

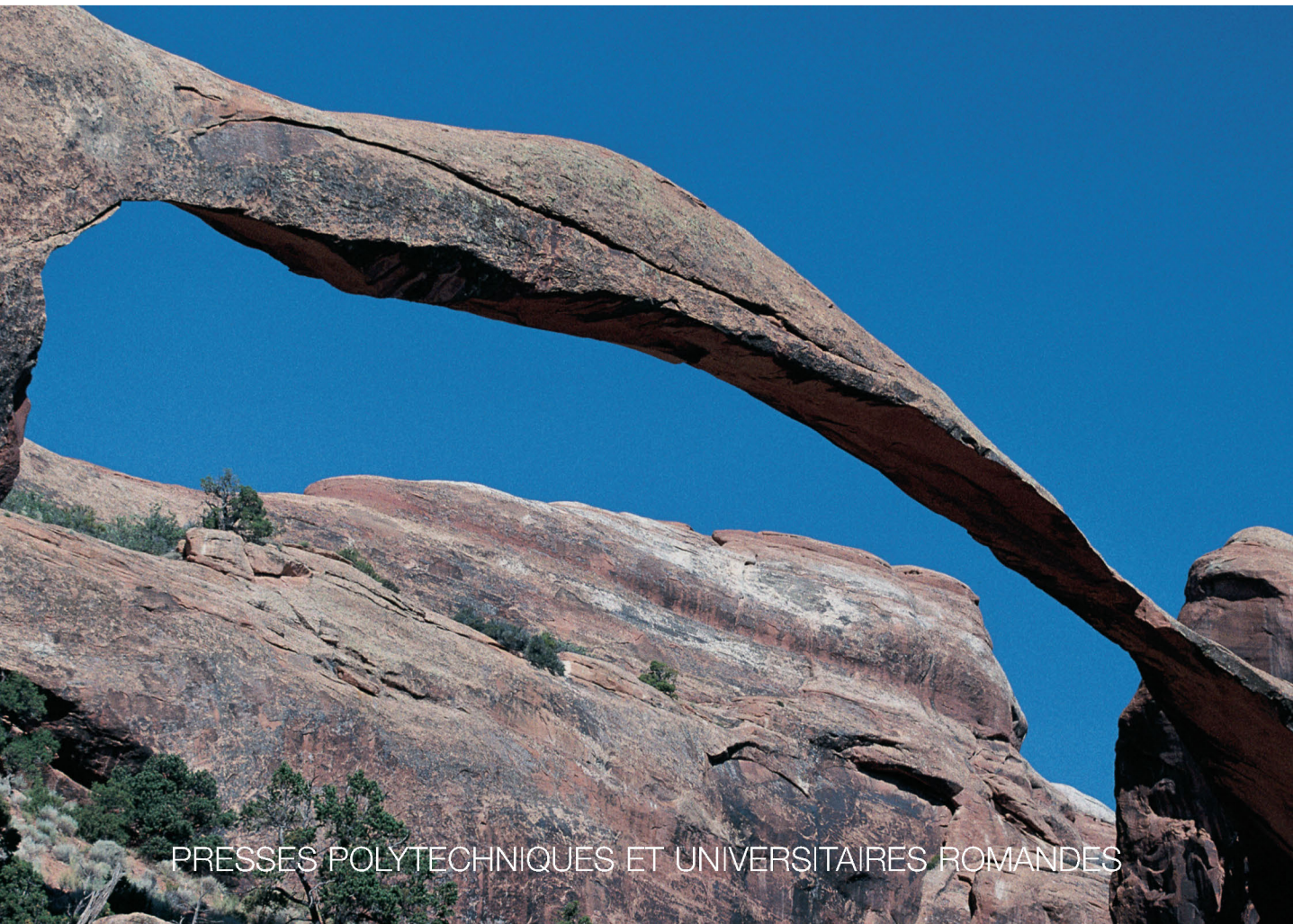
——— Traité de Génie Civil ———
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Volume 2

Analyse des structures et milieux continus

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

François Frey



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

——— Traité de Génie Civil ———

Volume 2

MÉCANIQUE DES STRUCTURES



« L'observation des formes naturelles, la volonté de comprendre, est la première qualité du concepteur. Il faut susciter la curiosité par les générateurs d'idées que sont les formes naturelles... »

Robert Le Ricolais, 1969.

Illustration de couverture (photo de l'auteur):

Landscape Arch

Arches National Park, Utah, USA.

(Portée environ 100 m ; épaisseur minimale environ 3 m)

——— Traité de Génie Civil ———

de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

publié sous la direction de René Walther et Manfred A. Hirt

Volume 2

Analyse des structures et milieux continus

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

François Frey

Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Traité de Génie Civil

de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Cet ouvrage fait partie d'une série d'une vingtaine de volumes qui sont publiés sous la direction de René Walther et Manfred Hirt, professeurs à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, dont la liste suivante, non exhaustive, présente le plan général de publication (voir l'état des parutions sur notre site web www.epflpress.org).

1. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Statique appliquée
2. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Mécanique des structures
3. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Mécanique des solides
4. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Poutres et plaques
5. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Coques
6. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Méthode des éléments finis
7. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON
Bases et technologie
8. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON
Aptitude au service et éléments de structures
9. PONTS EN BÉTON
Généralités, conception et dimensionnement
10. CONSTRUCTION MÉTALLIQUE
Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement
11. CHARPENTES MÉTALLIQUES
Conception et dimensionnement des halles et bâtiments
12. PONTS EN ACIER
Conception et dimensionnement des ponts métalliques et mixtes acier-béton
13. CONSTRUCTION EN BOIS
Matériau, technologie et dimensionnement
14. VOIES DE CIRCULATION
Routes et chemins de fer, conception et construction
15. CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES
Ecoulements stationnaires
16. HYDRAULIQUE FLUVIALE
Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple
17. BARRAGES
Conception, construction, contrôle
18. MÉCANIQUE DES SOLS ET DES ROCHES
19. FOUILLES ET FONDATIONS
20. OUVRAGES ET TRAVAUX SOUTERRAINS
21. SYSTÈMES ÉNERGÉTIQUES
Offre et demande d'énergie : méthodes d'analyse
22. AMÉNAGEMENTS ÉNERGÉTIQUES
23. ÉTUDES D'IMPACT SUR L'ENVIRONNEMENT
24. MATÉRIAUX
Constitution et lois de comportements rhéologiques

Le Traité de Génie Civil est une publication des Presses polytechniques et universitaires romandes, fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Deuxième édition corrigée

© 2000, 2006, Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne
ISBN 978-2-88074-434-2, version imprimée
ISBN 978-2-88914-571-3, version ebook (PDF), doi.org/10.55430/0202MDSFF

Ce texte est sous licence Creative Commons :



elle vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur,
la source et l'éditeur original, sans modifications du texte
ou de l'extrait et sans utilisation commerciale

Avant-propos

Ce livre est le deuxième d'une série d'ouvrages consacrés à l'analyse des structures et milieux continus. Nous renvoyons le lecteur à l'avant-propos du premier ouvrage (vol. 1, *Statique appliquée*), qui conserve l'essentiel de sa valeur pour ce livre.

Quelques nouveaux collaborateurs ont toutefois contribué à la qualité du présent texte : MM. E. Davalle, B. Rebora et M.-A. Studer ont relevé plusieurs imperfections et construit la plupart des exercices, tandis que Mme E. Guidetti a dactylographié de nombreux passages avec beaucoup de soin.

L'expression *mécanique des structures* remplace désormais *mécanique des matériaux* ; cette dernière locution est réservée plus particulièrement à la science dévolue à l'étude et à la caractérisation des propriétés physiques et mécaniques des matériaux (parfois appelée *rhéologie* et enseignée, à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, par le Département des matériaux).

Enfin, suite au remaniement du plan d'études de la section de Génie Civil (1991), l'enseignement de la quatrième année, dans la filière *Conception et analyse des constructions*, se présente comme suit : *Analyse dynamique des ouvrages I et II* reprend le cours de *Dynamique* classique (7^e semestre) et y introduit un nouveau volet, consacré aux méthodes numériques (8^e semestre) et enseigné par M. Th. Zimmermann, chargé de cours ; *Mécanique des structures et modélisation numérique I et II* (7^e et 8^e semestres) traite des structures tridimensionnelles à parois minces (coques), du calcul non linéaire (grands déplacements et instabilité), des techniques de modélisation et des méthodes numériques associées (éléments finis) ; les branches à caractère pratique (*Informatique appliquée aux projets I et II*, 6^e et 7^e semestres, et *Laboratoires*, 8^e semestre), indispensables, ont été maintenues.

Ce livre, comme le précédent, est le reflet des cours dispensés aux étudiants de la section de Génie Civil de l'EPFL, durant les 1^{er}, 2^e et 3^e semestres du premier cycle ; l'exiguïté de l'horaire a poussé l'auteur à rationaliser la matière pour ne présenter que les connaissances à la fois primordiales et réellement utiles. Un tel exercice a certainement des aspects positifs ; on peut aussi estimer que certaines notions font défaut ; nous pensons néanmoins que cet ouvrage donne l'essentiel des bases nécessaires au métier d'ingénieur.

Pour terminer, nous remercions à nouveau les Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), qui ont apporté un soutien décisif à la réalisation de ce volume et mis à notre disposition les talents de Mme M.-H. Gellis pour la composition et la mise en page, et ceux de M. J.-F. Casteu pour l'exécution des dessins et graphiques.

François Frey

Avant-propos de la deuxième édition

L'objectif de cette seconde édition ne saurait différer de celui de la première : donner à l'étudiant les bases de la mécanique des structures, si polyvalentes et utiles à l'ingénieur concepteur et constructeur.

Les multiples petites erreurs qui jalonnent inévitablement une première édition, ont été corrigées pour l'essentiel. L'étude des poutres faites de deux ou plusieurs matériaux a été remaniée ; la notion de forme géométrique d'une section droite équivalente, rapportée à un matériau de référence, délicate et ambiguë pour l'étudiant, est abandonnée au profit d'une analyse qui, s'appuyant sur les connaissances de base, gagne en efficience et simplicité.

L'auteur remercie l'ensemble des personnes qui ont contribué à la qualité de cette deuxième édition : les étudiantes et étudiants, mes collègues, mes collaborateurs et l'équipe des Presses polytechniques et universitaires romandes.

François Frey

Introduction

Objet de la mécanique des structures

La mécanique des structures a pour but de rechercher les meilleures formes et dimensions à donner aux éléments d'une construction, pour lui permettre de résister aux actions qui la sollicitent, ainsi que pour obtenir ce résultat d'une manière aussi économique que possible.

Le comportement d'un élément de construction ne dépend pas seulement des lois fondamentales de la statique, tel l'équilibre des forces, mais aussi des propriétés *physiques* caractérisant les matériaux avec lesquels il est construit. Ces propriétés traduisent la façon dont la matière *résiste* et *se déforme* face à diverses sollicitations (traction, flexion...), appliquées dans diverses conditions (vite, lentement, à froid, à chaud...). La détermination expérimentale et la connaissance détaillée de ces propriétés relèvent de la *mécanique des matériaux* et sont l'un des composants essentiels de la mécanique des structures ; dans cet ouvrage, on se contente essentiellement d'utiliser, sous forme de lois, les résultats provenant de l'expérimentation des matériaux en laboratoire.

Ainsi, la mécanique des structures apparaît comme une science où l'expérience du laboratoire côtoie le postulat de la mécanique. En fait, cette science est une *théorie technique* des corps déformables qui s'applique aux *structures* surtout, par opposition à la théorie mathématique de la *mécanique des solides* et, plus généralement, des *milieux continus*. Au lieu du raisonnement mathématique rigoureux complexe, la mécanique des structures admet des hypothèses simplificatrices, raisonnables, plausibles, vérifiées par l'expérience ou issues de la théorie exacte, grâce auxquelles on peut résoudre efficacement, avec un degré d'approximation suffisant, quantité de problèmes d'un grand intérêt pratique.

La mécanique des structures est par excellence une science d'ingénieur : son caractère approché fait appel intensivement au jugement de l'ingénieur, pour lui permettre de mener la résolution des problèmes jusqu'à un résultat *numérique* d'une valeur pratique satisfaisante. Cette théorie technique possède donc inévitablement des démarches propres et peut paraître un rien déconcertante pour l'étudiant ... au début ! Aussi s'efforce-t-on de la présenter de la manière la plus unifiée possible.

La mécanique des structures est d'un intérêt étonnant pour presque toutes les branches de la profession d'ingénieur : civil (ponts, bâtiments, fondations...), mécanicien (machines, moteurs, tuyauteries...), aéronauticien (fusées, avions...), chimiste (réservoirs, chaudières...), des constructions navales (navires, sous-marins...), architecte (édifices...), métallurgiste (étude des métaux, laminage...), électricien (câbles...), hydraulicien (ouvrages hydrauliques...), physicien (mécanique du solide, cristaux...), géologue (roches, sols...), des mines (galeries, soutènements...), etc.

La mécanique des structures présentée dans ce livre, plus orienté vers l'ingénieur civil, forme également la base de la théorie des structures formées de barres et poutres (dont la partie isostatique est supposée connue), de plaques et de coques. Elle permet finalement de déterminer la *résistance* des éléments de construction, par l'étude des forces internes agissant dans la matière, de tester leur *rigidité* par l'étude des déformations produites dans la matière et des déplacements qui en résultent,

et de lutter contre leur *instabilité* par l'étude des conditions d'équilibre liées aux caractéristiques de la matière (et non à l'équilibre global d'un système de forces).

Souvent la mécanique des structures s'appuie sur les résultats de la mécanique des solides. Vu la complémentarité de ces deux disciplines, dont la frontière est d'ailleurs parfois difficile à tracer, elles sont enseignées parallèlement à la section de Génie Civil de l'EPFL.

De la statique appliquée à la mécanique des structures

Des notions acquises en statique appliquée, la mécanique des structures utilise constamment

- l'*équilibre* et la *réduction* (vol. 1, chap. 3)⁽¹⁾ ;
- la *coupe* (vol. 1, chap. 4).

Mais il est bien clair que toutes les notions de statique sont utilisées par la mécanique des structures ; en effet, cette dernière constitue la deuxième étape du dimensionnement des structures et ne saurait donc se passer de la première.

Les problèmes de mécanique des structures se présentent sous deux aspects différents :

- connaissant les forces extérieures, les dimensions, et le(s) matériau(x) d'un élément structural, on peut rechercher quels sont les forces internes, les déplacements ... qui en résultent, et *contrôler* que ces grandeurs sont inférieures à une limite fixée d'avance ; c'est un problème de *vérification*, aisément accessible ;
- connaissant les forces extérieures, on peut *rechercher* quelles sont les dimensions à donner à la structure, afin que les forces internes, les déplacements ... ne dépassent pas une limite fixée d'avance, et ce pour divers matériaux disponibles ; c'est un problème de *dimensionnement*, nettement plus délicat à résoudre que le précédent, où le sens pratique et l'expérience de l'ingénieur sont une aide efficace.

Dans le cadre de cet ouvrage, ces problèmes se posent surtout pour les éléments structuraux du type barre, poutre et câble, et assemblage de ces derniers. Une fois les notions bien ancrées dans ce domaine, les extensions aux structures plus complexes (plaques, parois, coques...) s'en trouvent facilitées.

La mécanique des structures nécessite, plus encore que la statique appliquée, la compréhension concrète du phénomène et la visualisation du problème traité, et ce d'une façon aussi limpide que possible. Les croquis complets et soignés permettent seuls de résoudre efficacement les problèmes, eux-mêmes choisis de manière à bien faire saisir la théorie.

Dans cette science également, le calcul par ordinateur vient au secours de l'ingénieur en le libérant des calculs numériques fastidieux. Il ne faut pas oublier toutefois que les décisions finales appartiennent à l'ingénieur, et non à la machine ; cette dernière n'est encore pour l'instant qu'un appareil électro-mécanique passif, en ce sens qu'il n'exécute jamais que les ordres donnés par l'ingénieur. Un programme de calcul ne peut donc rivaliser avec l'esprit d'initiative, de créativité et de jugement sain de l'ingénieur.

⁽¹⁾ Vol. 1 renvoie au volume 1 du Traité de Génie Civil (*Analyse des structures et milieux continus : Statique appliquée*).

Table des matières

AVANT-PROPOS	v
INTRODUCTION	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
PREMIÈRE PARTIE.....	1
Connaissances de base et analyse élastique	3
1. Contrainte et principe d'équivalence	
1.1 Notion de contrainte.....	5
1.2 Hypothèses et remarques	6
1.3 Application aux poutres et principe d'équivalence	6
1.4 Lexique.....	8
2. De l'essai de traction à quelques principes fondamentaux	
2.1 Loi de Hooke.....	9
2.2 Loi constitutive et propriétés mécaniques	11
2.3 Loi de Hooke unidimensionnelle et module d'élasticité.....	11
2.4 Essai de traction ou de compression.....	13
2.5 Diagramme de l'essai de traction ou compression.....	16
2.6 Déformation transversale et coefficient de Poisson	19
2.7 Quelques conséquences fondamentales	21
2.8 Problèmes dynamiques	26
2.9 Exercices	26
2.10 Lexique.....	28
3. Notion de sécurité	
3.1 Introduction	31
3.2 Incertitudes	31
3.3 Conception classique ou déterministe de la sécurité	32
3.4 Conception semi-probabiliste de la sécurité	34
3.5 Commentaires	39
3.6 Exercices	39
3.7 Lexique.....	40

4. Traction et compression

4.1	Poutres prismatiques soumises à un effort normal constant.....	43
4.2	Pièces à section et effort normal variables	44
4.3	Pièces formées de deux matériaux	45
4.4	Pièces composées acier-béton	47
4.5	Principe de la précontrainte	49
4.6	Anneaux	53
4.7	Tubes et récipients cylindriques sous pression	54
4.8	Dilatations thermiques.....	56
4.9	Sécurité des pièces tendues et comprimées	57
4.10	Exercices	58
4.11	Lexique.....	63

5. Flexion plane

5.1	Flexion pure et flexion simple	65
5.2	Flexion pure plane	66
5.3	Poutres à section non symétrique	71
5.4	Signe, module de flexion et sécurité.....	72
5.5	Forme rationnelle des sections droites des poutres fléchies.....	74
5.6	Poutres composées de matériaux différents	76
5.7	Flexion simple.....	77
5.8	Exercices	78
5.9	Lexique.....	82

6. Flexion oblique et flexion composée

6.1	Flexion oblique.....	83
6.2	Flexion composée.....	85
6.3	Flexion composée plane	85
6.4	Flexion composée oblique	90
6.5	Exercices	92
6.6	Lexique.....	96
6.7	Annexe – Relations supplémentaires	96

7. Propriétés mécaniques des matériaux

7.1	Importance et complexité du problème	99
7.2	Essai de traction sur matériaux ductiles (métaux).....	100
7.3	Essai de fatigue	105
7.4	Deux effets de la température	106
7.5	Influence du temps	108

7.6	Modèles mathématiques des matériaux (lois constitutives ou de comportement).....	113
7.7	Modèles unidimensionnels indépendants du temps.....	113
7.8	Modèles unidimensionnels dépendants du temps	116
7.9	Modèles à deux et trois dimensions	119
7.10	Critères rhéologiques	120
7.11	Exercices	127
7.12	Lexique.....	130
8.	Torsion uniforme	
8.1	Introduction	133
8.2	Poutres à section circulaire.....	134
8.3	Essai et résistance	136
8.4	Types de section droite	138
8.5	Sections massives	139
8.6	Sections ouvertes à parois minces.....	140
8.7	Sections fermées à parois minces	142
8.8	Forme rationnelle des sections droites	146
8.9	Sections composées	147
8.10	Poutres composées de deux matériaux.....	150
8.11	Exercices	151
8.12	Lexique.....	155
9.	Contraintes dues à l'effort tranchant	
9.1	Introduction	157
9.2	Théorie élémentaire	157
9.3	Effort rasant.....	158
9.4	Poutres à parois minces	162
9.5	Poutres à parois minces et à section ouverte.....	162
9.6	Poutres composées de deux matériaux.....	166
9.7	Poutres tubulaires à parois minces	167
9.8	Poutres à section massive	170
9.9	Centre de cisaillement ou centre de torsion.....	173
9.10	Coïncidence des centres de torsion et de cisaillement	177
9.11	Poutres à section variable	178
9.12	Résistance	180
9.13	Exercices	180
9.14	Lexique.....	184

10. Déformée des poutres soumises à flexion simple

10.1	Introduction	185
10.2	Déformée due au moment de flexion	185
10.3	Cinématique sous l'action de l'effort tranchant	191
10.4	Exercices	196
10.5	Lexique	197

11. Sollicitation composée – Cisaillement direct – Assemblages

11.1	Sollicitation composée	199
11.2	Assemblages et moyens d'assemblage	201
11.3	Cisaillement direct et rupture des assemblages	203
11.4	Calcul des assemblages longitudinaux	205
11.5	Exercices	208
11.6	Lexique	213

12. Principes des travaux virtuels et calcul des déplacements

12.1	Introduction	215
12.2	Forme du travail virtuel intérieur	216
12.3	Forme intégrale de l'équilibre ou principe des déplacements virtuels	217
12.4	Forme intégrale de la cinématique ou principe des forces virtuelles	218
12.5	Remarques et rappels	219
12.6	Théorème de la force unité	220
12.7	Cas des matériaux élastiques linéaires	221
12.8	Calcul des déplacements	222
12.9	Structures hyperstatiques	226
12.10	Exercices	228
12.11	Lexique	234

13. Energie

13.1	Introduction	237
13.2	Expression de l'énergie	237
13.3	Théorème de réciprocité de Betti	239
13.4	Théorème de Maxwell	239
13.5	Théorèmes de stationnarité et théorèmes énergétiques	240
13.6	Méthode de Rayleigh-Ritz	241
13.7	Exercices	243
13.8	Lexique	244
13.9	Annexe – Passage de la forme variationnelle à la forme différentielle	245

DEUXIÈME PARTIE	247
Plasticité et analyse limite	249
14. Traction plastique	
14.1 Matériau élastique parfaitement plastique	251
14.2 Traction plastique	252
14.3 Quelques propriétés importantes	254
14.4 Exercices	256
14.5 Lexique	257
15. Flexion plastique plane	
15.1 Généralités	259
15.2 Sections doublement symétriques	260
15.3 Sections à un seul axe de symétrie	263
15.4 Pièces composées	264
15.5 Loi moment-courbure	264
15.6 Sections âme-semelles bisymétriques	266
15.7 Notion de rotule plastique	268
15.8 Conclusions	271
15.9 Exercices	272
15.10 Lexique	273
16. Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples	
16.1 Poutre bi-encastree chargée uniformément	275
16.2 Ruine d'une structure hyperstatique	277
16.3 Calcul de la charge limite par le principe des déplacements virtuels	279
16.4 Bénéfice dû à la plasticité	281
16.5 Domaine de validité de la théorie de l'analyse limite	282
16.6 Insensibilité de la charge limite vis-à-vis des autocontraintes de la structure	282
16.7 Vérifications expérimentales de la théorie de l'analyse limite	283
16.8 Exercices	285
16.9 Lexique	286
17. Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite	
17.1 But des théorèmes	287
17.2 Loi constitutive	288
17.3 Statique licite	289
17.4 Cinématique licite	289
17.5 Multiplicateur limite	289
17.6 Théorème statique	289

17.7	Théorème cinématique	290
17.8	Théorème combiné.....	292
17.9	Mise en œuvre des théorèmes	292
17.10	Applications.....	294
17.11	Exercices	296
17.12	Lexique.....	297
18.	Flexion plastique composée et simple	
18.1	Introduction	299
18.2	Flexion composée.....	299
18.3	Flexion simple.....	302
18.4	Action simultanée du moment de flexion, de l'effort normal et de l'effort tranchant.....	305
18.5	Analyse limite en présence de l'effort normal et de l'effort tranchant.....	305
18.6	Exercices	305
18.7	Lexique.....	306
19.	Torsion plastique uniforme	
19.1	Sections massives	307
19.2	Sections ouvertes à parois minces.....	309
19.3	Sections creuses unicellulaires.....	311
19.4	Exercices	312
19.5	Lexique.....	313
TROISIÈME PARTIE.....		315
	Instabilité par flambement	317
20.	Flambement des poutres	
20.1	Phénomènes de flambement.....	319
20.2	Flambement plan élastique par divergence.....	323
20.3	Flambement plan élastique par bifurcation.....	331
20.4	Elancement	340
20.5	Flambement plan élasto-plastique par bifurcation.....	343
20.6	Exercices	346
20.7	Lexique.....	352
20.8	Annexe	354
21.	Flambement plan des pièces industrielles	
21.1	Imperfections des pièces industrielles	359
21.2	Importance des imperfections en instabilité	361
21.3	Pièces industrielles essentiellement comprimées.....	362

21.4	Pièces industrielles comprimées et fléchies	365
21.5	Vérification de la résistance	370
21.6	Exercices	375
21.7	Lexique	377
21.8	Annexe – Courbes européennes de flambement des pièces en acier	377
22.	Instabilité énergétique	
22.1	Critère et nature de l'équilibre élastique	381
22.2	Nature de l'instabilité	383
22.3	Critère d'instabilité	385
22.4	Instabilité linéaire et principe de Rayleigh	386
22.5	Application au flambement des poutres	387
22.6	Exercices	391
22.7	Lexique	392
22.8	Annexe	393
23.	Annexes	
23.1	Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux	395
23.2	Tableaux de $\int_0^L M m dx$	398
23.3	Réactions d'appui, moments fléchissants, flèches et angles de rotation des poutres à une travée	403
23.4	Module plastique Z de la section droite de quelques profilés laminés	415
23.5	Caractéristiques géométriques de la section droite des profilés laminés des exercices ...	418
	SOLUTION DES EXERCICES	423
	BIBLIOGRAPHIE	437
	INDEX	439
	NOTATIONS	445
	ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES	451

Première partie



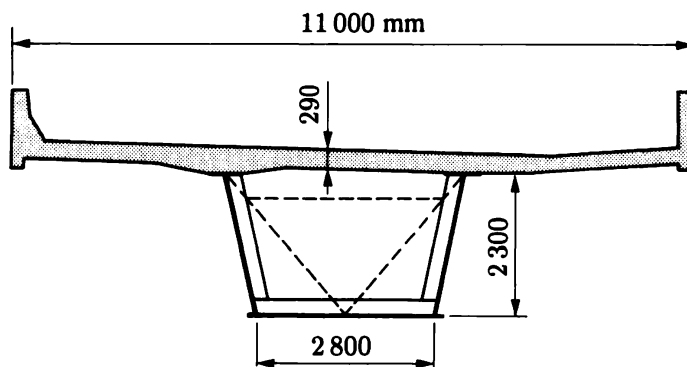
Comportement élastique

Montage du viaduc de Goldswil, Interlaken, Suisse, 1983

Ce pont est une pièce composée acier-béton (voir la coupe ci-dessous) formant une poutre continue à dix travées. La partie en acier seule, de section trapézoïdale d'une hauteur de 2,30 m, a été mise en place par lancement. La photographie montre le franchissement de l'Aar, où les piles sont distantes de 81 m.

Cette vue impressionnante fait ressentir, de manière naturelle et explicite, ce qu'est le comportement élastique d'une structure. Elle montre du même coup l'importance que prennent les déplacements, tant dans leur amplitude que dans leur évaluation.

(Source : M. Hartenbach, dipl. Ing. ETH, Hartenbach & Wenger AG, Ingenieurbüro, Bern.)



Connaissances de base et analyse élastique

Les ingénieurs exigent beaucoup de la mécanique des structures ; cette science doit donc étendre son champ d'action aux aspects non linéaires provoqués par le matériau (plasticité) et la cinématique (second ordre).

Très souvent toutefois, les circonstances sont telles que les structures ont un comportement essentiellement linéaire ou, comme on dit couramment, élastique. L'analyse de ce comportement est ordinairement plus simple que l'étude des comportements non linéaires.

Cette Première partie présente l'analyse élastique de la mécanique des structures. Les connaissances de base sont en fait utiles aux comportements tant linéaires que non linéaires, car elles permettent de trouver la frontière les séparant ; elles sont présentées aux chapitres 1, 2, 3, 7, 11 (partim) et 12 (partim). L'analyse élastique des efforts intérieurs et des déplacements est donnée dans le reste des treize premiers chapitres.

La Deuxième partie présente les notions classiques du calcul plastique des structures, dans lesquelles on introduit une loi de comportement non linéaire pour le matériau (chap. 14 à 19). La Troisième partie aborde les problèmes d'instabilité par flambement des poutres, liés à l'introduction d'une cinématique non linéaire (chap. 20 à 22).

Cette division en trois parties a un caractère subjectif. S'il est vrai qu'une poutre comprimée périclète toujours en flambement par flexion composée élasto-plastique, il semble préférable, pour dominer ce problème, d'étudier d'abord la flexion pure en régime linéaire : une méthode déductive bien ordonnée nous paraît mieux convenir aux étudiants qui découvrent en la mécanique des structures, pratiquement, une des premières sciences de base du métier d'ingénieur.

Remarque

Cette Première partie comporte elle-même deux divisions : on étudie d'abord les problèmes liés aux contraintes normales, puis ensuite ceux faisant intervenir les contraintes tangentielles. La frontière se situe dans le chapitre 7. A l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, la mécanique des solides (vol. 3) est enseignée avant que ne soit franchie cette frontière.

1. Contrainte et principe d'équivalence

1.1 Notion de contrainte

Un objectif de la mécanique des structures est l'étude détaillée des *forces internes* mises en évidence par la notion de coupe (vol. 1, sect. 4.3) : il s'agit de saisir de manière plus réaliste l'action de ces forces sur l'ensemble de la matière coupée et trouver leur lien avec les résultantes internes. Dans ce but, il faut d'abord caractériser la *nature* de ces forces (objet de ce chapitre), puis en définir le *diagramme*, c'est-à-dire la répartition ou distribution sur une coupe, et enfin en calculer la *valeur* (intensité et signe) en chaque point de cette coupe.

Envisageons donc une portion d'un solide limitée par une coupe plane S (fig. 1.1). Soit dA une surface élémentaire de la coupe, appelée *facette*. On caractérise le *flux des forces internes dans la matière* à l'aide du concept suivant :

Postulat : sur toute facette dA d'une coupe naît une force de surface \vec{f} appelée *vecteur contrainte* (Cauchy 1822).

Ce vecteur est généralement *oblique* par rapport à la facette sur laquelle il agit ; il a donc une composante normale à la facette, d'intensité σ , qu'on appelle *contrainte normale*, et une composante située dans le plan même de la facette, d'intensité τ , appelée *contrainte tangentielle* (fig. 1.1).

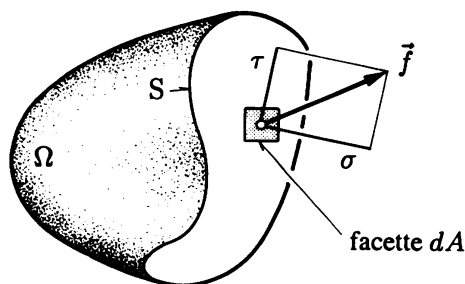


Fig. 1.1 Concept de contrainte.

Les contraintes normales et tangentielles sont des *forces par unité d'aire* (en $[N/m^2]$ par exemple, comme la pression). Elles varient en général d'un point à l'autre du solide, et, en un point déterminé, elles varient également avec l'orientation de la facette sur laquelle elles agissent. Elles caractérisent par leur ensemble l'*état de contrainte* du solide. Sur une coupe, l'ensemble des vecteurs contrainte est à l'image d'une force répartie de surface.

1.2 Hypothèses et remarques

Le concept de contrainte est une notion délicate à introduire.

On admet d'abord que les actions internes entre particules, transmises à travers la facette dA , sont statiquement équivalentes à la force $\vec{f} dA$, alors que d'un point de vue atomique, cette transmission est beaucoup plus complexe. En réalité, au niveau infiniment petit, la matière est discontinue. Ici, on fait une *première hypothèse* : *la matière est uniformément et continûment répartie dans le solide* ; une surface dA , aussi petite que l'on veut, contient toujours de la matière et le vecteur contrainte \vec{f} donne alors une vue *moyenne* des forces internes transmises. Cette hypothèse s'est toujours avérée acceptable jusqu'à présent vis-à-vis de l'observation expérimentale.

Quand on fait cette hypothèse, on dit que l'on regarde la matière d'un point de vue *macroscopique* : *on observe et étudie les propriétés physiques à une échelle adaptée aux besoins de l'ingénieur* (le cm par exemple), et non à l'échelle microscopique ou atomique.

Ensuite, puisque $\vec{f} dA$ est l'un des éléments de réduction des forces internes, *on omet de considérer l'autre, le moment $\vec{m} dA$ transmis par dA* (où \vec{m} = vecteur contrainte-moment, grandeur s'exprimant en $[N \cdot m/m^2]$ par exemple). La validité de cette *seconde hypothèse* ne peut être testée, comme la première, que par la comparaison de ses conséquences avec l'observation expérimentale. Jusqu'à présent, cette dernière n'a jamais montré la nécessité d'introduire une telle grandeur.

Enfin, la contrainte n'a *aucune existence réelle* ; c'est un concept qui s'avère pratique et puissant pour l'analyse et le dimensionnement ; on ne peut donc jamais, par exemple, mesurer une contrainte en laboratoire.

Désormais, on abandonne les forces internes au profit des contraintes. Toutefois, *la contrainte n'est pas une force concentrée*, en ce sens que, pour exprimer une réduction ou un équilibre, il faut toujours, au préalable, la multiplier par une aire, par exemple l'aire élémentaire sur laquelle elle agit, ce qui, en composantes, peut s'écrire

$$dN = \sigma dA \quad dV = \tau dA \quad \dots$$

1.3 Application aux poutres et principe d'équivalence

Considérons la face positive S^+ d'une coupe réalisée perpendiculairement à l'axe d'une poutre (fig. 1.2). Dans cette face, on définit un système d'axes locaux (x, y, z) formant un trièdre droit, avec x selon la normale extérieure passant par le centre géométrique O de la figure définie par la section droite. Souvent, on choisit les axes y et z selon les axes principaux d'inertie de cette figure.

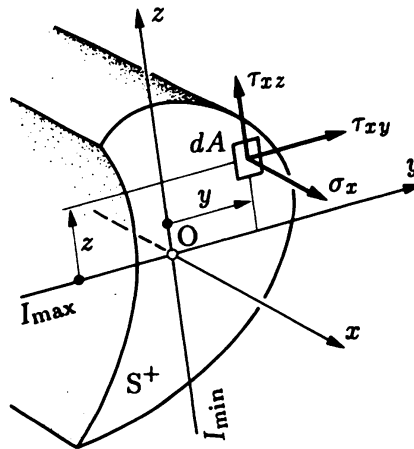


Fig. 1.2 Contraintes sur la section droite d'une poutre.

Sur la *face positive* S^+ , on *définit* et on *note* les composantes des contraintes par (fig. 1.2)

$$\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$$

à savoir :

- σ est la contrainte normale, τ la contrainte tangentielle ; cette dernière, a priori oblique par rapport aux axes y et z , est décomposée en deux composantes parallèles à ces axes ;
- le premier indice indique la face sur laquelle ces contraintes agissent, cette face étant repérée par l'axe qui lui est normal, soit x ici ; le second indice précise à quel axe la contrainte est parallèle (on peut se passer de cet indice pour la contrainte normale) ;
- les contraintes sont positives si elles agissent dans le même sens que les axes de la face (convention habituelle) ; pour une face négative, on applique le principe de l'action et de la réaction.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on allège l'écriture en omettant tout ou partie des indices, ce qui se produit souvent en mécanique des structures. Ici par exemple, on peut supprimer l'indice x (la notation σ , τ_y , τ_z convient).

Cela étant, on sait qu'il existe, sur la face S^+ ,

- les efforts intérieurs N , V_y , V_z , T , M_y et M_z *concentrés* en O ;
- certains diagrammes de contraintes σ_x , τ_{xy} et τ_{xz} *réparties* sur S^+ .

Or ces deux systèmes de grandeurs statiques expriment la même chose, à savoir la transmission des forces à travers S^+ ; ils sont statiquement équivalents, le premier étant la réduction du second (vol. 1, sect. 4.4).

Si A désigne l'aire de la section droite de la poutre, cette réduction se traduit par les égalités suivantes, connues sous la dénomination de **principe d'équivalence**, bien qu'on n'introduise ici aucun *principe* :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (1.1)$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (1.2)$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (1.3)$$

$$T = - \int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA \quad (1.4)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (1.5)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad (1.6)$$

La statique permet d'écrire ces égalités globales, qui lient les efforts intérieurs aux contraintes (ou, mieux, au système de forces internes $\sigma_x dA$, $\tau_{xy} dA$ et $\tau_{xz} dA$), mais rien de plus. En particulier, elle ne fournit de renseignement ni sur le diagramme réel ni sur la valeur locale de ces contraintes dans la section droite d'une poutre.

1.4 Lexique

Mécanique des structures	Théorie technique du calcul des éléments structuraux.
Mécanique des solides	Théorie mathématique du calcul des solides.
Problème de vérification	Contrôle des dimensions.
Problème de dimensionnement	Recherche des dimensions.
Facette	Élément de surface sur une coupe (dA).
Vecteur contrainte (\vec{f})	Force interne sur une facette, par unité de surface ; sur une coupe, force de surface traduisant la cohésion de la matière.
Contraintes, normales (σ) et tangentielles (τ)	Composantes de \vec{f} , normales et tangentielles à la facette.
Diagramme des contraintes	Loi de répartition des contraintes sur la face d'une coupe ou dans la section droite d'une poutre.
Macroscopique	De dimension finie ; au niveau macroscopique, la matière peut être admise continûment et uniformément répartie.
Principe d'équivalence	<p>Expression de l'équivalence statique entre deux systèmes de forces agissant dans une même coupe :</p> <ul style="list-style-type: none"> • les contraintes ; • les efforts intérieurs. <p>Exemple : $N = \int_A \sigma dA$.</p> <p>Les efforts intérieurs sont les éléments de réduction ou résultantes des contraintes.</p>

2. De l'essai de traction à quelques principes fondamentaux

2.1 Loi de Hooke

Si l'on mesure (fig. 2.1a et 2.1b) le déplacement u d'un point quelconque A d'une structure, produit par une force F croissant graduellement, l'expérience montre que ce déplacement commence par varier proportionnellement à la force, puis qu'il croît plus rapidement (fig. 2.1c) ou plus lentement. Par conséquent, si l'on ne dépasse pas une certaine limite, dite *limite de proportionnalité* (F_p), cette propriété s'exprime ainsi :

Loi de Hooke : le déplacement est proportionnel à la force agissante.

Elle peut s'écrire, avec $F \leq F_p$,

$$F = ku \quad (2.1a)$$

ou (avec $c = 1/k$)

$$u = cF \quad (2.1b)$$

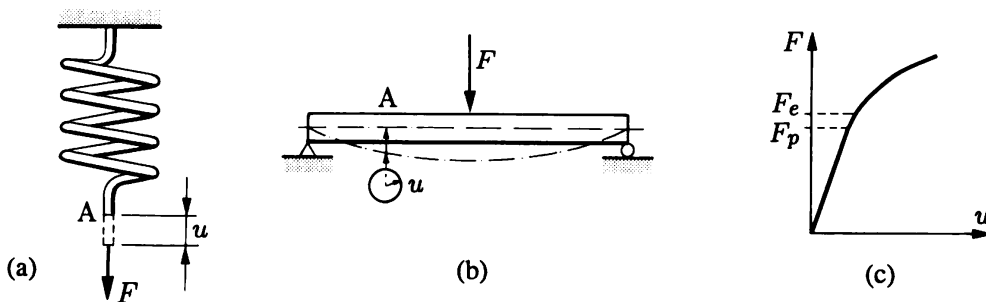


Fig. 2.1 Loi de Hooke.

Ces observations expérimentales datent de 1675 et constituent encore aujourd'hui une base fondamentale de la mécanique des structures. Il est clair que les caractéristiques k , F_p et F_e dépendent *et* de la géométrie *et* du matériau de la pièce testée.

Hooke n'a, malheureusement, pas fait la distinction entre ces deux aspects du problème.

Or *seul le matériau importe* ; en effet, pour une géométrie fixée (par exemple des ressorts à boudins tous identiques), k , F_p et F_e *caractérisent un matériau*. C'est sous cet aspect que l'on interprète aujourd'hui la loi de Hooke, qui serait ainsi *valable pour tout matériau*. L'expérience montre effectivement que pour les matériaux de construction usuels (acier, aluminium, titane, laiton, cuivre... bois, caoutchouc, pierre... résines armées, verre... et, dans une moindre mesure, matières plastiques, bétons...) et en deçà d'une certaine limite, on observe une réponse *linéaire et élastique*.

2.2 Loi constitutive et propriétés mécaniques

Pour la première fois apparaît *une loi qui exprime une liaison de dépendance entre une grandeur statique et une grandeur cinématique* ; c'est le but premier d'une telle loi, dite *loi constitutive*⁽¹⁾ ou *loi de comportement*.

Plus généralement, une loi constitutive lie les diverses grandeurs observées : statiques et cinématiques d'abord, thermiques, temporelles ou autres ensuite ; *elle traduit mathématiquement le comportement physique, usuellement macroscopique, du matériau, observé en laboratoire, dans des conditions bien déterminées*. Les paramètres propres au matériau, intervenant dans une loi constitutive, s'appellent les *caractéristiques* ou *propriétés mécaniques*.

Hooke n'a pas donné de forme mathématique à sa loi. Cette forme est établie ci-après.

Rappelons deux propriétés classiques ; un matériau est dit

- *isotrope* si, en un point, les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions ; sinon il est dit *anisotrope* ;
- *homogène* s'il présente en tout point les mêmes propriétés ; sinon il est dit *hétérogène*.

Ainsi, le béton est homogène et isotrope lorsqu'on a affaire à des pièces de béton dont les dimensions sont grandes vis-à-vis de celles des agrégats, ce qui, en construction, est presque toujours le cas ; par suite ces pièces répondent de façon isotrope et homogène aux sollicitations. Un tel cas constitue un exemple typique d'observation macroscopique d'un matériau.

Par simplicité, dans la suite, on considère essentiellement des matériaux isotropes et homogènes.

2.3 Loi de Hooke unidimensionnelle et module d'élasticité

Considérons une *fibre* faite d'un matériau homogène⁽²⁾, rectiligne d'axe x , d'aire constante dA et de longueur L , soumise à l'effort normal seul, comme une barre de treillis (fig. 2.3a). Si σ_x est la contrainte normale agissant sur l'aire élémentaire dA , l'effort normal est (fig. 2.3c)

$$dN = \sigma_x dA \quad (2.2)$$

⁽¹⁾ Constitutif : qui traduit la constitution physique du matériau (anglicisme).

⁽²⁾ La notion d'isotropie tombe quand on est à une seule dimension (fibre).

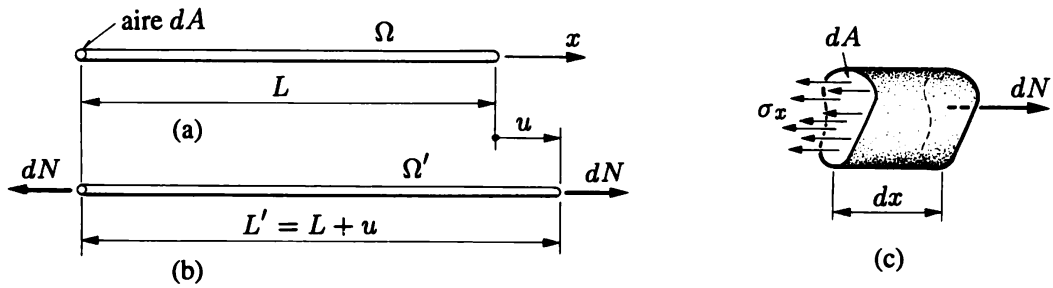


Fig. 2.3 Allongement d'une fibre : (a) configuration initiale ; (b) configuration déformée ; (c) contrainte normale.

La fibre, de longueur L' dans la configuration déformée (fig. 2.3b), s'étire de la quantité u appelée *allongement* (et considérée positive ; comprimée, la fibre subirait un *raccourcissement*, grandeur conventionnellement négative). Son *allongement par unité de longueur* est donné par le rapport

$$\varepsilon_x = \frac{L' - L}{L} = \frac{u}{L} \quad (2.3)$$

et s'appelle *dilatation*, ou *déformation axiale*. Cette quantité est le quotient de deux longueurs, donc un nombre sans dimension. L'indice x a la même signification que dans la notation σ_x et pourrait être omis ici sans risque de confusion. La convention de signe découle de celle relative à u : ε_x est positif en cas d'allongement.

Entre la grandeur statique σ_x et la grandeur cinématique ε_x doit exister une relation linéaire du même type que (2.1) si l'on admet la loi de Hooke (fig. 2.4). Cette loi constitutive s'écrit

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.4)$$

et est communément appelée *loi de Hooke*, par extension⁽³⁾. La constante de proportionnalité E s'appelle *module d'élasticité* ou *module de Young*⁽⁴⁾, et caractérise le comportement de la matière sous sollicitation de traction (ou compression) ou d'allongement (ou raccourcissement). Puisque ε_x est sans dimension, le module d'élasticité E a les mêmes dimensions qu'une contrainte ($[\text{N/m}^2]$ par exemple).

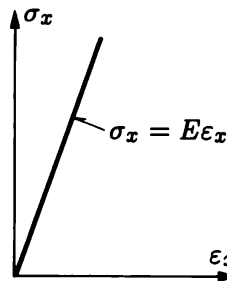


Fig. 2.4 Loi de Hooke liant la contrainte σ_x à la dilatation ε_x .

⁽³⁾ Le concept de contrainte et la notion de dilatation étaient inconnus du temps de Hooke.

⁽⁴⁾ Mis en évidence de manière théorique par L. Euler (avant 1727) ; attribué à T. Young (1807), qui le détermina par expérimentation.

La formule (2.4) est l'expression mathématique de la *loi constitutive des matériaux linéaires élastiques* ; comme on a travaillé à une seule dimension (axe x), la loi est dite *unidimensionnelle* ; elle présente, par rapport à (2.1), un avantage décisif : *elle est indépendante de toute dimension géométrique* ; ainsi, E est une caractéristique intrinsèque du matériau.

Comment trouver E ? Comment caractériser la limite de validité de la loi de Hooke ? La section 2.4 répond à ces questions.

2.4 Essai de traction ou de compression

2.4.1 Description de l'essai

Considérons une pièce soumise, dans une *machine d'essai*, à un effort de traction F croissant de manière progressive (fig. 2.5a). Les dispositifs de fixation de la pièce dans la machine sont conçus de manière à réaliser l'application de la force de traction exactement dans l'axe de la pièce, qui se comporte donc comme une barre de treillis (pas de flexion parasite).

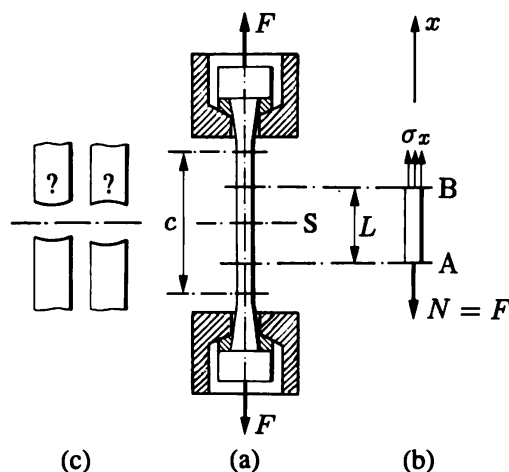


Fig. 2.5 Essai de traction.

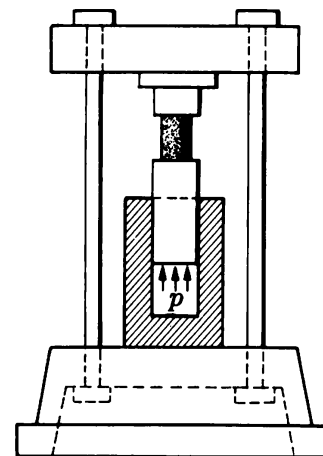


Fig. 2.6 Vue schématique d'une presse hydraulique.

En fait, la *pièce d'essai*, dite *éprouvette*, est réalisée de manière à ce que ses extrémités s'adaptent aux mâchoires de la machine d'essai et se raccordent progressivement à la partie centrale, de section *constante*, d'aire A inférieure, et usinée avec le plus grand soin ; c'est cette partie de longueur c qui est observée durant l'essai (partie *calibrée*).

L'essai de traction (ou de compression) est le plus simple et le plus répandu des essais permettant de caractériser un matériau. Ici on effectue l'essai traditionnel, à vitesse lente (pour éviter tout phénomène dynamique) et à température ambiante ; il est clair que le poids propre de l'éprouvette est négligeable.

On peut semblablement réaliser un essai de compression⁽⁵⁾. L'éprouvette est généralement plus massive et simplement glissée entre les plateaux de la machine d'essai (fig. 2.6). Dans la suite, on parle en termes de l'essai de traction.

⁽⁵⁾ Ces essais sont décrits en détail dans le volume 24.

2.4.2 La liaison cinématique – loi constitutive – statique

Isolons un fragment AB de la partie calibrée par deux coupes (fig. 2.5b); sur chacune d'elles apparaît l'effort normal $N = F$, appliqué au centre géométrique, et des contraintes normales σ_x dont l'ensemble est équivalent à N , selon le principe d'équivalence (1.1).

Mais la statique ne donne ni le diagramme ni la valeur de ces contraintes sur l'aire A . Pour résoudre ce problème, il faut

- étudier, de façon *purement géométrique*, la manière dont la pièce chargée se déforme, c'est-à-dire sa *cinématique*; cette étude fournit une ou plusieurs relations géométriques dites *conditions cinématiques*⁽⁶⁾;
- réaliser la liaison entre la statique et la cinématique grâce à la *loi constitutive*: elle livre essentiellement le *diagramme* des contraintes;
- utiliser le *principe d'équivalence* (sect. 1.3), qui permet d'exprimer la valeur (intensité et signe) des contraintes *en fonction des efforts intérieurs*.

2.4.3 Cinématique

L'éprouvette est symétrique par rapport à un plan médian perpendiculaire à son axe. Considérons la coupe S réalisée par ce plan (fig. 2.5c). Après application des forces F , la section S divise la pièce en deux tronçons géométriquement et statiquement identiques; les deux faces de la coupe prennent donc nécessairement la même déformation, symétrique par rapport au plan S; mais elles doivent aussi pouvoir se superposer exactement pour reformer une pièce sans fissure. Cette double condition géométrique n'est satisfaite que si la section droite S *reste plane et perpendiculaire à l'axe de la pièce*, pendant le processus de mise en charge ou, ce qui est équivalent, en configuration déformée.

Il semble intuitivement probable que cette conclusion soit d'ailleurs valable pour toute section droite ($S_A, S_B \dots$) de la partie calibrée c , pourvu qu'on laisse de côté les portions voisines des extrémités, où l'on sent bien que la répartition des contraintes et déformations est complexe. Cette conclusion est vérifiée par les mesures directes que l'on peut faire sur la surface latérale de l'éprouvette. C'est la condition cinématique cherchée (fig. 2.7), qui s'énonce ainsi :

Loi de conservation des sections planes ou loi de Bernoulli : les sections droites initialement planes et perpendiculaires à l'axe le restent dans la configuration déformée.

Cette hypothèse a été avancée par Jacques Bernoulli en 1694. Elle est purement cinématique, ne faisant donc pas intervenir les propriétés physiques du matériau; par conséquent elle est valable que le matériau obéisse ou non à la loi de Hooke, qu'il soit homogène ou non, isotrope ou non⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ On dit aussi conditions de compatibilité cinématique, ou géométrique, ou des déformations, ou des déplacements; ou encore conditions de déformation.

⁽⁷⁾ Les propriétés mécaniques du matériau doivent cependant posséder les mêmes caractéristiques de symétrie que celles évoquées pour arriver à la loi de Bernoulli; ainsi, pour une éprouvette en bois, les sections restent planes si les fibres sont parallèles (ou perpendiculaires) à l'axe de l'éprouvette, mais ne le restent pas si les fibres sont obliques.

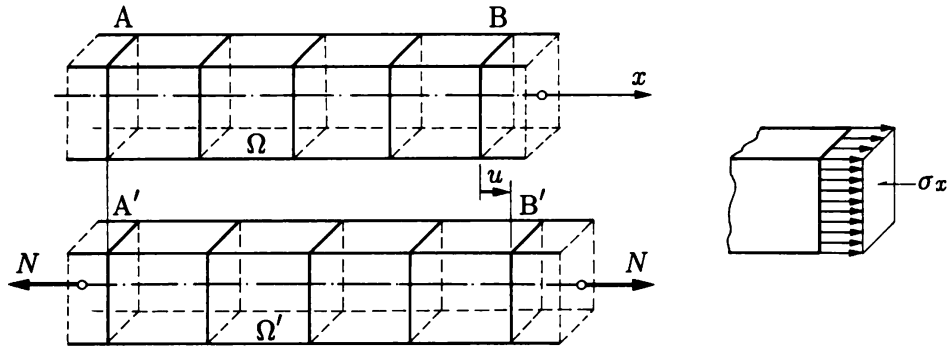


Fig. 2.7 Loi de Bernoulli et diagramme des contraintes normales.

Revenons à l'éprouvette de traction ; appelons x l'axe de la barre et L la longueur du fragment AB de la partie calibrée (fig. 2.5b et 2.7). En vertu de la loi ci-dessus, toutes les fibres situées entre A et B subiront le même allongement u :

$$u = \text{cste} \quad (2.5)$$

Si les caractéristiques mécaniques du matériau sont constantes le long de chaque fibre (fibre homogène ; l'ensemble pouvant être hétérogène : béton armé par exemple), la dilatation est *la même en tous les points* de l'éprouvette et est donc *indépendante de la base de mesure* (L) :

$$\varepsilon_x = \frac{u}{L} = \text{cste} \quad (2.6)$$

2.4.4 Contraintes

Afin de caractériser un matériau bien précis, l'éprouvette doit être constituée de ce *seul* matériau, supposé *homogène*⁽⁸⁾. Dans ce cas toutes les fibres d'aire dA , comprises par exemple entre les coupes A et B, étant déformées de la même manière, doivent contribuer semblablement à la transmission de l'effort N à travers ces coupes ; elles sont donc toutes soumises à la même contrainte normale σ_x (fig. 2.7), c'est-à-dire que *les contraintes sont uniformément réparties sur la section droite A de la pièce*⁽⁹⁾

$$\sigma_x = \text{cste} \quad (2.7)$$

Alors, avec l'équation (1.1) du principe d'équivalence, on a

$$N = \sigma_x A \quad (2.8)$$

d'où la valeur (intensité et signe)

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (2.9)$$

⁽⁸⁾ Le cas des pièces non homogènes est étudié au chapitre 4.

⁽⁹⁾ On suppose $A = \text{cste}$ (sect. 2.6). Exceptionnellement, ici, on n'a pas besoin de la loi constitutive (§ 2.4.2), encore que, puisque $\varepsilon_x = \text{cste}$, on a nécessairement $\sigma_x = \text{cste}$ quelle que soit la forme de cette loi.

Remarques

Le résultat (2.9) est indépendant de la nature du matériau : il est correct *même si la loi constitutive n'est pas linéaire*.

La loi de Bernoulli garantit que les contraintes tangentielles sont nulles (glissements nuls, vol. 3) ; l'état de contrainte ainsi trouvé (σ_x seul) satisfait aux six égalités du principe d'équivalence.

2.4.5 Mesure du module d'élasticité E

Si le matériau est linéaire élastique homogène, l'essai de traction permet de *déterminer le module d'élasticité E* ; grâce aux quantités N et A (d'où σ_x) et L et u (d'où ε_x) directement mesurables, on a

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (2.10)$$

2.5 Diagramme de l'essai de traction ou compression

2.5.1 Introduction

Pour représenter les propriétés résistantes de l'éprouvette au cours de l'essai, il est commode de tracer un diagramme en portant la dilatation ε_x en abscisse et la contrainte σ_x en ordonnée : c'est le **diagramme contrainte-dilatation** (σ, ε).

On examine ici, brièvement, l'allure de ce diagramme pour quelques matériaux de construction⁽¹⁰⁾.

On distingue les matériaux **ductiles** qui, après la phase élastique, s'allongent fortement avant de se rompre, des matériaux **raides**, qui ne présentent pas cette caractéristique.

2.5.2 Matériaux ductiles (métaux)

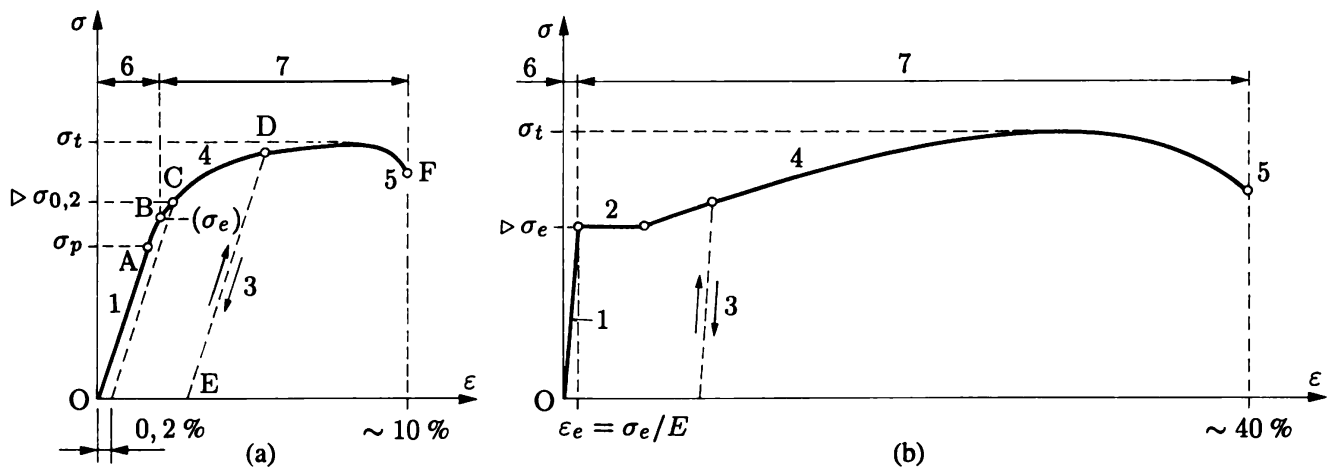
La figure 2.8(a) présente la courbe (σ, ε) typique de métaux comme les alliages d'aluminium, le laiton ou certains aciers (à très haute résistance). De O à A, la contrainte est proportionnelle à la dilatation et le diagramme est une ligne droite d'équation $\sigma = E\varepsilon$ (2.4), dite *droite de Hooke* ; sa pente fournit la valeur du module d'élasticité E (§ 2.4.5) et est d'autant plus forte que le matériau est plus rigide. La contrainte au point A est la **limite de proportionnalité** σ_p .

A partir du point A, le diagramme s'incurve légèrement, mais l'expérience montre que, si l'on supprime l'effort, l'éprouvette reprend sa forme primitive ; on est donc encore dans la zone d'*élasticité*, qui se prolonge jusqu'au point B ; la contrainte en B est la **limite d'élasticité** σ_e .

Pour ces métaux, les limites σ_p et σ_e sont ordinairement voisines et, de plus, difficiles à détecter expérimentalement ; aussi ne présentent-elles que peu d'intérêt pratique.

Si l'on continue à charger l'éprouvette, le diagramme s'incurve de plus en plus, la dilatation croissant plus vite que la contrainte, jusqu'à ce que survienne la rupture. Cette partie du diagramme s'appelle la *zone de l'écrouissage, de la plasticité ou des grandes dilatations*. Elle est caractérisée par

⁽¹⁰⁾ Une étude plus poussée sera entreprise ultérieurement (chap. 7).



- 1 : droite de Hooke
- 2 : palier d'étirage
- 3 : déchargement élastique
- 4 : zone de l'écrouissage
- 5 : rupture
- 6 : zone élastique
- 7 : zone plastique

Fig. 2.8 Diagrammes contrainte-dilatation (σ, ϵ) : (a) alliage d'aluminium (6061 T6) ; (b) acier doux (S235).

le fait que si, à partir d'un point quelconque D, on décharge l'éprouvette, celle-ci certes se raccourcit, mais le point représentatif du diagramme parcourt la droite DE parallèle à OA : le déchargement à partir d'un point situé dans la zone d'écrouissage n'est donc pas un phénomène réversible ; tout se passe comme si le métal conservait, à partir de ce point, son module d'élasticité initial E : aussi parle-t-on, improprement, de **déchargement élastique**. Lorsque l'éprouvette est entièrement déchargée, elle conserve une **dilatation permanente** représentée par le segment OE.

Si on remet l'éprouvette en charge, le point représentatif suit la droite ED, puis reprend la courbe typique DF comme si l'essai n'avait pas été interrompu.

Enfin, l'ordonnée maximale du diagramme s'appelle la **résistance à la traction** σ_t ; peu après se produit la **rupture** (point F).

En compression, l'allure du diagramme est identique et, pratiquement, symétrique par rapport à l'origine O.

Vu la difficulté à déterminer les points A et B, on définit la **limite d'élasticité conventionnelle** (à 0,2 %) : c'est la contrainte pour laquelle l'éprouvette présente, après déchargement, une dilatation permanente de 0,2 %, et on admet d'ordinaire que la loi de Hooke est valable jusqu'à cette contrainte, notée $\sigma_{0,2}$ (point C du diagramme).

La figure 2.8(b) présente un diagramme typique des aciers de construction usuels (aciers doux et faiblement alliés). A la différence du précédent, la transition de la zone élastique à celle plastique est brutale (on a pratiquement un point anguleux) et la zone plastique débute par le **palier d'étirage**, dans

lequel l'éprouvette s'allonge fortement sous charge constante. La contrainte correspondante s'appelle **limite d'élasticité** σ_e et coïncide avec les définitions précédentes de σ_p , σ_e et $\sigma_{0,2}$. La limite entre les domaines élastique et plastique est bien définie par l'abscisse ε_e (fig. 2.8b), appelée **dilatation élastique maximale**,

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \quad (2.11)$$

En conclusion, pour les matériaux ductibles (métaux), la **limite d'élasticité est une caractéristique importante**, car elle marque la frontière entre deux types de comportement : **élastique linéaire** (avant) et **plastique** (après), ce dernier comportement n'étant *ni linéaire, ni réversible*.

2.5.3 Matériaux raides

Le diagramme (σ, ε) de ces matériaux, tels le bois, la fonte, la pierre, les fibres de verre et carbone ... a l'allure générale représentée à la figure 2.9. Il présente une zone linéaire déterminée, plus ou moins étendue ; la **rupture** se produit assez brusquement, sans être précédée d'une zone de grandes dilatations, comme pour les métaux. L'ensemble du diagramme est plutôt élastique.

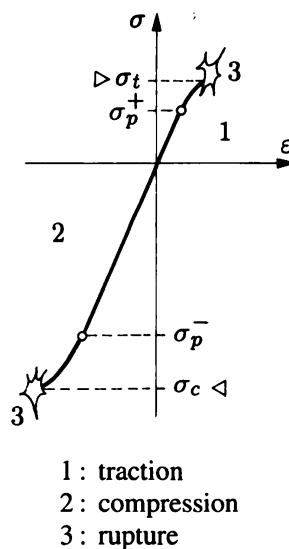


Fig. 2.9 Diagramme (σ, ε) d'un matériau raide.

Aussi, pour les matériaux raides, la **résistance à la traction** σ_t et la **résistance à la compression** σ_c , ordonnées extrêmes du diagramme, deviennent-elles les caractéristiques essentielles.

Souvent, pour ces matériaux, les caractéristiques mécaniques du type contrainte ont en compression des valeurs *supérieures* à celles obtenues en traction (pierre, fonte, béton de ciment, etc. ; fig. 2.9).

2.5.4 Autres matériaux

Certains matériaux comme le béton, les matières plastiques, les sols ... se distinguent des autres matériaux courants par leurs caractéristiques mécaniques nettement plus complexes : non seulement la phase linéaire est pratiquement inexistante, mais en plus les propriétés dépendent fortement du temps ; ces matériaux sont étudiés au chapitre 7.

2.5.5 Valeur des caractéristiques mécaniques

Les valeurs numériques moyennes des caractéristiques mécaniques de divers matériaux sont données à l'annexe 23.1. On observe par exemple que le module d'élasticité E est d'autant plus grand que le matériau est plus rigide. Ce module est par ailleurs le même en traction et en compression.

