B') = \lambda d(A, B)$, $d(A', C') = \lambda d(A, C)$ et $d(B', C') = \lambda d(B, C)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d(A', B') &= \lambda d(A, B) = \lambda(d(A, C) + d(C, B)) \\ &= \lambda d(A, C) + \lambda d(C, B) \\ &= d(A', C') + d(C', B'). \end{aligned}$$

Cela signifie que $C' \in [A', B']$.

Finalement, les rapports de sections sont préservés car

$$\frac{d(A', C')}{d(A', B')} = \frac{\lambda d(A, C)}{\lambda d(A, B)} = \frac{d(A, C)}{d(A, B)}.$$

Donc

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \pm \frac{d(A', C')}{d(A', B')} = \pm \frac{d(A, C)}{d(A, B)} = \pm \frac{AC}{AB}.$$

Mais les deux rapports de sections ont mêmes signes car le point C est entre A et B si et seulement si C' est entre A' et B' . \square

Définition. Une *isométrie* de \mathbb{E} est une application $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ qui préserve les distances :

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

pour tous $P, Q \in \mathbb{E}$.

Une isométrie est clairement une similitude de rapport $\lambda = 1$, c'est en particulier une transformation affine.

Définitions

- a) Un *point fixe* d'une application f est un point P tel que $f(P) = P$.
- b) On dit qu'une figure $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^n$ est *invariante* par f si $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, i.e.

$$A \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad f(A) \in \mathcal{F}.$$

On dit que $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^n$ est *semi-invariante* si $\mathcal{F} \subset f(\mathcal{F})$, i.e.

$$A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad f(A) \in \mathcal{F}.$$

c) On dit qu'une figure $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^n$ est *fixée* par f si tout point de \mathcal{F} est fixe, i.e.

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow f(A) = A.$$

REMARQUE. Toute figure fixe est invariante, mais le contraire n'est pas vrai. Par exemple, f peut faire glisser une droite sur elle-même. Cette droite est alors invariante, mais elle n'est pas fixe.

Définitions. Une transformation affine est *directe* si l'image d'un repère d'orientation positive est un repère d'orientation positive (cette condition ne dépend pas du repère choisi).

Une transformation affine est *indirecte* si l'image d'un repère d'orientation positive est un repère d'orientation négative.

On dit aussi que la transformation préserve ou inverse l'orientation du plan ou de l'espace.

Un *déplacement* de \mathbb{E} est une isométrie directe de l'espace.

Proposition 5.3 (Propriétés élémentaires des transformations affines) *Toute transformation affine $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ vérifie les propriétés suivantes :*

- i) *Si f fixe deux points distincts A, B , alors toute la droite L_{AB} est fixée par f .*
- ii) *Le milieu de l'image d'un segment est l'image du milieu de ce segment, i.e. si M est le milieu de $[A, B]$ et $A' = f(A), B' = f(B)$, alors $f(M)$ est le milieu de $[A', B']$.*
- iii) *L'image par f d'un parallélogramme $ABCD$ est un parallélogramme $A'B'C'D'$.*
- iv) *L'image d'un plan est un plan.*
- v) *Si L_1, L_2 sont des droites parallèles, alors leurs images L'_1, L'_2 sont aussi des droites parallèles.*

PREUVE. Démontrons d'abord la propriété (a) : soit $P \in L_{AB}$ un point aligné sur AB , et notons $P' = f(P)$ son image. Comme f est une transformation affine, P' est aussi sur la droite L_{AB} et $\frac{AP'}{AB} = \frac{AP}{AB}$. Par l'axiome 2 (p. 20), on a donc $P' = P$.

La propriété ii) se déduit immédiatement de la définition d'une transformation affine, puisque le milieu de $[A, B]$ est par définition le point M de la droite L_{AB} tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

La propriété iii) est une conséquence de ii) puisque $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si le milieu de $[A, D]$ est égal au milieu de $[B, C]$.

On peut voir iv) comme une conséquence de iii) et de l'injectivité de f ou directement à partir de la définition des transformations affines et du fait qu'un plan se définit comme la réunion des droites rencontrant deux droites L_{AB} et L_{BC} en deux points distincts.

Finalement, la condition v) se déduit de iii). □

5.2 Forme algébrique d'une application affine

Si on se fixe un repère affine et on identifie \mathbb{E}^n à l'espace cartésien \mathbb{R}^n , alors les applications affines s'écrivent algébriquement.

Théorème 5.4 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une transformation affine. Alors on a*

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

où A est une matrice non singulière de taille $n \times n$ et \mathbf{b} est un vecteur. Inversement, toute application de cette forme est une transformation affine.

Définition. On dit que A est la *partie linéaire* et que \mathbf{b} est le *vecteur translation* de l'application affine f . On dit aussi que l'expression $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ est la *forme algébrique* de la transformation affine f .

PREUVE. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une transformation affine. Le lemme 5.1 nous dit que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) = tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}).$$

Posons

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{0}) - \mathbf{0} \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}.$$

Montrons que g est linéaire, on a $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et

$$g(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) = tg(\mathbf{x}) + (1-t)g(\mathbf{y}).$$

En effet

$$\begin{aligned} g(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) &= f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) - \mathbf{b} \\ &= tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) - \mathbf{b} \\ &= t(f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}) + (1-t)(f(\mathbf{y}) - \mathbf{b}) \\ &= tg(\mathbf{x}) + (1-t)g(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ on voit alors que

$$g(t\mathbf{x}) = g(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{0}) = tg(\mathbf{x}) + (1-t)g(\mathbf{0}) = tg(\mathbf{x}),$$

on a donc

$$g(t\mathbf{x}) = tg(\mathbf{x}).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= g\left(2 \cdot \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}\right) \\ &= 2 \cdot g\left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{y})\right) \\ &= g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

On a donc prouvé que g est linéaire. De plus g est injective car $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y})$ si et seulement si $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ et donc $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ puisque f est supposée injective. Ainsi g est donné algébriquement par la multiplication par une $n \times n$ matrice non singulière : $g(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ et finalement

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

□

Remarque La démonstration montre comment on peut retrouver la forme algébrique d'une transformation affine. Pour trouver le vecteur translation \mathbf{b} , il suffit de calculer les coordonnées de l'image par f de l'origine car

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{0}) - \mathbf{0}.$$

Pour trouver la matrice A de la partie linéaire, on pose $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$. Alors $g(x) = (A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}) - \mathbf{b} = A \cdot \mathbf{x}$, l'application affine g s'identifie à la partie linéaire de f .

On apprend dans le cours d'algèbre linéaire que la matrice A est formée par les composantes des images par g des vecteurs de base. Plus précisément :

La i^{e} colonne de la matrice A est formée des coordonnées du vecteur $g(\mathbf{e}_i)$.

Corollaire 5.5 *Toute transformation affine $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective.*

PREUVE. On sait que f est injective. Pour montrer que f est surjective, on écrit l'application f en coordonnées : $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ où A est une matrice inversible.

Soit \mathbf{y} un point quelconque, alors le point \mathbf{x} donné par $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ vérifie

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} = A \cdot (A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})) + \mathbf{b} = \mathbf{y},$$

ainsi \mathbf{x} est une préimage de \mathbf{y} et f est donc surjective.

□

5.3 Compositions et inversions

Si f_1 et f_2 sont deux transformations, la transformation f définie par

$$f(\mathbf{x}) := f_2(f_1(\mathbf{x}))$$

est appelée le *produit* ou la *composition* de f_1 et f_2 et est notée

$$f := f_2 \circ f_1.$$

Lorsque $f_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ et $f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$, la composition $f := f_2 \circ f_1$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= A_2(A_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 \\ &= A_2 \cdot A_1 \cdot \mathbf{x} + (A_2 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \\ &= A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

où $A = A_2 \cdot A_1$ et $\mathbf{b} = A_2 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. On voit en particulier que f est une nouvelle transformation affine dont la partie linéaire est le produit des parties linéaires de f_1 et f_2 .

La *transformation inverse* est la transformation f^{-1} telle que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$$

où Id est la transformation identité : $\text{Id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

La transformation f^{-1} est donc définie par la relation

$$\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

Mais $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ signifie $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{b}$ ou encore $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} - (A^{-1}\mathbf{b})$, donc

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y} - (A^{-1}\mathbf{b}).$$

On peut représenter une transformation affine $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ par le symbole $f = [A; \mathbf{b}]$, les formules de composition et d'inversion des transformations affines s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} [A_2; \mathbf{b}_2] \circ [A_1; \mathbf{b}_1] &= [A_2 \cdot A_1; (A_2 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)] \\ [A; \mathbf{b}]^{-1} &= [A^{-1}; -(A^{-1}\mathbf{b})]. \end{aligned}$$

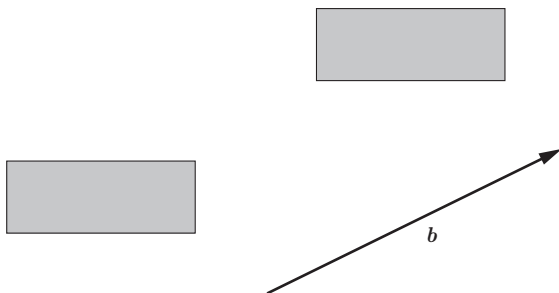
5.4 Premiers exemples

Exemple 5.1 (Identité) C'est l'application $\text{Id} : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ telle que $\text{Id}(P) = P$ pour tout point P . L'identité est une isométrie et tous les points de l'espace sont fixes.

Exemple 5.2 (Translation) La *translation* de vecteur \mathbf{b} est l'application affine $T_{\mathbf{b}} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Propriétés

- i) La translation est une isométrie ;
- ii) aucun point n'est fixe ;
- iii) toutes les droites parallèles au vecteur de translation \mathbf{b} sont invariantes.

Translation de vecteur \mathbf{b} .

Dans les deux premiers exemples, la partie linéaire de la transformation affine est l'identité.

Exemple 5.3 (Homothétie) On appelle *homothétie* de centre $C \in \mathbb{E}^n$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la transformation h qui associe à tout point $P \neq C$ le point $P' = h(P)$ aligné sur CP et tel que $\frac{CP'}{CP} = \lambda$ (si $P = C$, on pose $h(C) = C$).

Le théorème 1.11 entraîne que

$$d(h(P), h(Q)) = |\lambda| d(P, Q).$$

en particulier l'homothétie h est une similitude de rapport $|\lambda|$ et c'est donc une transformation affine.

Propriétés *i) le point C est l'unique point fixe de h ;*
ii) toutes les droites passant par C sont invariantes par h .

En coordonnées, l'homothétie h s'écrit

$$h(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{c}.$$

En effet, si $P \in \mathbb{E}$ est un point différent de C , alors le point $P' = h(P)$ appartient à la droite L_{CP} et $\overrightarrow{CP'} = \lambda \overrightarrow{CP}$. En posant $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, on a donc

$$\mathbf{x}' - \mathbf{c} = \overrightarrow{CP'} = \lambda \overrightarrow{CP} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{c}),$$

D'où l'on tire que $\mathbf{x}' = h(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{c}$.

La partie linéaire de l'homothétie h est donc la matrice λId et le vecteur de translation est $(1 - \lambda) \mathbf{c}$.

Exemple 5.4 (Symétrie centrale) La *symétrie centrale de centre C* est l'application $\sigma_C : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ qui envoie le point P sur son symétrique $P' = \sigma_C(P)$ par rapport à C .

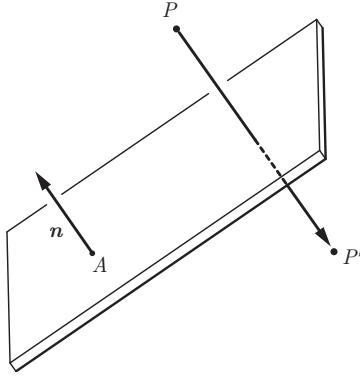
Une symétrie centrale est simplement une homothétie de rapport -1 . Par conséquent, la symétrie centrale s'écrit en coordonnées

$$\sigma_C(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{c}.$$

La partie linéaire est $-\text{Id}$ et le vecteur de translation est $2\mathbf{c}$.

Exemple 5.5 (Symétrie à travers un plan) La symétrie S_Π à travers le plan $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ est la transformation qui envoie tout point $P \in \mathbb{E}^3$ sur son symétrique $P' = S_\Pi(P)$ qui est défini par les deux propriétés suivantes :

- $L_{PP'} \perp \Pi$;
- $M = L_{PP'} \cap \Pi$ est le point milieu du segment $[P, P']$.



Pour trouver la formule exprimant S_Π , on raisonne comme suit : Soit $A \in \Pi$ un point du plan, et soit \mathbf{n} un vecteur normal à Π , alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP'} &= -2\text{proj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{AP}) \\ &= -\frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle \mathbf{n}, \end{aligned}$$

donc si $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ et $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{AP} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ et

$$\mathbf{x}' = S_\Pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle \mathbf{n}$$

Comme conséquence de la formule précédente, il est facile de vérifier que la forme algébrique de la symétrie $S_\Pi(\mathbf{x})$ à travers le plan Π d'équation $\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$ est donnée par

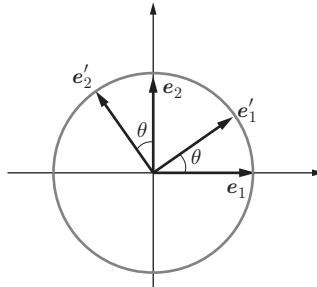
$$S_\Pi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

avec $A = (\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{nn}^t}{\|\mathbf{n}\|^2})$ et $\mathbf{b} = \frac{2p}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$.

On a les même formules en dimension 2 pour la symétrie à travers une droite du plan \mathbb{E}^2 .

Propriétés *i) la symétrie est une isométrie ;
 ii) les points du plan Π sont fixes ;
 iii) toutes les droites orthogonales à Π sont invariantes ;
 iv) S_Π renverse l'orientation de l'espace.*

Exemple 5.6 (Rotation autour de l'origine) La rotation d'un angle θ autour de O dans le plan orienté \mathbb{E}^2 s'exprime par une application linéaire. Notons R_θ la matrice de cette application dans une base orthonormée directe $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.



Rotation d'angle θ autour de l'origine.

On voit que

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc R_θ est l'application linéaire de matrice

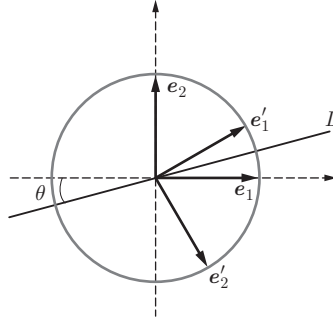
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Observons en particulier que $R_0 = \mathbf{I}$, $R_\pi = -\mathbf{I}$, $R_{\pi/2} = \mathbf{J}$ et, plus généralement,

$$R_\theta = \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)\mathbf{J}.$$

Propriétés *i) O est le seul point fixe ;
 ii) tout cercle centré en O est invariant ;
 iii) la rotation est une isométrie directe.*

Exemple 5.7 (Symétrie linéaire) Soit L la droite passant par O et faisant un angle θ avec \mathbf{e}_1 . Notons S_L la symétrie à travers la droite L .



Symétrie linéaire.

On voit directement (ou en utilisant l'exemple 5.5) que

$$S_L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\theta) \\ -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc S_L est l'application linéaire de matrice

$$S_L = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

- Propriétés**
- i) la droite L est fixe ;
 - ii) toute droite perpendiculaire à L est invariante ;
 - iii) S_L est une transformation indirecte (l'orientation du plan est inversée) ;
 - iv) la symétrie est une isométrie.

Exemple 5.8 (Affinités) Une *affinité* est une transformation affine f du plan qui fixe une droite L_1 et qui laisse invariante une droite L_2 non parallèle à L_1 . Notons O le point d'intersection des deux droites. Fixons un point A de L_1 différent de O et un point B de L_2 différent de O . Alors l'application linéaire associée F vérifie $F(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA}$ (car $A \in L_1$ est un point fixe de f) et $F(\overrightarrow{OB}) = \lambda \overrightarrow{OB}$ (car B appartient à la droite invariante L_2).

On trouve maintenant l'image $P' = f(P)$ de tout point P en décomposant le vecteur position $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ par linéarité de F :

$$P' = O + F(\overrightarrow{OP}) = O + x\overrightarrow{OA} + y\lambda\overrightarrow{OB}.$$

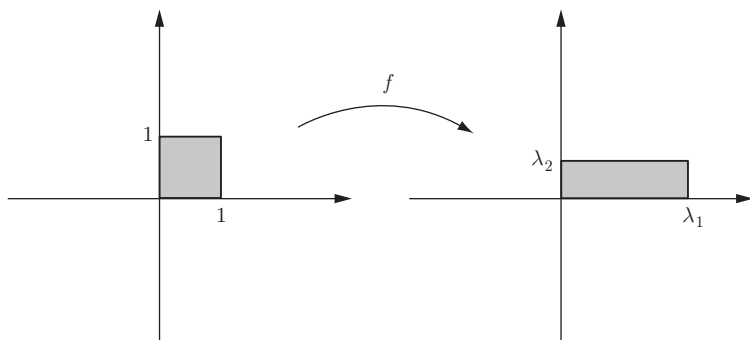
On dit que f est une *affinité orthogonale* si les axes L_1, L_2 sont perpendiculaires. En choisissant un repère pour lequel L_1, L_2 sont les axes de coordonnées, on obtient la matrice suivante pour l'affinité orthogonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On appelle aussi cette application une *traction* ou une *élongation*.

Exemple 5.9 (« Applications diagonales ») En composant deux affinités orthogonales d'axes Ox et Oy , et en échangeant les rôles de l'axe fixe et de l'axe invariant, on obtient une application linéaire dont la matrice est diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$



Application diagonale.

Comme exemples particuliers, nous avons :

- *Symétrie d'axe Ox_1*

En effet, la symétrie d'axe Ox_1 est

$$S_{Ox_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Homothétie linéaire*

On a déjà vu que l'homothétie de centre O et de rapport λ est l'application linéaire de matrice

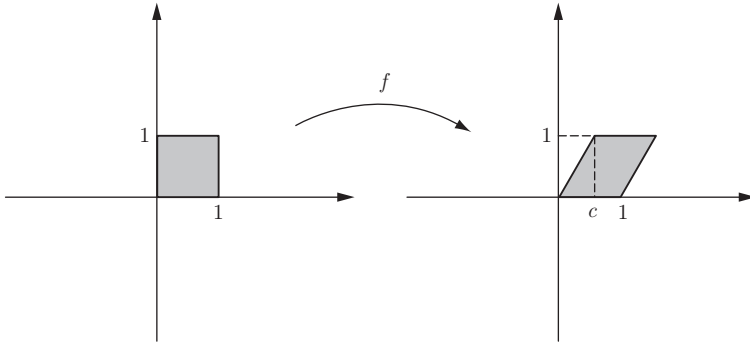
$$H_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.10 (Transvection) Une *transvection* est une application affine fixant une droite L et laissant invariante toute droite parallèle à L .

Si L est l'axe Ox , alors la transvection est linéaire et admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle aussi ces applications « glissements » ou « cisaillements » (*shear* en anglais.)



Transvection.

Exemple 5.11 (Réflexion glissante) L'application qui s'écrit en coordonnées orthonormées

$$\rho : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + t \\ -y \end{pmatrix}$$

s'appelle une *réflexion glissante* d'axe Ox_1 et d'amplitude t .

C'est une transformation affine dont le vecteur translation est $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ et

la partie linéaire est $A = S_{Ox_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c'est la symétrie d'axe Ox_1).

- Propriétés**
- i) aucun point n'est fixe ;
 - ii) l'axe est la seule droite invariante ;
 - iii) toute droite parallèle à l'axe est envoyée sur une droite parallèle ;
 - iv) l'orientation est inversée ;
 - v) la réflexion glissante est une isométrie.

5.5 Isométries

Rappelons qu'une *isométrie* est une transformation $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ préservant les distances :

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

Toute isométrie de \mathbb{E}^n est une transformation affine.

Proposition 5.6 Soit f une transformation affine et $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ son expression algébrique dans un repère orthonormé $O\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ de l'espace \mathbb{E}^n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f est une isométrie ;
- ii) $A^t = A^{-1}$.

PREUVE. Supposons que f est une isométrie et montrons que $A^t = A^{-1}$.

Notons $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$, en sorte que g est l'application linéaire $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Comme g est une isométrie, nous avons pour tout vecteur \mathbf{v} :

$$\|g(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|.$$

Notons $\mathbf{u}_1 = g(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{u}_n = g(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{e}_n$. Alors on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j\|^2 - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\|^2 - \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|^2) \\ &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Or les composantes de $\mathbf{u}_i = A\mathbf{e}_i$ forment la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A , donc le coefficient en position (i, j) de la matrice $A^t A$ est donné par $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$. On voit ainsi que $A^t A = \text{Id}$.

Il faut maintenant prouver la réciproque : si $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est une transformation affine telle que $A^t A = \text{Id}$, alors on a pour deux points quelconques \mathbf{x}, \mathbf{y} :

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A\mathbf{y} + \mathbf{b})\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 &= \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \\ &= \langle (A(\mathbf{x} - \mathbf{y})), A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle \\ &= (A(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^t A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^t A^t A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

et donc f préserve les distances. □

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ telle que $A^t A = I$ s'appelle une matrice orthogonale. L'ensemble des $n \times n$ matrices orthogonales est noté $O(n)$.

Ainsi, $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est une isométrie si et seulement si $A \in O(n)$.

Lemme 5.7 Le déterminant d'une matrice $A \in O(n)$ vaut ± 1 .

PREUVE. On a $1 = \det(\mathbf{I}) = \det(A^t A) = \det(A^t) \det(A) = \det(A)^2$. □

Définition. On note $SO(n) \subset O(n)$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ telles que $A^t A = I$ et $\det(A) = +1$.

Ainsi, on a montré qu'une application affine $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est une isométrie directe si et seulement si $A \in SO(n)$.

5.6 Théorème de Chasles en dimension 2

Le théorème de Chasles classe les déplacements (i.e. les isométries directes) du plan et de l'espace. En dimension 2, il s'énonce comme suit.

Théorème 5.8 *Tout déplacement du plan est ou bien une translation ou bien une rotation.*

La preuve utilise le lemme suivant.

Lemme 5.9 Une 2×2 matrice A appartient à $SO(2)$ si et seulement si elle est de la forme

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

PREUVE. Un calcul élémentaire montre que la matrice R_θ est orthogonale et que son déterminant vaut $+1$. Supposons inversement que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2),$$

on a alors $\det(A) = ad - bc = +1$ et $A^t A = \mathbf{I}$, ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a donc le système de quatre équations

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, & ab + cd &= 0 \\ b^2 + d^2 &= 1, & ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

des deux premières équations, on déduit qu'il existe θ et ϕ tels que $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$, $d = \cos \phi$ et $b = \sin \phi$. Des deux dernières équations, on déduit que $\phi = -\theta$. □

PREUVE DU THÉORÈME DE CHASLES

Considérons un déplacement du plan $f : \mathbf{x} \rightarrow R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Si $\theta = 0$, alors f est une translation.

Supposons donc que $\theta \neq 0$ (modulo 2π), alors f possède un unique point fixe \mathbf{p} . En effet, la condition pour que \mathbf{p} soit un point fixe s'écrit $f(\mathbf{p}) = R_\theta \mathbf{p} + \mathbf{b} = \mathbf{p}$ c'est-à-dire

$$\mathbf{b} = (\mathbf{I} - R_\theta)\mathbf{p}. \quad (5.1)$$

On a

$$\det(\mathbf{I} - R_\theta) = \det \begin{pmatrix} 1 - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix} = 2 - 2\cos(\theta).$$

Si $\theta \neq 0$, alors $\det(\mathbf{I} - R_\theta) \neq 0$ et l'équation (5.1) possède une solution unique, qui est le point fixe de f .

Pour conclure la preuve du théorème, il suffit de montrer que f est une rotation d'angle θ autour de \mathbf{p} . Soit \mathbf{x} un point quelconque, alors on a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - \mathbf{p} &= R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{p} \\ &= R_\theta \mathbf{x} + (\mathbf{I} - R_\theta)\mathbf{p} - \mathbf{p} \\ &= R_\theta (\mathbf{x} - \mathbf{p}); \end{aligned}$$

ce qui signifie que le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ reliant \mathbf{p} à \mathbf{x} subit une rotation d'angle θ . □

Le point fixe d'une rotation f est appelé le *pôle* ou le *centre de rotation*.

Considérons une rotation $f : \mathbf{x} \rightarrow R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$, alors la partie translation \mathbf{b} est déterminée à partir du pôle \mathbf{p} par l'équation (5.1) :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{I} - R_\theta)\mathbf{p}$$

Problème Comment trouver le pôle à partir de l'angle de rotation θ (non nul) et du vecteur translation \mathbf{b} ?

La solution de ce problème est donnée par

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - R_\theta)^{-1}\mathbf{b}.$$

On calcule facilement que

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - R_\theta)^{-1} &= \begin{pmatrix} (1 - \cos(\theta)) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & (1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2 - 2\cos(\theta)} \begin{pmatrix} (1 - \cos(\theta)) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & (1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cotg(\theta/2). \quad (5.2)$$

Le pôle est donc donné par

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

En posant $\mathbf{J} = R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} R_\theta &= \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)\mathbf{J} \\ (\mathbf{I} - R_\theta) &= (1 - \cos(\theta))\mathbf{I} - \sin(\theta)\mathbf{J} \\ (\mathbf{I} - R_\theta)^{-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \tau\mathbf{J}). \end{aligned}$$

Le pôle peut donc aussi s'écrire

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \tau \mathbf{J})\mathbf{b}.$$

REMARQUE. Le théorème de Chasles concerne les isométries directes du plan. On peut aussi démontrer que *toute isométrie indirecte du plan est ou bien une symétrie ou bien une symétrie glissante.*

5.7 Le Théorème d'Euler

Le théorème d'Euler décrit les isométries directes fixant un point dans l'espace à trois dimensions.

Théorème 5.10 (Théorème d'Euler) *Toute isométrie directe $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ fixant un point est l'identité ou une rotation autour d'un axe passant par ce point.*

PREUVE. On peut supposer que f fixe l'origine O . Alors f est une transformation linéaire. On a $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. On sait également que $A \in SO(3)$ (c'est-à-dire $A^t \cdot A = \mathbf{I}$ et $\det(A) = +1$). Pour montrer qu'il existe un axe, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 1$. En effet, s'il existe un vecteur non nul \mathbf{a} tel que $A\mathbf{a} = \mathbf{a}$, alors la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$ est fixe pour la transformation f (c'est donc un axe pour f) car

$$f(t\mathbf{a}) = A(t\mathbf{a}) = tA(\mathbf{a}) = t\mathbf{a}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour montrer que 1 est une valeur propre de A , il faut montrer que

$$\det(A - \mathbf{I}) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(A - \mathbf{I}) &= \underbrace{\det(A^t)}_{=1} \det(A - \mathbf{I}) = \det(A^t(A - \mathbf{I})) \\ &= \det(A^t A - A^t) = \det(\mathbf{I} - A^t) = \det(\mathbf{I} - A). \end{aligned}$$

Or, comme $(A - \mathbf{I})$ est une matrice 3×3 , on a $\det(A - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{I} - A)$, donc

$$\det(\mathbf{I} - A) = -\det(\mathbf{I} - A).$$

Il en résulte que $\det(\mathbf{I} - A) = 0$.

Il faut encore prouver que f est bien une rotation autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

Prenons pour cela un vecteur \mathbf{u}_1 de longueur 1 et perpendiculaire à \mathbf{a} et notons $\mathbf{u}_2 := \mathbf{a} \times \mathbf{u}_1$. Observons que $A\mathbf{u}_1$ et $A\mathbf{u}_2$ sont aussi orthogonaux à l'axe car

$$\langle A\mathbf{u}_i, \mathbf{a} \rangle = \langle A\mathbf{u}_i, A\mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a} \rangle = 0.$$

Ceci implique que les vecteurs $A\mathbf{u}_1$ et $A\mathbf{u}_2$ sont des combinaisons linéaires de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , et comme ces vecteurs sont aussi de longueur 1 et orthogonaux, on a

$$A\mathbf{u}_1 = \cos(\theta)\mathbf{u}_1 + \sin(\theta)\mathbf{u}_2,$$

$$A\mathbf{u}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{u}_1 + \cos(\theta)\mathbf{u}_2$$

où θ est l'angle entre \mathbf{u}_1 et $A\mathbf{u}_1$.

La matrice de la transformation linéaire A dans la base orthonormée $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$ est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il s'agit bien d'une rotation autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$. □

Rappelons que la *trace* d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux. On prouve dans le cours d'algèbre linéaire que la trace d'une matrice ne change pas lorsqu'on effectue un changement de base. Donc la trace de A dans la base originale coïncide avec la trace de A dans la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$. Cette trace vaut donc $1 + 2\cos(\theta)$. On a donc le résultat suivant.

Proposition 5.11 *L'angle θ d'une rotation $A \in SO(3)$ est donné par l'équation*

$$\text{trace}(A) = 1 + 2\cos(\theta).$$

Certaines matrices de rotation sont très simples. Par exemple la rotation d'angle θ autour de l'axe Ox est donnée par la matrice

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et la rotation d'angle θ autour de l'axe Oy est donnée par la matrice

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(observer la place du signe $-$ dans cette matrice!).

Finalement, la rotation d'angle θ autour de l'axe Oz est donnée par la matrice

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on effectue une rotation d'angle φ autour de l'axe Oz , puis une rotation d'angle θ autour de l'axe Oy et enfin une rotation d'angle ψ de nouveau autour de l'axe Oz , on obtient une matrice

$$A = R_z(\psi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\psi) \sin(\varphi) & -\cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\varphi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) + \cos(\psi) \sin(\varphi) & -\sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\varphi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \cos(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Toute matrice de rotation dans \mathbb{R}^3 s'obtient de cette manière (avec $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$). Les angles ψ, θ, φ s'appellent les *angles d'Euler* de la rotation A .

Si on connaît l'angle et l'axe d'une rotation fixant l'origine, on peut utiliser la formule suivante.

Proposition 5.12 Soient \mathbf{a} un vecteur de \mathbb{V}^3 de longueur 1 et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors la rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$ est donnée par

$$R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{x}) = \cos(\theta)\mathbf{x} + \sin(\theta)(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos(\theta)) \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} \quad (5.3)$$

Si $\|\mathbf{a}\| \neq 1$, il faut adapter cette formule (le plus simple étant de remplacer ce vecteur par $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$).

PREUVE. Soit $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ la décomposition du vecteur \mathbf{x} selon sa projection orthogonale sur \mathbf{a} et sa composante normale. On sait que

$$\mathbf{x}' = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'.$$

Notons aussi $\mathbf{x}''' := \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, alors un calcul direct montre que

$$R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' + \cos(\theta) \mathbf{x}'' + \sin(\theta) \mathbf{x}'''. \quad (5.4)$$

Le vecteur \mathbf{x}''' est clairement orthogonal à \mathbf{x}' et à \mathbf{x}'' et sa norme est la même que celle de \mathbf{x}'' car

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'''\|^2 &= \langle \mathbf{a} \times \mathbf{x}, \mathbf{a} \times \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}''\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur $\cos(\theta)\mathbf{x}'' + \sin(\theta)\mathbf{x}'''$ est de même longueur que \mathbf{x}'' , il est orthogonal à \mathbf{a} et forme un angle θ avec \mathbf{x}'' . Donc la formule (5.4) signifie que $R_{\mathbf{a},\theta}$ fait subir une rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$ à la composante normale \mathbf{x}'' . \square

5.8 Théorème de Chasles dans l'espace

Le théorème de Chasles dans l'espace classe les déplacements de \mathbb{E}^3 . Commençons par une définition.

Définition. Un *déplacement hélicoïdal* est une isométrie $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ obtenue en composant une rotation autour d'un axe avec une translation parallèle à ce même axe. L'amplitude de la translation s'appelle le *pas* du déplacement hélicoïdal.

Par exemple, si l'axe du déplacement hélicoïdal est l'axe Ox_1 , alors la forme algébrique de cette transformation est donnée par

$$f := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'angle θ est l'angle de rotation et δ est le pas de ce déplacement hélicoïdal.

Théorème 5.13 (théorème de Chasles dans l'espace) Soit $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ un déplacement de \mathbb{E}^3 . Alors l'une des conditions suivantes est réalisée :

- a) $f = \text{Id}$ ($A = \mathbf{I}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{0}$);
- b) f est une translation ($A = \mathbf{I}$ et $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$);
- c) f est une rotation ($A \neq \mathbf{I}$ et $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, où $\mathbb{R}\mathbf{a}$ est l'axe de A);
- d) f est un déplacement hélicoïdal ($A \neq \mathbf{I}$ et $\mathbf{b} \not\perp \mathbf{a}$).

PREUVE. On sait que $A \in SO(3)$. Si $A = \mathbf{I}$, alors f est ou bien une translation ou bien l'identité, les cas a) et b) du théorème sont donc évidents et on peut supposer que $A \neq \mathbf{I}$. Décomposons le vecteur \mathbf{b} en sa composante parallèle à l'axe et sa composante orthogonale :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b}_2 \perp \mathbf{a},$$

où \mathbf{a} est un vecteur de longueur 1 en direction de l'axe de la rotation A . On se souvient que $\mathbf{b}_1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$ et $\mathbf{b}_2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$.

Définissons ensuite deux isométries f_1 et f_2 par

$$f_1 : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}_2.$$

Alors f_2 est une isométrie qui laisse invariant le plan Π passant par l'origine et perpendiculaire à l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$ ($f_2(\Pi) = \Pi$). Par le théorème de Chasles en

dimension 2, l'isométrie $f_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ doit avoir un point fixe $\mathbf{p} \in \Pi$. Il est clair que f_2 est une rotation de Π autour du point \mathbf{p} et que f_2 fixe l'axe $L = \mathbf{p} + \mathbb{R}\mathbf{a}$ (de direction \mathbf{a} et passant par le point \mathbf{p}).

D'autre part, f_1 est une translation de vecteur \mathbf{b}_1 parallèle à l'axe L . Le théorème est démontré, car $f = f_1 \circ f_2$. \square

ATTENTION. Si $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est un déplacement hélicoïdal, alors en général le vecteur \mathbf{b} n'est pas parallèle à l'axe du déplacement hélicoïdal (sauf si cet axe passe par l'origine).

Définition. L'écriture $f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1$ s'appelle la *décomposition de Chasles* de f (observer que $\mathbf{x} \rightarrow (A\mathbf{x} + \mathbf{b}_2)$ est une rotation et $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ est une translation parallèle à l'axe de la rotation).

L'axe L d'un déplacement hélicoïdal f est l'unique droite invariante par f . Les points sur cet axe sont translatés d'une distance

$$\delta = \|\mathbf{b}_1\| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$$

(on suppose toujours que $\|\mathbf{a}\| = 1$). Cette distance est donc le pas du déplacement hélicoïdal.

Proposition 5.14 *Soit $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ une rotation ou un déplacement hélicoïdal. Alors l'axe de cette transformation est l'ensemble des points de la forme*

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{\tau}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} + t\mathbf{a},$$

où \mathbf{a} est un vecteur propre de longueur 1 tel que $A\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\tau = \tau(\theta)$ est donné par (5.2) où l'angle θ de la rotation est donné par la formule $\text{trace}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ et $t \in \mathbb{R}$ est quelconque.

PREUVE. L'application linéaire $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ est donnée par l'équation (5.3) :

$$A\mathbf{x} = R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{x}) = \cos(\theta)\mathbf{x} + \sin(\theta)(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos(\theta))\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}.$$

Nous allons calculer $R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{p})$, on remarque d'abord que $R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ et que

$$R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{b}) = \cos(\theta)\mathbf{b} + \sin(\theta)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (1 - \cos(\theta))\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}.$$

Pour calculer $R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, on remarque que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = 0$ et que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Par conséquent, on a

$$R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \cos(\theta)\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \sin(\theta)\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} - \sin(\theta)\mathbf{b}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{b}) + \frac{\tau}{2}R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + t R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{a}). \\
 &= \frac{1}{2}(\cos(\theta)\mathbf{b} + \sin(\theta)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (1 - \cos(\theta)) \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}) + \\
 &\quad \frac{\tau}{2}(\cos(\theta) \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \sin(\theta) \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} - \sin(\theta) \mathbf{b}) + t \mathbf{a} \\
 &= \frac{1}{2}(\cos(\theta) - \tau \sin(\theta)) \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\sin(\theta) + \tau \cos(\theta)) \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta) + \tau \sin(\theta)) \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} + t \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

Mais d'autre part

$$\cos(\theta) - \tau \sin(\theta) = -1 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) + \tau \cos(\theta) = \tau,$$

donc

$$R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{\tau}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} + t \mathbf{a}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{p}) &= R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{p}) + \mathbf{b} \\
 &= (t + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{\tau}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{p} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a},
 \end{aligned}$$

et on voit que application f fait subir au point \mathbf{p} une translation en direction de \mathbf{a} d'amplitude $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Cela signifie que \mathbf{p} est sur l'axe L du déplacement hélicoïdal. \square

Corollaire 5.15 *Les coordonnées de Plücker de l'axe sont données par $\text{Plück}(L) = (\mathbf{a}; \mathbf{m})$ avec*

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \frac{\tau}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}. \quad (5.5)$$

En rassemblant toutes nos informations, on peut reconstruire une rotation ou un déplacement hélicoïdal à partir de sa caractérisation géométrique.

Proposition 5.16 *Soit f un déplacement hélicoïdal ou une rotation de \mathbb{E}^3 dont l'angle est θ , le pas est δ et l'axe est donné par $\text{Plück}(L) = (\mathbf{a}; \mathbf{m})$ (on suppose $\|\mathbf{a}\| = 1$). Alors on a*

$$f : \mathbf{x} \rightarrow R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

où la rotation est donnée par l'équation (5.3) et le vecteur translation \mathbf{b} est donné par

$$\mathbf{b} = \sin(\theta) \mathbf{m} - (1 - \cos(\theta)) \mathbf{m} \times \mathbf{a} \pm \delta \mathbf{a}.$$

PREUVE. Le pas de la transformation $f : \mathbf{x} \rightarrow R_{\mathbf{a},\theta}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ est donné par

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \delta.$$

Il suffit donc de vérifier la formule (5.5).

Observons que, comme $\mathbf{m} \perp \mathbf{a}$, on a

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) = \mathbf{m} = -(\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a},$$

on a aussi les relations

$$\tau \sin(\theta) = 1 + \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \tau(1 - \cos(\theta)) = \sin(\theta),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \sin(\theta) \mathbf{m} \times \mathbf{a} - (1 - \cos(\theta)) (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} \\ &= \sin(\theta) \mathbf{m} \times \mathbf{a} + (1 - \cos(\theta)) \mathbf{m}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) &= \tau \sin(\theta) \mathbf{a} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) + \tau(1 - \cos(\theta)) \mathbf{a} \times \mathbf{m} \\ &= \tau \sin(\theta) \mathbf{m} + \tau(1 - \cos(\theta)) \mathbf{a} \times \mathbf{m}. \end{aligned}$$

En additionnant les deux dernières identités, on trouve donc l'égalité suivante

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \tau \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 2 \mathbf{m},$$

qui est équivalente à (5.5). □

Les isométries de l'espace qui inversent l'orientation peuvent aussi se classer, elles sont de trois types.

Théorème 5.17 *Soit $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ une isométrie indirecte de \mathbb{E}^3 . Alors f admet un plan Π invariant, et f est de l'un des trois types suivants :*

- a) *f est la symétrie à travers le plan Π ;*
- b) *f est la symétrie à travers le plan Π composée avec une translation dont le vecteur de translation est parallèle à Π (on dit alors que f est une symétrie glissante) ;*
- c) *f est la symétrie à travers le plan Π composée avec une rotation dont l'axe est orthogonal à Π (on dit alors que f est une symétrie-rotation).*

PREUVE. On peut prouver qu'une application linéaire $A \in O(3)$ de déterminant -1 admet un vecteur propre \mathbf{a} de valeur propre -1 , i.e. $A\mathbf{a} = -\mathbf{a}$. Observons que l'on a aussi $A^t\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, et calculons le produit scalaire de \mathbf{a} et $f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, f(\mathbf{x}) \rangle &= \langle \mathbf{a}, A\mathbf{x} + \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \mathbf{a}, A\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle A^t\mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle -\mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned}$$

Cela entraîne que le plan Π d'équation

$$\Pi : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

est invariant par l'isométrie $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$; en effet, si $\mathbf{x} \in \Pi$, alors $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ mais aussi

$$\langle \mathbf{a}, f(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle ,$$

donc $f(\mathbf{x}) \in \Pi$.

La restriction de f au plan Π est une isométrie directe et donc c'est ou bien l'identité, ou bien une translation ou bien une rotation, ce qui correspond aux trois cas du théorème. \square

5.9 Écriture d'une transformation affine en coordonnées homogènes

Si l'on représente les points du plan par leurs coordonnées homogènes, alors les formules de compositions et d'inversion deviennent de simples produits et inversions de matrices.

L'observation fondamentale est la suivante : le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est équivalent à l'effet de la transformation affine $f = [A; \mathbf{b}]$ sur le vecteur \mathbf{x} .

Cela est peut-être plus visible lorsqu'on écrit ce produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition. La matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

s'appelle la *représentation matricielle relative aux coordonnées homogènes* de la transformation affine $f = [A; \mathbf{b}]$ (on dit aussi, plus simplement, que M est la *matrice homogène* de f).

On peut faire le même raisonnement dans l'espace. Dans \mathbb{E}^3 , un point a quatre coordonnées homogènes et la matrice homogène d'une transformation est donc une matrice 4×4 .

5.10 Conjugaison

Définition. Si f et h sont deux transformations, la transformation

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$

s'appelle la *conjugaison* de f par h .

Proposition 5.18 Si Ω est une figure invariante (ou fixe) par f , alors $h(\Omega)$ est une figure invariante (ou fixe) par $h \circ f \circ h^{-1}$.

PREUVE. La preuve est très simple : on a $f(\Omega) = \Omega$, donc

$$h \circ f \circ h^{-1} (h(\Omega)) = h(f(\Omega)) = h(\Omega).$$

□

Exemple 5.12 On désire calculer la rotation g d'angle θ autour du point \mathbf{p} dans le plan \mathbb{E}^2 . Cette rotation est donnée par la conjugaison $g = h \circ f \circ h^{-1}$ où f est la rotation d'angle θ autour de l'origine et h est la translation de vecteur \mathbf{p} .

Travaillons en représentation homogène ; nous avons :

$$f = \begin{pmatrix} R_\theta & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

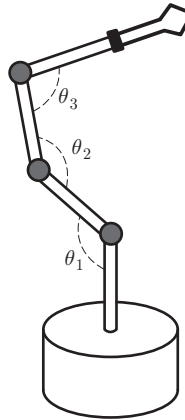
donc

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\theta & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta & (\mathbf{p} - R_\theta \mathbf{p}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc vérifié une nouvelle fois que la rotation d'angle θ autour du point \mathbf{p} est la transformation affine $g : \mathbf{x} \rightarrow R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} = (\mathbf{I} - R_\theta) \mathbf{p}$.