2.6 Déformation transversale et coefficient de Poisson

L'essai de traction a mis en évidence l'allongement subi par la barre tendue. L'expérience montre que cet allongement axial est toujours accompagné d'une diminution des dimensions transversales de l'éprouvette. Si b désigne l'une des dimensions initiales de la section droite, mesurée *normalement* à l'axe x (fig. 2.10), et b' la dimension correspondante dans la configuration déformée, le rapport

$$\varepsilon_{\text{lat}} = \frac{b' - b}{b} \quad (2.12)$$

définit la **dilatation** ou **déformation latérale** ou **transversale**. En traction, on dit aussi **contraction latérale** ou **transversale**, tandis qu'en compression on parle de **gonflement latéral** ou **transversal**.

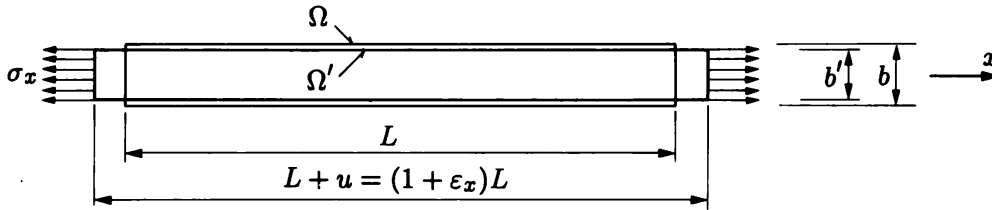


Fig. 2.10 Contraction latérale en traction (Ω : configuration initiale ; Ω' configuration déformée).

Dans le domaine linéaire de la loi de Hooke, cette déformation est *proportionnelle à la contrainte normale*, et donc aussi à la *dilatation axiale*, soit

$$\varepsilon_{\text{lat}} = -\nu \varepsilon_x = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (\nu \geq 0) \quad (2.13)$$

La constante ν s'appelle **coefficient de Poisson**⁽¹¹⁾ ; c'est une nouvelle caractéristique mécanique de la matière, sans dimension. On montre (vol. 3, chap. 4) que les *deux quantités E et ν suffisent à caractériser entièrement le comportement physique d'un matériau isotrope linéaire élastique*, c'est-à-dire à écrire les équations constitutives tridimensionnelles correspondantes.

L'expérience montre que pour les métaux ν vaut généralement 0,3 ; pour la pierre 0,2 ; pour le béton 0,15 environ (annexe 23.1).

⁽¹¹⁾ T. Young observa la contraction latérale sans la quantifier. L. Navier (1823, 1827), puis plus généralement S. D. Poisson (1829) tentèrent de dériver ν d'une théorie moléculaire de la matière conduisant à la valeur $\nu = 1/4$ pour les matériaux isotropes. Mais l'expérience infirme cette valeur.

Les déformations restent très petites. Prenons par exemple l'acier doux (annexe 23.1, tableau 23.1) ; en le sollicitant au maximum, on a

$$\varepsilon_{x \max} = \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{25,5}{20\,500} = 0,00124 \cong 1,2 \text{ ‰}$$

puis

$$|\varepsilon_{\text{lat}, \max}| = \nu \varepsilon_e = 0,3 \varepsilon_e \cong 0,4 \text{ ‰}$$

et par suite la variation des dimensions de la section droite dans la configuration déformée est négligeable. Ainsi, l'hypothèse de linéarisation géométrique est justifiée et, dans la formule $\sigma = N/A$ par exemple, on peut introduire sans erreur l'aire initiale de la section droite (§ 2.4.4).

Dans la suite, on admet que l'hypothèse de linéarisation géométrique est satisfaite.

Application : dilatation volumique

Connaissant les coefficients E et ν d'un matériau isotrope homogène, on peut calculer le changement de volume d'une barre soumise à l'effort normal. Considérons par exemple un parallélépipède de dimensions initiales Δx , Δy , Δz qui, dans la configuration déformée, prend les nouvelles dimensions $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ (fig. 2.11). Elles valent, avec (2.3) $\varepsilon_x = (\Delta x' - \Delta x)/\Delta x$ par exemple,

$$\Delta x' = (1 + \varepsilon_x) \Delta x \quad \Delta y' = (1 + \varepsilon_{\text{lat}}) \Delta y \quad \Delta z' = (1 + \varepsilon_{\text{lat}}) \Delta z \quad (2.14)$$

Le changement relatif du volume, appelé *dilatation volumique* ε_V , vaut

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\Delta x' \Delta y' \Delta z' - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_{\text{lat}})^2 - 1$$

Puisque ε_x et ε_{lat} sont très petits devant l'unité, on peut négliger leurs carrés et cubes (linéarisation géométrique), d'où

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + 2\varepsilon_{\text{lat}} = (1 - 2\nu)\varepsilon_x \quad (2.15)$$

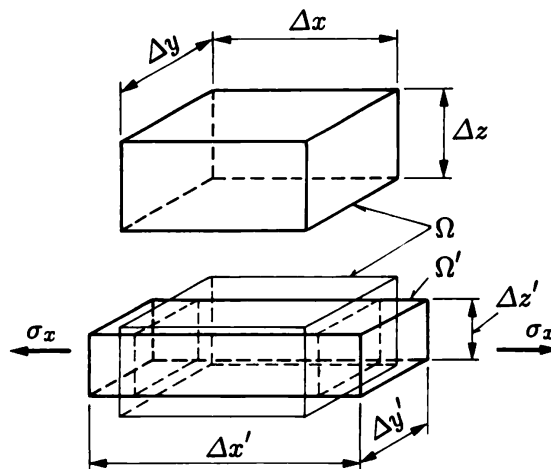


Fig. 2.11 Changement de volume en traction (Ω configuration initiale ; Ω' configuration déformée).

Comme il semble peu probable qu'un matériau diminue de volume quand on l'étire, on doit poser $\varepsilon_V \geq 0$, d'où $1 - 2\nu \geq 0$, soit

$$\nu \leq \frac{1}{2} \quad (2.16)$$

Pour les matériaux caoutchouteux, ν approche de cette limite supérieure et le volume de ces matériaux ne change donc pratiquement pas au cours de l'essai de traction ou compression (matériaux *incompressibles*). Par contre, des matériaux comme le béton ont un faible coefficient de Poisson et, pour le liège, ν tend vers zéro.

2.7 Quelques conséquences fondamentales

2.7.1 Introduction

Toute la mécanique des structures n'est de loin pas contenue dans l'*essai de traction*, mais l'étude de ce dernier permet déjà de faire saisir moult idées de base de cette discipline.

2.7.2 Hypothèse sur le comportement des matériaux

La loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ (2.4) caractérise avec exactitude le comportement réel de la plupart des matériaux de construction, *en deçà d'une certaine limite*, à savoir (en valeur absolue) :

en principe	$\sigma \leq \sigma_p$	
matériaux ductiles	$\sigma \leq \sigma_e$	$\sigma \leq \sigma_{0,2}$
matériaux raides	$\sigma \leq \sigma_t$	$\sigma \leq \sigma_c$

(2.17)

Accepter et respecter ces conditions, c'est faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse de linéarisation matérielle : le matériau obéit à une loi constitutive linéaire et élastique.

Remarque

Cette hypothèse est indépendante de celle de linéarisation géométrique.

2.7.3 Méthodes de calcul

Si on adopte l'hypothèse de linéarisation matérielle, on s'oriente vers une *analyse linéaire élastique* des structures ; on dit couramment qu'on utilise la *méthode de calcul élastique*, car on ne viole en aucun point la loi de Hooke (2.4) et ses limites (2.17). Lorsqu'on parle de *méthode élastique*, on sous-entend linéaire, mais ce qualificatif a disparu du langage courant⁽¹²⁾.

Cette manière d'envisager le calcul des structures est encore très répandue à l'heure actuelle. Si l'on veut réaliser des constructions durables et peu déformables, il faut employer des matériaux relativement rigides, qui ont tous un comportement linéaire élastique, ou presque, en dessous de leur limite d'élasticité. D'ailleurs, pour les matériaux raides, la méthode élastique est évidemment la règle ;

⁽¹²⁾ Aujourd'hui, *linéaire* et *non linéaire* signifient plutôt que l'hypothèse de linéarité géométrique est satisfaite ou non.

mais même pour les matériaux ductiles, il est souvent nécessaire d'éviter toute déformation plastique car cette dernière peut augmenter très rapidement pour de faibles accroissements des contraintes, provoquant des dégâts dans les ouvrages.

On adoptera donc, dans un premier temps, l'hypothèse de linéarisation matérielle et on apprendra comment choisir les dimensions des éléments d'une construction pour que la limite d'élasticité des matériaux utilisés ne soit pas dépassée sous les conditions de service, compte tenu d'une certaine sécurité (Première partie).

Il existe toutefois un certain nombre de situations pour lesquelles ce point de vue est trop restrictif, soit qu'il offre une sécurité ou excessive ou insuffisante, soit qu'il masque la réalité du comportement. C'est par exemple le cas pour les métaux présentant de la ductilité : limiter le taux de travail de la matière à la limite d'élasticité revient à négliger la *réserve de résistance plastique* ; si l'on en tient compte, on a une vue plus réaliste du comportement de la structure jusqu'à sa ruine. Croire d'autre part qu'une structure réelle dimensionnée par la méthode élastique se comporte effectivement élastiquement et linéairement en chacun de ses points est utopique ; il existe toujours quelques zones (généralement limitées il est vrai) où la limite d'élasticité est dépassée, à cause des imperfections propres aux constructions industrielles. Par exemple, le simple fait de déposer un cordon de soudure liant deux pièces en acier suffit à provoquer, localement au voisinage du cordon et suite à l'effet thermique, des contraintes qui atteignent ou dépassent la limite d'élasticité (fig. 2.12).

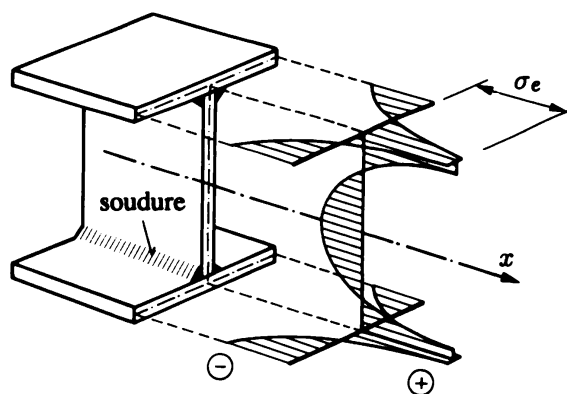


Fig. 2.12 Contraintes σ_x dues au soudage des semelles avec l'âme
(les contraintes ne sont dessinées qu'à mi-épaisseur des tôles).

Pour ces diverses raisons, la tendance actuelle est d'essayer d'analyser avec plus de réalisme les éléments de construction, en tenant compte des données exactes et des lois constitutives non linéaires des matériaux ; c'est la *méthode de calcul à la ruine*, dite **méthode plastique** pour les matériaux ductiles.

Elle prend une importance pratique sans cesse croissante et on l'abordera dans la Deuxième partie.

2.7.4 Principe de superposition

Si on admet simultanément les hypothèses de

- linéarisation géométrique (vol. 1, sect. 4.2),
- linéarisation matérielle (§ 2.7.2),

alors, comme on le vérifiera encore par la suite, tous les *effets* (réactions, efforts intérieurs, contraintes, déformations, dilatations, déplacements) dépendent *linéairement* des causes (actions extérieures : charges, tassements, actions thermiques, etc.), ces causes et effets pouvant être *statiques* ou *cinématiques*, la structure pouvant être *isostatique* ou *hyperstatique*.

Il en résulte le corollaire suivant (dont le corollaire du paragraphe 4.2.2 du volume 1 devient un cas particulier) :

Principe de superposition généralisé : *l'effet produit par plusieurs causes agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des causes supposée agissant séparément.*

Ce principe est d'une grande utilité, parce qu'il permet de scinder l'étude des cas complexes en celle de cas simples que l'on obtient en faisant agir isolément les diverses forces ou autres actions.

2.7.5 Principe de Saint-Venant

On a admis tacitement, dans l'essai de traction illustré par la figure 2.5(a), que la partie calibrée de l'éprouvette était soumise à l'effort centré F , alors que ce dernier n'est de loin pas transmis comme tel, aux extrémités de l'éprouvette, par les mâchoires de la machine d'essai.

Considérons un autre cas, par exemple une pièce (colonne, pile de pont...) chargée d'une force verticale Q sur sa face supérieure par l'intermédiaire d'une petite plaque d'appui (fig. 2.13) ; cette dernière ne répartit Q que sur les fibres centrales de la section extrême, les fibres situées en dehors n'étant pas sollicitées. Les fibres médianes sont donc fortement comprimées, tendent à se raccourcir et à glisser le long des fibres extérieures. Il naît entre ces fibres des contraintes tangentiels (schématisées par des doubles flèches sur la figure), qui transmettent progressivement une partie de la force vers les fibres extérieures.

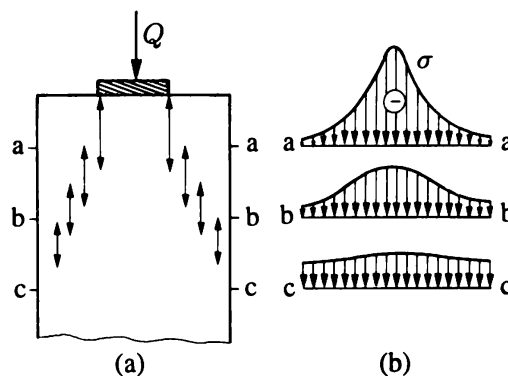


Fig. 2.13 Principe de Saint-Venant.

Plus on s'éloigne de l'extrémité de la pièce, plus cette transmission est effective. On a constaté, par mesure comme par calcul, qu'à une distance de l'extrémité égale à la plus grande dimension transversale de la pièce, la répartition des contraintes normales sur une section droite est pratiquement uniforme et obéit donc à la formule (2.9).

Ces deux exemples ont une portée générale : dans une poutre ou barre, les *perturbations locales* produites

- par l'introduction des forces (force concentrée, appui, cordon de soudure, trou de boulon, ancrage de précontrainte, etc.),
- dans la transmission des efforts intérieurs (variation brusque de section, rainure de cale, trou, nœud de jonction des poutres, etc.),

ne se font pratiquement sentir que sur un tronçon dont la longueur, de part et d'autre de la perturbation, est égale à la plus grande dimension transversale de la section droite de la pièce. Au-delà règne une distribution régulière de contraintes, par exemple $\sigma = N/A$ en traction (fig. 2.14).

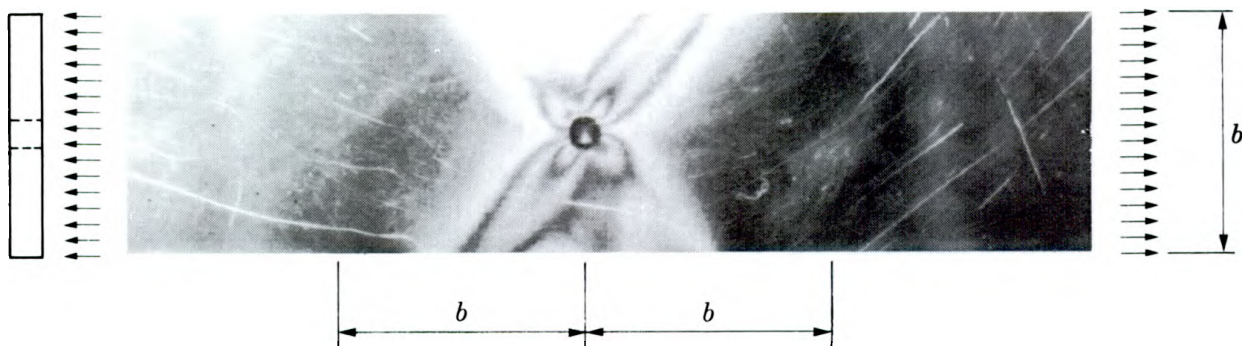


Fig. 2.14 Epreuve percée d'un trou circulaire, soumise à la traction ; les franges obliques plus claires voisines du trou révèlent la zone de perturbation des contraintes (photo MSM, Université de Liège).

Saint-Venant a généralisé (1855) cette constatation expérimentale sous la forme suivante :

Principe de Saint-Venant : *dans la section droite d'une poutre, la distribution des contraintes (et déformations) due à un système de forces, appliquées à une certaine distance de cette section, ne change pas si l'on substitue à ces forces un autre système, provoquant les mêmes efforts intérieurs ; seules changent, sur une longueur égale à une à deux fois la plus grande dimension transversale de la poutre, les contraintes locales provoquées par l'introduction des forces.*

Ainsi, deux systèmes de forces équivalents produisent les mêmes contraintes et déformations dans les régions éloignées des points d'application des forces ; par suite, les contraintes et déformations dans une section ne dépendent que des efforts intérieurs agissant sur cette section ; le principe de Saint-Venant *justifie donc l'introduction de ces grandeurs* qui jouent le rôle d'intermédiaires entre les actions et les contraintes.

On constate aussi que la théorie élémentaire des poutres exposée par la mécanique des structures ne permettra pas d'analyser les zones localement perturbées par les forces concentrées, les entailles, les variations brusques de section, etc.

Remarque

Le principe de Saint-Venant n'a malheureusement pas une validité générale. Il n'est vrai que pour les poutres de section massive, ou se comportant comme telles. Il n'est généralement pas respecté par les poutres à parois minces ou les poutres en treillis. Ce n'est donc pas un vrai principe.

2.7.6 Loi de Bernoulli

La *loi de conservation des sections planes* (§ 2.4.3 ; fig. 2.15) est, plus encore que le principe ci-dessus, l'exemple typique d'une hypothèse de caractère *technique* propre à la mécanique des structures. On la retrouvera encore par la suite, mais elle n'a pas une validité générale. En effet, on observera que pour certains efforts intérieurs, les sections droites des poutres, planes dans la configuration initiale, ne le sont plus dans la configuration déformée : ces sections *gauchissent*.

C'est le cas lorsque, sur la section, agissent des contraintes tangentiellles, dues au moment de torsion ou à l'effort tranchant ; au contraire, sous l'action des contraintes normales, dues au moment de flexion ou à l'effort normal, la section reste plane et normale à l'axe dans la configuration déformée.

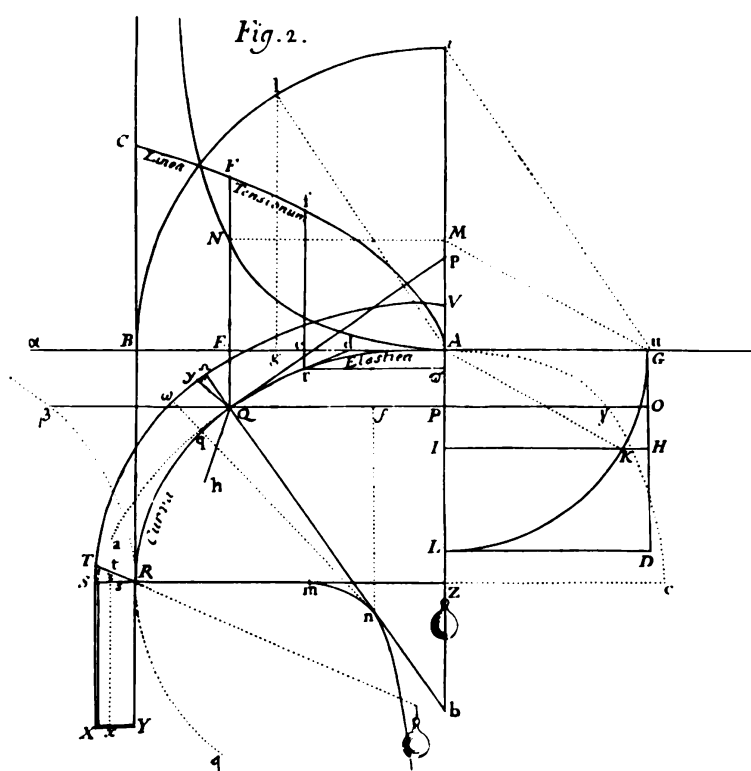


Fig. 2.15 C'est dans ce dessin, à l'aide duquel J. Bernoulli étudiait la déformée d'une poutre en quart de cercle, qu'il faut rechercher la loi de conservation des sections planes (*Acta Eruditorum*, 1694).

La recherche de la répartition des contraintes dans une section est un problème hyperstatique, parce que les conditions relatives aux grandeurs *statiques* (équilibre, équivalence) ne suffisent pas pour résoudre ce problème. Il faut recourir aux conditions relatives aux grandeurs *cinématiques* (comme la loi de Bernoulli) et à des conditions liant ces deux types de grandeurs, exprimées par les *lois constitutives* (§ 2.4.2).

2.7.7 Géométrie des poutres

Les notions développées dans ce livre s'appliquent essentiellement aux *poutres*, et ce d'une manière d'autant plus satisfaisante que les conditions suivantes sont mieux respectées :

- les dimensions transversales de la poutre doivent être petites par rapport à la longueur ; pour des poutres droites fléchies dans un plan vertical par exemple, le rapport de la hauteur de la section à la portée doit être inférieur à 1/5 ; en pratique, ce rapport est compris entre 1/10 et 1/20, parfois moins ;
- dans le cas où la section de la poutre est variable, cette variation doit être progressive ;
- pour que la théorie des poutres d'axe rectiligne reste applicable aux poutres d'axe courbe, les dimensions de la section droite doivent être petites par rapport au rayon de courbure de l'axe (rapport inférieur à 1/10).

Ces conditions limitatives, que l'on précisera encore ultérieurement, touchent les seuls calculs de mécanique des structures (résistance interne, détermination des σ et τ , etc.) et non ceux de statique (équilibre, efforts intérieurs, etc.).

2.8 Problèmes dynamiques

L'équilibre dynamique des structures en mouvement peut être ramené à un problème d'équilibre statique. Partant de la loi de Newton $m \vec{a} = \vec{F}$, on l'écrit sous la forme

$$\vec{F} - m \vec{a} = \vec{0} \quad (2.18)$$

On définit alors la **force d'inertie** par moins le produit de la masse par l'accélération

$$\vec{F}_a = -m \vec{a} \quad (2.19)$$

ce qui permet de transformer (2.18) en

$$\vec{F} + \vec{F}_a = \vec{0} \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est une *équation d'équilibre* qui traduit le principe suivant :

Principe de d'Alembert : tout système de forces est en équilibre si l'on ajoute les forces d'inertie aux autres forces (1743).

Ce principe transforme donc le problème dynamique en un problème d'équilibre statique instantané à l'aide de nouvelles forces, les forces d'inertie, créées par le mouvement. De portée très générale en mécanique, il peut être utilisé en *dynamique des structures*.

Rappelons que, lorsqu'on traite un problème de dynamique, *il faut employer, comme unités, exclusivement le newton, le mètre et la seconde*, sinon on est sûr de se perdre.

2.9 Exercices

2.9.1 On réalise un essai de traction sur une éprouvette d'un certain métal. L'aire de la section est $A = 39,41 \text{ cm}^2$ et la base de mesure vaut $L = 200 \text{ mm}$. Les appareils de mesure fournissent les valeurs suivantes (charge F ; allongement u) :

Mesure n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F \text{ [kN]}$	200	400	600	800	1 000	1 100	1 200	1 250	1 300	1 350	1 380
$u \text{ [mm]}$	0,142	0,280	0,422	0,661	0,702	0,771	0,864	0,948	1,200	1,710	2,501

- 1) Tracer le diagramme (σ, ε) du matériau.
- 2) En déduire la valeur du module d'élasticité E .
- 3) En déduire la valeur de la limite d'élasticité conventionnelle.
- 4) De quel métal s'agit-il probablement ?

2.9.2 Calculer la variation d'aire relative $\varepsilon_A = (A' - A)/A$ de la section droite d'une pièce soumise à traction (littéral). Donner la valeur (en %) de cette variation pour de l'acier pour câble sollicité à la limite d'élasticité.

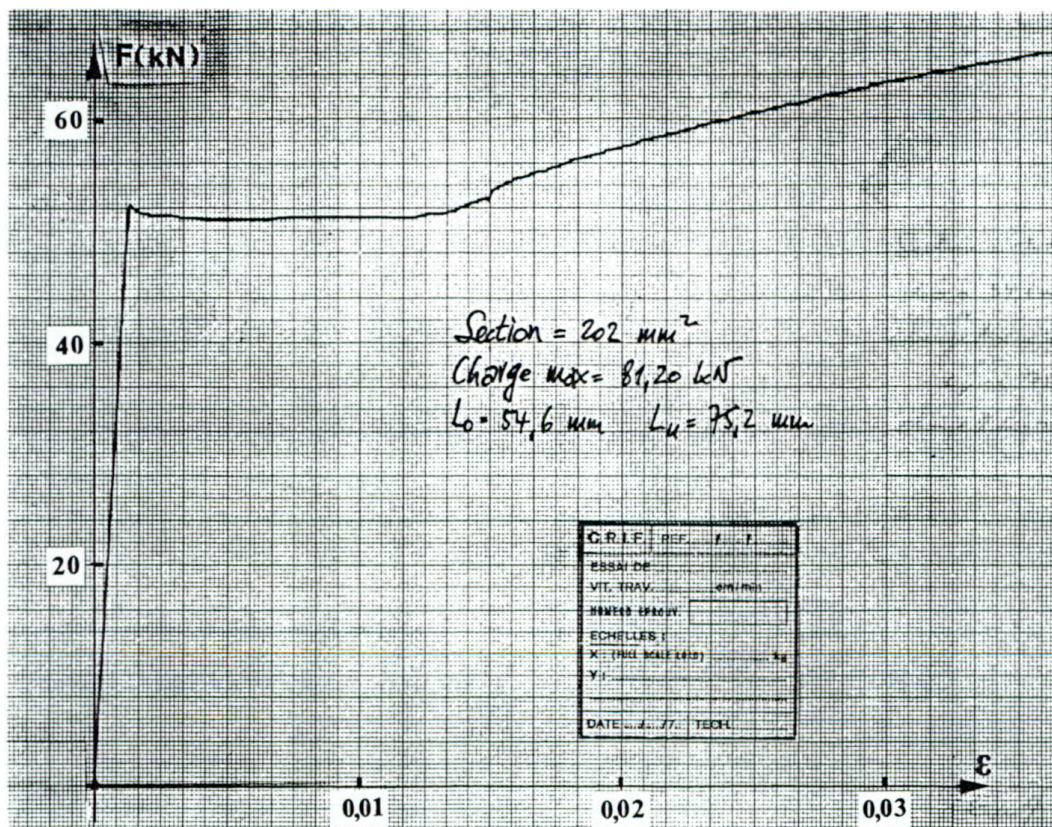
2.9.3 Au cours d'un essai de compression, on a obtenu, pour un certain niveau de charge, les valeurs

$$\sigma_x = -32 \text{ kN/cm}^2 \quad \varepsilon_x = -0,00462 \quad \varepsilon_{\text{lat}} = 0,00097$$

De quel matériau s'agit-il probablement ?

2.9.4 La figure montre l'enregistrement d'un essai de traction sous la forme du diagramme force-dilatation (F, ε) . L'éprouvette a une section de 202 mm^2 ; elle se rompt pour une charge de $81,2 \text{ kN}$.

A l'aide de ces informations, trouver la valeur du module d'élasticité, de la limite d'élasticité et de la résistance à la traction, et, finalement, le matériau testé.



Section = 202 mm^2
 Charge max = $81,20 \text{ kN}$
 $L_0 = 54,6 \text{ mm}$; $L_u = 75,2 \text{ mm}$

Fig. Ex. 2.9.4

2.10 Lexique

Loi constitutive (ou de comportement)	Loi décrivant le comportement physique d'un matériau, soumis à certaines sollicitations dans des conditions bien déterminées, et liant, essentiellement, les grandeurs statiques et cinématiques.
Elasticité	Propriété caractérisant les solides qui reprennent instantanément et exactement leur forme initiale quand, après mise en charge, on les décharge.
Loi de Hooke	Loi de comportement linéaire élastique selon laquelle le déplacement d'un point quelconque est proportionnel à la force agissante et réversible.
Limite de proportionnalité	Limite de validité de la linéarité et de la loi de Hooke.
Limite d'élasticité	Limite de validité de l'élasticité.
Elasticité linéaire	Elasticité et linéarité simultanées (loi de Hooke).
Homogène	Qui a les mêmes propriétés en tout point (antonyme : hétérogène).
Isotrope	Qui a les mêmes propriétés dans toutes les directions en un point (antonyme : anisotrope).
Dilatation, déformation axiale (ε)	Variation de longueur par unité de longueur ($\varepsilon = (L' - L)/L$).
Loi de Hooke unidimensionnelle	$\sigma = E\varepsilon$.
Module d'élasticité ou de Young (E)	Constante de proportionnalité de la loi de Hooke unidimensionnelle.
Essai de traction ou de compression	Essai uniaxial sur éprouvette prismatique.
Éprouvette	Pièce d'essai (généralement usinée avec soin).
Condition cinématique (ou de compatibilité cinématique)	Condition géométrique sur la déformation, les déplacements, localement ou globalement (par exemple : loi des sections planes de Bernoulli).
Loi des sections planes ou loi de Bernoulli	Les sections droites initialement planes et perpendiculaires à l'axe d'une pièce le restent dans la configuration déformée (valable et exact en traction pure et flexion pure des pièces prismatiques).
Contraintes en traction ou compression	$\sigma = N/A$: répartition uniforme sur l'aire A .
Diagramme • de l'essai de traction • contrainte-dilatation (σ, ε)	Graphique de l'essai de traction (ε = abscisse ; σ = ordonnée).
Matériaux ductiles	Matériaux présentant de grandes dilatations au-delà de la loi de Hooke.
Matériaux raides	Inverse de ductile.
Dilatation (ou déformation) permanente	Dilatation qui subsiste après déchargement, par opposition à l'élasticité (typique de la plasticité).
Plasticité	Comportement non linéaire du matériau, accompagné de dilatations permanentes en cas de déchargement (phénomène irréversible, par opposition à l'élasticité).
Limite de proportionnalité (σ_p)	Limite de validité de l'élasticité linéaire (donc de la loi de Hooke unidimensionnelle $\sigma = E\varepsilon$).
Limite d'élasticité (σ_e) • dilatation élastique maximale	Limite de validité de l'élasticité (dans le diagramme (σ, ε)) ; $\varepsilon_e = \sigma_e/E$.

Limite d'élasticité conventionnelle à 0,2 % ($\sigma_{0,2}$)	Limite pour laquelle la dilatation permanente est de 0,2 %.
Palier, palier d'étirage	Zone du diagramme (σ, ε) où $\sigma = \text{cste}$ (dilatation croissant sous contrainte constante).
Zone des grandes dilatations	Grandes dilatations au-delà de la limite d'élasticité (jusqu'à ruine); typique des matériaux ductiles (métaux).
Zone de l'écrouissage	Zone plastique du diagramme (σ, ε) où la courbe est croissante (par opposition au palier).
Déchargement élastique	Fait que la courbe (σ, ε) de déchargement à partir de la zone plastique est une droite parallèle à la droite de Hooke.
Résistances <ul style="list-style-type: none"> • à la traction (σ_t) • à la compression (σ_c) 	Ordonnées extrêmes du diagramme (σ, ε).
Déformation (dilatation, contraction, gonflement) latérale ou transversale (ε_{lat})	Variation des dimensions transversales d'une pièce tendue ou comprimée.
Coefficient de Poisson (ν)	Caractéristique mécanique décrivant le phénomène de déformation transversale (domaine linéaire : $\varepsilon_{\text{lat}} = -\nu \varepsilon_x$ avec $0 \leq \nu \leq 0,5$).
Matériau incompressible	Matériau qui ne change pas de volume ($\nu \rightarrow 0,5$).
Caractéristique (ou propriété) mécanique	Constante caractérisant le comportement d'un matériau ($E, \nu, \sigma_e, \sigma_p, \sigma_{0,2}, \sigma_t$, etc.).
Hypothèse de linéarisation matérielle	Admettre la loi de Hooke (linéarité et élasticité) comme loi constitutive du matériau.
Analyse élastique	Méthode de calcul admettant l'hypothèse de linéarisation matérielle.
Analyse <ul style="list-style-type: none"> • à la ruine • plastique 	Méthode de calcul tenant compte, jusqu'à ruine, du comportement réel du matériau, par exemple de la plasticité (métaux ductiles, béton armé et précontraint).
Principe de superposition	L'effet dû à plusieurs causes est la somme des effets dus à chaque cause (vu la double linéarisation : matérielle et géométrique).
Principe de Saint-Venant	Les perturbations restent locales et n'ont pas d'influence sur le comportement global (perturbation statique : force concentrée... ; perturbation géométrique : changement brusque de section...).
Principe de d'Alembert	Principe ramenant un problème dynamique à un équilibre statique fictif équivalent à l'aide des <i>forces d'inertie</i> (\overrightarrow{F}_a).

3. Notion de sécurité

3.1 Introduction

Toute construction doit être conçue de manière à résister, avec une marge appropriée, à l'ensemble des sollicitations prévues durant les périodes de montage et d'exploitation (*durée de vie*). Conception, calcul, exécution et entretien doivent garantir une *sécurité* convenable de la construction contre sa *mise hors service*, état dans lequel la construction est rendue inapte à l'usage auquel on la destine. Ces notions, quelque peu abstraites mais néanmoins essentielles pour l'ingénieur, sont décrites de façon brève et générale dans ce chapitre⁽¹⁾.

3.2 Incertitudes

Dans une construction, les sollicitations extrêmes *en service*, c'est-à-dire dues aux actions qui correspondent à l'utilisation normale de l'ouvrage, doivent être notablement moindres que celles qui provoquent la *ruine*, prise au sens large (§ 3.4.2). Il en est ainsi non seulement pour avoir une certaine réserve, ou marge de sécurité, mais aussi en bonne partie pour couvrir les *incertitudes*⁽²⁾ attachées à tous les aspects du problème :

- *incertitudes sur les actions* : intensité maximale (dépassée ?) ; durée ; manière d'agir (dynamique plutôt que statique) ; points d'application ; représentation schématique ; etc. ;
- *dispersions des propriétés mécaniques des matériaux* : défauts internes invisibles ; effets du laminage ; contraintes internes (fig. 2.12) ; etc. ;
- *modifications des propriétés avec le temps* : vieillissement ; effets de la corrosion ; etc. ;

(1) L'auteur remercie son collègue D. Frangopol, de l'Université du Colorado à Boulder, des remarques qu'il lui a faites à propos de ce chapitre.

(2) On ne confondra pas les *incertitudes* avec les *erreurs* (par exemple : faute de calcul, matériau incorrect, charge oubliée, plan mal compris, etc.).

- *imprécisions sur les dimensions* : tolérances de fabrication ; position des armatures du béton armé ; usure ; verticalité des cadres ; etc. ;
- *incertitudes de la modélisation* : hypothèses simplificatrices ; éléments négligés ; calcul approximatif ; etc. ;
- *malfaçons diverses* : exécution négligée ; contrôles déficients sur chantier ; etc.

En principe, pour apprécier valablement le degré de sécurité d'un ouvrage donné, on devrait le déterminer expérimentalement par des essais en vraie grandeur poussés jusqu'à la ruine, ce qui est illusoire en génie civil, d'abord parce qu'un grand ouvrage est une pièce unique, ensuite à cause du prix.

Dans certains domaines, pour des pièces de série (poutres préfabriquées, glissières de sécurité, pièces mécaniques, moteurs, automobiles, avions, etc.), de tels essais sont effectués. Ils le sont toutefois après dimensionnement selon les règles de la mécanique des structures, afin d'éprouver la valeur de ces dernières et de les améliorer. Ces essais restent néanmoins une opération longue et coûteuse.

Il faut donc disposer de méthodes basées sur le calcul.

3.3 Conception classique ou déterministe de la sécurité

3.3.1 Coefficient de sécurité

La conception classique mesure l'ensemble des incertitudes affectant la sécurité d'une structure par un *coefficient de sécurité global*, ou, ce qui revient au même, néglige le détail de ces incertitudes. En gros, elle considère que les actions et les propriétés des matériaux ont des valeurs fixes et bien déterminées, établies une fois pour toutes (conception déterministe). Par définition, *une structure présente le coefficient de sécurité γ vis-à-vis de la ruine si les valeurs des actions maximales de service sont telles qu'en les faisant croître toutes proportionnellement de 1 à γ , on obtient exactement la ruine.*

Symboliquement, en appelant Q les actions et S leur effet, cette définition s'écrit

$$S(\gamma Q_{\text{max en service}}) \Rightarrow \text{ruine} \quad (3.1)$$

Cette définition n'est pas satisfaisante : elle suppose que toutes les actions varient dans le même rapport, alors que certaines d'entre elles (par exemple le poids mort de l'ouvrage) sont presque invariables, ou encore qu'elles agissent toutes avec leur intensité maximale simultanément, ce qui est plus qu'improbable. Il en résulte que la sécurité réelle de l'ouvrage n'est ni γ , ni uniforme dans tous les éléments.

Remarquons, par ailleurs, qu'une quelconque conception de la sécurité est d'application pour le calcul selon la méthode tant *élastique* que *à la ruine* ou *plastique* (§ 2.7.3)⁽³⁾. Or la conception déterministe, schématique et approximative, est susceptible d'une simplification considérable dans le premier cas.

⁽³⁾ On ne confondra pas la *conception du calcul* (élastique, à la ruine) et la *conception de la sécurité* (déterministe, probabiliste).

3.3.2 Méthode des contraintes admissibles

Passage des actions aux contraintes

Si l'on admet la double hypothèse de linéarisation (géométrique et matérielle ; § 2.7.4), alors la définition précédente peut être transformée comme suit : *une structure présente le coefficient de sécurité γ vis-à-vis de la ruine si les valeurs des contraintes extrêmes en service sont telles qu'en les faisant croître toutes proportionnellement de 1 à γ , on obtient exactement le stade de ruine.*

Symboliquement, elle devient

$$\gamma \sigma_{\max \text{ en service }} = \sigma_{\text{ruine}} \quad (3.2)$$

Ainsi, on transfère le critère de sécurité sur les contraintes, avec l'énorme avantage que la sécurité se mesure maintenant par comparaison directe des contraintes calculées avec les caractéristiques mécaniques usuelles de la matière, telles la limite d'élasticité (σ_e ou $\sigma_{0,2}$), ultime (σ_t ou σ_c), de fatigue... On devient donc indépendant des dimensions géométriques des éléments structuraux et, comme la mécanique des structures permet de trouver les contraintes en fonction de ces dimensions, *on dispose de la méthode de calcul recherchée* (sect. 3.2).

Cette définition modifiée du coefficient de sécurité n'est valable que si la double hypothèse de linéarisation est remplie ; elle est donc *satisfaisante* vis-à-vis des *matériaux raides*, qui restent pratiquement linéaires jusqu'à rupture, et des *métaux ductiles sous sollicitation de fatigue* (§ 3.4.2), puisque la ruine se produit par propagation d'une fissure qui se développe le plus souvent en régime élastique. Elle est *acceptable* vis-à-vis des *matériaux ductiles sous action statique* (encore que la tendance actuelle est de tenir compte de plus en plus du comportement plastique, avec rejet de l'hypothèse de linéarisation matérielle). Mais elle est *inacceptable* en présence des *phénomènes d'instabilité* (§ 3.4.2) ; dans ce cas, l'hypothèse de linéarisation géométrique n'est plus valable et les contraintes ne croissent plus proportionnellement aux actions, mais au contraire *plus rapidement* ; l'usage de la définition transformée du coefficient de sécurité est donc *dangereux*⁽⁴⁾. Pour les phénomènes d'instabilité et pour tous les cas non linéaires en général, seule la définition première du coefficient de sécurité est acceptable.

Enfin, on se polarise beaucoup trop sur l'unique *résistance de la matière*, via la vérification des seules contraintes, alors qu'il existe bien d'autres manières d'atteindre une mise hors service de la structure (§ 3.4.2).

Contraintes admissibles

Le dernier pas consiste à définir les *contraintes admissibles* en divisant celles qui correspondent à la ruine par un coefficient de sécurité approprié.

La sécurité est alors assurée si les contraintes en service ne dépassent nulle part les contraintes admissibles.

Symboliquement toujours, on a

$$\sigma_{\max \text{ en service }} \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{1}{\gamma} \sigma_{\text{ruine}} \quad (3.3)$$

⁽⁴⁾ Afin toutefois de la conserver par commodité, on a introduit des coefficients modifiés, variables de cas en cas ; cette pratique, défectueuse et hautement critiquable, tend à être abandonnée de plus en plus.

Le coefficient de sécurité est généralement fixé par les normes, codes ou règlements en vigueur ; il peut varier de cas en cas (type de structure, destination, type d'action, type de matériau, etc.). Pour les structures traditionnelles en acier, on emploie couramment

$$\gamma = 1,5$$

de sorte que l'on a (fig. 3.1)

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_e}{\gamma} = \frac{\sigma_e}{1,5} \quad (3.4)$$

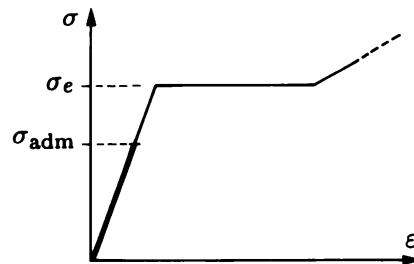


Fig. 3.1 Contrainte admissible.

3.4 Conception semi-probabiliste de la sécurité

3.4.1 Notion probabiliste de la sécurité

La méthode des contraintes admissibles est, certes, truffée de défauts ; cela n'a pas empêché les ingénieurs de réaliser des ouvrages remarquables, et la méthode sera encore employée couramment dans le futur.

Une nouvelle conception de la sécurité s'est développée intensivement ces trente dernières années (1955-1985), avec l'optique d'éviter les erreurs de principe de la méthode des contraintes admissibles, de tenir compte par le calcul des incertitudes diverses caractérisant le problème et d'essayer par là d'avoir une vue plus réaliste de la sécurité effective des ouvrages.

Cette conception a été mise sur pied à l'origine (1953) par le Comité Euro-international du Béton (CEB) et incorporée dans ses Recommandations Pratiques (dès 1964), puis, en liaison avec la Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP), dans le Code Modèle CEB-FIP (dès 1978). Elle a été adoptée par la Convention Européenne de la Construction Métallique (CECM) et introduite dans ses Recommandations (dès 1978). Actuellement, elle est adoptée quasiment par tous et introduite dans toutes les normes, quel que soit le matériau.

Cette conception a le mérite de rappeler aux ingénieurs, par la notion d'*état limite*, que *le critère de ruine d'une structure ne se limite pas, et de loin, à la vérification des seules contraintes, ce que la méthode des contraintes admissibles laisse implicitement supposer*. Puisqu'elle veut tenir compte des incertitudes, c'est-à-dire du caractère aléatoire des données, elle envisage le calcul de la sécurité d'un point de vue probabiliste ; enfin, ce faisant, elle doit certainement conduire à une estimation plus précise de la sécurité réelle. Par conséquent, il est probable que le degré de sécurité d'une construction dimensionnée selon la conception classique est comparativement supérieur, et que, par suite, une construction dimensionnée selon la conception semi-probabiliste est plus économique. Cette

remarque est très importante au point de vue de la sécurité quand les *habitudes* et *règles de bonne pratique*, qui se sont avérées valables pour la conception classique, sont transposées et appliquées sans modification en conception semi-probabiliste.

C'est ainsi qu'il est d'usage courant de dimensionner les poutres en treillis en supposant les nœuds articulés, de sorte que les barres sont soumises au seul effort normal, alors qu'il n'en est rien en réalité. Le coefficient de sécurité de la méthode classique couvre cette hypothèse. Par suite, peut-on toujours accepter cette dernière en conception semi-probabiliste ?

Les ouvrages traitant les problèmes de construction (vol. 7, 10 et 13) donnent le détail de la mise en pratique de la conception semi-probabiliste. Ici on n'analyse que ses idées directrices.

3.4.2 Etats limites

On appelle *état limite* un état dans lequel la structure, ou une partie de celle-ci, n'est plus apte à remplir l'usage ou la fonction auxquels on la destine. On distingue les *états limites ultimes* (ruine, effondrement, structure hors d'usage) et les *états limites d'utilisation* (structure inutilisable ou dangereuse en service, mais récupérable ou réparable).

Etats limites ultimes (ou de ruine)

- *rupture* (au sens ordinaire) : contrainte excessive ; matériau déficient ; rupture des boulons d'un assemblage ;
- *perte d'équilibre global* : équilibre limite dépassé par glissement ou renversement (vol. 1, sect. 5.6) ;
- *instabilité* : par exemple, si on comprime une longue barre, elle ne périt pas par rupture sous compression centrée, mais se dérobe latéralement, en s'arquant subitement, et ce pour une contrainte bien inférieure à σ_e^- , $\sigma_{0,2}^-$ ou σ_c (Troisième partie) ;
- *rupture par fatigue* : lorsqu'une pièce est soumise à des sollicitations sans cesse répétées, elle peut se rompre pour des contraintes nettement inférieures aux contraintes de rupture mesurées dans un essai classique ; ce phénomène s'appelle *fatigue* (sect. 7.3) ;
- *rupture fragile* : phénomène typique de l'acier qui prend le caractère d'un matériau raide, avec une résistance inférieure à la limite d'élasticité, quand les trois conditions suivantes se présentent simultanément : température basse, sollicitation de traction et effet d'entaille produisant une concentration locale des contraintes (§ 7.4.1) ;
- *déplacements excessifs* : par exemple, accumulation d'eau sur un toit plat trop flexible.

Etats limites d'utilisation (ou de service)

- *structure trop déformable* : perte de précision dans un télescope ; blocage des portes et fenêtres si les planchers d'un bâtiment sont trop souples ; déplacements exagérés par fluage des matériaux (béton, bois, sols de fondation) ;
- *déplacements localement excessifs* : glissement d'un assemblage boulonné ; tassement d'une pile ou culée d'un pont ; rupture des joints d'étanchéité d'un long bâtiment par effet thermique ;
- *vibrations exagérées* : effet psychologique dans les immeubles de grande hauteur ; effets de résonance (clochers, salles de danse) ;
- *fissuration excessive* : risque de corrosion des armatures dans les structures en béton ; éclatement des revêtements et vernis dans les ouvrages en briques ;
- *corrosion, détérioration et autres dégradations* : rouille ; efflorescences ; infiltration d'eau ; éclatement par formation de glace ; pourriture des matériaux.

Remarques

Classer un cas concret dans l'une des deux catégories précédentes peut parfois s'avérer délicat.

Il peut y avoir interaction entre les états limites (barrage fissuré par exemple).

L'état d'utilisation est plus flou, plus subjectif, plus difficile à définir et à cerner, que l'état de ruine ; la sécurité n'y est pas un problème, mais les conséquences économiques peuvent être considérables ; son étude soignée est essentielle.

Certaines normes parlent de *sécurité structurale* lorsqu'on vérifie les états limites ultimes, et d'*aptitude au service* lors du contrôle des états limites d'utilisation.

3.4.3 But du calcul et vérification de la sécurité

Le but du calcul est de maintenir la probabilité d'atteindre un état limite inférieure à une certaine valeur, qui peut varier selon les circonstances et qui, pour les constructions d'usage courant, est donnée au tableau 3.2.

Tableau 3.2

Etat limite	En service normal	En cours de montage
ultime	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-4}$
d'utilisation	$5 \cdot 10^{-2}$	—

Puis, l'analyse probabiliste complète s'étant avérée quasi impossible (on ne connaît encore qu'incomplètement les lois de distribution des actions, par exemple), il est apparu convenable de simplifier – d'où le qualificatif *semi-probabiliste* – comme suit.

Valeurs caractéristiques

On considère des *valeurs caractéristiques* pour

- les *résistances*, terme désignant les propriétés mécaniques (au sens large) d'une part ,
- les *actions* d'autre part,

une valeur caractéristique ayant une probabilité déterminée (et élevée !) pour que les valeurs effectives lui soient

- supérieures pour les résistances,
- inférieures pour les actions.

Valeurs de calcul ou de dimensionnement

On couvre les autres facteurs d'incertitude en transformant les valeurs caractéristiques en *valeurs de calcul* ou *de dimensionnement* par des *coefficients de pondération*, aussi appelés

- *facteurs de résistance* s'ils modifient les résistances,
- *facteurs de charge* s'ils modifient les actions.

Ordinairement la modification diminue les résistances et majore les actions ; si toutefois une action soulage, elle est alors diminuée (exception).

Condition fondamentale de sécurité

Les dimensions d'une structure doivent être telles que tout ou partie de son état, sous l'effet des actions de calcul, ne dépasse pas l'état limite envisagé correspondant aux résistances de calcul des matériaux mis en œuvre.

L'équation symbolique correspondante, valable pour tout état limite, s'écrit, où S_d caractérise l'effet des actions de calcul et R_{dim} les résistances de calcul,

$$S_d \leq R_{dim} \quad (3.5)$$

Ainsi, par rapport à la méthode classique, la conception semi-probabiliste distribue d'abord le coefficient de sécurité entre les *résistances* (matériaux) et les *actions* (charges), puis, dans ces deux groupes, le répartit entre les valeurs caractéristiques et de calcul, et peut, enfin, le subdiviser en contributions encore plus fines dans les valeurs de calcul, selon l'impact des incertitudes, grâce aux coefficients de pondération.

3.4.4 Valeurs caractéristiques (indice k)

Résistances

Pour déterminer les résistances caractéristiques des matériaux, on admet que leur distribution est *normale* (loi de Laplace-Gauss). Ces résistances sont définies par des relations du type

$$R_k = R_m - ks \quad (3.6)$$

où R_m est la résistance moyenne, s l'écart type, avec, pour n valeurs,

$$R_m = \frac{1}{n} \sum_1^n R_i \quad s = \sqrt{\sum_1^n \frac{(R_i - R_m)^2}{n-1}} \quad (3.7)$$

et où k est un coefficient dépendant de la probabilité choisie ; par exemple si $k = 2$, on n'a que 2,3 % de chances d'avoir une résistance inférieure à R_k (pour n très grand en principe).

Considérons par exemple (fig. 3.3) les courbes de dispersion (histogrammes) de la résistance à la compression de deux bétons dénommés A et B. On voit que le béton A, de qualité moyenne mais très

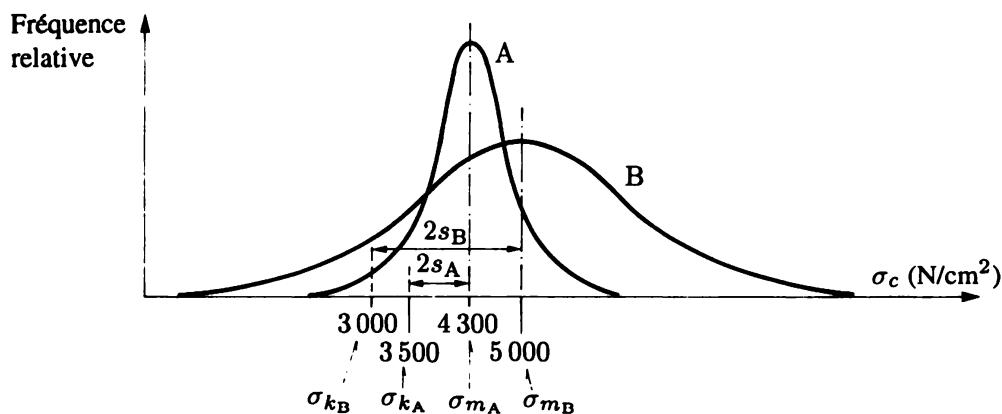


Fig. 3.3 Comparaison de deux matériaux par l'historgramme de leur résistance.

régulière, a une résistance caractéristique plus grande que le béton B, dont la résistance moyenne est supérieure, mais la dispersion beaucoup plus grande.

Actions

A défaut de données suffisantes pour les actions, on prend comme valeurs caractéristiques les valeurs nominales prescrites par les normes, codes et règlements en vigueur ; symboliquement

$$Q_k = \text{valeurs des normes} \quad (3.8)$$

3.4.5 Valeurs de calcul ou de dimensionnement (indices d et \dim)

Résistances (indice \dim)

Les résistances de calcul sont définies par des relations du type

$$R_{\dim} = \frac{R_k}{\gamma_m} \quad (3.9)$$

où le coefficient de pondération de réduction du matériau, supérieur ou égal à 1, est défini par les normes.

Par exemple, pour l'acier, la CECM, estimant que ce matériau a des propriétés peu dispersées, recommande $\gamma_m = 1$ à 1,1 (la valeur $\gamma_m = 1$ s'applique aux cas de pure résistance, par exemple à la traction pure ; sect. 4.9).

Actions (indice d)

Les actions de calcul, ou actions pondérées,

$$Q_d = \gamma_F Q_k \quad (3.10)$$

sont combinées par des relations du type

$$C_d = \left(\sum \gamma_F Q_k \right) \quad (3.11)$$

afin de former des *cas de charge de calcul* C_d ; les coefficients de pondération γ_F , fixés par les règlements, dépendent, outre de la probabilité, du type des actions (permanentes, variables, accidentelles, etc.), de leur effet (accentue, soulage, etc.) et de leur concomitance (notée symboliquement par le signe \sum). Les cas de charge de calcul permettent de trouver les effets des actions intervenant dans la vérification (3.5) de la sécurité ($C_d \Rightarrow S_d$).

Par exemple, la CECM recommande, dans le cas simple où agissent le poids mort G et une charge Q :

- état limite ultime

$$C_d = (1,3 G ; 1,5 Q) \quad (3.12)$$

- état limite d'utilisation

$$C_d = (G ; Q) \quad (3.13)$$

3.5 Commentaires

La méthode des contraintes admissibles ne permet d'utiliser que la méthode élastique de calcul limitée au cas géométriquement linéaire par surcroît. Elle ramène toutes les vérifications de la sécurité au niveau des sollicitations en service. Elle met trop l'accent sur la vérification de la résistance propre de la matière ($\sigma \leq \sigma_{adm}$), laissant croire que les autres vérifications (fatigue, déplacements, vibrations, fragilité, fissuration, équilibre statique global, etc.) sont secondaires.

La méthode déterministe, avec sa définition propre du coefficient de sécurité, offre toute latitude sur le choix de la méthode de calcul. Mais elle laisse supposer que toutes les vérifications se font à la ruine, alors que certaines n'ont de sens qu'en service (déplacements par exemple).

La méthode semi-probabiliste laisse aussi toute latitude sur le choix de la méthode de calcul ; cependant, les états limites d'utilisation correspondent généralement à un état linéaire de la structure, de sorte que la vérification des états limites ultimes par un calcul à la ruine ne dispense ordinairement pas du traditionnel calcul élastique.

L'application de la méthode semi-probabiliste présente aussi des difficultés (choix des coefficients de pondération) et n'est pas à l'abri de toute critique ! Pour l'acier par exemple, la CECM recommande l'emploi de cette méthode couplée à la méthode élastique de calcul ; or les états limites ultimes d'instabilité des barres comprimées (flambement) sont établis d'après la méthode à la ruine...

Parfois, on mélange aussi les deux conceptions. On peut adopter les résistances de calcul σ_{dim} pour définir les contraintes admissibles ($\sigma_{adm} = \sigma_{dim}/\gamma$).

3.6 Exercices

3.6.1 Deux chantiers A et B exécutent une construction en béton. Le chantier A travaille avec plus de soin que le chantier B. Chaque jour de bétonnage, on confectionne matin et après-midi un cube d'essai sur chaque chantier. L'essai de dix de ces cubes donne les résistances à la compression suivantes (en kN/cm^2) :

n° du cube	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
chantier A	2,20	2,37	2,46	2,72	2,50	2,38	2,59	2,37	2,63	2,68
chantier B	2,24	2,77	3,02	2,57	2,64	2,68	2,52	2,35	1,91	2,20

Déterminer la contrainte admissible dans les constructions exécutées par les chantiers A et B, en adoptant un coefficient de sécurité de 2,5 par rapport à la résistance caractéristique ($k = 2$).

3.6.2 Une poutre en treillis en acier est soumise en service à une charge permanente ($G = 90 \text{ kN}$ aux nœuds 2, 3 et 4) et à une charge utile (Q aux mêmes nœuds). On doit analyser ce treillis par rapport à la résistance de la

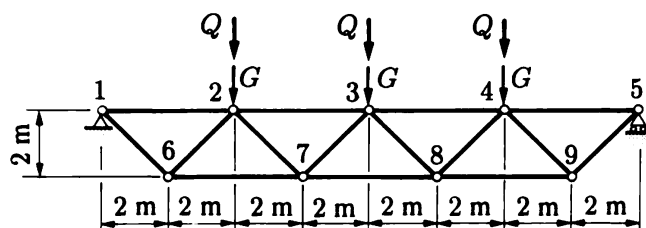


Fig. Ex. 3.6.2

membrure inférieure 6-7-8-9 ; cette barre est un HEA 200 en acier doux pour lequel la limite d'élasticité et la résistance de calcul valent $\sigma_e = \sigma_{\text{dim}} = 24 \text{ kN/cm}^2$. Calculer Q

- 1) par la méthode des contraintes admissibles si le coefficient de sécurité est 1,5 ;
- 2) par la méthode semi-probabiliste, si les facteurs de charge des charges permanente et utile sont respectivement 1,3 et 1,5.

3.7 Lexique

Incertitudes	<p>Doutes touchant tous les aspects d'un ouvrage :</p> <ul style="list-style-type: none"> • actions ; • caractéristiques (mécaniques) des matériaux ; • dimensions ; • calcul ; • construction.
En service	En cours d'utilisation normale.
Coefficient de sécurité (γ)	Coefficient couvrant globalement les incertitudes et fixant une marge de réserve.
Conception déterministe de la sécurité	Conception où les incertitudes (les ignorances !) sont couvertes globalement et sans distinction par un seul coefficient.
Méthode des contraintes admissibles	Ramener la vérification du stade de ruine (sur les actions) à celui de service (sur les contraintes) grâce à la double hypothèse de linéarisation.
Contrainte admissible (σ_{adm})	Contrainte à ne pas dépasser en service ($\sigma_{\text{adm}} = \sigma_{\text{ruine}}/\gamma, \sigma_e/\gamma \dots$).
Conception semi-probabiliste de la sécurité	Conception cherchant à chiffrer les incertitudes et à les couvrir chacune par un coefficient (un <i>poids</i>) approprié.
Etat limite	Tout état dans lequel une structure ne peut plus satisfaire à l'usage prévu.
Etat limite ultime	<p>Etat de ruine d'une structure :</p> <ul style="list-style-type: none"> • rupture ; • rupture par fatigue ; • rupture fragile ; • perte d'équilibre global ; • instabilité ; • déplacements excessifs.
Etat limite d'utilisation	<p>Etat limite en service :</p> <ul style="list-style-type: none"> • déplacements excessifs (soit d'ensemble, soit localement) ; • vibrations ; • fissuration ; • corrosion, détérioration.
Fragilité (de l'acier)	A température basse, sous traction et concentration de contraintes, l'acier peut perdre sa ductilité et se comporter comme un matériau raide de faible résistance.
Instabilité	Dérobement subit d'une pièce à l'effort de compression, accompagné de grands déplacements (perte de la linéarité géométrique).
Fatigue (rupture par fatigue)	Phénomène par lequel la résistance d'une pièce diminue considérablement par répétition continue de sa sollicitation.

Au sens de la conception semi-probabiliste :

Résistance (R)	Toute propriété mécanique du matériau et, plus généralement, d'une section ou d'un élément structural, caractérisant son comportement et sa résistance (au sens le plus large possible).
Action (Q)	Toute cause sollicitant une construction (au sens le plus large possible).
Coefficient de pondération (γ)	Poids touchant les incertitudes, sorte de coefficient de sécurité appliqué ponctuellement et apprécié selon l'importance de ce à quoi il s'applique ;
<ul style="list-style-type: none"> • facteur de charge (γ_F) • facteur de résistance (γ_m) 	<ul style="list-style-type: none"> poids touchant les actions ; poids touchant les matériaux.
Valeur caractéristique (indice k)	Valeur qui a peu de chances d'être dépassée (en plus ou en moins selon les cas) : <ul style="list-style-type: none"> • résistances : distribution normale ($R_k = R_m - ks$) ; • actions : normes.
Valeur de calcul ou de dimensionnement (indices d et \dim)	Valeur caractéristique pondérée : <ul style="list-style-type: none"> • résistances : $R_{\dim} = R_k / \gamma_m$; • actions : $Q_d = \gamma_F Q_k$ (actions pondérées).
Cas de charge de calcul (C)	Combinaison des actions agissant simultanément : $C_d = (\sum \gamma_F Q_k)$.
Effet des actions (S)	Efforts intérieurs, contraintes, réactions, déplacements ... résultant des cas de charge de calcul : $S_d = f(C_d)$.

4. Traction et compression

4.1 Poutres prismatiques soumises à un effort normal constant

Considérons une poutre d'axe rectiligne, de section droite constante, de poids négligeable, de matériau homogène, soumise uniquement à l'effort normal N dans toute section (fig. 4.1).

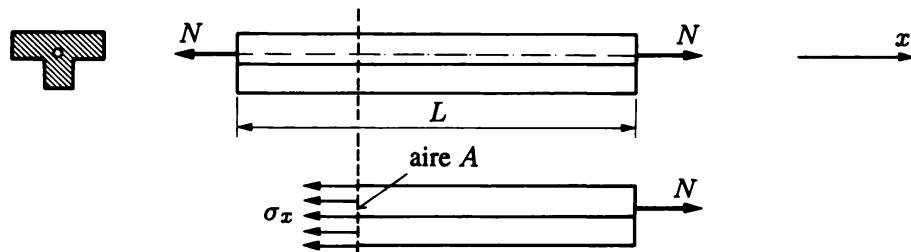


Fig. 4.1 Sollicitation à l'effort normal.

Cette poutre est dans les mêmes conditions que la partie calibrée d'une éprouvette soumise à l'essai de traction (sect. 2.4) ; la formule (2.9)

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

s'applique donc ici et permet d'effectuer la *vérification de la résistance* en toute section.

De même, avec l'équation cinématique (2.3)

$$\varepsilon = \frac{u}{L}$$

et la loi constitutive de Hooke (2.4)

$$\sigma = E\varepsilon$$

on peut calculer l'*allongement* (en cas de traction) ou le *raccourcissement* (en cas de compression) *total* de la pièce, en introduisant (2.9) et (2.3) dans (2.4),

$$u = \frac{NL}{EA} \quad (4.1)$$

et l'on effectue ainsi la *vérification des déplacements*.

Rappelons que, lorsque la poutre est comprimée et élancée, elle doit être dimensionnée contre le danger d'instabilité⁽¹⁾ (§ 3.4.2).

4.2 Pièces à section et effort normal variables

Lorsqu'une pièce homogène est soumise à un effort normal variable, ou lorsque l'aire de sa section droite varie, les formules précédentes sont encore applicables, avec une approximation d'autant meilleure que ces variations sont plus lentes. Toutefois, la formule globale (4.1) n'est plus valable et doit être remplacée par une intégrale.

Examinons le cas d'une pièce d'axe vertical, de section variable, soumise à une force Q et à une charge axiale répartie $n(x)$ (par exemple son poids propre ; fig. 4.2a).

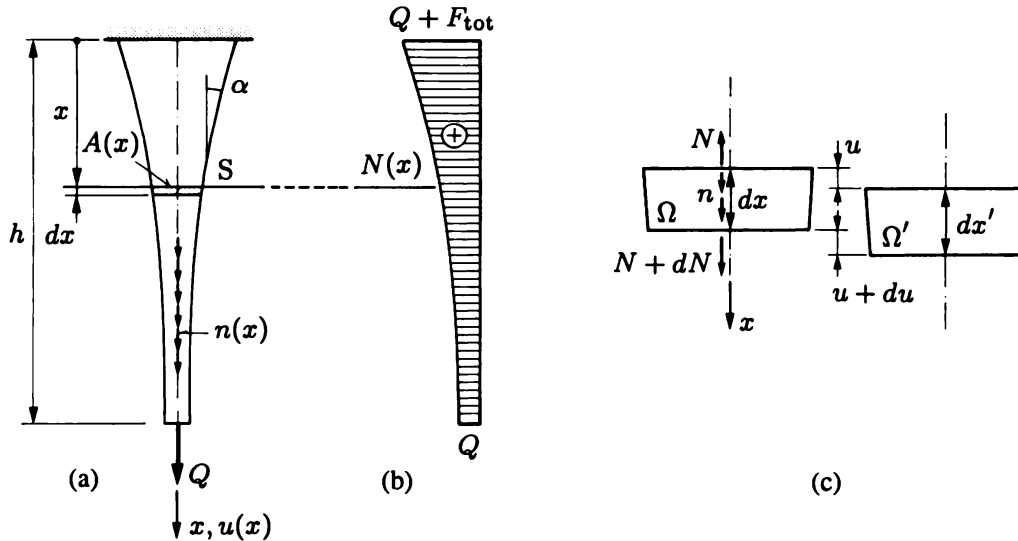


Fig. 4.2 Poutre à section lentement variable soumise à l'effort normal :

(a) élévation ; (b) diagramme $N(x)$; (c) cinématique d'un tronçon dx (configurations initiale Ω et déformée Ω').

On commence par construire le diagramme de l'effort normal

$$N(x) = Q + F(x)$$

où $F(x)$ représente la résultante des forces $n(x)$ situées au-delà de la section S d'abscisse x (fig. 4.2b).

On en déduit

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (4.2)$$

⁽¹⁾ L'instabilité des poutres sera examinée ultérieurement (Troisième partie).

ce qui permet la vérification de la résistance. Cette relation reste précise à moins de 1 % si la pente des fibres extrêmes de la pièce est inférieure à $1/10$ ($\tan \alpha \leq 0,1$).

La dilatation varie avec x et doit se calculer à partir de l'allongement du d'un élément dx de la pièce (fig. 4.2c)

$$\varepsilon(x) = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (4.3)$$

Avec la loi de Hooke (2.4), $\varepsilon(x) = \sigma(x)/E$, puis avec (4.2), on obtient

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)} \quad (4.4)$$

Cette équation différentielle permet de calculer le déplacement axial $u(x)$ de tout point de la pièce et, par suite, de vérifier les déplacements ; l'intégration de (4.4) produit une constante qui se détermine par une condition cinématique aux limites.

En introduisant (4.4) dans l'équation d'équilibre $dN/dx = -n(x)$ (vol. 1, § 9.2.1 ; fig. 4.2c), on obtient l'équation différentielle du déplacement $u(x)$ en fonction de la charge appliquée $n(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -n(x) \quad (4.5)$$

Il en résulte une seconde constante d'intégration, qui peut être de nature statique.

Remarques

Une pièce est dite d'*égale résistance* si en toute section on a

$$\sigma(x) = \text{cste}$$

Cette condition permet de réaliser des pièces avec un minimum de matière, donc de façon économique, puisque tout au long de la pièce la matière travaille au taux maximal ($\sigma = \sigma_{\text{adm}}$; $\sigma = \sigma_{\text{dim}}$; $\sigma = \sigma_e$; etc.).

Dans le cas de la figure 4.2, les conditions aux limites sont de nature cinématique et statique :

$$u(0) = 0 \quad N(h) = Q$$

L'allongement total u d'un tronçon L d'une pièce peut se calculer directement par $u = \int_0^L du$, soit, avec (4.4),

$$u = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

(Pour le cas de la figure 4.2, $L = h$.)

4.3 Pièces formées de deux matériaux

Envisageons par exemple une pièce formée d'une barre du matériau 1, de section d'aire A_1 et de module de Young E_1 , enfilée dans un tube fait du matériau 2, de section A_2 et de module E_2 (fig. 4.3a). Ces deux composants sont assemblés de telle façon que tout déplacement relatif soit impossible. La

pièce est soumise à l'effort normal N constant et il faut déterminer quelles sont les contraintes σ_1 et σ_2 dans chacun des matériaux, ainsi que la dilatation ε et l'allongement u de la pièce. On admet A_1 , A_2 , E_1 et E_2 constants.

L'ensemble étant hétérogène, les relations de la section 4.1 ne s'appliquent plus. Pour résoudre le problème, il faut écrire les formules traduisant la cinématique, la loi de comportement et la statique (§ 2.4.2).

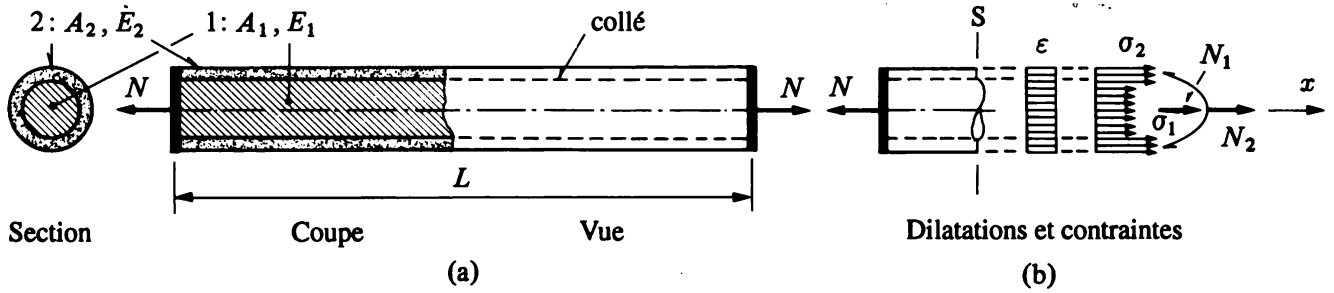


Fig. 4.3 Pièce composée de deux matériaux et soumise à traction.

La cinématique reste valable (§ 2.4.3) : grâce à la loi de conservation des sections planes, les deux matériaux ont, en toute section, la dilatation commune (fig. 4.3b ; condition cinématique)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \text{cste} \quad (4.6)$$

Avec la loi constitutive de Hooke, le diagramme des contraintes est constant par matériau (fig. 4.3b), mais les valeurs sont différentes d'un matériau à l'autre ($E_1 \neq E_2$)

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon \quad (4.7)$$

Enfin, le principe d'équivalence fournit

$$N = \int_A \sigma dA = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (4.8)$$

Ces équations résolvent le problème. Avec (4.7) dans (4.8), on obtient

$$N = \varepsilon (E_1 A_1 + E_2 A_2) \quad (4.9)$$

dont on tire la dilatation ε , puis l'allongement u (par $u = \varepsilon L$),

$$\varepsilon = \frac{N}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad u = \frac{NL}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (4.10)$$

On appelle N_1 et N_2 les parts de l'effort normal reprises par les matériaux 1 et 2 ($N = N_1 + N_2$). On a, par matériau,

$$N_1 = \sigma_1 A_1 \quad N_2 = \sigma_2 A_2$$

En remplaçant σ_1 et σ_2 par (4.7), puis ε par (4.10), on obtient

$$N_1 = N \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad N_2 = N \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (4.11)$$

et l'effort N se répartit entre les deux composants au prorata des produits $E_1 A_1$ et $E_2 A_2$. Les contraintes valent

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \quad (4.12)$$

On généralise sans peine ces résultats aux pièces formées d'un nombre quelconque n de composants E_i, A_i ($i = 1, \dots, n$)

$$N_i = N \frac{E_i A_i}{\sum E A} \quad \sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \quad u = \frac{N L}{\sum E A} \quad (4.13)$$

Remarque

De façon générale, on appelle *pièce composée* une pièce (barre ou poutre) constituée de deux ou plusieurs éléments longitudinaux formés de matériaux différents et travaillant solidairement. On résout d'habitude une telle pièce par le biais d'une pièce fictive formée d'un seul matériau pris comme référence ; cette pièce est caractérisée par des *propriétés géométriques équivalentes* de sa section droite (aire, inertie ...), définies en sorte que le comportement cinématique de la pièce fictive soit identique à celui de la pièce réelle (sect. 4.4, 5.6, 8.10, 9.6 et § 11.1.2).

4.4 Pièces composées acier-béton

Les pièces composées les plus usuelles sont celles de béton et acier. La figure 4.4 montre la coupe de diverses pièces de ce genre.

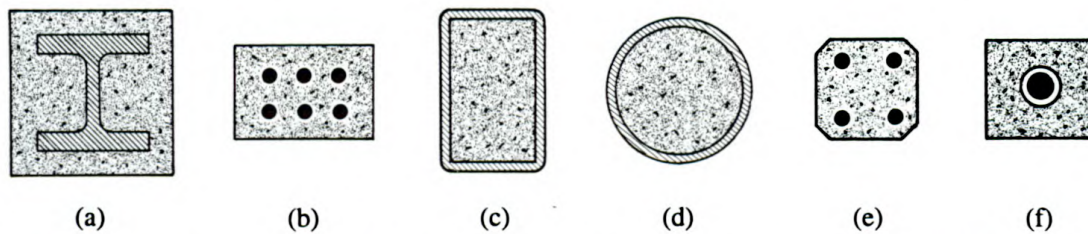


Fig. 4.4 Coupes de pièces composées acier-béton ; (a)-(d) colonnes : (a) poutre laminée enrobée (protection contre l'incendie), (b) béton armé (armatures longitudinales), (c) et (d) tubes remplis de béton ; (e)-(f) tirants : (e) tirant avec armatures passives ou barres de précontrainte, (f) tirant avec câble de précontrainte sous gaine.

L'expérience montre que l'adhérence entre le béton et l'acier est suffisante pour que la pièce puisse être considérée comme monolithique⁽²⁾ ; il ne se produit donc aucun glissement relatif. Ces pièces peuvent se calculer, en stade élastique linéaire⁽³⁾, par les formules précédentes (N constant).

Cependant, on aboutit à une technique de calcul plus efficace par la notion de *coefficient d'équivalence* et d'*aire équivalente*, rapportés à l'un des matériaux⁽⁴⁾.

(2) L'accroissement mécanique de cette liaison par l'adjonction de connecteurs soudés sur l'acier est nécessaire pour les pièces fléchies ou tordues, comme on le verra ultérieurement (chap. 11).

(3) On admet que le béton se comporte comme tel.

(4) Cette nouvelle notion s'applique, évidemment, quels que soient les matériaux a et b .

On donne à l'acier et au béton les indices a et b . Le **coefficient d'équivalence** n est le rapport des modules d'élasticité

$$n = \frac{E_a}{E_b} \quad (4.14)$$

et il est dit *rapporté à l'acier* parce que E_a est au numérateur, ce que la suite va justifier.

Les relations (4.7) fournissent

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

d'où, avec n (4.14),

$$\sigma_b = \frac{\sigma_a}{n} \quad (4.15)$$

On introduit cette valeur dans l'équation statique (4.8)

$$N = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b = \sigma_a A_a + \frac{\sigma_a A_b}{n}$$

que l'on écrit

$$N = \sigma_a \left(A_a + \frac{A_b}{n} \right) = \sigma_a \tilde{A}_a$$

d'où, en utilisant (4.15) pour σ_b ,

$$\sigma_a = \frac{N}{\tilde{A}_a} \quad \sigma_b = \frac{N}{n \tilde{A}_a} \quad \left(= \frac{1}{n} \sigma_a \right) \quad (4.16)$$

Semblablement, en posant

$$E_a A_a + E_b A_b = E_a \left(A_a + \frac{1}{n} A_b \right) = E_a \tilde{A}_a \quad (4.17)$$

l'allongement et la dilatation s'écrivent, via (4.10),

$$u = \frac{NL}{E_a \tilde{A}_a} \quad \varepsilon = \frac{u}{L} = \frac{\sigma_a}{E_a} \quad (4.18)$$

Les formules (4.16) et (4.18) montrent que l'on peut remplacer le calcul de la pièce acier-béton par celui d'une *pièce fictive homogène* composée d'un seul matériau, ici l'acier ; il suffit de donner à cette pièce l'aire fictive

$$\tilde{A}_a = A_a + \frac{1}{n} A_b \quad (4.19)$$

dite *aire équivalente, rapportée à l'acier*, obtenue en divisant par n la contribution de l'*autre* matériau (A_b/n).

Remarque

On aurait pu, semblablement, tout rapporter au béton.

4.5 Principe de la précontrainte

4.5.1 Introduction

Dans les pièces composées que l'on vient d'étudier, l'un des matériaux atteint en général sa résistance de calcul ou sa contrainte admissible avant l'autre, qui, de ce fait, est mal utilisé. Par exemple, dans les tirants de la figure 4.4, l'état limite de fissuration, puis de rupture par traction du béton, est bien vite atteint, alors que l'acier possède encore une grande réserve de résistance.

Pour remédier à cet inconvénient, on applique fréquemment aux pièces composées une opération de *précontrainte*, avant de les soumettre aux actions extérieures.

Dans le cas du béton, qui est le plus fréquent, on peut procéder de deux manières différentes, qui sont dictées par le mode de fabrication.

4.5.2 Pièces à fils adhérents

La figure 4.5 montre le procédé de fabrication, qu'il est indispensable de bien comprendre afin de saisir le mode de travail de la pièce (par simplicité, la figure ne montre qu'un fil ; en réalité, il y en a plusieurs répartis sur la section du béton).

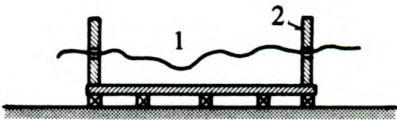
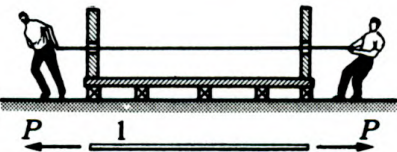
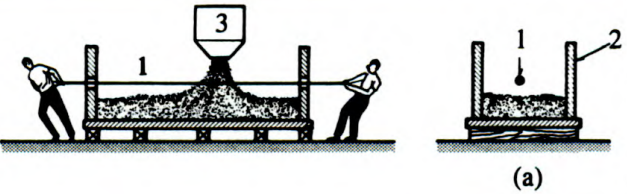
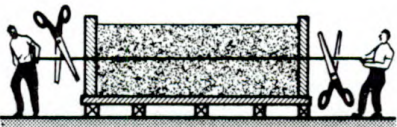
Etapes	
1 1 : fil non tendu 2 : coffrage	
2 Mise en tension du fil <i>en prenant appui sur le sol</i> 1 : fil précontraint	
3 Bétonnage de la pièce (a) coupe 1 : fil 2 : coffrage 3 : béton	
4 On coupe le fil après durcissement du béton	

Fig. 4.5 Béton précontraint par fils adhérents.

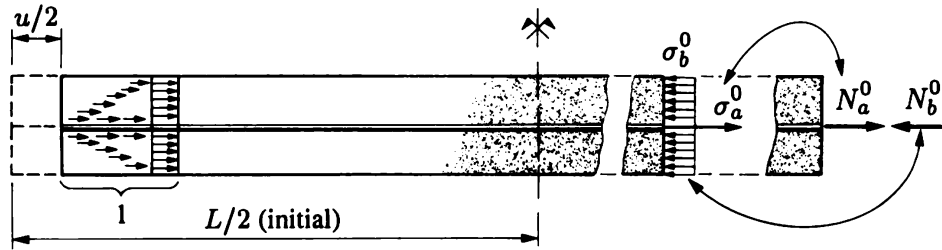


Fig. 4.6 Mécanique de la précontrainte par fil adhérent
(1 : zone de mise en compression uniforme, illustrant le principe de Saint-Venant).

Après avoir été coupé, le fil métallique a tendance à reprendre sa position initiale (non contrainte), mais en est partiellement empêché par le béton : par frottement, le fil met le béton en compression (fig. 4.6).

Quels sont, dans le béton et l'acier, les efforts intérieurs et contraintes résultant de cette opération ?

Dans l'étape 2, l'acier seul est tendu par la force de précontrainte P

$$\begin{aligned} N'_a &= P & N'_b &= 0 \\ \sigma'_a &= \frac{P}{A_a} & \sigma'_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dans l'étape 4, couper le fil revient à supprimer la force P , donc à l'appliquer en sens inverse, en compression, sur la section composée acier-béton ; par les relations des sections 4.3 et 4.4

$$\begin{aligned} N''_a &= -\frac{PE_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} & N''_b &= -\frac{PE_b A_b}{E_a A_a + E_b A_b} \\ \sigma''_a &= \frac{N''_a}{A_a} = -\frac{P}{A_a} & \sigma''_b &= \frac{N''_b}{A_b} = \frac{\sigma''_a}{n} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Au total, par superposition

$$\begin{aligned} N_a^0 &= N'_a + N''_a & N_b^0 &= N''_b \\ \sigma_a^0 &= \sigma'_a + \sigma''_a & \sigma_b^0 &= \sigma''_b \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ces efforts intérieurs et contraintes, décorés de l'indice 0, forment un état de sollicitation *initial* dans la pièce, c'est-à-dire existant *avant application de toute action extérieure* ; de telles sollicitations internes, en équilibre sur elles-mêmes sans action d'aucune cause extérieure, constituent ce qu'on appelle un *état d'autocontrainte*⁽⁵⁾. Elles sont dites *autoéquilibrées*, puisque, dans toute section droite (fig. 4.6), on a

$$N_a^0 + N_b^0 = 0 \quad (4.23)$$

4.5.3 Pièces à fils sous gaine

L'élément en béton est coulé dans un coffrage où, préalablement, on a placé une gaine métallique dans laquelle le câble, formé de plusieurs fils parallèles, est enfilé, mais non tendu. La figure 4.7 illustre la mise en précontrainte (à nouveau, il peut y avoir plusieurs câbles de précontrainte).

⁽⁵⁾ Les contraintes résiduelles de la figure 2.12 forment aussi un état d'autocontrainte.

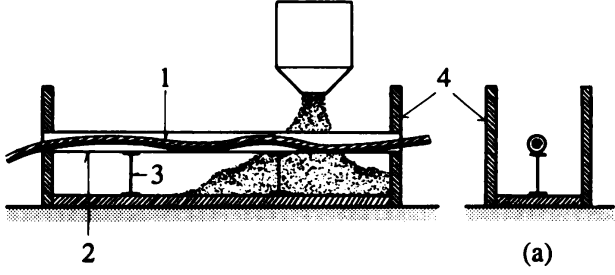
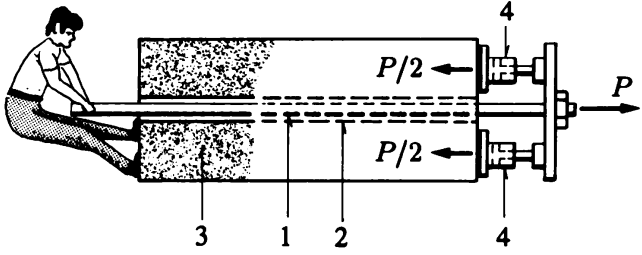
Etapas	
<p>1 Bétonnage de la pièce (a) coupe 1 : câble non tendu 2 : gaine 3 : support de la gaine 4 : coffrage</p>	
<p>2 Mise en tension du câble <i>en prenant appui sur la section de béton, après durcissement du béton</i> 1 : câble 2 : gaine 3 : béton 4 : vérin</p>	
<p>3 Blocage du câble aux extrémités (divers systèmes de blocage) et injection</p>	

Fig. 4.7 Béton précontraint par câbles sous gaines.

Ici, on a simplement, si P est l'effort de traction, c'est-à-dire de précontrainte, dans le câble (étape 2)

$$\begin{aligned}
 N_a^0 &= P & N_b^0 &= -P \\
 \sigma_a^0 &= \frac{P}{A_a} & \sigma_b^0 &= -\frac{P}{A_b}
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

4.5.4 Application d'une force extérieure

Les deux types de béton précontraint ci-dessus se comportent, après fabrication, de la même manière, comme une pièce composée monobloc ; les sollicitations additionnelles ($N_a''', N_b''', \sigma_a''', \sigma_b'''$) dues à une charge extérieure Q se calculent comme indiqué aux sections 4.3 et 4.4 précédentes.

Par superposition, on obtient donc, au total,

- béton précontraint par fils adhérents :

$$\sigma_a = \frac{P}{A_a} - \frac{P}{\tilde{A}_a} + \frac{Q}{\tilde{A}_a}
 \tag{4.25a}$$

$$\sigma_b = -\frac{P}{n\tilde{A}_a} + \frac{Q}{n\tilde{A}_a}
 \tag{4.25b}$$

- béton précontraint par câbles :

$$\sigma_a = \frac{P}{A_a} + \frac{Q}{\tilde{A}_a} \quad (4.26a)$$

$$\sigma_b = -\frac{P}{A_b} + \frac{Q}{n\tilde{A}_a} \quad (4.26b)$$

On peut alors choisir la force de précontrainte P de manière à ce que les deux matériaux atteignent simultanément leurs contraintes limites correspondantes (par exemple $\sigma_a = \sigma_e$, et $\sigma_b = 0$ si l'on admet que le béton ne résiste pas à la traction). L'effort extérieur Q applicable est ainsi maximal et les matériaux sont utilisés au mieux de leurs possibilités respectives.

4.5.5 Propriété remarquable de la précontrainte

Puisqu'en général $\tilde{A}_a \gg A_a$, les formules (4.25a) et (4.26a) montrent que

$$\frac{P}{A_a} \gg \frac{Q - P}{\tilde{A}_a} \quad \frac{P}{A_a} \gg \frac{Q}{\tilde{A}_a}$$

En d'autres termes, *la force extérieure ne modifie que peu la force de précontrainte initiale, ou encore, la contrainte initiale dans l'acier due à l'application de la précontrainte ne varie guère sous les charges extérieures* : grâce à cette *propriété essentielle et remarquable de la précontrainte*, on peut (et on doit : § 4.5.6) donner à P une grande valeur, telle que l'acier de précontrainte travaille au voisinage du maximum possible.

En fait, les forces extérieures sont essentiellement transmises par l'élément mis en compression par la précontrainte (le béton) ; cet élément se décomprime au fur et à mesure que croît la force extérieure, et peut donc transmettre une force au moins égale à celle de précontrainte (fils adhérents, (4.25b)) ou même légèrement supérieure (câbles, (4.26b)).

Remarque

Cette même propriété est employée dans les assemblages par boulons précontraints (la précontrainte est obtenue par un serrage énergique des boulons : *boulons à haute résistance* de la construction métallique, boulons précontraints de la mécanique (moteurs), etc.), dans les structures en câbles prétendus, etc.

4.5.6 Pertes

Les conclusions précédentes ne s'appliquent que si les matériaux ont des caractéristiques mécaniques qui restent stables dans le temps.

Tel n'est malheureusement pas le cas du béton ni, dans une moindre mesure, de l'acier de précontrainte. De plus, le béton subit, lors de sa prise (durcissement), un léger retrait. Pour ces diverses raisons (chap. 7 et vol. 7, 8, 24), la pièce précontrainte se raccourcit petit à petit et, par suite, la force initiale de précontrainte diminue lentement au cours du temps ; ce phénomène se stabilise toutefois après un temps assez long. La *perte* qui en résulte est de l'ordre de 15 %, mais n'enlève rien aux avantages que procure la précontrainte ; son calcul sort du cadre de cet ouvrage (vol. 7 et 8).

Le mécanisme de cette perte explique pourquoi *il faut employer des aciers à très haute résistance pour précontraindre le béton*; sinon, à cause du raccourcissement lent de la pièce, la force de précontrainte pourrait s'annuler complètement.

4.6 Anneaux

Un **anneau** est une poutre dont l'axe est une circonférence; d'ordinaire, la section droite est constante et ses dimensions sont petites en regard du rayon de l'anneau.

Si des forces radiales sont distribuées uniformément le long d'une fibre d'un anneau (fig. 4.8a), toute fibre circulaire devient, dans la configuration déformée, un nouveau cercle de rayon légèrement différent; cela provient de la *symétrie dite de révolution* du problème, qui touche aussi bien la géométrie que le mode de chargement⁽⁶⁾. La dilatation ε est donc constante le long de ces fibres, qui sont, dans le cas de la figure 4.8, tendues.

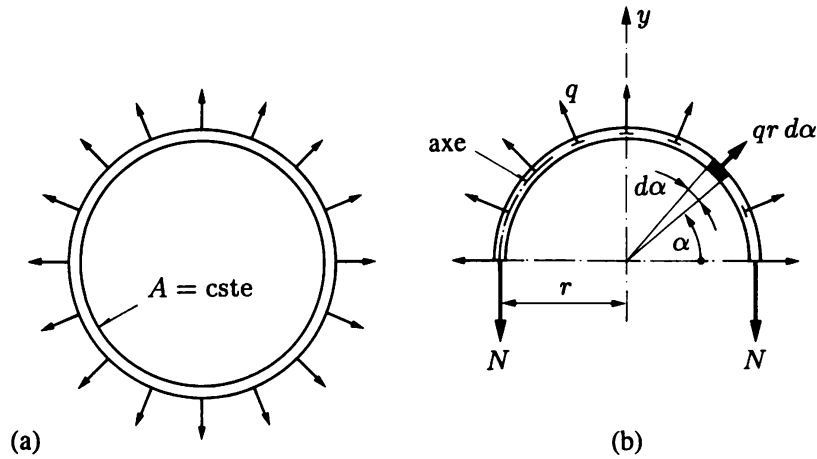


Fig. 4.8 Anneau.

Pour déterminer l'effort de traction N dans l'anneau, coupons-le par un plan diamétral et considérons le schéma du demi-anneau supérieur isolé (fig. 4.8b). Désignons par q l'intensité par unité de longueur des forces radiales appliquées *le long de l'axe* de l'anneau, et par r le rayon de cet axe. La force agissant sur l'élément d'anneau d'ouverture $d\alpha$ sera $qr d\alpha$ où α est l'angle au centre fixant la position de cet élément. La composante verticale de cette force élémentaire vaut $qr \sin \alpha d\alpha$.

L'équilibre vertical du demi-anneau fournit (facteurs 2 par symétrie)

$$\sum F_y = -2N + 2 \int_0^{\pi/2} qr \sin \alpha d\alpha = -2N + 2qr = 0$$

d'où

$$N = qr \quad (4.27)$$

⁽⁶⁾ On néglige le poids propre.

Si, dans le plan de l'anneau, les dimensions de la section droite sont petites devant le rayon r de l'axe (§ 2.7.7), la dilatation ε de chaque fibre annulaire est pratiquement la même et, par suite, on peut admettre que les contraintes normales sont uniformément réparties dans la section droite

$$\sigma \cong \text{cste} = \frac{qr}{A} \quad (4.28)$$

La précision de cette formule est de l'ordre de 5 % lorsque la dimension de la section droite vaut le dixième du rayon r . Enfin les relations ci-dessus provenant du seul équilibre, elles sont valables quel que soit le matériau de l'anneau.

Si le matériau est linéaire élastique, la dilatation de l'axe de l'anneau vaut

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{qr}{EA} \quad (4.29)$$

Puisque la longueur déformée de cet axe est $2\pi r(1 + \varepsilon)$, le rayon de l'anneau augmente de la quantité u_{rad} , dite *déplacement radial*,

$$u_{\text{rad}} = \varepsilon r = \frac{qr^2}{EA} \quad (4.30)$$

4.7 Tubes et récipients cylindriques sous pression

4.7.1 Tube libre de se déformer longitudinalement

Dans le cas d'un tube d'épaisseur t constante, petite devant r ($t \leq r/10$), libre de se déformer axialement, et soumis par exemple à une pression intérieure p , on se ramène au cas de l'anneau en considérant un tronçon de tube de longueur unité (fig. 4.9); la charge q est égale à la pression p et la section droite A vaut t ; d'où

$$\sigma = \frac{pr}{t} \quad (4.31)$$

Cette égalité est souvent appelée *formule du tube* ou *formule des chaudières*.

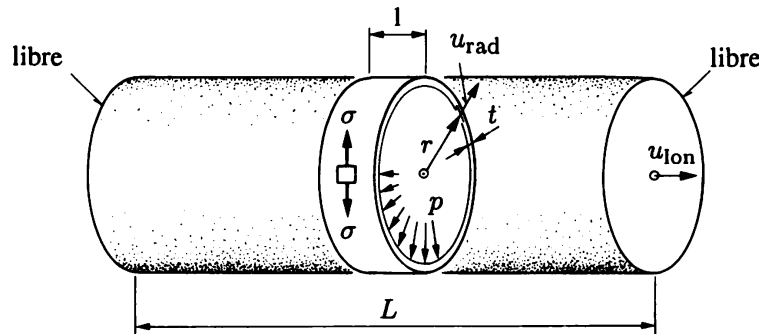


Fig. 4.9 Tube libre de se dilater axialement.

Le déplacement radial est donné par (4.30) ; suite au coefficient de Poisson, il se produit aussi une dilatation longitudinale $\varepsilon_{\text{lon}} = -\nu\varepsilon$ et un déplacement longitudinal

$$u_{\text{lon}} = -\nu\varepsilon L = -\nu \frac{prL}{Et} \quad (4.32)$$

4.7.2 Récipient sous pression

Dans un récipient cylindrique (chaudière, etc.), la pression interne provoque non seulement la contrainte circonférentielle σ_{cir} (4.31), mais en plus une contrainte normale longitudinale σ_{lon} due à l'action de la pression sur les fonds (fig. 4.10). Indépendamment de la forme du fond, la force totale qui s'y exerce vaut $F = \pi r^2 p$ et soumet le récipient à la traction longitudinale de contrainte (fig. 4.10b)

$$\sigma_{\text{lon}} = \frac{F}{2\pi r t} = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r t} = \frac{pr}{2t} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{cir}} \quad (4.33)$$

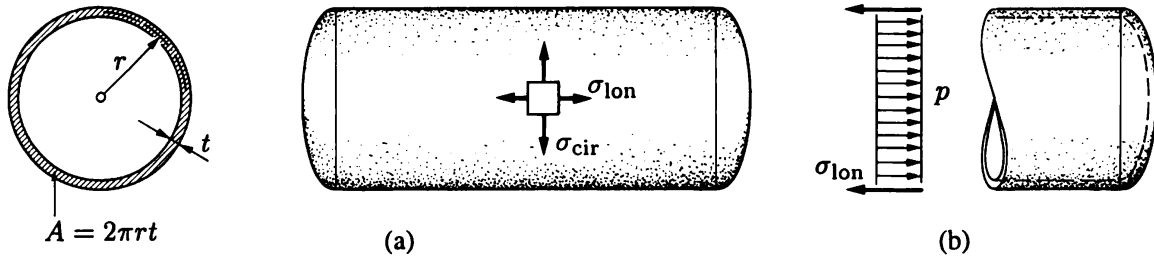


Fig. 4.10 Récipient cylindrique sous pression interne.

En conséquence, la paroi est soumise à l'*état plan de contrainte*, où σ_{cir} et σ_{lon} sont les *contraintes principales* ($\tau = 0$ partout). Cet état de contrainte

- ne vaut que dans le corps central du récipient, car au voisinage des fonds, il est perturbé à cause des conditions cinématiques à la jonction fond-cylindre (vol. 5) ;
- est établi en se basant sur les seules équations d'équilibre, et est donc valable quel que soit le matériau constituant le récipient.

La cinématique est plus compliquée que celle de l'anneau ou du tube libre de se déformer longitudinalement ; pour calculer les dilatations et déplacements, il faut recourir à la loi de Hooke de l'*état plan de contrainte* (vol. 3, chap. 5 et ex. 5.11.15).

4.7.3 Tube longitudinalement indéformable

Pour un tube très long, qui ne peut se déformer axialement (tunnel, conduite forcée, etc.), et soumis à pression interne (fig. 4.11), la contrainte circonférentielle est encore donnée par (4.31) via l'équilibre. Au reste, il faut recourir aux équations de l'*état plan de contrainte* (ou de *déformation* ; vol. 3, chap. 5 et ex. 5.11.19). En particulier, pour un matériau élastique linéaire isotrope, la contrainte longitudinale vaut

$$\sigma_{\text{lon}} = \nu \sigma_{\text{cir}} \quad (4.34)$$

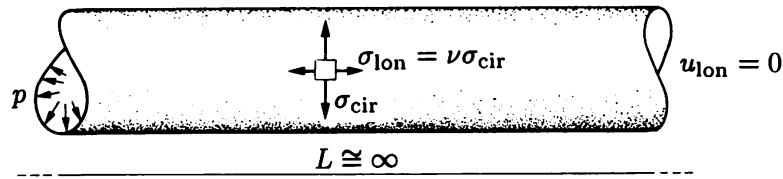


Fig. 4.11 Tube à dilatation axiale empêchée.

4.7.4 Contrainte radiale

La contrainte normale radiale σ_{rad} , qui s'exerce à travers l'épaisseur de la paroi, normalement à celle-ci, et qui vaut $-p$ à la surface interne et zéro à la surface externe (d'où $-p \leq \sigma_{\text{rad}} \leq 0$), est négligeable devant σ_{cir} et σ_{lon} (puisque $r/t \geq 10$).

4.8 Dilatations thermiques

Considérons une barre homogène à la température initiale T_1 ; si α désigne le *coefficient de dilatation thermique linéaire* du matériau⁽⁷⁾ et $T = T_2 - T_1$ la *variation de température* entre l'état final (T_2) et l'état initial (T_1), la barre subit la variation de longueur (déplacement thermique)

$$u_{th} = \alpha L T \quad (4.35)$$

et la *dilatation thermique* uniforme

$$\varepsilon_{th} = \alpha T \quad (4.36)$$

qui, pour les matériaux usuels et les variations thermiques que l'on rencontre en génie civil ($T < 100^\circ\text{C}$), est *une quantité du même ordre de grandeur que la dilatation due aux efforts intérieurs* (donc très petite, certes, mais non pas négligeable).

Chaque fois qu'une structure ne peut se dilater librement, les variations de température y font naître des efforts intérieurs et des contraintes dites *contraintes thermiques*.

Exemple 4.1

Quelles sont les contraintes thermiques qui naissent dans une barre composée acier-béton ?

D'après l'annexe 23.1 des caractéristiques mécaniques, on a

$$\alpha_a = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C} \quad \alpha_b = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

donc $\alpha_a = \alpha_b$, et il ne naît *aucune contrainte thermique* (circonstance évidemment favorable au fonctionnement sain du béton armé et du béton précontraint).

Exemple 4.2

Quelles sont les contraintes thermiques qui naissent dans une barre sur deux appuis fixes, qui ne peut donc pas se dilater (fig. 4.12) ?

⁽⁷⁾ Pris à la température ordinaire et admis constant (annexe 23.1).

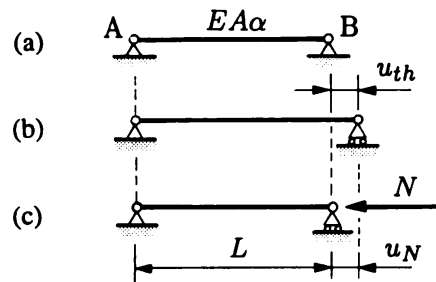


Fig. 4.12

Ce problème est une fois statiquement indéterminé. Par une coupure simple relative au déplacement horizontal de l'appui B (fig. 4.12b), la barre se dilate de

$$u_{th} = \alpha LT$$

L'effort hyperstatique N doit être tel qu'il rétablisse la condition cinématique en B. Il provoque le déplacement

$$u_N = \frac{NL}{EA}$$

et on doit avoir

$$u_{th} = u_N$$

d'où

$$N = EA\alpha T \quad (\text{compression, fig. 4.12c}) \quad \Rightarrow \quad \sigma = E\alpha T \quad (\text{compression})$$

Plus élégamment, puisque toute dilatation est empêchée, la condition cinématique est

$$\varepsilon_{th} + \varepsilon_{\sigma} = 0$$

d'où

$$\alpha T + \frac{\sigma}{E} = 0$$

et

$$\sigma = -E\alpha T \quad (\text{compression})$$

4.9 Sécurité des pièces tendues et comprimées

La sollicitation par traction ou compression est celle qui conduit à la condition de résistance la plus simple et la plus sûre, parce que l'état réel de la pièce considérée coïncide avec celui des éprouvettes que l'on teste en laboratoire. En effet, les essais de résistance les plus communs sont ceux de traction et compression des éprouvettes prismatiques. Les notions développées au chapitre 3 s'appliquent alors ici directement.

Avec la méthode des contraintes admissibles, la condition de résistance s'écrit

$$|\sigma| \leq \sigma_{adm} \quad (4.37)$$

Par la méthode semi-probabiliste, il faut calculer l'effort normal pondéré N_d , puis la contrainte correspondante σ_d et vérifier l'état ultime

$$|\sigma_d| \leq \sigma_{dim} \quad (4.38)$$

Pour les matériaux qui ont à peu près la même résistance à la traction et à la compression (aciers, alliages d'aluminium, bois, etc.), il suffit d'envisager une seule contrainte limite, que l'élément soit tendu ou comprimé (d'où la valeur absolue); au contraire, d'autres matériaux ont des résistances différentes dans les deux cas (pierres, fonte, etc.; tableaux 23.1 et 23.2). Il faut alors envisager des contraintes limites distinctes si la pièce est tendue ou comprimée

$$\sigma \leq \sigma_{adm}^+ \quad \sigma_d \leq \sigma_{dim}^+ \quad (\text{traction}) \quad (4.39a)$$

$$|\sigma| \leq \sigma_{adm}^- \quad |\sigma_d| \leq \sigma_{dim}^- \quad (\text{compression}) \quad (4.39b)$$

Application

Prenons le cas simple d'une barre de poids propre négligeable, soumise en service à une seule action produisant l'effort normal N , faite en acier de limite d'élasticité σ_e .

Par les contraintes admissibles, on a

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{\gamma}$$

Par la méthode semi-probabiliste, on pose

$$N_d = \gamma_F N \quad \Rightarrow \quad \sigma_d = \frac{\gamma_F N}{A} \leq \sigma_{dim}$$

On voit que, pour $\sigma_{dim} \equiv \sigma_e$, ce qui pour l'acier est ordinairement le cas, et pour $\gamma_F = \gamma$ généralement fixés à 1,5 dans les deux cas, les deux conceptions de la sécurité aboutissent au même dimensionnement.

4.10 Exercices

4.10.1 Une console triangulée ABC est formée de deux barres en acier et est soumise à la seule charge concentrée verticale $Q = 60 \text{ kN}$ au nœud C (poids propre négligé). Déterminer

- 1) la contrainte normale dans chaque barre;
- 2) l'allongement ou le raccourcissement de chaque barre;
- 3) les composantes horizontale et verticale du déplacement du nœud C. *Indication* : au nœud C, supprimer la liaison des barres, porter les variations de longueur calculées sous 2) et construire la position C' du nœud en configuration déformée (petits déplacements!).

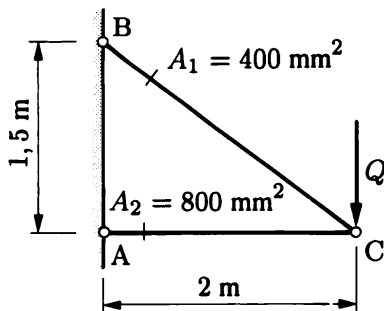


Fig. Ex. 4.10.1

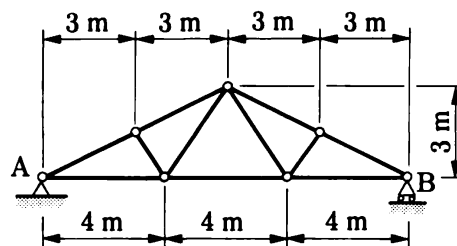


Fig. Ex. 4.10.2

4.10.2 La structure portante de la toiture d'une petite halle est constituée de fermes en acier, équidistantes de 6 m. Elle est soumise en service aux charges suivantes :

- poids propre (fermes et couverture) : $0,4 \text{ kN/m}^2$ rapporté à l'horizontale ;
 - poids de la neige : altitude du lieu $h_0 = 500 \text{ m}$.
- 1) Dimensionner la membrure inférieure AB (choisir une cornière à ailes égales) ; calculer les barres à l'état limite ultime ; pondérer les charges permanentes par 1,33 et les non permanentes par 1,6 ; adopter pour l'acier la résistance de calcul $\sigma_{\text{dim}} = \sigma_e = 24 \text{ kN/cm}^2$.
 - 2) Calculer le déplacement horizontal du nœud B à l'état limite d'utilisation. *Indication* : les déplacements des points des constructions se calculent, en service, sans tenir compte du poids mort ; expliquer pourquoi il en est ainsi.

4.10.3 Soit une barre à axe vertical, de longueur L , de section constante A et formée d'un matériau de poids volumique γ ; l'extrémité supérieure est fixe et l'extrémité inférieure libre. Cette barre est soumise uniquement à son poids propre. Etablir la formule donnant le déplacement vertical de l'extrémité inférieure de la barre (littéral).

Application. Deux fils de section constante sont suspendus verticalement ; l'un est en acier doux et l'autre en alliage d'aluminium 6061 T6. Sous l'action de leur poids propre, déterminer pour chacun d'eux

- 1) la longueur pour laquelle la contrainte atteint la limite d'élasticité du matériau, et l'allongement correspondant ;
- 2) la longueur pour laquelle la contrainte atteint la résistance à la traction du matériau.

Expliquer pourquoi on peut calculer la longueur et l'allongement à la limite d'élasticité, alors qu'à la rupture, seule la longueur peut être obtenue.

4.10.4 Imaginons qu'il soit possible – mis à part le problème d'instabilité – de construire une colonne de section constante aussi haute qu'on le désire. Si cette colonne est en granit, déterminer sa hauteur maximale.

4.10.5 Un câble d'acier pour mine, long de 600 m, est formé de trois tronçons ; chaque tronçon mesure 200 m et a une section constante. Ce câble doit supporter en service un poids $Q = 30 \text{ kN}$ et l'acier a une contrainte admissible de 18 kN/cm^2 . Dimensionner ce câble (déterminer A_1 , A_2 et A_3) ; trouver ensuite son allongement total.

4.10.6 Un câble en acier, fixé aux points A et B situés au même niveau, a une portée L de 100 m et, en configuration non déformée, une flèche a de 2 m. Il est soumis à son poids propre p et à une charge $q = 100 \text{ N/m}$ uniformément répartie sur toute la portée. Déterminer

- 1) l'aire A de la section droite du câble, sachant que $\sigma_{\text{adm}} = 800 \text{ N/mm}^2$;
- 2) la flèche a' du câble en configuration déformée (donner aussi la valeur numérique de la longueur initiale s , de l'allongement u et de la longueur finale s' du câble).

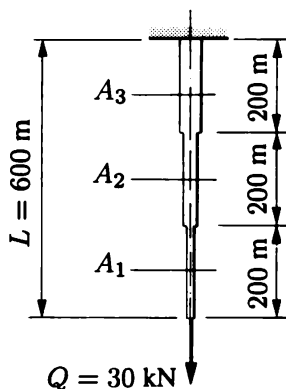


Fig. Ex. 4.10.5

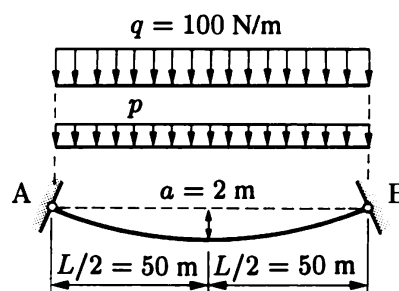


Fig. Ex. 4.10.6

4.10.7 Une poutre bi-encastée, prismatique ($E, A, \alpha = \text{cste}$), est soumise à deux actions, une force axiale F appliquée à l'abscisse a (fig. ex. 4.10.7a), et une élévation uniforme de température T sur la seule longueur b de la poutre (fig. ex. 4.10.7b).

- 1) Donner le degré d'hyperstaticité.
- 2) Trouver le diagramme de l'effort normal N pour chacune des actions.

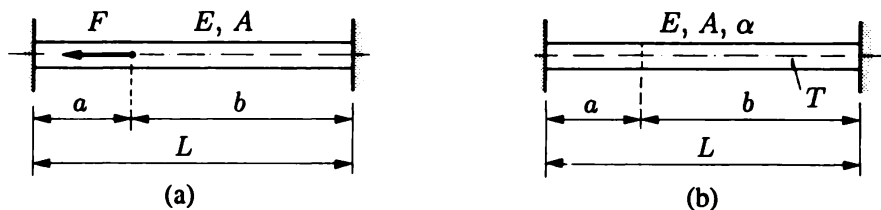


Fig. Ex. 4.10.7

4.10.8 Une tige cylindrique AB en acier doux est articulée en A sur un axe a-a tournant à la vitesse constante de 1 800 tours par minute. Trouver

- 1) le diagramme de l'effort normal ;
- 2) la contrainte normale maximale ;
- 3) l'allongement total.

Note : négliger le poids propre, puis vérifier après coup que ce poids propre est effectivement négligeable.

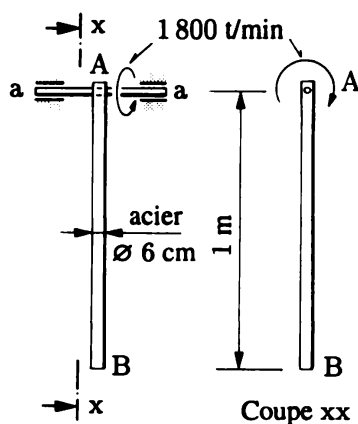


Fig. Ex. 4.10.8

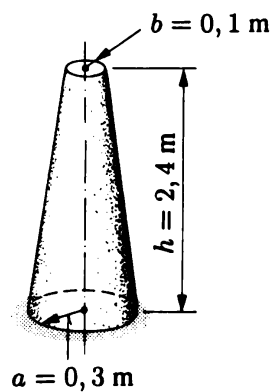


Fig. Ex. 4.10.9

4.10.9 Une colonne encastée à sa base a la forme d'un tronc de cône circulaire droit ; le matériau a un poids volumique γ et un module d'élasticité E . Déterminer le déplacement vertical du sommet dû au poids propre. *Indication* : placer l'origine des axes de coordonnées au sommet du cône complet.

4.10.10 Déterminer le raccourcissement d'une pile de pont de section variable en béton armé, sous le seul effet d'une charge F au sommet ; on donne $F = 25\,000 \text{ kN}$ et $E = 3\,000 \text{ kN/cm}^2$; la surface latérale est constituée de huit trapèzes. *Indication* : intégrer numériquement !

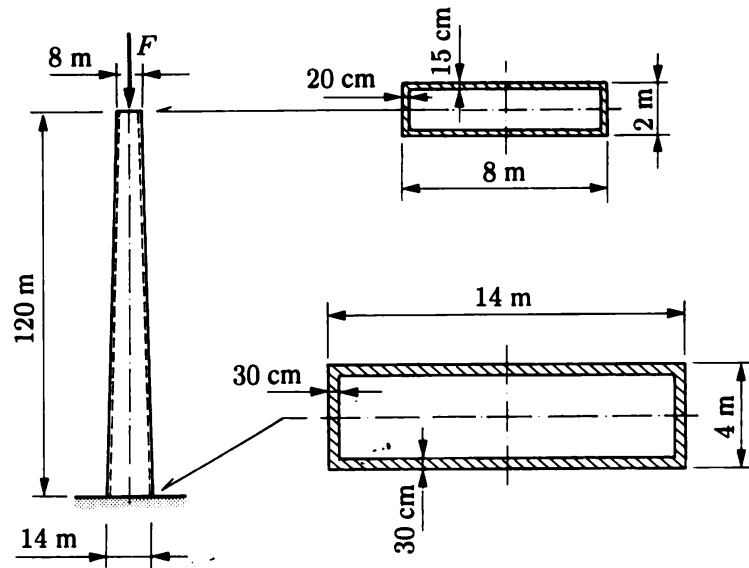


Fig. Ex. 4.10.10

4.10.11 Une colonne est formée d'un profilé en acier HEB 200 enrobé de béton; en négligeant le poids propre et le problème d'instabilité, déterminer la valeur de la charge admissible de compression F_{adm}^- que cette colonne peut supporter, sachant que $\sigma_{a adm} = 16 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{b adm} = 1 \text{ kN/cm}^2$ et $E_a/E_b = 10$. Indication : déterminer au préalable lequel des deux matériaux est déterminant pour le dimensionnement.

4.10.12 Un prisme de béton, de longueur L et de section carrée $A_b = 400 \text{ cm}^2$, est précontraint par un tirant d'acier, de section $A_a = 4 \text{ cm}^2$, disposé suivant son axe et prenant appui sur les deux faces terminales du prisme par des plateaux métalliques rigides couvrant la totalité de ces faces. L'effort de précontrainte vaut $P = 400 \text{ kN}$. Acier (a) et béton (b) ont les propriétés suivantes : $\sigma_{ea} = 150 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{cb} = 6 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{tb} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$, $E_a/E_b = 6$. Déterminer

- 1) les contraintes de traction dans l'acier et de compression dans le béton sous l'effet de la précontrainte ;
- 2) les valeurs que prennent les contraintes et les efforts normaux dans l'acier et dans le béton quand on applique au prisme une force extérieure de traction $F_{ext} = 400 \text{ kN}$;
- 3) la valeur de la force extérieure F pour laquelle la contrainte dans le béton s'annule ;
- 4) la valeur F_t de la force extérieure F pour laquelle le béton se rompt par traction, et l'effort de traction correspondant dans le tirant.

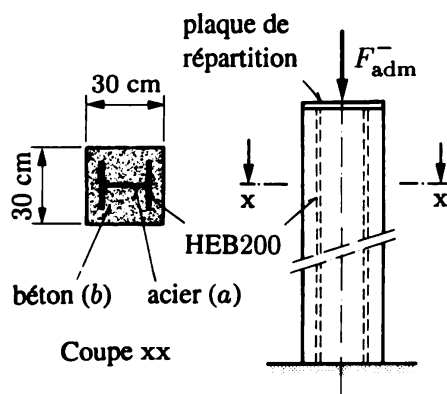


Fig. Ex. 4.10.11

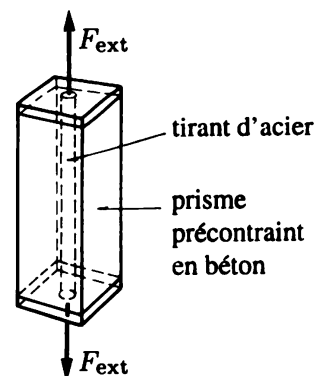


Fig. Ex. 4.10.12

4.10.13 Un tube en laiton (ℓ) est précontraint à l'aide d'un boulon en acier (a), via le serrage de l'écrou. Le boulon est ensuite soumis à traction par une force F . On donne $A_a = 8 \text{ cm}^2$ et $A_\ell = 16 \text{ cm}^2$.

- 1) Calculer les contraintes dans le laiton et dans l'acier pour un tour d'écrou (pas de 1 mm).
- 2) Calculer et dessiner ensuite le diagramme reliant la contrainte dans le laiton et dans l'acier à la charge F appliquée après serrage.

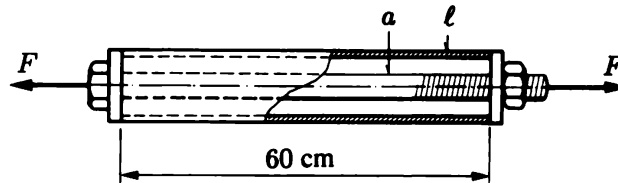


Fig. Ex. 4.10.13

4.10.14 Une barre d'acier (a), de longueur $L = 1 \text{ m}$ et de section $A_a = 800 \text{ mm}^2$, est placée à l'intérieur d'un tube de cuivre (c), de même longueur et de section $A_c = 1\,000 \text{ mm}^2$. Les extrémités de la barre et du tube sont solidaires. Sous l'action d'une élévation de température $T = 80^\circ \text{C}$, calculer

- 1) les efforts dans les deux matériaux ;
- 2) l'allongement de la pièce composée.

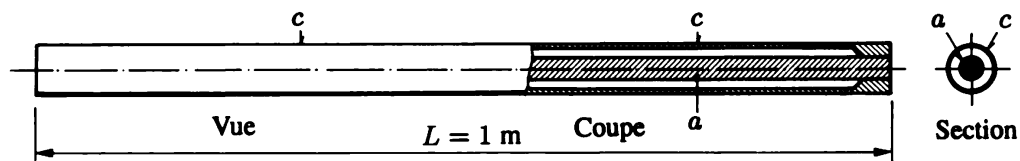


Fig. Ex. 4.10.14

4.10.15 Une chaudière cylindrique en acier, formée d'une tôle d'épaisseur $t = 8 \text{ mm}$ enroulée en spirale et soudée, est soumise à une pression intérieure $p = 1 \text{ N/mm}^2$. Déterminer

- 1) les contraintes circonférentielle σ_{cir} et longitudinale σ_{lon} ;
- 2) les dilatations circonférentielle ε_{cir} et longitudinale ε_{lon} ;
- 3) les accroissements u_{rad} et u_{lon} du rayon r et de la longueur L de la chaudière ;
- 4) l'accroissement de volume relatif $\Delta V/V$ de la partie cylindrique de la chaudière (littéral, puis numérique) ;
- 5) l'état de contrainte dans la zone soudée (selon des axes parallèle et perpendiculaire au cordon de soudure).

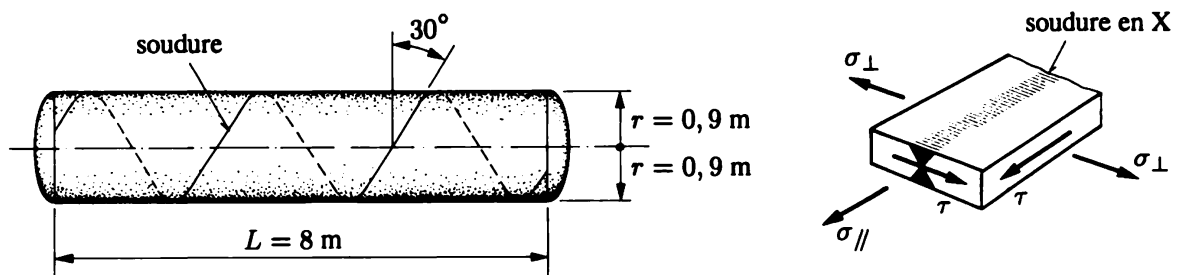


Fig. Ex. 4.10.15

4.10.16 On frette une roue de wagon pleine, de 80 cm de diamètre, avec un bandage en acier de 4 cm d'épaisseur. Si la contrainte dans le bandage est de 10 kN/cm^2 et si on considère que la roue est rigide (indéformable), trouver

- 1) la différence initiale des diamètres du bandage et de la roue ;
- 2) la pression de contact entre le bandage et la roue ;
- 3) l'élévation de température qu'il faut faire subir au bandage pour pouvoir le glisser exactement sur la roue.

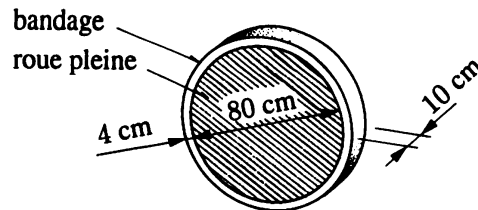


Fig. Ex. 4.10.16

4.10.17 Déterminer la vitesse de rotation périphérique à laquelle un anneau de cuivre, tournant sur lui-même, éclatera.

4.10.18 Sur un tambour, par couches successives, on enroule un câble d'acier avec une prétension $P = 1 \text{ kN}$. Le tambour est un cylindre de 1 m de diamètre moyen et 7 mm d'épaisseur, en alliage d'aluminium pour lequel $E = 7200 \text{ kN/cm}^2$. Le câble a un diamètre de 6 mm, une section de 20 mm^2 et un module de Young de 18000 kN/cm^2 . Calculer les contraintes normales dans l'aluminium et dans l'acier après enroulement

- 1) de la première couche (fig. ex. 4.10.18a);
- 2) de la deuxième couche (fig. ex. 4.10.18b);
- 2) de la troisième couche (fig. ex. 4.10.18c).

Note : dans les calculs, on peut conserver le diamètre moyen du cylindre constant.

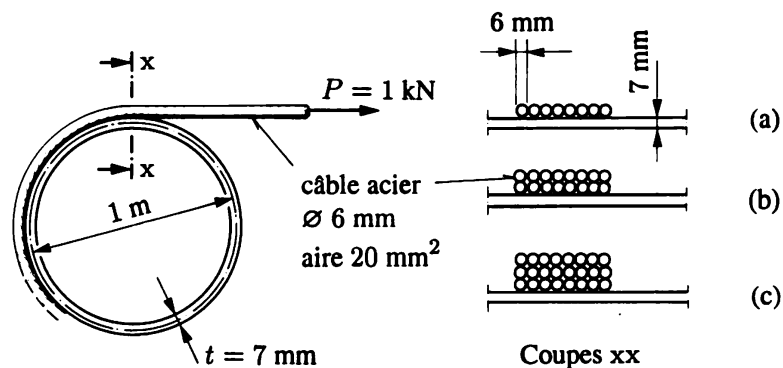


Fig. Ex. 4.10.18

4.11 Lexique

Allongement ou raccourcissement (u)	Variation de longueur ($u = NL/EA$).
Déplacement axial	$u(x)$ (intégrer $du/dx = N/EA$).
Egale résistance (en traction ou compression)	Réaliser $\sigma = \text{cste}$ en tout point.
Pièce composée	Pièce formée de deux ou plusieurs matériaux.
Coefficient d'équivalence (n)	Rapport $n = E_a/E_b$ dans les pièces composées de deux matériaux.
Aire équivalente	Dans une pièce composée, aire fictive formée d'un seul matériau et permettant le calcul comme une pièce homogène.
Etat d'autocontrainte	Etat de contrainte (ou d'efforts intérieurs) autoéquilibré, c'est-à-dire en équilibre sur lui-même, sans action extérieure.

Précontrainte	Opération destinée à introduire, dans une pièce ou une construction, des efforts internes initiaux, dans le but, en général, de s'opposer aux efforts internes dus aux actions extérieures.
Béton précontraint	Béton précomprimé pour s'opposer aux contraintes de traction dues aux actions extérieures (précontrainte par fils adhérents, par câbles).
Pertes de précontrainte	Diminution de la force de précontrainte due aux variations lentes dans le temps de certaines caractéristiques mécaniques des matériaux (surtout le béton).
Anneau	Poutre d'axe circulaire fermé.
Symétrie de révolution	Symétrie par rotation autour d'un axe.
Formule des tubes et chaudières	$\sigma = pr/t$.
Coefficient de dilatation thermique linéaire	α (1/°C).
Dilatation thermique	$\varepsilon_{th} = \alpha T$.
Contraintes thermiques	Contraintes produites par l'action de la température.

5. Flexion plane

5.1 Flexion pure et flexion simple

Une poutre, ou une partie d'une poutre, est dite sollicitée à la **flexion pure** quand elle est soumise à la seule action d'un moment fléchissant *constant*. La poutre AB (fig. 5.1a) et la portion centrale CD de la poutre EF (fig. 5.1b) sont sollicitées de cette manière ($M = \text{cste}$).

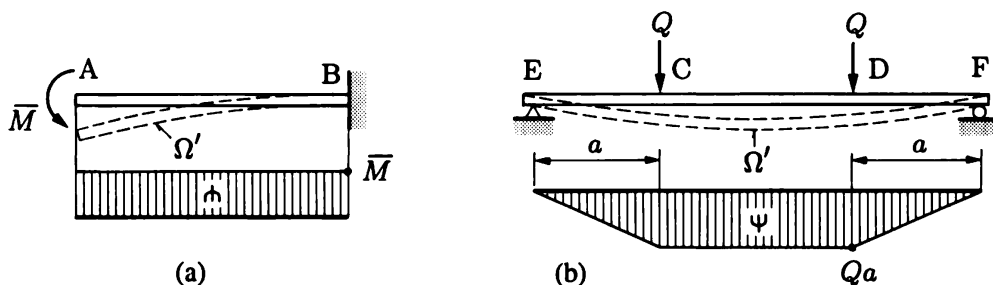


Fig. 5.1 Flexion pure (M constant) et flexion simple (M variable).

En pratique, ce mode de sollicitation est plutôt rare. *Mais son intérêt provient des résultats qu'on peut en déduire* : ils sont applicables en **flexion simple**, c'est-à-dire à tous les cas courants où le moment fléchissant est *variable* et par conséquent accompagné d'effort tranchant, puisqu'on a (vol. 1, § 9.2.1)

$$V = -\frac{dM}{dx}$$

L'effort tranchant provient de, ou *exprime*, la variation du moment. Par exemple, dans les portions EC et DF de la poutre EF (fig. 5.1b), le moment (linéairement variable) est accompagné d'un effort tranchant (constant : $V = \pm Q$). Toutefois ce dernier n'a ordinairement que fort peu d'influence sur les effets du moment de flexion (sect. 5.7).

La sollicitation par flexion est, par contre, très importante. Tout d'abord, les *poutres fléchies* sont les plus utilisées dans la construction ; leur fonction première est de transmettre vers les appuis,

transversalement à leur axe, toutes les actions, – en particulier celles qui agissent normalement à cet axe (fig. 5.2), – par opposition aux barres et câbles qui transmettent les actions *selon leur axe* (fig. 5.3). Ensuite, on verra que le moment de flexion produit des *contraintes normales* σ sur les facettes des fibres de la poutre ; ces contraintes déterminent la résistance de la poutre et sont ordinairement beaucoup plus importantes que les contraintes tangentielles τ produites par l'effort tranchant. Enfin, en courbant les poutres, le moment de flexion provoque l'essentiel de la *déformée* et, plus généralement, l'essentiel du déplacement des points des structures en poutres.

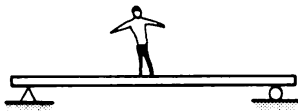


Fig. 5.2 Transmission par flexion (poutre).

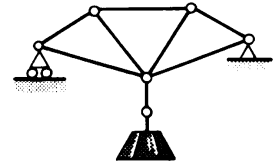


Fig. 5.3 Transmission par efforts normaux (câbles et treillis).

Pour établir les formules utiles, on travaille avec la convention rigoureuse des signes (vol. 1, § 8.5.1) ; ainsi, dans le cas plan, sur la face positive d'une coupe, le moment positif tourne dans le sens trigonométrique (fig. 5.4). Mais on constate rapidement, une fois les formules établies, que *cette convention est avantageusement abandonnée au profit d'une compréhension physique du phénomène*, basée sur la convention de l'ingénieur (vol. 1, sect. 9.3) ; en fait, il suffit de distinguer la fibre tendue de celle comprimée, ou, ce qui revient au même, trouver le sens de la courbure (ψ ou ρ).

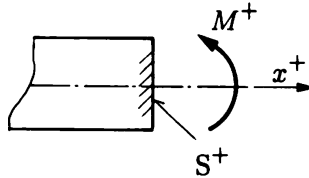


Fig. 5.4 Convention de signe.

5.2 Flexion pure plane

5.2.1 Cinématique

Condition cinématique

Considérons une poutre rectiligne à plan moyen et section constante (fig. 5.5). Appliquons à ses extrémités deux moments fléchissants égaux et opposés M , d'axe z perpendiculaire au plan moyen de symétrie (x, y) . Le moment de flexion est constant le long de la poutre. La déformation est donc la même en chaque tronçon dx . Par suite, l'axe de la poutre se transforme en une courbe à courbure constante, c'est-à-dire un *arc de cercle*, de centre O ; par symétrie, ce cercle est situé dans le plan moyen (x, y) , d'où les dénominations de *plan de flexion* et *flexion plane*.

Les fibres longitudinales s'incurvent toutes suivant des arcs de cercle parallèles ; mais elles ne peuvent être toutes tendues (ou comprimées) puisqu'il n'y a pas d'effort normal de traction (ou

compression). Aussi, dans la partie convexe les fibres s'allongent-elles, et dans la partie concave se raccourcissent-elles. Entre deux, certaines fibres conservent leur longueur initiale ; ce sont les **fibres neutres**, pour lesquelles on a $\varepsilon = 0$ et $\sigma = 0$.

Pour préciser davantage la répartition des déformations (et par suite des contraintes), il faut examiner de plus près la déformation des sections droites. Or les phénomènes sont ici quasi identiques à ceux de l'essai de traction (§ 2.4.3) : la section médiane S_a doit, par symétrie, rester plane et perpendiculaire à l'axe dans la configuration déformée. Il paraît logique qu'il en soit de même de toute autre section droite S_b ; expérience et théorie confirment cette hypothèse : c'est la *loi de conservation des sections planes de Bernoulli* (§ 2.4.3 et 2.7.6).

En conclusion, la *condition cinématique* permettant de résoudre le problème de flexion pure est la suivante : *dans la configuration déformée, les sections droites restent planes et perpendiculaires tant à l'axe incurvé qu'à toutes les fibres*. Le plan de ces sections passe par le centre de courbure O (fig. 5.5).

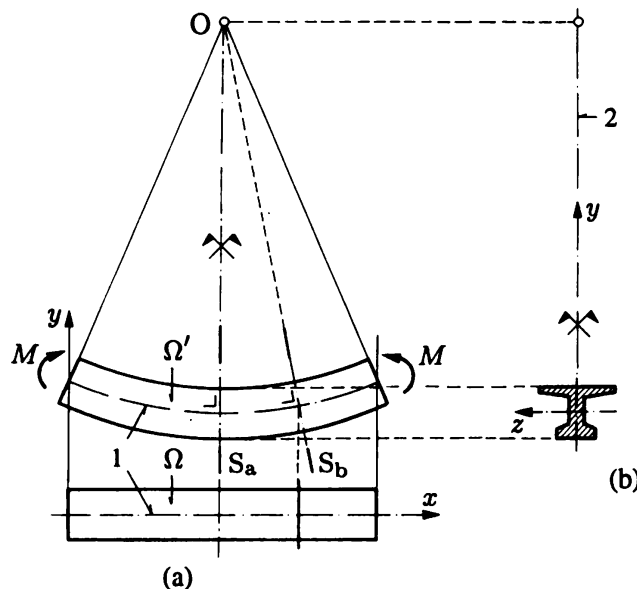


Fig. 5.5 Cinématique en flexion pure : (a) élévation (Ω : configuration initiale ; Ω' : configuration déformée ; l : axe de la poutre) ; (b) coupe (2 : plan moyen (x, y)).