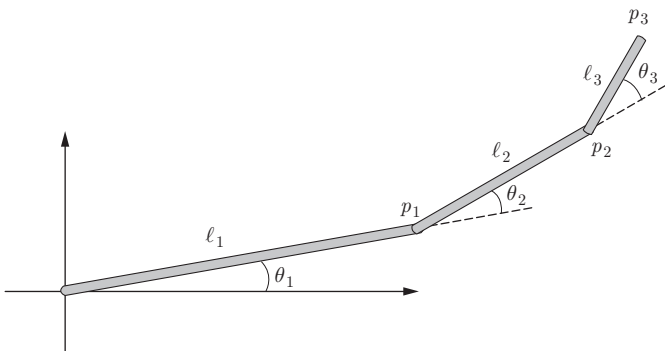
5.11 Application aux bras manipulateurs de robots

Considérons un système mécanique formé de trois segments rectilignes de longueurs ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 . Supposons que l'une des extrémités du premier segment soit fixée, que le deuxième soit assemblé au premier et le troisième au second.



Un robot simplifié.

Les segments sont de plus contraints à rester dans un plan en sorte que les seuls mouvements relatifs d'un segment par rapport à ses voisins sont des rotations (on parle alors d'*articulations rotoïdes* et on dit que le mécanisme est un système planaire 3-R).

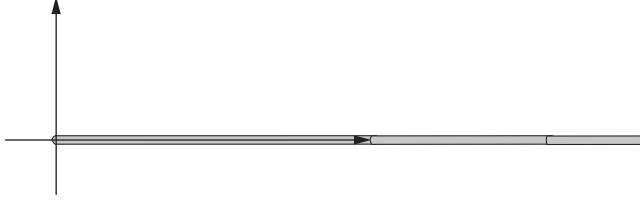


Bras manipulateur à trois segments.

Introduisons un repère orthonormé $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ dont l'origine coïncide avec le point d'ancrage du premier segment, et notons θ_1 l'angle entre le premier segment et le vecteur \mathbf{e}_1 , puis θ_2 l'angle entre le second et le premier segment et θ_3 l'angle entre le troisième et le second segment.

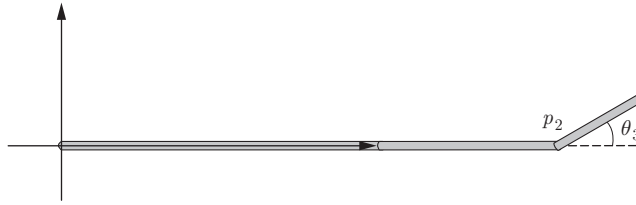
Notons ensuite \mathbf{p}_i l'extrémité du i^{e} segment. Le problème de la commande du robot consiste à déterminer \mathbf{p}_3 à partir de θ_1 , θ_2 et θ_3 (le point \mathbf{p}_3 s'appelle l'*actionneur* du robot car c'est le lieu où l'on attache un outil au robot).

Pour résoudre ce problème, on procède en plusieurs étapes. On considère tout d'abord la situation où les trois angles θ_i sont nuls.



Les angles sont nuls...

Puis on fait tourner le troisième segment (autour de la seconde articulation) d'un angle θ_3 .



On tourne le troisième segment...

Ce déplacement est donné par la matrice homogène :

$$F_3 := \begin{pmatrix} R_{\theta_3} & \mathbf{b}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{pmatrix}$.

Le pôle de cette rotation est $\mathbf{p}_2 = (\ell_1 + \ell_2, 0)$, par conséquent la partie translation de F_3 est $\mathbf{b}_3 = (\mathbf{I} - R_{\theta_3}) \mathbf{p}_2 = ((1 - \cos(\theta_3))(\ell_1 + \ell_2), \sin(\theta_3)(\ell_1 + \ell_2))$.

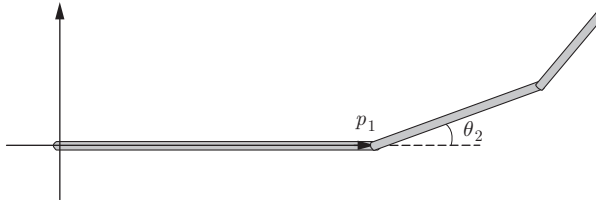
Ensuite, on fait tourner le second segment (autour de la première articulation) d'un angle θ_2 .

Ce déplacement est donné par la matrice homogène :

$$F_2 := \begin{pmatrix} R_{\theta_2} & \mathbf{b}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$.

Le pôle de cette rotation est $\mathbf{p}_1 = (\ell_1, 0)$, donc la partie translation de F_2 est $\mathbf{b}_2 = ((1 - \cos(\theta_2))\ell_1, \sin(\theta_2)\ell_1)$.



Puis on tourne le deuxième segment.

Finalement, on fait tourner le premier segment autour du point d'ancrage d'un angle θ_1 .

Ce déplacement est donné par la matrice homogène :

$$F_1 := \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déplacement obtenu en composant ces trois rotations est donné par le produit

$$F = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = \begin{pmatrix} R_{\theta} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ et $\mathbf{b} = R_{\theta_1} \mathbf{b}_2 + R_{\theta_1} R_{\theta_2} \mathbf{b}_3$.

La position de l'actionneur est donnée en coordonnées homogènes par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\theta} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y &= \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \end{aligned}$$

5.12 Distorsion des transformations affines

Dilatation des aires et des volumes

Comme une transformation affine est inversible, sa partie linéaire est une matrice inversible. En particulier, son déterminant est non nul.

Proposition 5.19 *Soit f une transformation affine de partie linéaire A . Alors, dans le cas du plan, f multiplie les aires orientées de toute figure par un coefficient de $\det A$.*

Dans le cas de l'espace, f multiplie les volumes orientés de toute figure par un coefficient de $\det A$.

En particulier f préserve l'orientation si et seulement si $\det A > 0$.

PREUVE. Faisons le raisonnement dans le cas du plan. Comme l'aire ou l'orientation d'une figure n'est pas affectée par une translation, on peut négliger la partie translation et supposer que f est linéaire : $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

L'aire orientée d'un parallélogramme de côtés $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ est $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et l'aire orientée de son image est

$$(A\mathbf{u}) \wedge (A\mathbf{v}) = \det \left\{ A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right\} = \det A \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de l'espace, le raisonnement est semblable en utilisant des produits mixtes. □

Dilatation des longueurs

Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une base orthonormée de \mathbb{E}^n et $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ une transformation affine.

Définitions. La matrice

$$\mathbf{G} := A^t \cdot A$$

s'appelle la *matrice de Gram* (ou le tenseur de *Green-Cauchy*) de f .

Les *coefficients principaux de dilatation* d'une transformation affine sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice de Gram de f .

Les coefficients g_{ij} de cette matrice apparaissent dans le calcul du produit scalaire de l'image par A de deux vecteurs : Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$, alors le produit scalaire de $A\mathbf{u}$ et $A\mathbf{v}$ est donné par

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle &= (A\mathbf{u})^t (A\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^t \mathbf{G} \mathbf{v} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{G} \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i v_j. \end{aligned}$$

En particulier, on a la proposition suivante.

Proposition 5.20 *Soit $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ une transformation affine. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) f est une isométrie ;
- ii) les coefficients principaux de dilatation de f valent 1 ;
- iii) la matrice de Gram de f est la matrice identité ;
- iv) $A^t = A^{-1}$.

□

Définition. La dilatation de f en direction d'un vecteur (non nul) \mathbf{v} est le quotient

$$\delta(\mathbf{v}) := \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Le calcul ci-dessus montre immédiatement la proposition suivante.

Proposition 5.21 *La dilatation de f en direction d'un vecteur non nul $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$ est donnée par*

$$\delta(\mathbf{u})^2 := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{G} \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i u_j}{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

□

Lemme 5.22 *Les valeurs propres de la matrice de Gram de f sont positives.*

PREUVE. Soient \mathbf{u} un vecteur propre de \mathbf{G} et μ la valeur propre associée, i.e. $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}$. Alors on a

$$\mu \|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{G} \mathbf{u} \rangle = \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle = \|A\mathbf{u}\|^2 > 0.$$

□

Nous verrons plus loin (cf. corollaire 5.25) que les coefficients principaux de dilatation sont le plus grand et le plus petit coefficient de dilatation d'une transformation affine.

5.13 Décomposition d'une transformation affine

Théorème 5.23 *Toute transformation affine du plan peut s'écrire sous la forme*

$$f(\mathbf{x}) = (R_2 D R_1^{-1}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

où R_1 et R_2 sont des rotations linéaires et D est une transformation linéaire diagonale dont les valeurs propres sont, au signe près, les coefficients principaux de dilatation de f .

Ce théorème signifie que toute transformation affine est obtenue par composition d'une application diagonale avec des rotations et translations.

La preuve du théorème s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 5.24 *Soit f une transformation linéaire de matrice de Gram \mathbf{G} . Alors il existe une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de \mathbf{G} .*

Comme \mathbf{G} est symétrique (car $\mathbf{G}^t = (A^t A)^t = A^t A = \mathbf{G}$), on pourrait simplement invoquer un théorème du cours d'algèbre linéaire qui dit que toute matrice symétrique est orthogonalement diagonalisable. Toutefois, il existe une preuve très courte en dimension 2 que nous donnons ci-dessous.

PREUVE DU LEMME (EN DIMENSION 2). Soient \mathbf{v}_1 un vecteur propre de \mathbf{G} et μ_1 la valeur propre associée. Quitte à normaliser \mathbf{v}_1 , on peut supposer $\|\mathbf{v}_1\| = 1$. Considérons ensuite le vecteur $\mathbf{v}_2 := \mathbf{J} \mathbf{v}_1$ où $\mathbf{J} = R_{\frac{\pi}{2}}$ est la rotation d'un quart de tour dans le sens positif, alors

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v}_2, \mu_1 \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{G} \mathbf{v}_1 \rangle \\ &= \mathbf{v}_2^t (A^t A \mathbf{v}_1) = (A^t A \mathbf{v}_2)^t \mathbf{v}_1 \\ &= \langle \mathbf{G} \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{G} \mathbf{v}_2$ est orthogonal à \mathbf{v}_1 , par conséquent il existe un scalaire μ_2 tel que $\mathbf{G} \mathbf{v}_2 = \mu_2 \mathbf{v}_2$ et \mathbf{v}_2 est donc aussi un vecteur propre de \mathbf{G} .

Donc $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de \mathbf{G} . □

PREUVE DU THÉORÈME (EN DIMENSION 2). Soient $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ une transformation affine et $\mathbf{G} = A^t A$ sa matrice de Gram. Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de \mathbf{G} . Notons μ_1, μ_2 les valeurs propres de \mathbf{G} et $\lambda_1 = \sqrt{\mu_1}$, $\lambda_2 = \sqrt{\mu_2}$ les coefficients principaux de dilatation de f .

Posons

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\lambda_1} A \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w}_2 = \pm \frac{1}{\lambda_2} A \mathbf{v}_2,$$

où le signe \pm est choisi tel que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ soit une base directe.

AFFIRMATION : $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ est une base orthonormée.

En effet :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle &= \pm \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \langle A \mathbf{v}_1, A \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \pm \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{G} \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \pm \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2^2 \mathbf{v}_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

donc \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sont orthogonaux, et un calcul similaire montre que $\|\mathbf{w}_1\| = \|\mathbf{w}_2\| = 1$.

Résumons : nous avons montré qu'il existe deux bases orthonormées directes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ telles que

$$\lambda_i \mathbf{w}_i = A \mathbf{v}_i \quad i = 1, 2.$$

Notons R_1 la rotation amenant la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ sur la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et R_2 la rotation amenant la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ sur la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Nous avons alors

$$\lambda_i R_2 \mathbf{e}_i = A R_1 \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2.$$

Donc, si l'on pose $D := R_2^{-1} A R_1$, on obtient $D \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, c'est-à-dire que D est la transformation diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \pm \lambda_2 \end{pmatrix}$, et, d'autre part, nous avons

$$A = R_2 D R_1^{-1}.$$

□

Corollaire 5.25 Soient λ_1, λ_2 les coefficients principaux de dilatation d'une transformation affine du plan f . Supposons $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, on a

$$\lambda_1 \leq \delta(\mathbf{x}) \leq \lambda_2.$$

PREUVE. Grâce au théorème 5.23, il suffit de prouver ce corollaire dans le cas où f est une transformation diagonale. Soit donc

$$f = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \pm \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et \mathbf{x} un vecteur non nul. Comme la dilatation de \mathbf{x} ne change pas si on multiplie ce vecteur par un scalaire non nul, on peut supposer que $\|\mathbf{x}\| = 1$.

On peut donc écrire $\mathbf{x} = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2$. Voyons que $\delta(\mathbf{x}) \leq \lambda_2$:

$$\delta(\mathbf{x})^2 = \lambda_1^2 \cos^2(\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(\theta) \leq \lambda_2^2 \cos^2(\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(\theta) = \lambda_2^2.$$

Le même argument montre que $\delta(\mathbf{x}) \geq \lambda_1$.

□

5.14 La notion de groupe

Définition. Un *groupe de transformations* de \mathbb{E}^n est un ensemble \mathcal{G} de transformations de \mathbb{E}^n tel que

- a) $\text{Id} \in \mathcal{G}$;
- b) si $f \in \mathcal{G}$ et $g \in \mathcal{G}$, alors $f \circ g \in \mathcal{G}$;
- c) si $f \in \mathcal{G}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{G}$.

En particulier, si f et h appartiennent à un groupe \mathcal{G} , alors $h \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{G}$. On dit que la transformation est la *conjugaison* de f par h .

Exemple 5.13 (exemples de groupe)

- L'ensemble de toutes les transformations affines du plan ou de l'espace forme un groupe.
- L'ensemble des translations du plan ou de l'espace forme un groupe.
- L'ensemble des isométries forme un groupe, on le note $E(2)$ dans le cas du plan et $E(3)$ dans le cas de l'espace.
- L'ensemble des isométries fixant l'origine est un groupe, on le note $O(2)$ dans le cas du plan et $O(3)$ dans le cas de l'espace.
- L'ensemble des isométries directes forme un groupe, on le note $SE(2)$ dans le cas du plan et $SE(3)$ dans le cas de l'espace et on l'appelle le *groupe des déplacements* (« *rigid motions* »).
- L'ensemble des rotations autour de l'origine est un groupe, on le note $SO(2)$ dans le cas du plan et $SO(3)$ dans le cas de l'espace.

En revanche, l'ensemble des rotations et l'ensemble des symétries ne sont pas des groupes.

On peut aussi définir la notion de groupe dans le contexte du calcul matriciel.

Définitions. Un *groupe de matrices* est un ensemble H de matrices carrées inversibles tel que

- a) $\mathbf{I} \in H$;
- b) si $M \in H$ et $N \in H$, alors $M \cdot N \in H$;
- c) si $M \in H$, alors $M^{-1} \in H$.

Deux groupes sont *isomorphes* s'il existe une correspondance bijective entre eux qui soit compatible avec les lois des groupes.

En particulier :

- le groupe des translations du plan est isomorphe au groupe des matrices 3×3 du type

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

- le groupe $O(n)$ est isomorphe au groupe des matrices $n \times n$ A telles que $A A^t = \mathbf{I}$;
- le groupe $SO(2)$ est isomorphe au groupe des matrices 2×2 du type

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} ;$$

- le groupe $E(n)$ est isomorphe au groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ du type

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$;

- le groupe $SE(n)$ est isomorphe au groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ du type

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $A \in SO(n)$.

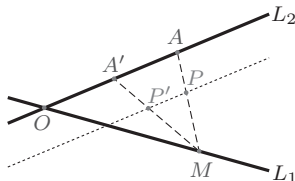
Ce sont les groupes de transformations qui nous intéressent d'un point de vue géométrique, mais les groupes (isomorphes) de matrices sont plus commodes pour les calculs.

5.15 Exercices

5.15.1

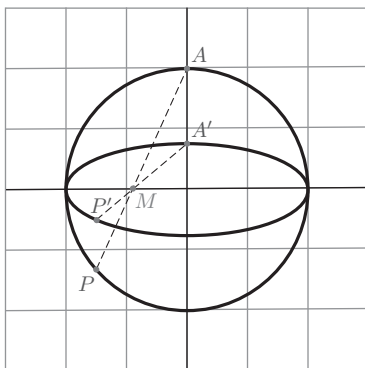
- Expliquer la différence entre une figure invariante et une figure fixe. Donner des exemples.
- Montrer qu'une transformation affine du plan fixant trois points non alignés est l'identité.
- Montrer qu'une transformation affine de l'espace fixant 4 points non coplanaires est l'identité.
- A quelle condition une transformation affine envoie-t-elle un repère orthonormé sur un repère orthonormé ?

5.15.2 Prouver qu'une affinité f est complètement déterminée par la donnée d'un point A et de son image A' sur l'axe invariant L_1 et la donnée de l'axe fixe L_2 . La construction est la suivante : étant donné un point quelconque P du plan, on construit l'intersection M de L_1 avec la droite L_{AP} . Le point image $P' = f(P)$ est alors l'intersection de la droite $L_{MA'}$ avec la parallèle à la droite L_2 passant par P .



Prouver que cette construction est correcte !

5.15.3 Le procédé de l'exercice précédent permet de construire une ellipse en appliquant « point par point », une affinité à un cercle. C'était l'une des constructions qu'on utilisait avant les ordinateurs.



Prendre un compas, une règle et un crayon bien taillé, et construire une belle ellipse.

5.15.4 Supposons que la transformation affine $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ envoie les points (non alignés) A, B, C sur A', B', C' . Trouver une méthode graphique pour construire l'image P' d'un point quelconque $P \in \mathbb{E}^2$.

En déduire que toute transformation affine d'un plan est déterminée par son effet sur un repère affine.

Qu'en est-il dans le cas des transformations affines de l'espace \mathbb{E}^3 ?

5.15.5 Considérons la transformation affine f donnée algébriquement par

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Cette application a-t-elle un ou des points fixes ?
- Si oui, trouver ces points fixes.
- Calculer la forme algébrique de $f^2 = f \circ f$,
- ... et celle de f^{-1} .

5.15.6 Montrer que la symétrie $S_\Pi(\mathbf{x})$ à travers le plan Π d'équation $\Pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$ est donnée algébriquement par

$$S_\Pi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

avec $A = (\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{nn}^t}{\|\mathbf{n}\|^2})$ et $\mathbf{b} = \frac{2p}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}$.

5.15.7 Calculer $S_\Pi^2 = S_\Pi \circ S_\Pi$ à partir de la formule de l'exercice précédent. Expliquer ensuite le résultat obtenu.

5.15.8 Trouver la représentation algébrique des symétries à travers les plans

$$\Pi_1 : 3x - 4z = -1$$

et

$$\Pi_2 : 10x - 2y + 3z = 4.$$

5.15.9 Démontrer la formule d'addition des angles pour le sinus en utilisant des matrices de rotation.

5.15.10 Trouver la forme algébrique des déplacements suivants de \mathbb{R}^2 :

- a) Une translation d'une unité dans la direction de l'axe x suivie d'une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine.
- b) Une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour du point $(x, y) = (1, 1)$.

5.15.11 Trouver la rotation dans le plan d'angle 45° ayant même pôle que la rotation

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.15.12 Un déplacement du plan envoie les points $(0, 1)$ et $(1, 1)$ sur $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ et $(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Trouver la représentation algébrique de cette transformation. Quel est le pôle de ce déplacement ?

Comment peut-on trouver ce pôle graphiquement ?

5.15.13 Montrer que si $A, B \in SO(3)$, alors $A \cdot B \in SO(3)$ et $A^{-1} \in SO(3)$.

5.15.14 Montrer que toute application linéaire $A \in O(3)$ de déterminant -1 admet un vecteur propre \mathbf{a} de valeur propre -1 .

5.15.15 Soit A une matrice de $SO(3)$. Montrer que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}^3$, on a

$$A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \times (A\mathbf{y}).$$

Montrer ensuite par des exemples que cette identité est fausse si $A \notin SO(3)$.

5.15.16 Que peut-on dire de la partie linéaire d'une similitude ?

5.15.17 Montrer que toute similitude de rapport $\lambda \neq 1$ admet un point fixe.

5.15.18 Calculer la matrice de la rotation d'angle $\theta = \pi/4$ autour de l'axe passant par l'origine et de direction $(1, 0, 1)$, puis vérifier que cette matrice est orthogonale.

5.15.19 Soit $f = [A, \mathbf{b}]$ une isométrie de \mathbb{E}^3 et L une droite dont les coordonnées de Plücker sont $(\mathbf{w}; \mathbf{m})$. Trouver les coordonnées de Plücker de l'image $L' = f(L)$.

5.15.20 Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les isométries obtenues en composant une rotation de $\pi/4$ autour de l'axe Oz et une rotation de $\pi/6$ autour de l'axe Ox selon les deux ordres possibles. Trouver l'axe de ces isométries.

5.15.21 Vérifier que les matrices suivantes appartiennent à $SO(3)$

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -9/11 & -2/11 & 6/11 \\ 6/11 & -6/11 & 7/11 \\ 2/11 & 9/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$

puis trouver l'axe et l'angle de rotation correspondant à ces matrices.

5.15.22 Trouver la décomposition de Chasles de $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, où A est donné dans l'exercice précédent, et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En particulier trouver l'angle, le pas et l'axe.

5.15.23 Considérons le déplacement de \mathbb{E}^2 donné par la matrice homogène suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver son pôle.

5.15.24 Montrer que la matrice de Gram d'une application affine du plan $f : \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est la matrice de Gram de la base image $\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2\}$.

5.15.25 Soient λ_1 et λ_2 les coefficients principaux de dilatation d'une application affine f . Montrer que f dilate les aires d'un facteur $\lambda_1\lambda_2$.

5.15.26 Calculer les coefficients de dilatation principaux de la transformation affine donnée par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Troisième partie

Géométrie différentielle

Chapitre 6

Géométrie des courbes

6.1 Qu'est ce qu'une courbe ?

La notion mathématique de *courbe* ou de *ligne* formalise l'idée intuitive d'un objet du plan ou de l'espace qui est continu et n'a qu'une dimension. Euclide en donne la définition suivante dans le livre I des *Éléments* : *une ligne est une longueur sans largeur*. Les droites, les cercles et les ellipses sont des exemples familiers de courbes. Dans la vie courante, un fil de fer ou la trajectoire d'un projectile sont des exemples concrets.

La formalisation de la notion de courbes conduit à plusieurs concepts qu'il faudra distinguer. Le premier est celui de « lieu géométrique » des points satisfaisant certaines propriétés : cette idée nous conduit à la notion *implicite* d'une courbe comme ensemble des points satisfaisant une équation (dans le plan) ou deux équations (dans l'espace). Le second concept est celui de courbe comme « trajectoire » : on ne regarde plus la courbe comme un ensemble de points, mais comme un « point mobile », c'est-à-dire une fonction d'un paramètre à valeur dans le plan ou dans l'espace : c'est le point de vue *paramétrique* ou *cinématique* en théorie des courbes. L'acte de tracer une courbe au crayon noir sur une feuille blanche se décrit par le point de vue paramétrique, le résultat de cette action, la courbe que l'on voit, correspond au point de vue implicite.

Une étude approfondie des courbes implicites présente de grandes difficultés techniques qui sont abordées dans les livres de géométrie algébrique¹. Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement le point de vue paramétrique.

1. Voir par exemple [6, 10, 34] pour une introduction à la géométrie algébrique.

6.2 Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on suppose que l'espace est muni d'un système de coordonnées fixe, on l'identifie donc à \mathbb{R}^n et on admet que n est un entier quelconque. On supposera, sauf mention du contraire, que le système de coordonnées est orthonormé, la norme d'un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est alors donnée par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Définitions. Une *courbe paramétrée* dans \mathbb{R}^n est une application continue $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\alpha : u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u)) \in \mathbb{R}^n, \quad u \in I$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle appelé l'*intervalle de paramétrage* (aussi appelé *intervalle de paramétrisation*) de la courbe.

La variable u parcourant l'intervalle I s'appelle le *paramètre* (elle est aussi parfois notée par les lettres s, t, φ ou θ) et l'ensemble

$$\alpha(I) = \{\alpha(u) \mid u \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

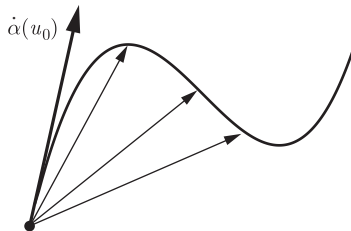
s'appelle la *trace* ou le *support* de la courbe paramétrée α .

On dit que la courbe α est *différentiable* en $u_0 \in I$ si la limite

$$\frac{d\alpha}{du}(u_0) := \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\alpha(u) - \alpha(u_0)}{u - u_0}$$

existe. Cette limite s'appelle alors le *vecteur vitesse* de la courbe α en u_0 et on le note $\dot{\alpha}(u_0)$ ou $\alpha'(u_0)$.

Remarquons que la direction du vecteur vitesse est tangente à la courbe en $\alpha(u_0)$ car cette direction est la limite des directions prises par une suite de cordes reliant le point $p = \alpha(u_0)$ à un point de la courbe se rapprochant du point p .



La *vitesse* de α en u_0 est la norme du vecteur vitesse, on la note

$$V_\alpha(u_0) = \|\dot{\alpha}(u_0)\|.$$

Lemme 6.1 La courbe $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_n(u))$ est différentiable en u_0 si et seulement si les fonctions $\alpha_i(u)$ sont dérivables en u_0 . De plus

$$\dot{\alpha}(u_0) = \left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0), \dots, \frac{d\alpha_n}{du}(u_0) \right),$$

et

$$V_\alpha(u_0) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0) \right)^2 + \dots + \left(\frac{d\alpha_n}{du}(u_0) \right)^2}.$$

□

ATTENTION. La seconde formule est fausse si l'on travaille dans un système de coordonnées non orthonormé.

Définitions. Voyons quelques définitions supplémentaires.

- a) La courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite de *classe* C^1 si elle est différentiable en tout point de I et si les dérivées

$$\dot{\alpha}_j = \frac{d\alpha_j}{du}$$

sont continues sur l'intervalle I pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

- b) La courbe est dite de *classe* C^k (où k est un entier) si les dérivées d'ordre m

$$\frac{d^m \alpha_j}{du^m}(u)$$

existent et sont continues pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ et tout $m = 1, 2, \dots, k$.

Si une courbe est de classe C^k pour tout entier k , on dit qu'elle est de classe C^∞ . Si la courbe est simplement continue, on dit qu'elle est de *classe* C^0 .

- c) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe de classe C^2 , alors son *accélération* est le vecteur défini par

$$\ddot{\alpha}(u) = \frac{d^2 \alpha}{du^2}(u).$$

- d) Soit α une courbe de classe C^1 et u_0 une valeur du paramètre. On dit que le point $p = \alpha(u_0)$ est *singulier* si $\dot{\alpha}(u_0) = \mathbf{0}$ (de façon équivalente, p est singulier si et seulement si $V_\alpha(u_0) = 0$). Le point $p = \alpha(u_0)$ est *régulier* s'il n'est pas singulier.

Une courbe est *régulière* si elle est de classe C^1 et si tous ses points sont réguliers.

- e) Le point $p = \alpha(u_0)$ sur une courbe de classe C^2 est *birégulier* si $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$ sont linéairement indépendants.

Une courbe est *birégulière* si elle est de classe C^2 et si tous ses points sont biréguliers.

- f) Le *plan osculateur* à la courbe α au point $p = \alpha(u_0)$ est le plan passant par p et qui est parallèle aux vecteurs $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$. Ce plan n'est défini que si p est un point birégulier.

- g) Un point p sur une courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un *point double* s'il existe deux valeurs distinctes du paramètre ($u_1, u_2 \in I$, $u_1 \neq u_2$) telles que

$$p = \alpha(u_1) = \alpha(u_2).$$

- h) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe et si $J \subset I$ est un intervalle, alors on dit que la restriction de α à J est un *arc* de la courbe *arc de courbe* α (un arc de courbe n'est donc rien d'autre qu'un « morceau de courbe »).
- i) On dit qu'un arc de courbe est *simple* s'il ne contient pas de point double.
- j) La *droite tangente* à la courbe γ au point régulier $\gamma(u_0)$ est la droite $T_{u_0}\gamma$ parcourue à vitesse constante, passant par $\gamma(u_0)$ dans la direction du vecteur vitesse $\dot{\gamma}(u_0)$:

$$T_{u_0}\gamma : \lambda \mapsto \gamma(u_0) + \lambda \dot{\gamma}(u_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 6.1

- 1) La *cubique* dans \mathbb{R}^3 est la courbe $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(u) = (a u, b u^2, c u^3),$$

où a, b, c sont des constantes non nulles. Cette courbe est de classe C^∞ , son vecteur vitesse est

$$\dot{\alpha}(u) = (a, 2bu, 3cu^2)$$

et son accélération est

$$\ddot{\alpha}(u) = (0, 2b, 6cu).$$

La cubique est donc birégulière et sa vitesse est

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2u^2 + 9c^2u^4}.$$

- 2) La courbe $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = (u^2, u^3, \dots, u^{n+1})$$

est de classe C^∞ . Son vecteur vitesse est

$$\dot{\beta}(u) = (2u, 3u^2, \dots, (n+1)u^n),$$

et sa vitesse est $V_\beta(u) = \|\dot{\beta}(u)\| = \sqrt{4u^2 + \dots + ((n+1)u^n)^2}$. Cette courbe a un unique point singulier en $\beta(0) = (0, 0, \dots, 0)$.

- 3) La droite passant par les points distincts $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ admet le paramétrage affine $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ suivant :

$$\delta(t) = p + t\vec{pq} = (p_1 + t(q_1 - p_1), p_2 + t(q_2 - p_2), \dots, p_n + t(q_n - p_n)).$$

En posant $\mathbf{w} = \vec{pq} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, on a $\delta(t) = (p_1 + tw_1, \dots, p_n + tw_n)$. Le vecteur vitesse et la vitesse sont donnés pour tout t par

$$\dot{\delta}(t) = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\delta(t) = \|\mathbf{w}\|,$$

et l'accélération est nulle. La courbe est donc régulière, de classe C^∞ et sa vitesse est constante. Son accélération est nulle et la droite n'est donc pas birégulière.

4) La même droite admet de nombreux autres paramétrages, par exemple :

$$\varepsilon(t) = p + t^3 \mathbf{w} = (p_1 + t^3 w_1, \dots, p_n + t^3 w_n) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans ce cas,

$$\dot{\varepsilon}(t) = 3t^2 \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon(t) = 3t^2 \|\mathbf{w}\|.$$

La courbe est de classe C^∞ et elle possède un unique point singulier en $\varepsilon(0) = p$.

5) Ou encore

$$\eta(t) = p + \sqrt[3]{t} \mathbf{w} = (p_1 + \sqrt[3]{t} w_1, \dots, p_n + \sqrt[3]{t} w_n) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Cette courbe n'est alors pas de classe C^1 , elle n'est en effet pas différentiable en $t = 0$. Nous avons pour $t \neq 0$:

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{3} t^{-2/3} \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\eta(t) = \frac{1}{3} t^{-2/3} \|\mathbf{w}\|,$$

et donc $V_\eta(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow 0$.

6) Le cercle de centre p et rayon r dans le plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ admet le paramétrage

$$c(t) = p + r \cos(\omega t) \mathbf{b}_1 + r \sin(\omega t) \mathbf{b}_2 \quad (0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega})$$

où $p, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ est un repère orthonormé dans le plan Π et $\omega > 0$ est une constante appelée la *vitesse angulaire* (on vérifie en effet facilement que $\|c(t) - p\| = r$). La vitesse de cette courbe est

$$\dot{c}(t) = -\omega r \sin(\omega t) \mathbf{b}_1 + \omega r \cos(\omega t) \mathbf{b}_2 \quad \text{et} \quad V_c(t) = \omega r.$$

Son accélération est

$$\ddot{c}(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \mathbf{b}_1 - \omega^2 r \sin(\omega t) \mathbf{b}_2.$$

La courbe est birégulière, elle est de classe C^∞ , et sa vitesse est constante.

7) Le *graphe* d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est la courbe $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Remarquons que la variable x est à la fois une coordonnée du plan et le paramètre de la courbe. Si f est continûment dérivable, alors la courbe est de classe C^1 et

$$\dot{\gamma}_f(x) = (1, f'(x)) \quad \text{et} \quad V_\gamma(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Cette courbe est toujours régulière puisqu'en tout point $V_\gamma(x) \geq 1$.

8) L'hélice circulaire est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

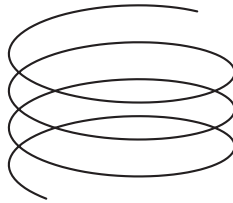
$$\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), bu),$$

avec a et b non nuls. Son vecteur vitesse et son accélération sont donnés par

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(u) &= (-a \sin u, a \cos u, b) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(-\cos u, -\sin u, 0).\end{aligned}$$

L'hélice circulaire est donc une courbe birégulière et la vitesse est constante :

$$\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hélice circulaire

Splines et courbes de Bézier

Un arc de courbe $\alpha : u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$ de \mathbb{R}^n est dit *polynomial d'ordre m* si chacune de ses coordonnées $\alpha_j(u)$ est une fonction polynomiale de degré m du paramètre u .

On appelle *spline d'ordre m* une courbe de classe C^{m-1} qui est formée de plusieurs arcs polynomiaux d'ordre m .

La théorie de l'interpolation des courbes est l'étude de procédés permettant de construire des courbes vérifiant des contraintes précises telles que de passer par certains points ou d'avoir des directions tangentes prescrites. Les splines sont particulièrement utiles dans ce contexte, et parmi les splines, les *courbes de Bézier*² sont sans doute les plus simples et les plus fréquemment utilisées. Un arc de Bézier d'ordre 3 dans le plan \mathbb{R}^2 est déterminé à partir de quatre *points de contrôle* $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ et est donné par la formule

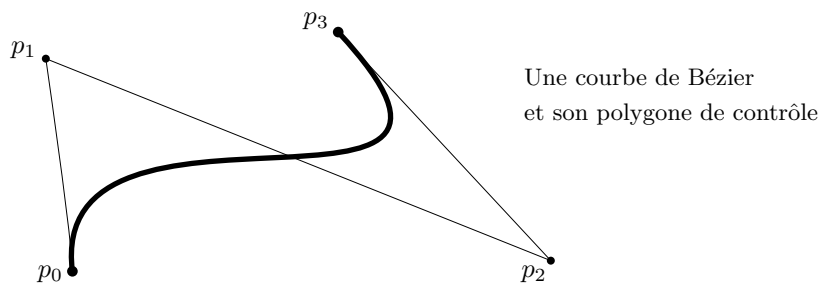
$$\beta(u) = (1-u)^3 p_0 + 3u(1-u)^2 p_1 + 3u^2(1-u) p_2 + u^3 p_3, \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Remarquons que $\beta(0) = p_0$ et $\beta(1) = p_3$, l'arc de Bézier relie donc le premier point de contrôle au dernier. Le vecteur vitesse de β est donné par

$$\dot{\beta}(u) = -3(1-u)^2 p_0 + 3(1-4u+3u^2) p_1 + 3u(2-3u) p_2 + 3u^2 p_3,$$

2. Pierre Bézier, 1910–1999, était ingénieur chez Renault, il développe dès les années 1960 des logiciels de conception assistée par ordinateur basés sur les splines.

donc $\dot{\beta}(0) = 3\overrightarrow{p_0p_1}$ et $\dot{\beta}(1) = 3\overrightarrow{p_2p_3}$. Les points de contrôle intermédiaires nous donnent les directions initiale et finale de l'arc de Bézier.



En juxtaposant une suite d'arcs de Bézier, on peut construire une spline dont on contrôle avec finesse la forme et qui se calcule facilement. De nombreux logiciels de dessin et de conception assistée par ordinateur sont basés sur les courbes de Bézier. Notons toutefois que la plupart des courbes géométriques ne sont pas des splines, ainsi on ne peut jamais construire un vrai cercle ou une vraie ellipse avec des arcs de Bézier, même si on peut en produire d'excellentes approximations.



Une spline construite en juxtaposant des arcs de Bézier.

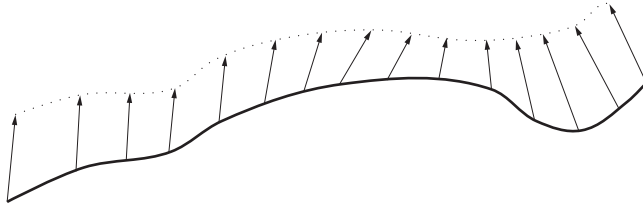
De nombreux ouvrages traitent des splines et de l'interpolation géométrique, voir par exemple le livre [18] de Jean Gallier.

6.3 Champs de vecteurs le long d'une courbe

Définition. Un *champ de vecteurs* le long d'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la donnée d'un vecteur

$$\mathbf{W}(u) = w_1(u)\mathbf{e}_1 + w_2(u)\mathbf{e}_2 + \cdots + w_n(u)\mathbf{e}_n$$

pour toute valeur du paramètre $u \in I$. Ce vecteur est en général considéré comme un vecteur fixe d'origine $\gamma(u)$, mais on peut aussi le voir comme un vecteur libre.



Champ de vecteurs le long d'une courbe.

Le champ de vecteurs $\mathbf{W}(u)$ est dit *de classe* C^k si les dérivées de w_1, w_2, \dots, w_n existent et sont continues jusqu'à l'ordre k .

Exemples de champs

- 1) Si γ est de classe C^1 , alors son vecteur vitesse définit un champ $u \mapsto \dot{\gamma}(u)$.
- 2) Si γ est de classe C^2 , alors son accélération définit un champ $u \mapsto \ddot{\gamma}(u)$.
- 3) Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^k , alors sa dérivée $\dot{\mathbf{W}}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^{k-1} et $\ddot{\mathbf{W}}(u)$ est de classe C^{k-2} .
- 4) Si $\mathbf{W}(u)$ et $\mathbf{Z}(u)$ sont deux champs de vecteurs le long de la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors

$$u \mapsto f(u)\mathbf{W}(u) + g(u)\mathbf{Z}(u)$$

est un nouveau champ de vecteurs le long de la courbe.

- 5) En dimension 3, un autre champ est donné par $u \mapsto \mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)$.
- 6) Si $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux courbes ayant même intervalle de paramétrage, alors on peut définir un champ

$$\mathbf{W}(u) = \beta(u) - \gamma(u),$$

ce champ s'appelle le *champ de poursuite* de la courbe β depuis la courbe γ .

- 7) Un champ important est le *vecteur tangent* d'une courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. C'est le champ de vecteurs le long de la courbe obtenu en normalisant le vecteur vitesse :

$$\mathbf{T}(\gamma, u) := \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}.$$

Lemme 6.2 (Règle de Leibniz) Soient $\mathbf{W}(u)$ et $\mathbf{Z}(u)$ deux champs de vecteurs de classe C^1 le long de la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{d}{du} \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle = \langle \dot{\mathbf{W}}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle + \langle \mathbf{W}(u), \dot{\mathbf{Z}}(u) \rangle.$$

Si $n = 3$, alors on a de même

$$\frac{d}{du} (\mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)) = \dot{\mathbf{W}}(u) \times \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \times \dot{\mathbf{Z}}(u),$$

et si $n = 2$,

$$\frac{d}{du}(\mathbf{W}(u) \wedge \mathbf{Z}(u)) = \dot{\mathbf{W}}(u) \wedge \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \wedge \dot{\mathbf{Z}}(u).$$

PREUVE. Démontrons la première formule : écrivons pour simplifier

$$\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) = \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle.$$

On a alors par bilinéarité

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}(u + \varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) \\ &= \left(\mathbf{W}(u + \varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) \right) + \left(\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) \right) \\ &= \left(\mathbf{W}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \right) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) + \mathbf{W}(u) \cdot \left(\mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{Z}(u) \right). \end{aligned}$$

Il suffit de diviser cette identité par ε et faire tendre ε vers 0 pour obtenir le lemme.

Les autres formules se vérifient de la même manière. □

Corollaire 6.3 Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ tel que $\|\mathbf{W}\|$ est constant, alors $\dot{\mathbf{W}}(u) \perp \mathbf{W}(u)$ pour tout u .

En particulier, le champ $\dot{\mathbf{T}}(u)$ est orthogonal au champ $\mathbf{T}(u)$.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz. Notons $\|\mathbf{W}\| = c$, alors

$$0 = \frac{d}{du} c^2 = \frac{d}{du} \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{W}(u) \rangle = 2 \langle \dot{\mathbf{W}}(u), \mathbf{W}(u) \rangle.$$

□

6.4 Longueur et abscisse curviligne

Définition. La *longueur* d'un arc de courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est l'intégrale de sa vitesse :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(t) dt$$

où $V_\gamma = \|\dot{\gamma}(t)\|$.

Exemple 6.2

1) Il est clair que si la vitesse est constante : $V_\gamma(t) \equiv v$, alors on a

$$\ell(\gamma) = v \cdot (b - a).$$

Ainsi, la longueur d'un chemin parcouru à vitesse constante est égale à la vitesse fois le temps de parcours :

$$\text{longueur} = \text{vitesse} \times \text{temps}.$$

2) Comme cas particulier, nous avons le segment $[p, q]$ paramétré par

$$\delta(t) = (p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_n + t(q_n - p_n)), \text{ avec } t \in [0, 1].$$

On a vu que $V_\delta(t) = \|\vec{p\dot{q}}\| = \|q - p\|$ et donc

$$\ell(\delta) = \|q - p\|.$$

3) L'arc de cercle de centre p et rayon r dans \mathbb{R}^2 est paramétré par $c(\theta) = (p_1 + r \cos(\theta), p_2 + r \sin(\theta))$, où θ varie de θ_0 à θ_1 . La vitesse de cette courbe est constante : $V_c(\theta) = r$, et donc

$$\ell(c) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} V_c d\theta = r(\theta_1 - \theta_0).$$

On a donc montré que la longueur d'un arc de cercle est égale au produit du rayon par l'angle qui sous-tend l'arc.

4) La longueur du graphe $\gamma_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$\ell(\gamma_f) = \int_a^b V_\gamma(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Voyons à présent quelques propriétés importantes de la longueur.

Proposition 6.4 Si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un arc de courbe de classe C^1 , alors $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est aussi de classe C^1 et

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma).$$

PREUVE. Il suffit de vérifier que les deux courbes ont la même vitesse.

On sait que l'isométrie g est de la forme $g(x) = Ax + \mathbf{b}$, où \mathbf{b} est un vecteur et A une matrice orthogonale. On a donc $\tilde{\gamma}(u) = A\gamma(u) + \mathbf{b}$, et, par la règle de Leibniz,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(u) = \dot{A}\gamma + A\dot{\gamma}(u) + \dot{\mathbf{b}} = A\dot{\gamma}(u)$$

puisque A et \mathbf{b} sont constantes. Comme A est une matrice orthogonale, on a

$$V_{\tilde{\gamma}}(u) = \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| = \|A\dot{\gamma}(u)\| = \|\dot{\gamma}(u)\| = V_\gamma(u).$$

□

Proposition 6.5 (additivité de la longueur) Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et $c \in [a, b]$. Notons $\beta := \alpha|_{[a, c]} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma := \alpha|_{[c, b]} : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ les restrictions de α aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. Alors

$$\ell(\alpha) = \ell(\beta) + \ell(\gamma).$$

PREUVE. Cette proposition découle de la propriété correspondante de l'intégrale, nous laissons le lecteur compléter les détails de la preuve. \square

Proposition 6.6 Pour tout arc de courbe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 on a

$$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq \ell(\alpha).$$

Cette proposition dit en d'autres termes que *le plus court chemin reliant deux points est le segment de droite*.

PREUVE. Si $\alpha(b) = \alpha(a)$ il n'y a rien à montrer. Sinon on pose $\mathbf{w} := \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\|\alpha(b) - \alpha(a)\|}$ et on introduit la fonction

$$f(u) := \langle \alpha(u) - \alpha(a), \mathbf{w} \rangle.$$

Par la règle de Leibniz, on a

$$\dot{f}(u) = \frac{df}{du} = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha(u) - \alpha(a), \dot{\mathbf{w}} \rangle = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle,$$

car $\dot{\mathbf{w}} = 0$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\dot{f}(u) = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle \leq \|\dot{\alpha}(u)\| \|\mathbf{w}\| = \|\dot{\alpha}(u)\| = V_\alpha(u)$$

(car $\|\mathbf{w}\| = 1$). On a donc

$$\begin{aligned} d(\alpha(a), \alpha(b)) &= \|\alpha(b) - \alpha(a)\| \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b \dot{f}(u) du \\ &\leq \int_a^b V_\alpha(u) du = \ell(\alpha). \end{aligned}$$

\square

Remarque. En utilisant que l'inégalité de Cauchy-Schwartz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs impliqués sont colinéaires, on voit que le raisonnement montre aussi que $\ell(\alpha) = d(\alpha(a), \alpha(b))$ si et seulement si $\dot{\alpha}(u)$ est un multiple positif de \mathbf{w} pour tout u et donc que α est une paramétrisation

du segment $[\alpha(a), \alpha(b)]$. On a ainsi démontré que *le segment de droites entre deux points est le chemin le plus court reliant ces deux points*.

Définition. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $u_0 \in I$ une valeur du paramètre. L'*abscisse curviligne* sur α correspondant au *point initial* $p_0 = \alpha(u_0)$ est la fonction $s_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$s_\alpha(u) = \int_{u_0}^u V_\alpha(\tau) d\tau.$$

L'abscisse curviligne mesure donc la longueur du chemin parcouru sur la courbe depuis le point initial, elle est négative avant le point initial et positive après :

$$s_\alpha(u) = \begin{cases} \ell(\alpha|_{[u_0, u]}) & \text{si } u \geq u_0 \\ -\ell(\alpha|_{[u, u_0]}) & \text{si } u \leq u_0. \end{cases}$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons $s(u)$ au lieu de $s_\alpha(u)$ l'abscisse curviligne.

6.5 Changement de paramétrage d'une courbe

La notion de courbe que nous avons introduite plus haut est une notion *cinématique*³, i.e. fondée sur la notion de paramétrage. Il est naturel, d'un point de vue géométrique, d'admettre qu'une « même » courbe puisse avoir plusieurs paramétrages distincts.

Définition. Soit $\alpha(t)$ ($t \in I$) une courbe paramétrée. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ ($u \in J$) est une *reparamétrage* de α s'il existe une bijection

$$h : I \rightarrow J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

- a) h est continûment différentiable ;
- b) $h'(t) > 0$ quel que soit $t \in I$;
- c) $\alpha = \beta \circ h$.

Observons que les deux courbes ont alors la même trace $\alpha(I) = \beta(J)$. Les vecteurs vitesses sont reliés par

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{du} \frac{du}{dt} = h'(t) \frac{d\beta}{du} \quad (6.1)$$

et les vitesses par

$$V_\alpha(t) = h'(t) V_\beta(u).$$

3. Le mot *cinématique* vient du grec *κίνησις*, qui signifie « mouvement ».

En particulier, comme $\frac{du}{dt} = h'(t) \neq 0$, on voit que les courbes α et β ont les mêmes points singuliers.

Les formules ci-dessus montrent en particulier que lorsqu'on reparamétrise une courbe, celle-ci ne change pas de sens de parcours (car les vecteurs vitesses des deux courbes ont même direction et même sens). On peut toutefois inverser le sens de parcours d'une courbe par une procédure similaire à un reparamétrage.

Définition. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ ($u \in J$) est une *inversion*, ou un *anti-reparamétrage*, de la courbe $\alpha(t)$ ($t \in I$) s'il existe une bijection

$$h : I \rightarrow J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

- a) h est continûment différentiable ;
- b) $h'(t) < 0$ quel que soit $t \in I$;
- c) $\alpha = \beta \circ h$.

Voici un exemple simple : considérons les courbes du plan \mathbb{R}^2

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (0 < \theta < \pi)$$

et

$$\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), \quad (-1 < x < 1).$$

Ces deux courbes ont la même trace, qui est le demi-cercle unité :

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}.$$

La fonction $h : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ définie par $h(\theta) = x = \cos(\theta)$ fait le lien entre les deux paramétrages car

$$\gamma(h(\theta)) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \alpha(\theta).$$

Comme $h'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) < 0$, on voit que la courbe α est une inversion de γ .

Observons par ailleurs que si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, alors $h'(\theta) = 0$. L'inversion h cesse d'être admissible aux extrémités de l'intervalle. Cela correspond au fait que la vitesse de γ

$$V_\gamma(x) = \left\| \frac{d\gamma}{dx} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

tend vers l'infini lorsque $x \rightarrow \pm 1$.

6.6 Quantités géométriques et quantités cinématiques

Définition. Une quantité ou une notion attachée à une courbe est dite *géométrique* si elle est invariante par rapport aux changements de paramètre, et elle est dite *cinématique* dans le cas contraire.

Par exemple, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques alors que la notion de point singulier, de point régulier et de direction tangente sont des notions géométriques.

Lemme 6.7 *Le vecteur tangent $\mathbf{T}(\alpha, t)$ est une quantité géométrique.*

PREUVE. Cette affirmation est géométriquement évidente, puisque \mathbf{T} est un champ de vecteurs unitaire indiquant la direction de la courbe. Voyons tout de même une preuve formelle de ce lemme :

Soit $\beta(u)$ ($u \in J$) un reparamétrage de la courbe α . Il existe alors une fonction $h : I \rightarrow J$ telle que $h'(t) > 0$ et $\alpha(t) = \beta(h(t))$. On sait que $V_\alpha(t) = V_\beta(u)h'(t)$, par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha, t) &= \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(h(t))}{dt} \\ &= \frac{h'(t)}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \mathbf{T}(\beta, u). \end{aligned}$$

□

La longueur d'une courbe est également une quantité géométrique ; plus généralement, nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.8 *Soient α et β deux courbes de classe C^1 . Si β est un reparamétrage ou une inversion de α , alors $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$.*

PREUVE. Considérons d'abord le cas où $\beta(u)$ ($a' \leq u \leq b'$) est un reparamétrage de la courbe $\alpha(t)$ ($a \leq t \leq b$) ; on a

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \int_{a'}^{b'} V_\beta(u) du = \int_a^b V_\beta(u) \frac{du}{dt} dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t) dt \\ &= \ell(\alpha). \end{aligned}$$

Dans le cas où $\beta(u)$ est une inversion de $\alpha(t)$, alors $\frac{du}{dt} < 0$ et on a

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \int_{a'}^{b'} V_\beta(u) du = \int_b^a V_\beta(u(t)) \frac{du}{dt} dt \\ &= - \int_b^a V_\alpha(t) dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t) dt \\ &= \ell(\alpha). \end{aligned}$$

□

Considérons par exemple l'arc du cercle unité compris entre les points $(1, 0)$ et (x_0, y_0) (où l'on suppose $y > 0$), alors la longueur de cet arc de cercle est donnée par

$$\ell = \theta = \text{Arcos}(x_0).$$

Si cette courbe est paramétrée comme un graphe, i.e. par $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, ($x_0 < x < 1$), alors la vitesse est $V_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et la longueur est donc donnée par

$$\ell = \int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

La proposition 6.8 nous permet de déduire du résultat précédent l'identité analytique :

$$\int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arcos}(x_0),$$

que nous avons obtenue (presque) sans aucun calcul, mais par un raisonnement purement géométrique.

6.7 Paramétrage naturel d'une courbe régulière

Théorème 6.9 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$ une valeur du paramètre. Alors il existe un unique reparamétrage $h : I \rightarrow J$, telle que $0 \in J$, $h(t_0) = 0$ et telle que $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit de vitesse 1 : $V_\beta(s) = 1$.

PREUVE. Montrons d'abord l'unicité de ce reparamétrage. On a vu plus haut (p. 230) que

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(s).$$

Comme $V_\beta(s) = 1$ et $h' > 0$, on a donc $h'(t) = V_\alpha(t)$ et comme $h(t_0) = 0$, on doit avoir

$$s = h(t) = \int_{t_0}^t V_\alpha(\tau) d\tau.$$

Ainsi $h(t)$ coïncide avec l'abscisse curviligne $s(t)$.

Pour montrer l'existence du reparamétrage, on *définit* à présent h par $h(t) = s(t) = \int_{t_0}^t V_\alpha(\tau) d\tau$ et l'intervalle J par $J = h(I)$. Alors $h(t_0) = 0$ et $h'(t) = V_\alpha(t)$. En utilisant la formule (6.1) de la page 230, on voit que la courbe $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie

$$V_\beta(s) = V_\alpha(t) \frac{1}{h'(t)} = 1.$$

□

Définition. On dit qu'une courbe régulière γ est *paramétrée naturellement* si sa vitesse vaut 1, i.e. si $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ pour tout s . Le théorème précédent nous dit que toute courbe régulière peut se reparamétriser de façon naturelle.

Dès qu'un point initial et un sens de parcours ont été choisis sur la courbe, le paramétrage naturel est unique et il est donné par l'abscisse curviligne.

Recette Pour trouver le paramétrage naturel d'une courbe α , il faut effectuer les opérations suivantes :

- 1) Identifier ou choisir le point initial (plus précisément le paramètre u_0 du point initial).
- 2) Calculer la vitesse $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$.
- 3) Intégrer V_α pour obtenir l'abscisse curviligne $s : s(u) = \int_{u_0}^u V_\alpha(\tau) d\tau$.
- 4) Inverser la relation $s = s(u)$ (i.e. exprimer u en fonction de $s : u = u(s)$).
- 5) On obtient alors le paramétrage naturel $\beta(s) = \alpha(u(s))$.

Exemple 6.3 La *chaînette* est la courbe plane paramétrée par $\alpha(u) = (u, \cosh u)$. Le vecteur vitesse est $\dot{\alpha}(u) = (1, \sinh(u))$, et donc

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \cosh(u).$$

L'abscisse curviligne depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$ est donnée par l'intégrale

$$s(u) = \int_0^u V_\alpha(t) dt = \int_0^u \cosh(t) dt = \sinh(u),$$

et on a donc

$$u(s) = \operatorname{argsh}(s) = \log(s + \sqrt{1 + s^2}).$$

Remarquons que $\cosh(u) = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \sqrt{1 + s^2}$. En substituant cette relation dans le paramétrage de α , on obtient le paramétrage naturel de la chaînette :

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) = (u(s), \cosh u(s)) = (\operatorname{argsh}(s), \sqrt{1 + s^2}).$$

On vérifie facilement que $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.

Les courbes pour lesquelles on peut effectivement calculer le paramétrage naturel sont plutôt rares ; mais cette notion joue un rôle théorique fondamental. Il faut en particulier se souvenir des relations suivantes qui relient le paramètre naturel s au paramètre donné u .

$$\boxed{ds = V(u)du \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{V(u)} \frac{d}{du}} \quad (6.2)$$

REMARQUE. L'abscisse curviligne joue un rôle fondamental en théorie des courbes, car c'est dans le paramétrage naturel que les relations fondamentales entre les différentes quantités géométriques liées à une courbe sont le plus clairement mises en évidence. Pour cette raison, les livres traitant de courbes choisissent souvent d'écrire les formules relativement à la seule abscisse curviligne. Nous n'avons pas fait ce choix et avons préféré écrire les formules par rapport à un paramètre général en raison de la difficulté pratique de calculer le paramétrage naturel pour la plupart des courbes. Nous invitons toutefois le lecteur à récrire lui-même les formules des prochains paragraphes dans le cas spécial d'une courbe paramétrée naturellement ; il constatera ainsi lui-même combien les formules et les calculs théoriques se simplifient.

6.8 Courbure d'une courbe de \mathbb{R}^n

Définition. Le *vecteur de courbure* d'une courbe régulière $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 est le champ de vecteurs défini par

$$\mathbf{K}(\alpha, t) := \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{T}(\alpha, t),$$

où $\mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\alpha(t)} \dot{\alpha}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe.

REMARQUE. Le corollaire 6.3 entraîne que le vecteur de courbure est toujours orthogonal au vecteur tangent :

$$\mathbf{K}(\alpha, t) \perp \mathbf{T}(\alpha, t).$$

On définit aussi la *courbure* de la courbe α ; c'est par définition la norme du vecteur de courbure :

$$\kappa(\alpha, t) := \|\mathbf{K}(\alpha, t)\|.$$

Il est facile de voir que la courbure d'une droite est nulle, voici un autre exemple simple.

Exemple 6.4 Un paramétrage d'un cercle de centre p et rayon r est donné par

$$c(\theta) = p + r \cos(\theta) \mathbf{u}_1 + r \sin(\theta) \mathbf{u}_2,$$

où $p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ est un repère orthonormé du plan contenant le cercle. On a

$$\dot{c}(\theta) = -r \sin(\theta) \mathbf{u}_1 + r \cos(\theta) \mathbf{u}_2,$$

donc $V_c(\theta) = r$ et $\mathbf{T}(c, \theta) = -\sin(\theta) \mathbf{u}_1 + \cos(\theta) \mathbf{u}_2$.

En dérivant le vecteur tangent, on a $\dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\cos(\theta) \mathbf{u}_1 - \sin(\theta) \mathbf{u}_2$, donc

$$\mathbf{K}(c, \theta) = \frac{1}{V_c(\theta)} \dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\frac{1}{r} (\cos(\theta) \mathbf{u}_1 + \sin(\theta) \mathbf{u}_2)$$

et donc

$$\kappa(c, \theta) = \|\mathbf{K}(c, \theta)\| = \frac{1}{r}.$$

La courbure du cercle est donc l'inverse de son rayon.

Remarquons aussi qu'on a la relation suivante exprimant le centre du cercle en fonction d'un point sur le cercle et de la courbure :

$$c(\theta) + r^2 \mathbf{K}(c, \theta) = p. \quad (6.3)$$

Théorème 6.10 *Le vecteur de courbure $\mathbf{K}(\alpha, t)$ est une quantité géométrique.*

PREUVE. Soit $\beta(u)$ ($u \in J$) un reparamétrage de α . Il existe alors une fonction $h : I \rightarrow J$ telle que $h'(t) > 0$ et $\alpha(t) = \beta(h(t))$. On sait déjà (voir le lemme 6.7) que

$$V_\alpha(t) = V_\beta(u) h'(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(\alpha, t) = \mathbf{T}(\beta, u),$$

avec $u = h(t)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, t) &= \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\beta(u) h'(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{T}(\alpha, t) \\ &= \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d}{du} \mathbf{T}(\beta, u) \\ &= \mathbf{K}(\beta, u). \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.11 *La courbure $\kappa(\alpha, t) = \|\mathbf{K}(\alpha, t)\|$ est également une quantité géométrique.*

□

Proposition 6.12 (Formule de l'accélération) *Le vecteur accélération d'une courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie*

$$\ddot{\gamma}(u) = (V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}(\gamma, u) + \dot{V}_\gamma(u) \mathbf{T}(\gamma, u). \quad (6.4)$$

PREUVE. Écrivons le vecteur vitesse sous la forme $\dot{\gamma}(u) = V_\gamma(u)\mathbf{T}(\gamma, u)$ et dérivons ce vecteur :

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}(u) &= \frac{d}{du}(V_\gamma(u)\mathbf{T}(\gamma, u)) = V_\gamma(u)\dot{\mathbf{T}}(\gamma, u) + \dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}(\gamma, u) \\ &= (V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}(\gamma, u) + \dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}(\gamma, u).\end{aligned}$$

□

On dit que $\dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}(\gamma, u)$ est l'*accélération tangentielle* et $(V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}(\gamma, u)$ est l'*accélération normale* de γ .

En mécanique, cette formule signifie que la force subie par une particule en mouvement est fonction de l'accélération tangentielle \dot{V}_γ et du carré de la vitesse multiplié par la courbure.

Corollaire 6.13 *Le vecteur de courbure d'une courbe régulière de classe C^2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par*

$$\mathbf{K}(\alpha, t) = \text{norm}_{\dot{\alpha}(t)} \left(\frac{\ddot{\alpha}(t)}{(V_\alpha(t))^2} \right).$$

Rappelons que $\text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ désigne la composante du vecteur \mathbf{b} qui est orthogonale à \mathbf{a} :

$$\text{norm}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

PREUVE. La proposition précédente nous permet d'écrire

$$\mathbf{K}(\alpha, t) = \frac{1}{(V_\alpha(t))^2} \left(\ddot{\alpha}(t) - \dot{V}_\alpha(t)\mathbf{T}(\alpha, t) \right).$$

Comme $\mathbf{T}(\alpha, t)$ est colinéaire à $\dot{\alpha}$, on a $\text{norm}_{\dot{\alpha}}(\mathbf{T}(\alpha, t)) = 0$. On sait d'autre part que $\mathbf{K}(\alpha, t) \perp \mathbf{T}(\alpha, t)$, donc

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\alpha, t) &= \text{norm}_{\dot{\alpha}}(\mathbf{K}(\alpha, t)) \\ &= \text{norm}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{1}{(V_\alpha(t))^2} \ddot{\alpha}(t) \right) - \text{norm}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\dot{V}_\alpha(t)}{(V_\alpha(t))^2} \mathbf{T}(\alpha, t) \right) \\ &= \text{norm}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{1}{(V_\alpha(t))^2} \ddot{\alpha}(t) \right).\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.14 *Si α est paramétrée naturellement, i.e. si $V_\alpha \equiv 1$, alors*

$$\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s).$$

PREUVE. Puisque $V_\alpha \equiv 1$, on a $\dot{V}_\alpha = 0$ et le corollaire se déduit immédiatement de la formule de l'accélération.

□

Proposition 6.15 *Une courbe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de courbure nulle si et seulement si c'est une droite ou un segment de droite (qui peut être paramétrée arbitrairement).*

PREUVE. On peut supposer grâce au théorème 6.9 que α est paramétré naturellement. Le corollaire précédent entraîne alors que $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s)$ et comme $\kappa(\alpha, s) = \|\mathbf{K}(\alpha, s)\| = 0$, on a donc $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{0}$. Le vecteur $\mathbf{v} := \dot{\alpha}$ est alors constant et on obtient donc en intégrant

$$\alpha(s) = p + s\mathbf{v}$$

où $p = \alpha(0)$. □

Énergie élastique d'une tige

Voici une première application physique de la courbure d'une courbe. Considérons une tige flexible et inextensible à laquelle est appliquée une force à chacune de ces extrémités. Cette tige se déformera et la loi de Hooke entraîne que l'énergie potentielle élastique correspondant à cette déformation est proportionnelle à l'intégrale du carré de sa courbure :

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L \kappa(s)^2 ds$$

où ε est une constante physique appelée le *module de Young*. Ce problème a été étudié par Euler en 1744.

6.9 Contact entre deux courbes

Définition. On dit que deux courbes de classe C^k

$$\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ayant le même paramètre $t \in I$ ont un *contact d'ordre k* en $t_0 \in I$ si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ et si leurs dérivées en t_0 coïncident jusqu'à l'ordre k :

$$\frac{d^m \alpha}{dt^m}(t_0) = \frac{d^m \beta}{dt^m}(t_0),$$

pour $m = 1, 2, \dots, k$.

Ainsi, deux courbes α, β ont un contact d'ordre 0 en t_0 si elles passent par le même point en t_0 , elles ont un contact d'ordre 1 si elles passent par le même point et elles ont le même vecteur vitesse en ce point :

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0).$$

Théorème 6.16 *Deux courbes α, β de classe C^2 ont un contact d'ordre 2 en t_0 si et seulement si elles passent par le même point et si elles ont le même vecteur vitesse et le même vecteur de courbure en ce point :*

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}(\alpha, t_0) = \mathbf{K}(\beta, t_0).$$

PREUVE. C'est une conséquence directe de la proposition 6.12. \square

Corollaire 6.17 *Deux cercles de \mathbb{R}^n parcourus à vitesse constante ont un contact d'ordre 2 si et seulement si ces deux cercles coïncident.*

PREUVE. Par le théorème précédent, les deux cercles ont le même vecteur de courbure, or on a vu avec l'exemple 6.4 que la courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon. Les deux cercles ont donc même rayon r . Mais on sait aussi par l'équation (6.3) que les deux cercles doivent avoir même centre. Ils ont aussi le même cercle osculateurs et sont donc contenu dans le même plan, par conséquent ils coïncident. \square

Théorème 6.18 *Soient $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes de \mathbb{R}^n de classe C^3 ayant un contact d'ordre 2 en t_0 alors :*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\alpha(t) - \beta(t)\|}{|t - t_0|^2} = 0.$$

PREUVE. La formule de Taylor d'ordre 2 appliquée à chaque composante de α entraîne que

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0) \frac{d\alpha}{dt}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t_0) + R_\alpha(t)$$

où le reste $R_\alpha(t)$ vérifie la condition $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|R_\alpha(t)\|}{|t - t_0|^2} = 0$.

On a de même

$$\beta(t) = \beta(t_0) + (t - t_0) \frac{d\beta}{dt}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{d^2\beta}{dt^2}(t_0) + R_\beta(t)$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|R_\beta(t)\|}{|t - t_0|^2} = 0$.

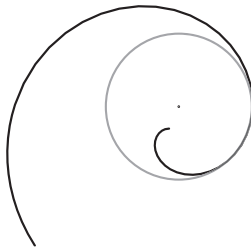
Mais par hypothèse $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0)$ et $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t_0) = \frac{d^2\beta}{dt^2}(t_0)$; par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\alpha(t) - \beta(t)\|}{|t - t_0|^2} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|R_\alpha(t) - R_\beta(t)\|}{|t - t_0|^2} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|R_\alpha(t)\|}{|t - t_0|^2} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|R_\beta(t)\|}{|t - t_0|^2} = 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 6.19 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^2 qui est birégulière en $t_0 \in I$. Alors il existe un cercle $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ayant un contact d'ordre 2 avec α en t_0 . Ce cercle est unique à un changement de paramètre près, son rayon est l'inverse de $\kappa(\alpha, t_0)$ et son centre est donné par

$$p = \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa(\alpha, t_0)^2} \mathbf{K}(\alpha, t_0). \quad (6.5)$$



Cercle osculateur.

Ce cercle s'appelle le *cercle osculateur* (ou *cercle de courbure*) à α en t_0 , c'est de tous les cercles celui qui approxime le mieux la courbe au voisinage de $\alpha(t_0)$. Son centre est le *centre de courbure* et son rayon est le *rayon de courbure* de α en t_0 , on le note

$$\rho(\alpha, t_0) = \frac{1}{\kappa(\alpha, t_0)}.$$

PREUVE. Supposons pour la preuve que la courbe α est paramétrée naturellement (et notons selon l'usage s le paramètre naturel). On supposera aussi que le point considéré correspond à la valeur $s = 0$ du paramètre.

Notons $\rho = \frac{1}{\|\mathbf{K}(\alpha, 0)\|}$, $\mathbf{T} := \mathbf{T}(\alpha, 0) = \dot{\alpha}(0)$ et $\mathbf{N} := \rho \mathbf{K}(\alpha, 0)$, puis posons

$$p := \alpha(0) + \rho \mathbf{N} \quad (6.6)$$

et considérons le cercle

$$\gamma(s) = p - \rho \cos(s) \mathbf{N} + \rho \sin(s) \mathbf{T}.$$

Il s'agit bien d'un cercle, puisque \mathbf{T} et \mathbf{N} sont orthogonaux et de longueur 1. Il est alors clair que $\gamma(0) = \alpha(0)$ et que $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{T} = \dot{\alpha}(0)$. On sait d'autre part que la courbure du cercle de rayon ρ est constante et égale à $\frac{1}{\rho} = \kappa(\alpha, 0)$. Le théorème 6.16 entraîne donc que la courbe α et le cercle γ ont un contact d'ordre 2 en $s = 0$.

L'unicité de ce cercle découle immédiatement du corollaire 6.17.

□

REMARQUE. Le plan osculateur à la courbe au point considéré admet le repère affine $\{\alpha(t_0), \mathbf{T}(\alpha, 0), \mathbf{K}(\alpha, 0)\}$. La preuve précédente montre que ce plan est le plan qui contient le cercle osculateur⁴.

6.10 Courbes dans \mathbb{R}^3

Proposition 6.20 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de classe C^2 dans \mathbb{R}^3 , alors on a

i)

$$\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u) = V_\gamma(u)^3 \mathbf{T}(\gamma, u) \times \mathbf{K}(\gamma, u),$$

ii)

$$\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\| = V_\gamma^3 \kappa(\gamma, u),$$

iii)

$$\mathbf{K}(\gamma, u) = \frac{(\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)) \times \dot{\gamma}(u)}{(V_\gamma(u))^4}.$$

PREUVE

(i) En utilisant $\dot{\gamma} = V_\gamma \cdot \mathbf{T}$ et la formule de l'accélération (6.12), on obtient

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (V_\gamma \cdot \mathbf{T}) \times (V_\gamma^2 \cdot \mathbf{K} + \dot{V}_\gamma \cdot \mathbf{T}) = V_\gamma^3 \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{K}.$$

(ii) On sait que $\mathbf{T} \perp \mathbf{K}$, donc

$$\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\| = V_\gamma^3 \cdot \|\mathbf{T} \times \mathbf{K}\| = V_\gamma^3 \|\mathbf{T}\| \|\mathbf{K}\| = V_\gamma^3 \cdot \kappa(\gamma, u).$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)) \times \dot{\gamma}(u) &= V_\gamma^4 \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{K}) \times \mathbf{T} \\ &= V_\gamma^4 \cdot (\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{K} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{K} \rangle \mathbf{T}) \\ &= V_\gamma^4 \cdot \mathbf{K}. \end{aligned}$$

□

Repère de Frenet

Définition. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de courbe birégulier de classe C^2 . Le *repère de Frenet* de γ est le repère mobile $\{\gamma(u), \mathbf{T}(\gamma, u), \mathbf{N}(\gamma, u), \mathbf{B}(\gamma, u)\}$ défini par

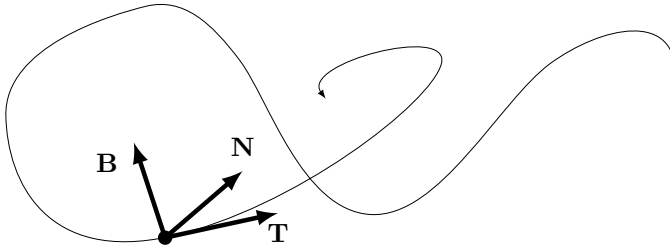
$$\mathbf{T}(\gamma, u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}, \quad \mathbf{B}(\gamma, u) = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}$$

et

$$\mathbf{N}(\gamma, u) = \mathbf{B}(\gamma, u) \times \mathbf{T}(\gamma, u).$$

4. Le terme *osculateur* nous vient du latin et signifie *embrasser* : le cercle osculateur embrasse la courbe au point de contact.

Le repère de Frenet⁵ est un repère mobile (les trois vecteurs sont des champs qui dépendent du paramètre u), il est orthonormé et direct. Il suit la courbe en ce sens que la premier vecteur de ce repère est toujours tangent à celle-ci.



Le champ $\mathbf{T}(\gamma, u)$ s'appelle le *vecteur tangent* à la courbe, $\mathbf{N}(\gamma, u)$ est le *vecteur normal principal* et $\mathbf{B}(\gamma, u)$ est le *vecteur binormal*.

Rappelons que le plan passant par $\gamma(u)$ de directions $\mathbf{T}(\gamma, u)$ et $\mathbf{N}(\gamma, u)$ est le *plan osculateur*. Le plan de directions $\mathbf{B}(\gamma, u)$ et $\mathbf{N}(\gamma, u)$ s'appelle le *plan normal* et le plan de directions $\mathbf{T}(\gamma, u)$ et $\mathbf{B}(\gamma, u)$ est le *plan rectifiant*.

Lemme 6.21 *On a*

$$\frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\mathbf{T}}(u) = \mathbf{K}(u) = \kappa(u) \mathbf{N}(u).$$

PREUVE. La proposition 6.20 (iii) nous dit que \mathbf{K} est un multiple positif de $(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}$. Par définition, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ est aussi un multiple positif de ce vecteur. Comme $\|\mathbf{N}\| = 1$, on a donc

$$\mathbf{K} = \|\mathbf{K}\| \cdot \mathbf{N} = \kappa \mathbf{N}.$$

L'identité $\dot{\mathbf{T}}(u) = V_\gamma(u) \mathbf{K}$ est vraie par définition. □

Définition. La *torsion* d'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 et birégulière est la fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tau(u) := \frac{1}{V_\gamma(u)} \langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{N}}(u) \rangle.$$

Remarquons qu'on a $\mathbf{B}(u) = \mathbf{T}(u) \times \mathbf{N}(u)$, donc

$$\tau(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \left[\mathbf{T}(u), \mathbf{N}(u), \dot{\mathbf{N}}(u) \right].$$

5. Jean Frédéric Frenet, mathématicien et astronome français 1816-1900.

Lemme 6.22 *La torsion peut aussi s'écrire*

$$\tau = -\frac{\langle \dot{\mathbf{B}}, \mathbf{N} \rangle}{V_\gamma}.$$

PREUVE. Comme $\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle \equiv 0$, on a par la règle de Leibniz

$$0 = \frac{d}{du} \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = \langle \dot{\mathbf{B}}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{N}} \rangle.$$

Par conséquent $\langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{N}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{B}}, \mathbf{N} \rangle$ et donc $\tau = \frac{1}{V_\gamma} \langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{N}} \rangle = -\frac{1}{V_\gamma} \langle \dot{\mathbf{B}}, \mathbf{N} \rangle$. □

Théorème 6.23 (Formules de Serret-Frenet) *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de courbe de classe C^3 birégulier. Alors la variation du repère de Frenet est donnée par les formules*

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\gamma(u)} \frac{d}{du} \mathbf{T}(u) &= \kappa(u) \mathbf{N}(u); \\ \frac{1}{V_\gamma(u)} \frac{d}{du} \mathbf{N}(u) &= -\kappa(u) \mathbf{T}(u) + \tau(u) \mathbf{B}(u); \\ \frac{1}{V_\gamma(u)} \frac{d}{du} \mathbf{B}(u) &= -\tau(u) \mathbf{N}(u). \end{aligned}$$

PREUVE. On a vu au lemme 6.21 que $\dot{\mathbf{T}}(u) = V_\gamma(u) \mathbf{K}(u) = V_\gamma(u) \kappa(u) \mathbf{N}(u)$, la première formule de Serret-Frenet est donc déjà démontrée.

Pour démontrer la troisième formule, on observe d'abord que, grâce à la règle de Leibniz, on a

$$\frac{d}{du} (\mathbf{B}(u)) = \frac{d}{du} (\mathbf{T}(u) \times \mathbf{N}(u)) = \underbrace{\dot{\mathbf{T}}(u) \times \mathbf{N}(u)}_{=0} + \mathbf{T}(u) \times \dot{\mathbf{N}}(u) = \mathbf{T}(u) \times \dot{\mathbf{N}}(u);$$

en particulier $\dot{\mathbf{B}}(u) \perp \mathbf{T}(u)$. Comme d'autre part on a $\|\mathbf{B}(u)\| = 1$, on sait que $\dot{\mathbf{B}}(u) \perp \mathbf{B}(u)$. Donc $\dot{\mathbf{B}}(u)$ est colinéaire à $\mathbf{N}(u)$ et on a grâce au lemme précédent

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}(u) &= \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{N}(u) \rangle \mathbf{N}(u) \\ &= -(V_\gamma(u) \tau(u)) \mathbf{N}(u), \end{aligned}$$

ce qui entraîne la troisième formule.

La seconde formule de Serret-Frenet est une conséquence des deux autres :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= \frac{d}{du} (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{T} \\ &= \kappa V \mathbf{B} \times \mathbf{N} - \tau V \mathbf{N} \times \mathbf{T} \\ &= -\kappa V \mathbf{T} + \tau V \mathbf{B} \end{aligned}$$

car $\mathbf{B} \times \mathbf{N} = -\mathbf{T}$ et $\mathbf{N} \times \mathbf{T} = -\mathbf{B}$.

Le théorème est démontré. \square

Corollaire 6.24 (Formule de Darboux) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière. On note

$$\mathbf{D}(\gamma, u) := \tau(\gamma, u)\mathbf{T}(\gamma, u) + \kappa(\gamma, u)\mathbf{B}(\gamma, u). \quad (6.7)$$

Alors pour tout champ de vecteurs \mathbf{A} le long de γ s'écrivant

$$\mathbf{A}(u) = a_1(u)\mathbf{T}(u) + a_2(u)\mathbf{N}(u) + a_3(u)\mathbf{B}(u),$$

on a

$$\frac{1}{V} \frac{d}{du} \mathbf{A} = \frac{1}{V} (\dot{a}_1 \mathbf{T} + \dot{a}_2 \mathbf{N} + \dot{a}_3 \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

Nous laissons la preuve en exercice. \square

Définition. Le champ $\mathbf{D}(\gamma, u)$ défini par (6.7) s'appelle le *vecteur de Darboux* de la courbe γ .

REMARQUE. Les formules de Serret-Frenet expriment que la vitesse de rotation du repère mobile de Frenet se calcule à partir de la courbure et de la torsion de la courbe. Elles nous donnent donc une interprétation cinématique de la torsion et de la courbure.

On verra au théorème 6.29 que ces deux quantités déterminent complètement la géométrie d'une courbe, par conséquent les formules de Serret-Frenet contrôlent toute la théorie des courbes.

La formule de Darboux est non seulement un corollaire des formules de Serret-Frenet, mais elle est en réalité équivalente. Elle possède une interprétation en cinématique du solide indéformable : le vecteur de Darboux mesure l'axe instantané de rotation d'un corps rigide qui se déplacerait de façon solidaire avec le repère de Frenet d'une courbe.

Variation de l'angle et courbure

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 paramétrée naturellement. Notons

$$\varphi(s_0, s) := \angle(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s))$$

l'angle entre $\mathbf{T}(s_0)$ et $\mathbf{T}(s)$ (où $s_0, s \in I$). On a donc $\cos \varphi(s_0, s) = \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s) \rangle$ et la dérivée de cet angle est donnée par

$$-(\sin \varphi(s_0, s)) \frac{d}{ds} \varphi(s_0, s) = \langle \mathbf{T}(s_0), \dot{\mathbf{T}}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s) \rangle.$$

Lorsque $s \rightarrow s_0$, les deux termes de cette égalité tendent vers 0 ; pour obtenir une information utile, il faut dériver encore une fois cette égalité :

$$-(\cos \varphi(s_0, s)) \left(\frac{d}{ds} \varphi(s_0, s) \right)^2 - (\sin \varphi(s_0, s)) \frac{d^2}{ds^2} \varphi(s_0, s) = \kappa(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \dot{\mathbf{N}}(s) \rangle + \dot{\kappa}(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s) \rangle.$$

Mais comme $V_\gamma = 1$, la seconde formule de Serret-Frenet nous dit que $\dot{\mathbf{N}}(s) = -\kappa \mathbf{T}(s) + \tau \mathbf{B}(s)$, donc

$$-(\cos \varphi(s_0, s)) \left(\frac{d}{ds} \varphi(s_0, s) \right)^2 = -\kappa^2(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s) \rangle + \tau(s) \kappa(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{B}(s) \rangle + \dot{\kappa}(s) \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s) \rangle + (\sin \varphi(s_0, s)) \frac{d^2}{ds^2} \varphi(s_0, s).$$

En faisant tendre $s \rightarrow s_0$, on obtient $\left(\frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \varphi(s_0, s) \right)^2 = \kappa^2(s_0)$.

On a ainsi montré que *la courbure est la valeur absolue de la dérivée de l'angle* :

$$\kappa(s_0) = \left| \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \varphi(s_0, s) \right|$$

La proposition suivante est utile pour calculer la torsion d'une courbe.

Proposition 6.25 *La torsion d'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birégulière de classe C^3 est donnée par*

$$\tau(u) = \frac{[\dot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}(u), \ddot{\gamma}'(u)]}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|^2} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}']}{\kappa^2(u) V_\gamma^6(u)}.$$

Pour prouver cette formule, nous avons d'abord besoin d'exprimer la troisième dérivée d'une courbe dans le repère de Frenet.

Lemme 6.26 *La troisième dérivée d'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 birégulière est donnée par*

$$\ddot{\gamma} = (\ddot{V} - V^3 \kappa^2) \mathbf{T} + (3V \dot{V} \kappa + V^2 \dot{\kappa}) \mathbf{N} + V^3 \kappa \tau \mathbf{B}.$$

PREUVE DU LEMME. En dérivant la relation

$$\ddot{\gamma} = \dot{V} \mathbf{T} + V^2 \kappa \mathbf{N},$$

on obtient

$$\ddot{\gamma} = \ddot{V} \mathbf{T} + \dot{V} \dot{\mathbf{T}} + 2V \dot{V} \kappa \mathbf{N} + V^2 \dot{\kappa} \mathbf{N} + V^2 \kappa \dot{\mathbf{N}}.$$

En utilisant les formules de Serret-Frenet : $\dot{\mathbf{T}} = V\kappa\mathbf{N}$ et $\dot{\mathbf{N}} = V(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$, on a

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} &= \ddot{V}\mathbf{T} + \dot{V}V\kappa\mathbf{N} + 2V\dot{V}\kappa\mathbf{N} + V^2\dot{\kappa}\mathbf{N} + V^2\kappa V(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ &= (\ddot{V} - V^3\kappa^2)\mathbf{T} + (3V\dot{V}\kappa + V^2\dot{\kappa})\mathbf{N} + V^3\kappa\tau\mathbf{B}.\end{aligned}$$

□

PREUVE DE LA PROPOSITION 6.25. Le lemme précédent entraîne que $\langle \mathbf{B}, \ddot{\gamma} \rangle = V^3\kappa\tau$. Comme $\mathbf{B}(\gamma, u) = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}$, on a donc

$$\tau(u) = \frac{\langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{V^3\kappa \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}.$$

La proposition est donc démontrée puisque $\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \kappa V^3$ par la proposition 6.20.

□

REMARQUE. La proposition 6.25 nous permet aussi d'écrire la torsion sous la forme

$$\tau(u) = \frac{\langle \mathbf{B}, \ddot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}.$$

Exemple 6.5 (L'hélice circulaire)

Rappelons que l'hélice circulaire est la courbe $\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), b u)$. On calcule facilement les dérivées

$$\begin{aligned}\gamma(u) &= (a \cos u, a \sin u, b u) \\ \dot{\gamma}(u) &= (-a \sin u, a \cos u, b) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(-\cos u, -\sin u, 0) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(\sin u, -\cos u, 0),\end{aligned}$$

et la vitesse est la constante $c := V_\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le repère de Frenet est donc

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{1}{c}(-a \sin(u), a \cos u, b) \\ \mathbf{N} &= -(\cos u, \sin u, 0) \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c}(b \sin u, -b \cos u, a).\end{aligned}$$

La courbure et la torsion sont donc données par

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma}\|}{c^2} = \frac{a}{c^2}, \quad \tau = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}']}{(ac)^2} = \frac{b}{c^2}.$$

Vérifions la deuxième formule de Frenet dans ce cas :

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{N}}{du} = \frac{1}{c} (\sin u, -\cos u, 0) = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}.$$

L'interprétation géométrique de la torsion peut paraître mystérieuse, les résultats qui suivent nous aideront à en saisir la signification.

Proposition 6.27 *Une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 birégulière est située dans un plan si et seulement si $\tau(\gamma, u) = 0$ pour tout $u \in I$.*

PREUVE. Il est clair que si γ est située dans un plan, alors les vecteurs $\dot{\gamma}(u)$, $\ddot{\gamma}(u)$ et $\dddot{\gamma}(u)$ sont linéairement dépendants et donc $\tau(\gamma, u) = 0$ par la proposition 6.25.

Réciproquement, supposons $\tau(u) \equiv 0$, alors par la troisième formule de Frenet, le vecteur $\mathbf{B}(u) = \mathbf{B}$ est constant. Posons

$$h(u) := \langle \gamma(u) - \gamma(u_0), \mathbf{B} \rangle,$$

et remarquons que

$$\frac{dh}{du} := \langle \dot{\gamma}(u), \mathbf{B} \rangle = V_\gamma(u) \langle \mathbf{T}(u), \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Par conséquent h est constante, et comme $h(u_0) = 0$, la fonction h est identiquement nulle, ce qui montre que la courbe γ est contenue dans le plan d'équation

$$\langle \mathbf{x} - \gamma(u_0), \mathbf{B} \rangle = 0,$$

c'est-à-dire le plan orthogonal à \mathbf{B} passant par $\gamma(u_0)$. □

REMARQUE. Le résultat précédent nous dit qu'une courbe de torsion nulle reste dans son plan osculateur. Cela suggère que la torsion mesure *la vitesse selon laquelle une courbe gauche s'éloigne de son plan osculateur* (voir par exemple [7, §17.6]).

Cette interprétation n'est pas correcte : si $\gamma(s)$ est une courbe birégulière paramétrée naturellement et si $h(s)$ est la distance entre $\gamma(s)$ et le plan osculateur en $\gamma(0)$, alors on a $h'(0) = 0$. On a d'ailleurs aussi $h''(0) = 0$. L'influence de la torsion n'apparaît que dans la troisième dérivée de cette distance : on a

$$h'''(0) = \kappa(0)\tau(0).$$

PREUVE. Pour le voir, écrivons les premières dérivées de γ dans le repère de Frenet, on a

$$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{T}(s), \quad \ddot{\gamma}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$

et par le lemme 6.26, on a aussi

$$\ddot{\gamma}(s) = -\kappa^2 \mathbf{T}(s) + \dot{\kappa}(s) \mathbf{N}(s) + \kappa(s) \tau(s) \mathbf{B}(s).$$

On a clairement $h(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(0), \mathbf{B}_0 \rangle$, où $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(0)$ est le vecteur binormal à la courbe γ en $s = 0$ (donc \mathbf{B}_0 est un vecteur unitaire constant, il est orthogonal au plan osculateur en $\gamma(0)$). On a donc

$$h'(0) = \langle \dot{\gamma}(s), \mathbf{B}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}(0), \mathbf{B}_0 \rangle = 0,$$

$$h''(0) = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{B}_0 \rangle = \langle \kappa(0) \mathbf{N}(0), \mathbf{B}_0 \rangle = 0,$$

et

$$h'''(0) = \langle \ddot{\gamma}(s), \mathbf{B}_0 \rangle = \langle -\kappa^2 \mathbf{T}(0) + \dot{\kappa}(0) \mathbf{N}(0) + \kappa(0) \tau(0) \mathbf{B}(0), \mathbf{B}_0 \rangle = \kappa(0) \tau(0).$$

□

Courbes de pente constante

Définition. On dit qu'une courbe de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 est de *pente constante* si elle est régulière et si son vecteur tangent fait un angle constant avec une direction fixe ; on dit aussi qu'une telle courbe est une *hélice généralisée*.

Théorème 6.28 Une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 birégulière est de pente constante si et seulement si le rapport

$$\frac{\tau(\gamma, u)}{\kappa(\gamma, u)}$$

est constant.