Remarques

La loi de Bernoulli est *exacte* en flexion pure et représente une excellente approximation dans la plupart des cas de flexion simple. Elle est l'illustration des *conditions de compatibilité de Saint-Venant* (vol. 3, sect. 3.8).

J. Bernoulli (1654-1705) a employé l'hypothèse des sections planes dans divers écrits (1694, 1695, 1705), de manière incorrecte d'ailleurs, puisqu'il supposait que les sections tournaient autour de la fibre concave, admise de longueur invariable (fig. 2.15). L. Euler (1707-1783) a trouvé que la courbure était proportionnelle au moment (formule (5.6), mais l'inertie n'était pas définie). La théorie des poutres droites est finalement établie par L. Navier (1785-1836) en 1825 (formules (5.7) et (10.7)), et auparavant (1773) par Ch. Coulomb (1736-1806) pour la section rectangulaire (formule (5.13), avec $W = bh^2/6$). Galilée (1564-1642) fut le premier à traiter le problème de la flexion d'une console (1638), avec rotation des sections sur la fibre concave. R. Hooke (1635-1703) aurait dessiné correctement la déformée d'une poutre fléchie, les sections restant planes, normales aux fibres incurvées et tournant

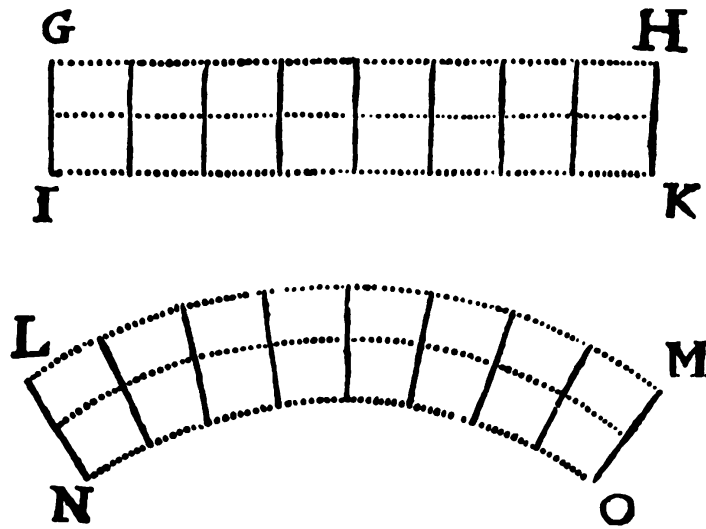


Fig. 5.6 La poutre fléchie de R. Hooke (*De Potentia Restitutiva*, 1678).

autour d'une fibre située à mi-hauteur (1678); la figure 5.6 montre cette esquisse remarquable, probablement inconnue de Bernoulli et Euler.

Expression des dilatations

Une tranche de poutre de longueur dx , isolée par deux coupes voisines AD et BC, prend en configuration déformée l'allure représentée à la figure 5.7(b). Appelons MN une fibre neutre de longueur dx invariable. Si sa position exacte dans la section est encore inconnue, du moins l'ensemble des fibres neutres est-il contenu dans un plan, dit **plan neutre**, normal au plan moyen et parallèle à l'axe de la poutre. L'intersection de ce plan avec la section droite s'appelle **axe neutre**. Dans la configuration déformée, ce plan devient un cylindre de rayon r (ce qui n'est pas tout à fait exact; § 5.2.3).

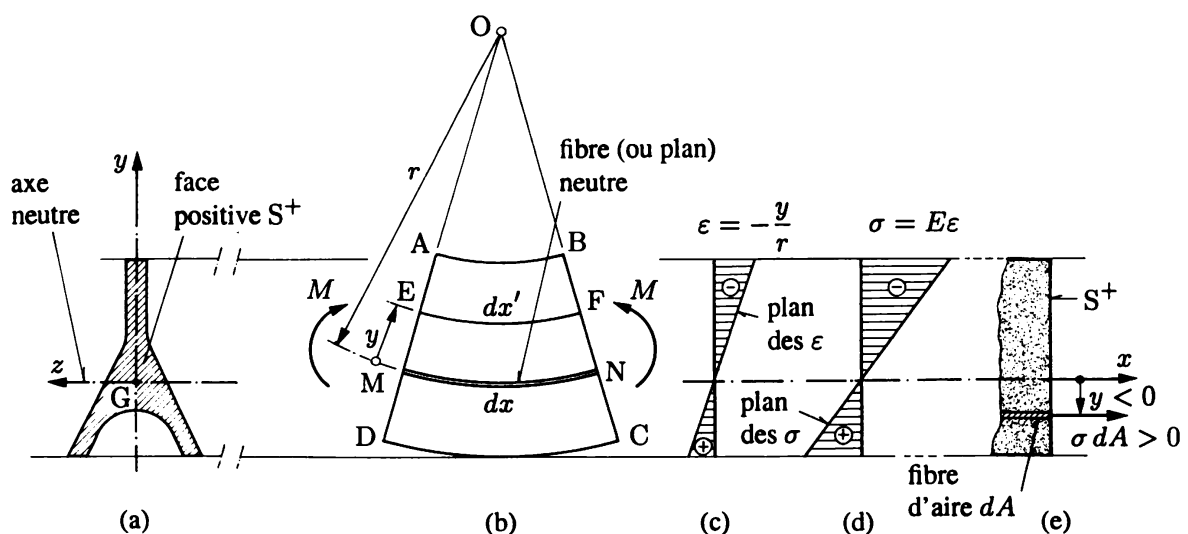


Fig. 5.7 Cinématique en flexion pure : (a) section droite et axe neutre ; (b) tronçon de poutre déformé ; (c) dilatations (en élévation) ; (d) contraintes (en élévation) ; (e) élévation.

Toute fibre EF, située à la distance y du plan neutre, de longueur initiale dx , prend une nouvelle longueur dx' telle que, par similitude des secteurs OEF et OMN,

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{r - y}{r} = 1 - \frac{y}{r} \quad (5.1)$$

La dilatation de la fibre, définie par (2.3), soit $\varepsilon = (dx' - dx)/dx = dx'/dx - 1$, vaut, avec (5.1),

$$\varepsilon = -\frac{y}{r} \quad (5.2)$$

Le signe moins provient de ce que la fibre située à la cote y^+ est en fait raccourcie, comme le montre clairement la figure 5.7(b). La répartition des dilatations est donc *linéaire sur la hauteur de toute section droite*, toutes les fibres situées à la même cote y ayant la même dilatation (fig. 5.7c). Cette propriété est d'ailleurs a priori évidente, puisque les sections doivent rester planes et tourner les unes par rapport aux autres, vu la condition cinématique. Cette dernière est de plus indépendante du matériau et, comme (5.2) qui la traduit, *reste valable quelle que soit la loi constitutive*. Elle s'applique donc aux matériaux anisotropes (bois à fibres parallèles à l'axe), hétérogènes (béton armé d'armatures longitudinales), inélastiques (fonte, béton... ; plasticité...), etc.

5.2.2 Contraintes

Si le matériau est homogène et suit la loi de Hooke (2.4), on trouve le diagramme des contraintes, également linéaire et proportionnel à la distance à l'axe neutre (fig. 5.7d),

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ey}{r} \quad (5.3)$$

En fait, comme pour les dilatations ε , ces contraintes sont réparties sur la section selon un *plan*, qui, dans l'élévation de la figure 5.7(d), est vu par la tranche.

Reste à déterminer la position du plan neutre et son rayon de courbure r . On utilise les deux équations (1.1) et (1.6) du principe d'équivalence, liant les contraintes aux efforts intérieurs. Pour une fibre d'aire dA , la force élémentaire transmise vaut σdA (fig. 5.7e) ; alors

- la somme de ces forces est nulle puisqu'il n'y a pas d'effort normal

$$N = \int_A \sigma dA = -\frac{E}{r} \int_A y dA = -\frac{E}{r} S_z = 0 \quad (5.4)$$

où $\int_A y dA$ est le moment statique S_z de l'aire A de la section droite par rapport à l'axe neutre z (fig. 5.7a) ; or (5.4) impose $S_z = 0$; par suite *l'axe neutre passe par le centre géométrique G de la section droite* (vol. 1, § 13.3.1) et le plan neutre contient l'axe de la poutre ;

- la somme des moments de ces forces doit restituer le moment appliqué M

$$M = - \int_A \sigma y dA = \frac{E}{r} \int_A y^2 dA = \frac{E}{r} I_z \quad (5.5)$$

où $\int_A y^2 dA$ est le moment d'inertie I_z de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre z ; de (5.5) on tire la *courbure* $1/r$ de l'axe de la poutre, soit, en notant simplement l'inertie par I ,

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (5.6)$$

Introduisons (5.6) dans (5.3) pour avoir les contraintes directement en fonction du moment; on obtient la **formule de Navier**

$$\sigma = -\frac{M}{I} y \quad (5.7)$$

Cette égalité permet de trouver la contrainte normale en tout point d'une section droite. On voit que cette contrainte, distribuée sur la section selon un plan contenant l'axe neutre (comme ε), est d'autant plus grande que les *fibres sont plus éloignées de l'axe neutre*. Elle est donc maximale – une fois en traction, une fois en compression – aux fibres extrêmes où elle vaut (fibre supérieure : indice sup, $y_{\text{sup}} > 0$; fibre inférieure : indice inf, $y_{\text{inf}} < 0$; fig. 5.8)

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{M}{I} y_{\text{sup}} \quad \sigma_{\text{inf}} = -\frac{M}{I} y_{\text{inf}} \quad (5.8)$$

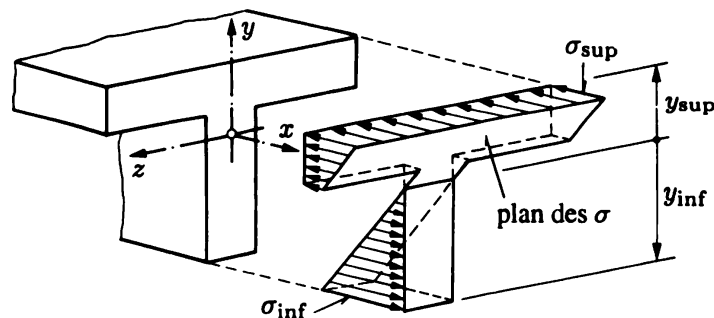


Fig. 5.8 Diagramme des contraintes normales en flexion (section en T).

5.2.3 Déformation transversale

Ainsi, sous un moment positif, les fibres supérieures ($y > 0$) sont comprimées et les fibres inférieures ($y < 0$) tendues. Par suite, à cause du coefficient de Poisson ν (sect. 2.6), la zone comprimée d'une poutre tend à se dilater latéralement et la zone tendue à se contracter. Une section droite initialement rectangulaire se déforme en une section d'allure trapézoïdale, à arêtes supérieure et inférieure arrondies (fig. 5.9). On s'en persuadera en fléchissant une gomme !

L'axe neutre ne reste donc pas exactement une droite dans la configuration déformée (mais un cercle de rayon r/ν , fig. 5.9), ni le plan neutre un cylindre. Ces déformations sont très faibles et se produisent librement. Elles n'affectent donc en rien la valeur des résultats précédents et sont en parfait accord avec la théorie exacte.

Par contre, elles jouent un rôle important dans la flexion des plaques, car elles sont partiellement empêchées du fait de la grande largeur de la plaque.

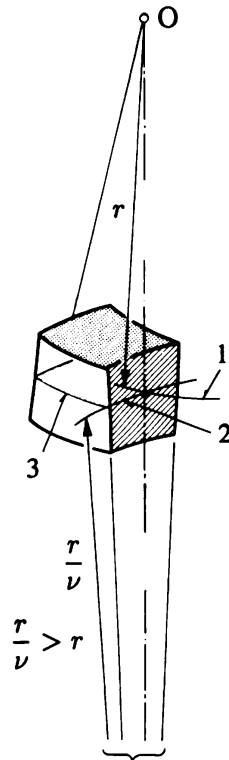


Fig. 5.9 Déformation de la section droite due au coefficient de Poisson
(1 : axe de la poutre ; 2 : axe neutre ; 3 : surface neutre).

5.3 Poutres à section non symétrique

La théorie précédente a été établie en supposant que la poutre avait un plan longitudinal de symétrie dans lequel agissait la flèche tournante $M^{(1)}$. Cette symétrie permet d'affirmer que le moment des forces internes autour de l'axe y s'annule (fig. 5.7), parce que le moment des forces situées d'un côté de cet axe contrebalance exactement celui des forces situées de l'autre côté. Dans le cas où une telle symétrie est absente, ce moment vaut (principe d'équivalence, (1.5))

$$M_y = \int_A \sigma z dA = -\frac{E}{r} \int_A yz dA = -\frac{E}{r} I_{yz} \quad (5.9)$$

Il ne s'annule que si le produit d'inertie I_{yz} s'annule, c'est-à-dire si les axes y et z sont les axes principaux d'inertie de la section droite (vol. 1, § 13.6.2).

La théorie de la flexion développée ci-avant reste donc valable, pour une section droite quelconque, tant que le vecteur moment est porté par l'un des axes principaux d'inertie (a-a par exemple, fig. 5.10), qui est l'axe neutre. La poutre fléchit dans le plan *normal* à cet axe, contenant l'autre axe principal.

⁽¹⁾ La *flèche tournante* agit dans le plan de flexion, le *vecteur moment* normalement à ce plan.

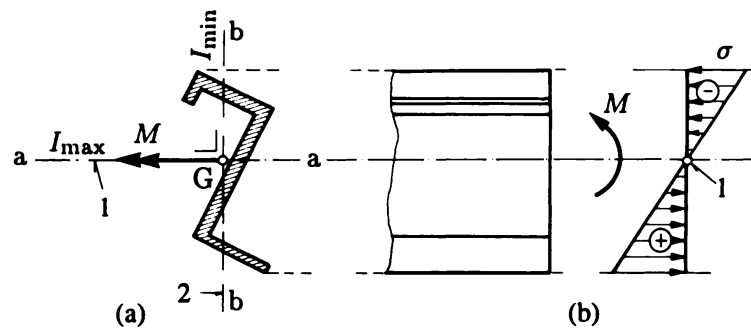


Fig. 5.10 Flexion plane d'une poutre à section asymétrique :
(a) coupe (1 : axe neutre ; 2 : plan de flexion) ; (b) élévation et contraintes (1 : axe neutre).

La flexion est dite *plane*, parce que le *plan de flexion* dans lequel la poutre s'incurve coïncide avec le *plan de sollicitation*, dans lequel agit la flèche tournante (par opposition à la flexion oblique, chap. 6).

Remarques

La loi de Bernoulli garantit à nouveau que les contraintes tangentielles sont nulles (glissements nuls ; § 2.4.4, remarques), en sorte que, finalement, les six équations du principe d'équivalence sont satisfaites.

On démontre enfin que les résultats rigoureux obtenus pour les poutres prismatiques peuvent s'utiliser avec une bonne approximation pour les poutres à section lentement variable, ainsi que pour les poutres courbes (§ 2.7.7 et sect. 9.11).

5.4 Signe, module de flexion et sécurité

5.4.1 Signe

On remarque, dans la formule (5.7), la présence insolite du signe *moins*. Cette anomalie provient de ce que les sens positifs du moment fléchissant et de la contrainte normale ont été choisis indépendamment l'un de l'autre ; or ces deux grandeurs ne sont pas indépendantes (principe d'équivalence, sect. 1.3). Un effort intérieur n'étant jamais que la *résultante*, sur une section, d'un diagramme de contraintes, il serait logique de faire dépendre le sens positif de l'effort de cette distribution⁽²⁾.

Cette démarche rigoureuse n'est pas nécessaire à l'usage courant de la mécanique des structures : c'est par le sens physique du phénomène que l'on décide, à partir des efforts intérieurs provenant de la statique, du signe des contraintes, ou, encore mieux, de leur sens, en s'appuyant, s'il le faut, sur un dessin.

Le plus simple est encore d'écrire (5.7) sous la forme

$$\sigma = \pm \frac{M}{I} y \quad (5.10)$$

⁽²⁾ A l'aide du principe d'équivalence (ici $M_z = \int_A \sigma y dA$), on exprime qu'un moment positif provoque des contraintes positives dans la zone positive (ici y^+) de la face positive (S^+) de la section droite.

d'autant plus que, dans la convention d'ingénieur relative aux signes des efforts intérieurs (vol. 1, sect. 9.3), le moment n'a plus de signe. On pourrait aussi se permettre d'écrire (2.9) de manière semblable

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \quad (5.11)$$

car souvent on se contente de calculer la valeur absolue de N , même si c'est une compression.

On fera un large usage de cette liberté d'écriture dans la suite. Son but est essentiellement de rappeler que le sens des contraintes est plus facilement déterminé par la perception concrète que par une convention mathématique, en mécanique des structures.

5.4.2 Module de flexion

Dans les formules (5.8), I , y_{sup} et y_{inf} sont des caractéristiques géométriques de la seule section droite. On appelle **modules de flexion** ou, curieusement⁽³⁾, moments de résistance, les grandeurs (en m^3 par exemple)

$$W_{\text{sup}} = \left| \frac{I}{y_{\text{sup}}} \right| \quad W_{\text{inf}} = \left| \frac{I}{y_{\text{inf}}} \right| \quad (5.12)$$

qui, abstraction faite des signes, permettent d'écrire (5.8) sous les formes (par simplicité, on omet les indices sup et inf)

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad M = \sigma W \quad W = \frac{M}{\sigma} \quad (5.13)$$

selon celle des grandeurs que l'on désire trouver, en fonction des deux autres supposées connues.

C'est surtout pour les sections droites symétriques par rapport à l'axe neutre que le module de flexion présente de l'intérêt, puisqu'il est le même pour la fibre supérieure et celle inférieure. Pour les laminés en acier et les bois équarris, il est donné sous forme de tableaux⁽⁴⁾.

Remarque

Les moments d'inertie I sont additifs, mais les modules de flexion W ne le sont pas, à cause de la division par y .

5.4.3 Sécurité

La vérification de la *résistance* se fait comme pour les pièces en traction-compression (sect. 4.9). Selon la méthode des contraintes admissibles, on vérifie (valeurs absolues, écriture condensée)

$$\sigma_{\text{sup/inf}} = \frac{M}{I} y_{\text{sup/inf}} = \frac{M}{W_{\text{sup/inf}}} \leq \sigma_{\text{adm}}^{+/-} \quad (5.14)$$

Par la méthode semi-probabiliste, on évalue la contrainte de flexion de calcul (pondérée), qui ne peut dépasser la résistance de calcul

$$\sigma_{d\text{sup/inf}} \leq \sigma_{\text{dim}}^{+/-} \quad (5.15)$$

⁽³⁾ Influence germanique.

⁽⁴⁾ Par exemple, volume 1, annexes ; on prendra garde au fait que certains tableaux ne donnent, pour les profilés *non symétriques*, qu'un seul W (W minimal), alors qu'on doit souvent calculer les contraintes aux fibres extrêmes aussi bien supérieures qu'inférieures.

Rappelons que ces conditions de résistance interne de la matière ne couvrent qu'un faible aspect de la sécurité (§ 3.4.2). La flexion produit aussi des *déplacements* de la poutre (translations et rotations ; chap. 10), qui sont parfois plus limitatifs que la résistance. La zone comprimée de la poutre peut devenir instable pour de faibles contraintes, ce qui conduit au dérobement latéral de toute la poutre, un phénomène d'instabilité appelé *déversement*. (On le met aisément en évidence en essayant de fléchir une latte souple autour de son axe d'inertie maximale.)

5.5 Forme rationnelle des sections droites des poutres fléchies

Considérons une poutre faite d'un matériau dont la résistance est caractérisée par la contrainte σ_{\max} (σ_{adm} , σ_e , etc.) ; quelle *forme* convient-il de donner à la section droite afin d'obtenir une bonne résistance vis-à-vis de la flexion ?

Le moment fléchissant que peut transmettre cette section vaut

$$M = \sigma_{\max} W = \sigma_{\max} \frac{I}{y_{\max}} \quad (5.16)$$

Il est d'autant plus grand que le module de flexion $W = I/y_{\max}$ est grand. Or

$$\frac{I}{y_{\max}} = \frac{\int_A y^2 dA}{y_{\max}} \quad (5.17)$$

donc le moment est d'autant plus grand que y est grand, ou encore que l'inertie I est grande, bref *plus la matière est éloignée de l'axe neutre*.

Par conséquent, une planche, ou une poutre de section rectangulaire, résiste beaucoup mieux à la flexion si elle est placée *en hauteur* ou *sur la tranche* (fig. 5.11a), plutôt que *en largeur* ou *à plat* (fig. 5.11b).

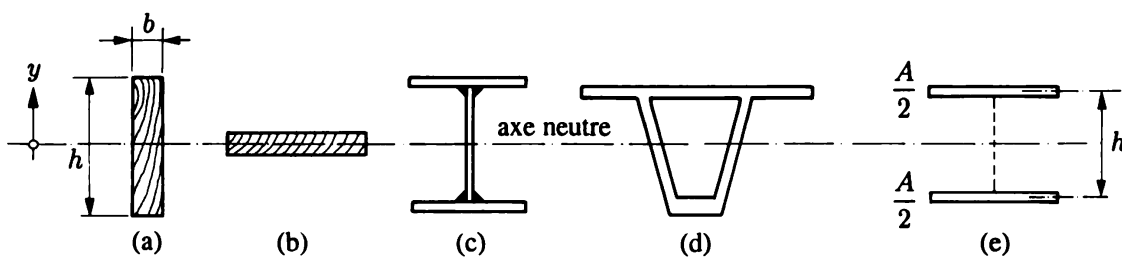


Fig. 5.11 Forme rationnelle des sections droites des poutres fléchies : (a) rectangle sur sa tranche ($\Rightarrow I_{\max}$ et M_{\max}) ; (b) rectangle à plat ($\Rightarrow I_{\min}$ et M_{\min}) ; (c) section en I composée soudée ; (d) section en caisson ; (e) sandwich, ou limite d'une section en I dite à âme évanescente.

D'ailleurs, si, aux fibres extrêmes, on a $|\sigma| = \sigma_{\max}$, il en résulte qu'aux autres fibres, on a $|\sigma| < \sigma_{\max}$, c'est-à-dire que le matériau n'est pas bien utilisé. De plus, les forces élémentaires σdA des fibres voisines de l'axe neutre ont un tout petit bras de levier y et ne contribuent donc que peu à la reprise du moment. *Il convient donc bien de diminuer la matière aux environs de l'axe neutre pour la concentrer en deux semelles éloignées de cet axe, unies seulement entre elles par une ou plusieurs*

âmes minces. On aboutit ainsi aux poutres dont la section droite, dite *section âme(s)-semelles*, a la forme d'un I (ou H) ou d'un caisson (fig. 5.11c et 5.11d) et possède une grande inertie pour un minimum de matière (vol. 1, § 13.6.3).

Pour donner une idée de l'avantage qu'on retire de l'emploi de ces sections, observons que, pour un rectangle (fig. 5.11a),

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = 0,167 Ah \quad (5.18)$$

tandis que, pour un profilé laminé courant, on a environ

$$W \cong 0,32 Ah \quad (5.19)$$

Par conséquent, à égalité d'aire et de hauteur, le profilé peut supporter un moment de flexion double. A la limite, si toute la matière pouvait être concentrée dans les semelles (fig. 5.11e), on aurait (en négligeant l'inertie propre des semelles devant le terme de translation)

$$I = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4} \quad W = \frac{Ah}{2} = 0,5 Ah \quad (5.20)$$

et le sandwich peut résister à un moment fléchissant triple de celui applicable à la section rectangulaire.

Ces calculs montrent qu'il faut

- essayer de réduire au maximum l'épaisseur de l'âme,
- donner à la section une hauteur aussi grande que possible (puisque, à A constant, W croît avec h).

Cependant, on ne peut exagérer dans ce sens. En réduisant la rigidité transversale de la poutre, on expose celle-ci à périr brusquement par déversement. Une âme devenant très haute et très mince est aussi exposée à un danger d'instabilité appelé *voilement*, résultant en bosses et plis par déplacement de l'âme perpendiculairement à son plan (comme une feuille de papier que l'on soumet à compression ou effort tranchant dans son plan). De plus, une âme trop mince en acier est vulnérable à la corrosion et difficile à manipuler en atelier ; une âme trop mince en béton ne laisse plus passer les câbles de précontrainte et ne permet pas de couler convenablement le béton ; etc. (exigences techniques).

Remarque

Dans les pièces soumises à l'effort normal, l'égle résistance signifie que la contrainte normale est constante en tout point (sect. 4.2, remarques). Dans les poutres fléchies, l'*égale résistance* signifie seulement que la contrainte σ_{\max} , qui se produit aux points les plus éloignés de l'axe neutre, est constante dans chaque section. Cette condition conduit, sauf rare exception, à des formes de poutre trop compliquées. En pratique, on fait varier les dimensions de la section droite en cherchant un compromis entre la simplicité (prix), l'esthétique ... et une certaine égale résistance⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ Voir les volumes traitant les problèmes de construction (en béton, bois et acier).

5.6 Poutres composées de matériaux différents

On utilise souvent des poutres fléchies *composées* (sect. 4.3, remarque). Le béton armé en est l'exemple le plus caractéristique. La figure 5.12(a) présente un autre cas fréquent de ce genre, utilisé en pont et charpente : une poutre en acier surmontée d'une pièce de béton (jouant tant le rôle de semelle que de tablier ou plancher). Ces deux constituants sont liés rigidement l'un à l'autre par des dispositifs adéquats⁽⁶⁾, de manière à former un ensemble *monolithique*.

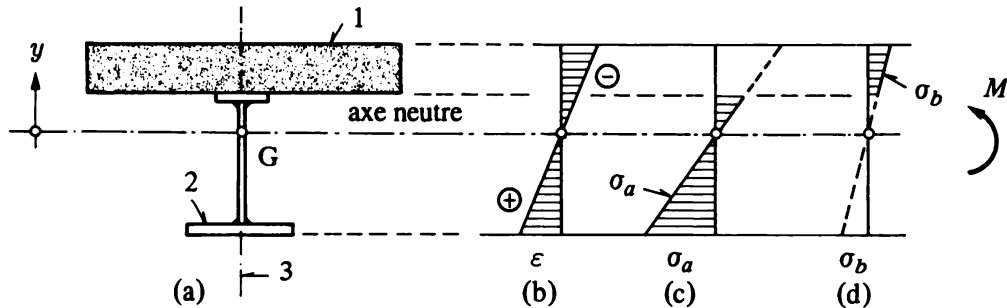


Fig. 5.12 Flexion plane d'une poutre faite de deux matériaux (plan de flexion vertical) : (a) section droite (1 : dalle de béton ; 2 : profilé en acier ; 3 : plan de flexion) ; (b) plan des dilatations (élévation) ; (c) plans des contraintes dans l'acier (élévation) ; (d) plan des contraintes dans le béton (élévation).

On ne peut calculer directement de telles poutres fléchies par les relations précédentes, puisque la section comporte plusieurs matériaux. Mais la cinématique reste valable et les dilatations ε sont distribuées selon un plan, qui coupe la section suivant l'axe neutre (fig. 5.12b). Si chacun des matériaux suit la loi de Hooke (modules d'élasticité E_a et E_b), les diagrammes des contraintes sont également linéaires sur la section (fig. 5.12c et 5.12d). En effet, on a

$$\varepsilon = -\frac{y}{r} \quad \sigma_a = E_a \varepsilon \quad \sigma_b = E_b \varepsilon \quad (5.21)$$

Sur une parallèle à l'axe neutre, les contraintes sont différentes d'un matériau à l'autre, puisque $E_a \neq E_b$. Ici par exemple (fig. 5.12), $E_{\text{béton}} < E_{\text{acier}}$ ⁽⁷⁾, d'où $\sigma_b < \sigma_a$, et on observe (comme à la figure 4.3b) la discontinuité des contraintes à la jonction des deux matériaux.

Ce raisonnement qualitatif ne livre cependant ni la position de l'axe neutre, ni la courbure $1/r$, ni la valeur des contraintes. Pour les trouver, on procède comme au paragraphe 5.2.2. On appelle A_a l'aire de la section d'acier et A_b celle du béton.

La condition d'effort normal nul s'écrit, avec (5.21),

$$N = \int_{A_a} \sigma_a dA + \int_{A_b} \sigma_b dA = -\frac{E_a}{r} \int_{A_a} y dA - \frac{E_b}{r} \int_{A_b} y dA = -\frac{1}{r} (E_a S_a + E_b S_b) = 0$$

S_a est le moment statique, par rapport à l'axe neutre, de l'aire A_a d'acier et S_b celui de l'aire A_b de béton ; la position de l'axe neutre est fournie par l'équation

$$E_a S_a + E_b S_b = 0 \quad (5.22)$$

⁽⁶⁾ On en examine la nécessité et le calcul au chapitre 11.

⁽⁷⁾ Ces développements sont évidemment valables quels que soient les matériaux a et b .

Le moment de flexion s'exprime par

$$M = - \int_{A_a} \sigma_a y dA - \int_{A_b} \sigma_b y dA = \frac{E_a}{r} \int_{A_a} y^2 dA + \frac{E_b}{r} \int_{A_b} y^2 dA = \frac{1}{r} (E_a I_a + E_b I_b)$$

I_a et I_b sont les inerties des aires d'acier et de béton par rapport à l'axe neutre. La courbure vaut

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_a I_a + E_b I_b} \quad (5.23)$$

Ces formules ont une structure semblable à celles de la section 4.3 et se généralisent aisément s'il y a plus de deux matériaux. On peut, comme à la section 4.4, les transformer en tirant parti du coefficient d'équivalence (4.14) $n = E_a/E_b$; il suffit d'écrire

$$E_a S_a + E_b S_b = E_a \left(S_a + \frac{1}{n} S_b \right) = E_a \tilde{S}_a$$

$$E_a I_a + E_b I_b = E_a \left(I_a + \frac{1}{n} I_b \right) = E_a \tilde{I}_a$$

pour définir le *moment statique équivalent* \tilde{S}_a et le *moment d'inertie équivalent* \tilde{I}_a , rapportés à l'acier

$$\tilde{S}_a = S_a + \frac{1}{n} S_b \quad (5.24)$$

$$\tilde{I}_a = I_a + \frac{1}{n} I_b \quad (5.25)$$

Ils permettent d'exprimer l'axe neutre, la courbure et, via (5.21), les contraintes (qui restent liées par (4.15) $\sigma_b = \sigma_a/n$) sous la forme

$$\tilde{S}_a = 0 \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{E_a \tilde{I}_a} \quad (5.26)$$

$$\sigma_a = -\frac{M}{\tilde{I}_a} y \quad \sigma_b = -\frac{M}{n \tilde{I}_a} y \quad \left(= \frac{1}{n} \sigma_a \right) \quad (5.27)$$

Ces nouvelles relations ont une allure semblable à celles relatives aux poutres homogènes ; dans les calculs pratiques, il suffit d'affecter les contributions du béton du facteur $1/n$ (comme à la section 4.4).

5.7 Flexion simple

Tous les résultats précédents s'appliquent, pratiquement sans restriction, au cas de la flexion simple. Le moment fléchissant peut donc provenir de forces transversales concentrées ou réparties, et l'effort tranchant ne perturbe quasiment pas la répartition et l'intensité des contraintes normales σ (5.7). Les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant peuvent se calculer indépendamment (chap. 9). La courbure (5.6) est également très peu sensible à la présence de l'effort tranchant (chap. 10).

5.8 Exercices

5.8.1 Une poutre simple est soumise à une charge uniforme $q = 15 \text{ kN/m}$ (poids propre compris ; fig. ex. 5.8.1a).

Dimensionner cette poutre à la flexion si

- 1) elle est formée d'un profilé HEA en acier doux (fig. ex. 5.8.1b ; $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ N/mm}^2$) ;
- 2) elle est en bois lamellé collé de section rectangulaire (fig. ex. 5.8.1c ; $h = 2b$; $\sigma_{\text{adm}} = 1,2 \text{ kN/cm}^2$).

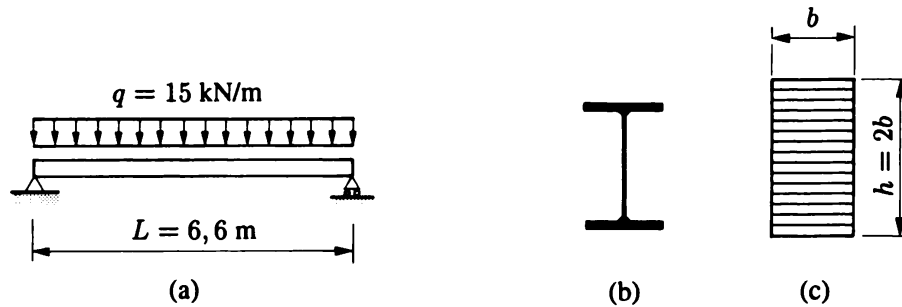


Fig. Ex. 5.8.1

5.8.2 Une console est soumise à une force concentrée Q à son extrémité libre (fig. ex. 5.8.2a). Elle est formée d'un bois équarri (10 cm \times 20 cm) ou d'un laminé en acier (IPE 200). Par un calcul à la flexion, déterminer la force admissible Q lorsque la section droite est disposée

- 1) en hauteur (fig. ex. 5.8.2b et 5.8.2c) ;
- 2) à plat (fig. ex. 5.8.2d et 5.8.2e).

On donne $\sigma_{b \text{ adm}} = 1 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_{a \text{ adm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$; on néglige le poids propre.

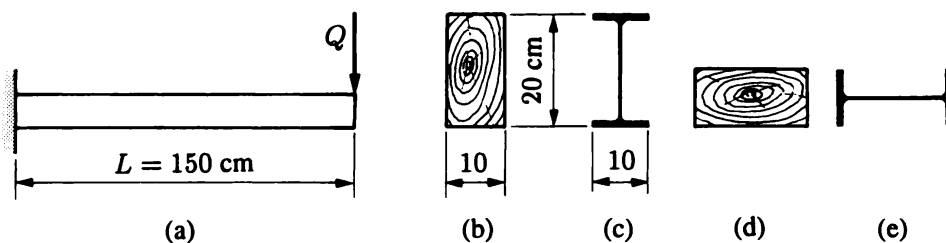


Fig. Ex. 5.8.2

5.8.3 Un auvent est constitué de deux poutres en acier (profilé IPE), de quatre pannes en bois (équarri de section carrée $a \times a$) et d'une tôle ondulée (fig. ex. 5.8.3). Il est soumis à une charge de neige de 1 kN/m^2 . Le poids propre est négligeable. Dimensionner à la flexion les pannes ($\sigma_{b \text{ adm}} = 1 \text{ kN/cm}^2$) et les poutres ($\sigma_{a \text{ adm}} = 16 \text{ kN/cm}^2$).

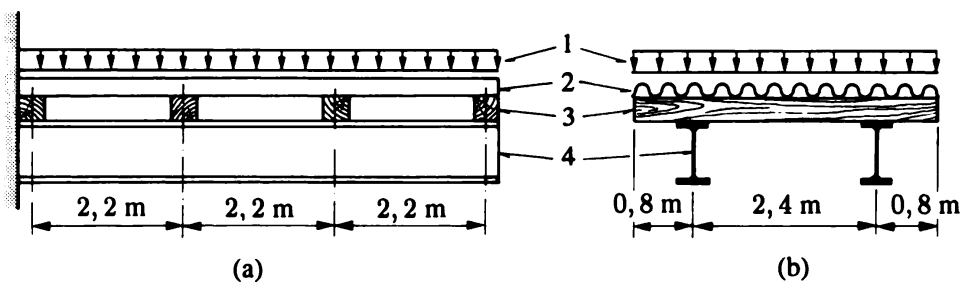


Fig. Ex. 5.8.3 Auvent : (a) élévation ; (b) vue de face (1 : charge de neige ; 2 : tôle ; 3 : panne ; 4 : IPE).

5.8.4 On désire enrouler du fil de diamètre d en acier spécial pour câble sur une bobine de diamètre D . Trouver le diamètre minimal D à donner à la bobine pour que le fil ne présente pas de dilatation permanente, sachant que sa limite de proportionnalité vaut σ_p et son module d'élasticité E (littéral).

Application numérique : $d = 7 \text{ mm}$; $\sigma_p = 1\,200 \text{ N/mm}^2$; $E = 210 \text{ kN/mm}^2$.

5.8.5 On a trouvé (vol.1, ex. 13.9.8) que la section rectangulaire $b \times h$ d'une poutre, obtenue par découpage d'un tronç d'arbre à section circulaire de rayon r , pour laquelle le moment d'inertie I est maximal (*rigidité maximale*), avait comme dimensions $b = r$, $h = \sqrt{3}r$, $b/h = 1/\sqrt{3} = 0,577 \cong 4/7$.

Trouve-t-on les mêmes valeurs pour la section rectangulaire qui peut supporter le plus grand moment fléchissant (*résistance maximale*) ?

5.8.6 Une poutre console à section rectangulaire est chargée d'une force concentrée Q à son extrémité libre. Sa portée est L et les dimensions de la section d'encastrement sont B et H . La poutre étant d'égale résistance à la flexion, déterminer (littéral)

- 1) la largeur $b(x)$ si la hauteur $h = H$ est constante ;
- 2) la hauteur $h(x)$ si la largeur $b = B$ est constante.

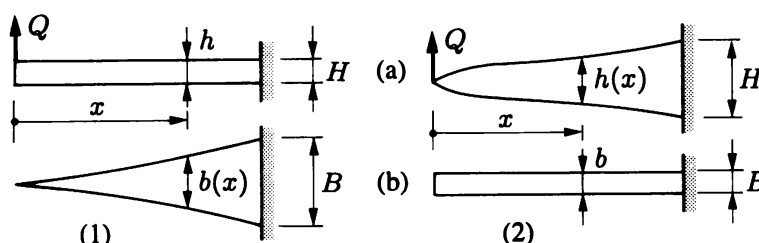


Fig. Ex. 5.8.6 Poutres d'égale résistance à la flexion : (a) élévation ; (b) plan.

5.8.7 Une poutre en fonte grise, à section en T, est soumise à flexion pure dans son plan moyen (fig. ex. 5.8.7a).

- 1) (Sans calcul) Doit-on placer la semelle du côté des fibres comprimées (fig. ex. 5.8.7b) ou tendues (fig. ex. 5.8.7c) ?
- 2) Trouver l'épaisseur t_w optimale de l'âme.

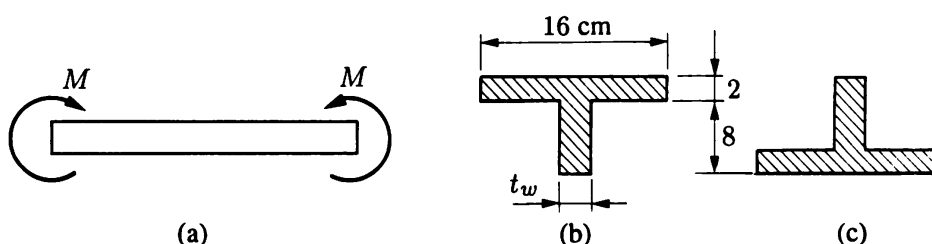


Fig. Ex. 5.8.7 Poutre en fonte grise : (a) élévation ; (b) et (c) section droite.

5.8.8 Un plancher est porté par des poutrelles IPE180, simplement appuyées et régulièrement espacées (s). La charge uniforme, poids propre compris, est de 4 kN/m^2 en service ($\gamma_F = 1,5$). L'acier est caractérisé par $\sigma_{\text{dim}} = 24 \text{ kN/cm}^2$. Trouver l'écartement s des poutrelles.

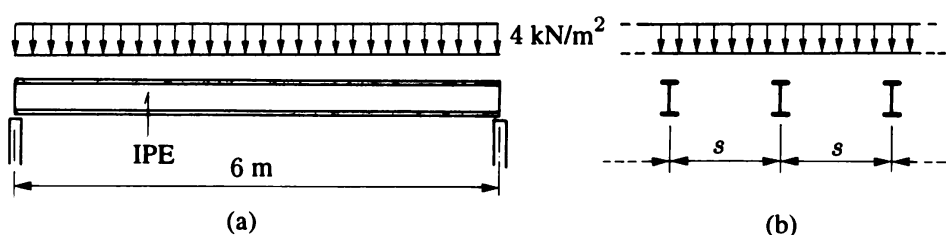


Fig. Ex. 5.8.8 Plancher : (a) élévation ; (b) coupe.

5.8.9 Une poutre simple, uniformément chargée, est constituée d'un laminé HEB 400 en acier doux. Le poids mort (HEB compris) vaut $p = 8 \text{ kN/m}$ et la charge $q = 16,5 \text{ kN/m}$ (fig. ex. 5.8.9a). En adoptant les facteurs de charge $\gamma_p = 1,3$ et $\gamma_q = 1,5$ et la contrainte de dimensionnement $\sigma_{\text{dim}} = 24 \text{ kN/cm}^2$, vérifier si la résistance à la flexion du profilé HEB convient. Si nécessaire, renforcer le profilé à l'aide de deux semelles soudées symétriquement aux ailes (fig. ex. 5.8.9b); calculer l'épaisseur t_s et la longueur L_s de ces semelles.

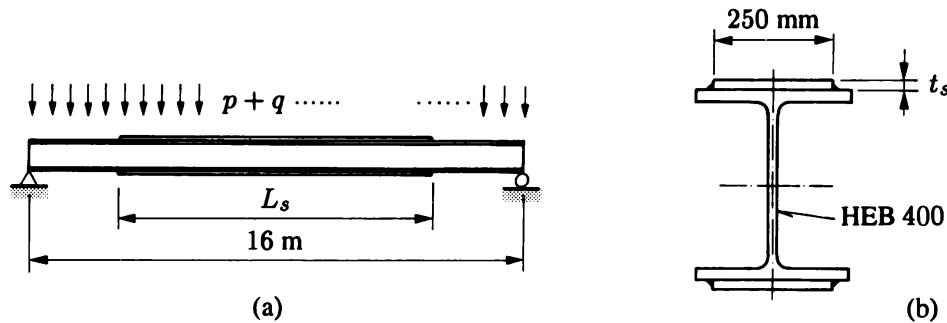


Fig. Ex. 5.8.9 Poutrelle renforcée : (a) élévation ; (b) coupe.

5.8.10 Un pylône d'éclairage de stade, de 20 m de haut, encastré en base, est soumis au vent. Ce vent provoque une charge de 20 kN sur les projecteurs et une charge répartie de 0,8 kN/m sur le pylône (fig. ex. 5.8.10a). On ne considère pas d'autres charges. Le pylône est formé de six tôles d'acier doux soudées, de 1,2 cm d'épaisseur, formant à la base un hexagone régulier de côté $a = 40 \text{ cm}$ (fig. ex. 5.8.10b).

- 1) Trouver les diagrammes du moment de flexion M et de l'effort tranchant V .
- 2) Calculer et dessiner les contraintes normales de flexion à la base.
- 3) Quelles sont les autres vérifications que l'on devrait faire pour ce pylône sous l'effet du vent ?

5.8.11 Une poutre à appuis simples, de portée $L = 3 \text{ m}$, est formée de deux profilés en acier UNP 160 entre lesquels est boulonnée une poutre en chêne de section carrée $16 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ (fig. ex. 5.8.11). Cette poutre, composée de deux matériaux différents, est fléchi dans son plan moyen $y-y$. Les caractéristiques des matériaux sont :

- acier : $\sigma_{a \text{ adm}} = 140 \text{ N/mm}^2$; $E_a = 200 \text{ kN/mm}^2$;
- bois : $\sigma_{b \text{ adm}} = 10 \text{ N/mm}^2$; $E_b = 10 \text{ kN/mm}^2$.

- 1) En négligeant le poids propre, déterminer la charge uniformément répartie q [kN/m] que peut supporter cette poutre.
- 2) Pour cette charge et dans la section la plus sollicitée, tracer les diagrammes des contraintes normales σ dans l'acier et dans le bois.

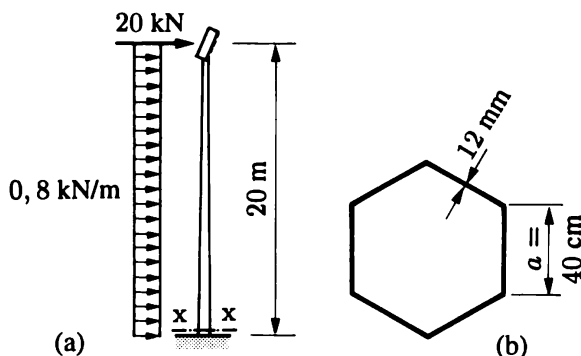


Fig. Ex. 5.8.10 Pylône : (a) élévation ;
(b) coupe xx (la cote $a = 40 \text{ cm}$ s'entend à mi-épaisseur de la tôle).

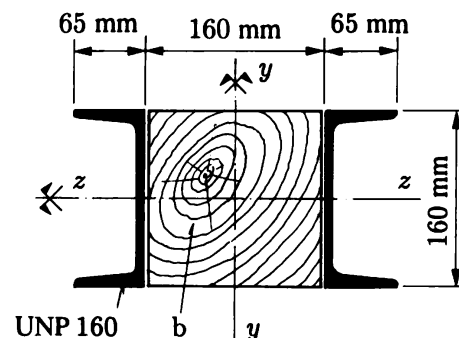


Fig. Ex. 5.8.11 Section droite (UNP 160 :
 $I_z = 925 \text{ cm}^4$; b : équerri en bois).

5.8.12 Le plancher d'un bâtiment industriel, de portée $L = 18$ m, reposant sur appuis simples d'extrémité, est formé d'une dalle en béton fixée sur cinq poutrelles d'acier identiques HEA 450. La dalle est reliée aux poutrelles par des goudjons empêchant tout glissement, de sorte que l'ensemble se comporte comme un monobloc. On admet que les matériaux travaillent en régime élastique et que leurs modules d'élasticité sont dans le rapport $E_a/E_b = 10$. Les contraintes admissibles sont de 16 kN/cm^2 dans l'acier et de 1 kN/cm^2 en compression dans le béton. En tenant compte du poids propre p de l'acier et du béton, calculer la charge supplémentaire q [kN/m^2] que peut supporter ce plancher composé ; tracer ensuite, dans la section la plus sollicitée, le diagramme des contraintes normales σ .

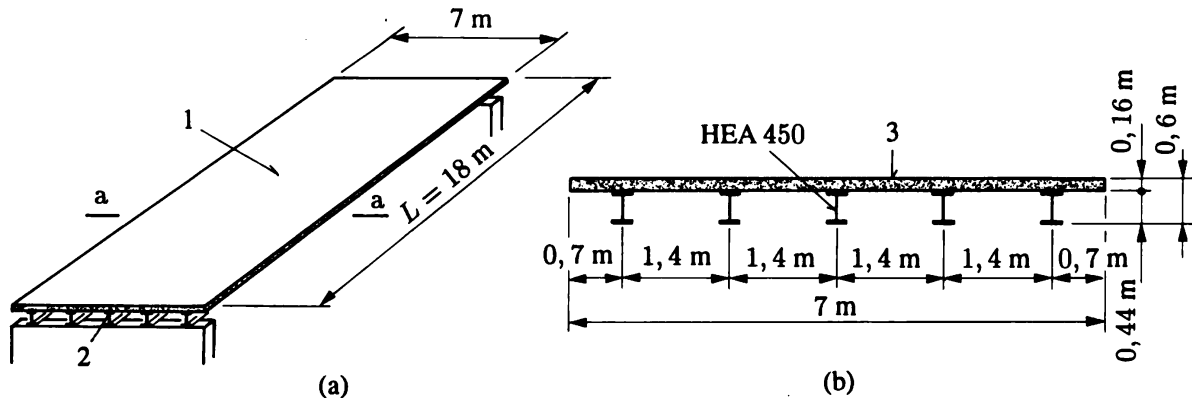


Fig. Ex. 5.8.12 Plancher composé : (a) vue (1 : dalle de béton ; 2 : poutrelles en acier) ; (b) section droite (coupe aa ; 3 : béton).

5.8.13 Les poutres en bois équidistantes d'un plancher sont renforcées par une dalle de béton léger de 10 cm d'épaisseur (procédé couramment utilisé pour renforcer les planchers des anciens bâtiments). Les poutres, de section rectangulaire 30 cm \times 20 cm, sont à appuis simples, de 8,8 m de portée. La charge q est de 3 kN/m^2 uniformément répartie. Les poids volumiques du bois (6 kN/m^3) et du béton (20 kN/m^3), et les modules d'élasticité du bois ($1\,050 \text{ kN/cm}^2$) et du béton ($1\,400 \text{ kN/cm}^2$) sont connus. La construction se fait selon les étapes suivantes :

- sur les poutres en bois déjà en place, on coule la dalle de béton léger ;
- lorsque le béton a fait prise (a durci), on effectue la liaison bois-béton (par clous, vis...) de manière à faire travailler les deux matériaux ensemble ;
- le plancher est alors prêt à recevoir la charge q .

Isoler, dans le sens longitudinal, une poutre et sa tranche de dalle et, dans la section la plus sollicitée en flexion,

- calculer les contraintes normales dans le bois et le béton (en tenant compte des étapes de construction !) ;
- dessiner le diagramme de ces contraintes.

Note : à titre indicatif, les contraintes admissibles sont, dans le bois, 1 kN/cm^2 et, dans le béton léger, $0,75 \text{ kN/cm}^2$ (en compression).

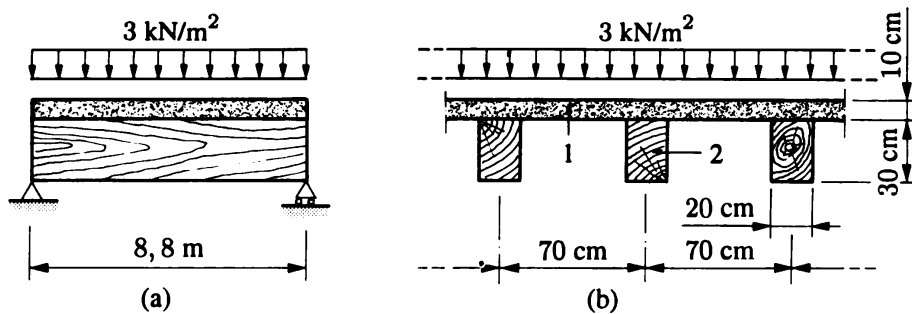


Fig. Ex. 5.8.13 Plancher bois-béton léger : (a) élévation ; (b) coupe (1 : béton léger ; 2 : bois).

5.8.14 L'ossature d'un bâtiment est formée de structures planes équidistantes de 5 m (fig. ex. 5.8.14a). La poutre horizontale CDEF est un caisson en bois lamellé collé (fig. ex. 5.8.14b). Le bâtiment est situé à l'altitude $h_0 = 550$ m ; la charge permanente (poids propre de la poutre compris) est de $1,8 \text{ kN/m}^2$. Vérifier la résistance de la section la plus sollicitée à la flexion. *Indication* : la résistance admissible du bois est $\sigma_{\text{adm}} = 1,2 \text{ kN/cm}^2$.

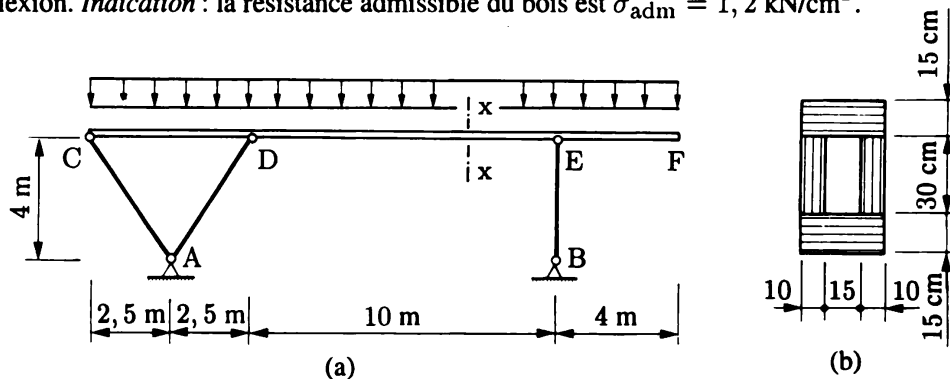


Fig. Ex. 5.8.14 Structure plane : (a) élévation ; (b) section droite (coupe xx).

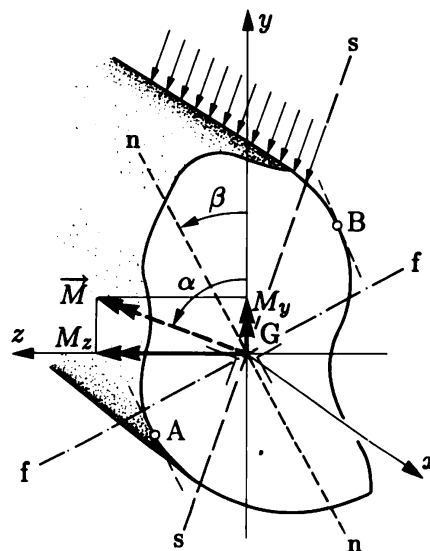
5.9 Lexique

Flexion pure	$M = \text{cste}$ le long de l'axe de la poutre.
Flexion simple	M et V le long de l'axe de la poutre.
Plan de sollicitation	Plan contenant l'axe de la poutre et les charges (en particulier la flèche tournante M).
Plan de flexion	Plan dans lequel fléchit la poutre.
Flexion plane	Flexion selon un axe principal : les plans de sollicitation et flexion coïncident.
Fibre neutre	Fibre où $\varepsilon = \sigma = 0$.
Plan neutre	Ensemble des fibres neutres, contenant l'axe de la poutre.
Axe neutre	Droite où $\sigma = 0$ dans la section ; intersection du plan de la section et du plan neutre ; l'axe neutre passe par le centre géométrique de la section.
Loi de Bernoulli	Les sections planes et perpendiculaires à l'axe dans la configuration initiale le restent dans la configuration déformée.
Courbure ($1/r$)	Inverse du rayon de courbure ($1/r = M/EI$).
Formule de Navier	$\sigma = -My/I$.
Module de flexion (W)	$W_{\text{sup}/\text{inf}} = I/y_{\text{sup}/\text{inf}} $ (les W ne sont pas additifs).
Egale résistance	$\sigma_{\text{max}} = \text{cste}$ (aux fibres extrêmes).
Déversement	Instabilité latérale des poutres.
Voilement	Instabilité des plaques.
Moment statique et moment d'inertie équivalents	Dans une pièce composée, grandeurs géométriques de la section droite permettant le calcul comme une pièce homogène.

6. Flexion oblique et flexion composée

6.1 Flexion oblique

Si, dans une poutre fléchie, le plan de sollicitation, tout en contenant l'axe de la poutre, coupe la section droite selon une trace s-s d'*orientation quelconque* par rapport aux axes principaux d'inertie, la *flexion* est dite *oblique* (fig. 6.1). Le vecteur moment, porté par la normale à s-s, fait un angle α avec l'axe principal y .



On distingue trois paires de lignes ou axes orthogonaux :

- y et z : axes principaux d'inertie ;
- $s-s$ et \vec{M} : trace du plan de sollicitation et vecteur moment ;
- $n-n$ et $f-f$: axe neutre et trace du plan de flexion.

Ces trois paires coïncident en flexion plane.

Fig. 6.1 Flexion oblique.

Le plus simple, pour étudier contraintes, déformations et déplacements, est de rechercher les composantes

$$M_y = M \cos \alpha \quad M_z = M \sin \alpha$$

du vecteur moment \vec{M} sur les axes principaux y et z . Si M provient d'une force transversale, il revient au même de décomposer d'abord cette force selon y et z , puis de calculer M_y et M_z à partir des deux composantes de la force.

Chacun des moments M_y et M_z produit une flexion plane, pour laquelle on peut calculer les contraintes, déformations et courbure (chap. 5). La contrainte totale en un point quelconque (y, z) s'obtient en ajoutant algébriquement les contraintes issues des deux flexions planes, en vertu du principe de superposition (§ 2.7.4),

$$\sigma(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (6.1)$$

Sur la section droite, le diagramme des contraintes est un plan, oblique par rapport aux axes (fig. 6.2).

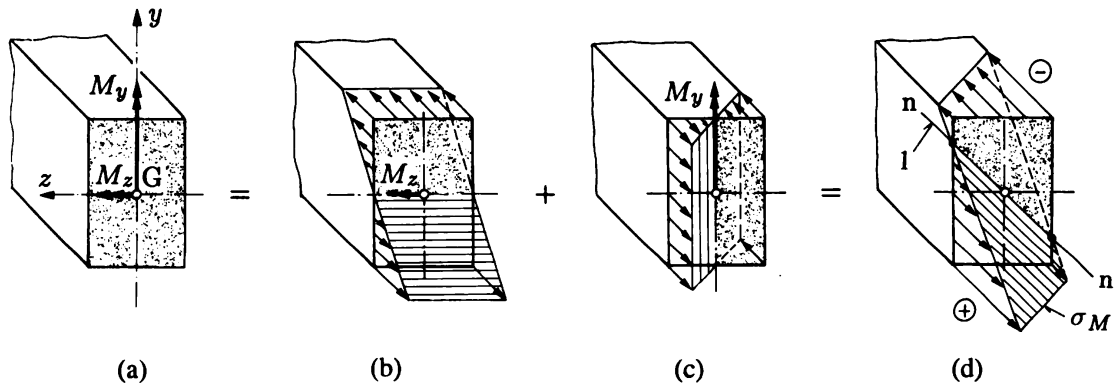


Fig. 6.2 Superposition des contraintes en flexion oblique : (a) M_y et M_z ; (b) $\sigma_{M_z} = -M_z y / I_z$; (c) $\sigma_{M_y} = M_y z / I_y$; (d) $\sigma_M = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}$ (l : axe neutre n - n).

Les contraintes extrêmes se produisent aux points A et B de la section les plus éloignés de l'axe neutre (fig. 6.1). Cet axe, lieu des points où $\sigma(y, z) = 0$, a pour équation

$$-\frac{\sin \alpha}{I_z} y + \frac{\cos \alpha}{I_y} z = 0$$

C'est la droite n - n

$$z = y \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha$$

qui passe par le centre G et a pour pente

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{y} = \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \quad (6.2)$$

Puisqu'en général I_y diffère de I_z , α est différent de β . L'axe neutre n - n est donc pas perpendiculaire à s - s ; or la déformée a lieu dans un plan normal à l'axe neutre. Ainsi, *la poutre fléchit dans un plan qui n'est pas le plan d'action des charges*. De là résulte la dénomination de flexion *oblique* (dite aussi gauche, biaise ou déviée).

6.2 Flexion composée

Une poutre est sollicitée en *flexion composée* lorsqu'elle est soumise simultanément à un *moment fléchissant* (flexion plane ou oblique) et à un *effort normal* (fig. 6.3). Ce cas se rencontre très fréquemment en pratique.

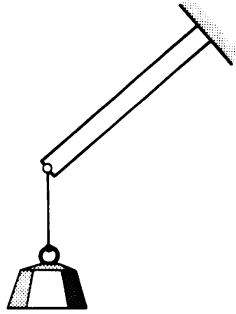


Fig. 6.3 Flexion composée.

On suppose ici que les pièces sont suffisamment massives pour pouvoir négliger leur déformation d'ensemble dans l'étude des efforts intérieurs (linéarisation géométrique). En particulier, lorsque l'effort normal est de compression, on admet que le phénomène de flambement est négligeable⁽¹⁾.

6.3 Flexion composée plane

6.3.1 Position du problème

Dans le cas plan, le moment agit autour d'un axe principal d'inertie de la section droite. La figure 6.4 montre un cas simple de ce genre : un *mur de soutènement* soumis à son poids (pierres, briques, béton armé ou non, etc.) et à la poussée latérale du massif qu'il épaulé (terre, sable, etc.).

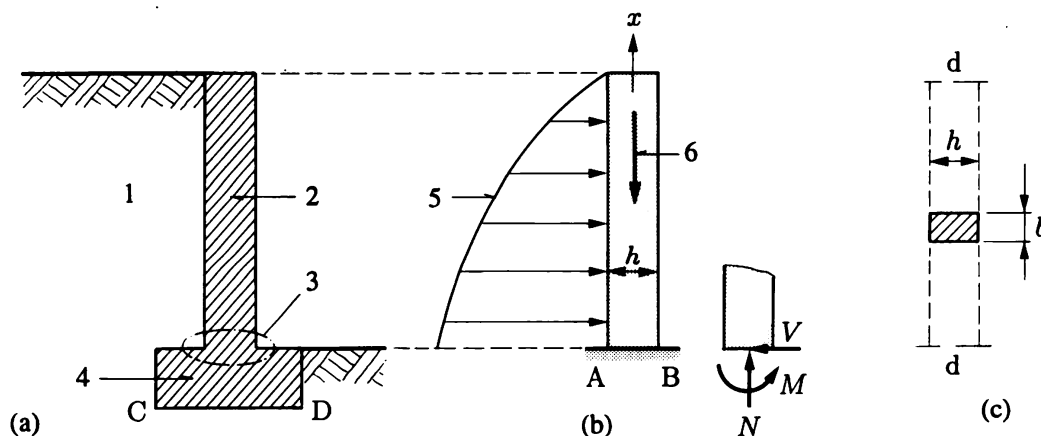


Fig. 6.4 Mur de soutènement : (a) coupe (1 : terrain ; 2 : mur ; 3 : base ; 4 : fondation) ; (b) charges (5 : diagramme de la poussée des terres ; 6 : poids) ; (c) tranche (vue en plan d'une coupe horizontale ; le mur est admis très long dans la direction d-d).

⁽¹⁾ Si tel n'est pas le cas, on doit en tenir compte, ce qui complique beaucoup l'analyse (Troisième partie).

Isolons une tranche de mur (fig. 6.4c) ; c'est une poutre console, d'axe vertical, de section rectangulaire (largeur b , hauteur h). Le poids propre crée un effort normal N ; la *poussée des terres* provoque un moment M et un effort tranchant V . Ces efforts intérieurs sont maximaux à la base AB du mur, encastrement de la console dans le massif de fondation (fig. 6.4b).

L'effort tranchant produit des contraintes tangentielles (chap. 9), alors que les deux autres efforts intérieurs créent des contraintes normales qui se superposent (σ_x). Ici, *on s'intéresse à ce problème de superposition*, de sorte qu'on ne se préoccupe plus des contraintes tangentielles (il ne s'agit pas de les ignorer pour le dimensionnement, bien entendu).

6.3.2 Calcul des contraintes

Dans une section droite soumise à N et M (fig. 6.5), la contrainte normale s'obtient en ajoutant algébriquement la contrainte d'effort normal $\sigma_N = N/A$ à celle de flexion $\sigma_M = -M_z y / I_z$ (principe de superposition, fig. 6.5c)

$$\sigma(y) = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \quad (6.3)$$

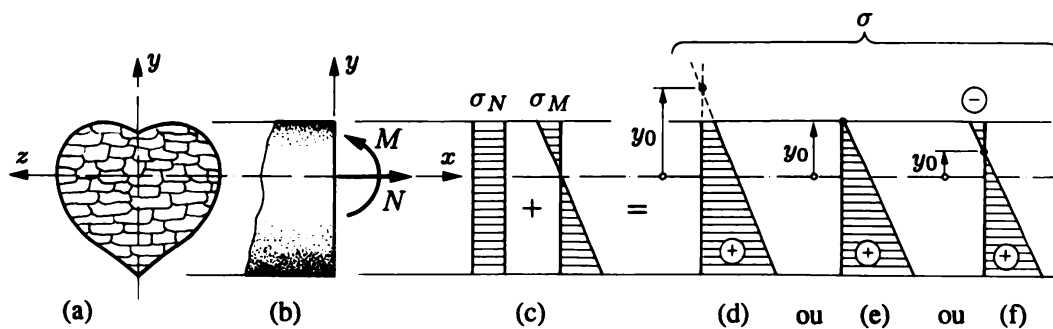


Fig. 6.5 Superposition des contraintes normales en flexion composée.

Cette contrainte totale est la plus grande aux fibres les plus éloignées de l'axe z . Selon les intensités relatives des contraintes σ_N et σ_M , le diagramme résultant σ peut présenter trois allures typiques différentes (fig. 6.5d, 6.5e, 6.5f). On appelle **ligne de contrainte nulle** la trace du plan des contraintes dans la section. Cette ligne est parallèle à z et située à la cote y_0 ; alors

- les contraintes ne changent pas de signe dans la section et la ligne de contrainte nulle est hors de la section (fig. 6.5d) ;
- les contraintes changent de signe dans la section, dans laquelle il existe une ligne de contrainte nulle (fig. 6.5f) ;
- la ligne de contrainte nulle est juste située sur le bord de la section ; c'est le *cas limite*, qui joue souvent un rôle important (fig. 6.5e) ; les contraintes ne changent pas de signe.

Pour trouver l'ordonnée y_0 , il suffit de poser $\sigma = 0$ dans (6.3) ; on obtient

$$y_0 = \frac{N}{M_z} \frac{I_z}{A} \quad (6.4)$$

6.3.3 Effort normal excentré et tiers central

La sollicitation de flexion composée (N, M_z) est équivalente, dans la section droite, à une force N , agissant à la distance e du centre géométrique (fig. 6.6), telle que (vol. 1, § 3.2.1) $M_z = -Ne$, d'où

$$e = -\frac{M_z}{N} \quad (6.5)$$

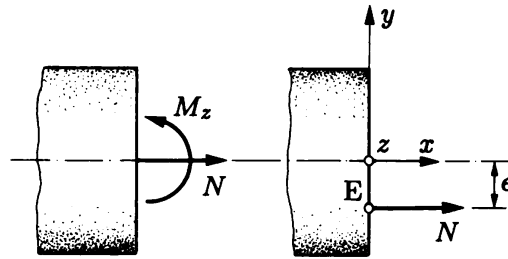


Fig. 6.6 Effort normal excentré (si N et M_z sont positifs, alors e est négatif).

On parle alors de *sollicitation par effort normal excentré* et e s'appelle l'*excentricité*. Le point E, où agit N excentré, est aussi le point d'action de la résultante des forces situées devant la section S, dans une réduction ; si N est une compression, ce point est souvent appelé *centre de pression*.

Introduisant (6.5) dans (6.4), on obtient

$$y_0 = -\frac{I_z}{eA} \quad (6.6)$$

Appliquons ces notions au cas d'une *section rectangulaire* et résolvons le problème suivant : dans quelle zone de l'axe y l'effort excentré N peut-il agir sans que les contraintes normales changent de signe sur la section ? Il suffit d'envisager le *cas limite* précédent (§ 6.3.2, fig. 6.5e), où la ligne de contrainte nulle est située sur les fibres extrêmes de la section. Dans (6.6), on introduit $y_0 = y_{\text{sup}} / \text{inf} = \pm h/2$, $A = bh$ et $I_z = bh^3/12$; on en tire (signe \pm par symétrie)

$$e = \mp \frac{h}{6} \quad (6.7)$$

Le segment $ST = h/3$ centré en G (fig. 6.7) s'appelle le *tiers central*. Ainsi, dans le cas du rectangle, si l'effort normal excentré agit dans le tiers central, les contraintes ne changent pas de signe dans la section.

On peut rechercher semblablement le segment ST d'autres formes de section droite : avec (6.6), on a, de façon générale,

$$e_{\text{inf} / \text{sup}} = -\frac{I_z}{Ay_{\text{sup} / \text{inf}}} = \mp \frac{W_{\text{sup} / \text{inf}}}{A} \quad (6.8)$$

Ce problème est repris plus loin sous un angle plus général (§ 6.4.2).

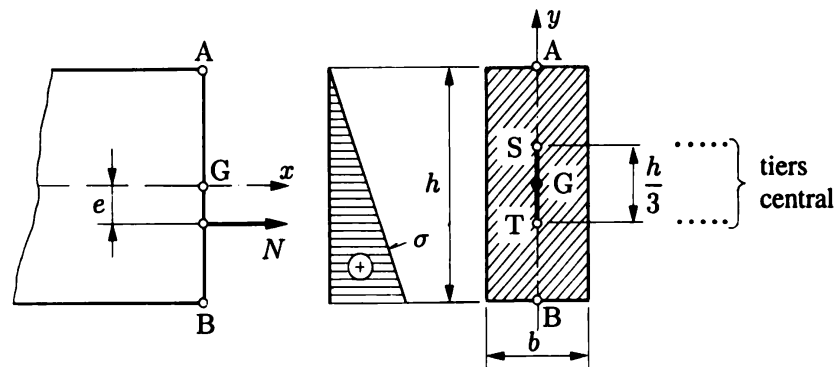


Fig. 6.7 Tiers central d'une section rectangulaire.

6.3.4 Importance de l'effort normal de compression

En flexion composée, si l'effort normal est de compression et d'intensité suffisante, les contraintes qu'il produit peuvent faire disparaître toute contrainte de traction provenant du moment, lors de la superposition (6.3).

Cette constatation simple joue un rôle essentiel pour tous les éléments de construction où la contrainte de traction est en soi gênante. Dans les constructions en béton, pierres ou fonte, dans les maçonneries de briques ou plots de ciment, au contact des fondations avec le sol, pour les éléments reposant les uns sur les autres sans liaison, il est clair que les matériaux, les joints ou les surfaces en contact ne peuvent pas absorber de traction ; pour combattre cette dernière, on peut *utiliser avantageusement l'effort normal de compression*. Le béton précontraint est un exemple typique de ce genre.

Si le mur de la figure 6.4 ne peut supporter de traction, on doit vérifier, en toute section, $\sigma \leq 0$, ou, plus simplement, $|e| \leq h/6$: il suffit que l'effort normal excentré reste dans le tiers central. La vérification est la même sous la fondation (section CD), afin d'éviter tout décollement du sol.

En pratique, ces conditions sont idéales, mais parfois trop sévères. On peut éventuellement y échapper comme expliqué ci-après.

6.3.5 Matériau sans résistance à la traction

Si, dans une section droite, la résistance à la traction est insignifiante ou nulle, la loi (σ, ϵ) correspondante peut être modélisée par deux droites à l'image de la figure 6.8.

Sous un effort normal de compression excentré N , la section est entièrement comprimée tant que le centre de pression (point E) reste contenu dans le segment ST (dans le cas de la section rectangulaire, le tiers central, § 6.3.3). Si par contre N agit en dehors de ST (fig. 6.9a), il apparaît les contraintes de traction (fig. 6.9b). Le matériau n'y offrant aucune résistance, la zone tendue va se fissurer et les contraintes y disparaître. Toutefois, *tant que N reste au moins à l'intérieur de la section*, on peut encore transmettre la flexion composée grâce à un *autre* diagramme de contraintes.

Mais on ne peut résoudre ce nouveau problème par le principe de superposition, car le matériau ne suit plus une loi globalement linéaire. Les sections restant planes (cinématique), la nouvelle répartition des contraintes est linéaire en compression et nulle en traction (loi constitutive). La hauteur d ($= JK$) et

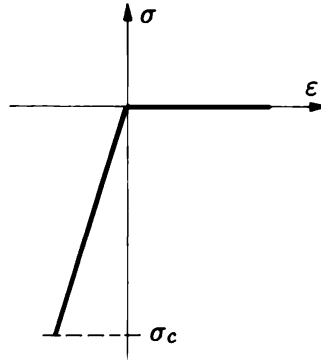


Fig. 6.8 Matériau linéaire en compression (jusqu'à rupture) et sans résistance à la traction.

l'intensité maximale σ_{\max} ($= JL$) définissent entièrement le diagramme de ces contraintes (fig. 6.9c) et se déterminent par les deux équations du principe d'équivalence (statique)

$$N = R \quad (6.9)$$

$$M \equiv Ne = Re_R \quad (6.10)$$

où R est la résultante du diagramme des contraintes et e_R l'excentricité de R ; on en tire

$$e_R = e = \frac{M}{N} \quad (6.11)$$

Dans ces relations, l'effort normal, bien que de compression, a été pris en valeur absolue.

Si la section est *rectangulaire*, les contraintes forment un prisme de hauteur b et base triangulaire JKL. La résultante R est située au tiers de d ($= JK$). Avec (6.11), on en déduit (fig. 6.9)

$$c = \frac{h}{2} - e \quad (6.12a)$$

et

$$d = 3c \quad (6.12b)$$

où c ($= EA$) est la distance du point d'action de N à la fibre extrême la plus voisine A.

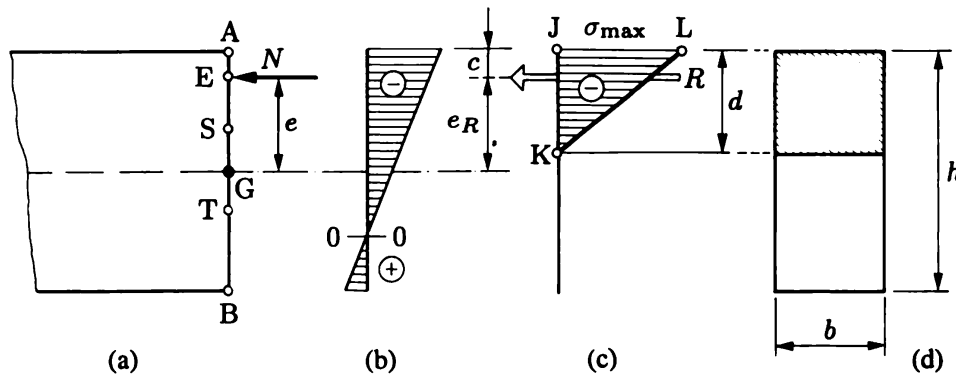


Fig. 6.9 Résistance d'une section fissurée à la compression excentrée : (a) élévation avec effort normal excentré ; (b) diagramme des contraintes, matériau non fissuré ; (c) diagramme des contraintes, matériau fissuré ; (d) zone comprimée (hachurée) de la section droite.

Enfin, le volume du prisme est $R = 3cb\sigma_{\max}/2$, d'où

$$\sigma_{\max} = \frac{2N}{3bc} \quad (6.13)$$

valeur qui ne doit pas dépasser, pour le matériau envisagé,

- la valeur de calcul de la résistance à la compression (état limite ultime : $\sigma_{d\max} \leq \sigma_{\dim}^-$), ou
- la contrainte admissible en compression (méthode des contraintes admissibles : $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}^-$).

Si N se rapproche du bord comprimé A, donc si $c \rightarrow 0$, on voit que σ_{\max} augmente toujours plus rapidement (hyperboliquement) et tend vers l'infini. La résistance n'est alors plus possible et on atteint, par ailleurs, la limite de l'équilibre statique global (vol. 1, sect. 5.6). C'est la raison pour laquelle les piliers en maçonnerie vont, le plus souvent, en s'élargissant vers leur base : la résultante R ne doit pas sortir des sections droites (fig. 6.10).

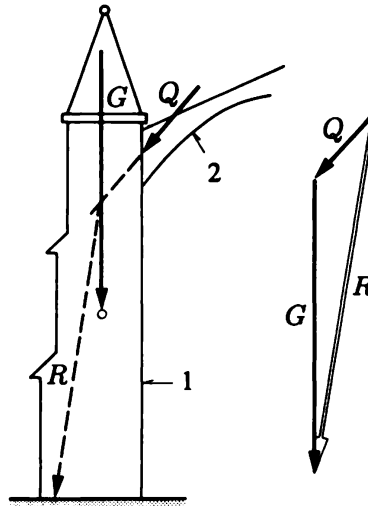


Fig. 6.10 Le poids G du contrefort 1 s'oppose au moment de la poussée Q de l'arc-boutant 2.

Ces considérations trouvent de nombreuses applications pratiques (murs de soutènement massifs, barrages voûtes, semelles de fondation, piliers en maçonnerie, murs de briques, etc.) et se généralisent à d'autres types de section droite, ainsi qu'à la flexion composée oblique.

6.4 Flexion composée oblique

6.4.1 Calcul des contraintes

Dans le cas plus général de flexion composée où, sur la section, agissent l'effort normal N et les moments de flexion M_y et M_z (fig. 6.11a), la contrainte normale en un point (y, z) vaut, par superposition,

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (6.14)$$

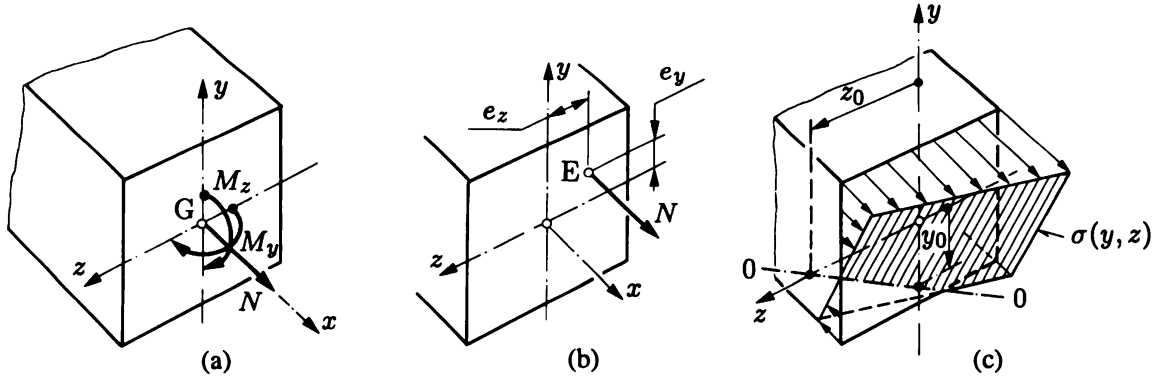


Fig. 6.11 Flexion composée oblique (M_y et M_z agissent ici négativement par rapport aux axes y et z).

Comme dans le cas plan, on peut excentrer l'effort normal N des quantités (fig. 6.11b)

$$e_y = -\frac{M_z}{N} \quad e_z = \frac{M_y}{N} \quad (6.15)$$

et considérer que la section est soumise à la sollicitation équivalente (N, e_z, e_y) , soit

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{Ne_y}{I_z} y + \frac{Ne_z}{I_y} z \quad (6.16)$$

Comme il se doit, le diagramme des contraintes est linéaire. Le plan des contraintes coupe le plan de la section selon la *ligne de contrainte nulle* 0-0 (fig. 6.11c), d'équation

$$\sigma(y, z) = 0$$

On calcule aisément l'intersection de cette ligne avec les axes (y, z) de la section, ce qui définit les segments

$$y_0 = -\frac{I_z}{Ae_y} = \frac{NI_z}{M_z A} \quad z_0 = -\frac{I_y}{Ae_z} = -\frac{NI_y}{M_y A} \quad (6.17)$$

On voit que, si le centre de pression E est proche du centre géométrique G (excentricité petite), e_y et e_z sont faibles, et par suite y_0 et z_0 sont grands. Il s'ensuit que la ligne de contrainte nulle est tout entière extérieure à la section droite et que les contraintes normales sont toutes de même signe.

Au contraire, si E est éloigné de G (excentricité grande), la ligne de contrainte nulle coupe le contour de la section et divise cette dernière en deux régions soumises à des contraintes de sens contraires.

6.4.2 Noyau central

Pour les matériaux dont la résistance à la traction est négligeable, il est intéressant de trouver la *région de la section droite dans laquelle l'effort normal de compression excentré peut agir sans produire aucune contrainte de traction*. Cette région est le **noyau central** de la section. Il en résulte que la ligne de contrainte nulle ne coupe jamais la section, lui étant au plus *tangente*.

Cette propriété fournit la méthode de détermination du noyau central, illustrée ici pour la *section rectangulaire* (fig. 6.12a). Si la ligne de contrainte nulle coïncide avec le côté AD , l'effort normal est

appliqué au point E distant de $h/6$ du centre géométrique G (§ 6.3.3). Semblablement, si la ligne de contrainte nulle est sur le côté AB, le point F, à la distance $b/6$ de G, appartient au noyau central.

Lorsque l'effort normal se déplace sur le segment EF, on vérifie sans peine que la ligne de contrainte nulle tourne autour du point A⁽²⁾ sans couper la section droite. EF est donc un côté du noyau central et les autres côtés s'en déduisent par symétrie. Le noyau central est ainsi un *losange* dont les diagonales ont les longueurs $h/3$ et $b/3$.

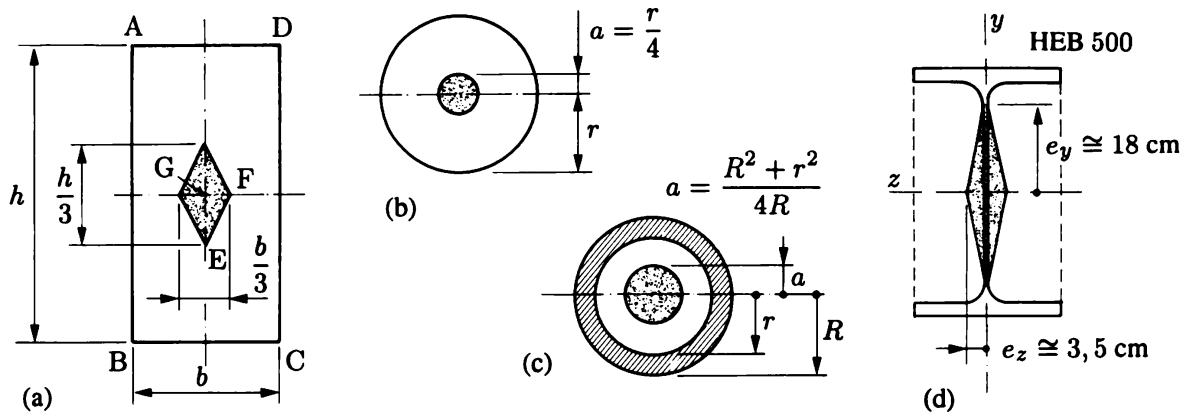


Fig. 6.12 Noyau central de quelques sections droites :
(a) rectangle ; (b) cercle ; (c) couronne ; (d) section en I (HEB 500).

On trouve de manière semblable, utilisant (6.17) pour calculer e_y et e_z , avec $y_0 = y_{\text{sup}}/\text{inf}$ et $z_0 = z_{\text{sup}}/\text{inf}$ comme pour établir (6.8), le noyau central d'une section circulaire pleine (fig. 6.12b), d'une couronne (fig. 6.12c) ou d'une section âme-semelles (fig. 6.12d).

D'une manière générale, on voit que *le contour du noyau central est le lieu du centre de pression associé à une ligne de contrainte nulle qui roule sur le contour de la section droite sans jamais la couper*.

6.5 Exercices

6.5.1 Une poutre simple en bois, de section rectangulaire 8 cm × 16 cm, supportée obliquement (panne de toiture), est soumise à une charge verticale uniforme $q = 4$ kN/m, dont le plan contient l'axe de la poutre. Dans la section la plus sollicitée en flexion

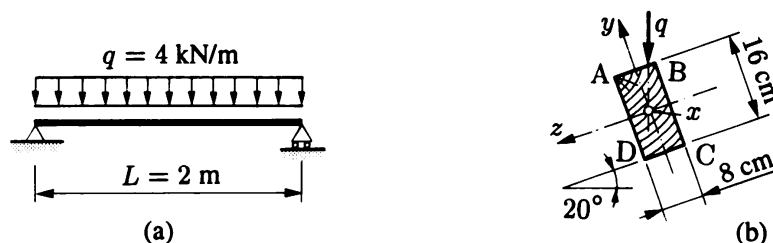


Fig. Ex. 6.5.1 Panne de toiture : (a) élévation ; (b) coupe.

⁽²⁾ En effet, on peut toujours décomposer N en deux forces agissant en E et F, auxquelles s'associent les lignes de contrainte nulle AD et AB, ayant A en commun.

- 1) calculer les contraintes normales aux sommets du rectangle ;
- 2) déterminer la position de l'axe neutre ;
- 3) représenter graphiquement (perspective) le diagramme des contraintes.

6.5.2 La section droite d'une poutre en bois, de forme rectangulaire $b \times h$, est soumise à l'action d'un moment $M_y = 3,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ et d'un moment $M_z = 3,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Sachant que $b/h = 5/7$ et $\sigma_{b \text{ adm}} = 1 \text{ kN/cm}^2$, calculer les dimensions de la section (arrondies au cm pair supérieur).

6.5.3 Une poutre console à section rectangulaire $b \times h$ est soumise, à son extrémité libre, à une force concentrée F agissant selon la diagonale AC de la section. Etudier les particularités de la répartition des contraintes normales en toute section (littéral).

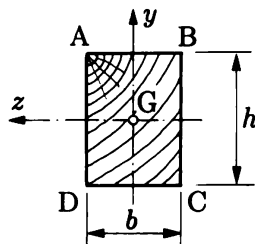


Fig. Ex. 6.5.2

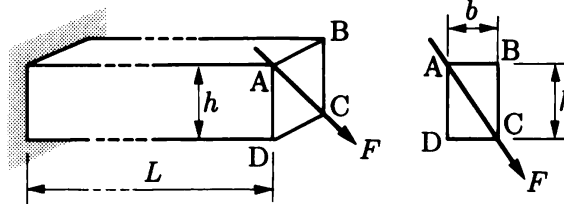


Fig. Ex. 6.5.3

6.5.4 La branche BC d'un étrier a une section rectangulaire $h \times b = 40 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$; si la force de serrage vaut 3 kN , calculer la contrainte de traction maximale en toute section de cette branche et y dessiner, en perspective, le diagramme des contraintes normales.

6.5.5 Une poutre simple en béton armé (poids volumique $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$), de section rectangulaire $36 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$, est précontrainte par une force excentrée $P = 864 \text{ kN}$ ($e = 20 \text{ cm}$). Calculer les contraintes normales maximale et minimale dans la section médiane sous l'effet du poids propre et de la précontrainte.

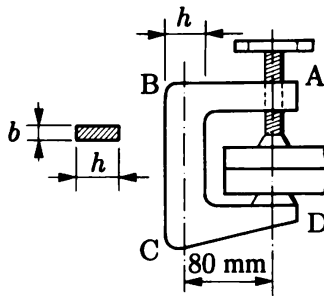


Fig. Ex. 6.5.4

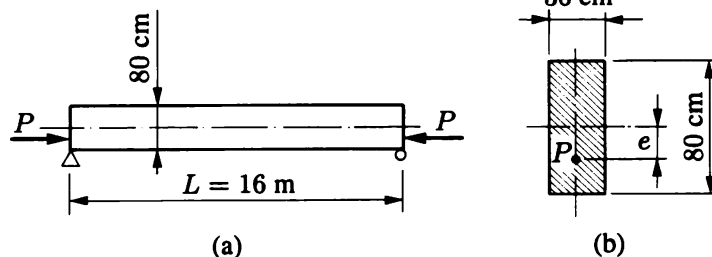


Fig. Ex. 6.5.5 Poutre précontrainte : (a) élévation ; (b) coupe.

6.5.6 Une pile de pont prismatique en béton armé est soumise aux actions suivantes :

- son poids propre ;
- une charge simplement excentrée $Q = 15\,000 \text{ kN}$ (poids du pont et des véhicules) ;
- une charge horizontale $H_1 = 150 \text{ kN}$ (freinage) ;
- une charge horizontale $H_2 = 300 \text{ kN}$ (vent).

On admet, en première approximation, que le problème est linéaire tant en matériau qu'en géométrie. Déterminer alors, dans la section la plus sollicitée, les contraintes normales extrêmes et les points où elles se produisent ; dessiner le diagramme des contraintes normales et en déduire la ligne de contrainte nulle.

6.5.7 Une colonne courte en béton, de section rectangulaire, est soumise à une charge Q doublement excentrée, agissant en compression. Calculer la valeur admissible de cette charge ($\sigma_{\text{adm}}^+ = 50 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_{\text{adm}}^- = 1\,200 \text{ N/cm}^2$; poids propre négligeable ; béton admis élastique linéaire).

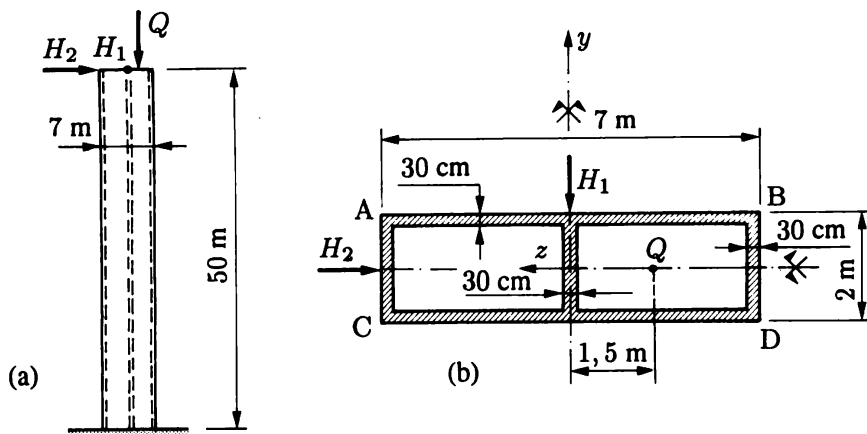


Fig. Ex. 6.5.6 Pile de pont : (a) élévation ; (b) coupe.

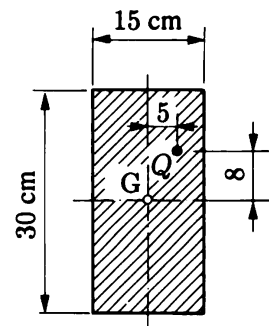


Fig. Ex. 6.5.7

6.5.8 Une poutre console en acier est soumise à trois charges concentrées F , H et Q agissant au point C. On néglige les effets du poids propre. Dans la section d'encastrement

- 1) calculer les efforts intérieurs et les représenter tels qu'ils agissent réellement ;
- 2) calculer la répartition des contraintes normales (σ_{\max} ; σ_{\min} ; dessin des σ ; ligne de contrainte nulle).

On donne $F = 150$ kN, $H = 60$ kN, $Q = 120$ kN, $L = 2,4$ m, $A = 216$ cm², $I_y = 27\,726$ cm⁴ et $I_z = 59\,808$ cm⁴.

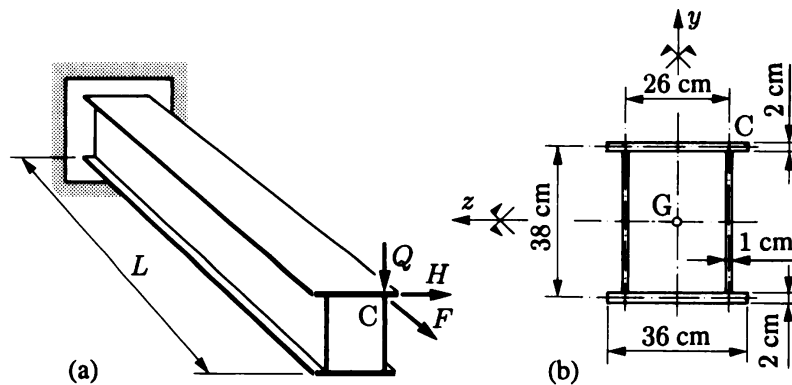


Fig. Ex. 6.5.8 Console en acier : (a) vue ; (b) coupe.

6.5.9 Un mur en briques de 5 m de haut et 2 m de large retient un massif de sable. La répartition des pressions du sable le long de la hauteur du mur est linéaire (droite AB). Déterminer le diagramme des contraintes normales à la base du mur, sachant que le poids volumique des briques est de 17 kN/m³, que la poussée totale du sable vaut 50 kN par mètre courant de mur et que la résistance à la traction de la maçonnerie de briques est nulle.

6.5.10 Un petit barrage en béton est soumis à son poids propre ($\gamma = 24$ kN/m³), à la poussée hydrostatique et à une charge de 600 kN/m. Dans la section de base AB, déterminer le diagramme des contraintes normales en supposant que le béton (a) résiste, (b) ne résiste pas à la traction.

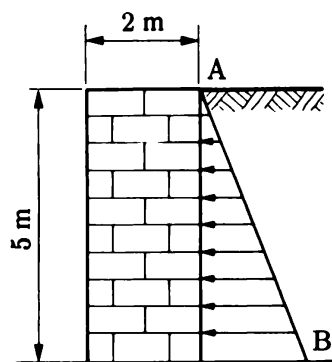


Fig. Ex. 6.5.9

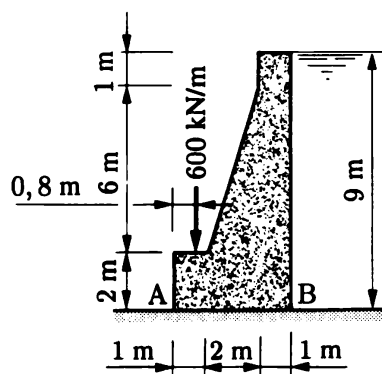


Fig. Ex. 6.5.10

6.5.11 Une cheminée en béton ($\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$), prismatique, à section annulaire, est soumise à l'action du vent ($q = 1,6 \text{ kN/m}$). Déterminer le rayon r du noyau central de la section ; calculer l'excentricité e du centre de pression à la base et en déduire si les contraintes normales changent de signe ou non.

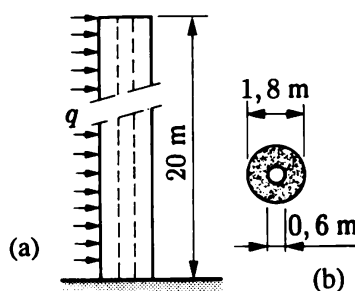


Fig. Ex. 6.5.11 Cheminée : (a) élévation ; (b) coupe.

6.5.12 Trouver le noyau central d'une cornière en tôle mince en admettant, pour simplifier, que l'épaisseur t des ailes est concentrée à mi-épaisseur.

6.5.13 Trouver le noyau central d'une section tubulaire carrée dont l'épaisseur t des parois est mince en admettant, pour simplifier, que t est concentrée à mi-épaisseur (littéral).

Application. Calculer le noyau central de quelques sections de profilés creux carrés MSH et comparer avec la valeur simplifiée (par exemple MSH 40-40-4, 100-100-4 et 100-100-8).

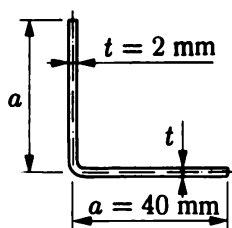


Fig. Ex. 6.5.12

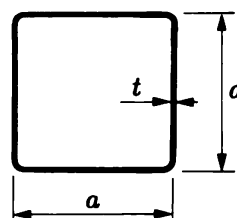


Fig. Ex. 6.5.13

6.5.14 Trouver le noyau central de la section droite de la pile de pont de l'exercice 6.5.6.

6.5.15 Trouver le noyau central d'une section droite en forme de triangle isocèle de base b et hauteur h (littéral).

6.6 Lexique

Flexion oblique	Flexion (pure ou simple) dont le plan de sollicitation ne contient pas l'un des axes principaux d'inertie de la section droite ; M_y et M_z agissent simultanément et le plan de flexion est distinct du plan de sollicitation.
Flexion composée <ul style="list-style-type: none"> • flexion composée plane • flexion composée oblique • équivalence $(N, M_z) \sim (N, e_y)$ et $(N, M_y, M_z) \sim (N, e_z, e_y)$ • centre de pression 	Flexion accompagnée de traction ou compression (N et M simultanément) ; un seul M autour d'un axe principal d'inertie (N et M_z ou N et M_y) ; cas général (N, M_y et M_z) ; sollicitation dite par effort normal excentré ; point de la section droite où agit l'effort normal excentré ; l'excentricité est simple (e_y) ou double (e_y, e_z).
Ligne de contrainte nulle	Ligne de la section droite où $\sigma = 0$, intersection du plan des σ (ou des ε) avec la section droite (cette ligne est parallèle à l'axe neutre de flexion pure).
Tiers central	Dans une section droite rectangulaire, soumise à flexion composée plane, zone de l'axe (y ou z) où doit agir l'effort normal excentré pour que les contraintes ne changent pas de signe sur la section (la ligne de contrainte nulle ne coupe pas la section).
Noyau central	Région d'une section droite où peut agir un effort normal excentré sans que les contraintes normales changent de signe sur l'étendue de la section (ligne de contrainte nulle hors de la section, au plus tangente).

6.7 Annexe – Relations supplémentaires

C'est, pour certains semble-t-il, un vrai plaisir que de compliquer à souhait l'écriture des formules (6.3) et (6.14) de manière à en obscurcir complètement le sens physique ! Cette pratique étant encore courante, on montre ici comment on peut procéder.

Introduisons donc les rayons de giration (vol. 1, sect. 13.7) qui, pour les axes principaux centraux y et z , valent

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Alors, en flexion composée plane, les relations (6.3) et (6.6) deviennent

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N}{A} + \frac{eN}{I_z} y = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{Ae}{I_z} y \right) = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{i_z^2} y \right)$$

$$y_0 = -\frac{I_z}{eA} = -\frac{i_z^2}{e}$$

et on peut semblablement faire perdre toute leur signification évidente aux formules (6.14) et (6.17) de la flexion composée oblique.

Appelons r_A et r_B les ordonnées des points T et S du noyau central sur l'axe y . Alors on a (fig. 6.13)

$$r_A = -\frac{i_z^2}{y_A} \quad r_B = -\frac{i_z^2}{y_B}$$

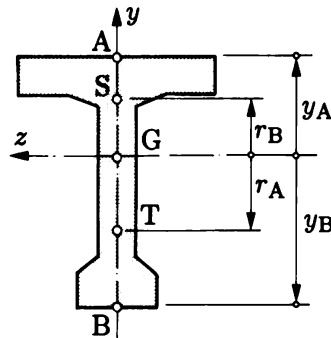


Fig. 6.13

Grâce à quoi les contraintes aux fibres extrêmes A et B s'obtiennent par les formules limpides

$$\sigma_{A/B} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{r_{A/B}} \right)$$

A ce stade, remarquons que, puisque $W = I_z/y$,

$$W_{A/B} = \frac{I_z}{y_{A/B}} = \frac{A i_z^2}{y_{A/B}} = A r_{A/B}$$

et maintenant on est complètement perdu ; on est à peu près sûr de confondre les quantités

- e (excentricité de la charge),
- y , y_0 , y_A et y_B (ordonnées diverses),
- i_z (rayon de giration),
- r_A et r_B (points du noyau central sur l'axe y),

sans parler des problèmes de signe... Le lecteur qui n'est pas convaincu peut généraliser ces considérations à la flexion composée oblique et démontrer que la ligne de contrainte nulle est l'antipolaire du centre de pression par rapport à l'ellipse centrale d'inertie...

7. Propriétés mécaniques des matériaux

7.1 Importance et complexité du problème

Par *propriétés mécaniques des matériaux*, on entend un ensemble de caractéristiques (lois, paramètres, modules...) qui *modélisent*, c'est-à-dire expliquent et traduisent, le comportement des matériaux au niveau *macroscopique*, dans diverses conditions et sous diverses sollicitations. On laisse donc de côté le niveau microscopique, qui est du domaine de la physique de la matière.

Il est d'importance vitale pour l'ingénieur d'avoir une connaissance précise et complète de ces caractéristiques, puisqu'elles sont utilisées, finalement, pour dimensionner. Elles interviennent à tous les niveaux de la vérification des ouvrages, car, pratiquement, tout état limite (§ 3.4.2) en dépend : c'est dire l'importance exceptionnelle que revêtent ces propriétés pour la sécurité des constructions.

L'établissement des propriétés mécaniques des matériaux de construction réels est incontestablement l'un des domaines les plus complexes de la mécanique des matériaux. Un matériau, employé dans les conditions les plus vastes (par exemple : à chaud, à froid..., en traction, en compression..., statiquement, dynamiquement...), soumis à des phénomènes naturels aussi aléatoires qu'incontrôlables (humidité, température, attaques chimiques, vieillissement...), élaboré dans les conditions les plus diverses (béton, bois...), etc., semble devoir présenter des caractéristiques mécaniques propres à chaque cas particulier, au point que tout ingénieur, soucieux de ses responsabilités, devrait toujours se poser la question : *cette caractéristique-là est-elle valable pour les conditions de mon ouvrage ?* Et pourtant, certaines constantes apparaissent, certains comportements sont répétitifs, certains phénomènes sont toujours les mêmes.

L'établissement des propriétés mécaniques se déroule généralement en deux temps :

- étude expérimentale,
- traduction en lois.

La *base* de l'étude expérimentale est l'essai uniaxial de *traction* ou *compression*, parfois de cisaillement pur par torsion ; on en tire quantité de renseignements de valeur, qui, souvent, sont assez aisés à traduire en chiffres et équations, et peuvent alors être utilisés avec confiance dans tous les cas où l'état de contrainte et déformation est unidimensionnel (par exemple : flexion des poutres).

La description de l'essai de traction ou compression, et de certaines propriétés mécaniques qui en découlent, a été faite antérieurement (chap. 2) ; rappelons que, dans un essai bien mené et indépendamment des propriétés mécaniques de la matière,

- les sections droites, planes et perpendiculaires à l'axe de l'éprouvette dans la configuration initiale, le sont encore dans la configuration déformée ;
- les contraintes normales et dilatations axiales sont uniformément réparties sur la section.

L'étude expérimentale des comportements bi- et tridimensionnels, et l'établissement des lois correspondantes, sont des sujets beaucoup plus complexes et nettement moins pratiqués. Dans ce domaine cependant, savoir caractériser la *transition* entre deux comportements différents, d'un matériau donné soumis à une sollicitation croissante, est un point très important. On appelle *critère rhéologique* une expression mathématique qui permet de prévoir qu'un changement de comportement va s'opérer ; par exemple, d'importance particulière est le *critère de résistance* ou *de rupture*, qui permet de dire si la matière va se rompre pour l'état atteint (état caractérisé par exemple par le tenseur contrainte, ou d'autres grandeurs caractéristiques ; sect. 7.10).

Il est clair qu'on se limite ici à l'étude de quelques propriétés essentielles de quelques matériaux, souvent d'ailleurs de manière seulement descriptive. Certaines propriétés sont approfondies ailleurs. On suppose essentiellement que les matériaux sont *isotropes* et *homogènes* (sect. 2.2). On ne considère pas l'effet de la *température* ; les essais décrits ci-après sont effectués à température ambiante constante ; on rappelle simplement deux cas où la température joue un rôle important (sect. 7.4).

Par contre, le *temps* est un paramètre important ; on dit que les propriétés mécaniques sont *indépendantes du temps* si, lorsqu'on interrompt un essai en cours, on n'observe aucune évolution parmi les grandeurs étudiées. On envisage d'abord ce cas (sect. 7.2 et 7.3), puis on décrit quelques propriétés essentielles dépendant du temps (sect. 7.5).

Enfin, les essais sont du type *statique*, c'est-à-dire qu'ils se déroulent de manière suffisamment lente pour que toute action dynamique soit négligeable. On n'étudie donc pas l'influence de la *vitesse de mise en charge*. Les essais sont de préférence effectués à vitesse de déformation constante ($\dot{\epsilon} = \text{cste}$).

Ainsi, les variables observées sont

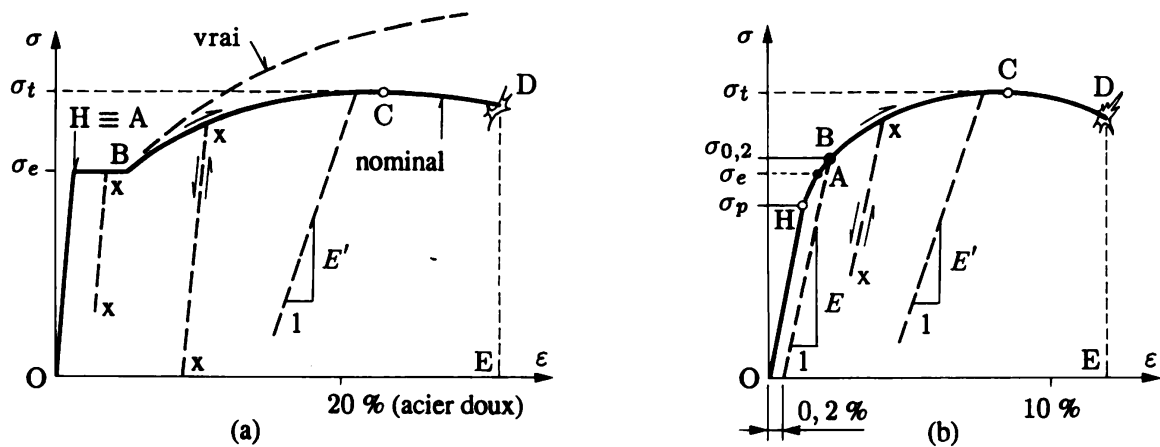
- le tenseur contrainte σ_{ij} ,
- le tenseur déformation ϵ_{ij} ,
- éventuellement, le temps t .

7.2 Essai de traction sur matériaux ductiles (métaux)

7.2.1 Diagramme contrainte-dilatation

La figure 7.1 rappelle les deux types de diagramme contrainte-dilatation (σ, ϵ) que l'on observe couramment pour les métaux (acier, fer, aluminium, cuivre, laiton, titane..., alliages divers...) ; la différence essentielle réside dans le *palier d'étirage* ($\sigma = \text{cste}$).

Le diagramme a déjà été décrit jusque dans la zone d'écrouissage (§ 2.5.2) ; la contrainte y croît jusqu'à la valeur maximale σ_t (point C), la *résistance à la traction*. A partir du point C, on observe,



- OH : droite de Hooke $\sigma = E\varepsilon$, domaine élastique linéaire
- OA : domaine élastique (réversible)
- A : limite des domaines élastiques et plastiques
- ABCD : domaine plastique ; zone des grandes dilatations
- AB (a) : palier d'étirage
- BC (a) et ABC (b) : zone de l'écrouissage
- CD : zone de la striction
- H : limite de proportionnalité (σ_p)
- A : limite d'élasticité (σ_e)
- B (b) : limite d'élasticité conventionnelle à 0,2 % ($\sigma_{0,2}$)
- C : résistance à la traction (σ_t)
- D : rupture
- OE : dilatation de rupture (typique de la ductilité)
- xx : droite de déchargement élastique (xx // OA)

Fig. 7.1 Diagrammes contrainte-dilatation (σ, ε) : (a) acier à palier ; (b) alliage d'aluminium.

dans une section déterminée, un rétrécissement progressif, la **striction** (fig. 7.2) ; l'allongement de l'éprouvette continue malgré la diminution de la charge, et finalement la **rupture** se produit au point D dans la section de striction. L'abscisse du point D s'appelle **dilatation de rupture** et est une caractéristique importante mesurant la ductilité.

Remarques

Dans la zone de striction CD, et même avant, l'hypothèse de linéarité géométrique (petites dilatations) cesse d'être valable. La contrainte σ est calculée par $\sigma = N/A$ où A est l'aire de la section droite *initiale* de l'éprouvette (donc invariable) ; σ est dite contrainte *nominale*. En réalité, au voisinage du point C, il faudrait écrire $\sigma' = N/A'$ où A' est l'aire réelle de l'éprouvette, variable au cours de l'essai ; σ' est dite contrainte *vraie*. Si l'on reporte σ' , on constate qu'elle augmente toujours (fig. 7.1a).

De même, dans cette zone, la dégradation du matériau s'accroît fortement (*endommagement*), en sorte que la pente de la droite de déchargement diminue par rapport à OH ($E' < E$, fig. 7.1).



Fig. 7.2 Striction d'éprouvettes de traction (photo A. Herzog).

7.2.2 Propriétés des aciers à palier

Etudions maintenant quelques particularités propres aux *aciers à palier*. La figure 7.3 présente un agrandissement de la zone du palier.

La transition entre la droite de Hooke et le palier AB peut présenter une pointe AF, définissant la **limite d'élasticité supérieure** $\sigma_{e\text{sup}}$; plus l'éprouvette est soignée (élimination des défauts de surface), plus $\sigma_{e\text{sup}}$ est élevée ; en pratique, les défauts (de surface) effacent en général complètement cette pointe. Le palier AB peut être une droite ou une ligne irrégulière ; son niveau, qui définit la **limite d'élasticité inférieure** $\sigma_{e\text{inf}}$, est assez sensible à la vitesse du déroulement de l'essai et est d'autant moins élevé que cette vitesse est faible. En pratique, on doit prendre $\sigma_e = \sigma_{e\text{inf}}$.

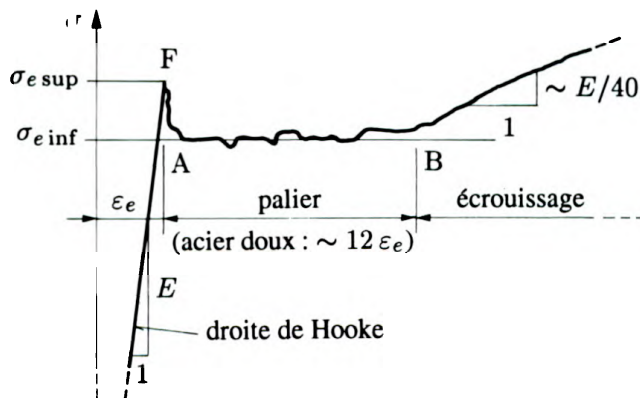


Fig. 7.3 Palier (ε_e : dilatation élastique maximale).

Sur une éprouvette polie, la plasticité se marque par l'apparition de bandes mates successives appelées *lignes* ou *bandes de Lüders* (fig. 7.4). Ces bandes sont en fait la trace des *plans de glissement* où le métal subit des déformations plastiques par glissements successifs des plans atomiques (propagation des dislocations). Ces zones planes sont toujours inclinées d'un angle de 45° à 50° sur l'axe de l'éprouvette, c'est-à-dire à peu près selon une *facette de glissement* (τ_{\max}) : cette constatation joue un rôle très important pour la suite (§ 7.10.1).

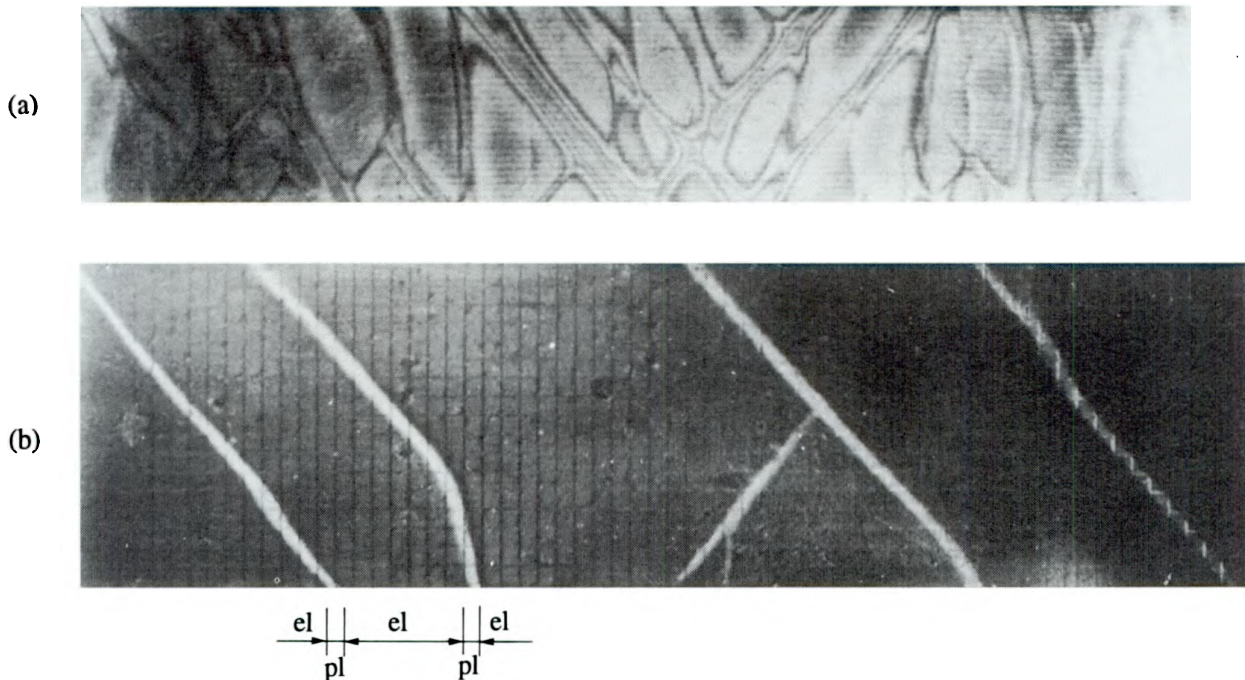


Fig. 7.4 Les lignes de Lüders trahissent la présence des plans de glissement et sont rendues bien visibles (a) par un vernis photoélastique ou (b) en polissant la surface (el : zone élastique ; pl : zone plastique ; photos MSM, Université de Liège).

Au fur et à mesure qu'on tire sur l'éprouvette, le nombre de bandes augmente, donnant à l'éprouvette une apparence rayée. Lorsque le palier d'étirage est entièrement parcouru, toute la surface de l'éprouvette devient mate et les bandes disparaissent.

Enfin, c'est l'apparition de la première bande de Lüders qui déclenche le palier et la chute éventuelle de la limite d'élasticité supérieure $\sigma_{e\sup}$ à sa valeur inférieure $\sigma_{e\inf}$.

Dans une bande de Lüders, le métal est entièrement plastique (point B, fig. 7.3) et, entre les bandes, il est encore élastique (point A). *Un point quelconque du palier ne représente donc pas un état homogène de l'acier*, mais un état composé de deux phases (fig. 7.4). Toutefois, dans les applications pratiques, on peut admettre un comportement homogène de l'acier avec dilatation progressive de A à B sous contrainte constante (aspect macroscopique).

Lorsqu'on teste une pièce d'acier laminée, la *croûte de laminage* saute, éclate, s'écaille à l'endroit où naît une bande de Lüders. Si l'on chauffe la pièce d'essai, la chaux s'écaille avec cette croûte, laissant apparaître très clairement la progression des bandes de Lüders et, donc, de la plastification. Cette propriété est fort employée dans les essais de laboratoire (fig. 7.5).

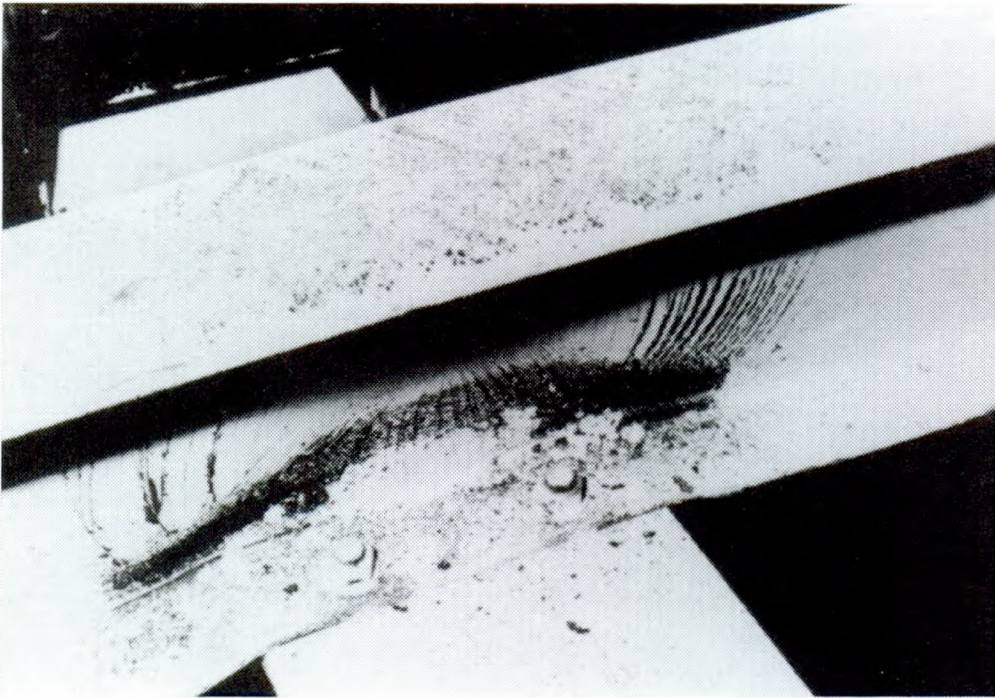


Fig. 7.5 Ecaillage de la chaux, montrant la plastification (et son caractère discontinu !) lors d'un essai de la zone d'appui d'un profilé laminé non raidi (photo MSM, Université de Liège).

7.2.3 Effet Bauschinger

Lorsqu'on soumet à compression une éprouvette d'un matériau ductile préalablement écroui en traction, on n'observe plus un comportement symétrique (par rapport à l'origine O , fig. 7.6a) : la limite de proportionnalité de compression est nettement inférieure à sa valeur en traction ($\sigma_p^- < \sigma_p^+$) et même à sa valeur initiale ($\sigma_p^- < \sigma_{p,i}^-$). Ce phénomène s'appelle *effet Bauschinger*. L'étendue AB du domaine élastique linéaire n'est pas la même que l'étendue initiale A_iB_i . Pour l'acier doux, il apparaît même une limite de proportionnalité distincte de la limite d'élasticité et du palier (fig. 7.6b).

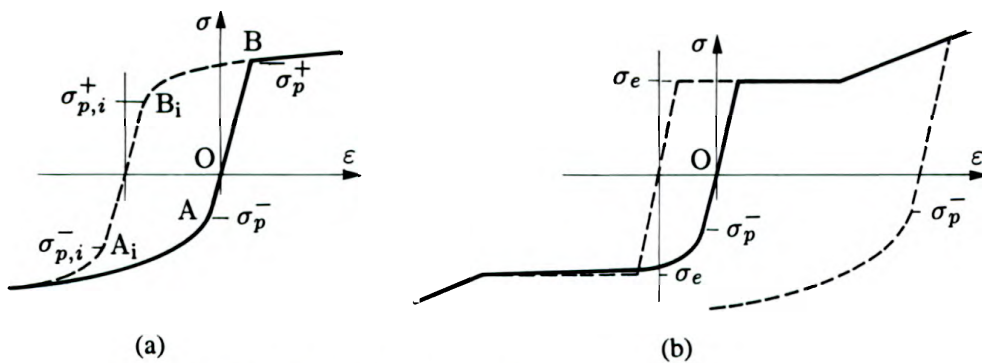


Fig. 7.6 Effet Bauschinger : (a) alliage d'aluminium ; (b) acier doux.

7.3 Essai de fatigue

Les essais statiques caractérisent le comportement d'un matériau sous une sollicitation croissant de façon essentiellement lente et monotone. Or, beaucoup de pièces intervenant dans la construction sont soumises au cours de leur vie à des efforts variables qui se reproduisent un grand nombre de fois. Elles se rompent parfois après de très nombreuses sollicitations, sous des contraintes qui sont toujours restées inférieures à la résistance ultime ou même inférieures à la limite d'élasticité (s'il s'agit d'un matériau ductile) du matériau mesurées dans un essai statique. On observe également que plus la variation des contraintes est forte, plus le nombre de cycles de sollicitation nécessaire à produire la rupture diminue.

On appelle **fatigue** le phénomène de la *décroissance de la résistance du matériau aux actions variables avec le temps* (§ 3.4.2).

Imaginons une série d'éprouvettes en acier, de même section, soumises à un effort normal qui est une fonction sinusoïdale du temps. La contrainte normale σ passe alternativement de la valeur σ_{\max} à la valeur σ_{\min} (fig. 7.7a). On appelle **différence des contraintes** la quantité $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$. Si, d'une éprouvette à l'autre, on fait varier cette différence, on constate que chaque éprouvette se rompt après un nombre de cycles différent.

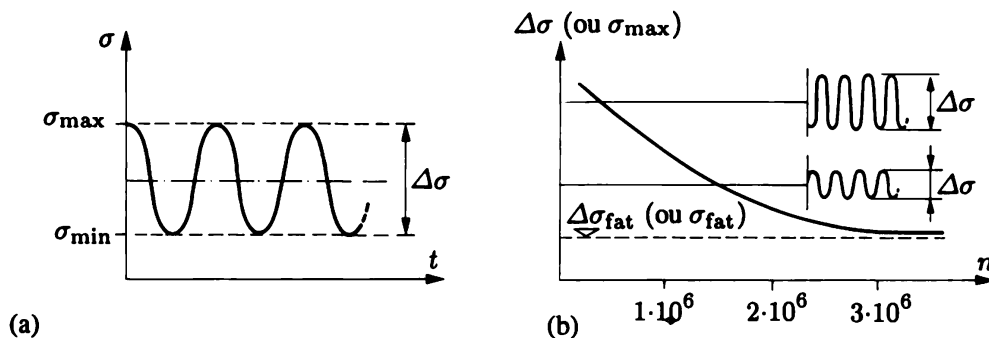


Fig. 7.7 Fatigue : (a) sollicitation pulsatoire ; (b) courbe de fatigue ou de Wöhler.

Traçons un diagramme en portant en abscisse le nombre n de cycles ayant provoqué la rupture et en ordonnée la différence $\Delta\sigma$ des contraintes (ou la contrainte maximale σ_{\max}) (fig. 7.7b). Les points correspondant aux diverses éprouvettes se disposent (avec une assez forte dispersion) sur une courbe continue appelée **courbe de Wöhler**. Pour de petits nombres n de cycles, n croît quand $\Delta\sigma$ (ou σ_{\max}) diminue ; pour un nombre de cycles suffisamment élevé et pour certains matériaux (acier par exemple), la courbe tend asymptotiquement vers une ligne horizontale. Cette horizontale définit la **limite de fatigue** $\Delta\sigma_{\text{fat}}$ (ou σ_{fat}). C'est la plus grande différence des contraintes (ou la plus grande contrainte) que le matériau étudié puisse supporter indéfiniment en fatigue, pour les conditions d'essai choisies. D'autres matériaux ne semblent pas avoir de limite de fatigue (alliages d'aluminium par exemple). On fixe alors une limite conventionnelle à un nombre de cycles élevé ($2 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^8$...).

La rupture d'une pièce par fatigue est un phénomène progressif ; la fissure de fatigue démarre à partir d'un défaut de la pièce, dit *entaille*, et s'agrandit à chaque cycle de sollicitation (fig. 7.8) ; la rupture ne se produit que lorsque la section résistante restante est insuffisante. Si le *type d'entaille*,

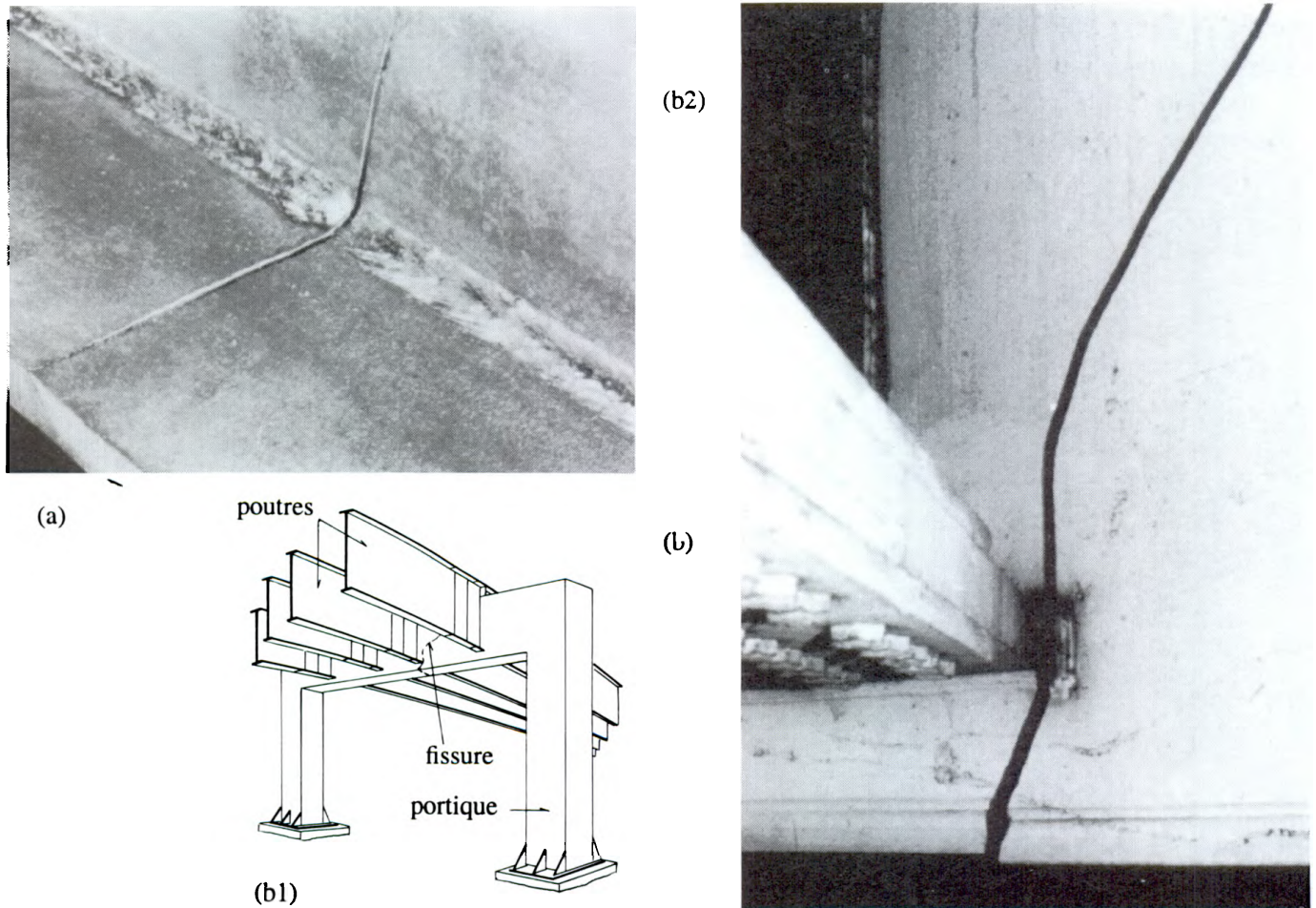


Fig. 7.8 Ruptures par fatigue : (a) fissure dans une poutre âme-semelles due à un défaut dans le cordon de soudure (photo et essai Prof. M. A. Hirt, ICOM, EPFL) ; (b) fissure de fatigue suivie d'une propagation fragile dans un portique d'un pont de chemin de fer près de Chicago (1978) : (b1) schéma d'ensemble ; (b2) vue de la rupture dans la zone de son point de naissance (documents aimablement fournis par le Prof. J. W. Fisher, Lehigh University).

la *différence* $\Delta\sigma$ et l'*allure de la sollicitation* sont les paramètres principaux de la résistance à la fatigue, cette dernière dépend aussi de la fréquence et de l'évolution des cycles de mise en charge, des contraintes maximale et minimale, de la température, du fini de surface, de l'état de contrainte (concentration), du matériau, etc.

7.4 Deux effets de la température

7.4.1 Fragilité

Un matériau ductile peut, dans certaines conditions, se rompre brusquement comme un matériau raide (fig. 7.9). L'acier est sensible à ce phénomène appelé *fragilité* (ou *rupture fragile* ; § 3.4.2). Pour le faire apparaître, il faut généralement réunir plusieurs conditions :

- avoir un *défait* (*entaille*) qui sera le point de départ de la rupture ;
- être en *traction* et, ce qui est encore plus défavorable, en traction dynamique (par choc) ;
- enfin, avoir une *température assez basse*.

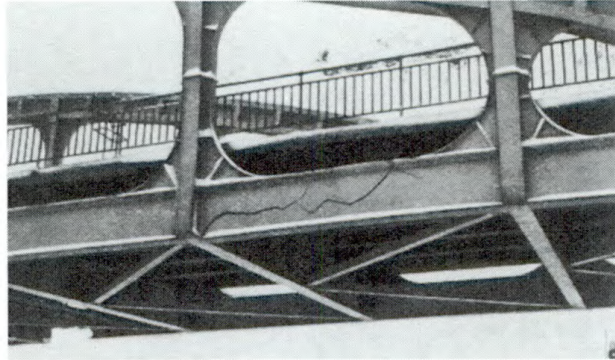


Fig. 7.9 Rupture fragile dans la membrure inférieure du pont de Kaulille, Belgique, 1940.
(Source : L'Ossature métallique, n° 2, février 1940.)

En fait, les deux premières conditions étant réalisées, on constate que la résistance d'une éprouvette d'acier chute brusquement, en dessous d'une certaine température, dite **température de transition**. On estime cette dernière à l'aide d'un essai qui consiste à rompre une éprouvette entaillée par choc ; le graphique de l'énergie de rupture en fonction de la température (fig. 7.10) laisse apparaître la température de transition ; les résultats d'essai sont assez dispersés.

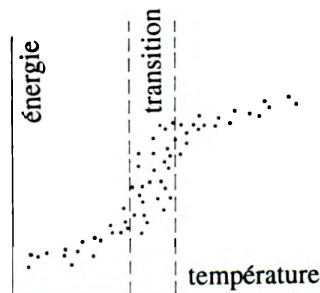


Fig. 7.10 Fragilité et température de transition.

Rupture fragile et rupture par fatigue peuvent être liées. Une fissure de fatigue peut jouer le rôle de défaut provoquant la rupture fragile ; la rupture fragile peut être considérée comme l'état instable d'une fissure de fatigue, en présence des conditions ad hoc (température basse ; traction) (fig. 7.8b).