PREUVE. Supposons que $\lambda := \frac{\tau(\gamma, u)}{\kappa(\gamma, u)}$ est constant et considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{A}(u) := \lambda \mathbf{T}(\gamma, u) + \mathbf{B}(\gamma, u) = \frac{1}{\kappa(\gamma, u)} \mathbf{D}(\gamma, u).$$

où $\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ est le vecteur de Darboux. Par le corollaire 6.24, on a alors

$$\frac{1}{V} \frac{d}{du} \mathbf{A} = \mathbf{D} \times \mathbf{A} = \mathbf{D} \times \left(\frac{1}{\kappa} \mathbf{D} \right) = \mathbf{0}.$$

Le vecteur \mathbf{A} est donc constant et on a

$$\cos(\angle(\mathbf{T}(u), \mathbf{A})) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle}{\|\mathbf{T}(u)\| \|\mathbf{A}(u)\|} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

qui est une constante. Par conséquent $\gamma(u)$ est bien de pente constante.

Supposons à l'inverse que $\gamma(u)$ est de pente constante, i.e. \mathbf{T} fait un angle constant α avec un vecteur \mathbf{A} de longueur 1. Alors $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos(\alpha)$ est aussi constant, donc

$$0 = \frac{d}{du} \langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \left\langle \frac{d}{du} \mathbf{T}, \mathbf{A} \right\rangle = V\kappa \langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle,$$

en particulier $\mathbf{N} \perp \mathbf{A}$. Il en découle que

$$\mathbf{A} = \cos(\alpha)\mathbf{T} + \sin(\alpha)\mathbf{B}$$

et on peut à nouveau appliquer le corollaire 6.24 :

$$\mathbf{0} = \frac{1}{V} \frac{d}{du} \mathbf{A} = \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

Les vecteurs

$$\mathbf{A} = \cos(\alpha)\mathbf{T} + \sin(\alpha)\mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

sont donc proportionnels et donc

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot(\alpha) = \text{const.}$$

□

Théorème 6.29 *Si $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux courbes régulières de classes C^3 paramétrées naturellement et telles que $\kappa(\gamma_1, s) = \kappa(\gamma_2, s) \neq 0$ et $\tau(\gamma_1, s) = \tau(\gamma_2, s)$ pour tout $s \in I$, alors il existe un déplacement $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $F \circ \gamma_1 = \gamma_2$.*

PREUVE. Notons $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_1\}$ et $\{\mathbf{T}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}_2\}$ les repères de Frenet de γ_1 et γ_2 . Quitte à appliquer une isométrie sur la courbe γ_1 , on peut supposer que $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0) = p$ et que

$$\mathbf{T}_1(s_0) = \mathbf{T}_2(s_0), \quad \mathbf{N}_1(s_0) = \mathbf{N}_2(s_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_1(s_0) = \mathbf{B}_2(s_0).$$

Observons que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle \mathbf{T}_1(s), \mathbf{T}_2(s) \rangle \leq \|\mathbf{T}_1(s)\| \|\mathbf{T}_2(s)\| = 1$$

avec égalité si et seulement si $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}_2(s)$; de même pour $\langle \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \rangle$ et $\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle$. La fonction

$$f(s) := \langle \mathbf{T}_1(s), \mathbf{T}_2(s) \rangle + \langle \mathbf{N}_1(s), \mathbf{N}_2(s) \rangle + \langle \mathbf{B}_1(s), \mathbf{B}_2(s) \rangle$$

vérifie donc $f(s) \leq 3$ et $f(s) = 3$ si et seulement si

$$\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}_2(s), \quad \mathbf{N}_1(s) = \mathbf{N}_2(s) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_1(s) = \mathbf{B}_2(s).$$

Dérivons cette fonction, on a :

$$\frac{df}{ds} = \langle \dot{\mathbf{T}}_1, \mathbf{T}_2 \rangle + \langle \mathbf{T}_1, \dot{\mathbf{T}}_2 \rangle + \langle \dot{\mathbf{N}}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \langle \mathbf{N}_1, \dot{\mathbf{N}}_2 \rangle + \langle \dot{\mathbf{B}}_1, \mathbf{B}_2 \rangle + \langle \mathbf{B}_1, \dot{\mathbf{B}}_2 \rangle.$$

Mais puisque γ_1 et γ_2 ont la même courbure et la même torsion, on a par les formules de Serret-Frenet :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{T}}_1, \mathbf{T}_2 \rangle + \langle \mathbf{T}_1, \dot{\mathbf{T}}_2 \rangle &= \kappa \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{T}_2 \rangle + \kappa \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{N}_2 \rangle \\ \langle \dot{\mathbf{N}}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \langle \mathbf{N}_1, \dot{\mathbf{N}}_2 \rangle &= -\kappa \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{N}_2 \rangle - \kappa \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{T}_2 \rangle + \tau \langle \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + \tau \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_2 \rangle \\ \langle \dot{\mathbf{B}}_1, \mathbf{B}_2 \rangle + \langle \mathbf{B}_1, \dot{\mathbf{B}}_2 \rangle &= -\tau \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_2 \rangle - \tau \langle \mathbf{B}_1, \mathbf{N}_2 \rangle. \end{aligned}$$

En additionnant ces trois égalités, on trouve que

$$\frac{df}{ds} = 0$$

pour tout s . Ainsi $f(s)$ est constante et comme $f(s_0) = 3$ par hypothèse, on a $f(s) \equiv 3$ et donc en particulier $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}_2(s)$ pour tout s . Par conséquent

$$\gamma_1(s) = p + \int_{s_0}^s \mathbf{T}_1(u) du = p + \int_{s_0}^s \mathbf{T}_2(u) du = \gamma_2(s)$$

pour tout s . □

En particulier, toute courbe de \mathbb{R}^3 ayant courbure constante $\kappa > 0$ et torsion constante $\tau > 0$ est isométrique à une hélice.

Le *théorème fondamental* de la théorie des courbes de \mathbb{R}^3 dit que l'on peut prescrire arbitrairement la courbure et la torsion d'une courbe de \mathbb{R}^3 . Cette courbe est alors unique à un déplacement près par le théorème précédent. Citons le théorème fondamental sans démonstration⁶.

Théorème 6.30 *Si $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et si $\kappa(s) > 0$ pour tout $s \in I$, alors il existe une courbe $\gamma(s)$ de classe C^3 paramétrée naturellement et telle que*

$$\kappa(\gamma, s) = \kappa(s) \quad \text{et} \quad \tau(\gamma, s) = \tau(s)$$

pour tout s . Cette courbe est unique à un déplacement près.

6. On donnera plus loin (théorème 6.34) une preuve du théorème analogue pour les courbes planes.

6.11 Courbes dans un plan orienté

On considère une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dans le plan \mathbb{R}^2 muni de son orientation naturelle.

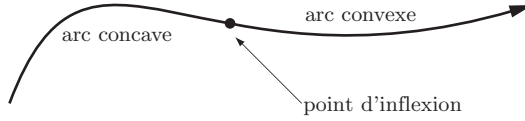
Définition. On dit qu'un arc $\gamma(t)$ ($a < t < b$) est *convexe* si $\{\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\}$ est une base d'orientation positive pour tout $t \in (a, b)$ et qu'il est *concave* si $\{\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\}$ est une base d'orientation négative pour tout $t \in (a, b)$. Un *point d'inflexion* est un point séparant un arc convexe d'un arc concave.

En utilisant le produit extérieur, on peut dire qu'un arc $\gamma(t)$ ($a < t < b$) est convexe si

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) > 0$$

et qu'il est concave si $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) < 0$ pour tout $t \in (a, b)$. Un point d'inflexion est un point où la fonction $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$ change de signe.

Un arc est donc convexe si son vecteur accélération se dirige vers la gauche du vecteur vitesse, ainsi, la courbe tourne à gauche (dans le sens positif). Sur un arc concave, c'est l'inverse.



Exemple 6.6 Supposons que γ soit le graphe de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. $\gamma(x) = (x, f(x))$. On a alors

$$\dot{\gamma}(x) \wedge \ddot{\gamma}(x) = \left(1, \frac{df}{dx}\right) \wedge \left(0, \frac{d^2f}{dx^2}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

et on voit que cette courbe est convexe lorsque $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ et concave lorsque $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$.

En utilisant les formules $\dot{\gamma}(t) = V_\gamma(t) \mathbf{T}(\gamma, t)$ et $\ddot{\gamma}(t) = V_\gamma^2(t) \mathbf{K}(\gamma, t) + \dot{V}_\gamma(t) \mathbf{T}(\gamma, t)$, on voit que

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= \left(V_\gamma(t) \mathbf{T}(\gamma, t)\right) \wedge \left(V_\gamma^2(t) \mathbf{K}(\gamma, t) + \dot{V}_\gamma(t) \mathbf{T}(\gamma, t)\right) \\ &= V_\gamma^3(t) \mathbf{T}(\gamma, t) \wedge \mathbf{K}(\gamma, t). \end{aligned}$$

Mais d'autre part \mathbf{T} et \mathbf{K} sont deux orthogonaux et $\|\mathbf{T}\| = 1$, on a

$$\mathbf{T}(\gamma, t) \wedge \mathbf{K}(\gamma, t) = \pm \|\mathbf{K}(\gamma, t)\| = \pm \kappa(\gamma, t).$$

On en déduit la formule

$$\kappa(\gamma, t) = |\mathbf{T}(\gamma, t) \wedge \mathbf{K}(\gamma, t)| = \frac{|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)|}{V_\gamma^3(t)}.$$

Cette formule nous suggère la définition suivante.

Définition. La *courbure orientée* d'une courbe plane $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 est définie par

$$k(\gamma, t) := \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{V_\gamma^3(t)}.$$

Il est alors clair qu'un arc de courbe est convexe si la courbure orientée est positive sur cet arc : $k > 0$, et concave si $k < 0$. Un point d'inflexion est un point où la courbure orientée change de signe.

La fonction angulaire

La fonction angulaire mesure l'inclinaison en chaque point d'une courbe (par rapport à la direction horizontale).

Définition. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. La *fonction angulaire* de la courbe γ (avec point initial $p = \gamma(u_0)$) est la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- a) φ est continue ;
- b) l'angle orienté entre $\dot{\gamma}(u)$ et $\dot{\gamma}(u_0)$ est égal à $\varphi(u)$ modulo 2π .

REMARQUE. Dans le concept de fonction angulaire d'une courbe plane, on n'identifie pas $\varphi(u)$ à $\varphi(u) + 2\pi$. Au contraire, le paramètre angulaire mesure le nombre de tours effectués (entre u_0 et u) par le vecteur tangent. Ce nombre peut être supérieur à 2π .

Le nombre $\varphi(b) - \varphi(a)$ est la *variation angulaire totale* de la courbe. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe périodique (i.e. une courbe fermée régulière), alors le nombre entier

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$$

s'appelle l'*indice*, le *degré* ou le *nombre de tours* de γ .

Lemme 6.31 Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction angulaire d'une courbe régulière $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Supposons qu'en $u = a$ on a $\varphi(u) = \angle(\dot{\gamma}(a); \mathbf{e}_1)$. Alors le vecteur tangent de cette courbe est donné par

$$\mathbf{T}(\gamma, u) = (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u))).$$

PREUVE. Cette formule est évidente, puisque φ (modulo 2π) mesure l'angle d'inclinaison du vecteur tangent \mathbf{T} . □

Corollaire 6.32 En tout point d'une courbe où la tangente n'est pas verticale, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\varphi).$$

□

Théorème 6.33 *La courbure orientée d'une courbe $\gamma(u) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^2 vérifie*

$$k(\gamma, u) = \frac{1}{V_\gamma} \frac{d\varphi}{du}.$$

PREUVE. On a par le lemme précédent

$$\dot{\gamma}(u) = V_\gamma(u) \mathbf{T}(\gamma, u) = V_\gamma(u) (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u))),$$

donc

$$\ddot{\gamma}(u) = \dot{V}_\gamma(u) (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u))) + V_\gamma(u) \dot{\varphi}(u) (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u))).$$

Par conséquent

$$\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u) = V_\gamma^2(u) \dot{\varphi}(u) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = V_\gamma^2(u) \dot{\varphi}(u)$$

et donc

$$k(\gamma, u) = \frac{\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u)}{V_\gamma^3} = \frac{\dot{\varphi}(u)}{V_\gamma}.$$

□

Lorsque l'on étudie une courbe dans un plan orienté, on redéfinit le repère de Frenet en tenant compte de l'orientation du plan.

Définition. Le *repère de Frenet* d'une courbe régulière $\gamma(u) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^1 dans le plan orienté est le repère mobile unitaire d'origine $\gamma(u)$ et formé par les deux vecteurs

$$\mathbf{T}(\gamma, u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u)\|}, \quad \mathbf{N}(\gamma, u) = \mathbf{J}(\mathbf{T}(\gamma, u)).$$

Il est clair d'après le lemme précédent que ce repère s'exprime en fonction de la fonction angulaire par

$$\mathbf{T}(\gamma, u) = (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u))), \quad \mathbf{N}(\gamma, u) = (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u))).$$

En dérivant ces deux champs de vecteurs et en utilisant le théorème précédent, on trouve immédiatement les formules suivantes.

Formules de Serret-Frenet pour une courbe plane

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\gamma} \frac{d}{du} \mathbf{T}(\gamma, u) &= k(\gamma, u) \mathbf{N}(\gamma, u) \\ \frac{1}{V_\gamma} \frac{d}{du} \mathbf{N}(\gamma, u) &= -k(\gamma, u) \mathbf{T}(\gamma, u). \end{aligned}$$

La chaînette

À titre d'application de la notion de fonction angulaire, nous allons résoudre le problème de statique suivant : *Décrire la forme d'équilibre d'un câble homogène suspendu, sachant que la seule force extérieure agissant est la gravité*⁷.

Cherchons la solution sous la forme d'un graphe $y = f(x)$ et supposons que $(0, 0)$ soit le point le plus bas de la courbe.

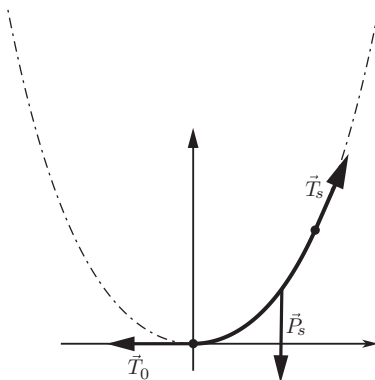
Soit s l'abscisse curviligne depuis $(0, 0)$ et posons :

$\varphi(s) :=$ paramètre angulaire

$\tau(s) :=$ tension du câble en s

$\rho :=$ densité linéaire de masse du câble

$g :=$ valeur du champ de gravitation.



Les forces en jeu sur un arc de longueur s sont le poids $\vec{P}_s = (0, -g\rho s)$, la tension $-\vec{T}_0 = (-\tau(0), 0)$ au point $(0, 0)$ et la tension $\vec{T}_s = \tau(s)(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ au point $(x(s), y(s))$.

À l'équilibre, la force résultante est nulle :

$$\vec{P}_s + \vec{T}_0 + \vec{T}_s = \vec{0},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \tau(s) \cos(\varphi) &= \tau(0) \\ \tau(s) \sin(\varphi) &= g\rho s. \end{cases}$$

7. Ce problème a été posé par Galilée (qui pensait à tort que la solution était une parabole) et par Jacques Bernoulli. Il a été résolu en 1691 par Gottfried Leibniz, Jean Bernoulli et Christiaan Huygens.

Posons $a := \frac{g\rho}{\tau(0)}$ et divisons la seconde équation par la première, on obtient

$$\operatorname{tg}(\varphi) = a s .$$

Dérivons cette égalité par rapport à x en utilisant les relations

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0 .$$

La solution de cette équation différentielle est

$$y(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - 1),$$

qui est l'équation de la chaînette.

Le diagramme de courbure

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^2 . Choisissons un point initial sur γ et un sens de parcours. Le *diagramme de courbure* de γ est la courbe dans un plan de coordonnées s, k donnée par

$$u \mapsto (s(u), k(u)),$$

où $s(u)$ est l'abscisse curviligne de γ correspondant aux choix du point initial et du sens de parcours, et k est la courbure orientée.

Le diagramme de courbure est toujours un graphe (c'est le graphe de la fonction courbure $k = k(s)$ exprimée à partir de l'abscisse curviligne).

Les éléments de la courbe γ que l'on peut facilement mettre en correspondance avec le diagramme de courbure sont :

- sa longueur $\ell(\gamma)$;
- le signe de la courbure;
- les points d'inflexions de γ (ce sont les points où $k(s)$ change de signe);
- les sommets de γ (i.e. les points où $\frac{dk}{du} = 0$).

D'autre part, l'aire $\int_0^\ell k(s)ds = \int_0^\ell d\varphi$ limitée par le diagramme de courbure correspond à la variation angulaire totale de la courbe.

Hormis la position de la courbe dans le plan, le diagramme de courbure contient toutes les informations géométriques sur une courbe.

Théorème 6.34 (Théorème fondamental de la théorie des courbes planes)

- a) Deux courbes qui ont même diagramme de courbure diffèrent par une isométrie directe du plan.
 a) Toute fonction continue $k : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ est le diagramme de courbure d'une courbe plane de classe C^2 .

PREUVE. Soit $k = k(s)$ la courbure orientée de γ . On sait que

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\varphi(s)) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = \sin(\varphi(s)),$$

où $\varphi(s)$ est la fonction angulaire de γ .

On sait en outre que $\frac{d\varphi}{ds} = k(s)$. Les trois fonctions $(x(s), y(s), \varphi(s))$ forment donc une solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos(\varphi) \\ \frac{dy}{ds} = \sin(\varphi) \\ \frac{d\varphi}{ds} = k(s) \end{cases}.$$

La courbe γ est donc déterminée à partir de la fonction $k(s)$ en résolvant ces équations.

Pour résoudre ce système, on calcule φ par intégration : $\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s k(\sigma)d\sigma$, puis on trouve $x(s)$ et $y(s)$ par une nouvelle intégration :

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\varphi(\sigma))d\sigma, \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin(\varphi(\sigma))d\sigma$$

les constantes x_0, y_0 , et φ_0 sont des constantes d'intégration et peuvent être choisies arbitrairement (ce sont les *conditions initiales* du système d'équations différentielles).

En changeant les valeurs de x_0 et y_0 , on modifie la courbe par une translation ; si l'on change φ_0 , alors la courbe γ subit une rotation. \square

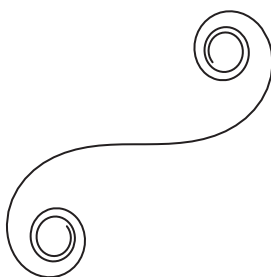
REMARQUE. La relation $k = k(s)$ entre l'abscisse curviligne et la courbure orientée s'appelle l'*équation intrinsèque* de la courbe. Elle contient la même information que le diagramme de courbure.

Exemple 6.7 Considérons la courbe dont le diagramme de courbure est une droite (i.e. l'équation intrinsèque est linéaire : $k(s) = ms + n$). Alors la fonction angulaire est donnée par

$$\varphi(s) = \int k(s) ds = \frac{m}{2}s^2 + ns + c,$$

la courbe est donc donnée par

$$x(s) = \int \cos\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right) ds, \quad y(s) = \int \sin\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right) ds.$$



Chlotoïde.

Ces intégrales s'appellent les *fonctions de Fresnel*. Elle ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions élémentaires.

Cette courbe s'appelle une *chlotoïde* ou *spirale de Cornu*, elle permet par exemple de passer d'une droite à un cercle sans discontinuité de la courbure. Pour cette raison, elle est utilisée dans la conception des tracés ferroviaires ou autoroutiers.

6.12 Courbes planes en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point P dans le plan euclidien sont définies ainsi : $r = \|\vec{OP}\|$ est la distance à l'origine et θ est l'angle entre \vec{OP} et l'axe Ox . En formules, cela donne

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctg}(y/x) \end{cases}.$$

L'angle θ est défini modulo 2π , c'est-à-dire qu'on ne fait aucune différence entre un angle θ et $\theta + 2k\pi$ lorsque k est un nombre entier :

$$\theta = \theta + 2k\pi.$$

Certaines courbes sont plus faciles à paramétrer en coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes.

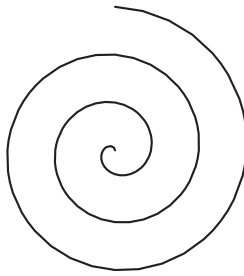
Exemple 6.8 Le cercle centré en 0 et de rayon a est paramétré en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} r(t) = a \\ \theta(t) = t. \end{cases}$$

Exemple 6.9 Soit f une fonction croissante. Alors la *spirale* f est la courbe

$$\begin{cases} r(t) = f(t) \\ \theta(t) = t. \end{cases}$$

Si $f(t) = at$, ($t > 0$), on a une *spirale linéaire* (aussi appelée *spirale d'Archimède*). Si $f(t) = e^t$, ($t > 0$), on a une spirale exponentielle (également appelée *spirale logarithmique*).



Spirale d'Archimède.

Il est souvent commode d'écrire le repère de Frenet d'une telle courbe à partir du repère tournant.

Définition. Le *repère tournant* est le repère mobile orthonormé direct dont la valeur au point de coordonnées polaires (r, θ) est

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

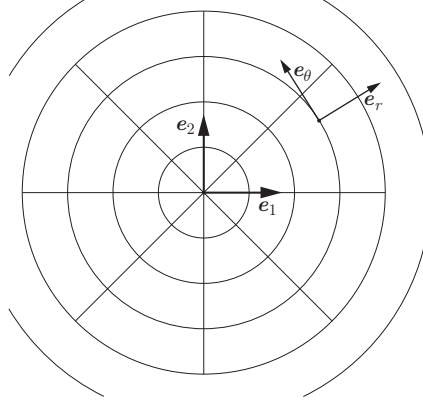
Remarquons que le repère tournant est adapté aux coordonnées polaires, puisque les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ sont tangents aux lignes de coordonnées.

Cherchons à exprimer le vecteur vitesse d'une courbe γ à partir du repère tournant. On sait que

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2.$$

Nous savons que $x = r \cos(\theta)$, donc on a

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta),$$



de même

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta).$$

D'autre part, le repère fixe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ s'exprime à partir du repère tournant via les formules

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos(\theta)\mathbf{e}_r - \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_2 &= \sin(\theta)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \dot{x} \mathbf{e}_1 + \dot{y} \mathbf{e}_2 \\ &= (\dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta)) (\cos(\theta)\mathbf{e}_r - \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta) \\ &\quad + (\dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta)) (\sin(\theta)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta) \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

Résumons ce résultat.

Proposition 6.35 Soit $\gamma : t \mapsto (r(t), \theta(t))$ une courbe de classe C^1 paramétrée en coordonnées polaires. Alors son vecteur vitesse est donné par

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta.$$

□

Corollaire 6.36 La vitesse d'une courbe $\gamma : t \mapsto (r(t), \theta(t))$ de classe C^1 est donnée par

$$V(t) = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}.$$

PREUVE. Le repère $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$ est un repère orthonormé, donc

$$V(t)^2 = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2.$$

□

À partir de ces formules, on calcule facilement le vecteur tangent :

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}.$$

Un simple calcul montre les relations

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r \quad (6.8)$$

que l'on peut interpréter en disant que le repère tournant tourne à vitesse constante 1. D'autre part, nous avons clairement

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (6.9)$$

On peut calculer l'accélération d'une courbe en coordonnées polaires.

Proposition 6.37 *Le vecteur accélération d'une courbe en coordonnées polaires est donné par*

$$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta,$$

et

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} = (r\dot{r}\ddot{\theta} + 2\dot{r}^2\dot{\theta}) - r\dot{\theta}(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r).$$

La preuve est un calcul basé sur la proposition 6.35 et les formules (6.8) et (6.9). \square

Corollaire 6.38 *La courbure d'une courbe en coordonnées polaires est donnée par*

$$k = \frac{r\dot{r}\ddot{\theta} + 2\dot{r}^2\dot{\theta} - \dot{\theta}r\ddot{r} + \dot{\theta}^3 r^2}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{3/2}}.$$

Lorsque la courbe est définie par la relation $r = f(\theta)$, on peut la paramétrer en coordonnées polaires par $t \mapsto (f(t), t)$ (i.e. $\theta = t$, $r = f(t)$), on a donc $\dot{\theta} = 1$ et $\ddot{\theta} = 0$. La formule précédente se réduit à

$$k = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}$$

où $\dot{r} = f'(t)$ et $\ddot{r} = f''(t)$.

6.13 Développante et développée

Considérons une courbe birégulière de classe C^3 dans le plan $\alpha(u) \in \mathbb{R}^2$ ($u \in I$). Notons $\beta(u)$ le centre de courbure de α correspondant au point $\alpha(u)$. Rappelons que ce centre de courbure est donné par la formule (6.6) :

$$\boxed{\beta(u) = \alpha(u) + \rho(u) \mathbf{N}_\alpha(u)} \quad (6.10)$$

où $\rho(u) = 1/k(\alpha, u)$ est le rayon de courbure orienté de α et $\mathbf{N}_\alpha(u)$ est le vecteur normal. On obtient ainsi une nouvelle courbe $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Définition. La courbe β est la *développée* (en anglais *evolute*) de α . La courbe α est une *développante* (en anglais *involute*) de β .

Étudions le vecteur vitesse de la développée β d'une courbe α (de classe C^3) paramétrée naturellement. On suppose donc que $u = s$ est l'abscisse curviligne de α ; en dérivant l'identité ci-dessus, on obtient :

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(s) + \dot{\rho}(s) \mathbf{N}_\alpha(s) + \rho(s) \dot{\mathbf{N}}_\alpha(s).$$

En utilisant la formule de Serret-Frenet (6.33), on a $\dot{\mathbf{N}}_\alpha = -k \mathbf{T}_\alpha$, et $\mathbf{T}_\alpha = \dot{\alpha}$. Comme $\rho = 1/k$, on voit que $\mathbf{T}_\alpha + \rho(s) \dot{\mathbf{N}}_\alpha = 0$, et donc

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\rho}(s) \mathbf{N}_\alpha(s).$$

En particulier, on voit que $\mathbf{N}_\alpha(s) = \pm \mathbf{T}_\beta(s)$ et $\|\dot{\beta}(s)\| = \dot{\rho}(s)$. De cette identité, on déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 6.39 (Théorème de Huygens⁸)

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^3 paramétrée naturellement et dont la courbure ne s'annule pas. Soit β sa développée.

- Les points singuliers de β sont les sommets de α , i.e. les points où $\dot{k}(s) = 0$.
- La tangente à β en $\beta(s)$ (en un point régulier) coïncide avec la normale à α en $\alpha(s)$.
- La distance entre $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ est égale à $|\rho(s)| : d(\alpha(s), \beta(s)) = |\rho(s)|$.
- L'abscisse curviligne \bar{s} sur la courbe β est donnée par $\bar{s} = \pm \rho(s) + \text{const.}$

Corollaire 6.40 Soit $\beta(\rho)$ une courbe de classe C^1 paramétrée naturellement. Alors toutes les développantes de β sont données par

$$\boxed{\alpha(\rho) = \beta(\rho) - (\rho + c) \dot{\beta}(\rho)} \quad (6.11)$$

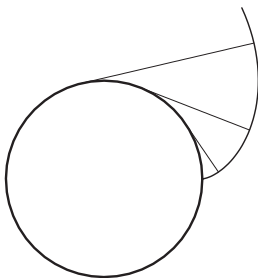
où c est une constante d'intégration.

8. Le Hollandais Christiaan Huygens 1629-1695 est avec Newton, Leibniz et les frères Bernoulli l'un des plus grands physiciens et mathématiciens de son époque.

Exemple 6.10 (développante d'un cercle)

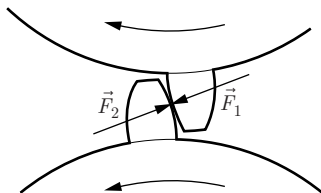
Considérons le paramétrage naturel du cercle unité : $\beta(\rho) = (\cos(\rho), \sin(\rho))$. Alors la développante de ce cercle passant par le point $(1, 0)$ est donnée par $\alpha(\rho) = \beta(\rho) - \rho \beta'(\rho)$, c'est-à-dire

$$\alpha(\rho) = (\cos(\rho) + \rho \sin(\rho), \sin(\rho) - \rho \cos(\rho)).$$



Développante d'un cercle.

Les parties 3 et 4 du théorème de Huygens nous donnent un procédé pour dessiner une développante de cercle. Prenons un cylindre sur lequel on enroule un fil pour faire un bobine. Puis posons le cylindre sur notre feuille de papier en le maintenant immobile. Attachons à l'extrémité libre du fil un crayon bien taillé, puis déroulons ce fil en le maintenant tendu : le crayon trace alors une nouvelle courbe qui est la développante du cercle formé par le cylindre.



Engrenage.

REMARQUE. Les dents d'un engrenage ont habituellement la forme d'une développante de cercle. La raison mécanique est la suivante : si l'on applique une force \mathbf{F} à la circonférence d'une roue fixée à un axe, alors cette force s'exprime dans le repère de Frenet :

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{T} + F_2 \mathbf{N}$$

Le travail utile durant un intervalle de temps dt effectué par cette force est fourni par la composante tangentielle de \mathbf{F} :

$$\text{Travail utile} = F_1 ds$$

(où ds est le déplacement de la circonférence durant le temps dt). La composante normale $F_2 ds$ est une énergie gaspillée qui se transforme en usure et engendre des vibrations.

Si les dents d'une roue dentée ont la forme d'une développante de cercle et si une force *normale* est exercée sur cette dent, alors, par le théorème de Huygens, la direction de cette force correspond à la *tangente* au cercle. Le travail utile exercé par cette force est donc maximal.

Ainsi, lorsque deux roues dentées d'un engrenage à forme de développante de cercle sont en contact, la force exercée par la roue motrice produit un travail utile maximal et une usure minimale.

6.14 Epicycloïdes

Considérons une roue de rayon r_2 roulant sur une roue fixe de rayon r_1 . On suppose que la roue mobile roule à l'extérieur de la roue fixe, sans glisser et que sa vitesse est constante.

Définition. La trajectoire d'un point p situé sur la circonférence de la roue mobile s'appelle une *épicycloïde*.

Pour trouver un paramétrage d'une épicycloïde, nous introduisons deux repères orthonormés, chacun centré sur le centre de l'une des roues.

À chaque instant t , nous avons donc un déplacement du plan $F(t)$ amenant le repère fixe sur le repère mobile. Ce déplacement s'écrit

$$F : \mathbf{x} \mapsto R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

où $R_\theta \in SO(2)$ est la matrice de rotation d'angle θ et \mathbf{b} est la partie translation du déplacement. Notons que \mathbf{b} et θ sont fonctions du temps.

Nous pouvons écrire ce déplacement en coordonnées homogènes (voir la section 5.9)

$$F = \begin{pmatrix} R_\theta & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la vitesse du mouvement de la roue mobile sur la roue fixe est constante, la vitesse angulaire $d\theta/dt$ est une constante. On peut démontrer que le fait que la roue mobile roule sans glisser sur la roue fixe entraîne la relation suivante, que nous admettons pour l'instant :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_1}{r_2} + 1. \quad (6.12)$$

D'autre part il est clair que $\mathbf{b}(t)$ est la position au temps t du centre de la roue mobile exprimée dans le repère fixe, par conséquent

$$\mathbf{b}(t) = r(\cos(t), \sin(t))$$

avec $r = r_1 + r_2$.

Nous avons par conséquent (en posant $\lambda = \frac{r}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} + 1$) et en utilisant le lemme 5.9 :

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) & r \cos(t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) & r \sin(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Pour paramétrer l'épicycloïde, il suffit d'appliquer la transformation $F(t)$ aux coordonnées d'un point p (situé sur la circonférence de la roue mobile) exprimées dans le repère mobile.

Prenons par exemple le point de contact entre les deux roues au temps $t = 0$, ses coordonnées dans le repère mobile sont $p = r_2(-1, 0)$, ou, en coordonnées homogènes,

$$p = \begin{pmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'épicycloïde est donc donnée en coordonnées homogènes par

$$\gamma(t) = F(t) \begin{pmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(t) - r_2 \cos(\lambda t) \\ r \sin(t) - r_2 \sin(\lambda t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

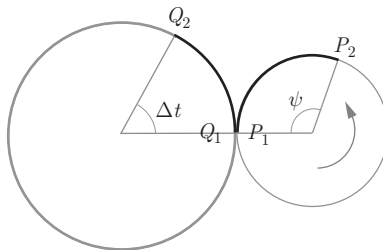
avec

$$r = r_1 + r_2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{r}{r_2}.$$

Ou, si l'on préfère une écriture cartésienne :

$$\gamma(t) = (r \cos(t) - r_2 \cos(\lambda t), r \sin(t) - r_2 \sin(\lambda t)).$$

Il reste à expliquer l'équation (6.12). Considérons pour cela le mouvement entre les instants t_1 et t_2 .



Au temps t_1 , le point P_1 de la roue mobile est en contact avec le point Q_1 de la roue fixe, et au temps t_2 , le point P_2 de la roue mobile est en contact avec le point Q_2 de la roue fixe.

Comme la roue roule sans glisser, on a :

$$\text{longueur de l'arc } \widehat{P_1 P_2} = \text{longueur de l'arc } \widehat{Q_1 Q_2}$$

i.e.

$$r_2 \psi = r_1 \Delta t,$$

où $\Delta t = (t_2 - t_1)$ est l'angle entre Q_1 et Q_2 (vu depuis le centre de la roue fixe) et ψ est l'angle entre P_1 et P_2 (vu depuis le centre de la roue mobile). Comme θ est l'angle d'inclinaison du repère mobile, la variation de θ est⁹

$$\Delta\theta = \Delta t + \psi.$$

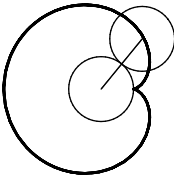
Nous avons donc

$$\Delta\theta = \Delta t + \frac{r_1}{r_2} \Delta t,$$

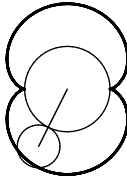
$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 1 + \frac{r_1}{r_2} = \lambda,$$

et, en faisant tendre $\Delta t \rightarrow 0$, on a

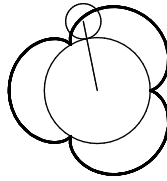
$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda.$$



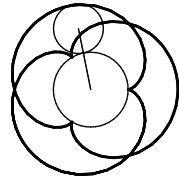
$\lambda = 2$
(cardioïde)



$\lambda = 3$
(nephroïde)



$\lambda = 4$



$\lambda = \frac{5}{2}$

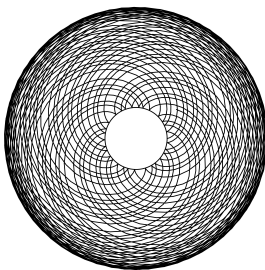
9. Pour le voir, on peut décomposer le mouvement en deux glissements. Dans un premier temps, on amène P_2 sur Q_1 (donc θ augmente de ψ). Puis, dans un deuxième temps, on fait glisser P_2 le long de l'arc $\widehat{Q_1 Q_2}$ (et θ augmente de Δt). Au total, θ augmente de $\psi + \Delta t$.

Remarques.

a) L'épicycloïde possède une singularité (de type point de rebroussement) à chaque rencontre avec la roue fixe.

b) Si λ est un nombre rationnel, alors l'épicycloïde est une courbe fermée. Plus précisément, si $\lambda = \frac{m}{n}$ avec m et n deux nombres entiers premiers entre eux, alors la roue mobile retrouve sa position initiale après avoir effectué m révolutions autour de la roue fixe et n rotations sur elle-même.

c) Si le paramètre $\lambda = 1 + \frac{r_1}{r_2}$ est irrationnel, alors l'épicycloïde ne se referme pas et elle est dense dans l'anneau $r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq (r_1 + 2r_2)^2$, c'est-à-dire que la courbe se rapproche arbitrairement de tout point de l'anneau.



Une épicycloïde avec λ irrationnel : la courbe est dense dans l'anneau.

6.15 Courbes planes définies implicitement

On dit qu'une courbe dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 est *définie implicitement* si elle est décrite par une équation. La définition précise de la *courbe implicite plane* sera donnée en page 270, mais donnons d'abord quelques exemples.

On sait qu'une droite dans le plan est décrite par son équation cartésienne

$$ax + by + c = 0.$$

C'est notre premier exemple. Le deuxième exemple est le cercle. Il est défini par son centre (x_0, y_0) et son rayon r . Un point (x, y) est sur le cercle si sa distance au centre égale le rayon : $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = r$, c'est-à-dire

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

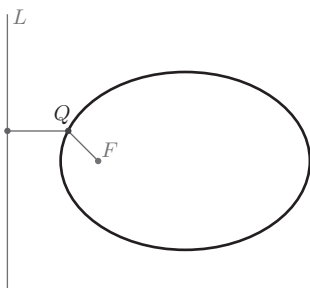
Notre troisième exemple est donnée par la famille des coniques dans \mathbb{R}^2 .

Les coniques

Définition. Prenons une droite L dans le plan, un point F (non situé sur L) et un nombre $e > 0$. La *conique de foyer F , d'excentricité e et de directrice L* est l'ensemble des points Q du plan vérifiant la condition

$$d(Q, F) = e \cdot d(Q, L).$$

La courbe est une *ellipse* si $e < 1$, une *hyperbole* si $e > 1$ et une *parabole* si $e = 1$.



On a vu avec le corollaire 4.10 que la distance entre le point $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ et la droite $L : ax + by + c = 0$ est donnée par

$$d(Q, L) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

donc si $F = (t, s)$, alors l'équation de la conique est l'équation du second degré

$$(a^2 + b^2) ((x - t)^2 + (y - s)^2) = e^2 (ax + by + c)^2. \quad (6.14)$$

À titre d'exemple, considérons le cas de la conique d'excentricité e , de foyer $F = (t, 0)$ et dont la directrice est la droite verticale $x = h$. L'équation (6.14) s'écrit alors

$$(x - t)^2 - e^2 (x - h)^2 + y^2 = 0. \quad (6.15)$$

Considérons d'abord le cas où $e \neq 1$. Quitte à faire une translation, on peut supposer¹⁰ que $t = e^2 h$, cette hypothèse simplifie les calculs. Nous pouvons aussi supposer que $h < 0$. Posons alors $a = -h \cdot e$, en sorte que

$$t = -e \cdot a \quad \text{et} \quad h = -\frac{a}{e}.$$

L'équation de la conique devient

$$(x + ea)^2 - e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2 + y^2 = 0,$$

10. Sinon, on remplace h par $h' = h - \frac{t - e^2 h}{1 - e^2}$ et t par $t' = t - \frac{t - e^2 h}{1 - e^2}$, un calcul direct donne $t' = e^2 h'$.

c'est-à-dire

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - a^2(1 - e^2) = 0. \quad (6.16)$$

Divisons cette équation par $a^2(1 - e^2)$, on obtient

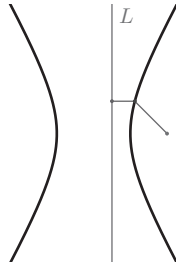
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} - 1 = 0. \quad (6.17)$$

Si $e < 1$, la conique est une ellipse. On pose $b^2 = a^2(1 - e^2)$ et on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.18)$$

qui est la forme normale de l'équation de l'ellipse. L'excentricité se retrouve par

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$



Si $e > 1$, la conique est une hyperbole. On pose $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ et on trouve la forme normale de l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.19)$$

L'excentricité est donnée par la formule

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Considérons maintenant le cas de la parabole, i.e. $e = 1$. L'équation (6.15) devient

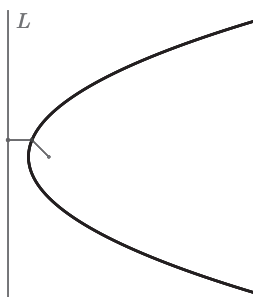
$$y^2 + (-2t + 2h)x + (t^2 - h^2) = 0.$$

Quitte à faire une translation, on peut supposer que $t = -h$. Fixons $p > 0$ et choisissons les valeurs $t = p/2$, $h = -p/2$. On obtient la forme normale de l'équation d'une parabole :

$$y^2 = 2px. \quad (6.20)$$

REMARQUE. Notre définition d'une conique n'a pas de sens lorsque $e = 0$. Toutefois si on pose $e = 0$ dans l'équation (6.16), on obtient

$$x^2 + y^2 = a^2,$$



qui est l'équation du cercle de rayon a centré en l'origine. Nous considérons donc que le cercle est une conique (en fait une ellipse) d'excentricité $e = 0$ (dans ce cas, le foyer est le centre du cercle et la directrice a « disparu à l'infini »).

On peut aussi faire tendre $e \rightarrow \infty$. L'équation (6.17) devient

$$x^2 = a^2.$$

On peut donc aussi considérer que la réunion des deux droites $x = a$ et $x = -a$ est aussi une conique.

Revenons à la théorie générale des courbes définies implicitement. Pour une discussion rigoureuse de ce thème, nous avons besoin de quelques rappels d'analyse.

Rappels sur les fonctions de plusieurs variables

Une fonction de n variables est une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un domaine de l'espace \mathbb{R}^n . Une telle fonction est dite de classe C^1 si elle est continue et possède des dérivées partielles définissant n fonctions continues

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

La fonction f est de classe C^2 si elle est de classe C^1 ainsi que ses dérivées partielles.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , son *gradient* en un point $p \in \Omega$ est le vecteur formé par les n dérivées partielles en p :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(p) = \overrightarrow{\nabla} f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

La propriété fondamentale du gradient s'exprime par la règle de dérivation des fonctions composées. Soit $\gamma : I \rightarrow \Omega$ une courbe paramétrée ($I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle) et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors la composition est une fonction d'une variable $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 6.41 (Dérivation des fonctions composées)

Si γ et f sont de classe C^1 , alors $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ aussi et sa dérivée est donnée par

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

La preuve de ce résultat se trouve dans les cours usuels d'analyse. □

Définitions. On dit que $p \in \Omega$ est un *point critique* de la fonction f si le gradient de la fonction s'annule en ce point : $\vec{\nabla} f(p) = \mathbf{0}$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définit une *courbe implicite plane* si

- a) f est de classe C^2 ;
- b) l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$ et $\vec{\nabla} f(x, y) = \mathbf{0}$ est un ensemble fini.

La courbe associée à une telle fonction est alors définie par

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

On note cette courbe par $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$.

Les points p de \mathcal{C} qui sont des points critiques de f (i.e. pour lesquels $\vec{\nabla} f(p) = \mathbf{0}$) sont les *points singuliers* de la courbe. Par hypothèse, ils sont en nombre fini.

Ainsi, il y a en géométrie deux notions différentes de courbes planes.

- 1) Une courbe est donnée par un paramétrage $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- 2) Une courbe est le lieu des solutions d'une équation dans le plan :

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 0.$$

On dit parfois que la courbe est donnée *paramétriquement* dans le premier cas et *implicitement* dans le second cas. Ces deux conceptions sont différentes, et il est important de comprendre ces différences, mais aussi de savoir passer de l'une à l'autre de ces conceptions :

Problèmes I. Trouver l'équation d'une courbe paramétrée.

Problèmes II. Paramétrer une courbe donnée par une équation.

Le problème I se résout de la façon suivante : considérons une courbe plane paramétrée, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Si l'on élimine le paramètre de cette relation, on obtient en général une équation reliant x à y . C'est l'équation implicite de la courbe γ .

Nous verrons plus loin que le problème I a toujours une solution théorique *localement* (voir le corollaire 6.45). Il n'y a toutefois pas de méthode explicite que l'on peut utiliser dans tous les cas et il faut parfois un peu d'ingéniosité.

Voyons quelques exemples pour le problème I.