7.4.2 Variation des propriétés mécaniques avec la température

Les caractéristiques des matériaux changent lorsque la température varie. Ce fait devient important en cas d'*incendie* par exemple. La figure 7.11 montre comment évoluent trois propriétés mécaniques

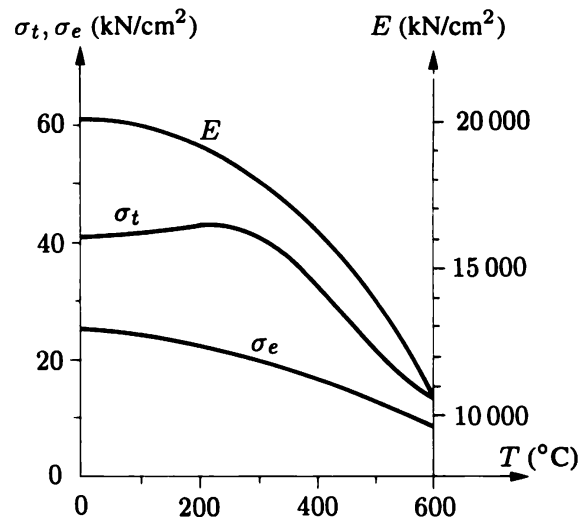


Fig. 7.11 Caractéristiques mécaniques de l'acier doux à différentes températures T .

de l'acier doux (E , σ_e , σ_t) avec la température. On voit que le module de Young E et la limite d'élasticité σ_e décroissent rapidement.

7.5 Influence du temps

7.5.1 Introduction

Dans de nombreuses circonstances, l'hypothèse que les propriétés d'un matériau sont indépendantes du temps ne suffit pas à traduire la réalité des phénomènes observés. Pour les métaux soumis à l'action prolongée de hautes températures (incendie, éléments de machine, turbines, tubes d'échangeurs), pour la plupart des matières plastiques à température ambiante, pour le béton, le bois, les sols, les enrobés bitumineux, etc., il est souvent vital de prendre en considération l'évolution des grandeurs en fonction du temps pour une action donnée.

7.5.2 Fluage, relaxation et recouvrance

La dépendance vis-à-vis du temps se manifeste essentiellement sous la forme de trois phénomènes :

- le **fluage** est l'accroissement de déformation en fonction du temps d'une pièce soumise à des forces données (constantes dans le temps) ;
- la **relaxation** est la diminution des contraintes en fonction du temps dans une pièce soumise à une déformation donnée (constante dans le temps) ;
- la **recouvrance** est la tendance de certains matériaux déformés par fluage à récupérer progressivement leurs dimensions et propriétés initiales lorsque les forces qui les sollicitent sont supprimées.

Notons que la terminologie n'est pas fermement établie dans ce domaine. Certains considèrent que le terme *fluage* englobe les trois phénomènes ci-dessus ; d'autres parlent d'*effets différés*.

7.5.3 Essais de fluage, relaxation et recouvrance

Effectuons un *essai de fluage* sur un métal à haute température. Une éprouvette de traction est soumise à une contrainte qui croît rapidement de 0 à $\bar{\sigma}$ (mais assez lentement toutefois pour éviter les effets dynamiques), puis est maintenue à cette valeur. On mesure la dilatation ε et on porte en diagramme son évolution en fonction du temps t . La courbe obtenue présente essentiellement quatre zones (fig. 7.12). La dilatation OA correspond à la déformation instantanée, essentiellement élastique, de l'éprouvette. En fait, le fluage commence à partir du point A. La zone AB est appelée *fluage primaire* ; elle est caractérisée par des valeurs décroissantes de la *vitesse de déformation*

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

La zone BC est le *fluage secondaire*, caractérisé par une pente constante ($\dot{\varepsilon} = \text{cste}$). Enfin, si la contrainte $\bar{\sigma}$ est suffisamment élevée, il peut exister un *fluage tertiaire*, à vitesse de déformation croissante à cause d'une striction lente qui conduit à la rupture finale de l'éprouvette.

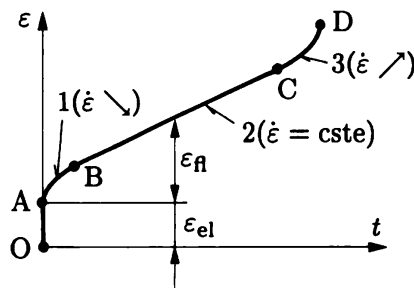


Fig. 7.12 Courbe type de fluage (1 : fluage primaire ; 2 : fluage secondaire ; 3 : fluage tertiaire).

Si la contrainte appliquée reste modérée (par exemple voisine de celle correspondant à l'état de service), la pente $\dot{\varepsilon}$ peut diminuer sans cesse et la dilatation totale se stabiliser à la valeur finale ε_{∞} ; cette circonstance est évidemment essentielle pour les matériaux de construction (fig. 7.13).

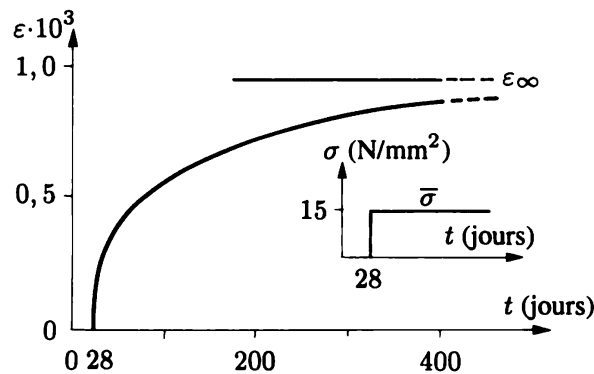


Fig. 7.13 Fluage d'une éprouvette de béton comprimée ($\bar{\sigma} = 15 \text{ N/mm}^2$ appliqué à 28 jours).

Un *essai de relaxation* consiste à soumettre une éprouvette à une dilatation donnée, maintenue ensuite constante, et à suivre, en fonction du temps, l'évolution de la contrainte qui y règne. On constate que la quantité (pente)

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$$

a d'abord une valeur élevée (négative), puis décroît progressivement. La figure 7.14 montre l'allure d'une courbe de relaxation.

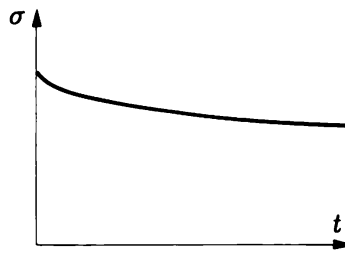


Fig. 7.14 Courbe de relaxation.

Dans un *essai de recouvrance*, il faut d'abord soumettre une éprouvette à une contrainte normale maintenue constante pendant un certain temps, puis supprimer cette contrainte. Après la période de fluage et le raccourcissement élastique instantané, on observe une diminution lente de la dilatation : c'est la *recouvrance* (fig. 7.15). Si ε tendait vers zéro, on aurait une recouvrance complète ; en général, il subsiste une *dilatation permanente* et on n'a alors qu'une recouvrance partielle.

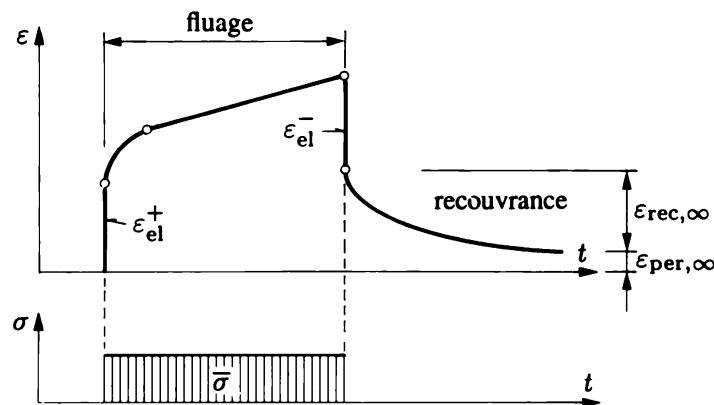


Fig. 7.15 Phénomène de recouvrance (après fluage).

7.5.4 Essai de courte durée, rupture par fluage et hystérésis

Il est clair qu'un essai de traction ou compression, effectué sur un matériau présentant du fluage, sera faussé par ce fluage : la courbe (σ, ε) obtenue variera avec la *durée de l'essai* (par exemple, fig. 7.17).

On appelle *essai de courte durée* un essai effectué assez rapidement pour éliminer l'influence du fluage, mais sans effet dynamique toutefois. Pour illustrer quelques notions nouvelles, choisissons un matériau de construction important, le béton de ciment.

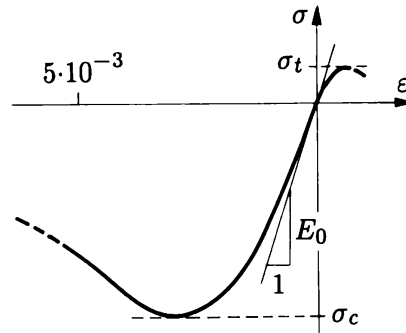


Fig. 7.16 Courbe (σ, ε) du béton (essai de courte durée).

Réalisons un essai de traction sur une éprouvette de béton en prenant soin d'effectuer assez rapidement la mise en charge (en quelques minutes). On obtient la courbe (σ, ε) de la figure 7.16. Elle comporte une partie linéaire très courte (pour certains bétons de mauvaise qualité, elle est pratiquement inexistante), puis s'incurve en passant par un maximum σ_t (résistance à la traction). La partie décroissante correspond à la fissuration progressive du béton.

En compression, le comportement du béton est assez différent (fig. 7.16). On y atteint des contraintes et dilatations bien plus élevées qu'en traction ; après avoir atteint la valeur limite σ_c (résistance à la compression), l'intensité de la contrainte de compression diminue à cause de la désagrégation progressive du béton qui précède la rupture.

Les dilatations sont, comparativement à l'acier, beaucoup plus petites : la ductilité est moindre, mais non inexistante. Couplée à celle de l'acier, elle est suffisante pour justifier l'application du calcul plastique aux structures en béton armé et précontraint.

Le module d'élasticité à l'origine E_0 , pente du diagramme (σ, ε) à l'origine, est très variable avec la composition du béton, l'âge du béton, la durée de l'essai, etc. ; il en est d'ailleurs de même de tout le diagramme. La figure 7.17 montre l'allure des résultats obtenus en compression pour des durées de mise en charge variables : on constate que les intensités de σ_c et de E_0 varient avec cette durée.

En particulier, la résistance à la compression diminue avec le temps de mise en charge, jusqu'à une certaine limite $\sigma_{c\infty}$ que le matériau peut supporter indéfiniment. Pour une éprouvette soumise à une contrainte inférieure à cette limite ($\sigma_1 < \sigma_{c\infty}$), on observe sa dilatation élastique instantanée (ε_{el}) et sa dilatation par fluage (ε_{fl}). Si le niveau de contrainte est supérieur à la limite en question ($\sigma_2 > \sigma_{c\infty}$), l'éprouvette va se rompre après un certain temps, pendant que s'effectue son fluage (point C) : ce phénomène s'appelle la **rupture par fluage**.

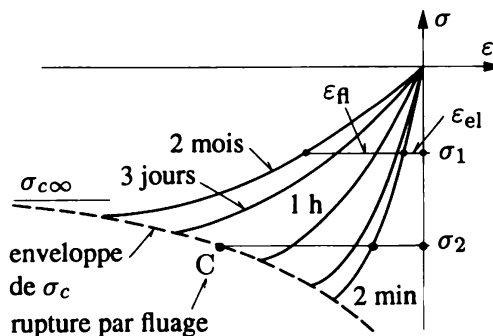


Fig. 7.17 Influence de la durée de l'essai et rupture par fluage (béton).

On en conclut qu'il ne faut pas baser le dimensionnement sur des résultats d'essai de courte durée, sous peine d'essuyer de graves mécomptes.

Si, au cours d'un essai de compression de courte durée, on décharge l'éprouvette après avoir atteint le point A (fig. 7.18), le point représentatif du diagramme parcourt la courbe AB qui admet en A une tangente de même pente qu'à l'origine. Après déchargement, il subsiste une dilatation résiduelle ε_{rsd} . Cependant, on constate que ce raccourcissement décroît avec le temps ; le point B passe progressivement en C : c'est un phénomène de recouvrance.

Si, au lieu de laisser l'éprouvette au repos, on la remet immédiatement en charge à partir de B, on repart selon une tangente dont la pente vaut encore E_0 . On peut ainsi décrire une série de cycles de mise en charge (fig. 7.19). Si le niveau de contrainte σ_{min} n'est pas trop grand (en valeur absolue), on constate que les dilatations résiduelles relatives à chaque cycle (ε_{rsd1} , ε_{rsd2} ...) diminuent progressivement et que, après un certain nombre de cycles, elles s'annulent : c'est le phénomène d'accommodation ; le point représentatif du diagramme parcourt une boucle fermée $A_{\infty}B_{\infty}$, dite *boucle d'hystérésis*. Au contraire, si le niveau de contrainte est élevé, les déformations augmentent à chaque cycle, jusqu'à rupture.

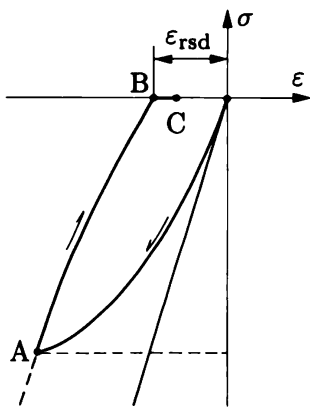


Fig. 7.18 Décharge du béton.

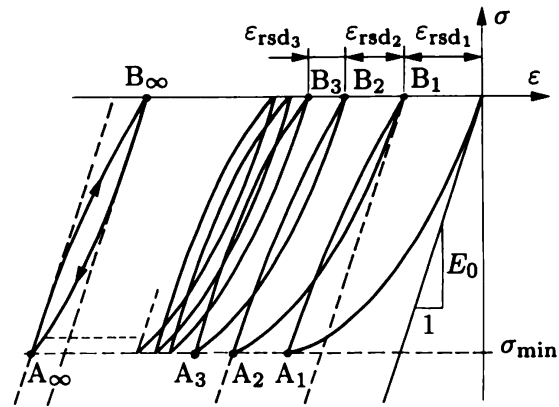


Fig. 7.19 Accommodation aux cycles de compression (béton).

De manière générale, il y a *hystérésis* lorsque les courbes de chargement et de déchargement ne coïncident pas. Ce phénomène est dû à une dissipation d'énergie dans la matière. Dans le cas du béton, on a une dissipation de chaleur par frottement interne dans les microfissures existant entre la pâte de ciment et les agrégats. Dans les métaux, il y a dissipation d'énergie dans les plans de glissement (plasticité ; fig. 7.4) ; la figure 7.20 montre l'allure de boucles d'hystérésis obtenues par plastification cyclique.

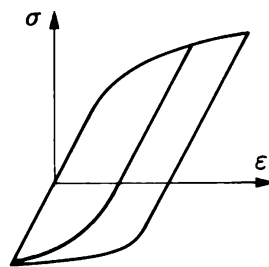


Fig. 7.20 Hystérésis par sollicitation cyclique d'un alliage d'aluminium.

7.6 Modèles mathématiques des matériaux (lois constitutives ou de comportement)

Ces modèles ont pour but de représenter, sous forme analytique (lois constitutives et paramètres), les comportements observés expérimentalement.

Cette étape de modélisation est aussi difficile que celle d'expérimentation ; par exemple, il peut être extrêmement délicat d'adapter des lois générales à un petit nombre d'essais, ou encore d'extrapoler à partir des résultats expérimentaux obtenus.

7.7 Modèles unidimensionnels indépendants du temps

7.7.1 Modèles élastiques

Ces modèles sont caractérisés par leur *réversibilité* parfaite : les courbes de chargement et déchargement coïncident et il n'y a pas d'hystérésis.

Modèle élastique linéaire

A l'exception du béton, les matériaux de construction usuels présentent un diagramme (σ, ε) qui débute par une partie linéaire, la *droite de Hooke* (fig. 7.21a). Dans la plupart des constructions et des machines en service (à l'état limite d'utilisation, § 3.4.2), les matériaux travaillent effectivement dans cette zone élastique linéaire pour laquelle on peut écrire (sect. 2.3)

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7.1)$$

où E est, rappelons-le, le module d'élasticité (ou module de Young) du matériau considéré. C'est la *loi de Hooke unidimensionnelle*.

Modèle élastique non linéaire

Dans ce modèle, les déformations ne sont plus liées aux contraintes par une loi linéaire. On a donc simplement (fig. 7.21b)

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (7.2)$$

Ce modèle est assez peu utilisé, mais on pourrait s'en servir pour étudier les déformations du caoutchouc, pour autant qu'elles restent suffisamment faibles. En outre, il est très utile sur le plan théorique (énergie).

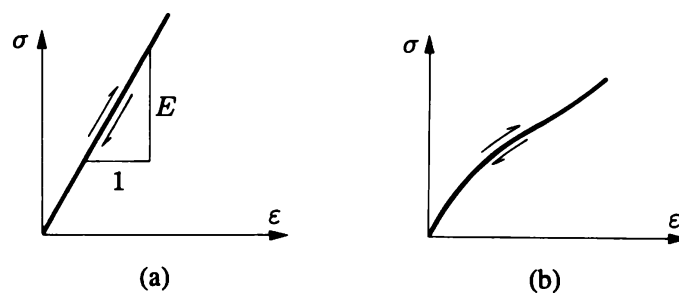


Fig. 7.21 Modèles élastiques : (a) modèle linéaire (Hooke) ; (b) modèle non linéaire.

7.7.2 Modèles plastiques

Dans ces modèles, une fois la zone élastique dépassée, lorsqu'on entre en plasticité, le comportement devient *irréversible* ; cette caractéristique marque la différence essentielle par rapport aux modèles élastiques précédents.

En un point quelconque du diagramme (par exemple B, fig. 7.23a) existent en fait deux lois constitutives ; si, à partir de B,

- ε augmente, on reste sur la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, qui est monotone croissante (éventuellement horizontale) ; on dit qu'il y a *chargement (plastique)* ;
- ε diminue, on se place sur une parallèle à la droite de Hooke, d'équation $\sigma - \sigma' = E (\varepsilon - \varepsilon')$; on dit qu'il y a *déchargement (élastique)*.

Enfin, en un point quelconque du diagramme (par exemple A, fig. 7.23a), on peut définir deux modules d'élasticité :

- le *module d'élasticité tangent*, pente de la tangente en A,

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (7.3)$$

- le *module d'élasticité sécant*, pente de la droite OA,

$$E_s = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_A} \quad (7.4)$$

La plasticité étant précédée de déformations élastiques, les modèles sont dits *élastiques plastiques* (ou *élasto-plastiques*). Toutefois, par rapport aux déformations plastiques, les déformations élastiques sont très faibles et on peut parfois les négliger. On obtient ainsi le modèle *rigide plastique*, déduit du précédent en faisant tendre le module de Young vers l'infini.

Modèle élastique parfaitement plastique

Ce modèle sert à décrire les matériaux qui présentent un palier d'étirage bien marqué, tels que l'acier doux, et dont les dilatations restent suffisamment faibles pour ne pas atteindre la zone d'écrouissage (zone BC, fig. 7.1a).

On admet que ce matériau se comporte de façon linéaire élastique jusqu'à la limite d'élasticité σ_e . Lorsque celle-ci est atteinte, la contrainte cesse de croître et la dilatation ε peut prendre une valeur indéterminée. En cas de déchargement à partir d'un point quelconque du palier, le matériau se comporte élastiquement selon une parallèle à la droite de Hooke (fig. 7.22a).

Les équations sont simplement

$$\begin{array}{lll} \sigma = E\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_e = \sigma_e/E & \text{(Hooke)} \\ \sigma = \sigma_e & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_e & \text{(chargement)} \\ \sigma - \sigma' = E(\varepsilon - \varepsilon') & \text{si } \varepsilon < \varepsilon' & \text{(déchargement)} \end{array} \quad (7.5)$$

Ce modèle est employé intensivement dans le *calcul plastique* des structures (chap. 14 et suivants).

Si l'on ignore les déformations élastiques, on obtient le modèle *rigide parfaitement plastique* (fig. 7.22b).

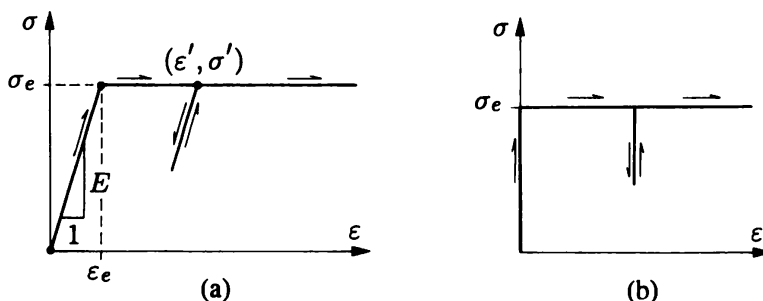


Fig. 7.22 Modèles plastiques sans écrouissage : (a) modèle élastique parfaitement plastique ; (b) modèle rigide parfaitement plastique.

Modèle élasto-plastique à écrouissage

Pour des matériaux sans palier d'étirage, on a recours à un modèle élasto-plastique à écrouissage : une zone linéaire suivie d'une zone élasto-plastique (fig. 7.23a).

Le choix de la limite de proportionnalité σ_p de la zone linéaire et celui de l'équation de la zone élasto-plastique se basent sur les résultats expérimentaux. Dans ce modèle, on admet que σ_p joue le rôle de limite d'élasticité ($\sigma_p \equiv \sigma_e$) ; la limite σ_p peut être dépassée et, dans la zone plastique, la dilatation n'est plus indéterminée. En cas de déchargement, le matériau se comporte élastiquement.

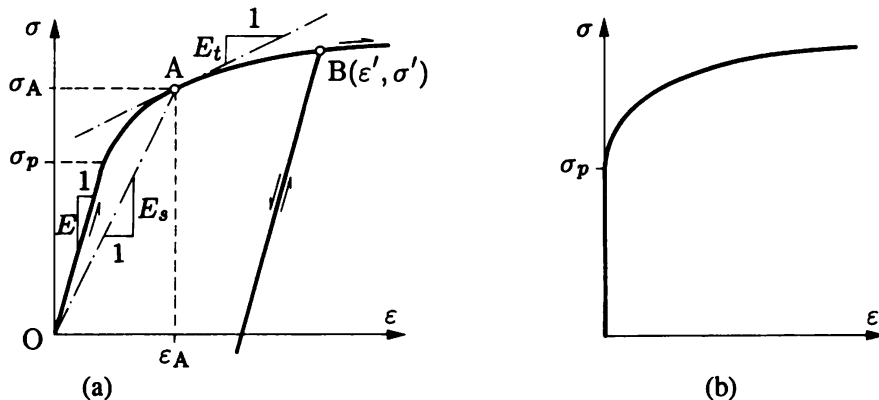


Fig. 7.23 Modèles plastiques avec écrouissage : (a) modèle élasto-plastique ; (b) modèle rigide plastique.

Les aciers à haute résistance (par exemple : aciers pour câbles) et les alliages d'aluminium (fig. 7.1b) obéissent à un tel modèle, pour lequel

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon & \text{si } \sigma \leq \sigma_p & \quad (\text{Hooke}) \\ \sigma &= \sigma(\varepsilon) & \text{si } \sigma > \sigma_p & \quad (\text{chargement}) \\ \sigma - \sigma' &= E(\varepsilon - \varepsilon') & \text{si } \sigma < \sigma' & \quad (\text{déchargement}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

On utilise fréquemment la *loi de Ramberg-Osgood*, dont la forme mathématique permet de représenter l'ensemble du modèle par une seule expression

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B} \right)^n \quad (7.7)$$

où B et n sont deux paramètres caractérisant le matériau ; si on introduit la limite d'élasticité conventionnelle $\sigma_{0,2}$, on peut écrire (7.7) sous la forme

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n \quad (7.8)$$

avec

$$\sigma_{0,2} = B \sqrt[n]{0,002} \quad (7.9)$$

Enfin, si l'on néglige la partie élastique des déformations, on obtient le modèle *rigide plastique avec écrouissage* (fig. 7.23b).

7.7.3 Remarque

A l'exception du modèle de Hooke, les modèles précédents introduisent tous une loi constitutive non linéaire ; il y a donc perte de l'hypothèse de linéarisation matérielle (§ 2.7.2). Si l'on veut tenir compte du comportement des matériaux au-delà de σ_e ou σ_p , ce qui est aujourd'hui une tendance fort marquée, des formules du genre

$$u = \frac{NL}{EA} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad \sigma = \frac{M}{I} y$$

ne sont plus valables ; il faut en établir de nouvelles, en effectuant une analyse *matériellement non linéaire*. Dans ce domaine, le *calcul plastique* prend une importance pratique toujours plus grande, puisque même les normes l'autorisent ou le recommandent (acier, béton).

7.8 Modèles unidimensionnels dépendants du temps

7.8.1 Viscosité

La loi la plus simple caractérisant un *solide* est celle où la contrainte est proportionnelle à la déformation ; on peut la schématiser par un *ressort* (fig. 7.24) ; elle caractérise le *solide élastique linéaire* ou *solide de Hooke*.

La loi la plus simple caractérisant un *fluide* consiste à supposer que la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon} = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (7.10)$$

Cette modélisation introduit une dépendance par rapport au temps et caractérise le *fluide visqueux linéaire* ou *fluide de Newton* ; la constante μ s'appelle *coefficient de viscosité* [Nm^{-2}s].

De manière générale, il y a *viscosité* quand il y a *dépendance entre les contraintes et les vitesses de déformation*. La loi (7.10) caractérise le *modèle visqueux linéaire* ; il peut se schématiser par un *amortisseur* (cylindre, huile et piston troué ; fig. 7.25).

Un tel modèle ne peut évidemment représenter un solide ; mais, en l'associant à un modèle indépendant du temps, on obtient la représentation la plus simple des solides dont les caractéristiques dépendent du temps.

On peut d'ailleurs combiner entre eux plusieurs ressorts et amortisseurs (en série, en parallèle, etc.). Un tel groupement s'appelle un *modèle rhéologique*. On l'illustre souvent par un dessin montrant les ressorts, les amortisseurs et leurs liaisons. *Ce dessin représente en fait une fibre du matériau, de section et longueur unités*. Les combinaisons possibles sont évidemment multiples.

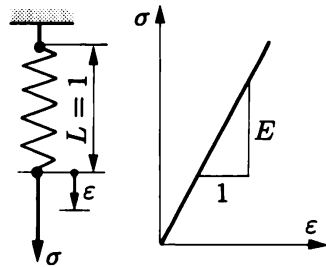


Fig. 7.24 Solide de Hooke.

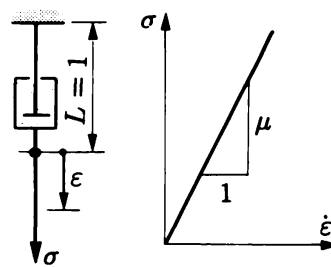


Fig. 7.25 Fluide de Newton.

7.8.2 Modèle viscoélastique linéaire

Le *modèle viscoélastique linéaire* résulte d'une combinaison de modèles élastiques et visqueux *linéaires* (Hooke et Newton) ; dans cette combinaison, les variables σ et ϵ doivent rester liées par des relations linéaires.

Application : modèle de Maxwell

Dans ce modèle, une fibre du matériau viscoélastique linéaire est composée d'un ressort et d'un amortisseur placés en série (fig. 7.26).

La loi constitutive de ce modèle s'obtient en remarquant que, sous une contrainte σ , les deux éléments (r = ressort, a = amortisseur) de la fibre sont soumis à la même contrainte

$$\sigma = \sigma_r = \sigma_a$$

tandis que la dilatation ϵ de la fibre est la somme des dilatations de chaque élément (fig. 7.26)

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_a$$

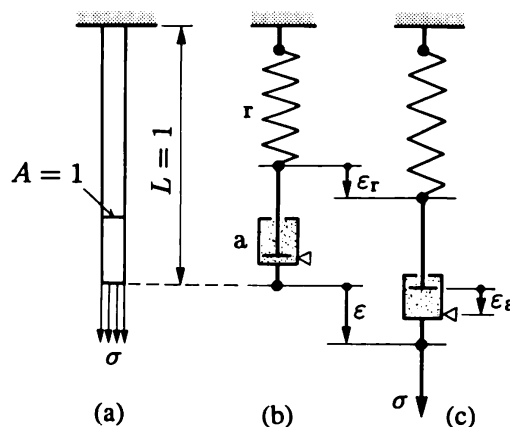


Fig. 7.26 Modèle de Maxwell : (a) fibre ; (b) modèle non chargé ; (c) modèle chargé.

Utilisons (7.1) pour ε_r ; différencions alors par rapport au temps et introduisons (7.10) pour $\dot{\varepsilon}_a$; on obtient la loi

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (7.11a)$$

ou

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\mu} \sigma = E \dot{\varepsilon} \quad (7.11b)$$

Exemple 7.1

Comment le modèle de Maxwell répond-il en fluage et recouvrance, c'est-à-dire quand on le soumet, au temps $t = 0$, à une contrainte $\bar{\sigma}$, maintenue constante jusqu'au temps t_1 , nulle ensuite (fig. 7.27) ?

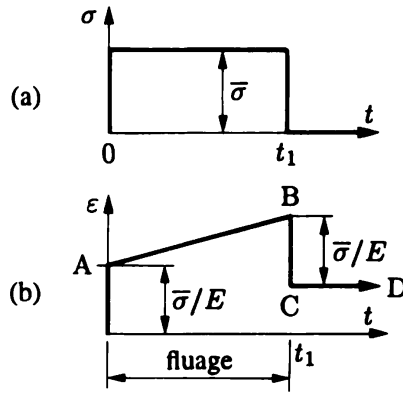


Fig. 7.27 Modèle de Maxwell en fluage et recouvrance : (a) action ; (b) réponse.

Puisque $\sigma = \text{cste}$, alors $\dot{\sigma} = 0$ et (7.11a) se réduit à $\dot{\varepsilon} = \bar{\sigma}/\mu$. Intégrons : $\varepsilon = \bar{\sigma}t/\mu + C$. En $t = 0$, seule la dilatation élastique se produit instantanément, d'où $\varepsilon(0) = \bar{\sigma}/E$; la constante d'intégration vaut donc $C = \bar{\sigma}/E$ et la réponse cherchée est

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} + \frac{\bar{\sigma}}{\mu} t \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (a)$$

La droite AB de la figure 7.27(b) traduit le *fluage* du modèle de Maxwell ; on voit qu'il est *proportionnel* à la contrainte appliquée (fluage dit *linéaire*, hypothèse classique pour le béton sous faible contrainte).

Pour $t > t_1$, on a $\sigma = 0$ et donc $\dot{\sigma} = 0$; dans (7.11a), il reste $\dot{\varepsilon} = 0$, d'où $\varepsilon = \text{cste}$. En $t = t_1$, on récupère la dilatation élastique instantanée $\bar{\sigma}/E$ et il reste donc, avec (a),

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{\mu} t_1 \quad (t > t_1) \quad (b)$$

Le modèle de Maxwell ne présente donc *aucune recouvrance* (fig. 7.27b, droite CD).

Exemple 7.2

Comment le modèle de Maxwell répond-il à la relaxation, c'est-à-dire si on le soumet instantanément à une dilatation initiale $\bar{\varepsilon}$ maintenue constante dans le temps (fig. 7.28) ?

Puisque $\varepsilon = \text{cste}$, $\dot{\varepsilon} = 0$ et, dans (7.11b), il reste $\dot{\sigma} + (E/\mu)\sigma = 0$, dont l'intégrale est $\sigma = C e^{-(E/\mu)t}$. Au temps $t = 0$, la contrainte instantanée initiale est $\sigma(0) = E\bar{\varepsilon}$, car seul le ressort travaille ; d'où $C = E\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}$ et la réponse cherchée est

$$\sigma = E\bar{\varepsilon} e^{-(E/\mu)t} = \bar{\sigma} e^{-(E/\mu)t} \quad (c)$$

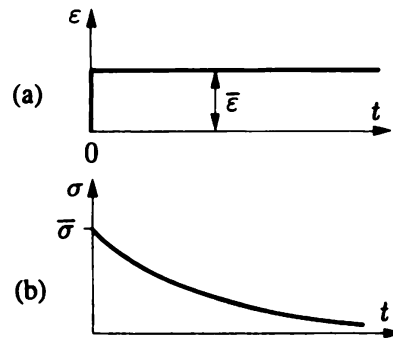


Fig. 7.28 Modèle de Maxwell en relaxation : (a) action ; (b) réponse.

Cette exponentielle décroissante, tendant vers zéro (fig. 7.28b), représente la *relaxation* du modèle de Maxwell.

On peut vérifier que le modèle de Maxwell, bien que très rudimentaire, traduit déjà l'allure des courbes de fluage, recouvrance et relaxation de certains matériaux réels.

7.8.3 Remarques

On s'est limité aux réponses viscoélastiques linéaires, mais il existe des comportements plus complexes, par exemple viscoélastiques non linéaires, viscoplastiques, etc.

Parmi les matériaux de construction usuels, le béton a certainement le comportement le plus compliqué. Il ne faut pas oublier que ce dernier est en effet non linéaire presque dès l'origine, plastique et visqueux. De plus, les propriétés mécaniques *dépendent de l'âge du béton* (ce qui introduit une dépendance sur deux paramètres de temps : durée de l'essai et âge du matériau). Enfin, le comportement est encore fortement influencé par le phénomène du *retrait*, également fonction du temps...

Le fluage du béton et la relaxation des aciers de précontrainte sont deux des phénomènes qui contribuent le plus aux pertes de précontrainte évoquées au paragraphe 4.5.6 (environ 3 à 4 % pour l'acier et 11 à 12 % pour le béton).

7.9 Modèles à deux et trois dimensions

Les modèles mathématiques présentés aux sections précédentes sont valables uniquement en traction et compression uniaxiales. Si, dans la réalité, les corps solides sont le siège d'états bi- ou tridimensionnels, leur comportement peut aussi faire l'objet de modélisations sous forme de lois mathématiques bi- ou tridimensionnelles.

L'étude de ces modèles est souvent fort ardue et sort du cadre de la mécanique des structures. Seul le *modèle élastique linéaire isotrope* (vol. 3, chap. 4) est rappelé ici vu son importance pratique. Ses lois constitutives en sont

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ces formules traduisent la *loi de Hooke généralisée*. (σ et τ sont les contraintes normales et tangentielles, ε et γ les dilatations et glissements, et G est le module de glissement ou de Coulomb : $G = E/[2(1 + \nu)]$.)

7.10 Critères rhéologiques

7.10.1 Critères de plastification des matériaux élasto-plastiques (métaux)

Lorsqu'on effectue un essai de traction uniaxiale sur un matériau ductile (§ 2.5.2), on constate que la plastification devient sensible lorsque la contrainte dans l'éprouvette atteint et dépasse la limite d'élasticité σ_e (ou, éventuellement, la limite de proportionnalité σ_p , en admettant, comme au paragraphe 7.7.2, que $\sigma_p \equiv \sigma_e$).

Par contre, quand les matériaux ductiles mis en œuvre dans les éléments de construction ou de machine sont le siège d'états bi- ou tridimensionnels de contrainte, on peut se demander *quelles sont les combinaisons des contraintes* ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) *en un point qui provoquent les premières déformations permanentes en ce point, c'est-à-dire la plastification locale du matériau ductile*.

Dans ce paragraphe, on répond à cette question en se bornant aux notions strictement indispensables.

Critère de Tresca ou de la contrainte tangentielle maximale

L'expérience montre que les premières déformations plastiques sensibles des métaux ductiles se produisent par glissement relatif des couches d'atomes l'une sur l'autre ; ce fait est mis en évidence, pour l'acier doux, par les *bandes de Lüders*, qui se développent à peu près selon les facettes de glissement (§ 7.2.2 ; fig. 7.4). Il est donc naturel de supposer que *ces déformations apparaissent lorsque la contrainte tangentielle maximale* (égale à la demi-différence des contraintes principales extrêmes ; vol. 3, sect. 2.10) *atteint une valeur déterminée*

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = C \quad (7.13)$$

la même quel que soit le tenseur contrainte envisagé.

Cette hypothèse, avancée dès 1864 par l'ingénieur français Tresca sur la base d'expériences assez grossières, a été confirmée en 1900 par les essais précis du professeur anglais Guest.

Pour obtenir la valeur C que τ_{\max} ne peut pas dépasser, il suffit de se placer dans un cas simple. Si l'on effectue, par exemple, un essai de traction, on obtient (fig. 7.29 ; vol. 3, § 2.9.3) $\sigma_I = \sigma$ et

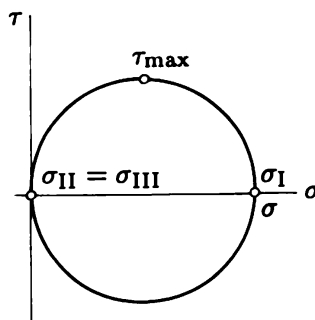


Fig. 7.29 Cercles de Mohr de traction pure.

$\sigma_{III} = 0$, de sorte qu'on a $\tau_{\max} = \sigma/2$. Les déformations plastiques commençant au moment où la contrainte de traction atteint la limite d'élasticité σ_e , on doit poser $\tau_{\max} = \sigma_e/2$ et la condition de glissement plastique de Tresca s'écrit

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$

Il est intéressant de mettre la formule ci-dessus sous la forme d'une combinaison des contraintes principales qui soit directement comparable à σ_e : en multipliant par 2 les deux membres de cette égalité, on trouve ainsi, à la plastification,

$$\sigma^* = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e \quad (7.14)$$

La quantité σ^* s'appelle **contrainte de comparaison** ; ce n'est pas une contrainte qui se produit réellement dans le matériau, mais seulement une grandeur commode pour évaluer le danger de plastification (elle permet une comparaison directe avec la limite d'élasticité). On remarque que le critère de plastification de Tresca (7.14) ne dépend pas de la valeur de la contrainte principale intermédiaire σ_{II} .

Applications

1. Traction pure

Dans une pièce soumise à la seule traction de contrainte σ , on a $\sigma_I = \sigma$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ (fig. 7.29), et, dans (7.14), on trouve $\sigma^* = \sigma$, comme cela doit être.

2. Cisaillement pur

Dans l'état de cisaillement pur caractérisé par $\sigma_I = \sigma = \tau$, $\sigma_{II} = 0$ et $\sigma_{III} = -\sigma = -\tau$ (fig. 7.30), on obtient $\sigma^* = 2\tau$ dans (7.14) ; la plastification commence donc lorsque τ atteint une valeur τ_e égale à la moitié de σ_e

$$\tau = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2} \quad (7.15)$$

où τ_e est appelée la **limite d'élasticité en cisaillement pur**. On retrouve bien l'hypothèse de départ, à savoir que le critère de Tresca postule que la limite d'élasticité en cisaillement pur est la moitié de celle en traction.

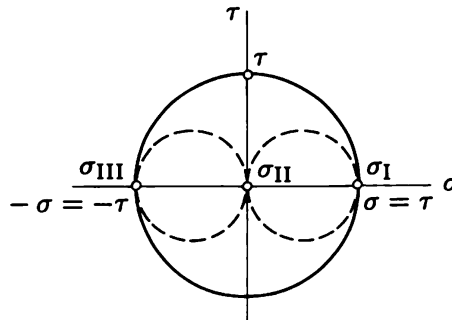


Fig. 7.30 Cercles de Mohr de cisaillement pur.

3. Etat plan de contrainte

Dans l'état plan de contrainte défini par les composantes σ_x , σ_y et τ_{xy} du tenseur contrainte (fig. 7.31), on trouve aisément que le critère (7.14) prend la forme

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_e \quad (7.16)$$

avec $|\sigma_x| \leq \sigma_e$ et $|\sigma_y| \leq \sigma_e$.

4. Poutres à plan moyen

L'étude de la répartition des contraintes normales et tangentiellles dans les poutres (cas plan) conduit à l'état de contrainte

$$\sigma_x \equiv \sigma \quad \sigma_y \equiv 0 \quad \tau_{xy} \equiv \tau$$

qui est un état plan de contrainte dégénéré (fig. 7.32). Le critère de Tresca (7.16) s'écrit donc dans ce cas

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_e \quad (7.17)$$

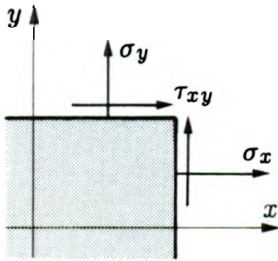


Fig. 7.31 Etat plan de contrainte.

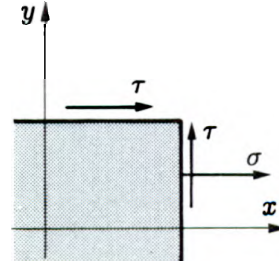


Fig. 7.32 Etat plan particulier ($\sigma_y = 0$), typique des poutres.

Représentation graphique

Le critère de Tresca peut faire l'objet de la représentation graphique suivante. Abandonnons momentanément la convention $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ et notons simplement $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les contraintes principales en un point. Dans ce cas, le critère de Tresca (7.14) s'écrit sous l'une des trois formes

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_e \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_e \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_e$$

Dans le système d'axes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ces équations sont celles de six plans formant un prisme hexagonal régulier dont l'axe est la trisectrice des axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (fig. 7.33). Les points $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ situés à l'intérieur de ce prisme correspondent donc à un état élastique ; ceux situés sur la surface du prisme correspondent à un état plastique et ceux situés à l'extérieur du prisme sont physiquement inadmissibles (puisqu'on doit avoir $\sigma^* \leq \sigma_e$).

Critère de von Mises

En 1913, le professeur autrichien von Mises⁽¹⁾ a proposé de substituer au prisme hexagonal de Tresca le cylindre qui lui est circonscrit, afin d'obtenir un critère qui s'exprime par une seule équation.

⁽¹⁾ Ce critère a été initialement proposé par J. C. Maxwell (1856, dans sa correspondance), puis, indépendamment, par M. T. Huber (Pologne, 1904) ; on ne s'en rendit compte qu'après 1923.

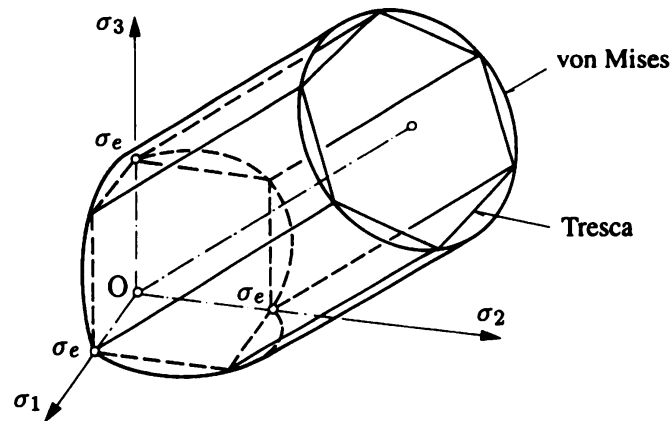


Fig. 7.33 Prisme hexagonal de Tresca et cylindre de von Mises.

L'équation de ce cylindre est (fig. 7.33)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2$$

En faisant apparaître une contrainte de comparaison σ^* , le critère de plastification de von Mises s'écrit, à la plastification,

$$\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_e \quad (7.18)$$

Dans ce critère, la contrainte principale intermédiaire σ_{II} joue donc un rôle, ce qui n'était pas le cas dans le critère de Tresca. Des recherches expérimentales précises ont effectivement mis en valeur son importance dans l'apparition des premières déformations plastiques et ont confirmé *après coup* la validité du critère de von Mises.

Applications

1. Cisaillement pur

En procédant comme précédemment, on trouve que la plastification débute lorsque τ atteint la valeur

$$\tau = \tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_e \quad (7.19)$$

Le critère de von Mises postule donc que la limite d'élasticité en cisaillement pur est égale aux 577/1 000 de la limite d'élasticité en traction. C'est l'excellent accord de ce résultat avec les expériences qui tend à faire préférer ce critère à celui de Tresca (fig. 7.35).

2. Etat plan de contrainte

Le critère de von Mises y prend la forme (ex. 7.11.7)

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_e \quad (7.20)$$

3. Poutres à plan moyen

Dans ce cas, il vient

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_e \quad (7.21)$$

Remarque

Le critère de von Mises a reçu diverses interprétations physiques et théoriques qui l'ont fait connaître sous d'autres dénominations : critère de la contrainte tangentielle octaédrique, de l'énergie de distorsion maximale, etc. (vol. 3, ex. 4.8.7).

Comparaison des critères de Tresca et von Mises

La représentation graphique des critères de Tresca et von Mises permet de les comparer facilement : dans le système d'axes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, leurs équations sont celles d'un prisme hexagonal et du cylindre circonscrit (fig. 7.33).

Si l'une des contraintes principales est nulle, par exemple $\sigma_2 = 0$, on a un état plan de contrainte dont la figure est l'intersection du plan $\sigma_2 = 0$ avec le cylindre et le prisme (fig. 7.34). Aux points A à F, les deux critères coïncident : en A et D, on a $\sigma_1 = \sigma_3 = \pm\sigma_e$ et $\sigma_2 = 0$; en B et E, on a $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \pm\sigma_e$; en C et F, on a $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 = \pm\sigma_e$. On vérifie facilement que, de manière générale, les critères de Tresca et von Mises coïncident lorsque deux des contraintes principales sont égales (arêtes du prisme).

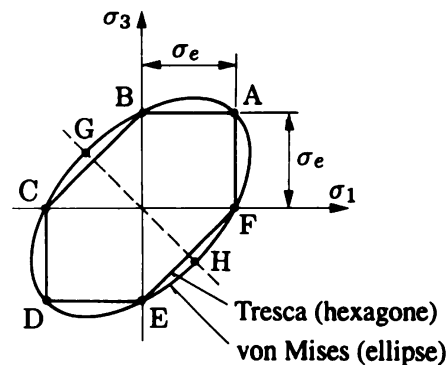


Fig. 7.34 Comparaison des critères de Tresca et von Mises dans le cas plan.

Par contre, c'est au milieu de AB, BC, ..., FA que leur différence est la plus grande (de façon générale, quand l'une des contraintes principales vaut la moyenne des deux autres). En particulier, aux points G et H du cas plan (fig. 7.34), on a $\sigma_1 = -\sigma_3$: ce sont des états de cisaillement pur pour lesquels

- selon Tresca $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau = 0,5 \sigma_e$
- selon von Mises $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau = 0,577 \sigma_e$

et la différence relative vaut $(0,577 - 0,5)/0,5 = 15,5 \%$.

En conclusion, l'écart entre les critères de Tresca et von Mises est maximal en cisaillement pur.

La figure 7.35 montre l'excellent accord du critère de von Mises avec l'expérience. C'est donc celui-ci que l'ingénieur, soucieux d'économiser du métal, utilisera.

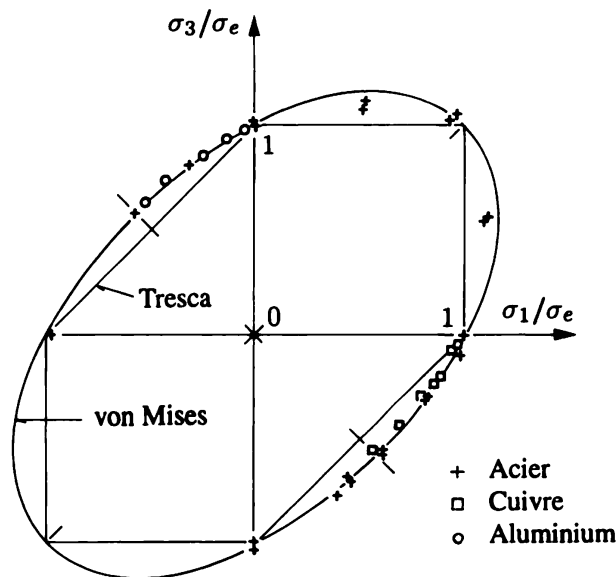


Fig. 7.35 Confrontation expérimentale.

7.10.2 Critère de résistance des matériaux raides

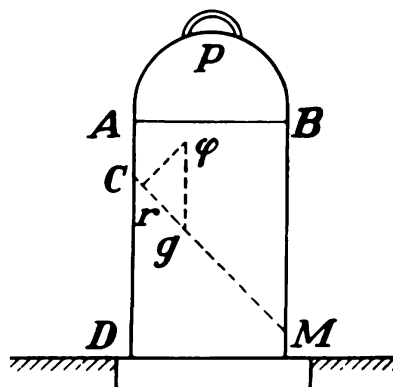
En première approximation, on pourrait admettre que les matériaux raides se rompent quand la plus grande contrainte principale de traction (positive) σ_I atteint une valeur déterminée, égale à la résistance ultime σ_t déterminée par un essai de traction.

Un tel critère est *insuffisant*, car il ne donne aucun renseignement lorsque le matériau travaille en compression, ce qui est généralement le cas des matériaux raides.

De plus, ces matériaux ont souvent des résistances très différentes en traction et compression ; leur critère de rupture ne saurait donc être symétrique, comme le sont par exemple ceux de plastification des métaux.

7.10.3 Critère de la courbe intrinsèque

Lors d'essais de compression sur prismes de grès, Coulomb (1773) observa une rupture par glissement selon un plan oblique CM (fig. 7.36). Il suggéra que la rupture de la matière se produit


 Fig. 7.36 Expérience de Coulomb (*Mémoires ... présentés... par divers savants, année 1773, Paris, 1776*).

– de manière générale – par *glissement* selon un certain *plan*, où les contraintes σ et τ prennent des valeurs liées par une loi *linéaire*.

Ce critère a reçu une généralisation importante de la part de Mohr (1900, 1901, 1914), qui a été reprise et développée en France par Caquot (1935). Elle tient en trois points :

- La théorie de Mohr s'applique à la fois aux premières déformations plastiques des matériaux ductiles et à la rupture des matériaux raides ; pour la commodité, on désigne dans ce paragraphe par le vocable *ruine* l'un ou l'autre de ces phénomènes.
- Mohr suppose que la ruine apparaît sur une *facette* lorsque la contrainte tangentielle y atteint une certaine valeur limite dépendant de la contrainte normale existant sur cette même facette, soit

$$\tau = f(\sigma)$$

Il ne fait aucune hypothèse quant à la forme de cette fonction ; dans le système d'axes (σ, τ) , cette équation représente une courbe, appelée *courbe intrinsèque* du matériau (elle est évidemment symétrique par rapport à l'axe des σ , puisque le signe de τ est sans effet).

- Or cette courbe ne peut être coupée à aucun endroit par un des *grands cercles* de Mohr à la ruine, représentant l'état de contrainte tridimensionnel du matériau à l'instant de la ruine.

On en conclut que la *courbe intrinsèque doit être l'enveloppe de tous les grands cercles de Mohr à la ruine*. Puisque ces grands cercles ont comme diamètre la différence $(\sigma_I - \sigma_{III})$ des contraintes principales extrêmes (fig. 7.37 ; vol. 3, sect. 2.10), la courbe intrinsèque a pour équation

$$f(\sigma_I, \sigma_{III}) = 0 \quad (7.22)$$

Suivant cette théorie, la contrainte principale intermédiaire σ_{II} est sans influence sur la courbe intrinsèque et par conséquent sur l'apparition de la plasticité ou de la rupture.

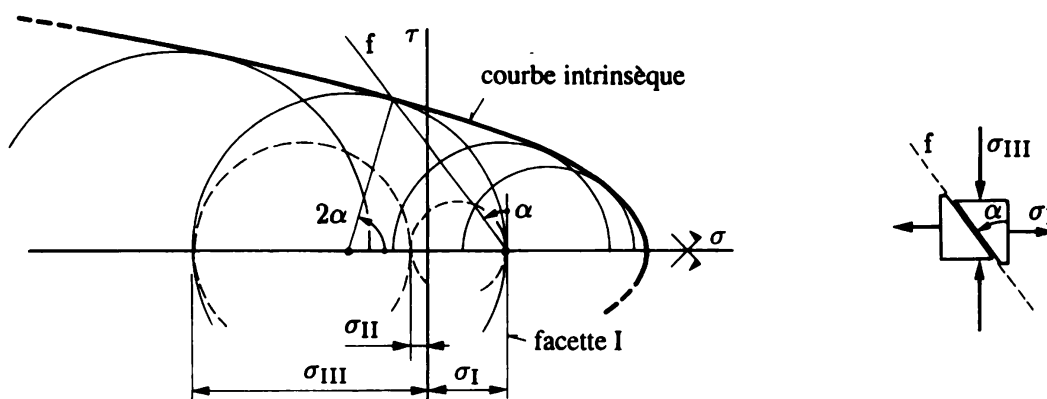


Fig. 7.37 Courbe intrinsèque construite par grands cercles de Mohr (f = facette de ruine).

Pour construire une courbe intrinsèque, il suffit donc de tracer une série de grands cercles de Mohr à la ruine. Souvent, on trace les trois cercles résultant des essais de traction, compression et cisaillement pur par torsion (fig. 7.38), ce qui suffit à obtenir la zone utile de la courbe. Pour certains matériaux, l'approximation de cette zone par une droite tangente aux cercles de traction et compression est suffisante, ce qui permet d'estimer la résistance ultime en cisaillement pur (ex. 7.11.8).

L'angle α des facettes de ruine est donné grâce au rayon passant par le point de tangence d'un cercle avec la courbe (fig. 7.37) ; ces facettes sont parallèles à l'axe principal x_{II} .

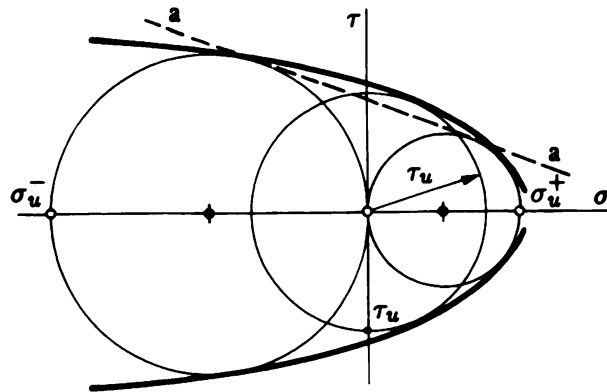


Fig. 7.38 Zone la plus utile d'une courbe intrinsèque, construite à partir de trois essais simples donnant σ_u^+ , τ_u et σ_u^- (indice u = ruine); droite a-a : approximation linéaire à partir de σ_u^+ et σ_u^- .

La courbe intrinsèque de Mohr est particulièrement intéressante pour représenter le comportement à la rupture des matières raides, telles que la fonte, les céramiques (briques, pierres, porcelaines), le béton de ciment..., ainsi que des sols et des massifs rocheux, où, chaque fois, la résistance en compression est un multiple de celle en traction. A l'exception des massifs rocheux, on obtient souvent une bonne approximation de la courbe par une droite. La figure 7.39 rappelle des courbes intrinsèques classiques.

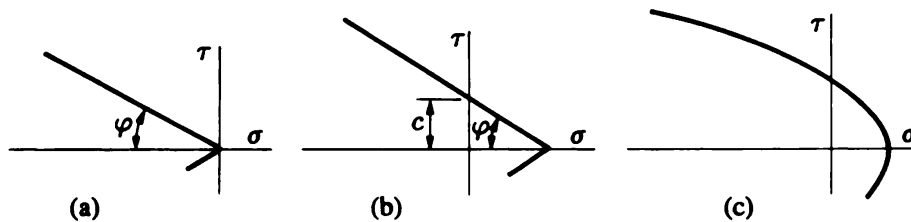


Fig. 7.39 Quelques courbes intrinsèques classiques : (a) terres pulvérulentes sans cohésion (Mohr-Coulomb) : $\tau + \sigma \operatorname{tg} \varphi = 0$ (φ = angle de frottement interne); (b) porcelaines, pierres, fontes, terres cohérentes : $\tau + \sigma \operatorname{tg} \varphi = c$ (c = cohésion); (c) roches.

7.11 Exercices

7.11.1 Une barre de longueur L , formée de deux aciers différents, est soumise à la traction jusqu'à sa plastification complète, puis déchargée.

- 1) Dessiner le diagramme force-déplacement (F, u) en admettant comme loi constitutive un modèle élastique parfaitement plastique.
- 2) L'ensemble étant complètement plastifié, on décharge la barre entièrement. Déterminer l'état de contrainte résiduel.

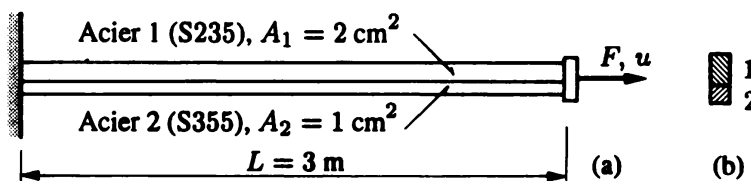


Fig. Ex. 7.11.1 Barre tendue : (a) élévation ; (b) coupe.

7.11.2 Une barre en alliage d'aluminium, de longueur $L = 10$ m et de section $A = 0,80$ cm², est soumise à un effort de traction $F = 15$ kN. On utilisera la loi de Ramberg-Osgood comme loi constitutive de l'aluminium, avec les paramètres suivants :

$$E = 7000 \text{ kN/cm}^2 \quad B = 35 \text{ kN/cm}^2 \quad n = 8$$

- 1) Déterminer la contrainte $\sigma_{0,2}$ et dessiner le diagramme (σ, ε) en calculant quelques points.
- 2) Calculer l'allongement de la barre.
- 3) Calculer E_t pour l'état correspondant à la barre chargée.
- 4) Calculer l'allongement permanent si on décharge la barre.

7.11.3 Le modèle rigide parfaitement plastique (fig. 7.22b) se schématise par le *patin* (fig. ex. 7.11.3a) : la déformation y reste invariable tant que la contrainte reste inférieure à σ_e , et peut croître indéfiniment quand la contrainte atteint σ_e .

- 1) Quel sera le schéma du modèle élastique parfaitement plastique ? Le schéma trouvé peut-il représenter (a) le déchargement élastique ? (b) l'effet Bauschinger ?
- 2) Déterminer le schéma du modèle élastique plastique à *écrouissage linéaire* (fig. ex. 7.11.3b); en écrire les équations.

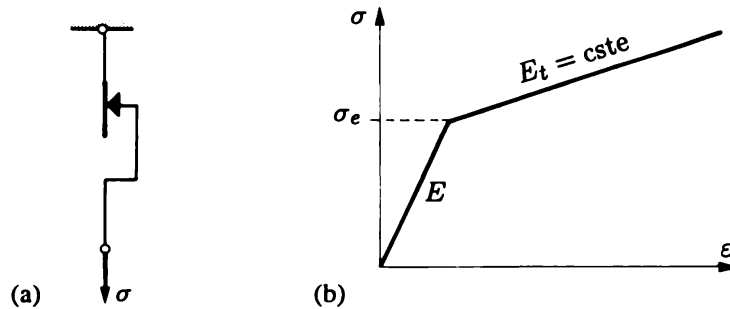


Fig. Ex. 7.11.3 (a) patin ; (b) modèle élastique plastique à écrouissage linéaire.

7.11.4 Le modèle de Kelvin est formé du modèle élastique de Hooke et du modèle visqueux de Newton en parallèle (fig. ex. 7.11.4a). En étudier

- 1) le fluage et la recouvrance (fig. ex. 7.11.4b) ;
- 2) la relaxation.

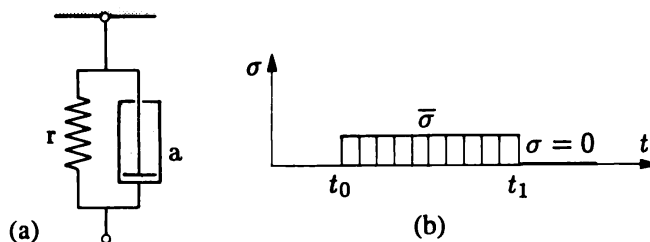


Fig. Ex. 7.11.4

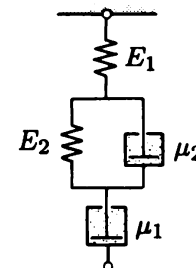


Fig. Ex. 7.11.5

7.11.5 Les modèles de Maxwell et Kelvin placés en série forment le modèle de Boltzmann (ou Burgers, ou solide linéaire standard). On soumet cette fibre à un essai de fluage et recouvrance (fig. ex. 7.11.4b).

- 1) Dessiner, sans calcul, l'aspect du modèle aux cinq instants caractéristiques $t = t_0$ ($\sigma = 0$), $t = t_0$ ($\sigma = \bar{\sigma}$), $t = t_1$ ($\sigma = \bar{\sigma}$), $t = t_1$ ($\sigma = 0$), $t = \infty$ ($\sigma = 0$).
- 2) Dessiner l'aspect de la courbe $\varepsilon = \varepsilon(t)$.
- 3) Calculer les ordonnées typiques de cette courbe.

7.11.6 Un tube en acier doux, ouvert à ses extrémités, est soumis à une force axiale F et à une pression extérieure uniformément répartie p .

On demande de vérifier et de commenter la sécurité vis-à-vis du critère de plastification de von Mises si :

- 1) F agit en traction ;
- 2) F agit en compression.

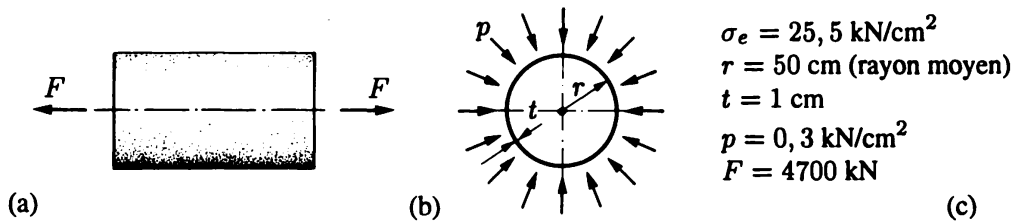


Fig. Ex. 7.11.6 Tube : (a) élévation ; (b) coupe ; (c) données numériques.

7.11.7 Démontrer la formule (7.20) donnant la contrainte de comparaison de von Mises en état plan de contrainte σ_x, σ_y et τ_{xy} . *Indication* : utiliser les invariants.

7.11.8 Trouver la contrainte tangentielle de rupture τ_u d'un matériau raide, pour lequel on connaît σ_u^- et σ_u^+ , la courbe intrinsèque étant formée de deux droites. On suppose que $\sigma_u^- > \sigma_u^+$ (littéral).

7.11.9 Une éprouvette cylindrique d'un matériau granulaire, soumise à pression uniforme p sur sa surface latérale, est sollicitée par compression axiale jusqu'à rupture σ_u (essai triaxial, fig. ex. 7.11.9a). L'expérience montre que la résistance à la rupture σ_u peut obéir à une loi linéaire

$$\sigma_u = \sigma_c + kp \quad (p > 0)$$

où σ_c est la résistance à la compression uniaxiale ($\sigma_c > 0$) et k le coefficient de butée.

Montrer que cette loi conduit à une courbe intrinsèque linéaire et trouver l'équation de cette courbe (littéral). *Indication* : écrire l'équation $f(\sigma, \tau, p) = 0$ du grand cercle de Mohr à la ruine (fig. ex. 7.11.9b) représentant l'état de contrainte dans l'éprouvette, puis l'équation $\partial f / \partial p = 0$; éliminer le paramètre p de ce système pour obtenir l'équation de l'enveloppe.

Sachant que (c = cohésion, φ = angle de frottement interne ; fig. 7.39)

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{Rankine}) \quad \sigma_c = 2c\sqrt{k}$$

vérifier que la courbe intrinsèque obtenue peut se mettre sous la forme classique $\tau = \pm(c - \sigma \tan \varphi)$. *Note* : démontrer la seconde formule ci-dessus !

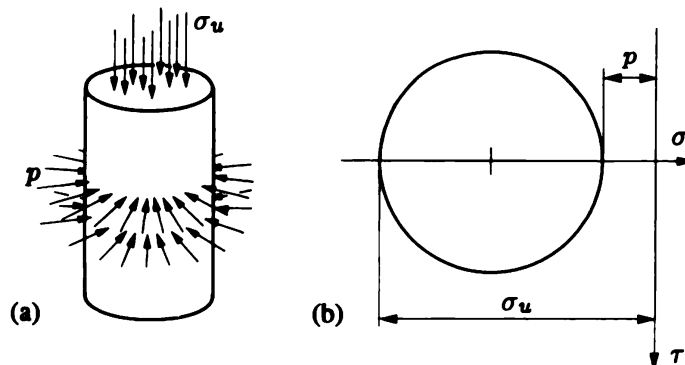


Fig. Ex. 7.11.9

7.12 Lexique (voir aussi le lexique du chapitre 2)

Striction	Rétrécissement local de la section droite de l'éprouvette juste avant la rupture par traction.
Dilatation de rupture	Abscisse maximale du diagramme (σ, ϵ) .
Limite d'élasticité <ul style="list-style-type: none"> • supérieure • inférieure 	Ordonnée maximale (pointe), minimale, le long du palier; la limite inférieure correspond à la limite d'élasticité usuelle.
Bandes (lignes) de Lüders	Bandes mates apparaissant à la surface d'une éprouvette polie en acier et traduisant l'apparition des zones plastiques (plans de glissement); application : écaillage de la chaux.
Effet Bauschinger	Changement des propriétés mécaniques (allure du diagramme (σ, ϵ) , valeur de σ_p , etc.) suite à une déformation plastique.
Fatigue	Diminution de la résistance d'un matériau lors de sollicitations continûment variables dans le temps.
Différence des contraintes $(\Delta\sigma)$	En fatigue, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$; paramètre important mesurant la résistance à la fatigue.
Limite de fatigue $(\Delta\sigma_{\text{fat}}; \sigma_{\text{fat}})$	Différence des contraintes, ou contrainte, en dessous de laquelle il n'y a plus rupture par fatigue.
Courbe de Wöhler	Courbe $(\Delta\sigma, n)$ traduisant la résistance à la fatigue $\Delta\sigma$ en fonction du nombre de cycles de charge n (limitée asymptotiquement à $\Delta\sigma_{\text{fat}}$).
Fragilité, rupture fragile	Rupture très brusque et prématurée d'un matériau ductile, à la manière d'un matériau raide, si certaines conditions sont remplies (pour l'acier : traction, entaille et température basse).
Température de transition	Température en dessous de laquelle la rupture fragile est à craindre.
Fluage <ul style="list-style-type: none"> • fluage primaire, secondaire, tertiaire. 	Accroissement de la déformation dans le temps, sous contrainte constante.
Relaxation	Diminution de la contrainte dans le temps, sous déformation constante.
Recouvrance	Fait qu'une pièce déformée tend à reprendre, tout ou partie, ses dimensions initiales, une fois la sollicitation supprimée.
Vitesse de déformation $(\dot{\epsilon})$	$\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$.
Essai de courte durée	Essai effectué rapidement, mais sans effet dynamique, pour éliminer la dépendance vis-à-vis du temps.
Module d'élasticité à l'origine (E_0)	Pente du diagramme (σ, ϵ) à l'origine.
Rupture par fluage	Rupture survenant un certain temps après mise en charge de l'éprouvette, due au fluage.
Hystérésis	Fait que les diagrammes (σ, ϵ) de charge et de décharge ne coïncident pas; traduit une dissipation d'énergie dans le matériau.
Accommodation	Stabilisation des boucles d'hystérésis dans le temps.

Modèle élastique	Modèle réversible ;
<ul style="list-style-type: none"> • linéaire • non linéaire 	Hooke, $\sigma = E\varepsilon$ (analogie : ressort) ; $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; par exemple, caoutchouc.
Modèle plastique	Modèle irréversible, avec déchargement selon une parallèle à la tangente à l'origine (de pente E_0) ;
<ul style="list-style-type: none"> • élastique parfaitement plastique • élasto-plastique avec écrouissage • rigide plastique 	modèle formé de deux droites, celle de Hooke et le palier ; modèle formé de la droite de Hooke suivie d'une courbe monotone et croissante (écrouissage) ; modèle plastique dans lequel on néglige les déformations élastiques (droite de Hooke verticale).
Module d'élasticité tangent (E_t)	Module d'élasticité local, pente de la tangente en tout point de la courbe (σ, ε) : $E_t = d\sigma/d\varepsilon$.
Module d'élasticité sécant (E_s)	Module fictif obtenu par une sécante issue de l'origine ; au point A(ε_A, σ_A) : $E_s = \sigma_A/\varepsilon_A$.
Viscosité	Phénomène où les contraintes dépendent des vitesses de déformation.
Modèle visqueux linéaire	Modèle du fluide de Newton où la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation : $\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$ (analogie : amortisseur) ; μ [Ns/m ²].
Modèle rhéologique	Modèle assemblant des cellules de Hooke (ressorts) et Newton (amortisseurs).
Modèle viscoélastique linéaire	Modèle rhéologique avec linéarité entre σ et ε ;
<ul style="list-style-type: none"> • modèle de Maxwell 	un ressort et un amortisseur en série.
Critère rhéologique	Loi traduisant un changement de comportement d'un matériau sous sollicitation bi- ou, mieux, tridimensionnelle.
Critère de plastification	Critère annonçant la transition du comportement élastique à celui plastique (matériaux ductiles, métaux) ; $\tau_e = \sigma_e/2$; $\tau_e = \sigma_e/\sqrt{3}$.
<ul style="list-style-type: none"> • critère de Tresca ou de la contrainte tangentielle maximale • critère de von Mises 	
Limite d'élasticité en cisaillement pur (τ_e)	Contrainte tangentielle provoquant l'entrée en plastification d'un matériau ductile soumis au cisaillement pur.
Contrainte de comparaison (σ^*)	Expression, fonction des contraintes, qui, comparée à la limite d'élasticité, permet de prévoir l'entrée locale en plasticité (expression mathématique du critère).
Critère de résistance ou de rupture	Loi permettant de prévoir la rupture (matériaux raides).
Courbe intrinsèque (de Mohr)	Courbe propre à un matériau, enveloppe des grands cercles du tricerclé de Mohr dans le plan (σ, τ), lorsque ces grands cercles correspondent à une transition du comportement observé expérimentalement (par exemple : plastification, rupture...).
Critère de la courbe intrinsèque	Critère basé sur la courbe intrinsèque (sols, roches, céramiques, fontes, verres, béton).

8. Torsion uniforme

8.1 Introduction

Une poutre est soumise à **torsion pure** lorsque, en toute section, les forces extérieures se réduisent au seul moment de torsion, constant ($T = \text{cste}$). Ici, on n'envisage que le cas de la **torsion uniforme**, pour laquelle le gauchissement des sections droites est libre et l'équilibre assuré par les seules contraintes tangentielles agissant dans le plan de la section.

Si x est l'axe de la pièce tordue, la mécanique des structures recherche essentiellement

- les **contraintes tangentielles** τ_{xy} , τ_{xz} ou τ (résultante) sur la section, et leurs valeurs maximales ;
- l'**angle de torsion par unité de longueur** χ , qui permet d'obtenir la rotation totale θ_x entre deux sections de la pièce ;
- une relation entre les grandeurs statiques et cinématiques, à savoir une **loi de Hooke** du type

$$T = GJ\chi = GJ \frac{d\theta_x}{dx} \quad (8.1)$$

où G est le module de glissement et J une quantité géométrique appelée **constante de torsion** (en m^4 par exemple).

A l'exception des poutres prismatiques à section circulaire (sect. 8.2), la mécanique des structures est, à elle seule, impuissante à atteindre ces objectifs, car la cinématique est complexe (gauchissement des sections). Elle doit faire appel aux résultats de la théorie de la torsion de Saint-Venant, établis en théorie de l'élasticité (vol. 3, chap. 6 ; en particulier, analogie entre la membrane et la fonction de contrainte Φ). Pour les déplacements, on se contente ici du calcul de l'angle de torsion ; la position du **centre de torsion** est évoquée au chapitre suivant.

Ainsi, pour une poutre de longueur L , l'**angle de torsion** total θ_x vaut

$$\theta_x = \chi L = \frac{TL}{GJ} \quad (8.2)$$

Si la section ou le moment de torsion varie lentement, la théorie reste approximativement valable. On écrit dans ce cas la formule (8.2) sous la forme

$$d\theta_x = \chi dx = \frac{T}{GJ} dx \quad (8.3)$$

d'où

$$\theta_x = \int_0^L \chi dx = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx \quad (8.4)$$

En vertu du principe de Saint-Venant (§ 2.7.5), les variations brusques ne perturbent qu'une zone locale, de l'ordre de grandeur de la plus grande dimension transversale de la pièce, au-delà de laquelle les formules établies ici restent applicables.

8.2 Poutres à section circulaire

8.2.1 Cinématique

Un raisonnement géométrique simple, typique de la mécanique des structures, permet de retrouver les résultats rigoureux de la mécanique des solides.

Considérons un arbre cylindrique soumis à deux moments T égaux et opposés, appliqués sur les sections extrêmes (fig. 8.1). La pièce et sa sollicitation jouissent de multiples symétries : de révolution autour de l'axe x , centrale, de plan transversal médian, etc. Pour cette raison, chaque section droite doit, pendant la torsion, tourner dans son plan, autour de son centre O , comme un disque rigide ; par suite les sections restent planes, les rayons rectilignes et les angles au centre conservés.

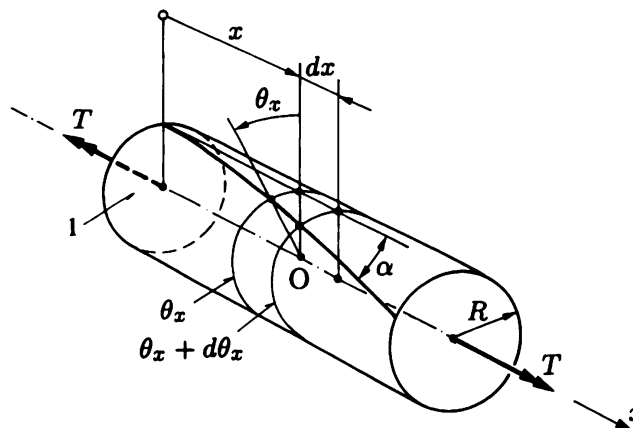


Fig. 8.1 Torsion d'un arbre cylindrique (1 : section origine).

Toute génératrice se transforme en hélice ; l'angle α de cette hélice avec les génératrices est très faible, de sorte que $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + \dots \cong 1$ (linéarisation géométrique). L'élément de génératrice dx garde donc la même longueur $ds = dx / \cos \alpha \cong dx$ dans la configuration déformée et il ne naît ni déformation ni contrainte normales longitudinales.

Si $\theta_x(x)$ désigne l'angle de rotation de la section d'abscisse x , la section voisine de dx tourne de l'angle élémentaire $d\theta_x$ par rapport à la précédente. Dans cette tranche dx de la poutre (fig. 8.2), l'élément rectangulaire $abcd$, situé sur le cylindre concentrique de rayon r et limité par l'angle au centre $d\beta$, devient, dans la configuration déformée, le parallélogramme $abc'd'$ dont les côtés n'ont pas changé de longueur ; seuls les angles droits ont varié. Cet élément est donc soumis au seul glissement d'angle γ (et, par suite (§ 8.2.2), au cisaillement pur). Puisque

$$cc' = dd' = r d\theta_x = \gamma dx$$

on a

$$\gamma = r \frac{d\theta_x}{dx} = r\chi \quad (8.5)$$

Ces propriétés cinématiques sont valables indépendamment de la loi constitutive du matériau.

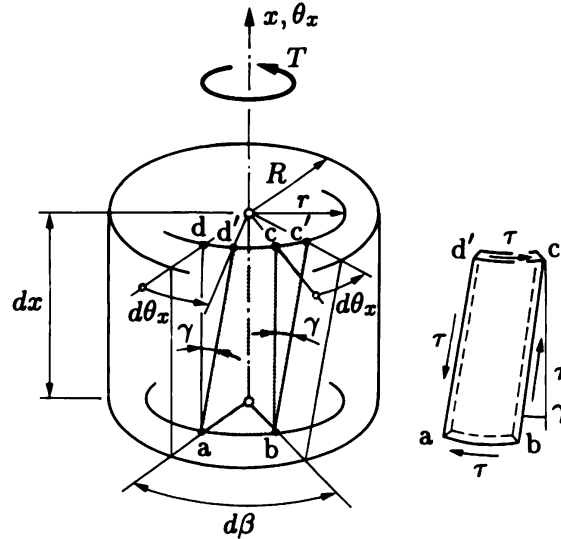


Fig. 8.2 Cinématique en torsion (section circulaire).

8.2.2 Loi constitutive et statique

Si le matériau obéit à la loi de Hooke, on a (vol. 3, sect. 4.3)

$$\tau = G\gamma = Gr\chi \quad (8.6)$$

et les contraintes tangentielles varient linéairement avec la distance r au centre de la section (fig. 8.3). Reste à appliquer le principe d'équivalence ; la force élémentaire τdA a le bras de levier r , d'où

$$T = \int_A \tau r dA = G\chi \int_A r^2 dA = G\chi I_p$$

où I_p est le moment d'inertie *polaire* (vol. 1, § 13.4.1) de la section droite circulaire de rayon R , qui vaut

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (8.7)$$

Ainsi

$$\chi = \frac{T}{GI_p} \quad (8.8)$$

et

$$\tau = \frac{T}{I_p} r \quad (8.9)$$

avec

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} R \quad (8.10)$$

Les développements précédents s'appliquent également aux arbres creux, dont la section droite est une *couronne* (fig. 8.4). Il suffit d'introduire le moment d'inertie polaire convenable

$$I_p = \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4) \quad (8.11)$$

En conclusion, on retrouve les résultats de la théorie de Saint-Venant : sections planes, τ linéaires suivant le rayon, constante de torsion égale à l'inertie polaire ($J \equiv I_p$) ; *cercles et couronnes sont les seules sections auxquelles s'appliquent ces résultats simples.*

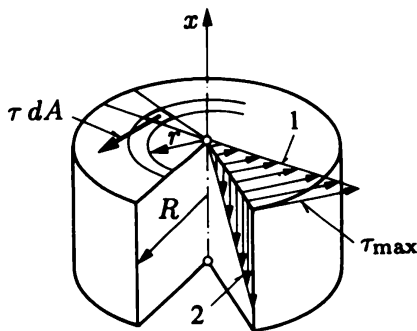


Fig. 8.3 Contraintes tangentielles τ d'une section circulaire (1 : τ agissant sur la section droite ; 2 : τ agissant longitudinalement entre les fibres, par réciprocité).

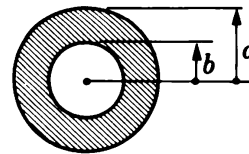


Fig. 8.4 Section circulaire creuse.

8.3 Essai et résistance

Les *essais de torsion* se font très souvent sur des éprouvettes cylindriques pleines ou creuses, vu leur réponse d'exception à cette sollicitation.

De (8.2) et (8.7) on déduit, pour une pièce pleine,

$$G = \frac{2TL}{\pi\theta_x R^4}$$

et le *module de glissement* ou *de Coulomb* G s'obtient avec précision, car on peut mesurer les autres quantités avec une grande précision. Rappelons (vol. 3, sect. 4.3) que, pour les matériaux isotropes,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

où E est le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson ; la mesure expérimentale de E et G permet d'obtenir ν .

La résistance est conditionnée par la contrainte tangentielle maximale. Si le matériau est *ductile* (métaux), la plastification apparaît lorsqu'on atteint la limite d'élasticité en cisaillement τ_e qui vaut, selon le critère de von Mises (§ 7.10.1),

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

Il faut donc vérifier

$$\tau \leq \tau_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sqrt{3}} \quad (\text{contraintes admissibles})$$

ou

$$\sqrt{3} \tau_d \leq \sigma_{\text{dim}} \quad (\text{états limites})$$

Si le matériau est *raide* (fonte, pierre, béton...), il convient d'appliquer le critère de la courbe intrinsèque (§ 7.10.3) ; le cercle tangent à cette courbe et centré à l'origine fournit la contrainte ultime τ_u , d'où

$$\tau \leq \tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_u}{\gamma} \quad (\text{contraintes admissibles})$$

ou

$$\tau_d \leq \tau_u \dim \quad (\text{états limites})$$

Si la résistance à la traction n'est qu'une fraction de celle en compression, on peut vérifier (ex. 8.11.18) que les facettes de rupture tendent à s'incliner à 45° sur les génératrices de la pièce ; cette direction s'associe à celle de la contrainte principale de traction, puisqu'on est en cisaillement pur. Dans de tels matériaux, on observe effectivement une cassure oblique avoisinant les 45° (fig. 8.5).

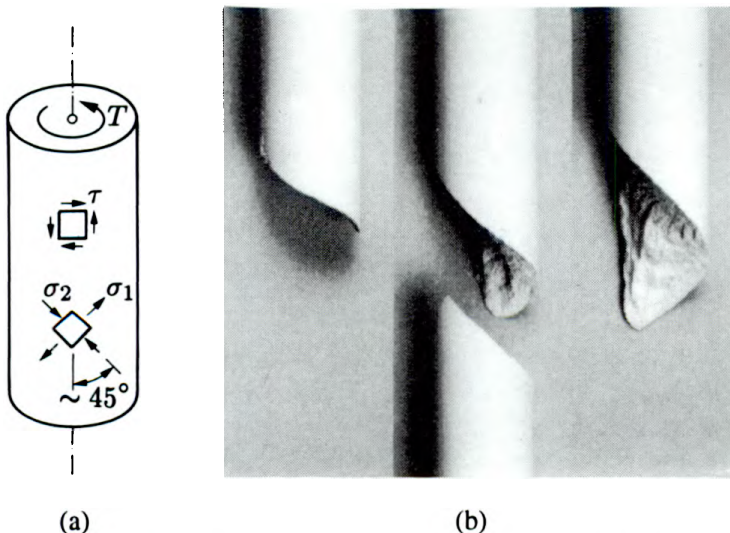


Fig. 8.5 Rupture par torsion dans un matériau raide :
(a) contraintes principales ;
(b) rupture d'une craie (photo A. Herzog).



Fig. 8.6 Rupture par torsion pour le bois.

Pour un matériau *anisotrope fibreux*, qui résiste moins bien aux contraintes tangentielles dans le sens longitudinal que transversal, les premières fissures sont produites par les contraintes tangentielles *longitudinales*, qui s'exercent entre les fibres dans les sections longitudinales parallèles à l'axe de la pièce (fig. 8.3). *On n'oubliera pas l'existence de ces contraintes*, dues au principe de réciprocité des contraintes tangentielles (vol. 3, sect. 2.5). Elles expliquent pourquoi une pièce de bois tordue se rompt par fissuration longitudinale entre fibres (fig. 8.6).

8.4 Types de section droite

Couramment, on distingue les poutres à section massive de celles à parois minces et, pour ces dernières, on différencie les sections fermées des sections ouvertes.

La section est *massive* si ses diverses dimensions sont du même ordre de grandeur (fig. 8.7).

Une poutre est dite à *parois minces* si elle est composée d'éléments dont l'une des dimensions, l'*épaisseur*, est *faible* vis-à-vis des deux autres ; la section droite peut se décrire par la *ligne moyenne*, trace de la surface médiane des parois dans la section, et par l'épaisseur en chacun des points de cette ligne. Cette section est *fermée*, *tubulaire* ou *en caisson* si sa ligne moyenne limite une surface fermée, dite *cellule* ; sinon, elle est *ouverte* (fig. 8.7).

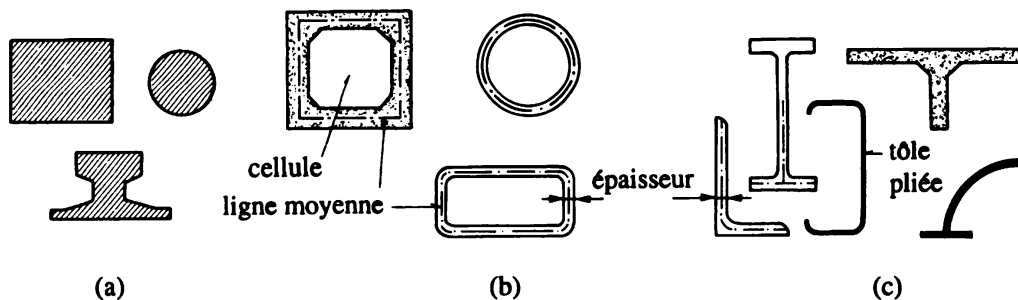


Fig. 8.7 Sections droites typiques : (a) massives ; (b) fermées à parois minces ; (c) ouvertes à parois minces.

Lorsque la ligne moyenne englobe plusieurs cellules *adjacentes*, la section fermée est dite *multicellulaire* (fig. 8.8).

Enfin, courantes sont aussi les *sections composées*, groupant plusieurs éléments ouverts, fermés, ou ouverts et fermés simultanément (fig. 8.9 ; sect. 8.9).

Il est clair qu'on peut imaginer tous les cas intermédiaires que l'on veut ; toutefois, dans la construction pratique, on rencontre essentiellement les trois types de la figure 8.7 et leurs dérivés (fig. 8.8 et 8.9). D'autre part, moyennant quelques hypothèses raisonnables, on peut résoudre aisément le problème de la torsion des poutres à parois minces, et non celui des poutres à section massive ; de plus, la réponse à la torsion est fondamentalement différente si la section est ouverte ou fermée.



Fig. 8.8 Section multicellulaire.

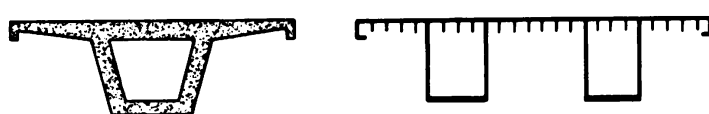


Fig. 8.9 Sections composées d'éléments ouverts et fermés.

Enfin, l'influence de la torsion non uniforme est faible, et souvent négligeable, pour les sections massives et fermées, alors qu'elle peut être très importante dans les sections ouvertes ; pour ces dernières, si certaines sections ne peuvent gauchir, l'analyse en torsion de Saint-Venant ne donne qu'une image *imparfaite* du comportement torsionnel.

8.5 Sections massives

La solution analytique des équations gouvernant la torsion des poutres à section massive n'existe que pour quelques formes simples de la section droite : cercle, couronne, ellipse, triangle équilatéral. Déjà pour une section rectangulaire il faut résoudre par voie approchée (séries, différences finies, éléments finis). L'analogie hydrodynamique et celle de la membrane permettent souvent d'obtenir une bonne image de la répartition des contraintes tangentielles et, en particulier, de déceler aisément les points où ces contraintes sont les plus grandes.

Dans son étude de la torsion des poutres à section elliptique, Saint-Venant a noté que l'équation d'équivalence liant le moment de torsion au double du volume limité par la fonction de contrainte (vol. 3, sect. 6.6) pouvait s'écrire

$$\frac{T}{G\chi} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}$$

où $A = \pi ab$ est l'aire et $I_p = (a^2 + b^2)A/4$ est le moment d'inertie polaire de l'ellipse de demi-axes a et b . En comparant cette formule à d'autres résultats et en remarquant avec (8.1) qu'il s'agit de la constante de torsion J , Saint-Venant a observé que, pour toute section *massive pleine*, on a approximativement

$$J \cong \frac{A^4}{40 I_p} \quad (8.12)$$

avec une erreur moindre que 8 % ; c'est la *formule de Saint-Venant*.

Dans une *section rectangulaire*, dont b est le plus grand côté et c le plus petit, les contraintes tangentielles τ ont l'allure donnée par la figure 8.10, et τ_{\max} se produit au milieu des grands côtés.

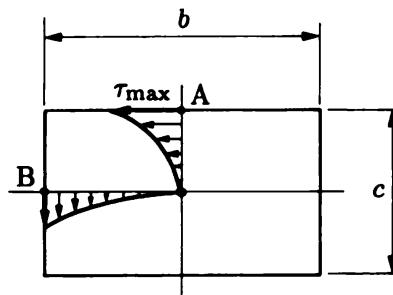


Fig. 8.10 Contraintes tangentielles de torsion dans une section rectangulaire.

On a les relations

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{T}{\alpha b c^2} \quad \tau_B = \frac{T}{\beta b c^2} \quad J = \gamma b c^3 \quad (8.13)$$

où les coefficients α , β et γ sont donnés par le tableau 8.11.

Tableau 8.11 Coefficients α , β , γ de (8.13).

b/c	α	β	γ
1	0,208	0,208	0,141
1,5	0,231	0,270	0,196
2	0,246	0,309	0,229
3	0,267	0,354	0,263
4	0,282	0,379	0,281
5	0,291	0,391	0,291
10	0,312	0,421	0,312
∞	1/3	0,448	1/3

8.6 Sections ouvertes à parois minces

8.6.1 Section rectangulaire mince

Considérons d'abord une section rectangulaire d'épaisseur t beaucoup plus petite que la longueur b (fig. 8.12). L'analogie de la membrane donne une solution très simple au problème de torsion. En effet, à l'exception des deux extrémités, la membrane est une surface cylindrique, dont la coupe transversale correspond à l'équilibre d'un câble sous charge uniforme. C'est donc une parabole, de flèche (vol. 1, chap. 10)

$$a = \frac{p t^2}{8h}$$

Remplaçant p/h par $2G\chi$ (vol. 3, sect. 6.4), on obtient la cote correspondante de la fonction de contrainte Φ

$$\Phi_{\max} = G\chi \frac{t^2}{4}$$

Le moment de torsion vaut le double du volume ; si on fait l'hypothèse que la membrane est cylindrique sur toute la longueur b , on a

$$T = 2 \left(\frac{2}{3} t \Phi_{\max} \right) b = G\chi \frac{b t^3}{3}$$

d'où, avec (8.1),

$$J = \frac{1}{3} b t^3 \quad (8.14)$$

La pente maximale $2\Phi_{\max}/(t/2)$ se produit le long des grands côtés et donne τ_{\max} , soit

$$\tau_{\max} = \frac{4\Phi_{\max}}{t} = G\chi t$$

et, avec (8.1), puis (8.14),

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} t = \frac{3T}{bt^2} \quad (8.15)$$

La pente varie d'ailleurs linéairement, de sorte que le diagramme des contraintes tangentielles est *linéaire* à travers l'épaisseur, s'annulant sur la ligne moyenne (fig. 8.12).

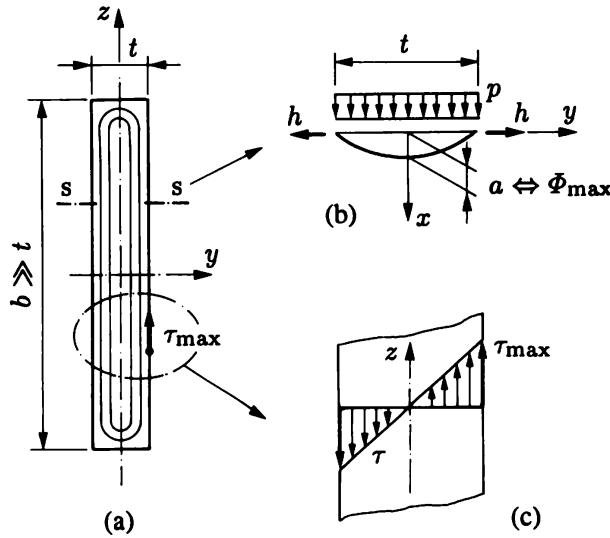


Fig. 8.12 Torsion d'une poutre à section rectangulaire mince : (a) section droite et lignes de cisaillement ; (b) coupe ss de la membrane ; (c) diagramme des contraintes à travers l'épaisseur t .

Remarques

On voit que ces résultats concordent avec ceux de la section 8.5 précédente lorsque $b/c \rightarrow \infty$, et qu'ils donnent une bonne approximation dès que $b/t \geq 10$.

Les unités sont, par exemple : Φ [N/m], $2G\chi$ [N/m³], a [m], p/h [1/m].

8.6.2 Section ouverte quelconque

On peut maintenant généraliser au cas d'une section dont la ligne moyenne décrit un contour ouvert quelconque. En effet, T et, par suite, J sont directement proportionnels au volume limité par la membrane ; or ce volume, pour une section composée de plusieurs rectangles allongés, est égal à la *somme* des volumes associés à chaque rectangle. Par conséquent (fig. 8.13)

$$J = \frac{1}{3} \sum bt^3 \quad (8.16)$$

où les b se mesurent *sur la ligne moyenne*. Dans chaque rectangle i , on a

$$\tau_{\max i} = \frac{T}{J} t_i \quad (8.17)$$

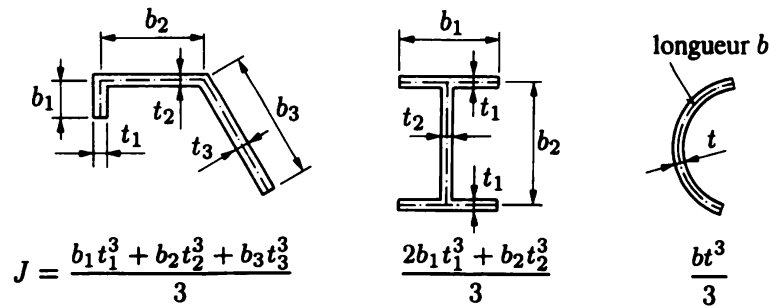


Fig. 8.13 Sections ouvertes à parois minces : calcul de J .

et la plus grande contrainte tangentielle se produit donc dans le rectangle le plus épais. On établit aisément cette formule à l'aide de la section 8.9 ci-après (§ 8.9.3).

Il faut cependant remarquer qu'il naît, dans les angles rentrants à la jonction des rectangles (fig. 8.14), des pointes de contraintes, largement supérieures à τ_{\max} , que la théorie simplifiée ci-dessus ignore. On peut les atténuer considérablement par l'introduction d'un congé de raccordement ; le tableau 8.15 donne un *ordre de grandeur* de la concentration de contrainte.

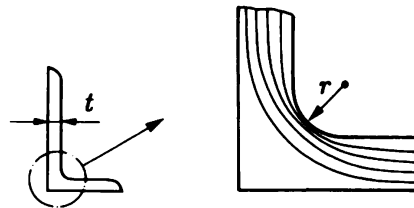


Fig. 8.14 Concentration aux angles rentrants.

Tableau 8.15

r/t	2,0	1,0	0,5	0,3
$\tau_{\text{congé}}/\tau_{\max}$	$\sim 1,0$	$\sim 1,4$	$\sim 1,8$	$\sim 2,1$

L'introduction d'un congé accroît cependant la valeur de J ; par exemple, la constante de torsion des laminés en acier du type HEB augmente de 10 % (gros profils) à 25 % (petits profils).

8.7 Sections fermées à parois minces

8.7.1 Différence du comportement

La manière dont les contraintes tangentielles se développent dans une poutre tubulaire, pour résister à la torsion, est fondamentalement différente du cas de la poutre à section ouverte. Pour s'en convaincre, appliquons l'analogie hydrodynamique aux deux sections de la figure 8.16. Dans la section ouverte, le fluide circule autour de la *ligne moyenne*, tandis que dans le tube, il tourne autour de la *cellule intérieure*. Par suite, à travers l'épaisseur de la paroi, les contraintes circulent dans les deux sens dans le premier cas, dans un seul sens dans le second. Ces contraintes peuvent alors développer

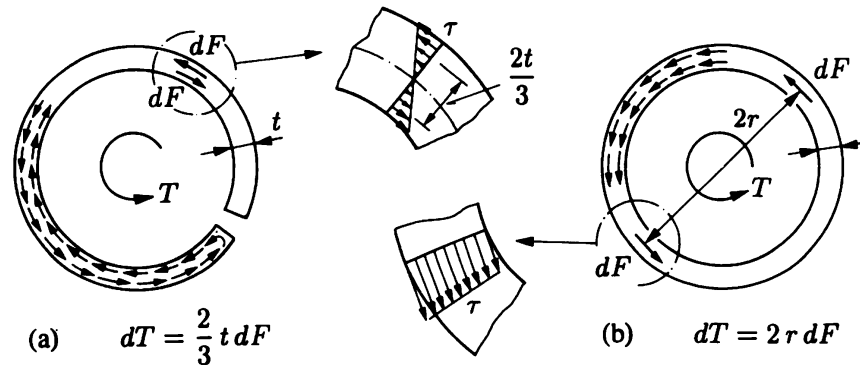


Fig. 8.16 Circulation des contraintes tangentielles de torsion : (a) section ouverte ; (b) section fermée.

un moment de torsion bien supérieur dans le cas fermé que dans le cas ouvert, puisque les bras de levier intervenant dans l'application du principe d'équivalence sont respectivement proportionnels au diamètre et à l'épaisseur. En conclusion, *la section fermée est beaucoup plus résistante à la torsion que la section ouverte*.

8.7.2 Une cellule

L'analogie de la membrane permet de résoudre le problème de la torsion d'une poutre à section droite unicellulaire de forme quelconque (fig. 8.17). Le long du contour intérieur et dans la cellule, la membrane doit avoir un niveau constant a et, sur l'épaisseur t variable de la paroi du tube, elle est légèrement bombée, comme représentée en coupe à la figure.

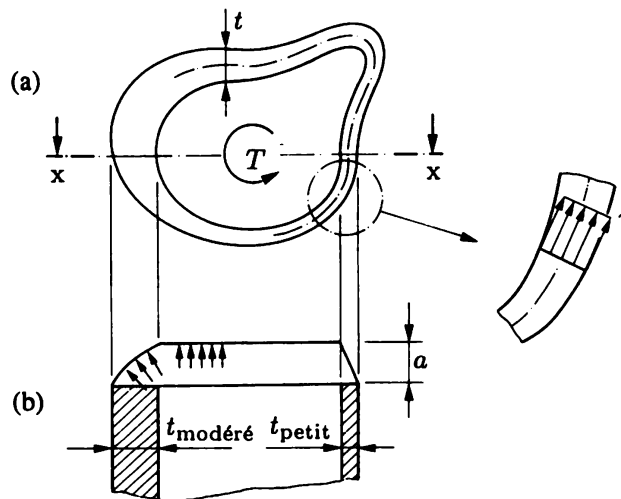


Fig. 8.17 Poutre tubulaire unicellulaire : (a) section droite ; (b) coupe xx et membrane.

Si cette épaisseur est *petite* vis-à-vis des dimensions de la section droite, on peut faire l'*hypothèse* que la courbure de la membrane est suffisamment faible pour pouvoir la négliger : sur l'épaisseur, la pente a/t est *constante* et la membrane est une surface réglée. (On examine à la section 8.9 le cas où cette hypothèse n'est plus valable.) Il en résulte que *la contrainte tangentielle est constante à travers l'épaisseur* ; puisqu'elle doit être tangente au contour, elle est dirigée suivant la *tangente à la ligne moyenne de la section*.

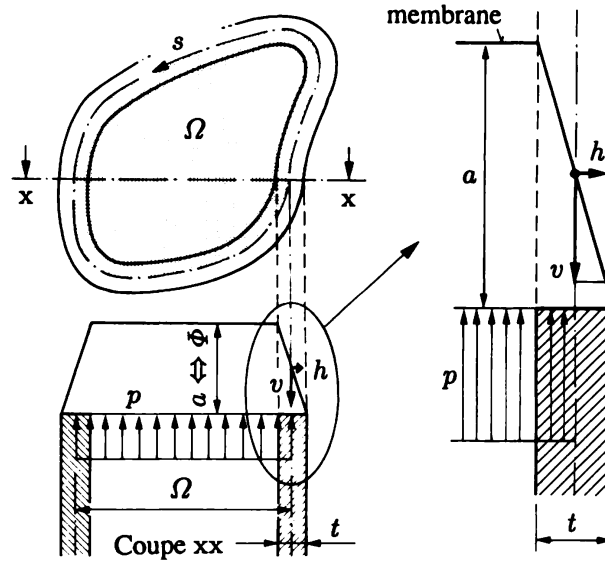


Fig. 8.18 Equilibre de la membrane et aire Ω .

L'équilibre de la membrane fournit sa flèche a . La composante horizontale h constante de la tension permet de calculer la composante verticale v de la réaction d'appui, grâce à la pente (fig. 8.18),

$$v = \frac{ah}{t}$$

Appelons Ω l'aire de la cellule limitée par la ligne moyenne et s l'abscisse curviligne le long de cette ligne. L'équilibre de translation s'écrit

$$p\Omega = \oint v ds = \oint \frac{ah}{t} ds = ah \oint \frac{ds}{t}$$

La flèche vaut ainsi

$$a = \frac{p\Omega}{h \oint \frac{ds}{t}}$$

et fournit, en remplaçant p/h par $2G\chi$, le niveau correspondant de la fonction de contrainte

$$\Phi = \frac{2G\chi\Omega}{\oint \frac{ds}{t}}$$

La relation entre le volume⁽¹⁾ délimité par cette fonction et le moment de torsion s'écrit

$$T = 2\Omega\Phi = G\chi \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (8.18)$$

⁽¹⁾ Avec la formule des trois niveaux, le volume vaut $V = (\Phi/6) (A_{\text{sup}} + 4\Omega + A_{\text{inf}})$; or $A_{\text{sup}} + A_{\text{inf}} \cong 2\Omega$, avec une erreur proportionnelle à t^2 ; si t est petit, on a bien $V = \Phi\Omega$.

d'où, avec (8.1), la constante de torsion

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (8.19)$$

La pente donne la valeur de la contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{\Phi}{t}$$

et, avec (8.18),

$$\tau = \frac{T}{2\Omega t} \quad (8.20)$$

On voit que, contrairement aux sections ouvertes, on obtient la plus grande valeur de τ pour l'épaisseur la plus faible.

On appelle **flux de cisaillement** la résultante des contraintes tangentielles par unité de longueur de la ligne moyenne. Ce n'est rien d'autre que la quantité Φ (en [N/m] par exemple). Le flux est donc *constant*, que l'épaisseur varie ou non ; on le note f et il vaut

$$f = \tau t = \frac{T}{2\Omega} = \text{cste} \quad (8.21)$$

Remarques

Les formules (8.19) et (8.20) sont connues sous le nom de formules de Bredt (1896).

Si l'épaisseur t est constante et si L_Ω désigne le périmètre de la ligne moyenne, on obtient, avec $\oint (1/t) ds = L_\Omega/t$,

$$J = \frac{4\Omega^2 t}{L_\Omega} \quad (8.22)$$

Lorsque le rayon de courbure de la ligne moyenne devient du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la paroi, il se produit une forte élévation locale de la valeur de la contrainte tangentielle, dont le tableau 8.15 permet d'apprécier l'ordre de grandeur (la membrane n'a plus, localement, une pente constante).

8.7.3 Plusieurs cellules adjacentes

La répartition des contraintes tangentielles dans une poutre multicellulaire (fig. 8.19) est un problème hyperstatique de degré $n - 1$, où n est le nombre de cellules ; la résolution de ce problème sort du cadre de cet ouvrage.



Fig. 8.19 Sections à cellules adjacentes.

On obtient généralement une bonne approximation en négligeant les parois internes et en faisant le calcul avec la plus grande cellule restante possible. De petites parois saillantes à section ouverte (telles ab et cd , fig. 8.19) ont en général un effet négligeable.

8.7.4 Equilibre des flux de cisaillement

Dans la section droite d'une poutre multicellulaire, considérons le nœud A où concourent trois parois 1, 2 et 3 (fig. 8.20a); les flux correspondants f_1 , f_2 et f_3 , produits par l'action d'un moment de torsion T , sont liés par une relation élémentaire.

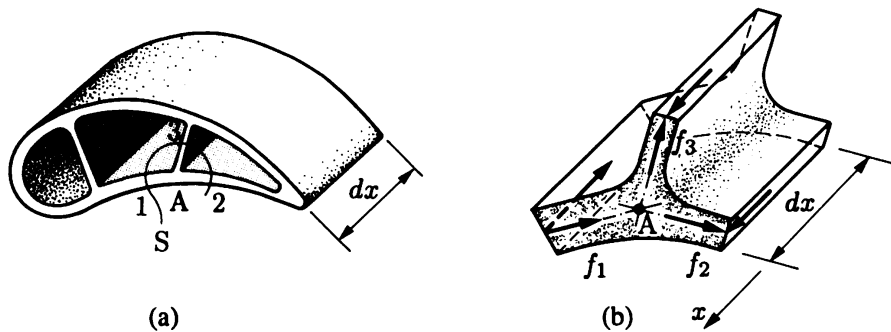


Fig. 8.20 Relation entre les flux : (a) poutre multicellulaire ; (b) nœud A isolé et flux.

Par une coupe cylindrique S entourant le nœud A et pratiquée perpendiculairement aux parois, isolons un fragment dx de la poutre (fig. 8.20b). Vu la réciprocité des contraintes tangentielles, les flux f_1 , f_2 et f_3 apparaissent aussi sur les faces longitudinales de la coupe S . La relation entre les flux s'obtient alors en exprimant l'équilibre longitudinal du fragment, soit, dans le cas de la figure,

$$\sum F_x = -f_1 dx + f_2 dx + f_3 dx = 0$$

ou, simplement, $f_1 = f_2 + f_3$, ce qui signifie que le flux provenant de la paroi 1 est absorbé par les parois 2 et 3 (analogie hydrodynamique).

De manière générale, *les flux concourants en un nœud sont en équilibre*

$$\sum f_{\text{nœud}} = 0 \quad (8.23)$$

Cette propriété est très utile dans l'étude de la répartition des contraintes tangentielles dues tant au moment de torsion qu'à l'effort tranchant (chap. 9).

8.8 Forme rationnelle des sections droites

On déduit de ce qui précède que la section fermée est la meilleure pour résister à la torsion ; la section ouverte est beaucoup trop déformable et, dans la section massive, la matière interne est mal utilisée ($\tau < \tau_{\max}$).

La formule (8.20) indique qu'il faut prendre une épaisseur constante pour utiliser le matériau au mieux. Si l'on compare diverses formes de même épaisseur t et même périmètre L_0 , cette formule,

écrite sous la forme $T = 2\Omega t\tau$, montre que le maximum de T s'obtient pour le maximum de Ω , donc pour le cercle. Ensuite, en faisant varier le rayon moyen r et l'épaisseur t de ce cercle, mais en gardant l'aire $A = 2\pi r t$ constante (donc la quantité de matière), la relation $T = 2\Omega t\tau = 2\pi r^2 [A/(2\pi r)]\tau$ montre que T croît si le rayon (donc Ω) augmente.

Par conséquent, lorsqu'on n'est pas restreint par l'encombrement, il faut donner aux poutres tordues une section tubulaire de grandes dimensions extérieures. Toutefois, on est limité dans ce sens par le danger de voilement des parois, lorsque l'épaisseur de ces dernières devient fort réduite ; on peut éventuellement les raidir par des nervures longitudinales et transversales pour lutter contre ce danger. On est également limité par des raisons pratiques, déjà mentionnées en fin de section 5.5.

On doit aussi prévoir des *diaphragmes* ou *entretoises*, en particulier au droit des sections où s'appliquent des couples de torsion extérieurs, pour en permettre la diffusion rapide dans toute l'étendue de la section droite. Ces éléments réalisent un raidissage transversal qui garantit le maintien de la forme de la section droite ; en leur absence, cette section peut se distordre considérablement (fig. 8.21), et la théorie ci-dessus ne s'applique plus. En effet, la théorie de Saint-Venant fait l'hypothèse que la section tourne en bloc sans se déformer dans son plan. De tels problèmes se rencontrent surtout dans les poutres des grands ponts en caisson.

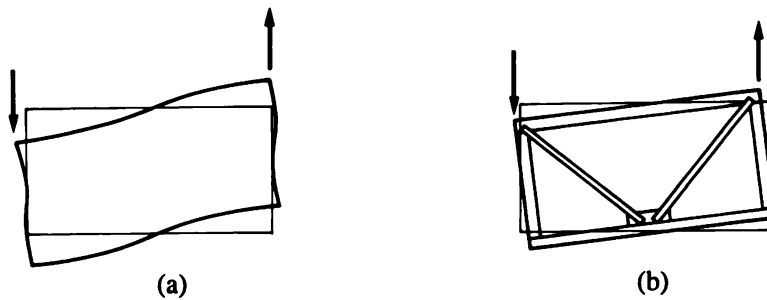


Fig. 8.21 Déplacement de la section droite : (a) sans diaphragme, d'où distorsion ; (b) avec diaphragme (en treillis), d'où rotation en bloc.

8.9 Sections composées

8.9.1 Section composée et sa décomposition

Les formules de calcul en torsion diffèrent avec le *type* de la section droite (massif, ouvert ou fermé ; sect. 8.4) ; si la section d'une poutre comporte deux ou plusieurs de ces types, elle est dite *composée* et son calcul n'est plus immédiat. Inversement, on ne peut diviser arbitrairement une section droite en plusieurs éléments. Il faut se baser sur l'analogie de la membrane : *la forme de la membrane révèle les types des éléments composant la section* ; par exemple, si la membrane comporte plusieurs parties *indépendantes*, alors la section peut se diviser en autant d'éléments.

Considérons (fig. 8.22) le cas d'une section droite composée de deux éléments P_1 et P_2 de type quelconque. La figure 8.23 montre deux exemples concrets de ce genre ; dans le premier, la section comporte une partie centrale massive et des ailes saillantes formant par leur ensemble une partie ouverte ; dans le second, la section est formée de deux parties tubulaires. Dans chaque cas, les dispositions techniques sont telles que la section globale soit monolithique à la torsion, c'est-à-dire

qu'elle tourne en bloc en torsion, afin d'assurer l'hypothèse de conservation de la forme de la section dans son plan. Si nécessaire, les divers éléments doivent être convenablement liés transversalement par des entretoises ou diaphragmes, schématisés par des traits interrompus sur les figures.

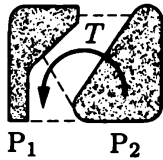


Fig. 8.22 Section composée.

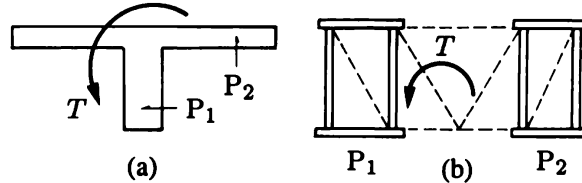


Fig. 8.23 Sections composées de deux éléments :
(a) poutre en T (un rectangle massif et un rectangle mince) ;
(b) poutre à deux caissons unicellulaires à parois minces.

8.9.2 Section composée de deux éléments de type quelconque

La répartition d'un moment de torsion T entre les parties P_1 et P_2 d'une telle section (fig. 8.22) est un problème hyperstatique de degré un que l'on résout aisément par les deux équations

- statique (équilibre ou équivalence)

$$T = T_1 + T_2 \quad (a)$$

- cinématique (rotation en bloc)

$$\chi = \chi_1 = \chi_2 \quad (b)$$

Remarquant que (loi constitutive)

$$T = GJ\chi \quad T_1 = GJ_1\chi_1 = GJ_1\chi \quad T_2 = GJ_2\chi_2 = GJ_2\chi \quad (c)$$

on trouve, en introduisant (c) dans (a),

$$J = J_1 + J_2 \quad (8.24)$$

La constante de torsion est donc la somme des constantes de chacune des parties (ce qui est évident par la membrane).

Des deux dernières équations (c), on tire $T_1/T_2 = J_1/J_2$; puis avec (a), on trouve

$$T_1 = \frac{J_1}{J} T \quad T_2 = \frac{J_2}{J} T \quad (8.25)$$

Ainsi, le moment de torsion appliqué se distribue au prorata des constantes de torsion.

On généralise aisément ces relations au cas de deux matériaux G_1 et G_2 différents, ou de n éléments P_1, P_2, \dots, P_n .

8.9.3 Plusieurs éléments ouverts

Ce cas a été traité au paragraphe 8.6.2 (fig. 8.13). La relation (8.16) est l'image de (8.24) ; on obtient (8.17) en introduisant (8.25) – écrite pour le rectangle i – dans (8.15).

8.9.4 Section fermée à paroi d'épaisseur modérée

Dans une section fermée, l'hypothèse *t mince* conduit à τ constant à travers l'épaisseur de la paroi, ainsi qu'aux formules (8.19) et (8.20), dites de Bredt. Ces dernières sont d'autant plus précises que t est petit. Si tel n'est pas le cas, elles peuvent être améliorées comme suit.

Considérons une section fermée dont l'une des parois est relativement épaisse (fig. 8.24), cette paroi restant en elle-même dans le domaine du rectangle mince ($b/t \geq 10$, éventuellement 5). On dira qu'il s'agit d'une paroi d'épaisseur *modérée*.

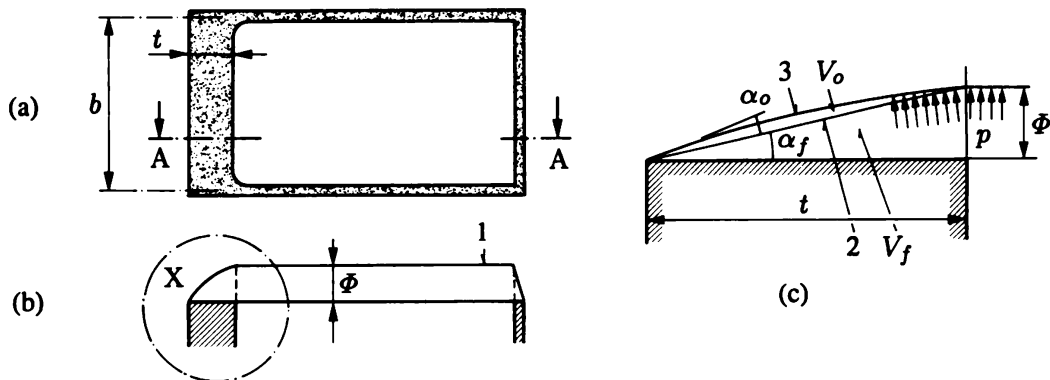


Fig. 8.24 Section fermée avec paroi d'épaisseur modérée : (a) section droite ; (b) coupe AA (1 : membrane) ; (c) détail X (2 : membrane plane, hypothèse *t mince* ; 3 : membrane réelle parabolique).

Sur la paroi d'épaisseur modérée, la membrane est légèrement bombée. Admettre un plan revient à faire l'hypothèse *t mince*. La paroi étant rectangulaire mince, la forme réelle de la membrane est parabolique. La différence entre le plan et la forme réelle est donc à l'image du cylindre parabolique de la section rectangulaire mince (§ 8.6.1 et fig. 8.12). Ainsi, *la section proposée se comporte comme une section composée, comprenant une section fermée – comptée à la ligne moyenne – et une section rectangulaire mince* (fig. 8.25). On la calcule donc comme expliqué précédemment (§ 8.9.2).

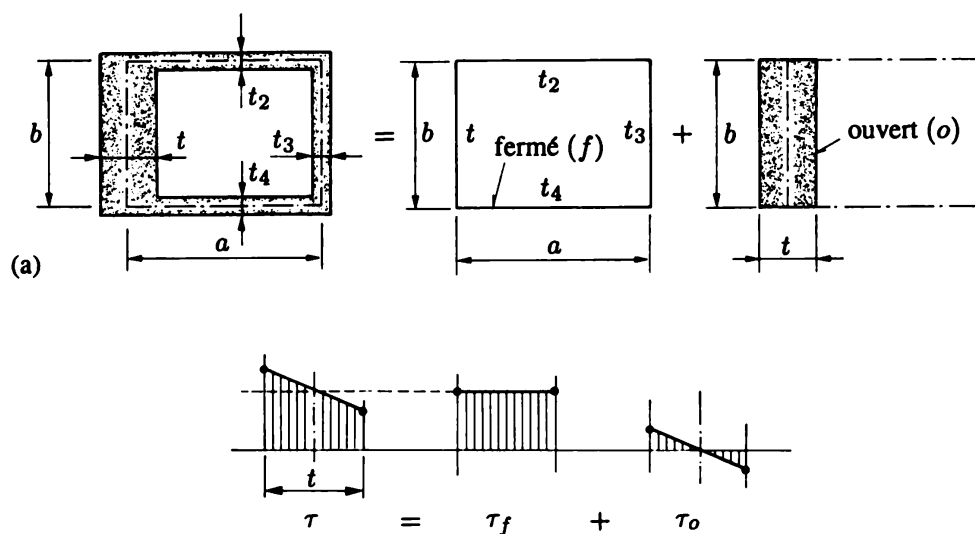


Fig. 8.25 Section fermée comprenant une paroi d'épaisseur modérée : (a) décomposition de la section ; (b) contraintes tangentielles dans la paroi d'épaisseur modérée.

Attribuons les indices f et o aux grandeurs relatives aux parties respectivement fermée et ouverte (ici rectangulaire mince). Il résulte de la membrane ($V = V_f + V_o$, fig. 8.24), ou de (8.24),

$$J = J_f + J_o \quad (8.26)$$

où J_f et J_o s'obtiennent par (8.19) et (8.14). De même, dans la paroi d'épaisseur modérée, les contraintes tangentielles étant proportionnelles à la pente (ici $\alpha = \alpha_f + \alpha_o$, angles petits, fig. 8.24), on a

$$\tau = \tau_f + \tau_o \quad (8.27)$$

où τ_f et τ_o sont donnés, après avoir réparti via (8.25) le moment de torsion T en contributions T_f (pour le calcul de τ_f) et T_o (pour le calcul de τ_o), par (8.20) et (8.15) (fig. 8.25).

On étend sans difficulté ces résultats aux cas comportant plusieurs parois d'épaisseur modérée, plusieurs matériaux, etc. De façon générale, on parle d'épaisseur *mince* ou *modérée* selon que l'on veut *ignorer* ou *considérer* l'épaisseur des parois dans le calcul des sections fermées.

Application

Ce problème se rencontre couramment dans les sections des poutres de pont en béton ou acier-béton (fig. 8.26). L'importance relative de l'épaisseur des parois de béton peut rendre la contribution correspondante non négligeable.

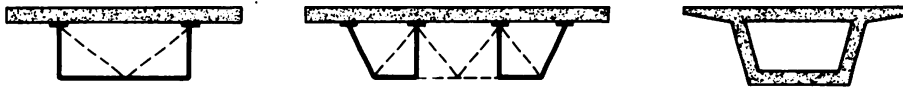


Fig. 8.26 Sections schématiques de poutres de pont.

Dans $J = J_f + J_o$, le terme J_o est en général beaucoup plus petit que J_f et, en première approximation, on pourrait le négliger. Dans $\tau = \tau_f + \tau_o$, par contre, le terme τ_o peut être du même ordre de grandeur que τ_f , même si $T_o \ll T_f$, parce que la partie ouverte est très peu résistante à la torsion.

8.10 Poutres composées de deux matériaux

On se limite ici aux poutres à parois minces pour lesquelles le matériau ne change pas à travers l'épaisseur des parois, mais seulement le long de la ligne moyenne ou d'une paroi à l'autre. Le *coefficient d'équivalence*

$$m = \frac{G_a}{G_b} \quad (8.28)$$

rapport des modules de glissement des matériaux a et b , fournit la relation

$$\tau_b = \frac{\tau_a}{m} \quad (8.29)$$

et permet de ramener le calcul à celui d'une section fictive faite du seul matériau de référence a .

Pour les *sections ouvertes* (fig. 8.27a), on divise par m les contributions des rectangles allongés du matériau b au calcul de la *constante de torsion équivalente* \mathcal{J}_a (démonstration immédiate par les relations du paragraphe 8.9.2). Les valeurs

$$\mathcal{J}_a = J_a + \frac{1}{m} J_b \quad (G\mathcal{J})_a = G_a \mathcal{J}_a \quad (8.30)$$

sont à introduire dans (8.2) ou (8.4) pour le calcul des déplacements, et dans (8.17) pour le calcul des contraintes

$$\tau_{\max a} = \frac{T}{\mathcal{J}_a} t_a \quad \tau_{\max b} = \frac{T}{m \mathcal{J}_a} t_b \quad (8.31)$$

Pour les *sections fermées* (fig. 8.27b), le flux (8.21), restant constant, fournit, avec (8.29),

$$f = \tau_a t_a = \tau_b t_b = \frac{1}{m} \tau_a t_b \implies \mathcal{J}_a = \frac{1}{m} t_b$$

en sorte qu'une *épaisseur équivalente* \mathcal{J}_a doit être utilisée pour calculer les contributions apportées par les parois du matériau b à la constante de torsion équivalente \mathcal{J}_a . Si s_a et s_b désignent les abscisses le long des parois des matériaux a et b , les valeurs

$$\mathcal{J}_a = \frac{4\Omega^2}{\int_{s_a} \frac{ds}{t_a} + m \int_{s_b} \frac{ds}{t_b}} \quad (G\mathcal{J})_a = G_a \mathcal{J}_a \quad (8.32)$$

interviennent dans les formules (8.2) et (8.4) pour obtenir les déplacements. Par contre, pour calculer les contraintes, il n'est pas nécessaire d'introduire une épaisseur équivalente : il suffit d'utiliser t_a ou t_b selon que l'on calcule dans le matériau a ou b , car (8.20) ne dépend pas de J (ex. 8.11.10).

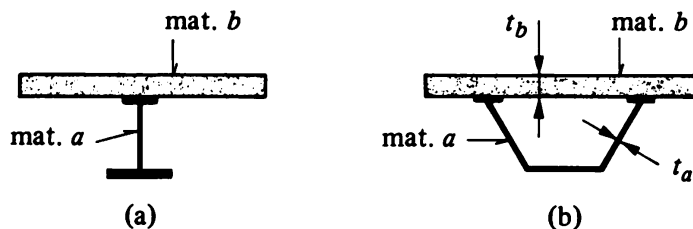


Fig. 8.27 Sections de poutres composées de deux matériaux a et b :
(a) ouverte ; (b) fermée (ailes saillantes négligées).

8.11 Exercices

8.11.1 Une poutre ABCD en acier, en forme de T, située dans un plan horizontal, est appuyée et chargée comme l'indique la figure (barre de torsion). On fixe σ_{adm} à 10 kN/cm^2 .

- 1) Quel diamètre donner à cette pièce si la section est circulaire pleine ?
- 2) Quel gain de matière réalise-t-on avec un tube dont le rapport des diamètres extérieur D et intérieur d est $D/d = 5/4$?
- 3) Calculer dans chaque cas l'angle de torsion θ_x en B.

8.11.2 Une éprouvette métallique prismatique de section rectangulaire $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ est soumise à un moment de torsion $T = 1,2 \text{ kN}\cdot\text{cm}$; on mesure une rotation par unité de longueur $\chi = 10^{-3} \text{ rad/cm}$. A $7T$, la rotation est encore réversible ; à $8T$, on observe une légère rotation permanente. De quel métal s'agit-il probablement ?

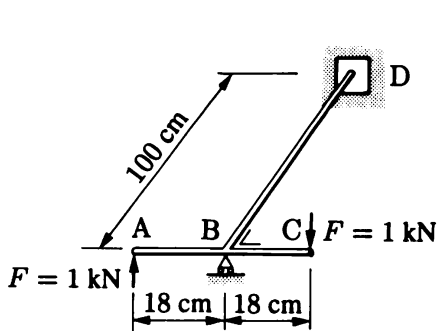


Fig. Ex. 8.11.1

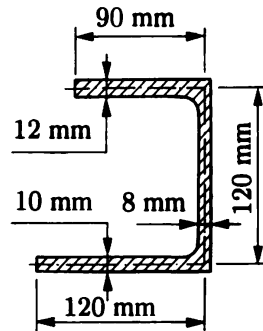


Fig. Ex. 8.11.3

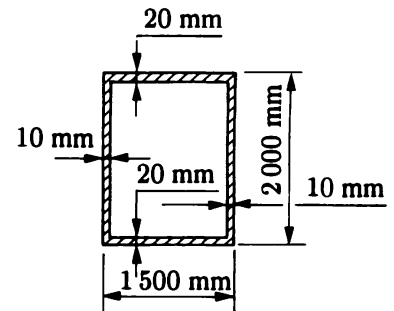


Fig. Ex. 8.11.4

8.11.3 Un profilé en U asymétrique, fait en alliage d'aluminium 6061 T6 (Al-MgSi 0,5), est soumis au moment de torsion $T = 842 \text{ N}\cdot\text{m}$. Calculer la contrainte tangentielle maximale (négliger les congés) et l'angle de torsion par unité de longueur.

8.11.4 Une poutre en acier doux a une section tubulaire rectangulaire. Calculer le moment de torsion maximal que cette section peut supporter sans se plastifier, et l'angle de torsion correspondant sur 22 m de longueur de poutre. (Les parois sont considérées comme minces.)

8.11.5 On forme un tube à section circulaire, de rayon moyen r , par enroulement d'une tôle d'épaisseur t . Dans un cas on ne soude pas (section ouverte ; indice o), dans l'autre on soude (section fermée ; t admis mince ; indice f). On soumet ces tubes au même moment de torsion T . Calculer la contrainte tangentielle maximale et l'angle de torsion par unité de longueur dans chaque cas. Comparer ces valeurs par les rapports $\tau_{o\max}/\tau_{f\max}$ et χ_o/χ_f ; calculer les valeurs numériques de ces rapports pour les proportions usuelles $r/t = 5, 10$ et 25 ; conclure.

8.11.6 Toutes les parois de la section droite d'une poutre extrudée en alliage d'aluminium ont la même épaisseur t . Calculer la répartition des contraintes dans cette section sous l'action d'un moment de torsion $T = 555 \text{ kN}\cdot\text{cm}$. Admettre d'abord que les parois sont minces, puis qu'elles sont d'épaisseur modérée.

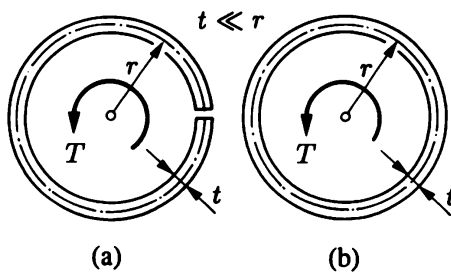


Fig. Ex. 8.11.5 (a) section ouverte ;
(b) section fermée.

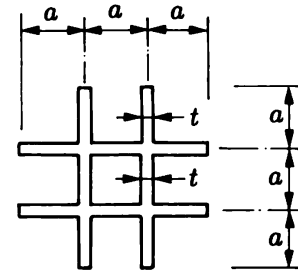


Fig. Ex. 8.11.6
($a = 6 \text{ cm}$; $t = 0,6 \text{ cm}$).

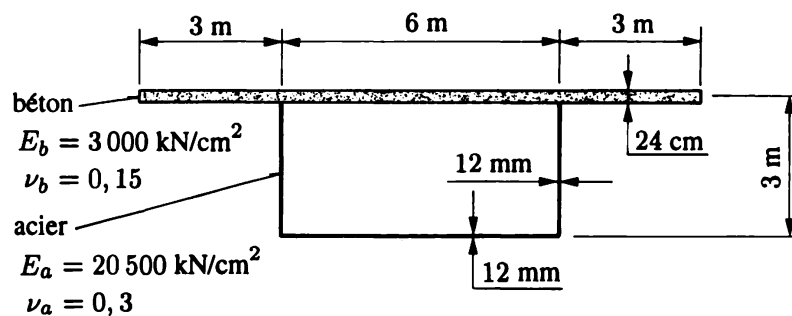


Fig. Ex. 8.11.7

8.11.7 La figure représente de manière schématique la section droite d'un pont en caisson, formé d'une dalle de béton et d'une auge en acier, le tout lié rigidement. Dans cette section agit un moment de torsion $T = 10\,000 \text{ kN}\cdot\text{m}$. En admettant que la paroi de béton est

- (a) mince,
- (b) d'épaisseur modérée,

et que les parois d'acier sont minces, calculer

- 1) la constante de torsion de la section, rapportée à l'acier ;
- 2) les contraintes tangentielles dans l'acier et le béton.

8.11.8 La figure montre la section droite schématique d'un pont-rail à double voie, formé de deux caissons en acier convenablement entretoisés, et d'une dalle de béton rigidement liée à l'acier (pont-rail sur l'autoroute Londres-Yorkshire près de Trowell). Lors du passage d'un train, cette section est soumise à un moment de torsion $T = 3\,600 \text{ kN}\cdot\text{m}$ agissant comme indiqué. On donne (a = acier, b = béton) $E_a = 20\,800 \text{ kN/cm}^2$, $\nu_a = 0,3$, $E_b = 3\,680 \text{ kN/cm}^2$ et $\nu_b = 0,15$. Les cotes de l'acier sont mesurées à ses lignes moyennes.

Etudier la répartition des contraintes tangentielles dans la semelle supérieure acier-béton du caisson (littéral) ; en déduire la position de la ligne moyenne équivalente ; puis, en considérant l'épaisseur du béton comme mince, calculer la contrainte tangentielle maximale dans l'acier – en indiquant où elle se produit et dans quel sens elle agit – et la contrainte tangentielle dans le béton.

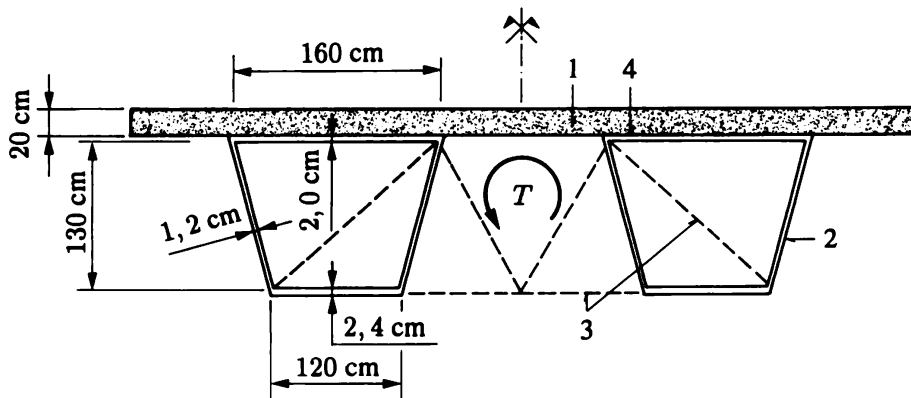


Fig. Ex. 8.11.8 (1 : dalle en béton ; 2 : caisson en tôles d'acier soudées ; 3 : entretoise ; 4 : liaison acier-béton rigide).