Exemple 6.11 Considérons la droite paramétrée par

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2. \end{cases}$$

En éliminant t de ces équations, on obtient l'équation générale d'une droite :

$$ax + by + c = 0$$

où $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = v_1 y_0 - v_2 x_0$.

Exemple 6.12 Pour trouver l'équation du cercle de rayon a centré en $c = (x_0, y_0)$, on élimine le paramètre θ des équations

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos(\theta) \\ y = y_0 + a \sin(\theta). \end{cases}$$

On obtient $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta) = a^2$, l'équation du cercle est donc

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Exemple 6.13 L'ellipse est donnée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta). \end{cases}$$

On a $\cos(\theta) = \frac{x}{a}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{b}$. L'équation de l'ellipse est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour résoudre le problème inverse (à savoir, paramétrer une courbe donnée par une équation), il n'y a malheureusement pas de recette universelle.

Une première méthode consiste à effectuer un changement (peut être non linéaire) de coordonnées pour se ramener à l'équation d'une courbe connue.

Exemple 6.14 Voyons comment on trouve un paramétrage de l'ellipse à partir de son équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On effectue la transformation affine

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

On obtient alors $\xi^2 + \eta^2 = 1$, ce qui est l'équation du cercle unité, lequel est paramétré par $(\xi(\theta), \eta(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Nous obtenons donc le paramétrage usuel de l'ellipse $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$.

Exemple 6.15 Considérons la courbe donnée par l'équation

$$\mathcal{C} : |x|^{2p} + |y|^{2p} = 1$$

avec $p > 0$. Si l'on définit de nouvelles coordonnées par

$$\xi := |x|^{p-1} x, \quad \eta := |y|^{p-1} y,$$

c'est-à-dire

$$x = |\xi|^{\frac{1}{p}-1} \xi, \quad y = |\eta|^{\frac{1}{p}-1} \eta,$$

alors l'équation $|x|^{2p} + |y|^{2p} = 1$ est équivalente à $\xi^2 + \eta^2 = 1$; dans les coordonnées (ξ, η) la courbe \mathcal{C} est donc transformée sur le cercle unité dont un paramétrage est $(\xi(\theta), \eta(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ce qui donne finalement le paramétrage suivante de \mathcal{C} :

$$x(\theta) = |\cos(\theta)|^{\frac{1}{p}-1} \cos(\theta), \quad y(\theta) = |\sin(\theta)|^{\frac{1}{p}-1} \sin(\theta).$$

En particulier, si $p = \frac{1}{3}$, alors $\mathcal{C} : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ admet le paramétrage

$$x(\theta) = \cos(\theta)^3, \quad y(\theta) = \sin(\theta)^3.$$

Il s'agit de l'*astroïde*.

Une autre méthode consiste à projeter une courbe que l'on sait paramétrer sur la courbe étudiée.

Exemple 6.16 Le *folium de Descartes* est la courbe

$$\mathcal{C} : x^3 + y^3 = 3a xy.$$

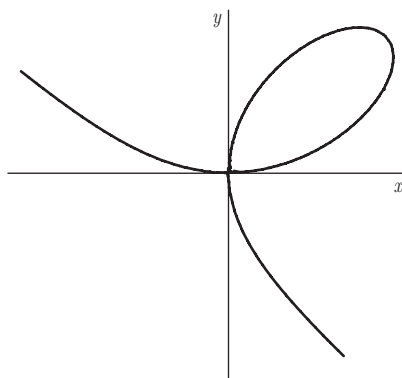
Cette courbe possède un unique point singulier à l'origine (vérifier!).

Projetons la droite d'équation $x = 1$ sur le folium de Descartes à partir de l'origine.

Le point $(1, t)$ sur cette droite a pour image sur la courbe le point $(x(t), y(t))$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} y &= tx \\ x^3 + y^3 &= 3axy. \end{cases}$$

En effet, le point (x, y) est simultanément sur la droite passant par $(0, 0)$ et $(1, t)$ et sur le folium de Descartes.



Le folium de Descartes.

En résolvant ce système d'équations, on trouve

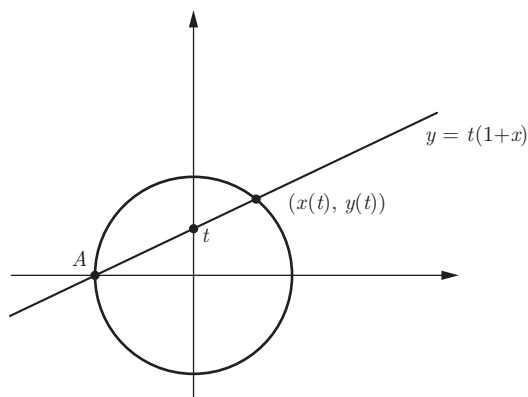
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

ce qui nous fournit un paramétrage du folium de Descartes.

REMARQUE. Lorsque $t = -1$, le paramétrage devient infini. Cela correspond au fait que la droite $y = -x$ est parallèle à une asymptote au folium de Descartes (l'asymptote elle-même est la droite $x + y + a = 0$).

Exemple 6.17 Appliquons cette méthode pour paramétrer le cercle unité.

Projetons pour cela la droite $x = 0$ (l'axe Oy) sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ à partir du centre $A = (-1, 0)$.



Paramétrage rationnel du cercle.

Pour calculer l'image du point $(0, t)$ sur le cercle, on résout les équations

$$\begin{cases} y = t(1+x) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

L'intérêt de ce paramétrage est qu'elle est donnée par des fractions rationnelles, ce qui est plus commode pour certains problèmes de calculs. Son inconvénient est que l'on ne recouvre pas la totalité du cercle (on a paramétré le cercle privé du point A).

Si θ désigne l'angle entre l'axe Ox et le vecteur unité (x, y) , alors la géométrie élémentaire montre que l'on a la relation

$$t = \tan(\theta/2).$$

On peut voir cette relation comme un changement de paramètre pour lequel

$$x = \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Définition. Une courbe est dite *unicursale* si elle admet un paramétrage bijectif du type $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in \mathbb{R}$) où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fractions rationnelles.

Ainsi le cercle et le folium de Descartes sont des exemples de courbes unicursales.

6.16 Quelques applications de la substitution $t = \tan(\theta/2)$

I. Application au calcul de certaines intégrales

Problème Trouver une primitive de $\frac{1}{\sin \theta}$.

SOLUTION. On visualise le problème sur le cercle en posant $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$. On doit intégrer

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int \frac{d\theta}{y}.$$

Posons $t = \tan(\theta/2)$, alors $x = \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, d'où

$$\begin{aligned} dx &= -\sin \theta d\theta = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ dy &= \cos \theta d\theta = 2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

on en déduit

$$d\theta = -\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{2}{1+t^2}dt$$

et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{\sin \theta} &= \int \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^{-1} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{dt}{t} = \log(t) + C \\ &= \log(\operatorname{tg}(\theta/2)) + C\end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration.

Cette méthode s'applique aux calculs d'intégrales du type $\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ où R est une fonction rationnelle.

II. Application aux équations trigonométriques

Problème Résoudre l'équation : $\cos \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$.

SOLUTION. Une solution immédiate est $\theta = \pi$. La substitution $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ permet de récrire l'équation sous la forme $\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} + 1 = 0$, ce qui donne après simplifications $2 - 6t = 0$. Donc θ est déterminé par $t = \operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{1}{3}$ (i.e. $\theta \simeq 0.6435 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Cette méthode permet de ramener toute équation alébrique en $\cos \theta$, $\sin \theta$ en une équation algébrique en t .

III. Application en arithmétique (triplets pythagoriciens)

La paramétrage rationnel du cercle peut également être vu comme conséquence du fait que si $a = 1 - t^2$, $b = 2t$ et $c = 1 + t^2$, alors $a^2 + b^2 = c^2$. Plus généralement, si

$$a = s^2 - t^2, \quad b = 2st \quad \text{et} \quad c = s^2 + t^2,$$

alors $a^2 + b^2 = c^2$. Les solutions entières de l'équation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

s'appellent les *triplets pythagoriciens* (ils décrivent les triangles rectangles de côtés entiers). Euclide a démontré que l'on obtient la totalité des triplets pythagoriciens en choisissant des valeurs entières pour s et t dans les relations ci-dessus. Quelques valeurs sont données dans le tableau ci-dessous.

s	t	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
6	1	35	12	37
5	2	21	20	29

6.17 Tangentes et normales à une courbe définie implicitement

Retournons à l'étude des courbes. Le résultat suivant nous permet de trouver la normale et la tangentes à une courbe définie implicitement

Théorème 6.42 *Soit p un point régulier de la courbe $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$. Alors le gradient $\vec{\nabla} f(p)$ est un vecteur normal à \mathcal{C} en p .*

PREUVE. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage de \mathcal{C} tel que $\gamma(t_0) = p$ et $\dot{\gamma}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Alors la fonction composée $f \circ \gamma$ est identiquement nulle : $f \circ \gamma(t) = 0$ pour tout t . Le théorème 6.41 entraîne alors que

$$\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = 0,$$

ainsi $\dot{\gamma}(t_0) \perp \vec{\nabla} f(p)$. □

Corollaire 6.43 *La tangente à la courbe $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ au point $p \in \mathcal{C}$ est la droite*

$$T_p \mathcal{C} = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{\nabla} f(p), (q - p) \rangle = 0\},$$

et la normale est la droite

$$N_p \mathcal{C} = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{\nabla} f(p) \wedge (q - p) = 0\}.$$

Exemple 6.18 Considérons la parabole $\mathcal{P} : y^2 - x = 0$. Soit $f(x, y) = y^2 - x$ et $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ un point de la parabole. Alors $\vec{\nabla} f(p) = (-1, 2y_0)$, donc l'équation de la tangente à la parabole au point p est

$$T_p \mathcal{P} : -(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0.$$

On peut utiliser ce théorème pour calculer le repère de Frenet d'une courbe donnée par une équation, mais il faut préalablement choisir un sens de parcours sur la courbe.

6.18 Dérivation implicite

Avec le problème II de la page 270, on devait paramétrer une courbe \mathcal{C} donnée implicitement. Nous avons vu quelques exemples de résolution de ce problème. Pour des raisons théoriques, il est important de prouver que ce problème a toujours une solution locale au voisinage d'un point non singulier. Ce résultat s'appuie sur le théorème d'analyse suivant.

Théorème 6.44 (théorème des fonctions implicites) Soit (x_0, y_0) un point sur la courbe de classe C^2 définie par l'équation

$$C : f(x, y) = 0.$$

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe une fonction continûment différentiable $g : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans un voisinage $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ de x_0 telle que

- a) $g(x_0) = y_0$,
- b) $f(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$,
- c) $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$.

PREUVE. Montrons d'abord que la condition c) est une conséquence de b). Sous l'hypothèse b), la fonction $h(x) = f(x, g(x))$ est constante, donc de dérivée nulle. Or la règle de dérivation des fonctions composée nous dit que

$$0 = \frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g'(x),$$

ce qui entraîne immédiatement l'égalité dans c).

Pour prouver l'existence de la fonction g , on regarde l'égalité c) comme une équation différentielle qu'il faut résoudre. Posons

$$\Phi(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)},$$

cette fonction est bien définie et de classe C^1 dans toute région du plan où f est définie, de classe C^2 et telle que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Considérons l'équation différentielle

$$g'(x) = \Phi(x, g(x)).$$

On prouve dans les cours d'analyse avancés que, si la fonction $\Phi(x, y)$ est de classe C^1 au voisinage de (x_0, y_0) , alors une telle équation admet toujours une solution unique dans un voisinage d'un point x_0 vérifiant une condition initiale donnée $g(x_0) = y_0$.

Cette fonction vérifie alors les conditions a) et c) par définition. Pour vérifier la condition b), on considère à nouveau la fonction $h(x) = f(x, g(x))$. Elle vérifie

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g'(x) = (g'(x) - \Phi(x, g(x))) \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Donc cette fonction est constante et

$$f(x, g(x)) = h(x) = h(x_0) = f(x_0, g(x_0)) = f(x_0, y_0) = 0.$$

□

Corollaire 6.45 *On peut paramétrer une courbe implicite de classe C^2*

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 0$$

au voisinage de tout point régulier.

PREUVE. Le point (x_0, y_0) est un point régulier de \mathcal{C} si $f(x_0, y_0) = 0$ et si

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq (0, 0).$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dans le deuxième cas, on sait par le théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction

$$g : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^1 , à dérivée non nulle et telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$.

Le graphe $x \mapsto (x, g(x))$ est donc un paramétrage local de \mathcal{C} (pour $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$).

Si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

et en inversant les rôles de x et de y dans le théorème des fonctions implicites, on trouve une fonction $h(y)$ telle que $y \mapsto (h(y), y)$ est un paramétrage local de \mathcal{C} (pour $y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon$). \square

REMARQUE. En analyse, nous sommes parfois dans la situation où nous devons dériver une fonction $y = g(x)$ dont nous connaissons uniquement le graphe sous forme implicite $f(x, y) = 0$. Le théorème des fonctions implicites nous dit que la dérivée de g est donnée par la formule

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

qu'il est important de connaître.

Exemple 6.19 Supposons que $y = g(x)$ soit définie implicitement par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Alors $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$, et donc

$$g'(x) = - \frac{x}{g(x)} = - \frac{x}{y}.$$

Il est facile de vérifier l'exactitude de cette formule sur cet exemple car on a clairement $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et on peut directement calculer

$$g'(x) = - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \frac{x}{g(x)}.$$

Pour calculer la courbure d'une courbe plane définie implicitement, on utilise la formule suivante.

Proposition 6.46 *La courbure de la courbe plane \mathcal{C} définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ est donnée au signe près par*

$$k = \pm \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}}.$$

Le signe étant déterminé par un choix du sens de parcours sur la courbe.

PREUVE. Donnons un paramétrage $(x(t), y(t))$ de la courbe \mathcal{C} , alors on a

$$f(x(t), y(t)) \equiv 0;$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} \equiv 0;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t), y(t)) = f_{xx} \cdot \dot{x}^2 + f_{xy} \cdot \dot{x} \dot{y} + f_x \cdot \ddot{x} + f_{yx} \cdot \dot{y} \dot{x} + f_{yy} \cdot \dot{y}^2 + f_y \cdot \ddot{y} \equiv 0,$$

où on a noté les dérivées partielles de f par $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ etc. Supposons que $\dot{y}(t_0) \neq 0$, alors on peut reparamétriser la courbe comme un graphe $y = h(x)$, c'est-à-dire que l'on peut supposer que $x = t$ et donc $\dot{x} = 1$ et $\ddot{x} = 0$. Alors la deuxième égalité ci-dessus dit que $\dot{y} = -\frac{f_x}{f_y}$ et la troisième égalité entraîne que $\ddot{y} = -(f_{xx} + 2f_{xy}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)$. Ces deux égalités entraînent que

$$f(y)\ddot{y} = - \left(f_{xx} - 2f_{xy} \frac{f_x}{f_y} + f_{yy} \left(\frac{f_x}{f_y} \right)^2 \right) = - \frac{(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2)}{f_y^2},$$

La courbure est alors donnée au signe près par

$$k = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} = - \frac{(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2)}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}},$$

$$\text{car } (1 + \dot{y}^2)^{3/2} = \left(1 + \left(\frac{f_x}{f_y} \right)^2 \right)^{3/2} = \frac{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}{f_y^3}.$$

□

Exemple 6.20 Pour l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on pose $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. On a alors $f_x = \frac{2x}{a^2}$, $f_y = \frac{2y}{b^2}$, $f_{xx} = \frac{2}{a^2}$, $f_{yy} = \frac{2}{b^2}$ et $f_{xy} = 0$. La formule précédente donne alors

$$k = \frac{\pm 1}{(ab)^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{3/2}}.$$

6.19 Enveloppe d'une famille de courbes planes

Supposons qu'une courbe plane se déplace avec le temps dans le plan. Son équation au temps t est donnée par

$$\mathcal{C}_t : f_t(x, y) = 0 ,$$

que nous pouvons écrire sous la forme $f(x, y, t) = 0$. On suppose que la fonction de trois variables $f(x, y, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Définition. On dit qu'une courbe \mathcal{E} *enveloppe* la famille \mathcal{C}_t si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

- a) $\mathcal{E} \subset \cup_t \mathcal{C}_t$;
- b) Si $p \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}_t$, alors $T_p \mathcal{C}_t = T_p \mathcal{E}$.

La première condition dit que chaque point de \mathcal{E} appartient à l'une des courbes de la famille \mathcal{C}_t et la seconde dit que la courbe \mathcal{E} rencontre chaque courbe \mathcal{C}_t tangentielllement.

Proposition 6.47 *L'enveloppe est déterminée par les équations*

$$f(x, y, t) = 0 \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0 \tag{6.22}$$

Remarquons qu'il faut éliminer la variable t pour trouver une équation implicite de l'enveloppe.

PREUVE. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un paramétrage de l'enveloppe \mathcal{E} . Supposons que γ est de classe \mathcal{C}^1 , que $\gamma(t) \in \mathcal{C}_t$ pour tout t , et que $\dot{\gamma}(t)$ est tangente à la courbe \mathcal{C}_t .

Alors nous avons pour tout t

$$f(x(t), y(t), t) = 0 ,$$

l'équation (6.21) est donc satisfaite. En dérivant cette relation, on obtient

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

mais comme $\dot{\gamma}(t)$ est tangente à \mathcal{C}_t , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left\langle \vec{\nabla} f, \dot{\gamma} \right\rangle = 0 ,$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0 .$$

□

REMARQUE. Les équations (6.21), (6.22) ne représentent pas toujours une enveloppe de la famille de courbes ; elles peuvent correspondre au lieu singulier de cette famille. Considérons par exemple la famille

$$\mathcal{C}_t : f(x, y, t) = y^3 - (x - t)^2 = 0$$

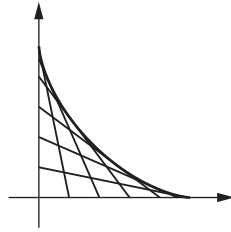
alors les équations (6.21), (6.22) s'écrivent

$$\begin{cases} y^3 - (x - t)^2 = 0, \\ 2(x - t) = 0. \end{cases}$$

La solution est $x = t$, $y = 0$. C'est l'axe Ox , qui est le lieu des points singuliers de la famille de courbes.

À titre d'exemple d'application de la notion d'enveloppe, nous proposons de résoudre le problème suivant.

Problème Une barre rectiligne de longueur 1 coulisse en ses extrémités sur deux axes perpendiculaires. Décrire le lieu des points occupés par cette barre au cours du temps.



SOLUTION. On peut représenter la barre au temps t (pour $0 \leq t \leq 1$) par le segment reliant les points $(t, 0)$ et $(0, \sqrt{1 - t^2})$. L'équation de la barre au temps t est donc

$$\mathcal{D}_t : \sqrt{1 - t^2} x + t y - t \sqrt{1 - t^2} = 0.$$

Il est commode d'effectuer le changement de paramètre $t = \sin \theta$, $\sqrt{1 - t^2} = \cos \theta$. L'équation de la droite devient

$$f(x, y, \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta - \cos \theta \sin \theta = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe, on ajoute à cette équation la relation

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -x \sin \theta + y \cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0.$$

Ces deux équations forment un système linéaire que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Par une inversion de matrice, on trouve directement la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 \theta \\ \cos^3 \theta \end{pmatrix}.$$

L'enveloppe est donc la courbe $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\sin^3 \theta, \cos^3 \theta)$. En éliminant la variable θ , on obtient cette courbe sous forme implicite

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

(et $x, y \geq 0$), c'est une branche de l'astroïde. La solution du problème est finalement donnée par la région du plan

$$\left\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1 \right\}.$$

6.20 Exercices

6.20.1 Donner un exemple de courbe fermée qui est de classe C^1 , mais pas de classe C^2 .

6.20.2 À quelle condition le graphe d'une fonction f est-il une courbe birégulière ?

6.20.3 On considère la courbe plane $\gamma(t) = (at, bt^2)$ ($0 \leq t \leq 1$), c'est un arc de parabole. Calculer son vecteur vitesse, son accélération, sa vitesse et sa longueur.

6.20.4 Calculer la longueur des courbes suivantes :

- a) $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$. $-\pi \leq u \leq \pi$.
- b) $\beta(u) = (e^u, e^{-u}, \sqrt{2}u)$. $0 \leq u \leq t$.
- c) $\gamma(u) = (u \cos(u), u \sin(u))$. $0 \leq u \leq 4\pi$.

6.20.5 Calculer l'abscisse curviligne de la spirale d'Archimède $\alpha(u) = (u \cos u, u \sin u)$ ($0 \leq u < \infty$) avec $u = 0$ comme point initial. Dessiner cette courbe.

6.20.6 La cycloïde est la courbe décrite par un point du bord d'une roue qui roule, sans glisser, en ligne droite.

- a) Donner un paramétrage de la cycloïde (préciser d'abord le choix de la situation et du système de coordonnées).
- b) Calculer la longueur d'une arche de la cycloïde.

6.20.7 Calculer le paramétrage naturel de

$$\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t).$$

6.20.8 Discuter le *paradoxe de la roue d'Aristote* : on considère deux roues attachées ensemble et centrées sur un même axe, l'une de rayon 2 et l'autre de rayon 1. On fait rouler ces roues (solidairement) sur une route pendant un tour de roue. Le centre de la grande roue s'est alors déplacé d'une distance de 4π et celui de la petite roue d'une distance de 2π . Conclusion $4\pi = 2\pi$.

6.20.9 L'astroïde est la courbe (périodique)

$$\alpha(u) = (\cos^3 u, \sin^3 u) \quad (u \in \mathbb{R}).$$

- Chercher tous les points singuliers.
- Calculer la longueur d'un cycle de l'astroïde.
- Trouver l'abscisse curviligne et donner le paramétrage naturel avec le point initial $\alpha(0)$.
- Dessiner l'astroïde.

6.20.10 Vérifier la formule de l'accélération dans le cas d'un cercle (voir la formule (6.4), p. 236).

6.20.11 Calculer le repère de Frenet des courbes de \mathbb{R}^3 suivantes :

- $t \mapsto (at, bt^2, ct^3)$,
- $t \mapsto (t, e^t \cos t, e^t \sin t)$,
- $t \mapsto (t \cos t, t \sin t, 1 - t)$.

Puis calculer la courbure et la torsion de ces courbes.

6.20.12 Montrer qu'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (de classe C^3 et birégulière) est une courbe de pente constante (hélice généralisée) si et seulement si $\mathbf{T}(\gamma, u)$ fait un angle constant avec le vecteur de Darboux.

6.20.13 Calculer le vecteur de Darboux de l'hélice circulaire $\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), bu)$. Puis vérifier que cette courbe est effectivement une hélice généralisée.

6.20.14 Montrer que si le vecteur de Darboux de la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est constant, alors γ est une hélice circulaire.

6.20.15 Trouver l'équation de la droite $\alpha(t) = (3 - 2t, 1 + 4t)$.

6.20.16 Trouver l'équation de la parabole $\beta(t) = (5t^2, 10 - 2t)$.

6.20.17 Paramétrer la courbe d'équation $x^4 + 9y^2 = 4$.

6.20.18 Paramétrer la cubique $x^3 = y^2$.

6.20.19

- Calculer le repère de Frenet de la parabole $\alpha(u) = (au^2, bu)$ ($u \in \mathbb{R}$).
- Étudier la limite de ce repère lorsque $u \rightarrow \pm\infty$.
- Donner l'équation de la normale à α en $\alpha(u)$.

6.20.20 Trouver les équations de la tangente et de la normale aux courbes suivantes :

- a) la chaînette : $\cosh(ax) - ay = 1$;
- b) la parabole \mathcal{P} : $ay^2 = bx$;
- c) la courbe \mathcal{C} : $x^3 + \sin(y) = 0$.

6.20.21 Trouver un paramétrage rationnel de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.

6.20.22 Trouver une primitive des fonctions $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ et $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$.

6.20.23 Montrer que la courbure d'un graphe $y = g(x)$ est donnée par

$$k = \frac{d}{dx} \left(\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g'(x)^2}} \right).$$

6.20.24 Montrer que la notion de point d'inflexion est une notion géométrique.

6.20.25

- a) Soit γ le graphe d'une fonction $y = f(x)$: Prouver la relation

$$\tan(\varphi) = \frac{dy}{dx}$$

où φ est la fonction angulaire de γ .

- b) Quels sont les points d'inflexion d'un graphe ?

6.20.26 Un point p d'une droite mobile L est astreint à rester sur une droite fixe D . A chaque instant, la droite L passe par un point fixe O . (Faire un dessin.)

- a) Trouver l'équation de la trajectoire d'un point q sur L .
- b) Donner ensuite un paramétrage unicursal de cette courbe.

Cette courbe s'appelle la *conchoïde*.

6.20.27 La *cardioïde* est l'épicycloïde engendrée par la rotation d'une roue de rayon r autour d'une roue de même rayon.

- a) Dessiner la cardioïde.
- b) Donner un paramétrage de la cardioïde.
- c) Trouver le paramètre angulaire de la cardioïde.

6.20.28 On considère la parabole

$$\gamma(u) = (u^2, u) \quad (u \in \mathbb{R}).$$

- a) Trouver l'abscisse curviligne.
- b) Trouver la fonction angulaire de γ .
- c) Calculer la courbure.
- d) Vérifier la relation $k = \frac{d\varphi}{ds}$.

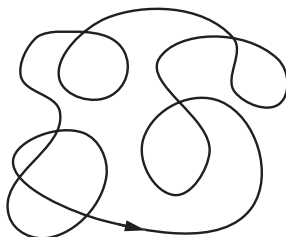
6.20.29 Trouver la courbure de la chaînette.

6.20.30 La *tractrice* est la courbe plane

$$\alpha(u) = (u - \tanh(u), \frac{1}{\cosh(u)}) \quad (0 \leq u < \infty).$$

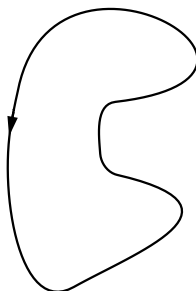
- Chercher le ou les points singuliers de ce paramétrage.
- Calculer le repère de Frenet de α .
- Trouver la direction tangente à α au point $\alpha(0)$.
- Que peut-on dire de la courbe $\gamma(u) = \alpha(u) + \mathbf{T}(u)$? Interpréter géométriquement.
- Calculer l'abscisse curviligne de α (avec $\alpha(0)$ comme point initial).
- Donner le paramétrage naturel de α (avec $\alpha(0)$ comme point initial).
- Calculer la courbure de α .
- Trouver la développée β de α .
- Calculer l'abscisse curviligne de β . Expliquer le lien avec le résultat trouvé en (g).

6.20.31 Que vaut l'intégrale $\int_{\gamma} k \, ds$ pour la courbe suivante?



6.20.32 Soit γ une courbe dont la courbure k est une fonction croissante de l'abscisse curviligne. Cette courbe peut-elle être fermée?

6.20.33 Dessiner le diagramme de courbure d'une ellipse, d'un cercle et de la courbe suivante.



6.20.34 Considérons la parabole $\gamma(t) = (t, t^2)$.

- a) Trouver $s(t)$.
- b) Trouver $k(t)$.
- c) Dessiner le diagramme de courbure.
- d) Prévoir la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds$.
- e) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} k(s)ds$.
- f) Calculer le paramètre angulaire φ .
- g) Vérifier que $\frac{d\varphi}{ds} = k(s)$.

6.20.35 Montrer que la développée d'une courbe est l'enveloppe de ses normales.

6.20.36 Calculer la développée des courbes suivantes :

- a) $\gamma(u) = (au^2, bu)$;
- b) la cycloïde ;
- c) l'ellipse.

Donner ensuite une équation de chacune de ces développées. Faire un dessin de chaque courbe avec sa développée.

6.20.37 Vérifier que si β est une courbe de classe C^3 , alors la courbure de sa développante α au point $\alpha(\rho)$ est donnée par $1/(\rho + c)$. Expliquer !

6.20.38 Donner l'équation générale d'une droite en coordonnées polaires.

6.20.39 Vérifier les formules page 260 donnant l'accélération et la courbure d'une courbe en coordonnées polaires.

6.20.40 Prouver les relations

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

6.20.41 Trouver l'équation polaire, puis cartésienne de la cardioïde. Trouver ensuite l'équation de sa tangente en un point quelconque.

6.20.42 Calculer la courbure de la *lemniscate* $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$.

6.20.43 On considère la courbe d'équation polaire $r = \sin^2(3\theta)$.

- a) Dessiner cette courbe.
- b) Paramétrer cette courbe.
- c) Calculer le repère de t et la vitesse.
- d) Calculer la courbure.
- e) Trouver une équation cartésienne.

6.20.44 On considère la spirale logarithmique

$$r = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}.$$

- Dessiner la courbe.
- Calculer son repère de Frenet.
- Trouver l'abscisse curviligne et donner le paramétrage naturel avec le point initial $r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = 0$.
- Écrire le paramétrage naturel $s \mapsto (x(s), y(s))$ en coordonnées cartésiennes.
- Calculer la courbure κ en fonction de s .

6.20.45 Considérons une roue de rayon r_2 roulant sur une roue fixe de rayon r_1 . On suppose que la roue mobile roule, sans glisser, à l'intérieur de la roue fixe et que sa vitesse est constante. La trajectoire d'un point p situé sur la circonférence de la roue mobile s'appelle une *hypocycloïde*.

- Donner un paramétrage de l'hypocycloïde.
- Montrer que l'astroïde est un cas particulier d'hypocycloïde.
- Qu'en est-il de l'ellipse ?

6.20.46 Les variables x et y vérifient la relation

$$x + 2y = (x^2 + y^2) \cos(\pi xy).$$

Trouver $\frac{dy}{dx}$, sachant que $x = 0$.

6.20.47 Montrer qu'une conique d'excentricité e , dont le foyer est l'origine, admet la représentation suivante en coordonnées polaires :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Que valent p et θ_0 ?

6.20.48 Trouver les enveloppes de la famille d'ellipses

$$\mathcal{E}_t : \frac{x^2}{(1-\lambda)} + \frac{y^2}{\lambda} = 1.$$

Interpréter géométriquement, puis décrire un mécanisme permettant de dessiner des ellipses en utilisant les principes ci-dessus.

6.20.49 Soit \mathcal{D}_t la droite reliant les points (ta, tb) et $((1-t)a, (t-1)b)$. Calculer l'enveloppe de la famille de droites \mathcal{D}_t . (Faire d'abord un dessin.)

6.20.50 (Cône de Mach) Lorsqu'une particule se déplace dans un milieu, elle provoque une perturbation en forme d'onde circulaire. Soit c la vitesse de propagation de cette onde.

Supposons que la particule se déplace dans le plan à vitesse constante, disons

$$\alpha(t) = (vt, 0).$$

Fixons un instant t_0 et notons \mathcal{C}_u le cercle de propagation à un instant t_0 de l'onde émise par la particule à l'instant $t_0 - u$.

- a) Trouver l'équation du cercle \mathcal{C}_u .
- b) Calculer l'enveloppe de la famille de cercles \mathcal{C}_u . (Faire une discussion selon la valeur de (c/v) .)
- c) Faire un dessin et interpréter.

Chapitre 7

Surfaces

7.1 Qu'est-ce qu'une surface ?

En l'absence de toute contrainte, une particule (un point) de l'espace euclidien peut se mouvoir librement dans les trois dimensions de l'espace : on dit qu'*elle a trois degrés de liberté*. Si une contrainte géométrique vient limiter les possibilités de mouvement de notre point, il perd un degré de liberté et ne peut se mouvoir que selon deux dimensions, sur une surface. Cette surface est le *lieu géométrique* des points soumis à la contrainte considérée.

Supposons par exemple que notre particule est attachée à un point fixe par une barre rigide, elle sera alors contrainte à se mouvoir sur une sphère centrée en ce point fixe et dont le rayon est la longueur de la barre. Si notre particule est attachée à un axe par une barre rigide, alors elle se déplacera sur un cylindre circulaire.

Introduisons des coordonnées cartésiennes dans l'espace, alors la contrainte géométrique se décrit algébriquement par une équation. Dans le cas de la sphère de rayon r et centre \mathbf{c} , la condition s'écrit $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = r$, c'est-à-dire (en élevant au carré cette équation)

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2.$$

Dans le cas d'un cylindre circulaire de rayon r et d'axe Oz , on peut écrire l'équation sous la forme :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

De façon générale, *une surface est le lieu géométrique des points de l'espace vérifiant une contrainte ; cette contrainte s'écrit sous la forme d'une équation contenant les coordonnées cartésiennes de l'espace.*

Cette manière de concevoir une surface est dite *implicite* car on peut décider si un point donné appartient ou non à la surface (il suffit de vérifier l'équation), mais on ne dispose en général pas d'une procédure permettant de construire la

surface. Il se peut même qu'une équation ne décrive aucune surface réelle, par exemple l'équation $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ n'est vérifiée par aucun point de \mathbb{R}^3 .

Une autre façon plus explicite de penser à une surface est de nature cinématique : imaginons une courbe qui peut se mouvoir et se déformer dans l'espace. Les points de cette courbe décrivent alors une surface : *une surface est le lieu décrit par une courbe se déplaçant dans l'espace*. La courbe considérée s'appelle alors une *génératrice* de la surface. Un point spécifique de la génératrice se déplace sur une autre courbe qu'on appelle parfois une *base* de la surface.

Voyons quelques exemples :

- Un *cylindre* est obtenu en faisant tourner une droite autour d'un axe parallèle à cette droite. La génératrice est donc une droite et la base est un cercle qui est orthogonal aux génératrices.
- Un *cône* s'obtient en faisant tourner une droite autour d'un axe non parallèle à cette droite.
- Une *sphère* s'obtient en faisant tourner un demi-cercle autour de son diamètre.

Si $u \rightarrow \gamma_0(u)$ est un paramétrage de la génératrice dans sa position initiale et si $u \rightarrow \gamma_t(u)$ représente la génératrice au temps t , alors on obtient une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R}^3 :

$$\psi(u, t) = \gamma_t(u) \in \mathbb{R}^3.$$

La surface se décrit donc sous forme paramétrique, avec deux paramètres u et t correspondant aux deux degrés de libertés. Comme dans le cas des courbes, c'est la forme paramétrique qui est la plus utile dans l'étude des surfaces.

Dans les deux cas (forme implicite ou paramétrique), nous devons faire des hypothèses de régularité pour pouvoir efficacement étudier notre surface, nous supposons en particulier que les fonctions décrivant la surface possèdent des dérivées partielles continues. Sous de bonnes conditions de régularité, on peut démontrer que toute surface implicite admet localement une description paramétrique (théorème 7.5, il ne s'agit pas d'un résultat facile). Les deux points de vues sur les surfaces sont donc en fin de compte localement équivalents.

7.2 Surfaces définies implicitement

Définition. Une *surface* S est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par une équation :

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant les deux conditions suivantes :

- f est de classe C^2 ;
- l'ensemble des points singuliers est contenu dans une (ou plusieurs) courbe(s).

On dit qu'un point $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un *point critique* de la fonction f si $\vec{\nabla} f(p) = \mathbf{0}$. Le point p est un *point singulier* de la surface s'il est situé sur la surface et si c'est un point critique de f . Un point singulier vérifie donc le système de quatre équations suivant :

$$\begin{cases} f(p) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0. \end{cases}$$

Il y a en général peu de solutions, l'ensemble des points singuliers d'une surface peut donc être fini ou même vide. Dans certains cas, il est infini et décrit une (ou plusieurs) courbe(s).

Exemple 7.1 La sphère de rayon r centrée à l'origine est décrite par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Elle n'a aucun point singulier.

Exemple 7.2 L'*hélicoïde* est la surface d'équation

$$\sin(az)x - \cos(az)y = 0.$$

Il n'y a aucun point singulier.

Exemple 7.3 Un *cône circulaire droit* est décrit par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

L'axe du cône est l'axe Oz ; le cône fait un angle α avec son axe où $a = \cotg \alpha$.

Il y a un unique point singulier : l'origine.

Exemple 7.4 Un *cylindre généralisé* (vertical) est une surface obtenue en prenant l'ensemble des droites verticales passant par une courbe \mathcal{C} du plan Oxy .

Si $h(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe \mathcal{C} , alors le cylindre est donné par

$$S : f(x, y, z) = 0$$

où $f(x, y, z) = h(x, y)$ (La courbe et le cylindre ont la même équation, mais l'une de ces équations est définie sur \mathbb{R}^2 et l'autre sur \mathbb{R}^3).

Si $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - a^2 = 0$ (cercle) alors

$$S : x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

est un cylindre circulaire droit.

Si $\mathcal{C} : y^2 + x^2 - x^3 = 0$ (cubique) alors

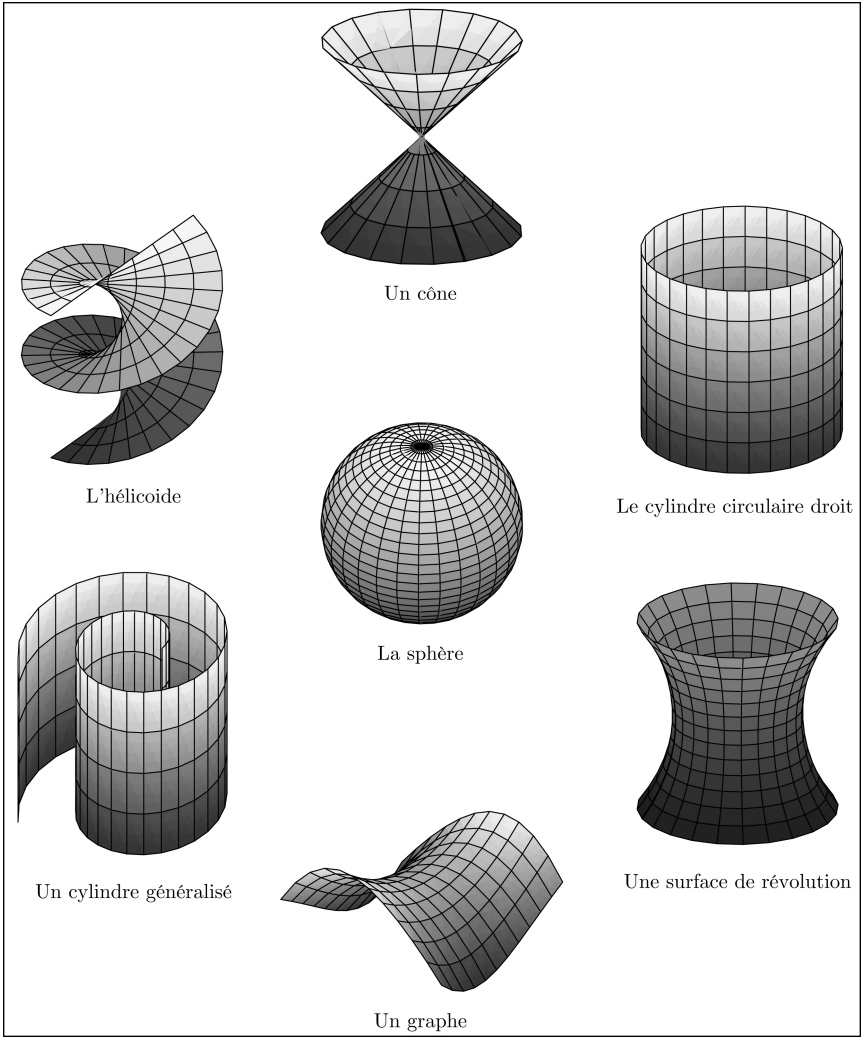
$$S : y^2 + x^2 - x^3 = 0$$

est un cylindre cubique ; une droite peut traverser cette surface en trois points. Observons que les singularités de cette surface forment une droite (l'axe Oz).

Exemple 7.5 Surfaces de révolution

Considérons une courbe contenue dans un demi-plan de coordonnées (r, z) , avec $r > 0$:

$$\Gamma : g(r, z) = 0.$$



La surface de révolution associée est

$$S : f(x, y, z) = 0$$

où $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ (i.e. on remplace r par $\sqrt{x^2 + y^2}$).

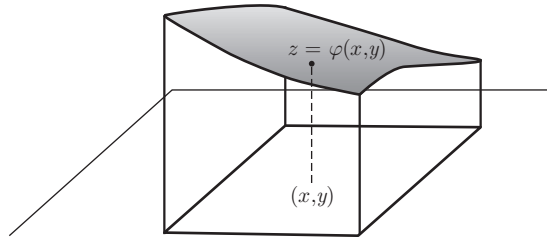
Exemple 7.6 Graphe d'une fonction de deux variables

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$.

Alors

$$S : f(x, y, z) = 0$$

est le *graphe* de la fonction φ .



7.3 Le plan tangent

Définition. Soit p un point régulier d'une surface S . On dit qu'un vecteur fixe \mathbf{v} d'origine p est *tangent* à S s'il existe une courbe paramétrée

$$\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3,$$

de classe C^1 , telle que

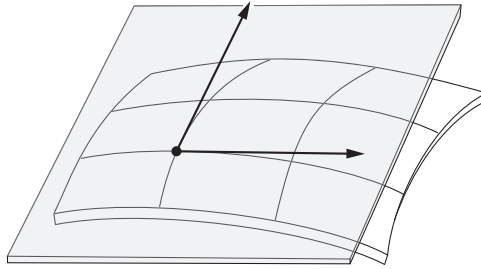
- a) $\gamma(t_0) = p$ pour un certain $t_0 \in I$;
- b) $\gamma(t) \in S$ pour tout $t \in I$;
- c) $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{v}$.

On note $T_p S$ l'ensemble des vecteurs tangents à S en p .

Théorème 7.1 Soit p un point régulier de la surface $S : f(x, y, z) = 0$. Alors un vecteur \mathbf{v} appartient à $T_p S$ si et seulement si

$$\langle \vec{\nabla} f(p), \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (7.1)$$

La preuve de ce théorème est assez longue, nous la donnons un peu plus loin, mais voyons d'abord quelques conséquences.



Plan tangent à une surface.

Corollaire 7.2 *L'ensemble des vecteurs tangents à S en un point régulier p est un espace vectoriel de dimension 2 avec p comme origine. On l'appelle le plan tangent et on le note $T_p S$.*

PREUVE. L'équation (7.1) est bien l'équation d'un plan. □

REMARQUE. $T_p S$ est par définition un ensemble de vecteurs d'origine p , nous l'appelons parfois le *plan vectoriel tangent* à S en p . Mais on peut aussi voir le plan tangent comme un ensemble de points, il se note alors $A_p S$ et est défini par

$$A_p S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{pq} \in T_p S\} = p + T_p S,$$

on appelle $A_p S \subset \mathbb{R}^3$ le *plan affine tangent* en p à S .

Si la surface est définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$, alors on a

$$A_p S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{\nabla} f(p), q - p \rangle = 0\}.$$

Corollaire 7.3 *Le vecteur $\vec{\nabla} f(p)$ est orthogonal à S au point p (i.e. il est orthogonal à tout vecteur du plan tangent).*

En général, on préfère normaliser ce vecteur et définir « le » vecteur normal à S en p par

$$\mathbf{n}_p = \pm \frac{\vec{\nabla} f(p)}{\|\vec{\nabla} f(p)\|}. \quad (7.2)$$

Ce vecteur est de longueur 1, il est bien défini au signe près.

Exemple 7.7 Soit S le graphe de $\varphi(x, y)$ (i.e. $S : \varphi(x, y) = z$). Alors

$$S : f(x, y, z) = 0$$

où $f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$.

Le plan tangent est donc

$$T_p S = \{ \mathbf{v} \mid \langle (-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1), \mathbf{v} \rangle = 0 \},$$

car $\vec{\nabla} f = (-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1)$. Le plan affine tangent admet donc l'équation

$$A_p S : z - z_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p)(y - y_0),$$

où on a posé $p = (x_0, y_0, z_0)$ et $q = (x, y, z)$.

PREUVE DU THÉORÈME 7.1

Soit γ une courbe tracée sur la surface S et telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Comme $\gamma(t) \in S$, nous avons $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout t . Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle \\ &= \langle \vec{\nabla} f(p), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que tout vecteur tangent est solution de l'équation (7.1).

Inversement, nous devons prouver que tout vecteur \mathbf{v} orthogonal à $\vec{\nabla} f(p)$ est un vecteur tangent à S en p . Le raisonnement est semblable à la preuve du théorème des fonctions implicites 6.44 et du corollaire 6.45.

Considérons la courbe

$$\gamma(t) = p + t \cdot \mathbf{v} + g(t) \cdot \vec{\nabla} f(p)$$

où $g(t)$ est une fonction que nous voulons déterminer. La courbe γ passe par le point p si $g(0) = 0$ et elle est tracée sur la surface si et seulement si $f(\gamma(t)) = 0$ pour tout t . En dérivant nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \mathbf{v} + \dot{g}(t) \cdot \vec{\nabla} f(p) \rangle \\ &= \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \mathbf{v} \rangle + \dot{g}(t) \cdot \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \vec{\nabla} f(p) \rangle \end{aligned}$$

donc

$$\dot{g}(t) = - \frac{\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \mathbf{v} \rangle}{\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)), \vec{\nabla} f(p) \rangle}. \quad (7.3)$$

Remarquons que $\gamma(t)$ est fonction de t et de $g(t)$, donc l'équation (7.3) est une équation différentielle du type $\dot{g}(t) = \Phi(t, g(t))$. Soit $g(t)$ la solution (définie

localement pour $-\epsilon < t < \epsilon$ vérifiant la condition initiale $g(0) = 0$. Alors la courbe correspondante γ vérifie $\gamma(0) = p$ et

$$\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v} + \dot{g}(0) \cdot \vec{\nabla} f(p).$$

Mais

$$\dot{g}(0) = -\frac{\langle \vec{\nabla} f(p), \mathbf{v} \rangle}{\langle \vec{\nabla} f(p), \vec{\nabla} f(p) \rangle} = 0 \quad (7.4)$$

par hypothèse, donc $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Finalement, la courbe γ est tracée sur la surface car $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0$ (par choix de la fonction g) et $f(\gamma(0)) = f(p) = 0$ (car p est sur la surface). Donc $f(\gamma(t)) = f(p) = 0$ pour tout p .

On a construit une courbe γ qui est tracée sur la surface et telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. On a donc bien montré que \mathbf{v} est un vecteur tangent à S en p . □

7.4 Surfaces paramétrées

Définition. Soit S une surface de \mathbb{R}^3 . Un *paramétrage* (local) d'une partie de S est la donnée :

- a) d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (le « domaine de paramétrage ») ;
- b) d'une application injective $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 , sans point singulier et telle que $\psi(\Omega) \subset S$.

On note (u_1, u_2) les coordonnées sur Ω . La condition b) signifie que les deux vecteurs

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_1}(u_1, u_2), \quad \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

sont linéairement indépendants pour tout $(u_1, u_2) \in \Omega$.

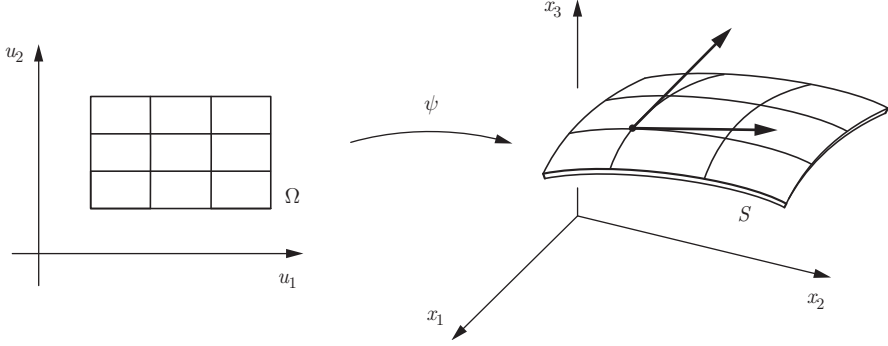
Les paramètres u_1, u_2 s'appellent les *coordonnées curvilignes* de la surface paramétrée S . Les courbes $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}$ s'appellent les *lignes de coordonnées* sur la surface paramétrée S ; ensemble, elles forment le *réseau de coordonnées*.

Proposition 7.4 Soit $p = \psi(u_1, u_2)$. Les deux vecteurs

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_1}(u_1, u_2), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

forment une base du plan vectoriel tangent $T_p S$ au point $p = \psi(u_1, u_2)$.

On dit que $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ est la *base adaptée* au paramétrage ψ du plan tangent $T_p S$.



PREUVE. Considérons la courbe définie par $\gamma(t) = \psi(u_1 + t, u_2)$. Alors $\gamma(0) = p$ et $\gamma(t) \in S$ pour tout t . Par conséquent, le vecteur

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \dot{\gamma}(0)$$

est un vecteur tangent à S au point p .

Le même raisonnement montre que $\frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u_1, u_2) \in T_p S$. Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants et $T_p S$ est de dimension 2, on en déduit qu'ils forment une base. \square

Théorème 7.5 *On peut paramétrer une surface implicite de classe C^2 ,*

$$S : f(x, y, z) = 0,$$

au voisinage de tout point régulier.

IDÉE DE LA PREUVE. Par définition, tout vecteur du plan tangent est le vecteur vitesse d'une courbe tracée sur la surface. On peut donc associer à tout vecteur de $T_p S$ assez petit le point de cette courbe correspondant au paramètre 1. Cela définit une bijection locale d'un voisinage de l'origine du plan tangent vers une région de la surface.

De façon un peu plus détaillée : soit p un point régulier de la surface et $\xi, \eta \in T_p S$ deux vecteurs linéairement indépendants du plan tangent. Considérons l'application suivante à valeur dans la surface :

$$h(t, u, v) = p + t(u\xi + v\eta) + g(t, u, v)\vec{\nabla} f(p)$$

où g est une fonction à déterminer. La condition $h(t, u, v) \in S$ entraîne que $f(h(t, u, v)) = 0$ pour tout t et on a donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} f(h(t, u, v)) = \left\langle \vec{\nabla} f(h(t, u, v)), (u\xi + v\eta) + \frac{\partial g}{\partial t} \vec{\nabla} f(p) \right\rangle,$$

qui est une équation différentielle en g . En résolvant cette équation différentielle avec la condition initiale $g(0, u, v) = 0$, on trouve pour tout (u, v) une courbe (locale) tracée sur la surface. La fonction

$$\psi(u, v) = h(1, u, v) \quad (7.5)$$

est un paramétrage local de S , bien défini pour u, v assez petits. \square

Nous pouvons donner plus d'informations sur le paramétrage obtenu dans la preuve précédente. Supposons que $\{\xi, \eta\}$ est une base orthonormée de $T_p S$ et notons $\mathbf{n}_p = \frac{\vec{\nabla} f(p)}{\|\vec{\nabla} f(p)\|}$ le vecteur normal en p . Alors le paramétrage (7.5) s'écrit

$$\psi(u, v) = p + u\xi + v\eta + \varphi(u, v)\mathbf{n}_p$$

avec $\varphi(u, v) = g(1, u, v) \cdot \|\vec{\nabla} f(p)\|$. Observons que le vecteur

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(0, 0) = \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0)\mathbf{n}_p$$

appartient $T_p S$. Il est donc orthogonal à \mathbf{n}_p et on a donc $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0) = 0$. De même $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0) = 0$. Ceci nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 7.6 *Soit p un point régulier de la surface S de classe C^1 . Alors on peut trouver un système x, y, z de coordonnées orthonormées de \mathbb{E}^3 pour lequel $p = (0, 0, 0)$ est l'origine et la surface S est localement définie comme le graphe d'une fonction*

$$S : z = \varphi(x, y),$$

telle que

$$\varphi(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0. \quad (7.6)$$

En particulier, le plan tangent en $p = (0, 0, 0)$ est le plan des coordonnées Oxy et le vecteur normal en p est $\mathbf{n}_p = (0, 0, 1)$.

PREUVE. Donnons une base orthonormée $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ du plan tangent $T_p S$ et posons $\mathbf{n} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$. Il suffit alors de prendre les coordonnées cartésiennes associées au repère $\{p, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{n}\}$ (pour lesquelles le point q de coordonnées (x, y, z) est le point $q = p + x\mathbf{k}_1 + y\mathbf{k}_2 + z\mathbf{n}$). \square

Définition. On dit que les axes de coordonnées $Oxyz$ sont *adaptés* à la surface S au point p si dans ces coordonnées $p = (0, 0, 0)$ et si la surface se décrit au voisinage de ce point comme un graphe $z = \varphi(x, y)$ où la fonction φ vérifie (7.6), i.e. elle s'annule en p ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. Le théorème précédent dit précisément que l'on peut introduire des axes adaptés à un point quelconque que l'on choisit sur une surface régulière.

7.5 Le tenseur métrique

Définition. Le repère adapté à la surface paramétrée $\psi(u_1, u_2)$ est le repère mobile donné pour tout (u_1, u_2) dans le domaine de paramétrage Ω par

$$\{p = \psi(u_1, u_2), \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}\},$$

où

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(u_1, u_2) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(u_1, u_2) = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$$

et

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u_1, u_2) = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right\|}.$$

On remarque que \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont linéairement indépendants par hypothèse. Donc le vecteur \mathbf{n} est bien défini et il est orthogonal à la surface puisque \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont tangents à S .

Le repère adapté $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}$ à un paramétrage joue un rôle analogue en théorie des surfaces à celui du repère de Frenet en théorie des courbes. Il y a toutefois d'importantes différences : contrairement au repère de Frenet, le repère adapté n'est en général pas orthonormé. De plus ce repère n'est pas lié de façon intrinsèque à la surface mais il dépend du paramétrage choisi.

Définition. Les vecteurs $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ne forment en général pas une base orthonormée du plan tangent $T_p S$. La matrice de Gram \mathbf{G} de ces deux vecteurs s'appelle le *tenseur métrique* de la surface S dans le paramétrage ψ :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Notons que les vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ dépendent des paramètres (u_1, u_2) , donc le tenseur métrique est une fonction de ces paramètres $\mathbf{G} = \mathbf{G}(u_1, u_2)$.

Le tenseur métrique s'appelle aussi la *première forme fondamentale* de S . On verra plus loin qu'il y a aussi une deuxième et une troisième formes fondamentales.

On note habituellement $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ les coefficients du tenseur métrique, ce sont des fonctions des paramètres $(u_1, u_2) \in \Omega$, observons que nous avons

$$g_{21} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle = g_{12},$$

le tenseur métrique est donc une matrice symétrique. Observons également que

$$\det(\mathbf{G}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|^2.$$

Le tenseur métrique est l'une des notions clés de la théorie des surfaces. On verra plus loin qu'il contrôle une grande partie de la géométrie des surfaces

(aires, angles, longueurs...). En fait le tenseur métrique contrôle *toute* la géométrie *intrinsèque* de la surface, celle qui dépend des propriétés propres à la surface, par opposition aux propriétés extrinsèques qui dépendent de la façon dont la surface est plongée dans l'espace à trois dimensions. Cette discussion sera reprise et précisée plus loin (sect. 7.26).

Considérons maintenant deux vecteurs tangents à la surface S au point p , ces vecteurs s'écrivent

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{b}_2, \quad \boldsymbol{\eta} = \eta_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \eta_2 \cdot \mathbf{b}_2.$$

Proposition 7.7

i) Le produit scalaire de $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$ est donné par

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle &= g_{11} \cdot \xi_1 \eta_1 + g_{12}(\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + g_{22} \cdot \xi_2 \eta_2 \\ &= (\xi_1 \ \xi_2) \mathbf{G} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) L'aire du parallélogramme construit sur $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ est

$$\| \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} \| = \sqrt{\det(\mathbf{G})} \cdot |\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1|.$$

PREUVE. La première assertion vient de la méthode pour calculer des produits scalaires dans une base quelconque vue au chapitre 3 (p. 104). Pour montrer la seconde identité, on calcule :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} &= (\xi_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{b}_2) \times (\eta_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \eta_2 \cdot \mathbf{b}_2) \\ &= (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

On peut donc conclure, car on sait (voir la remarque de la page 107) que

$$\| \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \| = \sqrt{\det \mathbf{G}}. \quad (7.7)$$

□

REMARQUE. Lorsqu'un paramétrage de la surface a été choisi, le repère adapté $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}$ est alors donné et on peut écrire les vecteurs du plan tangent $T_p S$ par leur composante dans la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Ainsi le vecteur $\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{b}_2$ s'écrit simplement $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et de même pour $\boldsymbol{\eta}$. Nous noterons alors le produit scalaire sous la forme

$$g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = g_{11} \cdot \xi_1 \eta_1 + g_{12}(\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + g_{22} \cdot \xi_2 \eta_2. \quad (7.8)$$

La notation $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ présente l'avantage de nous rappeler que le tenseur métrique, c'est-à-dire la matrice de Gram de la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, intervient dans le calcul du produit scalaire. En particulier, nous avons

$$\| \boldsymbol{\xi} \|^2 = g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{11} \cdot \xi_1^2 + 2 g_{12} \cdot \xi_1 \xi_2 + g_{22} \cdot \xi_2^2.$$

Le cosinus de l'angle entre ξ et η est également facile à calculer :

$$\cos(\angle \xi, \eta) = \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{g(\xi, \xi)} \cdot \sqrt{g(\eta, \eta)}}.$$

Par exemple, l'angle $\omega = \omega(u_1, u_2)$ entre les lignes de coordonnées $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}$ est défini par $\omega = \angle(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, et on a donc

$$\cos(\omega) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}}.$$

En particulier, le réseau de coordonnées est orthogonal si et seulement si $g_{12} = 0$.

REMARQUE. La lettre g est aussi utilisée pour le déterminant du tenseur métrique : $\sqrt{g} = \sqrt{\det \mathbf{G}}$. C'est une abréviation commode, mais à manipuler avec précaution, notamment en raison de la remarque précédente.

Base duale à la base adaptée

La base duale à la base adaptée $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}$ se définit par les formules (voir page 153) :

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}]}, \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}]}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}]}.$$

Observons que $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \sqrt{\det \mathbf{G}} \mathbf{n}$, donc $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}] = \sqrt{\det \mathbf{G}}$. Ainsi

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{G}}} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{c}_2 = -\frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{G}}} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{n}.$$

Rappelons aussi que la formule (4.13) nous dit que

$$\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (7.9)$$

Il sera utile d'exprimer la base duale dans la base adaptée. Cette expression est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 7.8 *Notons g^{ij} les coefficients du développement des vecteurs $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dans la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$:*

$$\mathbf{c}_1 = g^{11} \mathbf{b}_1 + g^{12} \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{c}_2 = g^{21} \mathbf{b}_1 + g^{22} \mathbf{b}_2.$$

Alors (g^{ij}) est la matrice inverse du tenseur métrique (g_{ij}) .

PREUVE. Les relations (7.9) entraînent que

$$\delta_{ij} = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \langle g^{i1} \mathbf{b}_1 + g^{i2} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_j \rangle = g^{i1} g_{1j} + g^{i2} g_{2j}.$$

Donc (g^{ij}) est bien la matrice inverse de (g_{ij}) . □

Voyons quelques exemples de calculs de tenseur métrique.

Exemple 7.8 (Surface de révolution) Soit S la surface de révolution autour de l'axe $0z$ dont le profil est la courbe

$$\mathcal{C} : g(r, z) = 0.$$

Pour paramétrer la surface S , on commence par choisir un paramétrage $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ du profil \mathcal{C}

$$\alpha(v) = (r(v), z(v));$$

puis on prend $\Omega = [0, 2\pi] \times I$ comme domaine de paramétrage. Le paramétrage $\psi \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S est alors donné par

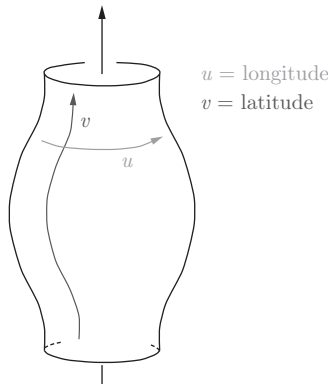
$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

où

$$\begin{cases} x(u, v) = r(v) \cos(u) \\ y(u, v) = r(v) \sin(u) \\ z(u, v) = z(v). \end{cases}$$

Les courbes $u = \text{const.}$ sont les *méridiens* et les courbes $v = \text{const.}$ sont les *parallèles*.

La coordonnée u s'appelle *longitude* et la coordonnée v s'appelle *latitude*.



La base du plan tangent associée à ce paramétrage est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ z'(v) \end{pmatrix}$$

Les coefficients du tenseur métrique sont

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\|^2 = r(v)^2, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0$$

et

$$g_{22} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|^2 = r'(v)^2 + z'(v)^2$$

et donc

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (r'^2 + z'^2) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le réseau des coordonnées longitude-latitude est partout orthogonal puisque $g_{12} \equiv 0$.

Application à la sphère

La sphère de rayon a centrée à l'origine

$$S_a : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

est la surface de révolution du demi-cercle

$$\gamma(v) = (a \sin(v), a \cos(v)) \quad (0 \leq v \leq \pi).$$

Le paramétrage de la sphère est donc donné par

$$\begin{cases} x = a \cos(u) \sin(v) \\ y = a \sin(u) \sin(v) \\ z = a \cos(v) \end{cases}$$

où (u, v) parcourt le domaine défini par $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$. Les formules précédentes nous donnent le tenseur métrique suivant :

$$g_{11} = a^2(\sin(v))^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \quad (7.10)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{pmatrix} a^2(\sin(v))^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.9 (Graphe) Si S est un graphe $z = \varphi(x, y)$, alors un paramétrage est donné par

$$\psi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)).$$

La base associée du plan tangent est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients du tenseur métrique sont donc

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2.$$

Exemple 7.10 (Surface réglée)

Une surface est dite *régulée* si elle est une réunion de droites ou de segments de droites, ces droites sont appelées les *génératrices*. Le plan, le cylindre et le cône sont les exemples les plus simples de surfaces réglées.

Pour paramétrer une surface réglée, on se donne une courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ transverse aux génératrices et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(u)$ le long de α , ce champ indique la direction des génératrices. La surface est alors paramétrée par

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v \mathbf{w}(u)$$

où $(u, v) \in \Omega := I \times \mathbb{R}$.

On a alors

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \dot{\alpha}(u) + v \dot{\mathbf{w}}(u), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \mathbf{w}(u).$$

D'où

$$\begin{cases} g_{11} = \|\dot{\alpha}\|^2 + 2 \langle \dot{\alpha}, \dot{\mathbf{w}} \rangle v + v^2 \|\dot{\mathbf{w}}\|^2 \\ g_{12} = \langle \dot{\alpha}, \mathbf{w} \rangle + v \langle \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w} \rangle \\ g_{22} = \|\mathbf{w}\|^2. \end{cases}$$

7.6 Aire d'une surface paramétrée

Soit $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3$ une surface paramétrée. Considérons un (petit) parallélogramme curviligne $p_{0,0}p_{1,0}p_{1,1}p_{0,1}$ sur cette surface où

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= \psi(u_0, v_0) & p_{1,0} &= \psi(u_0 + \Delta u, v_0) \\ p_{0,1} &= \psi(u_0, v_0 + \Delta v) & p_{1,1} &= \psi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v). \end{aligned}$$

Notons ΔA l'aire de ce parallélogramme, nous avons l'approximation

$$\Delta A \cong \|\overrightarrow{p_{0,0}p_{1,0}} \times \overrightarrow{p_{0,0}p_{0,1}}\|.$$

Or le théorème des accroissements finis permet d'écrire les approximations

$$\overrightarrow{p_{0,0}p_{1,0}} \cong \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \quad \text{et} \quad \overrightarrow{p_{0,0}p_{0,1}} \cong \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v,$$

en sorte que

$$\Delta A \cong \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\| |\Delta u \Delta v|.$$

L'identité de Lagrange et la définition du tenseur métrique nous disent que

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|^2 = \det \mathbf{G},$$

ce qui entraîne

$$\Delta A \cong \sqrt{\det \mathbf{G}} |\Delta u \Delta v|.$$

En faisant tendre $\Delta u \rightarrow 0$ et $\Delta v \rightarrow 0$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\text{Aire}(S) = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega} \sqrt{\det \mathbf{G}} \, dudv. \quad (7.11)$$

Le raisonnement qui précède est en réalité un raisonnement heuristique et non une preuve. Nous prendrons la formule (7.11) comme une *définition* de l'aire de la surface paramétrée. La formule de changement de variables dans les intégrales doubles permet de prouver que l'aire ainsi définie ne change pas lorsqu'on change de représentation paramétrique.

Exemple 7.11 Le paramétrage par longitude et latitude de la sphère de rayon a , admet $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ comme domaine de paramétrage et on a

$$g_{11} = (a \sin(v))^2 \quad g_{12} = 0 \quad g_{22} = a^2$$

donc $dA = a^2 \sin(v) \, dudv$ et l'aire de cette sphère est

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} dA &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi} a^2 \sin(v) \, dudv \\ &= \int_{u=0}^{2\pi} \left[-a^2 \cos(v) \Big|_{v=0}^{\pi} \right] du \\ &= \int_{u=0}^{2\pi} 2a^2 \, du = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

7.7 Longueur d'une courbe tracée sur une surface

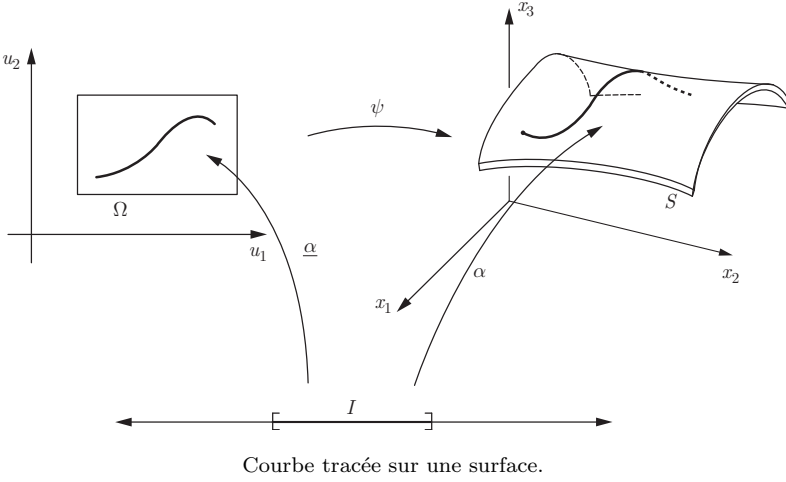
Considérons une courbe paramétrique $\alpha(t) \in S$, ($t \in I$) tracée sur une surface paramétrée $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. Un point $\alpha(t)$ de cette courbe peut être repéré par

- ses trois coordonnées $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$,
- ou par ses deux paramètres $(u_1(t), u_2(t)) \in \Omega$.

Nous sommes donc en présence d'une courbe auxiliaire $\underline{\alpha}(t) \in \Omega$ évoluant dans le domaine de paramétrage Ω et telle que

$$\psi \circ \underline{\alpha}(t) = \alpha(t)$$

pour tout $t \in I$.



Proposition 7.9 *Le vecteur $\dot{\alpha} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ est donné à partir des fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ par*

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{b}_2$$

PREUVE. Le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt},$$

pour $i = 1, 2, 3$. On a donc

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} = \frac{du_1}{dt} \mathbf{b}_1 + \frac{du_2}{dt} \mathbf{b}_2.$$

□

Corollaire 7.10 *La vitesse de α est donnée par*

$$V(t) = \|\dot{\alpha}\| = \sqrt{g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})} = \sqrt{g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2}. \quad (7.12)$$

□

Pour calculer la longueur de α , il faut simplement intégrer la vitesse :

$$\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2} dt \quad (7.13)$$

REMARQUE. Notons $s(t)$ l'abscisse curviligne de la courbe α . Alors on a $V(t) = \frac{ds}{dt}$ et si on élève l'identité (7.12) au carré et qu'on la multiplie par dt^2 , on obtient symboliquement l'expression

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2. \quad (7.14)$$

Cette expression représente le *carré de la longueur infinitésimale* de la courbe, elle contient la même information que le tenseur métrique. Par exemple sur la sphère, pour le paramétrage décrit en page 303, on a $ds^2 = a^2 ((\sin(v))^2 du^2 + dv^2)$.

Exemple 7.12 Calculons la longueur d'un méridien sur la sphère S_a de rayon a . Ce méridien m est défini par $u = u_0 = \text{cte}$ et $v = t$, $0 \leq t \leq \pi$.

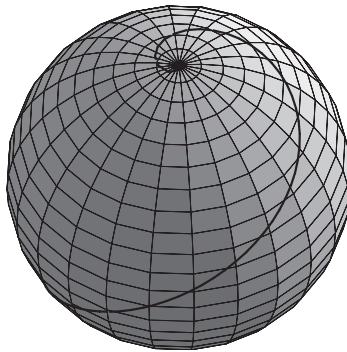
Rappelons (équ. 7.10) que sur la sphère, on a le tenseur métrique $g_{11} = a^2(\sin(v))^2$, $g_{12} = 0$ et $g_{22} = a^2$. Donc

$$\begin{aligned} \ell(m) &= \int_m ds = \int_0^\pi \sqrt{a^2 (\sin(v))^2 \dot{u}^2 + a^2 \dot{v}^2} dt \\ &= a \int_0^\pi dt = \pi \cdot a, \end{aligned}$$

car $\dot{u} = 0$ et $\dot{v} = 1$.

7.8 La loxodrome

Une *loxodrome* est une courbe sur la sphère coupant tous les méridiens selon un angle constant μ (appelé l'*azimut* ou le *cap*).



La loxodrome.

Représentons la loxodrome dans le domaine de paramétrage standard de la sphère (voir page 303) sous la forme

$$v \rightarrow (h(v), v).$$

Le méridien est représenté par $v \rightarrow (u_0, v)$ (où u_0 est constante). Supposons la sphère de rayon 1, alors le tenseur métrique est

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\sin(v))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La vitesse du méridien est donc 1 et la vitesse de la loxodrome est

$$\sqrt{(\sin(v) h'(v))^2 + 1}.$$

Le produit scalaire entre les vecteurs vitesses du méridien et de la loxodrome est

$$(h'(v) 1) \begin{pmatrix} (\sin(v))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Donc le cosinus de μ est

$$\cos(\mu) = \frac{1}{\sqrt{(\sin(v))^2 h'(v)^2 + 1}},$$

c'est-à-dire

$$h'(v) = \pm \frac{\tan(\mu)}{\sin(v)}.$$

En intégrant par rapport à v , on trouve (voir digression p. 274)

$$u = h(v) = c \pm \tan(\mu) \log \left(\tan\left(\frac{v}{2}\right) \right),$$

(où c est une constante d'intégration). On peut aussi écrire ce résultat ainsi

$$v = 2\text{Arctan} \left(e^{(c \pm u)/\tan(\mu)} \right).$$

Bien que la loxodrome ne soit pas le plus court chemin entre deux points de la sphère, elle a longtemps été utilisée en navigation maritime car il suffit d'une boussole pour maintenir son cap le long d'une loxodrome.

7.9 Géodésiques sur une surface

Soit $\gamma(t)$ une courbe de classe C^2 tracée sur une surface S . Son vecteur vitesse $\dot{\gamma}(t)$ est par définition tangent à la surface pour tout t , mais ça n'est pas le cas de son accélération. Nous pouvons donc décomposer le vecteur accélération en une composante tangente à la surface et une composante normale, ainsi

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_n(t) + \ddot{\gamma}_S(t),$$

où

$$\ddot{\gamma}_n(t) = \langle \ddot{\gamma}(t), \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$$

est la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur le vecteur normal à la surface et

$$\ddot{\gamma}_S(t) = \ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}_n(t) = (\mathbf{n} \times \dot{\gamma}(t)) \times \mathbf{n}$$

est la composante tangentielle.

Définition. On dit que la courbe γ tracée sur S est *géodésique* si son accélération tangentielle est identiquement nulle : $\ddot{\gamma}_S(t) \equiv \mathbf{0}$.

Il est clair que l'équation des géodésiques peut s'écrire en fonction du repère adapté $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}\}$:

$$\ddot{\gamma}(t) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (7.15)$$

ou sous la forme du système

$$\begin{cases} \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{b}_1 \rangle = 0; \\ \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{b}_2 \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Proposition 7.11 *Une géodésique est toujours parcourue à vitesse constante.*

PREUVE. Soit γ une géodésique sur la surface S , nous devons montrer que $V_\gamma(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ est constante. On a en effet :

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

car $\dot{\gamma}(t)$ est tangent à la surface et $\ddot{\gamma}(t)$ est orthogonal à celle-ci. □

Exemple 7.13 *Les géodésiques d'un plan sont les droites de ce plan qui sont paramétrées affinement.*

PREUVE. Le plan admet l'équation $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = p$, et toute courbe γ sur ce plan a une vitesse et une accélération orthogonale à \mathbf{n} . Par conséquent, $\ddot{\gamma}_n = \mathbf{0}$ et donc γ est une courbe d'accélération nulle, car

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_n(t) + \ddot{\gamma}_S(t) = \mathbf{0}. \quad \square$$

Exemple 7.14 *Les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles, c'est-à-dire l'intersection de la sphère avec un plan passant par son centre.*

PREUVE. Soit S la sphère de rayon r centrée à l'origine, alors pour tout point $\mathbf{x} \in S$, le vecteur normal en \mathbf{x} est $\mathbf{n}_x = \frac{1}{r}\mathbf{x}$.

Si γ est une géodésique, alors $\ddot{\gamma}(t)$ est colinéaire au vecteur normal $\mathbf{n}_{\gamma(t)} = \frac{1}{r}\gamma(t)$. Donc $\ddot{\gamma}(t) \times \gamma(t) = \mathbf{0}$, ce qui entraîne que $\dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)$ est constant car

$$\frac{d}{dt} (\dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)) = \ddot{\gamma}(t) \times \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}(t) \times \gamma(t) = \mathbf{0}.$$

Notons $\mathbf{m} = \dot{\gamma}(t) \times \gamma(t)$ ce vecteur constant, on a clairement

$$\langle \gamma, \mathbf{m} \rangle = 0$$

pour tout t , donc la courbe γ est contenue dans le plan passant par $\mathbf{0}$ et orthogonal à \mathbf{m} . \square

Théorème 7.12 *Si une courbe γ tracée sur une surface S réalise le plus court chemin entre deux points, alors cette courbe est géodésique. Réciproquement, toute géodésique minimise localement la longueur.*

PREUVE. Donnons l'idée de preuve de la première affirmation de ce théorème. L'affirmation réciproque est plus délicate et nécessite quelques techniques du *calcul des variations*, qui est un chapitre de l'analyse avancée.

Considérons une courbe $\gamma_0(s)$ ($a \leq s \leq b$) tracée sur la surface S . Pour simplifier, on la suppose paramétrée naturellement. Nous pouvons considérer qu'une perturbation de cette courbe est une famille γ_t de courbes tracées sur S dépendant d'un paramètre t , et telle que $\gamma_t(a) = \gamma_0(a)$ et $\gamma_t(b) = \gamma_0(b)$ pour tout t .

Notons $f(s, t) = \gamma_t(s)$ et $\ell(t) = \ell(\gamma_t)$ la longueur de γ_t , alors

$$\ell(t) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_t(s)\| ds = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle} ds.$$

Comme ℓ atteint un minimum en $t = 0$, on a $\ell'(0) = 0$. Donc

$$\frac{d}{dt} \ell(\gamma_t) = \frac{d}{dt} \int_a^b \|\dot{\gamma}_t(s)\| ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle} \right) ds$$

s'annule en $t = 0$. Observons que

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle} = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial t \partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle}} = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle}}.$$

On a supposé que $\|\dot{\gamma}_0(s)\| = 1$, donc nous avons

$$\sqrt{\left\langle \frac{\partial f(s, 0)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, 0)}{\partial s} \right\rangle} = \|\dot{\gamma}_0(s)\| = 1,$$

et donc, en $t = 0$:

$$\frac{d}{dt} \ell(\gamma_t) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle ds.$$

Nous allons faire une intégration par parties, on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s^2} \right\rangle.$$

Par conséquent (toujours en $t = 0$)

$$\frac{d}{dt} \ell(\gamma_t) = \left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right\rangle \Big|_{s=a}^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial f(s, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s^2} \right\rangle ds.$$

Le premier terme de cette somme est nul car nous avons supposé que $\gamma_t(a) = \gamma_0(a)$ et $\gamma_t(b) = \gamma_0(b)$ pour tout t , donc $\frac{\partial f(a, 0)}{\partial t} = \frac{\partial f(b, 0)}{\partial t} = 0$. En conclusion, nous avons démontré que

$$0 = \ell'(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{\partial f(s, 0)}{\partial t}, \frac{\partial^2 f(s, 0)}{\partial s^2} \right\rangle ds = - \int_a^b \left\langle \frac{\partial f(s, 0)}{\partial t}, \ddot{\gamma}_0 \right\rangle ds.$$

Comme la perturbation $f(s, t)$ de la courbe γ_0 est quelconque, on en déduit que

$$\int_a^b \langle \mathbf{Z}(s), \ddot{\gamma}_0 \rangle ds = 0$$

pour tout champ de vecteur \mathbf{Z} le long de la courbe γ_0 qui est tangent à la surface. Ceci n'est possible que si $\ddot{\gamma}_0$ est orthogonal à la surface. \square

Mentionnons deux autres résultats justifiant l'importance des géodésiques :

- Si une particule se déplace librement sur une surface S et qu'il n'existe aucune autre force agissant sur cette particule que celles qui la contraignent à rester sur la surface, alors le *principe de moindre action* nous dit que, dans cette situation, la particule suit une trajectoire géodésique (sauf si elle est en repos).
- Si une courbe élastique est tendue sur une surface convexe S , alors cette courbe suit une géodésique.

7.10 Courbures normales d'une surface

Une *orientation* d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est la donnée en chaque point $p \in S$ d'un vecteur \mathbf{n}_p normal à S en p , de longueur 1, et variant continûment avec le point p . Nous avons vu plus haut comment calculer le vecteur normal à partir d'une équation ou d'un paramétrage de la surface. Lorsqu'une surface est orientable, il y a deux choix d'orientation possibles.

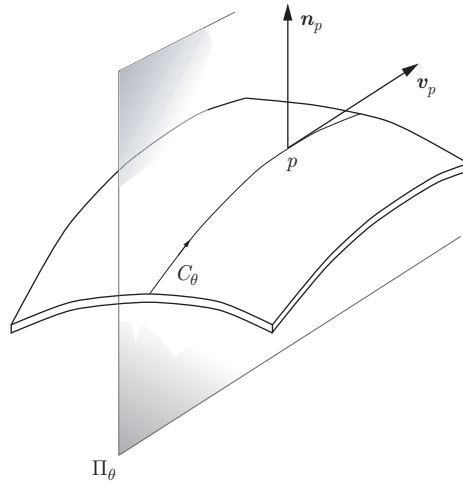
Toutes les surfaces ne sont pas globalement orientables. Le ruban de Möbius est un exemple célèbre de surface non orientable. Cependant, il est toujours possible d'orienter une surface localement.

REMARQUE. Le plan tangent $T_p S$ à une surface orientée S est lui-même un plan orienté par la convention suivante : deux vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 forment une base directe de $T_p S$ si les trois vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}_p\}$ forment une base d'orientation positive dans l'espace. En particulier, on peut parler d'angle (positif ou négatif) entre deux vecteurs de $T_p S$.

Définition. Une *section normale* au point p d'une surface orientée S est un plan Π contenant p et le vecteur normal \mathbf{n}_p à S en p . De façon plus précise, choisissons un vecteur tangent $\mathbf{v}_0 \in T_p S$, et notons \mathbf{v}_θ le vecteur de $T_p S$ faisant un angle θ avec \mathbf{v}_0 dans le sens positif.

Le plan Π_θ passant par p et de direction \mathbf{v}_θ et \mathbf{n}_p s'appelle la section normale en direction θ de la surface S au point p .

On donne au plan Π_θ l'orientation compatible avec la base $\{\mathbf{v}_\theta, \mathbf{n}\}$.



Section normale.

Notons C_θ la courbe $S \cap \Pi_\theta$, et parcourons cette courbe dans la direction de \mathbf{v}_θ . La courbure orientée en p de C_θ est alors bien définie, on la note $k_p(\mathbf{v}_\theta)$.

Définition. La courbure $k_p(\mathbf{v}_\theta)$ est la *courbure normale* de S au point p dans la direction de \mathbf{v}_θ .

Pour simplifier, on note aussi $k_p(\theta) := k_p(\mathbf{v}_\theta)$.

Lemme 7.13 Les courbures normales de deux directions opposées coïncident, i.e. $k_p(\theta) = k_p(\theta + \pi)$.

PREUVE. Notons $\theta' = \theta + \pi$. Les courbes C_θ et $C_{\theta'}$ sont identiques, mais avec orientation opposée car elles sont parcourues dans le sens inverse l'une de l'autre, donc $k_p(\theta) = \pm k_p(\theta + \pi)$. Or les plans Π_θ , et $\Pi_{\theta'}$ ont également des orientations opposées, par conséquent les deux courbures ont le même signe. \square

Exemple 7.15 Soit S la surface définie par le graphe de la fonction $z = \varphi(x, y)$. Supposons que les axes soient adaptés au point $p = (0, 0, 0)$, en sorte que $\varphi(0, 0) = 0$ et que le vecteur normal en p est $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ (et donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0$). Choisissons $\mathbf{v}_0 = (1, 0, 0)$, alors on a

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\theta &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0); \\ \Pi_\theta &= \{(t \cos(\theta), t \sin(\theta), z) \mid t, z \in \mathbb{R}\}; \\ C_\theta &= \{(t \cos(\theta), t \sin(\theta), \varphi_\theta(t)) \mid t, z \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

où $\varphi_\theta(t) = \varphi(t \cos(\theta), t \sin(\theta))$.

On sait que la courbure de C_θ en p est donnée par $k_p(\theta) = \varphi''_\theta(0)$, ce qui nous donne, après un petit calcul :

$$k_p(\theta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 0) \cos(\theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 0) \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 0) \sin(\theta)^2. \quad (7.17)$$

7.11 Courbure moyenne

Définition. La *courbure moyenne* $H(p)$ d'une surface S en un point p est la moyenne des courbures normales de S dans toutes les directions :

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_p(\theta) d\theta.$$

Pour calculer la courbure moyenne, on utilise le théorème suivant découvert par Euler vers 1750.

Théorème 7.14 La courbure moyenne est donnée par la formule suivante, valable pour tout angle θ :

$$H(p) = \frac{1}{2} \left(k_p(\theta) + k_p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Il suffit donc de faire la moyenne des courbures dans deux directions orthogonales pour obtenir la courbure moyenne.

Preuve du théorème Choisissons un système de coordonnées adapté à la surface au point p , c'est-à-dire un système de coordonnées orthonormé de \mathbb{E}^3 , centré en p et pour lequel la surface S est le graphe de la fonction $z = \varphi(x, y)$ et $\mathbf{n}_p = (0, 0, 1)$.

Posons pour simplifier

$$M(\theta) = \frac{1}{2} \left(k_p(\theta) + k_p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

alors on a clairement

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\theta) d\theta.$$

Il suffit donc de vérifier que $M(\theta)$ est indépendant de θ .

On a en effet d'après l'équation (7.17)

$$k_p(\theta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(\theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sin(\theta)^2$$

et

$$k_p(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sin(\theta)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(\theta)^2.$$

D'où

$$M(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 0) \right).$$

□

REMARQUE. On a montré, en passant, l'identité

$$H(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 0) \right).$$

Cette formule n'est toutefois valide qu'au point $p = (0, 0, 0)$. Si la surface S est décrite par le graphe $z = \varphi(x, y)$, alors la courbure en un point quelconque sera calculée plus loin dans l'équation (7.38).

Exemples 7.16 Toutes les sections normales d'une sphère de rayon a sont des cercles de même rayon, la courbure normale de cette sphère est donc égale à $1/a$ dans toutes les directions et on en déduit que la courbure moyenne vaut également $H = 1/a$.

Si l'on considère un cylindre circulaire droit dont la base est un cercle de rayon a , alors la courbure normale en direction de ce cercle est égale à $1/a$. Dans la direction orthogonale au cercle, la section est une droite (une génératrice du cylindre) et sa courbure est nulle. La courbure moyenne du cylindre vaut

$$H = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2a}.$$

7.12 Courbures principales

Définitions

- a) Soit p un point d'une surface orientée S . Les *courbures principales* $k_1(p)$ et $k_2(p)$ de S en p sont les valeurs maximale et minimale de la courbure normale $k_p(\theta)$.

- b) On dit que le point p est *ombilique* si $k_1(p) = k_2(p)$.
- c) En un point non ombilique, les directions correspondant aux courbures principales s'appellent les *directions principales*.
- d) Le produit $K(p) = k_1(p) k_2(p)$ s'appelle la courbure totale ou la *courbure de Gauss* de S en p .

Proposition 7.15 *Les directions principales en un point non ombilique p sont orthogonales.*

PREUVE. On peut représenter localement une surface comme un graphe $z = \varphi(x, y)$ dans des coordonnées adaptées. Reprenons l'équation (7.17)

$$k_p(\theta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(\theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sin(\theta)^2,$$

on trouve les courbures principales en annulant la dérivée de cette fonction :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial k_p}{\partial \theta} \\ &= -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(\theta) \sin(\theta) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \sin(2\theta) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(2\theta). \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\frac{\partial k_p}{\partial \theta}(\theta) = -\frac{\partial k_p}{\partial \theta}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

et il est donc clair que la dérivée $\frac{\partial k_p}{\partial \theta}$ est nulle en θ si et seulement si elle est nulle en $(\theta + \frac{\pi}{2})$. □

REMARQUE. Cette preuve nous dit où sont les directions principales en p : en effet, si $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, alors les directions principales sont données par $\cos(2\theta) = 0$, ce sont les bissectrices des axes Ox et Oy ; et dans le cas général, les directions principales sont données dans les coordonnées adaptées par

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}.$$

Corollaire 7.16 *La courbure moyenne est donnée par*

$$H(p) = \frac{1}{2} (k_1(p) + k_2(p))$$

où $k_1(p)$ et $k_2(p)$ sont les courbures principales. □

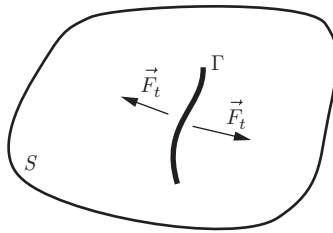
Exemple 7.17 Poursuivons l'exemple 7.16. Tous les points de la sphère sont clairement des points ombiliques. En particulier les courbures principales valent $k_1 = k_2 = 1/a$ où a est le rayon de la sphère. Donc la courbure de Gauß vaut $K = 1/a^2$.

Pour le cylindre circulaire droit, il semble intuitivement plausible que les directions principales sont données par la direction de la base et celle de la génératrice (on le prouvera en exercice). Les courbures principales valent donc $k_1 = 0$ et $k_2 = 1/a$ où a est le rayon de la base. La courbure de Gauß du cylindre vaut donc

$$K = k_1 \cdot k_2 = 0 \cdot \frac{1}{2a} = 0.$$

7.13 Surface uniformément extensible

Imaginons deux gaz ou liquides A et B séparés par une surface S . Nous ferons les hypothèses physiques suivantes. Soit Γ un « petit morceau » de courbe contenu dans S et de longueur ℓ . Notons \vec{F}_t la composante tangente à S de la force \vec{F} exercée sur Γ par les seules tensions internes.



Nous supposons que cette force \vec{F}_t s'exerce perpendiculairement à Γ et qu'elle ne dépend ni de la position ni de la direction de Γ . On a donc

$$F_t = \sigma \ell$$

où σ est une constante appelée la *tension superficielle* de S . Une surface satisfaisant aux hypothèses ci-dessus est dite *uniformément extensible*.

L'interface entre deux liquides non miscibles (tels que l'eau et l'huile), un film ou une bulle de savon sont des exemples de surfaces uniformément extensibles. Un tissu fibreux n'est pas uniformément extensible.

Les forces exercées sur une surface uniformément extensible vont déterminer sa forme. En particulier sa courbure moyenne dépend de la différence de pression entre les milieux A et B . La relation exacte est l'objet de la loi de Laplace-Young (1806).

Théorème 7.17 (Loi de Laplace-Young) La courbure moyenne d'une surface S uniformément extensible séparant deux fluides A et B est donnée par

$$H(p) = \frac{1}{2\sigma}(P_B - P_A),$$

où P_A et P_B sont les pressions dans les régions A et B et σ est la tension superficielle.

PREUVE. Pour démontrer cette loi, on suppose l'équilibre atteint et on fait un bilan des forces subies par un élément de surface. Les forces en présence sont les forces de pression et la tension de la surface.

On sait que la force de pression exercée par le fluide A sur un petit morceau de surface d'aire \mathcal{A} est perpendiculaire à S et d'intensité

$$F_A = P_A \cdot \mathcal{A}.$$

De même la force exercée par B est d'intensité $P_B \cdot \mathcal{A}$; la force exercée sur S due aux pressions est donc

$$\vec{F}_{\text{pression}} = (P_A - P_B)\mathcal{A}\vec{n}$$

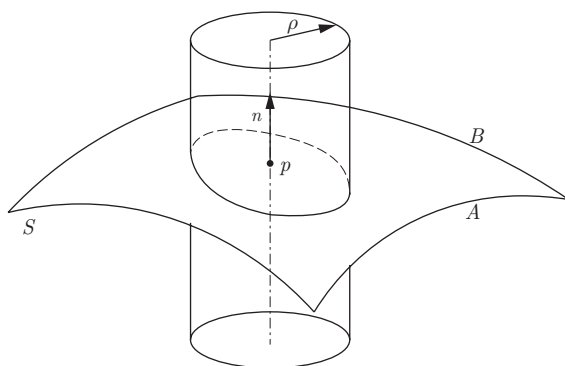
où \vec{n} est le vecteur normal à S et dirigé du côté de B .

Supposons pour simplifier que S est (localement) le graphe de la fonction $z = f(x, y)$. En supposant les axes adaptés, on a $f(0, 0) = 0$ et la normale en $p = (0, 0, 0)$ est le vecteur $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Choisissons $\delta > 0$ petit et notons S_δ la partie de S contenue dans le cylindre vertical d'axe $x = y = 0$ et de rayon δ , i.e.

$$S_\delta = \{(x, y, f(x, y)) : x^2 + y^2 \leq \delta^2\}.$$

Si δ est assez petit, alors l'aire de S_δ est approximativement égale à $\mathcal{A} = \pi\delta^2$, la force de pression sur S_δ est donc

$$\vec{F}_{\text{pression}} = (P_A - P_B)\pi\delta^2 \vec{n}.$$



La surface S_ρ .

À l'équilibre, cette force est compensée par les forces dues à la tension superficielle.

Calculons ces forces : considérons pour cela la « tranche » de S_δ comprise entre Π_θ et $\Pi_{\theta+d\theta}$.

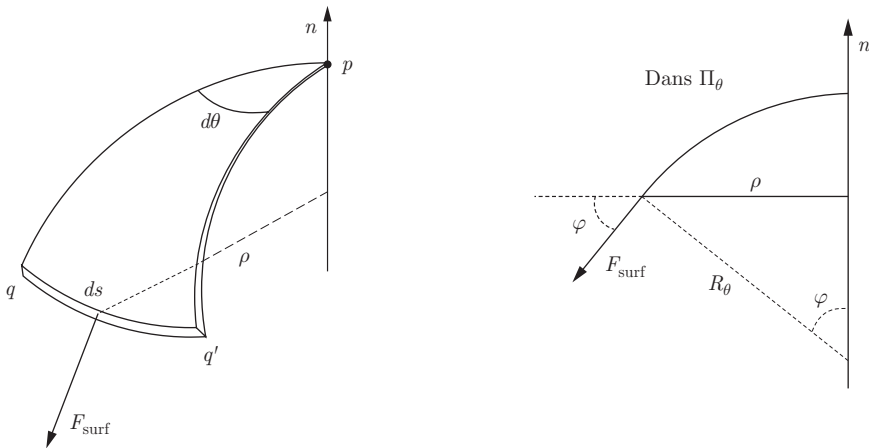
Notons $d\vec{F}_t$ la force de tension superficielle exercée sur cette tranche (en omettant les forces perpendiculaires à Π_θ , car elles s'annulent entre elles lorsque on intègre le long du bord de S_δ). L'intensité de cette force est

$$dF_t = \sigma d\ell = \sigma \delta d\theta.$$

Seule la composante verticale de $d\vec{F}_t$ nous intéresse, elle est donnée par

$$dF_v = \sin(\varphi) dF_t$$

où φ est l'angle entre les normales à S en p et au bout de la tranche $S_\delta \cap \Pi_\theta$.



Tension superficielle dans une tranche de S .

Cet angle est donné par l'approximation

$$\sin(\varphi) \cong \frac{\delta}{R_\theta}$$

où R_θ est le rayon de courbure orienté de la courbe $C_\theta = S_\delta \cap \Pi_\theta$.

Si la courbe C_θ est convexe en p , alors la force de surface exercée sur la tranche est dirigée vers le haut, et si C_θ est concave, alors cette force est dirigée vers le bas. On a donc

$$\begin{aligned} d\vec{F}_v &= \frac{\delta}{R_\theta} d\vec{F}_t \\ &= \delta k_p(\theta) \sigma \delta d\theta \vec{n} \\ &= \delta^2 k_p(\theta) \sigma d\theta \vec{n}. \end{aligned}$$

La force superficielle exercée sur S_δ s'obtient en intégrant sur l'ensemble des tranches, i.e.

$$\begin{aligned}\vec{F}_v &= \int_0^{2\pi} \delta^2 k_p(\theta) \sigma d\theta \vec{n} \\ &= \delta^2 \sigma \int_0^{2\pi} k_p(\theta) d\theta \vec{n},\end{aligned}$$

donc

$$\vec{F}_v = 2\pi\delta^2\sigma H(p)\vec{n}.$$

À l'équilibre, on a $\vec{F}_{pression} + \vec{F}_v = 0$, d'où

$$(P_A - P_B)\pi\delta^2 + 2\pi\delta^2\sigma H(p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$H(p) = \frac{1}{2\sigma}(P_B - P_A).$$

□

Les surfaces minimales

Imaginons une surface uniformément extensible séparant deux milieux de même pression, alors la courbure moyenne de cette surface est nulle en raison de la loi de Laplace-Young. On dit que c'est une *surface minimale*, c'est par exemple la forme que prendra un *film de savon* s'appuyant sur un fil de fer.

Définition. On appelle *surface minimale* toute surface dont la courbure moyenne est nulle. Le plan, la caténoïde et l'hélicoïde sont les surfaces minimales les plus simples.

Cette appellation est justifiée par le fait que ces surfaces ont une aire minimale parmi les surfaces voisines. Une formulation précise sera donnée plus loin (page 337).

7.14 Dérivée du repère adapté

Nous avons vu au chapitre précédent que la dérivée du repère de Frenet d'une courbe fait intervenir la courbure et la torsion de cette courbe (formules de Serret-Frenet), c'est-à-dire la totalité de l'information géométrique de la courbe (voir le théorème 6.30).

La situation est similaire en théorie des surfaces bien que plus compliquée. Les complications viennent d'une part du fait que la surface dépend de deux paramètres et non d'un seul, et d'autre part du fait que le repère adapté n'est pas un repère orthonormé contrairement au repère de Frenet.

Rappelons que le repère mobile adapté à un paramétrage $\psi : \Omega \rightarrow S$ se définit de la façon suivante :

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}.$$

Nous noterons \mathbf{b}_{ij} les dérivées de \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 :

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}$$

où i, j prennent les valeurs 1 ou 2. La première chose à observer est l'égalité

$$\mathbf{b}_{21} = \mathbf{b}_{12},$$

qui provient de la symétrie des dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de classe C^2 : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2}$.

Nous pouvons naturellement développer les vecteurs \mathbf{b}_{ij} dans la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}$, cela nous donne la formule suivante :

$$\mathbf{b}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{b}_2 + h_{ij} \mathbf{n}. \quad (7.18)$$

Définition. Les coefficients Γ_{ij}^k s'appellent les *symboles de Christoffel* (ou les *coefficients de connexion*) associés à la surface paramétrée, et les h_{ij} s'appellent les *coefficients de la deuxième forme fondamentale*.

Les symboles de Christoffel sont définis par l'équation (7.18). En utilisant la base duale $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ de la base adaptée, et la relation $\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$, on obtient la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{ij} \rangle. \quad (7.19)$$

Rappelons que $\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}}{\sqrt{g}}$ et $\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}_1}{\sqrt{g}}$ (voir (page 301)), on a donc par exemple¹

$$\sqrt{g} \Gamma_{12}^2 = [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}] \quad \text{et} \quad \sqrt{g} \Gamma_{11}^2 = [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}]. \quad (7.20)$$

Les symboles de Christoffel nous informent sur la géométrie tangentielle de la surface alors que la deuxième forme fondamentale permet de décrire la variation de la normale à la surface. Nous étudierons dans les paragraphes qui suivent la signification géométrique de ces coefficients.

1. Ces formules se démontrent aussi directement :

$$[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}] = [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \Gamma_{12}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{b}_2 + h_{12} \mathbf{n}] = \Gamma_{12}^2 [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \Gamma_{12}^2 \sqrt{g}.$$

7.15 La deuxième forme fondamentale

Définition. La matrice formée par les coefficients h_{ij} s'appelle la *deuxième forme fondamentale* de la surface paramétrée. On la note

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que les coefficients h_{ij} ont été définis dans la formule (7.18), ils peuvent être calculés par

$$h_{ij} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}, \mathbf{n} \right\rangle. \quad (7.21)$$

La deuxième forme fondamentale est clairement une matrice symétrique : $h_{ij} = h_{ji}$.

On sait que le vecteur normal est donné par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$$

où $g = \det \mathbf{G} = \|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|^2$ est le déterminant de la première forme fondamentale. On peut donc aussi écrire les coefficients de la deuxième forme fondamentale sous la forme d'un produit mixte

$$h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right]. \quad (7.22)$$

Si $\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2$ et $\boldsymbol{\eta} = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2 \in T_p S$ sont des vecteurs tangents à la surface S , alors on note

$$h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = h_{11} \xi_1 \eta_1 + h_{12} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + h_{22} \xi_2 \eta_2.$$

Rappelons que, par comparaison, la première forme fondamentale est donnée par le tenseur métrique :

$$g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = g_{11} \xi_1 \eta_1 + g_{12} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + g_{22} \xi_2 \eta_2.$$

Proposition 7.18 *Les dérivées partielles du champ de vecteurs normal \mathbf{n} à la surface sont des vecteurs tangents à la surface et elles vérifient*

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle = -h_{ij}. \quad (7.23)$$

PREUVE. On sait que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ est constant, donc $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}$ est orthogonal à \mathbf{n} , ce qui entraîne que c'est un vecteur tangent.

Pour vérifier l'équation (7.23), on dérive l'identité $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}_j \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}_j \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle + h_{ij}. \end{aligned}$$

□

En utilisant la remarque de la page 154 (chap. 4) et la proposition 7.8, on déduit de la proposition précédente la formule suivante.

Corollaire 7.19 *Les dérivées partielles du vecteurs normal \mathbf{n} sont données par*

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} = -h_{i1} \mathbf{c}_1 - h_{i2} \mathbf{c}_2.$$

7.16 L'application de Weingarten

La proposition précédente nous dit que les dérivées $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}$ du vecteur normal sont des vecteur tangents à la surface. On peut donc écrire

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} = \ell_{1i} \mathbf{b}_1 + \ell_{2i} \mathbf{b}_2. \quad (7.24)$$

Les composantes de $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}$ s'appellent les *coefficients de Weingarten* de la surface paramétrée. Nous nous proposons de les calculer. Pour cela écrivons le produit scalaire de l'équation (7.24) avec \mathbf{b}_j en utilisant la proposition précédente :

$$\begin{aligned} -h_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle \\ &= \ell_{1i} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_j \rangle + \ell_{2i} \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_j \rangle \\ &= g_{j1} \ell_{1i} + g_{j2} \ell_{2i}. \end{aligned}$$

Comme $h_{ij} = h_{ji}$, cette équation peut se récrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

donc

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

$$= -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22}h_{11} - g_{12}h_{21} & g_{22}h_{12} - g_{12}h_{22} \\ -g_{21}h_{11} + g_{11}h_{21} & -g_{21}h_{12} + g_{11}h_{22} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

car $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. En conclusion, on trouve

$$\begin{cases} -g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} = (g_{22}h_{11} - g_{12}h_{21}) \mathbf{b}_1 + (-g_{21}h_{11} + g_{11}h_{21}) \mathbf{b}_2, \\ -g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} = (g_{22}h_{12} - g_{12}h_{22}) \mathbf{b}_1 + (-g_{21}h_{12} + g_{11}h_{22}) \mathbf{b}_2. \end{cases} \quad (7.28)$$

Les formules (7.25) et (7.28) sont équivalentes, elles s'appellent les *équations de Weingarten*.

Remarquons qu'on aurait aussi pu trouver ces formules en partant du corollaire 7.19 et en utilisant la proposition 7.8.

Définition. La matrice

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'application linéaire de l'espace tangent $T_p S$ dans lui-même telle que

$$L(\mathbf{b}_i) = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}.$$

Cette application s'appelle l'*application de Weingarten* (ou *shape operator* en anglais), elle contient la même information sur la surface que la seconde forme fondamentale et est parfois plus commode à utiliser. L'équation de Weingarten (7.25) peut s'écrire sous forme matricielle $\mathbf{GL} = -\mathbf{H}$. Comme \mathbf{G} et \mathbf{H} sont des matrices symétriques, on a aussi

$$\mathbf{GL} = -\mathbf{H} = -\mathbf{H}^t = \mathbf{L}^t \mathbf{G}. \quad (7.29)$$

7.17 Accélération des courbes tracées sur une surface

Les courbes sur les surfaces possèdent la propriété remarquable suivante.

Théorème 7.20 *Soit γ une courbe de classe C^2 tracée sur la surface S supposée également de classe C^2 . Alors son accélération normale en un point est donnée par*

$$\langle \mathbf{n}, \ddot{\gamma} \rangle = h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \quad (7.30)$$

où h est la seconde forme fondamentale. En particulier, l'accélération normale en un point ne dépend que du vecteur vitesse en ce point.

Ce théorème nous dit que si deux courbes sur S passent par un même point p , et ont le même vecteur vitesse en ce point, alors elles ont aussi la même accélération normale.

PREUVE. La courbe γ se représente dans le paramétrage de la surface par $\gamma(t) = \psi(u_1(t), u_2(t))$, et donc

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{b}_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + \dot{u}_1 \dot{\mathbf{b}}_1 + \dot{u}_2 \dot{\mathbf{b}}_2 \\ &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + \dot{u}_1 (\dot{u}_1 \mathbf{b}_{11} + \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12}) + \dot{u}_2 (\dot{u}_1 \mathbf{b}_{21} + \dot{u}_2 \mathbf{b}_{22}) \\ &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + (\dot{u}_1)^2 \mathbf{b}_{11} + 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12} + (\dot{u}_2)^2 \mathbf{b}_{22}. \end{aligned}$$

Les vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont orthogonaux à \mathbf{n} , et comme $h_{ij} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{n} \rangle$ on a

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \mathbf{n} \rangle = h_{11}(\dot{u}_1)^2 + 2h_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + h_{22}(\dot{u}_2)^2 = h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

□

À l'aide des symboles de Christoffel, nous pouvons développer plus complètement le calcul de l'accélération. Nous avons vu lors de la démonstration précédente que

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + (\dot{u}_1)^2 \mathbf{b}_{11} + 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12} + (\dot{u}_2)^2 \mathbf{b}_{22}.$$

En développant les vecteurs \mathbf{b}_{ij} dans la base $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}$ via l'équation (7.18), nous trouvons

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= (\ddot{u}_1 + \Gamma_{11}^1 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}_2^2) \mathbf{b}_1 \\ &\quad + (\ddot{u}_2 + \Gamma_{11}^2 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{u}_2^2) \mathbf{b}_2 \\ &\quad + h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

L'équation des géodésiques peut en particulier se récrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \Gamma_{11}^1 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}_2^2 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \Gamma_{11}^2 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{u}_2^2 = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

7.18 Courbure des courbes tracées sur une surface

Définition. La *courbure normale* de la surface en direction du vecteur non nul $\mathbf{v} \in T_p S$ est définie par

$$k_p(\mathbf{v}) = \frac{h(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

Cette définition est compatible avec la définition vue en page 312. Plus généralement, nous avons le théorème suivant.

Théorème 7.21 Soit $\gamma(t)$ une courbe régulière et de classe C^2 tracée sur une surface S . Alors la composante normale $\mathbf{K}_n = \langle \mathbf{K}_\gamma, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$ du vecteur de courbure de γ ne dépend que du vecteur vitesse de cette courbe et est donnée par

$$\mathbf{K}_n = k_p(\dot{\gamma}(t)) \mathbf{n}.$$

PREUVE. On sait que la vitesse de γ se calcule avec la première forme fondamentale :

$$V_\gamma = \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}.$$

La formule de l'accélération (6.12) nous dit que $\ddot{\gamma} = V_\gamma^2 \mathbf{K}_\gamma + \dot{V}_\gamma \mathbf{T}_\gamma$, par conséquent le théorème 7.20 entraîne que

$$h(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \langle \mathbf{n}, \ddot{\gamma} \rangle = g(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \langle \mathbf{n}, \mathbf{K}_\gamma \rangle,$$

et donc $\langle \mathbf{n}, \mathbf{K}_\gamma \rangle = k_p(\dot{\gamma}(t))$. □

Définition. La courbure normale d'une courbe $\gamma \subset S$ se définit comme $k_p(\dot{\gamma}(t))$ et se note κ_n :

$$\kappa_n = k_p(\dot{\gamma}(t)) = \frac{h(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}.$$

Passons à la courbure géodésique.

Définition. La courbure géodésique (ou courbure tangentielle) d'une courbe $\gamma(t)$ de classe C^2 tracée sur la surface S , est définie par

$$\kappa_S = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathbf{n}]}{V_\gamma^3},$$

où $V_\gamma = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ est la vitesse de cette courbe.

Théorème 7.22 Soit $\gamma(t)$ une courbe régulière et de classe C^2 tracée sur une surface. Notons $\mathbf{K}_n = \langle \mathbf{K}_\gamma, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$ la composante normale et $\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_\gamma - \mathbf{K}_n$ la composante tangentielle du vecteur de courbure \mathbf{K}_γ de γ . Alors

$$\|\mathbf{K}_n\| = |\kappa_n| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{K}_S\| = |\kappa_S|.$$

En particulier, on a

$$\kappa_\gamma^2 = \kappa_S^2 + \kappa_n^2,$$

où $\kappa_\gamma = \|\mathbf{K}_\gamma\|$ est la courbure de γ .

PREUVE. L'égalité $\|\mathbf{K}_n\| = |\kappa_n|$ est une conséquence immédiate du théorème précédent. Pour prouver la seconde égalité, on utilise la formule de l'accélération 6.12 et on observe que

$$\begin{aligned} V_\gamma^3 \kappa_S &= [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathbf{n}] = [\dot{\gamma}, (V_\gamma^2 \mathbf{K}_\gamma + \dot{V}_\gamma \mathbf{T}_\gamma), \mathbf{n}] = V_\gamma^2 [\dot{\gamma}, \mathbf{K}_\gamma, \mathbf{n}] \\ &= V_\gamma^2 [\dot{\gamma}, \mathbf{K}_\gamma - \mathbf{K}_n, \mathbf{n}] = V_\gamma^2 [\dot{\gamma}, \mathbf{K}_S, \mathbf{n}] = V_\gamma^2 \langle \mathbf{n} \times \dot{\gamma}, \mathbf{K}_S \rangle. \end{aligned}$$

Or \mathbf{K}_S est orthogonal à \mathbf{n} et à $\dot{\gamma}$ (car le vecteur de courbure d'une courbe est toujours orthogonal à son vecteur vitesse). Donc \mathbf{K}_S est colinéaire à $\mathbf{n} \times \dot{\gamma}$. D'autre part, ces deux vecteurs sont orthogonaux entre eux, donc

$$\|\mathbf{n} \times \dot{\gamma}\| = \|\mathbf{n}\| \|\dot{\gamma}\| = V_\gamma.$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathbf{n}] &= V_\gamma^2 \langle \mathbf{n} \times \dot{\gamma}, \mathbf{K}_S \rangle \\ &= \pm V_\gamma^2 \|\mathbf{n} \times \dot{\gamma}\| \|\mathbf{K}_S\| \\ &= \pm V_\gamma^3 \|\mathbf{K}_S\|. \end{aligned}$$

□

Nous allons prouver que la courbure géodésique peut se calculer à partir des symboles de Christoffel. Pour cela, introduisons les quantités

$$\begin{cases} m_1 = \Gamma_{11}^1 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}_2^2, \\ m_2 = \Gamma_{11}^2 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{u}_2^2. \end{cases} \quad (7.32)$$

On sait alors que l'accélération de la courbe est donnée par la formule suivante (voir p. 324)

$$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{u}_1 + m_1) \mathbf{b}_1 + (\ddot{u}_2 + m_2) \mathbf{b}_2 + h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \mathbf{n}$$

On a donc

$$\begin{aligned} [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathbf{n}] &= [\dot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{b}_2, (\ddot{u}_1 + m_1) \mathbf{b}_1 + (\ddot{u}_2 + m_2) \mathbf{b}_2 + h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \mathbf{n}, \mathbf{n}] \\ &= (\dot{u}_1(\ddot{u}_2 + m_2) - \dot{u}_2(\ddot{u}_1 + m_1)) [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}]. \end{aligned}$$

Comme $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{n}] = \sqrt{g}$, cette égalité peut s'écrire sous la forme suivante qui ne dépend que du tenseur métrique et des symboles de Christoffel :

$$\kappa_S = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathbf{n}]}{V_\gamma^3} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{G}} (\dot{u}_1(\ddot{u}_2 + m_2) - \dot{u}_2(\ddot{u}_1 + m_1))}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{3/2}}. \quad (7.33)$$

Proposition 7.23 *Une courbe tracée sur une surface est une géodésique si et seulement si sa vitesse est constante et sa courbure géodésique est identiquement nulle.*

PREUVE. On sait déjà que toute géodésique est parcourue à vitesse constante. De plus, si la courbe γ est une géodésique, alors les équations (7.31) sont vérifiées, mais ces équations peuvent se récrire

$$\ddot{u}_1 + m_1 = \ddot{u}_2 + m_2 = 0.$$

Il est donc clair à partir de (7.33) que la courbure géodésique κ_S de γ est identiquement nulle.

Pour démontrer le sens inverse, on remarque d'abord que $\dot{\gamma} \perp \mathbf{n}$ par définition et $\dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$ si la vitesse de γ est constante. Donc $\dot{\gamma}$ est orthogonal au plan de directions \mathbf{n} et $\ddot{\gamma}$ et les vecteurs $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma} \times \mathbf{n}$ sont donc colinéaires. Or

$$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \times \mathbf{n} \rangle = V_\gamma^3 \kappa_S \equiv 0,$$

donc $\ddot{\gamma} \times \mathbf{n} \equiv 0$, ce qui est l'équation (7.15) des géodésiques. \square

Soit $\gamma(t)$ une courbe régulière, de classe C^3 tracée sur une surface S .

Définition. Le repère de Darboux de γ est le repère orthonormé mobile $\{\gamma(t), \mathbf{t}, \mathbf{w}, \mathbf{n}\}$ le long de γ où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à S , \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent à γ et $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$.

Observons que \mathbf{t} et \mathbf{w} sont tangents à la surface. Ce repère remplace avantageusement le repère de Frenet dans l'étude des courbes tracées sur une surface. On définit en particulier la *torsion géodésique* de γ par

$$\tau_g(t) := \frac{1}{V_\gamma(t)} \langle \mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{n}}(t) \rangle.$$

Proposition 7.24 Nous avons alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\gamma(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{t} &= \kappa_S \mathbf{w} + \kappa_n \mathbf{n}; \\ \frac{1}{V_\gamma(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{w} &= -\kappa_S \mathbf{t} - \tau_S \mathbf{n}; \\ \frac{1}{V_\gamma(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{n} &= -\kappa_n \mathbf{t} + \tau_S \mathbf{w}. \end{aligned}$$

PREUVE. Supposons pour simplifier les calculs que γ est paramétrée naturellement (à vitesse 1), et notons s le paramètre. On a alors

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{K} = \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_n = \kappa_S \mathbf{w} + \kappa_n \mathbf{n},$$

la première équation est démontrée. On a d'autre part $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$, donc $\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n} \rangle = -\kappa_n$. On en déduit la dernière équation :

$$\dot{\mathbf{n}} = \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{w}, \dot{\mathbf{n}} \rangle \mathbf{w} = -\kappa_n \mathbf{t} + \tau_S \mathbf{w}.$$

La deuxième équation se déduit de la première et de la dernière en utilisant la relation $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$. \square

7.19 Courbure d'une surface

Nous avons vu avec les définitions en page 314 (sect. 7.12) les notions de courbures principales et de Gauß. Rappelons que les courbures principales $k_1(p)$

et $k_2(p)$ en un point p de la surface sont les valeurs maximale et minimale de la courbure normale en ce point, et que la courbure de Gauß est le produit $K(p) = k_1(p)k_2(p)$. Nous avons aussi vu au corollaire 7.16 que la courbure moyenne est donnée par $H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p))$. Le résultat suivant nous permet de trouver ces courbures en fonction des deux premières formes fondamentales.

Théorème 7.25 *Les courbures moyenne et de Gauß de la surface S se calculent en fonction des deux formes fondamentales par les formules suivantes :*

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g}, \quad H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2g}.$$

Les courbures principales sont données par

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Voyons deux conséquences de ce théorème avant d'en donner la preuve.

Corollaire 7.26 *La courbure moyenne et la courbure de Gauß s'expriment en fonction de l'application de Weingarten \mathbf{L} par les formules suivantes :*

$$H = -\frac{1}{2} \text{trace } \mathbf{L}, \quad K = \det \mathbf{L}.$$

PREUVE. L'équation de Weingarten (7.25) s'écrit $\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{H}$, donc

$$\det \mathbf{L} = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}} = K.$$

Pour calculer la trace, on utilise l'équation (7.26), elle entraîne que

$$-\text{trace } \mathbf{L} = \frac{1}{g}(g_{22}h_{11} - g_{12}h_{21} - g_{21}h_{12} + g_{11}h_{22}).$$

En tenant compte des relations de symétrie $g_{12} = g_{21}$ et $h_{12} = h_{21}$, on voit que $2H = -\text{trace } \mathbf{L}$. \square

REMARQUE. On peut également prouver que les directions principales de la surface correspondent aux directions des vecteurs propres de \mathbf{L} .

Corollaire 7.27 *On a aussi l'expression suivante pour calculer la courbure de Gauß :*

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \right].$$

PREUVE. En notant $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} = \ell_{1i} \mathbf{b}_1 + \ell_{2i} \mathbf{b}_2$, on a

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \right] &= [\mathbf{n}, \ell_{11} \mathbf{b}_1 + \ell_{21} \mathbf{b}_2, \ell_{12} \mathbf{b}_1 + \ell_{22} \mathbf{b}_2] \\ &= (\ell_{11} \ell_{22} - \ell_{12} \ell_{21}) [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] \\ &= (\ell_{11} \ell_{22} - \ell_{12} \ell_{21}) \sqrt{g} \\ &= \det \mathbf{L} \sqrt{\det \mathbf{G}} \\ &= K \sqrt{\det \mathbf{G}}. \end{aligned}$$

□

Une conséquence de ce corollaire est l'identité suivante :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \right\| = |K| \sqrt{\det \mathbf{G}}.$$

PREUVE DU THÉORÈME 7.25

Nous supposons que le point p n'est pas un point ombilique, c'est-à-dire $k_1 > k_2$.

La courbure normale en direction du vecteur non nul $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 \in T_p S$ est donnée par

$$k_p(\mathbf{v}) = \frac{h(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

Nous avons $k_p(\mathbf{v}) \leq k_1(p)$ pour tout $\mathbf{v} \in T_p S$ non nul, c'est-à-dire

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq k_1 g(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

et donc

$$k_1(g_{11}v_1^2 + 2g_{12}v_1v_2 + g_{22}v_2^2) - (h_{11}v_1^2 + 2h_{12}v_1v_2 + h_{22}v_2^2) \geq 0.$$

Divisons cette inégalité par v_2^2 et posons $t = \frac{v_1}{v_2}$, nous obtenons

$$(k_1g_{11} - h_{11})t^2 + 2(k_1g_{12} - h_{12})t + (k_1g_{22} - h_{22}) \geq 0. \quad (7.34)$$

Il s'agit donc d'un polynôme du second degré qui s'annule en un seul point correspondant à la direction principale de la plus grande courbure normale ; on sait que le discriminant d'un tel polynôme doit être nul. Nous avons donc

$$\frac{1}{4}\Delta = (k_1g_{12} - h_{12})^2 - (k_1g_{11} - h_{11})(k_1g_{22} - h_{22}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})k_1^2 + (g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12})k_1 + (h_{12}^2 - h_{11}h_{22}) = 0.$$

Nous pouvons faire le même raisonnement avec k_2 , la seule différence étant que l'inégalité (7.34) est inversée puisque k_2 est la valeur minimale des courbures normales. Par conséquent k_1 et k_2 sont les deux solutions de l'équation quadratique en k :

$$g k^2 - (g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12})k + (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0.$$

Les formules de Viète nous disent alors que

$$K = k_1 k_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g}$$

et

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}}{g}.$$

L'équation vérifiée par k_1 et k_2 peut maintenant s'écrire

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

les solutions sont $k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ et le théorème est ainsi démontré. \square

REMARQUE. Nous avons fait deux hypothèses dans cette démonstration. La première est que le point p est non ombilique. En un point ombilique, la courbure normale est constante :

$$k = \frac{h(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

pour tout $\mathbf{v} \in T_p S$ non nul. Cela entraîne que les deux formes fondamentales sont proportionnelles : $h_{ij} = k g_{ij}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2g} &= \frac{(g_{11}g_{22} - 2g_{12}g_{12} + g_{22}g_{11}) \cdot k}{2g} \\ &= k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ &= H \end{aligned}$$

et aussi

$$\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = k^2 = k_1 k_2 = K.$$

Les formules du théorème sont donc aussi valides en un point ombilique.

Nous avons aussi supposé que $v_2 \neq 0$ en une direction principale. Si $v_2 = 0$, alors $v_1 \neq 0$ et on reprend le même raisonnement, mais en divisant par v_1 .

7.20 La troisième forme fondamentale

On a déjà vu la première et la deuxième forme fondamentale d'une surface paramétrée. La *troisième forme fondamentale* \mathbf{Q} est définie par la matrice

$$q_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle. \quad (7.35)$$

Proposition 7.28 *On a les relations suivantes entre les trois formes fondamentales :*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{GL}^2 = 2H \cdot \mathbf{H} - K \cdot \mathbf{G}. \quad (7.36)$$

PREUVE. On a par définition $\mathbf{Q} = \mathbf{L}^t \mathbf{GL}$. De la formule (7.29), on déduit alors que $\mathbf{Q} = \mathbf{GL}^2$. La seconde égalité se déduit maintenant du théorème de Cayley-Hamilton en algèbre matricielle qui nous dit que

$$\mathbf{L}^2 - \text{trace}(\mathbf{L})\mathbf{L} + \det(\mathbf{L})\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

et on conclut avec le corollaire 7.26 □

7.21 Retour aux exemples

Dans ce paragraphe, nous appliquons les formules précédentes pour calculer les coefficients de Christoffel et la courbure de quelques types habituels de surface.

Les graphes

Le graphe de la fonction (de deux variables) φ est la surface d'équation $z = \varphi(x, y)$. Les variables x, y représentent à la fois des coordonnées et des paramètres sur la surface (dans le paramétrage $\psi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$). Nous supposons φ de classe C^2 et notons pour simplifier

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \varphi_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \varphi_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Le repère adapté à cette surface paramétrée est

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$g = 1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2.$$

Le tenseur métrique $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ est donc donné par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_x^2 & \varphi_x \varphi_y \\ \varphi_x \varphi_y & 1 + \varphi_y^2 \end{pmatrix},$$

observons que $g = \det \mathbf{G}$. La base duale est donnée par

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 + \varphi_y^2 \\ -\varphi_x \varphi_y \\ \varphi_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} -\varphi_x \varphi_y \\ 1 + \varphi_x^2 \\ \varphi_y \end{pmatrix}.$$

Les dérivées du repère adapté valent

$$\mathbf{b}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{xx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{xy} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de Christoffel se calculent aisément par la formule $\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{ij} \rangle$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\varphi_x \varphi_{xx}}{g}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\varphi_x \varphi_{xy}}{g}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{\varphi_x \varphi_{yy}}{g} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{\varphi_y \varphi_{xx}}{g}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\varphi_y \varphi_{xy}}{g}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\varphi_y \varphi_{yy}}{g}. \end{aligned}$$

La seconde forme fondamentale $h_{ij} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ est la matrice

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}.$$

La courbure de Gauß est alors donnée par

$$K = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}} = \frac{\varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2}{(1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2)^2}. \quad (7.37)$$

Le théorème 7.25 permet aussi de calculer la courbure moyenne, on obtient

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + \varphi_y^2) \varphi_{xx} - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_x^2) \varphi_{yy}}{(1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{3/2}}. \quad (7.38)$$

On trouve aussi que l'application de Weingarten

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}$$

vaut

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= -\frac{1}{g^{3/2}} ((1 + \varphi_y^2) \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}) \\ \ell_{12} &= -\frac{1}{g^{3/2}} ((1 + \varphi_y^2) \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_y \varphi_{yy}) \\ \ell_{21} &= -\frac{1}{g^{3/2}} ((1 + \varphi_x^2) \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_y \varphi_{xx}) \\ \ell_{22} &= -\frac{1}{g^{3/2}} ((1 + \varphi_x^2) \varphi_{yy} - \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}), \end{aligned}$$

et on peut vérifier sur cette matrice les relations $K = \det \mathbf{L}$ et $H = -\frac{1}{2} \text{trace } \mathbf{L}$.

Les surfaces de révolution

Soit S la surface de révolution

$$\begin{cases} x(u, v) = r(v) \cos(u) \\ y(u, v) = r(v) \sin(u) \\ z(u, v) = z(v) \end{cases}$$

Le repère adapté est donné par

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -r \sin(u) \\ r \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} r' \cos(u) \\ r' \sin(u) \\ z' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} z' \cos(u) \\ z' \sin(u) \\ -r' \end{pmatrix}$$

où $z' = \frac{dz}{dv}$, $r' = \frac{dr}{dv}$ et $w := \sqrt{(r'(v))^2 + (z'(v))^2}$. Le tenseur métrique est donné par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix},$$

et la base duale est donnée par

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = -\frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{w^2} \begin{pmatrix} r' \cos(u) \\ r' \sin(u) \\ z' \end{pmatrix}.$$

Les dérivées du repère adapté valent

$$\mathbf{b}_{11} = \begin{pmatrix} -r \cos(u) \\ -r \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{12} = \begin{pmatrix} -r' \sin(u) \\ r' \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{22} = \begin{pmatrix} r'' \cos(u) \\ r'' \sin(u) \\ z'' \end{pmatrix},$$

et les coefficients de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ valent

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^1 &= \frac{r'}{r} & \Gamma_{22}^1 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{rr'}{w^2} & \Gamma_{12}^2 &= 0 & \Gamma_{22}^2 &= \frac{r'r'' + z'z''}{w^2} = \frac{w'}{w} \end{aligned}$$

La seconde forme fondamentale $h_{ij} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ est la matrice

$$\mathbf{H} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} -rz' & 0 \\ 0 & z'r'' - z''r' \end{pmatrix},$$

et on a

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{z'}{rw} & 0 \\ 0 & \frac{z''r' - z'r''}{w^3} \end{pmatrix}.$$

La courbure moyenne est donc donnée par

$$H = -\frac{1}{2} \text{trace } \mathbf{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{r(z'r'' - z''r') - z'w^2}{rw^3} \right),$$

et la courbure de Gauß par

$$K = \det \mathbf{L} = \frac{z'(z''r' - z'r'')}{r w^4}.$$

Un petit calcul montre qu'on peut aussi écrire

$$K = -\frac{1}{r w} \left(\frac{r'}{w} \right)'.$$

Cette formule peut aussi se déduire directement de l'équation (7.51), avec $a = r, b = w$.

Les surfaces réglées

Soit $\psi(u, v) = \alpha(u) + v \mathbf{w}(u)$ un paramétrage d'une surface réglée, on a

$$\mathbf{b}_1 = \dot{\alpha} + v \dot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\dot{\alpha} \times \mathbf{w} + v \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{w}),$$

les g_{ij} sont calculés à l'exemple 7.10 (p. 304). On a aussi $\mathbf{b}_{22} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{b}_{12} = \dot{\mathbf{w}}$ et par conséquent

$$h_{22} = 0 \quad \text{et} \quad h_{12} = \langle \mathbf{b}_{12}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{g}} [\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \dot{\alpha}].$$

La courbure de Gauß est donnée par

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g} = -\frac{[\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \dot{\alpha}]^2}{g^2}.$$

On en déduit que *la courbure de Gauß d'une surface réglée est toujours négative ou nulle*.

Les surfaces implicites

La courbure d'une surface implicite $S : f(x, y, z) = 0$ est donnée par des formules compliquées. La courbure moyenne est donnée par

$$H = \frac{(f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2)f_x^2 + (f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2)f_y^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)f_z^2 - 2(f_xf_yf_{xz} + f_xf_zf_{xy} + f_yf_zf_{yz})}{2(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{3/2}}$$

et la courbure de Gauß vaut

$$K = \frac{\Delta}{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^2}$$

avec

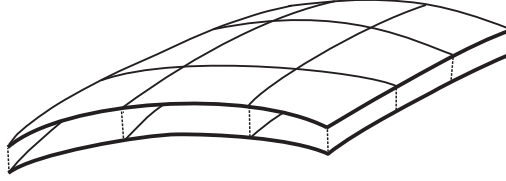
$$\begin{aligned} \Delta = & (f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2)f_x^2 + (f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2)f_y^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)f_z^2 + \\ & 2\{f_xf_y(f_{xz}f_{yz} - f_{xy}f_{zz}) + f_yf_z(f_{xy}f_{xz} - f_{yz}f_{xx}) + f_xf_z(f_{xy}f_{yz} - f_{xz}f_{yy})\} \end{aligned}$$

On peut voir ces formules comme des extensions de la proposition 6.46. Pour les preuves, voir par exemple [37, vol. 3, chap. 3].

7.22 Surfaces parallèles

Considérons une surface paramétrée $\psi_0 : \Omega \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^3$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient une nouvelle surface paramétrée $\psi_t : \Omega \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^3$ en poussant notre surface d'une distance t le long du champ \mathbf{n} de vecteurs normaux à S_0 . La nouvelle surface admet donc le paramétrage

$$\psi_t(u_1, u_2) = \psi_0(u_1, u_2) + t \cdot \mathbf{n}(u_1, u_2).$$



On dit que la surface obtenue S_t est une *surface parallèle* à S_0 . Si le paramétrage ψ_0 est régulier, alors ψ_t est également régulière lorsque t est proche de 0. Pour les grandes valeurs de t , des singularités se développent en général et la surface parallèle peut devenir très compliquée. On se restreindra donc aux petites valeurs de t .

Proposition 7.29 Notons \mathbf{G}_t le tenseur métrique de le paramétrage ψ_t . Alors

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^2. \quad (7.39)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité, \mathbf{L}_0 est la matrice de Weingarten et \mathbf{G}_0 est le tenseur métrique de ψ_0 .

PREUVE. Notons $\mathbf{b}_1^t, \mathbf{b}_2^t$ le repère adapté au paramétrage ψ_t , on a

$$\mathbf{b}_i^t = \frac{\partial \psi_t}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi_0}{\partial u_i} + t \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} = \mathbf{b}_i + t \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \quad (7.40)$$

pour $i = 1$ ou 2 . En notant g_{ij}^t les coefficients de \mathbf{G}_t , on a donc

$$\begin{aligned} g_{ij}^t &= \langle \mathbf{b}_i^t, \mathbf{b}_j^t \rangle \\ &= \left\langle \mathbf{b}_i + t \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j + t \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle + t \left\langle \mathbf{b}_i, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle + t \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle + t^2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle \end{aligned}$$

Rappelons que $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = g_{ij}$ et

$$\left\langle \mathbf{b}_i, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle = -h_{ij}, \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle = q_{ij},$$

où h_{ij} et q_{ij} sont les coefficients de la deuxième et troisième formes fondamentales de ψ_0 (voir la proposition 7.18 et l'équation (7.35)). On a donc

$$g_{ij}^t = g_{ij} - th_{ij} - th_{ji} + t^2 q_{ij} = g_{ij} - 2th_{ij} + t^2 q_{ij},$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{G}_0 - 2t\mathbf{H}_0 + t^2\mathbf{Q}_0.$$

Or on sait par l'équation de Weingarten (7.29) que $\mathbf{H}_0 = -\mathbf{G}_0\mathbf{L}_0$ et, par la proposition 7.28, on a $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{G}_0\mathbf{L}_0^2$. Par conséquent

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + 2t\mathbf{L}_0 + t^2\mathbf{L}_0^2) = \mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^2.$$

□

Corollaire 7.30 *La dérivée de \mathbf{G}_t est donnée par*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}_t = 2\mathbf{G}_t\mathbf{L}_t. \quad (7.41)$$

PREUVE. La surface S_{t+s} est elle-même une surface parallèle à la surface S_t , on peut donc lui appliquer l'équation (7.39), qui s'écrit alors

$$\mathbf{G}_{t+s} = \mathbf{G}_t (\mathbf{I} + s\mathbf{L}_t)^2.$$

En dérivant cette équation par rapport à s en $s = 0$, on obtient (7.41). □

Pour les petites valeurs de t , la matrice $(\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)$ est inversible et on a :

Corollaire 7.31 *La matrice de Weingarten \mathbf{L}_t du paramétrage ψ_t est donnée par*

$$\boxed{\mathbf{L}_t = (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0.} \quad (7.42)$$

PREUVE. L'équation (7.39) possède les deux conséquences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{G}_t &= 2\mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0) \mathbf{L}_0; \\ 2\mathbf{G}_t\mathbf{L}_t &= 2\mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^2 \mathbf{L}_t. \end{aligned}$$

Mais le corollaire 7.30 dit que $\frac{d}{dt}\mathbf{G}_t = 2\mathbf{G}_t\mathbf{L}_t$, donc

$$2\mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0) \mathbf{L}_0 = 2\mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^2 \mathbf{L}_t,$$

et on obtient l'égalité voulue en multipliant cette identité par $\frac{1}{2} (\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0)^{-2} \mathbf{G}_0^{-1}$.

□

Théorème 7.32 (Formule de Weyl) Notons $g_t = \det \mathbf{G}_t$. Alors on a

$$\sqrt{g_t} = \sqrt{g_0} \cdot (1 - 2t \cdot H + t^2 \cdot K)$$

où H et K sont la courbure moyenne et de Gauß de S_0 .

PREUVE. Rappelons que pour toute 2×2 matrice \mathbf{L}_0 on a :

$$\det(\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0) = 1 + t \cdot \text{trace}(\mathbf{L}_0) + t^2 \cdot \det(\mathbf{L}_0).$$

L'équation (7.39) entraîne donc que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}_t) &= \det(\mathbf{G}_0) (\det(\mathbf{I} + t\mathbf{L}_0))^2 \\ &= \det(\mathbf{G}_0) (1 + t \cdot \text{trace}(\mathbf{L}_0) + t^2 \cdot \det(\mathbf{L}_0))^2. \end{aligned}$$

On conclut en prenant la racine carrée de cette égalité et en utilisant les relations $\text{trace}(\mathbf{L}_0) = -2H$ et $\det(\mathbf{L}_0) = K$. \square

Corollaire 7.33 L'aire de la surface parallèle est donnée par

$$\text{Aire}(S_t) = \text{Aire}(S) + \iint_{S_0} (-2t \cdot H + t^2 \cdot K) dA_0,$$

en particulier on a

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Aire}(S_t) = -2 \iint_{S_0} H dA_0.$$

PREUVE. Rappelons que l'aire de la surface S_t est donnée par l'intégrale double $A(S_t) = \iint_{\Omega} \sqrt{g_t} du dv$. Le corollaire découle donc immédiatement de la formule de Weyl. \square

Retour aux surfaces minimales

Rappelons qu'une surface minimale est une surface de courbure moyenne nulle. Cette appellation est justifiée par le théorème suivant : Soit C une courbe fermée de classe C^3 dans \mathbb{R}^3 . Si S_0 est une surface dont le bord est la courbe C et dont l'aire est plus petite ou égale à l'aire de tout autre surface limitée par C , alors S_0 est une surface minimale.

PREUVE. Nous donnons l'idée de la preuve, les détails nécessitent quelques techniques du calcul des variations². On raisonne comme dans la théorie des surfaces parallèles, on se donne donc un paramétrage $\psi_0 : \Omega \rightarrow S_0$ et on considère une perturbation de cette surface :

$$\tilde{\psi}_t(u_1, u_2) = \psi_0(u_1, u_2) + t\lambda(u_1, u_2) \cdot \mathbf{n}(u_1, u_2),$$

2. Voir par exemple [25, page 79] ou [37, chap 3, vol. 3]

où $\lambda : \Omega \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^3$ est une fonction scalaire de classe C^2 . Comme le bord de la surface S_0 doit rester fixe, on suppose aussi que λ est nulle au bord de Ω . Le repère adapté à $\tilde{\psi}_t$ est donné par la généralisation suivante de l'équation (7.40) :

$$\tilde{\mathbf{b}}_i^t = \frac{\partial \tilde{\psi}_t}{\partial u_i} = \mathbf{b}_i + t\lambda \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i} + t \frac{\partial \lambda}{\partial u_i} \mathbf{n}.$$

En calculant comme dans le preuve de la proposition 7.29, on trouve que

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - 2t\lambda h_{ij} + t^2(\dots),$$

où (\dots) représente une quantité qui reste bornée. On en déduit que

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_0 (\mathbf{I} + t\lambda \mathbf{L}_0)^2 + t^2(\dots)$$

et donc $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathbf{G}_t = 2\lambda \mathbf{G}_0 \mathbf{L}_0$. Il s'ensuit que $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \sqrt{\tilde{g}} = -2\lambda H \sqrt{g_0}$. et donc

$$\frac{d}{dt} \text{Aire}(\tilde{S}_t) \Big|_{t=0} = -2 \iint_{S_0} \lambda H dA_0.$$

Par hypothèse, l'aire de S_0 est minimale pour toute perturbation, l'intégrale ci-dessus est donc nulle pour toute fonction λ ; et ceci n'est possible que si la courbure moyenne H est identiquement nulle. \square

Définition. On appelle *problème de Plateau*³ le problème de la détermination d'une surface minimale limitée par une courbe donnée. La théorie des surfaces minimales et le problème de Plateau ont fait l'objet d'intenses recherches en géométrie et en physique.

7.23 Sur les symboles de Christoffel

Le présent paragraphe et les deux suivants sont de nature technique. Le lecteur peut directement se rendre à la dernière section 7.26 où leur signification géométrique sera expliquée.

Les symboles de Christoffel sont définis par l'équation (7.18). Cette équation entraîne que les symboles de Christoffel apparaissent lorsqu'on dérive le tenseur métrique. On a par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} &= 2 \frac{\partial}{\partial u_1} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 2 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11} \rangle \\ &= 2 \langle \mathbf{b}_1, \Gamma_{11}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{b}_2 + h_{11} \cdot \mathbf{n} \rangle \\ &= 2g_{11}\Gamma_{11}^1 + 2g_{12}\Gamma_{11}^2. \end{aligned} \tag{7.43}$$

3. du nom de Joseph Plateau, 1801-1883, physicien belge. Le problème avait déjà été posé par Joseph-Louis Lagrange.

Cette observation permet de prouver que les symboles de Christoffel sont indépendants du vecteur normal \mathbf{n} à la surface.

Théorème 7.34 *Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k peuvent se calculer algébriquement à partir du tenseur métrique et de ses dérivées seulement.*

PREUVE. Les symboles de Christoffel sont donnés par l'équation (7.19) $\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{ij} \rangle$. On a vu à la proposition 7.8 que $\mathbf{c}_k = g^{k1}\mathbf{b}_1 + g^{k2}\mathbf{b}_2$, on peut donc écrire les symboles de Christoffel sous la forme

$$\Gamma_{ij}^k = g^{k1}\Gamma_{ij,1} + g^{k2}\Gamma_{ij,2} \quad (7.44)$$

où on a posé

$$\Gamma_{ij,m} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_m \rangle.$$

Comme $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ji}$, on a

$$\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}. \quad (7.45)$$

Et puisque

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_m \rangle = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_m \rangle + \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{mj} \rangle,$$

on a aussi

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} = \Gamma_{ij,m} + \Gamma_{mj,i}. \quad (7.46)$$

De même on a

$$\frac{\partial g_{mj}}{\partial u_i} = \Gamma_{mi,j} + \Gamma_{ji,m}. \quad (7.47)$$

$$-\frac{\partial g_{ji}}{\partial u_m} = -\Gamma_{jm,i} - \Gamma_{im,j}. \quad (7.48)$$

En additionnant les trois dernières équations et en tenant compte de (7.45), on obtient

$$2\Gamma_{ij,m} = \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m}.$$

L'équation (7.44) peut donc finalement s'écrire

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^2 g^{km}\Gamma_{ij,m} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right). \quad (7.49)$$

□

REMARQUES

- a) Les quantités $\Gamma_{ij,m} = \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ s'appellent parfois les *symboles de Christoffel de première espèce*. Les $\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ étant les symboles de Christoffel de *deuxième espèce*. D'anciennes notations pour ces quantités sont

$$\Gamma_{ij,m} = [ij, m], \quad \Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}.$$

- b) La formule (7.49) nous permet donc de calculer les symboles de Christoffel (de deuxième espèce) à partir du seul tenseur métrique. Il faut se souvenir que (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) . Il y a heureusement des simplifications et les valeurs des Γ_{ij}^k sont finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g} \left(g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} + g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right), \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g} \left(-g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + 2g_{11} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - g_{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right), \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g} \left(g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} - g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right), \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g} \left(g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} - g_{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right), \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2g} \left(-g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} + 2g_{22} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - g_{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right), \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g} \left(g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} + 2g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right). \end{array} \right.$$

Exemple 7.18 Supposons que le réseau de coordonnées sur la surface est orthogonal, alors on a $g_{12} = 0$ et on peut écrire $g_{11} = a^2$ et $g_{22} = b^2$, c'est-à-dire $ds^2 = a^2 du_1^2 + b^2 du_2^2$, où a et b sont des fonctions de (u_1, u_2) . Dans ce cas, les symboles de Christoffel se calculent facilement à l'aide des formules précédentes. On a par exemple

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2(ab)^2} \left(-a^2 \frac{\partial a^2}{\partial u_2} \right) = -\frac{a}{b^2} \frac{\partial a}{\partial u_2},$$

et

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(ab)^2} \left(a^2 \frac{\partial b^2}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u_1}.$$

7.24 Sur la courbure de Gauß

Le théorème suivant est l'un des résultats les plus importants démontrés par Gauß. Sa conséquence principale est que la courbure de Gauß ne dépend que de la géométrie intrinsèque de la surface. Nous préciserons ceci à la section 7.26.

Théorème 7.35 *La courbure de Gauß d'une surface de classe C^3 peut s'exprimer en fonction du tenseur métrique et des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k .*

La formule est assez formidable. Une façon élégante de l'écrire a été découverte par Liouville en 1851. En notant pour simplifier $\sqrt{g} = \sqrt{\det \mathbf{G}}$, la formule de Gauß-Liouville peut s'écrire

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \Gamma_{12}^2 \right) \right). \quad (7.50)$$

On peut échanger les rôles de u_1 et u_2 dans cette formule, ce qui nous donne

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \Gamma_{22}^1 \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \cdot \Gamma_{12}^1 \right) \right).$$

En raison des nombreuses symétries dans le tenseur métrique et les symboles de Christoffel, l'équation (7.50) peut prendre de nombreuses autres formes. On a par exemple la formule suivante (voir [38, page 131]) :

$$K = \frac{1}{g} \left(\partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right).$$

Exemple 7.19 Supposons par exemple que $ds^2 = a^2 du_1^2 + b^2 du_2^2$, alors Γ_{11}^2 et Γ_{12}^2 ont été calculés à l'exemple 7.18. La formule (7.50) nous donne alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \cdot \Gamma_{12}^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{ab} \left[-\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial u_1} \right) \right], \end{aligned}$$

et donc

$$K = -\frac{1}{ab} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial b}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{\partial a}{\partial u_2} \right) \right]. \quad (7.51)$$

Voyons deux cas particuliers :

i) Si $a = 1$, i.e. si $ds^2 = du_1^2 + b^2 du_2^2$, alors la formule précédente donne

$$K = -\frac{1}{b} \frac{\partial^2 b}{\partial u_1^2}.$$

ii) Si $a = b = e^\lambda$, i.e. si $ds^2 = e^{2\lambda}(du_1^2 + du_2^2)$, alors on obtient

$$K = -e^{-2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_2^2} \right).$$

PREUVE DU THÉORÈME 7.35

Nous allons prouver la formule de Gauß-Liouville (7.50). Notons toujours $\sqrt{g} = \sqrt{\det \mathbf{G}}$ et rappelons que $\sqrt{g} \Gamma_{12}^2 = [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}]$ (voir (7.20)); la dérivée de $\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2$ contient donc quatres termes qu'il faut calculer. Ces termes sont

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}]}{g_{11}} \right) = A + B + C + D,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial g_{11}^{-1}}{\partial u_1} \right) [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}], & B &= \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12} \right], \\ C &= \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u_1}, \mathbf{b}_{12} \right], & D &= \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_1} \right]. \end{aligned}$$

On a donc en utilisant les formules (7.20) en page 320 et (7.43) en page 338

$$\begin{aligned} A &= [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}] \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{g_{11}} \right) \\ &= -[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12}] \frac{1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \\ &= -\frac{1}{g_{11}^2} (\sqrt{g} \Gamma_{12}^2) (2g_{11} \Gamma_{11}^1 + 2g_{12} \Gamma_{11}^2). \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{12} \right] \\ &= \frac{1}{g_{11}} [\ell_{11} \mathbf{b}_1 + \ell_{21} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \Gamma_{12}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{b}_2 + h_{12} \mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{g_{11}} [\ell_{21} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, h_{12} \mathbf{n}] \\ &= -\frac{1}{g_{11}} \ell_{21} h_{12} \sqrt{g}. \end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u_1}, \mathbf{b}_{12} \right] = \frac{1}{g_{11}} [\mathbf{n}, \mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{12}] \\ &= \frac{1}{g_{11}} [\mathbf{n}, \Gamma_{11}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{b}_2, \Gamma_{12}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{b}_2] \\ &= \frac{\sqrt{\det \mathbf{G}}}{g_{11}} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1). \end{aligned}$$

Et enfin

$$D = \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_1} \right].$$

La dérivée de $\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2$ se calcule de façon similaire.

On a

$$\sqrt{g} \Gamma_{11}^2 = [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}],$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}]}{g_{11}} \right) = A' + B' + C' + D',$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= [\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}] \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{g_{11}} \right) \\ &= -[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11}] \frac{1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \\ &= -\frac{1}{g_{11}^2} (\sqrt{g} \Gamma_{11}^2) (2g_{11} \Gamma_{12}^1 + 2g_{12} \Gamma_{12}^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B' &= \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{11} \right] \\ &= \frac{1}{g_{11}} [\ell_{12} \mathbf{b}_1 + \ell_{22} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \Gamma_{11}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{b}_2 + h_{11} \mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{g_{11}} [\ell_{22} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, h_{11} \mathbf{n}] \\ &= -\frac{1}{g_{11}} \ell_{22} h_{11} \sqrt{g}. \end{aligned}$$

Ensuite

$$C' = \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u_2}, \mathbf{b}_{11} \right] = \frac{1}{g_{11}} [\mathbf{n}, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{11}] = -C \quad (7.52)$$

et

$$D' = \frac{1}{g_{11}} \left[\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \frac{\partial \mathbf{b}_{11}}{\partial u_2} \right].$$

L'argument central de notre démonstration est la remarque suivante : puisque ψ est de classe C^3 , on a

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial u_1^2 \partial u_2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_2 \partial u_1^2},$$

on en déduit que

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{11}}{\partial u_2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_2 \partial u_1^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial^2 u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_1},$$

et par conséquent

$$D = D'. \quad (7.53)$$

On vérifie aussi par un calcul direct que l'on a

$$A - A' = 2 \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1) = -2C. \quad (7.54)$$

En utilisant les relations (7.52), (7.53) et (7.54), on trouve donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) &= \\ &= A' + B' + C' + D' - A - B - C - D \\ &= (A' - A - 2C) + (D' - D) + (B' - B) \\ &= B' - B \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} (\ell_{22} h_{11} - \ell_{21} h_{12}). \end{aligned}$$

Rappelons l'équation de Weingarten (7.25) qui dit que $\mathbf{G} = -\mathbf{H} \cdot \mathbf{L}^{-1}$, soit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{\det \mathbf{L}} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{22} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{11} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\det \mathbf{L}} \begin{pmatrix} h_{11}\ell_{22} - h_{12}\ell_{21} & -h_{11}\ell_{12} + h_{12}\ell_{11} \\ h_{21}\ell_{22} - h_{22}\ell_{21} & -h_{21}\ell_{12} + h_{22}\ell_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or on sait grâce au corollaire 7.26 que $\det \mathbf{L} = K$, on a donc en particulier

$$g_{11} = -\frac{1}{K} (h_{11}\ell_{22} - h_{12}\ell_{21}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) &= -\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} (h_{11}\ell_{22} - h_{12}\ell_{21}) \\ &= \sqrt{g} K. \end{aligned}$$

Ceci prouve la formule (7.50) et donc le théorème. □

7.25 Les équations de Codazzi-Mainardi

Le théorème 7.35 est une conséquence de l'identité $\frac{\partial \mathbf{b}_{11}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_1}$ provenant de la symétrie des dérivées partielles. On a plus généralement

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{ii}}{\partial u_k} = \frac{\partial \mathbf{b}_{ik}}{\partial u_i}, \quad (7.55)$$

cette identité nous permet de trouver de nouvelles relations. On vérifie par un calcul direct que

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_{ik}}{\partial u_i} \right\rangle = \Gamma_{ik}^1 h_{1i} + \Gamma_{ik}^2 h_{2i} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_i}, \quad (7.56)$$

et

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{b}_{ii}}{\partial u_k} \right\rangle = \Gamma_{ii}^1 h_{1k} + \Gamma_{ii}^2 h_{2k} + \frac{\partial h_{ii}}{\partial u_k}. \quad (7.57)$$

En utilisant (7.55), on obtient alors

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial u_i} - \frac{\partial h_{ii}}{\partial u_k} = \Gamma_{ii}^1 h_{1k} + \Gamma_{ii}^2 h_{2k} - \Gamma_{ik}^1 h_{1i} - \Gamma_{ik}^2 h_{2i}. \quad (7.58)$$

C'est l'équation de Codazzi-Mainardi. Un théorème démontré par P. Bonnet en 1867 nous dit que *si l'on se donne deux matrices (g_{ij}) et (h_{ij}) de taille 2×2 qui dépendent de deux paramètres u, v et qui vérifient les relations données dans les équations de Gauß et de Codazzi-Mainardi, alors il existe un morceau de surface dans \mathbb{R}^3 pour laquelle (g_{ij}) est la première forme fondamentale et (h_{ij}) la deuxième. Cette surface est unique à un déplacement près⁴.*

Le théorème de Bonnet entraîne en particulier que toutes les relations qui existent entre la première et la deuxième forme fondamentales (et leur dérivées) sont des conséquences des équations de Gauß et de Codazzi-Mainardi. À titre d'exemple, la troisième forme fondamentale $q_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_j} \right\rangle$ doit pouvoir s'exprimer à partir des deux premières. C'est précisément ce que dit l'équation (7.36).

7.26 Surfaces isométriques et géométrie intrinsèque

Définition. Deux surfaces $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont dites *isométriques* s'il existe une bijection $f : S_1 \rightarrow S_2$ telle que pour toute courbe γ tracée sur S_1 , les courbes $\gamma \subset S_1$ et $f \circ \gamma \subset S_2$ ont la même longueur :

$$\ell(\gamma) = \ell(f \circ \gamma).$$

L'application $f : S_1 \rightarrow S_2$ s'appelle une *isométrie* entre les deux surfaces.

On disait autrefois que la surface S_1 est *applicable* sur la surface S_2 , mais cette terminologie est tombée en désuétude.

4. C'est le *théorème fondamental* de la théorie des surfaces. On trouvera une preuve dans le volume 3 du traité [37] de Spivak mentionné dans la bibliographie.

Proposition 7.36 *Deux surfaces isométriques ont le même tenseur métrique. Plus précisément, si $\psi : \Omega \rightarrow S_1$ est un paramétrage de S_1 et $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une bijection pour laquelle $f \circ \psi : \Omega \rightarrow S_2$ est un paramétrage de S_2 , alors le tenseur métrique $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est le même pour les deux surfaces paramétrées si et seulement si f est une isométrie.*

PREUVE. Les formules (7.13) et (7.14) montrent que l'application f préserve la longueur des courbes, si et seulement si les valeurs $g_{ij}(u_1, u_2)$ du tenseur métrique sont identiques pour les deux surfaces. \square

Exemple 7.20 Un calcul très simple montre que tout cylindre généralisé est localement isométrique à un plan. C'est aussi le cas du cône.

Un autre exemple est donné par l'hélicoïde et la caténoïde (qui est la surface de révolution d'une chaînette). Il n'est pas difficile de vérifier que ces deux surfaces sont localement isométriques.

On dit que deux surfaces isométriques ont *les mêmes propriétés intrinsèques*. La *géométrie intrinsèque* d'une surface étudie donc les notions qui restent invariantes lorsqu'on passe de cette surface à une autre qui lui est isométrique. La proposition précédente nous dit que les propriétés intrinsèques sont celles qui peuvent s'exprimer uniquement à partir du tenseur métrique (et de ses dérivées). La longueur des courbes et l'aire de la surface sont des exemples élémentaires de notions intrinsèques.

Théorème 7.37 *La notion de géodésique est une notion intrinsèque. Il en est de même de la courbure géodésique.*

PREUVE. Les symboles de Christoffel sont intrinsèques par le théorème 7.34, il en est donc de même de la courbure géodésique par la formule (7.33). La notion de géodésique est aussi intrinsèque par les formules (7.31). Voir aussi la proposition 7.23. \square

La courbure moyenne n'est pas une notion intrinsèque, par exemple le plan et le cylindre sont localement isométriques mais ces deux surfaces n'ont pas la même courbure moyenne. On a en revanche le théorème suivant.

Théorème 7.38 (Theorema Egregium de Gauß, (1827)) *La courbure de Gauß est une notion intrinsèque ; elle peut se calculer à partir du tenseur métrique.*

PREUVE. Ce résultat découle immédiatement des théorèmes 7.34 et 7.35. \square

Gauß était à juste titre très fier de ce résultat (*egregium* signifie beau, remarquable). C'est l'un des théorèmes fondamentaux de la géométrie différentielle ; il prend tout son sens dans le cadre de la *géométrie riemannienne* dont le but est précisément d'étudier la géométrie d'un point de vue intrinsèque. La géométrie

riemannienne est un très vaste sujet : on y étudie les surfaces d'un point de vue local, mais aussi du point de vue de leur propriétés topologiques et globales. Le sujet porte aussi sur des objets de plus grande dimension que les surfaces (ce sont les *variétés riemanniennes*). Notons pour finir que la géométrie riemannienne (plus précisément une généralisation de cette théorie) est le cadre mathématique de la *relativité générale* qui décrit la courbure de l'espace-temps physique en relation avec la distribution de matière contenue dans l'Univers. Mais nous n'aborderons pas ces sujets dans ce livre, qui trouve ici sa conclusion.

7.27 Exercices

7.27.1 Calculer le plan affine tangent en un point quelconque de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7.27.2

a) Montrer que l'hyperboloïde à une nappe

$$\mathcal{H} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

est une surface de révolution.

b) Trouver l'équation du plan affine tangent $A_p \mathcal{H}$ où $p = (2, 1, 2)$.

c) Trouver un paramétrage de \mathcal{H} et écrire le tenseur métrique.

7.27.3

a) Trouver l'équation du paraboloïde de révolution obtenu en faisant tourner la parabole

$$z + ax^2 = 0$$

autour de l'axe Oz .

b) Trouver l'équation du plan tangent en $p = (x_0, y_0, z_0)$.

c) Montrer que cette surface est un graphe.

7.27.4 Considérons la surface $S : z = x^3 - \cos(xy)$.

a) Calculer le vecteur normal à S (forme implicite).

b) Paramétriser S .

c) Calculer le vecteur normal à S (forme paramétrique).

d) Calculer le tenseur métrique de ce paramétrage.

e) Esquisser la surface.

7.27.5 Montrer que l'hyperboloïde \mathcal{H} à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est une surface réglée.

Indication : Ecrire l'équation sous la forme $x^2 - 1 = z^2 - y^2$ et factoriser. En déduire algébriquement l'équation d'une droite contenue dans \mathcal{H} , puis la paramétrer et la faire tourner autour de l'axe Oz .

7.27.6 Soit $\alpha(s) \in \mathbb{R}^2$ ($s \in I$) une courbe du plan paramétrée naturellement et soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre (vertical) associé.

- a) Donner un paramétrage de S ;
- b) Calculer le repère adapté à ce paramétrage ;
- c) Trouver le tenseur métrique.

7.27.7 Montrer que l'hélicoïde $x \sin(z) = y \cos(z)$ admet le paramétrage $\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$, en déduire que c'est bien une surface réglée. Calculer ensuite le tenseur métrique de ce paramétrage.

7.27.8 On considère le tore obtenu en faisant tourner le cercle de rayon a et de centre $(b, 0, 0)$ du plan Oxz autour de l'axe Oz , où on admet $0 < b < a$. Trouver l'équation implicite de ce tore sous forme polynômiale, puis calculer le vecteur normal unitaire en un point quelconque.

7.27.9 Montrer que le tore de l'exercice précédent est la surface de révolution de profil $r = a \cos(v) + b$, $z = a \sin(v)$.

Calculer ensuite le tenseur métrique associé, puis l'aire de la surface.

7.27.10 Soit $\gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ ($\leq s \leq b$) une courbe régulière et $\epsilon > 0$ une (petite) constante. La réunion des cercles de rayons ϵ centré en $\gamma(s)$ et contenu dans le plan orthogonal $\dot{\gamma}(s)$ est une surface. On l'appelle un ϵ -tube autour de γ (ainsi un cylindre ou un tore sont des exemples simples de tubes).

- a) Faire un dessin.
- b) En supposant que γ est paramétrée naturellement et birégulière, donner un paramétrage $\psi(s, \theta)$ du ϵ -tube (on utilisera le repère de Frenet).
- c) Calculer le tenseur métrique de ce paramétrage.
- d) Montrer que l'aire de ce tube est donnée par

$$A = 2\pi\epsilon L$$

où L est la longueur de γ .

- e) Observer que cette formule est surprenante, l'aire du tube ne dépend que de ϵ et de la longueur de la courbe γ au centre du tube. Donner néanmoins une explication intuitive de ce phénomène.

7.27.11 Le paramétrage de la sphère comme surface de révolution s'appelle en cartographie la *projection cylindrique droite*. Si elle est la plus simple à définir, elle n'est pas la plus utile car elle souffre de plusieurs défauts.

En marine, on voudrait avoir une représentation cartographique simple des routes de navigation, et en particulier des loxodromes qui sont les courbes d'azimut constant.

La solution à ce problème a été donnée par le géographe flamand Gérard Mercator en 1569. Elle s'obtient en transformant les coordonnées $(u, v) =$ longitude/latitude en utilisant l'équation de la loxodrome. On pose donc

$$t = \log\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right).$$

- a) Vérifier que $\sin(v) = \frac{2e^t}{1+e^{2t}}$ et $\cos(v) = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$.

- b) Montrer que les loxodromes se représentent pas des droites dans le plan de coordonnées (u, t) .
- c) Utiliser (u, t) comme nouveaux paramètres pour la sphère unité, et montrer que le tenseur métrique s'écrit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{4ae^{2t}}{(1+e^{2t})^2} & 0 \\ 0 & \frac{4ae^{2t}}{(1+e^{2t})^2} \end{pmatrix}.$$

- d) Dédurre de ce calcul que la carte de Mercator préserve tous les angles (l'angle entre deux courbes de la sphère est égal à l'angle des deux courbes sur la carte).

On dit que cette carte est *conforme* car elle ne déforme pas les angles. Elle présente par contre le défaut de déformer les aires.

7.27.12 Rappelons qu'une courbe γ tracée sur la surface S est *géodésique* si son accélération est toujours orthogonale à la surface.

Montrer que les géodésiques d'un cylindre généralisé sont des courbes de pentes constantes. Préciser ensuite le cas du cylindre circulaire droit.

7.27.13 L'hélice $(\sin(t), \cos(t), t)$ est-elle une géodésique de l'hélicoïde

$$x \sin(z) = y \cos(z)?$$

7.27.14 Calculer la première et la deuxième formes fondamentales de la surface

$$\psi(u, v) = (\sqrt{2} \cos(u), \sqrt{2} \cos(v), \sin(u) \sin(v)).$$

7.27.15 Montrer que la courbure de Gauss d'une surface minimale vérifie $K \leq 0$.

7.27.16 Montrer que pour le tore de révolution considéré plus haut, on a

$$H = - \left(\frac{a \cos(v) + b/2}{a \cos(v) + b} \right), \quad K = \frac{\cos(v)}{a(a \cos(v) + b)}.$$

Puis vérifier que les courbures principales sont

$$k_1 = - \frac{\cos(v)}{a \cos(v) + b}, \quad k_2 = - \frac{1}{a}.$$

7.27.17 Calculer le tenseur métrique et la matrice de Weingarten \mathbf{L} du cylindre généralisé $\psi(u, v) = (x(u), y(u), v)$, puis en déduire les courbures principales, moyenne et de Gauß. Chercher les directions principales.

7.27.18 La *caténoïde* est la surface de révolution de la chaînette $r = \cosh(z)$ autour de l'axe Oz .

- a) Paramétrer la caténoïde, puis calculer le tenseur métrique.

- b) Montrer que la caténoïde est une surface minimale.
- c) Calculer la courbure de Gauß, puis les courbures principales.
- d) Calculer les symboles de Christoffels.

7.27.19 On considère l'hélicoïde $\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$:

- a) Montrer que c'est une surface minimale.
- b) Calculer ensuite la courbure de Gauß et les symboles de Christoffels.
- c) Observer la relation avec les résultats de l'exercice précédent et en donner une explication.

7.27.20 Que vaut la courbure moyenne du cône $x^2 + y^2 = pz^2$ (en dehors du point singulier) ?

7.27.21 La *pseudosphère de Beltrami* est la surface de révolution dont le profil est la tractrice d'équation $r(v) = \frac{1}{\cosh(v)}$ et $z(v) = v - \tanh(v)$.

Calculer le tenseur métrique de ce paramétrage, puis chercher la courbure de Gauß.

7.27.22 Montrer que la courbure de Gauß au point (x, y, z) de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est donnée par

$$K = \frac{1}{(abc)^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^2}.$$

7.27.23 Soit $\psi : \Omega \rightarrow S_0$ une surface. On note \mathbf{L}_t la matrice de Weingarten de la surface parallèle ψ_t . Montrer que \mathbf{L}_t vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_t = -\mathbf{L}_t^2.$$

(C'est l'équation de Riccati pour l'opérateur de Weingarten.)

7.27.24 Soit S_t la famille des surfaces parallèles à une surface S_0 . Notons $k_1(t), k_2(t)$ les courbures principales de S_t . Montrer que

$$k_i(t) = \frac{k_i(0)}{1 + t k_i(0)}.$$

7.27.25 Montrer que la longueur des courbes tracée sur une surface et l'aire de cette surface sont des notions intrinsèques.

Qu'en est-il de la notion d'angle entre deux courbes ?

7.27.26 Prouver que le cylindre et le plan sont des surfaces localement isométriques. Dédurre de cet exemple que la courbure moyenne n'est pas une notion intrinsèque.

7.27.27 Montrer que l'hélicoïde et la caténoïde sont localement isométriques.

7.27.28 On considère une surface paramétrée pour laquelle le tenseur métrique est donné par $ds^2 = du_1^2 + e^{2u_1} du_2^2$. Montrer que les symboles de Christoffel sont donnés par $\Gamma_{12}^2 = 1$, $\Gamma_{22}^1 = -e^{2u_1}$, tous les autres Γ_{ij}^k étant nuls. Écrire ensuite l'équation des géodésiques de cette surface. Puis montrer que sa courbure de Gauß vaut $K = -1$.

7.27.29 Une surface $\psi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ admet le tenseur métrique :

$$ds^2 = \frac{du_1^2 + du_2^2}{(1 + c(u_1^2 + u_2^2))^2}.$$

Montrer que cette surface est à courbure de Gauß constante, et calculer cette courbure en fonction de c .

7.27.30 Prouver les équations (7.56) et (7.57) de la page 345.

7.27.31 L'idéal en cartographie serait d'avoir un paramétrage de la sphère qui serait conforme et ne déformerait pas les aires (à l'exception d'un changement d'échelle uniforme). Il est hélas connu en géographie que toute carte d'une portion du globe terrestre est par nécessité une image déformée de la réalité. Prouver qu'il est en effet impossible de construire une carte géographique qui respecterait la longueur de toutes les courbes à une échelle uniforme.

(Indication : utiliser le théorème Egregium de Gauß.)

Bibliographie

- [1] AUDIN M. , *Géométrie*, EDP SCIENCES collection Enseignement Supérieur, 2006.
- [2] ARTIN E., *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1962.
- [3] AMIR D. *Characterizations of inner product spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986
- [4] BERGER M. et GOSTIAUX B., *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1992.
- [5] BERGER M. *Géométrie (en 5 volumes)*, Cedec-Fernand Nathan, 1977.
- [6] COX D. A., LITTLE J., O'SHEA D. *Using Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 2005.
- [7] COXETER H. S. M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1961.
- [8] DO CARMO M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [9] BORCEUX F., *Invitation à la géométrie*, CIACO, 1986.
- [10] DIEUDONNÉ J., *Cours de géométrie algébrique 1 et 2*, Presses Universitaires de France, 1974.
- [11] DOMBROWSKI P., *150 years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas" with the original text of Gauss*, Société mathématique de France, 1979, (Astérisque ; 62).
- [12] BRANNAN D. A., ESPLEN M. F. et GRAY J. J., *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.
- [13] DO CARMO M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [14] DÉRIBÉRÉ M., *La couleur*, Que sais-je ?, Presses Universitaire de France.
- [15] DOOLIN B. F. et MARTIN C. F., *Introduction to Differential Geometry for Engineers*, Marcel Dekker, 1990.
- [16] EARLE J. H., *Geometry for Engineers*, Addison-Wesley, 1984.
- [17] EUCLIDE, *Les éléments (traduction et commentaires par B. Vitrac)*, Presses Universitaires de France, 1990.

- [18] GALLIER J., *Curves and Surfaces in Geometric Modeling. Theory and Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2000.
- [19] GALLIER J., *Geometric Methodes and Applications for Computer Science and Enginnering*, New York , Springer, 2001.
- [20] GAUDIN J., *Colorimétrie appliquée à la vidéo*, Dunod, 2006.
- [21] GIERING O. et SEYBOLD H., *Konstruktive Ingenieurgeometrie*, Hanser Fachbuchverlag ; Auflage : 3., wesentl. erw. A. (1987).
- [22] HADAMARD J., *Leçons de géométrie élémentaire*, Colin, Paris, 1931.
- [23] HARTSHORNE R., *Geometry : Euclid and beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [24] JAMES R. C., Inner product in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53, pp. 559-566, 1947.
- [25] KREYSZIG E., *Differential Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [26] LORCH E. R., On Certain Implications Which Characterize Hilbert Space, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 49, No 3, pp. 523-532, Jul. 1948.
- [27] LEGENDRE A.-M., *Eléments de géométrie*, 14^e édition, Paris, F. Didot, 1871.
- [28] LEHMANN D., *Initiation à la géométrie*, Presses Universitaires de France, Paris, 1988.
- [29] LEHMANN D., *Une Introduction à la géométrie projective*, Ellipses, 2003.
- [30] LELONG-FERRAND J., *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, Paris, 1985.
- [31] LICOIS J.-R., *La Géométrie élémentaire*, Opuscles - Ellipses, 2005.
- [32] O'NEILL B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York-London 1966.
- [33] PATSOPOULOS D. et T. PATRONIS, The Theorem of Thales : A Study of the Naming of Theorems in School, *International Journal for the History of Mathematics Education*, Vol. 1, No 1, 2006.
- [34] PERRIN D., *Géométrie algébrique. Une introduction*, Savoirs Actuels. InterEditions, Paris ; CNRS Éditions, Paris, 1995.
- [35] HEGE H.-C. et K. POLTHIER, *Visualization and mathematics III, Papers from the 3rd International Workshop held in Berlin, May 22-25, 2002*, Mathematics and Visualization, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [36] ROUCHÉ E. et DE COMBEROUSSE C., *Traité de géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1900.
- [37] SPIVAK A., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volumes 2 et 3, Publish or Perish, Inc.
- [38] TOPONOGOV V. A., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Boston, Mass., Birkhäuser, 2006.

- [39] VENEMA G. A., *The foundations of Geometry*, Upper Saddle River, N.J : Pearson Prentice Hal, 2002.
- [40] VIENNE L., *Géométries affine et euclidienne - Quadriques*, Hermann, 2005.
- [41] OSTERMANN A. et WANNER G., *Geometry by its History*, Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012.
- [42] WYSZECKI G. et STILES W. S., *Color Science : concepts and methods, quantitative data and formulae*, Wiley, 1982.
- [43] ZUPPIROLI L., BUSSAC M.-N., *Traité des couleurs*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.

Index

- abscisse curviligne, 230
- accélération, 221
 - normale, 237
 - tangentielle, 237
- affinité, 189
- angle, 110
 - d'Euler d'une rotation, 197
 - diédral, 113
 - orienté, 137
- application de Weingarten, 323
- arc
 - concave, 251
 - convexe, 251
 - simple, 222
- astroïde, 272, 282, 283
- axes
 - adaptés, 298
 - de coordonnées, 57
- barycentre d'un triangle, 75
- base duale, 153
- bi-point, 34
- Bonnet, 345
- Bézier, 224
- cône
 - circulaire droit, 291
 - de Mach, 287
- cardioïde, 284
- caténoïde, 349
- Cauchy-Schwarz (inégalité de), 99, 108
- centre
 - de courbure, 240
 - de gravité d'un triangle, 75
 - de rotation, 194
- cercle osculateur, 240
- champ
 - de poursuite, 226
 - de vecteurs le long d'une courbe, 225
- chaînette, 234, 254
- chlotoïde, 257
- cinématique, 232
- coefficient(s)
 - de projection, 95
 - principaux de dilatation, 207
- composantes d'un vecteur, 56, 57
- conchoïde, 284
- conique, 267
- conjugaison, 203, 210
- contact entre deux courbes, 238
- coordonnées
 - adaptés, 298
 - barycentriques, 69
 - curvilignes, 296
 - homogènes, 66
 - polaires, 257
- courbe
 - birégulière, 221
 - de classe C^k , 221
 - de pente constante, 248
 - implicite, 270
 - paramétrée, 220
 - régulière, 221
 - unicursale, 274
- courbure
 - d'une courbe, 235
 - de Gauß, 315
 - géodésique, 325
 - moyenne, 313
 - normale, 312, 324
 - orientée, 252
 - principale, 314
 - totale, 315
- cycloïde, 282
- cylindre généralisé, 291

- Darboux (repère de), 327
- Darboux (vecteur de), 244
- décomposition de Chasles, 199
- déplacement, 182
 - hélicoïdal, 198
- dérivation des fonctions composées, 270
- développante, 261
- développée, 261
- diagramme de courbure, 255
- directions principales, 315
- directrice, 267
- distance d'un point à une droite, 157
- droite(s)
 - d'Euler, 124
 - parallèles, 24
- ellipse, 267
- enveloppe, 280
- épicycloïde, 263
- équation
 - cartésienne d'un plan, 61
 - de Ricatti, 350
 - de Weingarten, 323
 - intrinsèque, 256
- équipollence, 48
- équipollents (vecteurs), 48
- espace
 - métrique, 18
 - projectif, 66
- excentricité, 267
- faisceau de droites, 135
- figure invariante, 181
- folium de Descartes, 272
- fonction angulaire, 252
- formule
 - de Heron, 118
 - de l'accélération, 236
 - de Liouville, 341
 - de Serret-Frenet, 243
- gradient, 269
- graphe
 - d'une fonction, 223, 293
- groupe
 - de matrices, 211
 - de transformations, 210
- géodésique, 309
- hélice
 - circulaire, 246
 - généralisée, 248
- homothétie, 186, 190
- hyperbole, 267
- hypocycloïde, 287
- hélice
 - circulaire, 224
- hélicoïde, 291
- identité
 - de Grassmann, 147
 - de Jacobi, 148
 - de Lagrange, 147
- indice d'une courbe plane périodique, 252
- intervalle de paramétrage, 220
- isomorphisme de groupes, 211
- isométrie, 181, 191
- latitude, 302
- lemniscate, 286
- lignes de coordonnées, 296
- loi(s)
 - de Grassmann, 79
 - de la colorimétrie, 79
 - de Laplace-Young, 317
- longitude, 302
- losange, 27
- loxodrome, 307, 348
- matrice
 - de Gram, 102, 207
 - homogène, 203
 - orthogonale, 192
- médiane, 27
- Mercator, 348
- méridiens, 302
- norme, 89
- orientation d'une surface, 311
- orthogonalité, 38
- osculateur, 241, 242
- pôle, 194

- parabole, 267
- paradoxe d'Aristote, 283
- parallèles, 302
- parallélépipède, 33
- paramètre, 220
 - affine, 20
- paramétrage naturel, 234
- partie linéaire, 183
- perspective, 164, 166
- plan
 - affine tangent, 294
 - normal, 242
 - osculateur, 221, 242
 - rectifiant, 242
 - vectorel tangent, 294
- plan(s), 23
 - de coordonnées, 57
- Plücker (coordonnées de), 132, 154
- point
 - critique, 291
 - critique d'une fonction, 270
 - d'inflexion, 251
 - de fuite, 167
 - fixe, 181
 - ombilique, 315
 - singulier d'une courbe, 221
 - singulier d'une surface, 291
- première forme fondamentale, 299
- prisme, 33
- problème de Plateau, 338
- produit
 - extérieur, 129
 - mixte, 149
 - scalaire, 98
 - tensoriel de deux vecteurs, 165
 - vectorel, 145
- projection, 163
 - centrale, 166, 167
- pseudosphère, 350
- quantité
 - cinématique, 232
 - géométrique, 232
- rapport
 - de section, 19
 - de similitude, 181
- rayon de courbure, 240
- rectangle, 40
- réflexion glissante, 191
- région simple du plan, 109
- règle de Leibniz, 227
- reparamétrage, 230
- repère
 - adapté, 299
 - affine, 52
 - affine d'un plan, 54
 - affine de l'espace, 55
 - affine sur une droite, 53
 - de Darboux, 327
 - de Frenet, 241, 253
 - direct, 65
 - tournant, 258
- réseau de coordonnées, 296
- rotation, 188
- seconde forme fondamentale, 321
- section normale, 312
- similitude, 180
- sinus, 138
- spirale
 - d'Archimède, 258
 - logarithmique, 258
- spline, 224
- surface, 290
 - isométrique, 345
 - minimale, 319, 337
 - parallèle, 335
 - réglée, 304
- symboles de Christoffel, 320
- symétrie
 - à travers un plan, 187
 - centrale, 186
- tangente, 138
- tenseur métrique, 299
- tension superficielle, 316
- tétraèdre, 168
- théorème
 - d'Euclide, 93
 - d'Euler, 195
 - de Ceva, 74
 - de Chasles dans l'espace, 198
 - de Chasles dans le plan, 193

- de la hauteur, 94
- de Ménélaüs, 73
- de Papus, 76
- de Pythagore, 92, 94
- de Thalès, 30
- de Thalès réciproque, 30
- de Varignon, 43
- des fonctions implicites, 277
- du cosinus, 117
- torsion
 - d'une courbe, 242
 - géodésique, 327
- trace d'une courbe, 220
- tractrice, 285
- transformation
 - affine, 179
 - directe, 182
 - indirecte, 182
 - inverse, 185
- translation, 185
- transvection, 190
- triangle
 - congru, 27
 - de Maxwell, 82
 - isocèle, 27
 - sphérique, 171
- triplets pythagoriciens, 275
- troisième forme fondamentale, 330
- vecteur
 - binormal, 242
 - de courbure, 235
 - de Darboux, 244
 - fixe, 34
 - libre, 48, 50
 - normal principal, 242
 - tangent, 242
 - tangent (d'une courbe), 226
 - translation, 183
 - vitesse, 220
- vitesse, 220
 - angulaire, 223
- Weyl (formule de), 337