8.11.9 Calculer la constante de torsion J_{SV} d'une section rectangulaire $b \times c$ (fig. 8.10) à l'aide de la formule de Saint-Venant (8.12). En déduire la valeur approximative du coefficient γ_{SV} via (8.13c) et la comparer à la valeur exacte du tableau 8.11 pour les diverses valeurs du rapport b/c .

8.11.10 Démontrer les formules (8.20) $\tau = T/(2\Omega t)$ et (8.21) $f = \tau t = \text{cste}$ par la seule statique. *Indications :* pour (8.21), utiliser l'équilibre des flux de cisaillement (§ 8.7.4) ; pour (8.20), faire l'équivalence entre T et les τ appliqués sur les facettes $t ds$.

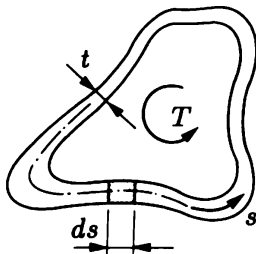


Fig. Ex. 8.11.10

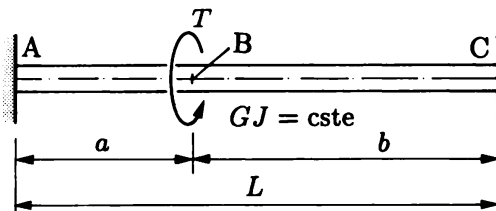


Fig. Ex. 8.11.12

8.11.11 Appliquer le principe d'équivalence à la distribution des contraintes obtenue au paragraphe 8.6.1, pour la section rectangulaire mince (formule 8.15 et fig. 8.12) ; comment expliquer le résultat paradoxal obtenu ?

8.11.12 Une poutre prismatique bi-encastée est soumise à un moment de torsion concentré T . Trouver le diagramme des moments de torsion le long de la poutre. Comparer le résultat obtenu avec celui de l'exercice 4.10.7 (fig. ex. 4.10.7a).

8.11.13 Un tube MSH 60-60-4 en acier faiblement allié est soumis à un effort normal de traction $N = 55$ kN et à un moment de torsion $T = 300$ kN·cm. Déterminer la sécurité vis-à-vis de la plastification selon les critères de Tresca et de von Mises. On admet que les parois sont minces.



Fig. Ex. 8.11.13

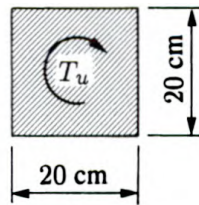


Fig. Ex. 8.11.14

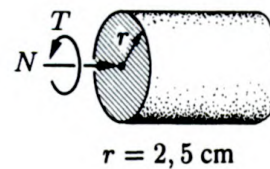


Fig. Ex. 8.11.15

8.11.15 Une éprouvette en verre à section circulaire pleine, de 5 cm de diamètre, est soumise à un effort de compression de 125 kN et à un moment de torsion de 140 kN·cm, variant proportionnellement l'un à l'autre. Déterminer le coefficient de sécurité à la rupture de l'éprouvette, admettant que la courbe intrinsèque du verre est formée de deux droites. Quelle erreur aurait-on commise si on avait admis que la rupture du verre obéissait au critère de la plus grande contrainte positive (§ 7.10.2) ?

8.11.16 Un arbre AB, de section circulaire pleine, de longueur L , soumis à un moment de torsion constant, a une forme légèrement tronconique (angle α faible). La petite base A a un rayon a , et la grande base B un rayon b .

- 1) Calculer la valeur élastique maximale T_e du moment de torsion si le matériau a une limite élastique σ_e connue.
- 2) Pour un moment T donné, calculer l'angle de torsion entre A et B.
- 3) Calculer cet angle en supposant l'arbre de section constante moyenne, de rayon $(a + b)/2$.
- 4) Evaluer l'erreur entre les deux angles précédents dans le cas où $b = 1,2a$.

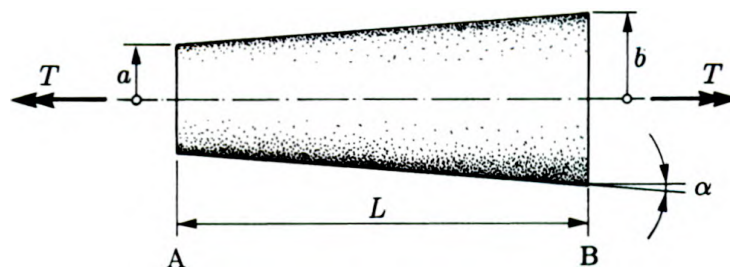


Fig. Ex. 8.11.16

8.11.17 Suggérer deux décompositions plausibles de la section représentée à la figure 8.23(a). Pour les dimensions

- largeur totale = 800 cm, hauteur totale = 200 cm,
- épaisseur de l'aile = 40 cm, épaisseur de l'âme = 100 cm,

calculer la constante de torsion relative à ces deux modélisations.

8.11.18 Dans une poutre tordue faite d'un matériau raide, démontrer que les premières facettes de rupture ne se produisent à 45° par rapport aux génératrices que si la résistance à la traction du matériau tend vers zéro. *Indication* : utiliser une courbe intrinsèque formée de deux droites et le résultat de l'exercice 7.11.8.

8.12 Lexique

Torsion pure	Sollicitation d'une poutre par le seul moment de torsion T , constant.
Constante de torsion (J)	Propriété géométrique de la section droite d'une poutre, caractérisant sa déformabilité en torsion.
Angle de torsion par unité de longueur	$\chi = \frac{d\theta_x}{dx}$ ($T = GJ\chi$: loi de Hooke).
Contraintes tangentielles longitudinales	Contraintes tangentielles agissant le long des fibres d'une poutre (réciprocité des τ !).
Types de poutres et de sections droites : poutre	
• massive	
• à parois minces	
section droite	
• massive	
• ouverte	
• fermée, tubulaire ou en caisson.	
Ligne moyenne	Ligne médiane de la section d'une paroi mince.
Cellule	Zone interne d'une section fermée.
Section multicellulaire	Section à plusieurs cellules adjacentes.
Formule de Saint-Venant	J approximatif des sections massives pleines.
Flux de cisaillement (f)	Dans une section fermée, effort réparti, résultante des τ , tangent à la ligne moyenne ($f = \tau t = \text{cste}$);
• équilibre des flux de cisaillement	
Entretoise, diaphragme	Elément (poutre, treillis, paroi...) transversal à l'axe d'une poutre, garantissant le maintien de la forme de la section droite.
Section composée	Section formée de plusieurs parties de type différent (massif, ouvert, fermé).

9. Contraintes dues à l'effort tranchant

9.1 Introduction

Lorsqu'une poutre est soumise à un moment fléchissant variable, ce dernier est nécessairement accompagné d'un effort tranchant, en vertu de la relation

$$V = -\frac{dM}{dx} \quad (9.1)$$

qui découle de l'équilibre d'un tronçon dx de poutre droite (vol. 1, § 9.2.1). La poutre (ou l'une de ses sections) est soumise à *flexion simple* (sect. 5.1) puisqu'elle est sollicitée simultanément par le moment fléchissant M et l'effort tranchant V .

Le but de ce chapitre est l'étude des contraintes que l'effort tranchant engendre. Cette étude, si on l'entreprend en détail, est difficile. On se limite ici aux aspects les plus classiques et les plus utiles.

9.2 Théorie élémentaire

Isolons un tronçon de poutre de longueur dx sollicité par effort tranchant (fig. 9.1). A première vue, on serait tenté de supposer que les sections droites restent planes au cours du changement de configuration ($\Omega \rightarrow \Omega'$).

S'il en est ainsi, chaque section CD subit par rapport à la section AB infiniment voisine un déplacement vertical dv ($= CC'$) et le glissement correspondant vaut $\gamma = dv/dx$. Les fibres ne changent pas de longueur (au deuxième ordre près) et subissent toutes le même glissement γ . Si le matériau est élastique, il naît sur les facettes de la section droite des contraintes tangentielles verticales

$$\tau = G\gamma \quad (9.2)$$

uniformément réparties sur toute l'étendue de cette section (fig. 9.2).

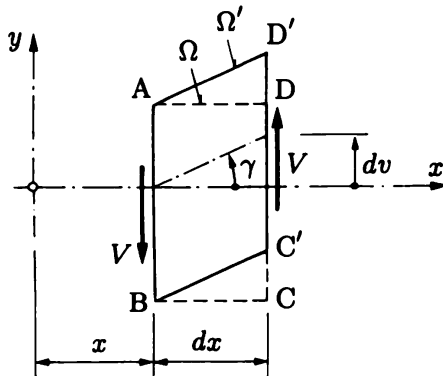


Fig. 9.1 Déformation (théorie élémentaire).

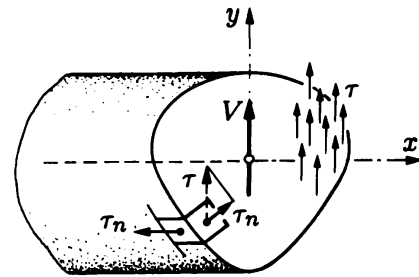


Fig. 9.2 Contraintes (théorie élémentaire).

En exprimant que ces contraintes sont équivalentes à l'effort tranchant V , on obtient l'équation $V = \tau A$, d'où l'on déduit, avec (9.2),

$$\tau = \frac{V}{A} \quad \gamma = \frac{V}{GA} \quad (9.3)$$

Cette théorie élémentaire n'est pas admissible, car elle contrevient aux conditions d'équilibre du solide et, en particulier, au principe de la réciprocité des contraintes tangentielles. Considérons⁽¹⁾ une facette de la section droite adjacente au contour (fig. 9.2), sur laquelle la contrainte, étant verticale, admet une composante normale au contour τ_n . Par suite de la réciprocité des contraintes tangentielles, il existe alors une contrainte égale sur la facette orthogonale à la première appartenant à la surface latérale de la poutre, ce qui est impossible puisque cette surface latérale est libre de toute force.

La contrainte τ sur toute facette adjacente au contour ne peut donc être que tangente au contour et la théorie élémentaire qui précède doit être abandonnée. On établit ci-après une théorie plus rigoureuse qui vérifie toutes les conditions d'équilibre.

9.3 Effort rasant

9.3.1 Position du problème

Comme en torsion, les sections ne restent pas planes sous l'effet de l'effort tranchant, de sorte qu'on ne peut trouver de cinématique simple permettant d'en déduire la répartition des contraintes (à l'image de la loi de Bernoulli par exemple). Mais, à cause de l'équation (9.1), on peut trouver une solution basée sur le seul équilibre, si l'on suppose *a priori connue* la distribution des contraintes normales de flexion ; pour ces dernières, on admet la formule de Navier (5.7) de flexion pure

$$\sigma = -\frac{M}{I} y \quad (9.4)$$

et on vérifie après coup qu'elle reste effectivement valable en présence de l'effort tranchant, c'est-à-dire en flexion simple (§ 10.3.1).

⁽¹⁾ Le raisonnement est identique à celui qui est fait à propos de la torsion (vol. 3, sect. 6.1).

Enfin, comme on ne tient aucun compte de la compatibilité cinématique, on vérifie également après coup que la solution basée sur l'équilibre est suffisamment précise vis-à-vis des solutions exactes (théorie de l'élasticité).

La théorie qui suit est soumise aux mêmes hypothèses que celles qui régissent (9.4), évidemment ; ce sont

- le matériau est élastique linéaire ;
- la poutre est prismatique (axe droit, section constante) ;
- la théorie est formulée en axes principaux d'inertie.

Alors que la deuxième hypothèse n'est pas impérative en flexion pure, *il est essentiel qu'elle soit respectée pour l'effort tranchant* : lorsque les poutres sont à hauteur lentement variable, les formules qui suivent peuvent ne plus s'appliquer du tout (sect. 9.11).

S'il est physiquement évident que l'effort tranchant produit des contraintes tangentielles sur la section droite, il en résulte, par le principe de réciprocité des dites contraintes, qu'il en existe aussi *longitudinalement entre fibres* (comme en torsion ; sect. 8.3 et fig. 8.3). Cette propriété est utilisée pour établir la théorie qui suit, due à l'ingénieur russe D. Jourawski (1856), suite aux fissures longitudinales qu'il observa dans diverses poutres en bois de ponts de chemin de fer en Russie.

9.3.2 Formule de l'effort rasant

Considérons (fig. 9.3) une poutre prismatique de section quelconque, soumise à la flexion simple dans le plan (x, y) . Isolons dans cette poutre une tranche d'épaisseur dx par deux sections droites infiniment voisines S et S' . Dans la section S agissent l'effort tranchant V et le moment fléchissant M ; dans la section S' agissent l'effort tranchant $V + dV$ et le moment fléchissant $M + dM$.

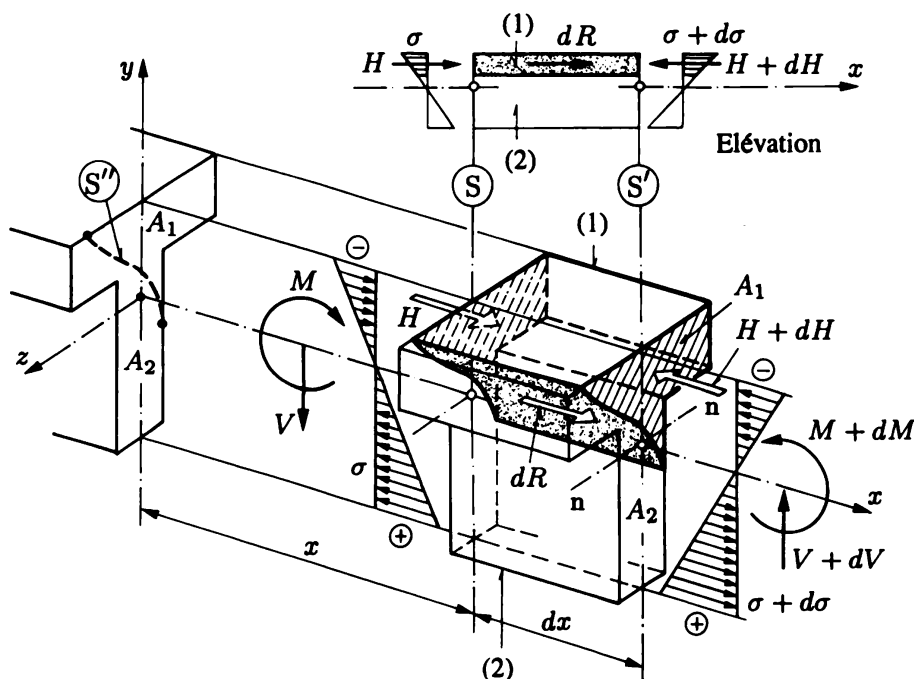


Fig. 9.3 Apparition de l'effort rasant dR sur la coupe S'' .

Afin d'étudier les contraintes tangentielle longitudinales, découpons cette tranche en deux fragments (1) et (2) par une surface de coupe cylindrique S'' de directrice quelconque, mais dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la poutre (fig. 9.3). Sur les faces d'aire A_1 du fragment (1) agissent des contraintes normales, dues à M et $M + dM$, dont les résultantes, H et $H + dH$, sont parallèles à x . Sur ces mêmes faces existent également des contraintes tangentielle, dues à V et $V + dV$, mais leurs résultantes n'interviennent pas dans l'équation d'équilibre $\sum F_x = 0$ utilisée ci-après. Par réciprocité, il existe aussi des contraintes tangentielle parallèles à x sur la surface de coupe S'' séparant les fragments (1) et (2). La résultante de ces contraintes sur la face du fragment (1) est notée dR (fig. 9.3). Cette force s'appelle l'*effort rasant* ; elle est parallèle à l'axe x de la poutre et doit nécessairement apparaître *pour assurer l'équilibre* du fragment (1), puisque $H + dH > H$ (principe de la coupe). On en établit la formule ci-après.

Dans la section S d'abscisse x , le moment fléchissant M provoque des contraintes de flexion réparties suivant la relation $\sigma = -My/I$. Afin d'éviter tout problème de signe, on raisonne concrètement sur la base de la figure 9.3 ; dans ce but, on considère le fragment (1), dont les deux faces d'aire A_1 sont essentiellement comprimées par les contraintes de flexion, puisqu'elles sont situées du côté des y positifs (au-dessus de l'axe neutre z ou $n-n$).

La résultante des forces élémentaires σdA sur la face verticale gauche de ce fragment est une certaine force d'intensité

$$H = \int_{A_1} \sigma dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y dA$$

L'intégrale intervenant dans cette formule n'est autre que le *moment statique, par rapport à l'axe neutre de flexion, de l'aire A_1 de la face verticale limitant le fragment (1)*. On désigne pour simplifier ce moment statique par S , ce qui permet d'écrire

$$H = \frac{M}{I} S$$

Dans la section S' d'abscisse $x + dx$, le moment fléchissant $M + dM$ produit des contraintes de flexion d'intensité $\sigma + d\sigma = (M + dM)y/I$. La résultante des forces élémentaires $(\sigma + d\sigma) dA$ sur la face verticale droite du fragment (1) vaut (intensité)

$$H + dH = \int_{A_1} (\sigma + d\sigma) dA = \frac{M + dM}{I} \int_{A_1} y dA = \frac{M + dM}{I} S$$

où l'on retrouve le même moment statique S que précédemment⁽²⁾.

Le sens des forces H et $H + dH$ étant évident (fig. 9.3), exprimons l'équilibre de translation selon x du fragment (1)

$$\sum F_x = H + dR - H - dH = 0 \quad \Rightarrow \quad dR = dH$$

soit

$$dR = \frac{dM}{I} S$$

⁽²⁾ Ce qui ne serait pas le cas si la poutre n'était pas prismatique ! D'où l'importance de cette hypothèse dans cette étude (§ 9.3.1).

et avec (9.1)

$$dR = \frac{(-V)S}{I} dx \quad (9.5)$$

Cette relation est la *formule de l'effort rasant* (établie pour une poutre prismatique, un matériau élastique linéaire et en axes principaux d'inertie).

Remarques

En fait, l'effort donné par (9.5) est plutôt l'effort rasant élémentaire. Le signe négatif s'explique ainsi : si M croît avec x , donc si dM est positif, alors, par (9.1), on voit que la valeur numérique de V est négative ; dans ce cas, (9.5) donne bien une valeur positive de dR . D'ailleurs, sur la figure 9.3, le sens de dR ne saurait être inversé. La source du signe négatif de V est la même qu'en flexion et, comme pour ce cas, on s'affranchira de ces signes par une vue concrète des phénomènes (§ 5.4.1).

L'effort rasant a pour cause la *tendance au glissement longitudinal entre fibres* ; suite à une coupe cylindrique longitudinale, les deux fragments ainsi produits ont tendance à glisser l'un sur l'autre lorsque le moment fléchissant est variable. L'aire de la section droite de l'un de ces fragments sert à calculer le moment statique S intervenant dans (9.5).

9.3.3 Importance de l'effort rasant

L'existence et l'importance des efforts rasants peuvent être mises en évidence par une expérience simple. Posons une poutre à section rectangulaire sur deux appuis, enduisons de graisse sa surface supérieure, puis plaçons sur elle une deuxième poutre identique, et chargeons l'ensemble de forces transversales quelconques (fig. 9.4a).

S'il n'y a pas de frottement entre les deux poutres, elles fléchissent indépendamment l'une de l'autre et les fibres inférieures tendues de la poutre supérieure glissent sur les fibres supérieures comprimées de la poutre inférieure (fig. 9.4b). Le moment d'inertie et le module de flexion de l'ensemble valent

$$I = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{12} = 2\frac{bh^3}{12} \quad W = \frac{bh^2}{6} + \frac{bh^2}{6} = 2\frac{bh^2}{6}$$

Dans une poutre monobloc de hauteur $2h$, au contraire, il naît dans le plan neutre P_n des efforts rasants longitudinaux qui empêchent tout glissement de la moitié supérieure de la poutre par rapport à sa moitié inférieure (fig. 9.4c). Grâce à la présence de ces efforts, la poutre monobloc a les caractéristiques

$$I = \frac{b(2h)^3}{12} = 8\frac{bh^3}{12} \quad W = \frac{b(2h)^2}{6} = 4\frac{bh^2}{6}$$

quadruple pour l'inertie (caractérisant la déformabilité) et double pour le module de flexion (caractérisant la résistance) de celles de l'ensemble des deux poutres de hauteur h .

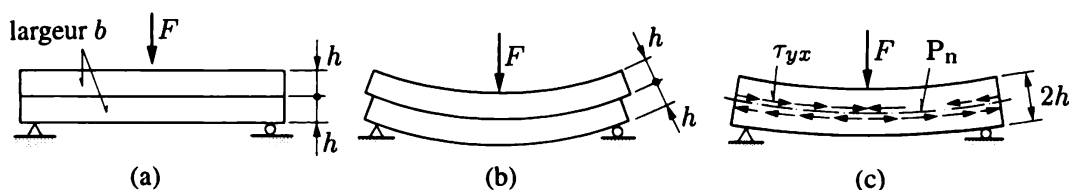


Fig. 9.4 Mise en évidence des efforts rasants.

9.4 Poutres à parois minces

La formule de l'effort rasant permet d'obtenir avec précision la répartition des contraintes tangentielles dans les poutres à parois minces. La figure 9.5 représente un élément de la paroi d'une telle poutre, d'épaisseur t et limité

- par deux sections droites ABCD et A'B'C'D' distantes de dx ;
- par deux surfaces de coupe *planes* longitudinales ABA'B' et CDC'D', effectuées parallèlement à l'axe x de la pièce et *normalement* à la ligne moyenne s de la paroi.

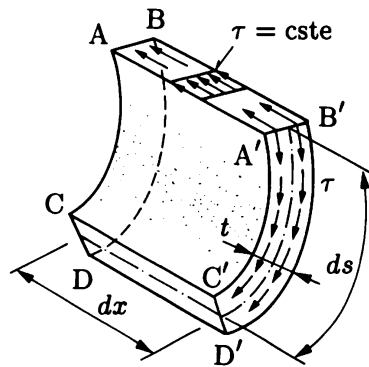


Fig. 9.5 Contraintes τ rasantes et tranchantes.

L'effort rasant engendre sur la section ABA'B' des contraintes tangentielles longitudinales *rasantes* τ qu'on peut sans grande erreur *admettre uniformément réparties à travers l'épaisseur t* , vu la minceur supposée de la paroi. On a donc

$$\tau = \frac{dR}{t dx} \quad (9.6)$$

Le flux de cisaillement $f = \tau t$ vaut, avec (9.5),

$$f = \tau t = \frac{dR}{dx} = \frac{(-V)S}{I} \quad (9.7)$$

et représente l'effort rasant par unité de longueur de paroi.

En vertu du principe de réciprocité des contraintes tangentielles, les contraintes *rasantes* (9.6) sont accompagnées de contraintes tangentielles *tranchantes* égales, agissant *dans le plan de la section droite* (fig. 9.5), selon la direction de la *tangente* à la *ligne moyenne s* de la paroi. Ainsi se trouve résolu le problème de la distribution des contraintes tangentielles dans la section droite, dues à l'effort tranchant.

9.5 Poutres à parois minces et à section ouverte

9.5.1 Formule générale

La figure 9.6 représente une poutre prismatique à parois minces à section ouverte, dans laquelle l'épaisseur t varie en général le long de la ligne moyenne de la section droite. Un point quelconque

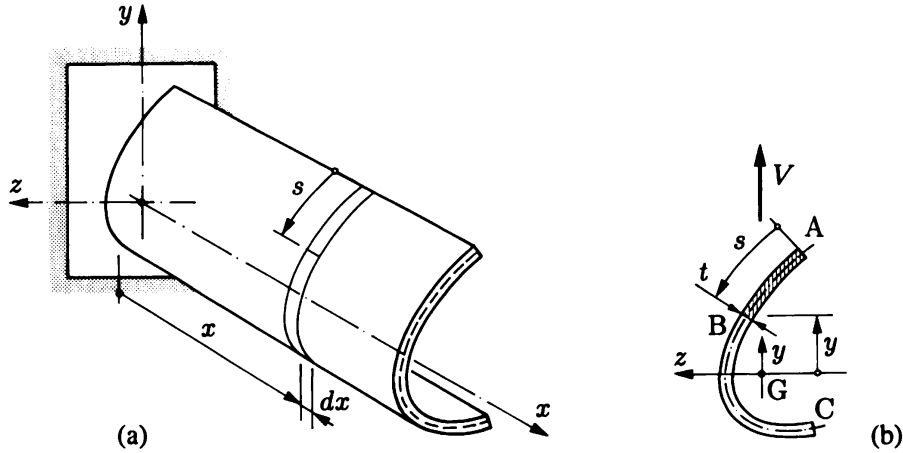


Fig. 9.6 Poutre à paroi mince et à section ouverte : (a) vue ; (b) section droite ; $t = t(s)$ (et non pas $t = t(x, s)$: poutre prismatique !) ; (y, z) principaux d'inertie.

B de cette ligne est repéré par la longueur d'arc s mesurée le long de la ligne moyenne à partir de l'extrémité A de la section, et l'épaisseur t est une fonction connue de s .

Au point B ou, plus exactement, dans le plan longitudinal de coupe passant par B, l'effort rasant vaut

$$dR = \frac{(-V)S}{I} dx$$

Avec (9.6), la contrainte tangentielle (tranchante ou rasante) au même point est donnée par la *formule générale*

$$\tau = \frac{(-V)S}{It} \quad (9.8)$$

qui définit, *en axes d'inertie principaux*, la répartition des contraintes tangentielles τ d'effort tranchant dans la section. On remarque, dans cette relation, que

- le premier rapport, $-V/I$, est constant dans la section ;
- le second rapport, S/t , est variable dans la section.

En conséquence, le maximum de τ dans une section droite se produit là où le rapport S/t est maximal. La situation de ce maximum n'est pas a priori évidente (souvent c'est au niveau de l'axe neutre de flexion).

La section étant ouverte, le point B la divise en deux parties AB et BC *indépendantes* (sect. 9.7). L'une quelconque de ces parties permet de calculer S (choisir au plus simple). Ici, en considérant l'épaisseur comme concentrée le long de la ligne moyenne, en utilisant l'aire hachurée AB et en admettant une flexion de plan (x, y) où le point B est situé au niveau y par rapport à l'axe neutre z (fig. 9.6b), on trouve pour S l'expression approchée

$$S \cong \int_0^s y(s)t(s) ds \quad (9.9)$$

qui est suffisamment précise si t est petit devant s .

9.5.2 Poutre à section en U

Comme application, considérons une poutre en U soumise à flexion simple par des forces transversales parallèles à son âme ; on désigne par h la hauteur de la section mesurée entre les lignes moyennes des ailes, b la largeur de ces ailes mesurée jusqu'à mi-épaisseur de l'âme, t l'épaisseur constante des ailes, t_w l'épaisseur constante de l'âme (fig. 9.7a).

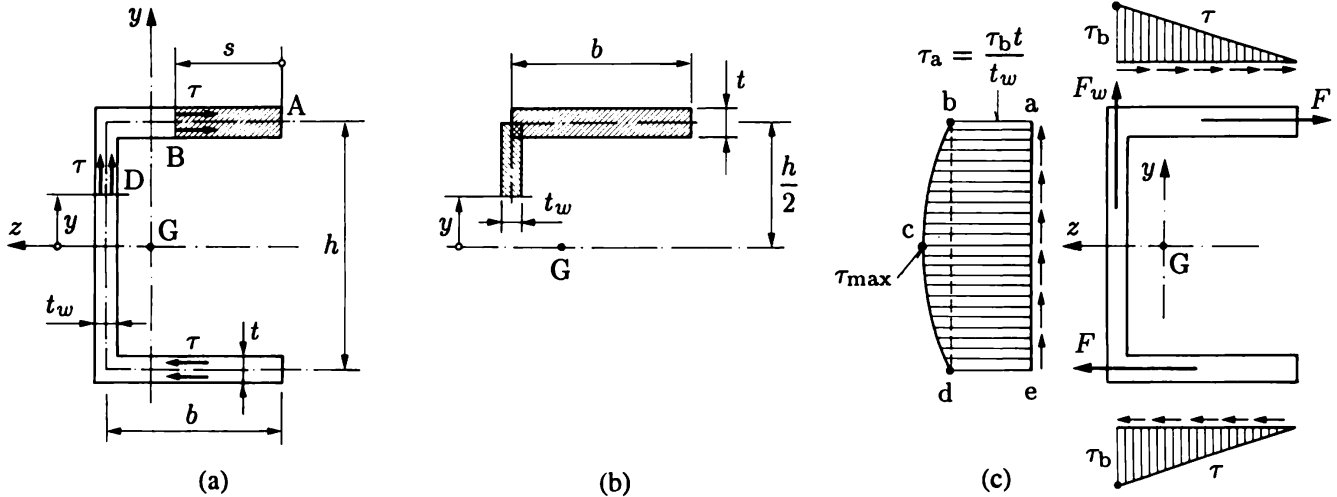


Fig. 9.7 Contraintes tangentielles dans une poutre en U ($V \parallel$ âme).

Calculons l'intensité de la contrainte tangentielle τ au point B de l'aile supérieure situé à la distance s du bord libre A ; le moment statique S à considérer est celui de l'aire hachurée AB ; il vaut $S = sth/2$. En remplaçant dans la formule (9.8), on trouve (intensité)

$$\tau = \frac{Vsh}{2I}$$

Les contraintes croissent donc linéairement le long de l'aile de 0 à $\tau_b = Vbh/2I$. Il en est de même le long de l'aile inférieure (fig. 9.7c), mais les contraintes rasantes et tranchantes sont de sens opposé à celles de l'aile supérieure, vu que les contraintes de flexion qui les provoquent sont à présent de signe contraire ($y < 0$)⁽³⁾. La résultante des forces τdA sur une aile vaut

$$F = \frac{\tau_b tb}{2} = \frac{Vtb^2h}{4I}$$

Calculons maintenant les contraintes tangentielles dans l'âme en se plaçant (fig. 9.7a) au point D de l'âme situé à la distance y de l'axe neutre. Le moment statique S est celui de l'aire représentée à la figure 9.7(b) ; on peut décomposer cette aire en deux rectangles comme indiqué et on trouve

$$S = t_w \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{h/2 + y}{2} + \frac{tbh}{2}$$

⁽³⁾ Plutôt que de mettre un signe équivoque dans le diagramme des τ , on indique le *sens* des τ par de petites flèches courant le long du diagramme (fig. 9.7c) ou de la ligne moyenne.

En remplaçant dans (9.8), il vient

$$\tau = \frac{Vh^2}{8I} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] + \frac{Vbth}{2It_w}$$

La variation de τ sur la hauteur de l'âme est donc parabolique (fig. 9.7c). La contrainte tangentielle la plus grande se produit au niveau de l'axe neutre, où $y = 0$ (on suppose $t_w \leq t$), et vaut

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} + \frac{Vbth}{2It_w}$$

On peut aisément calculer l'aire du diagramme abcde (fig. 9.7c, où, pour rappel, l'aire d'un segment de parabole vaut les 2/3 de l'aire du rectangle circonscrit); multipliée par t_w , elle donne la résultante des contraintes tangentielles dans l'âme

$$F_w = \frac{Vt_w h^3}{12I} + \frac{Vbth^2}{2I} = \frac{V}{I} \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2} \right)$$

Si l'on remarque que le moment d'inertie de la section (par rapport à l'axe neutre z) vaut, en négligeant l'inertie propre des semelles,

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2}$$

on constate que $F_w = V$, c'est-à-dire que *l'âme de la poutre en U reprend la totalité de l'effort tranchant* (ce qui résulte d'ailleurs directement du fait que les résultantes des contraintes dans les ailes sont horizontales).

De plus, pour les proportions usuelles des poutres en U, on vérifie aisément que la parabole bcd est assez plate; dès lors, en divisant l'effort tranchant par l'aire $A_w = ht_w$ de l'âme (comptée jusqu'à mi-épaisseur des ailes), on trouve une contrainte moyenne dans l'âme (intensité)

$$\tau_{wm} = \frac{V}{A_w} \tag{9.10}$$

qui donne une bonne approximation de la valeur exacte, au point qu'on s'en contente souvent dans les avant-projets. On peut contrôler que cela revient à négliger, dans (9.8), la contribution de l'âme au calcul de S et I .

9.5.3 Poutre âme-semelles

Le cas de la poutre en I est maintenant immédiatement résolu, puisqu'on peut considérer qu'une telle poutre s'obtient en accolant deux poutres en U. Le diagramme des contraintes tangentielles est représenté à la figure 9.8. Ici encore, on peut calculer de manière approchée la contrainte moyenne dans l'âme par la formule (9.10).

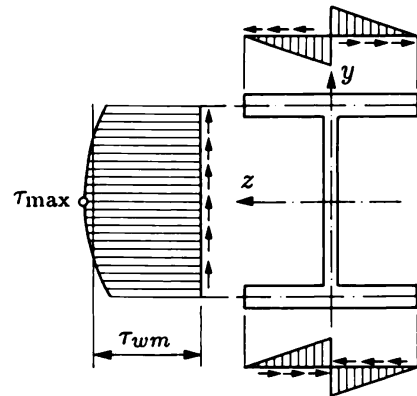


Fig. 9.8 Contraintes tangentiellles dans une poutre en I ($V \parallel$ âme).

9.5.4 Remarques

Pour les profilés laminés âme-semelles en acier, fléchis dans le plan de l'âme, le maximum de τ se produit à l'axe neutre ; la valeur correspondante de S à introduire dans (9.8) (et qui, pour une section droite symétrique, correspond au moment statique de la demi-section) est généralement donnée sous forme de tableaux (vol. 1, annexes).

Dans les sections à parois minces, on suppose qu'il n'y a pas de contraintes tangentiellles qui agissent normalement à la ligne moyenne des parois. Cette approximation est d'autant meilleure que les parois en question sont plus minces. On observe donc une certaine ressemblance entre les distributions des contraintes tangentiellles d'effort tranchant d'une part, et de torsion des sections fermées à parois minces d'autre part. Cependant, pour l'effort tranchant, le flux (9.7) *n'est pas constant* dans la section et il n'existe pas d'analogie simple. Par contre, l'équilibre des flux s'applique (§ 8.7.4).

On ne peut attribuer de signe à τ ; il faut saisir intuitivement le sens d'action des τ et le représenter sur les diagrammes à l'aide de petites flèches (fig. 9.7a ou 9.7c, fig. 9.8).

Si l'effort tranchant V a une direction quelconque, on décompose V en ses deux composantes V_y et V_z selon les axes principaux d'inertie y et z , et on calcule séparément les contraintes tangentiellles correspondantes ; on les ajoute ensuite vectoriellement (principe de superposition).

9.6 Poutres composées de deux matériaux

Examinons le cas classique de la répartition des contraintes tangentiellles dans la section droite d'une poutre acier-béton (fig. 9.9), soumise à l'effort tranchant V dans le plan de l'âme.

On sait trouver (sect. 5.6) la répartition des contraintes normales σ_a et σ_b ; les contraintes tangentiellles τ_a et τ_b en dépendent directement par équilibre. Rapportons tout à l'acier ($n = E_a/E_b$). Pour appliquer (9.5) dans les zones de béton, il faut introduire, dans le développement qui précède (9.5), σ_b en le rapportant à l'acier, soit $\sigma_b = \sigma_a/n$; ainsi, la force H s'écrit, avec $A_1 = A_{1a} + A_{1b}$,

$$H = H_a + H_b = \int_{A_{1a}} \sigma_a dA_a + \int_{A_{1b}} \frac{\sigma_a}{n} dA_b = \frac{M}{\tilde{I}_a} \left(S_a + \frac{1}{n} S_b \right) = \frac{M}{\tilde{I}_a} \tilde{S}_a$$

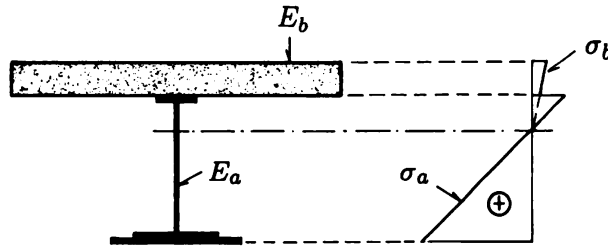


Fig. 9.9 Poutre composée acier-béton et diagramme des contraintes normales.

Le béton intervient donc, dans l'effort rasant, en divisant simplement son moment statique par n . On retrouve le *moment statique équivalent* (5.24)

$$\mathcal{S}_a = S_a + \frac{1}{n} S_b$$

Le flux (9.7) vaut

$$f = \frac{dR}{dx} = \frac{(-V)\mathcal{S}_a}{\mathcal{I}_a} \quad (9.11)$$

et les contraintes tangentielles dans les parois d'acier et de béton sont données par

$$\tau_a = \frac{(-V)\mathcal{S}_a}{\mathcal{I}_a t_a} \quad \tau_b = \frac{(-V)\mathcal{S}_a}{\mathcal{I}_a t_b} \quad (9.12)$$

Remarques

On a admis, comme en torsion (sect. 8.10), que le matériau ne change pas à travers l'épaisseur des parois.

Si le moment statique peut s'exprimer avec un seul matériau, les formules (9.12) s'écrivent simplement

$$\tau_a = \frac{(-V)S_a}{\mathcal{I}_a t_a} \quad \tau_b = \frac{(-V)S_b}{n\mathcal{I}_a t_b} \quad (9.13)$$

9.7 Poutres tubulaires à parois minces

9.7.1 Introduction

Dans le cas d'une poutre à section fermée, il n'est pas possible d'appliquer directement la formule (9.8) parce qu'il n'existe plus de bord libre le long duquel les contraintes tangentielles sont nulles.

Par une surface de coupe longitudinale, coupant une seule paroi, on ne divise plus un tronçon dx en deux fragments distincts. On ne peut donc plus évaluer S .

La répartition des contraintes tangentielles dans les poutres cellulaires est un problème hyperstatique, de degré égal au nombre de cellules de la section droite. Aussi se contente-t-on ici de n'analyser que le cas de la section à une cellule.

9.7.2 Cas symétrique

Si l'effort tranchant agit dans un plan de symétrie de la section droite, les contraintes rasantes sont nulles aux points de la section situés dans ce plan (fig. 9.10, points A et A'). Coupons la poutre par le plan de symétrie ; en deux points correspondants de chaque face, les contraintes doivent être simultanément

- symétriques (donc égales et de même sens),
- égales et directement opposées (principe de l'action-réaction),

et cette double condition impose qu'elles soient nulles.

On peut donc fendre la poutre longitudinalement selon le plan de symétrie sans rien changer à la distribution des contraintes, puis obtenir cette dernière en appliquant la formule (9.8)

- à une *demi-section droite* soumise au *demi-effort tranchant* (fig. 9.10b), ou encore
- à toute la section coupée en l'un des points où elle traverse le plan de symétrie (fig. 9.10c) et soumise à l'effort tranchant total.

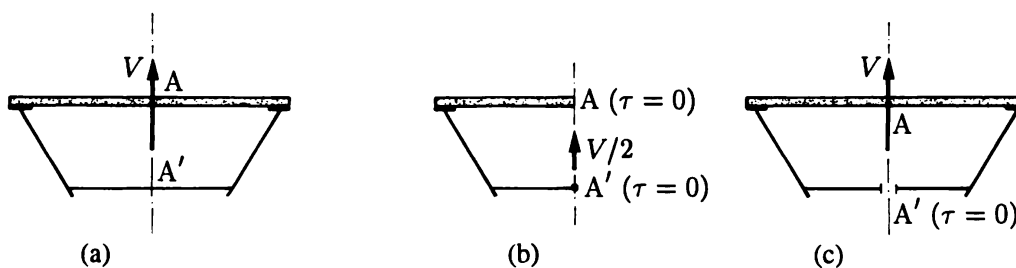


Fig. 9.10 Cas symétrique.

9.7.3 Cas général

Dans le cas général où le plan de sollicitation n'est pas un plan de symétrie (fig. 9.11), la répartition des contraintes ne peut plus s'obtenir par de simples considérations d'équilibre ; on se trouve en présence d'un problème statiquement indéterminé, qu'on peut résoudre comme suit.

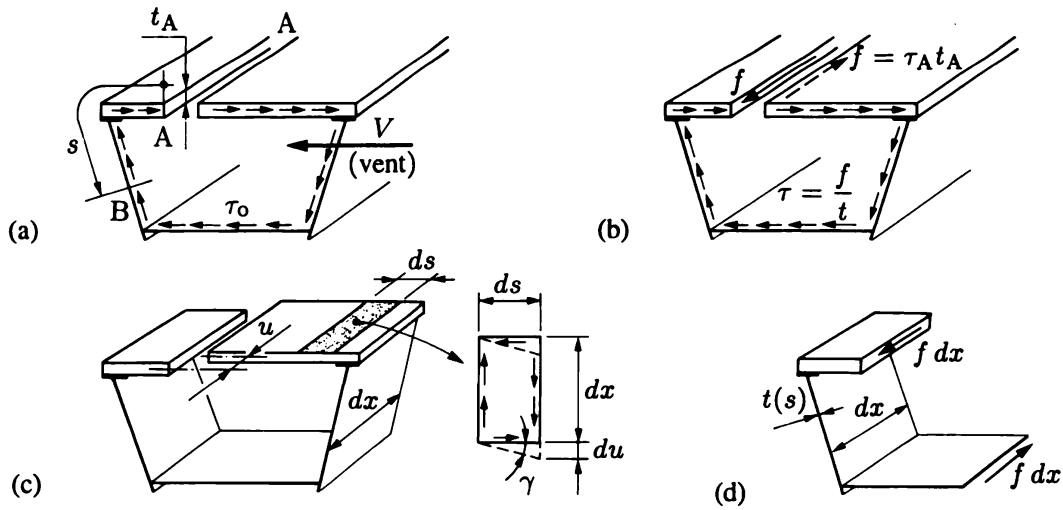


Fig. 9.11 Cas non symétrique à une cellule (les faces de la coupe AA sont écartées pour la clarté).

En fendant le caisson suivant une génératrice AA (fig. 9.11a), on le transforme en une poutre à section ouverte. L'application de la formule (9.8) permet d'y déterminer les contraintes tangentielles τ_0 engendrées par l'effort tranchant V . Sous l'effet de ces contraintes, la section droite gauchit (§ 10.3.1) et les deux faces de la coupure AA subissent un déplacement relatif longitudinal u (fig. 9.11c). Pour l'annuler, il faut appliquer à ces deux faces un flux rasant $f = \tau_A t_A$ (fig. 9.11b) égal et de sens opposé à celui qui a été supprimé en fendant le tube. Ce flux est constant dans la paroi du caisson (équilibre des flux, § 8.7.4 et fig. 9.11d) et provoque les contraintes tangentielles $\tau_1 = f/t(s)$.

En tout point B d'abscisse curviligne s le long de la ligne moyenne de la section, le flux rasant total du tube non fendu s'obtient en superposant les deux sollicitations $\tau_0 t$ et f ; il vaut $\tau_0 t + f$ et il y correspond la contrainte

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 = \tau_0 + \frac{f}{t} \quad (9.14)$$

La répartition des contraintes tangentielles sera donc entièrement déterminée par la connaissance de l'effort hyperstatique f agissant suivant AA (fig. 9.11b).

Ce flux se calcule dans la section ouverte en exprimant qu'il provoque un déplacement longitudinal relatif égal et opposé à celui dû aux contraintes τ_0 , ou encore en exprimant que le déplacement longitudinal relatif résultant des contraintes totales τ est nul. Les contraintes tangentielles soumettent chaque élément de la paroi du caisson au cisaillement pur. Chaque languette longitudinale dont la forme primitive était rectangulaire se déforme en parallélogramme (fig. 9.11c). L'angle de glissement γ est donné par la loi de Hooke $\gamma = \tau/G$, où G est le module de glissement. On a donc

$$du = \gamma ds = \frac{\tau}{G} ds$$

et le déplacement relatif des deux lèvres de la coupure AA vaut

$$u = \oint \frac{\tau}{G} ds = \oint \frac{\tau_0}{G} ds + f \oint \frac{1}{Gt} ds = 0 \quad (9.15)$$

où l'intégrale curviligne est étendue à la ligne moyenne limitant la section droite fermée.

On en déduit la valeur de f , ce qui complète la résolution du problème,

$$f = - \frac{\oint \frac{\tau_o}{G} ds}{\oint \frac{1}{Gt} ds} \quad (9.16)$$

Remarques

Les deux intégrales de la formule (9.16) ne doivent s'étendre qu'à la ligne moyenne de la section qui dessine effectivement le contour fermé. Par conséquent, elles ne s'étendent pas aux parois saillantes éventuelles qui seraient fixées sur le caisson proprement dit (ailes saillantes, raidisseurs, etc.). Ces parois ont cependant un effet indirect car elles interviennent dans le calcul des contraintes τ_o de la section ouverte.

Si la section droite est formée d'un seul matériau ($G = \text{cste}$), la relation (9.16) s'écrit

$$f = - \frac{\oint \tau_o ds}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (9.17)$$

9.8 Poutres à section massive

9.8.1 Introduction

Si la formule (9.5) de l'effort rasant reste applicable aux poutres à section massive, la distribution des contraintes tangentielles sur la surface de coupe longitudinale n'est plus évidente (les τ n'y sont plus, a priori, ni constants ni parallèles). On donne ici quelques solutions techniques, basées sur des hypothèses raisonnables.

9.8.2 Section rectangulaire

Considérons une poutre à section rectangulaire de dimensions b et h , et proposons-nous de déterminer la contrainte tangentielle τ en un point quelconque A d'une section droite dans laquelle agit l'effort tranchant V dirigé suivant l'axe de symétrie y .

On sait par la section 9.2 (fig. 9.2) que, sur des facettes adjacentes au contour, les contraintes tangentielles sont parallèles au bord. Il en est de même sur l'axe de symétrie y . Il est donc naturel d'admettre pour simplifier que, en tout point de la droite CD, trace d'un plan longitudinal de coupe (fig. 9.12a),

- la contrainte τ est parallèle à l'effort tranchant V , c'est-à-dire qu'elle se réduit à sa composante τ_{xy} ($\tau_{xz} = 0$);
- la distribution des contraintes τ_{xy} est uniforme sur la largeur b de la section.

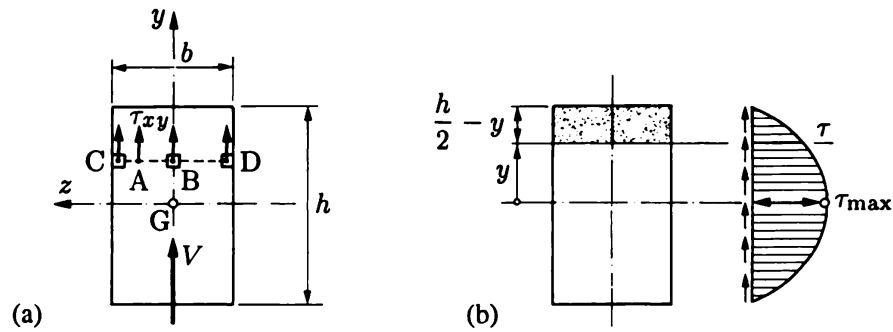


Fig. 9.12 Section rectangulaire.

Ces hypothèses sont, en fait, les mêmes que celles admises pour les sections à parois minces. Avec la formule générale (9.8), on obtient, tous calculs faits,

$$\tau = \frac{3V}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (9.18)$$

Le diagramme $\tau = f(y)$ est donc une parabole (fig. 9.12b) dont le sommet se trouve sur l'axe neutre ($y = 0$) et correspond à la contrainte tangentielle maximale

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A} \quad (9.19)$$

qui est de 50 % supérieure à celle obtenue en supposant une répartition uniforme des contraintes (théorie élémentaire, sect. 9.2). On remarque encore que τ s'annule pour les fibres extrêmes (en accord avec les conclusions de la section 9.2).

Remarque

L'étude rigoureuse des contraintes tangentielles par la théorie de l'élasticité montre que τ n'est pas constant en tous les points de l'axe neutre, mais est maximal en ses points extrêmes où l'on a

$$\tau_{\max} = \alpha \frac{3V}{2bh}$$

α étant un coefficient plus grand que 1, dépendant du rapport h/b et du coefficient de Poisson ν ; on a, pour $\nu = 0,2$ (béton),

$h/b = 2$	$\alpha = 1,028$
1	1,105
0,5	1,330

Il en résulte que la théorie simplifiée développée dans ce paragraphe donne une bonne approximation tant que la poutre est plus haute que large ($h/b \geq 1$).

9.8.3 Section à un axe de symétrie

Considérons une section de forme quelconque, mais symétrique par rapport à l'axe y selon lequel agit l'effort tranchant V (fig. 9.13). La contrainte tangentielle τ en un point quelconque A de

l'horizontale CD, trace d'un plan longitudinal de coupe, est en général oblique par rapport à l'axe y . Elle a deux composantes τ_{xy} et τ_{xz} .

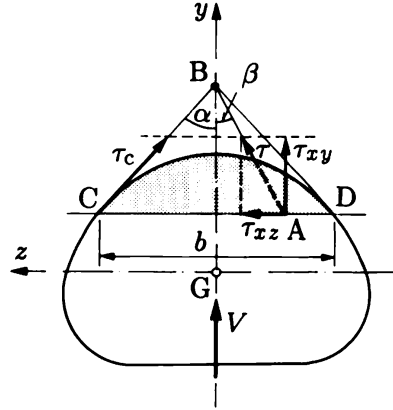


Fig. 9.13 Section massive symétrique.

On admet d'abord que la composante verticale τ_{xy} est uniforme sur l'horizontale CD ; on écrit donc (comme au § 9.8.2)

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{Ib}$$

où b représente l'épaisseur de la section au niveau y et S le moment statique par rapport à l'axe neutre de la partie ombrée de la section.

On sait que les contraintes tangentielles aux points du contour doivent être tangentes à ce dernier. Soit B le point de rencontre des tangentes en C et D au contour (fig. 9.13). Pour déterminer la composante τ_{xz} , on admet ensuite que la contrainte τ au point A est également dirigée vers le point B ; on a ainsi

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \operatorname{tg} \beta$$

et finalement

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\tau_{xy}}{\cos \beta} = \frac{VS}{Ib \cos \beta} \quad (9.20)$$

En particulier, la contrainte tangentielle maximale se produit sur le contour et vaut

$$\tau_c = \frac{\tau_{xy}}{\cos \alpha} \quad (9.21)$$

L'application suivante permet de juger la valeur des deux hypothèses introduites ci-dessus.

Application : section circulaire

Pour la section circulaire pleine (fig. 9.14), on trouve

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^2} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right]$$

La contrainte tangentielle au contour vaut

$$\tau_c = \frac{\tau_{xy}}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2}$$

Le maximum de τ_c a lieu pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire sur l'axe neutre ; il a pour valeur

$$\tau_{c, \max} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} \quad (9.22)$$

et est donc de 33 % supérieur à la contrainte obtenue en supposant une répartition uniforme des contraintes.

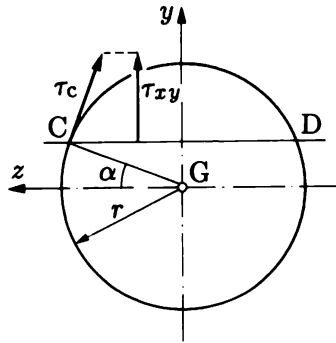


Fig. 9.14 Section circulaire pleine.

Remarque

L'étude rigoureuse de la section circulaire par la théorie de l'élasticité montre que la contrainte n'est pas constante le long de l'axe neutre, mais est maximale au centre où elle vaut

$$\tau_{\max} = \frac{3 + 2\nu}{2(1 + \nu)} \frac{V}{A}$$

Pour $\nu = 0,3$ (métaux), $\tau_{\max} = 1,385 V/A$, alors que la théorie technique donne $\tau_{\max} = 1,333 V/A$. La solution approchée diffère donc d'environ 4 % de la solution rigoureuse.

9.9 Centre de cisaillement ou centre de torsion

9.9.1 Position du problème

En flexion simple, contrairement à la flexion pure, la position du plan de sollicitation (plan d'action des charges) par rapport aux axes principaux d'inertie joue un rôle important dans le calcul de l'état de contrainte et de déformation de la poutre.

Considérons par exemple le cas d'une poutre dont la section droite ne possède qu'un axe de symétrie (section en T, fig. 9.15).

Si le plan de sollicitation, (x, y) par exemple, contient cet axe, par ailleurs principal d'inertie (fig. 9.15a), la poutre ne fait que fléchir dans ce plan (flexion plane). Il faut déplacer le plan de sollicitation parallèlement à lui-même pour que s'introduise en plus un moment de torsion.

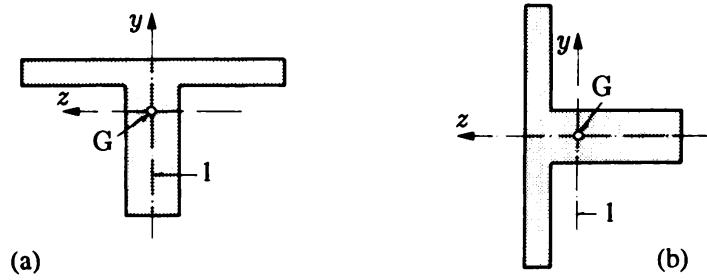


Fig. 9.15 Poutre en T chargée dans le plan vertical (x, y) (vue en coupe ; 1 : plan de sollicitation) :
(a) la poutre n'est pas tordue ; (b) la poutre est soumise à torsion.

Mais si, au contraire, le plan de sollicitation contient l'autre axe principal d'inertie, qui n'est plus axe de symétrie de la section (fig. 9.15b), *il apparaît d'emblée un phénomène de torsion, bien que le plan de sollicitation passe par le centre géométrique G*. Ce phénomène particulier est clarifié ci-après sur base de la poutre à section en U.

9.9.2 Poutre à section en U fléchie parallèlement à son âme

Il s'agit de rechercher la position que doit avoir le plan de sollicitation afin qu'une poutre à section en U, symétrique par rapport à l'axe principal z mais non par rapport à l'axe principal y (fig. 9.16), fléchisse parallèlement à y sans se tordre.

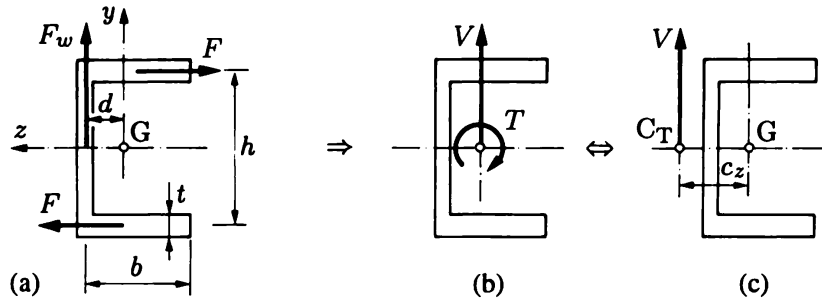


Fig. 9.16 Centre de cisaillement C_T de la section en U.

Reprenons les résultats déjà obtenus au paragraphe 9.5.2 ; les résultantes des flux de cisaillement dans les trois rectangles composant la section droite (fig. 9.16a) valent

$$F = \frac{Vtb^2h}{4I} \quad F_w = V$$

Appliquons maintenant le principe d'équivalence (chap. 1, (1.2) à (1.4)) ; pour les seules contraintes tangentielles, on a d'abord

$$\begin{aligned} V_y &= \int_A \tau_{xy} dA & \Rightarrow & & V_y &= F_w = V \\ V_z &= \int_A \tau_{xz} dA & \Rightarrow & & V_z &= F - F = 0 \end{aligned}$$

et ces deux équations de translation sont satisfaites. *Elles le sont d'ailleurs toujours*, parce qu'on a déduit les τ à partir des contraintes de flexion par des considérations d'équilibre et parce qu'on a eu recours à l'équation d'équilibre (9.1).

Reste à vérifier l'équivalence en torsion. Le moment de torsion autour de G vaut, où d est l'entredistance de l'axe y à la ligne moyenne de l'âme,

$$T = - \int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA \quad \Rightarrow \quad T = -Fh - F_w d$$

et il n'est pas nul ! ($-Fh - F_w d \neq 0$.)

La réduction des contraintes tangentielles au centre géométrique produit donc une force V parallèle à y et un moment T d'axe x (fig. 9.16b). Par la statique, on sait qu'on peut remplacer ces éléments par une force V unique agissant à la distance c_z du centre géométrique donnée par (en valeur absolue)

$$c_z = \left| \frac{T}{V} \right| = \frac{Fh + F_w d}{V} = \frac{tb^2 h^2}{4I} + d$$

Cette distance définit le point C_T (fig. 9.16c). On voit ainsi que, pour réaliser dans la poutre en U un état de flexion simple *sans torsion* avec l'axe z comme axe neutre, on doit appliquer les forces extérieures dans le plan vertical passant par le point C_T . Ce point est appelé **centre de cisaillement** ou **centre de torsion**⁽⁴⁾.

C'est l'ingénieur suisse R. Maillart qui a proposé la méthode de localisation de ce point pour les sections ouvertes à parois minces (telle qu'exposée ici), qui a donné l'interprétation physique de ce point et qui l'a appelé centre de cisaillement (1921-1924)⁽⁵⁾.

9.9.3 Poutres à parois minces

La détermination du centre de cisaillement est un problème relativement simple dans le cas des poutres à parois minces, que la section droite soit ouverte ou fermée.

Si la section possède deux axes orthogonaux de symétrie, il est évident, par symétrie, que le centre de cisaillement coïncide avec le centre géométrique.

Si la section ne possède qu'un seul axe de symétrie z (fig. 9.17), le centre de cisaillement C_T se trouve sur cet axe. Pour le situer, on procède comme dans le cas de la poutre en U ; on calcule successivement :

- la répartition des contraintes tangentielles dans la section soumise à l'effort tranchant V d'axe y ;
- les résultantes des contraintes tangentielles appliquées aux différentes parois composant la section droite (F_1, F_2, F_3, F_4) ;
- la réduction de ces forces en un point quelconque de l'axe de symétrie (par exemple G), soit une force verticale, nécessairement égale à V , et un moment T .

⁽⁴⁾ La dénomination *centre de torsion* provient de ce que le point C_T est le point autour duquel tourne la section quand elle est soumise à la torsion pure. On démontrera cette propriété en s'appuyant sur le théorème de réciprocité (sect. 9.10)

⁽⁵⁾ Les Anglais A. A. Griffith et G. I. Taylor avaient donné, en 1917, la position du centre de cisaillement de trois sections droites particulières.

La sollicitation (V, T) est équivalente à une force V appliquée au point C_T , situé à une distance du point choisi (ici G) égale à⁽⁶⁾

$$c_z = \frac{T}{V} \quad (9.23)$$

Cette abscisse définit entièrement la position du centre de cisaillement.

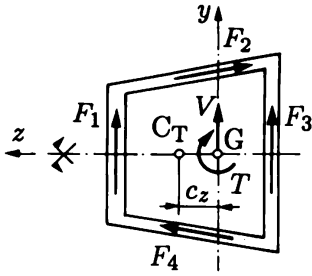


Fig. 9.17 Section à un axe de symétrie.

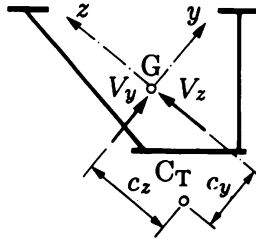


Fig. 9.18 Section quelconque (axes (y, z) principaux d'inertie).

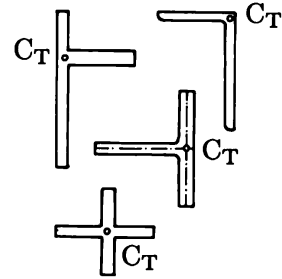


Fig. 9.19 Sections en croix, T, L, etc.

Enfin, dans le cas général où la section ne possède aucun axe de symétrie (fig. 9.18), on détermine l'ordonnée c_z comme décrit ci-dessus. On suppose ensuite la poutre fléchie dans le plan principal z et on répète les opérations précédentes, ce qui fournit l'abscisse c_y du centre de cisaillement.

Dans le cas particulier de poutres formées de parois planes minces dont les lignes moyennes des sections convergent en un point, le centre de cisaillement coïncide nécessairement avec ce point (fig. 9.19). En effet, les résultantes des contraintes tangentielles dans chaque paroi sont concourantes en ce point, quel que soit le plan de flexion.

9.9.4 Poutres à section massive

La détermination de la position du centre de cisaillement dans le cas de sections massives dissymétriques est un problème très difficile de la théorie de l'élasticité, qui n'a été résolu que pour quelques types simples de section (par exemple le demi-cercle)⁽⁷⁾.

Ce problème n'a d'ailleurs qu'une faible importance pratique, parce que de telles sections ne sont employées qu'exceptionnellement ; de plus, les contraintes tangentielles n'y sont généralement pas prédominantes pour le dimensionnement.

9.9.5 Détermination correcte des efforts intérieurs dans une section droite

A cause de l'existence d'un centre de cisaillement distinct du centre géométrique, on doit modifier comme suit la détermination du *moment de torsion* dans une section droite ; connaissant, au centre géométrique, les six efforts intérieurs dus aux charges extérieures, il faut tenir compte de ce que les

⁽⁶⁾ On règle les signes de manière intuitive.

⁽⁷⁾ S. Timoshenko semble être le premier à avoir abordé ce problème (1913).

efforts tranchants V_y et V_z produisent les *moments de torsion additionnels* $V_y c_z$ et $V_z c_y$ (fig. 9.18); si V_y , V_z , c_y et c_z sont affectés d'un signe, le moment de torsion additionnel T_{add} est

$$T_{\text{add}} = V_y c_z - V_z c_y \quad (9.24)$$

et le vrai moment de torsion T_T agissant sur la section est

$$T_T = T_F + T_{\text{add}} \quad (9.25)$$

où T_F est le moment dû aux actions, calculé au centre géométrique.

Plus simplement, si x_T est un axe parallèle à x passant par C_T , on obtient directement T_T en calculant le moment de torsion produit par les charges autour de x_T , avec l'avantage d'écarter tout problème de signe.

9.10 Coïncidence des centres de torsion et de cisaillement

Le théorème de réciprocité de Betti (sect. 13.3 et vol. 3, sect. 7.10) permet de montrer simplement que *le centre de cisaillement coïncide avec le centre de torsion* (§ 9.9.2). En effet, considérons pour fixer les idées une poutre console à section en U dont la figure 9.20 représente la section libre d'extrémité.

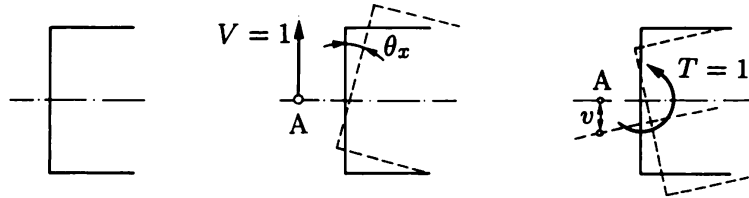


Fig. 9.20 Coïncidence des centres de cisaillement et torsion.

Fléchissons d'abord la poutre par une force transversale $V = 1$ appliquée au point A de la section terminale et appelons θ_x la rotation de cette section. Tordons ensuite la poutre par un moment $T = 1$ appliqué à son extrémité et appelons v le déplacement du point A associé à la force V . Par le théorème de Betti, on a

$$v = \theta_x$$

Si le point A est le centre de cisaillement, la poutre, sous l'action de $V = 1$, est soumise à la flexion simple et la rotation de la section terminale est nulle ($\theta_x = 0$).

D'après l'égalité ci-dessus, on en conclut que v est nul aussi, c'est-à-dire qu'un moment de torsion appliqué à l'extrémité de la poutre ne produit pas de déplacement transversal du centre de cisaillement. Les sections droites de la poutre tournent donc autour de l'axe longitudinal x_T formé par les centres de cisaillement de toutes les sections droites, qu'on appelle *axe de cisaillement* ou *axe de torsion*. Par exemple, si on tord une cornière, les sections droites tournent autour de l'axe longitudinal formé par l'intersection des plans moyens des ailes.

Rappelons que ces résultats ne sont valables que si le matériau est élastique linéaire (Hooke).

9.11 Poutres à section variable

9.11.1 Introduction

La formule de l'effort rasant (9.5) a été établie pour un tronçon de poutre prismatique ; son application à une poutre dont la section varie avec l'abscisse x peut conduire à des résultats totalement faux, comme l'illustrent les quelques exemples suivants.

9.11.2 Section rectangulaire

Dans une poutre en forme de coin, disposée et chargée comme l'indique la figure 9.21, la théorie exacte montre que, sur une section cylindrique S' (vol. 3, sect. 10.9), les contraintes sont purement radiales (σ_{rad}). Isolons un élément triangulaire, limité à droite par une section plane S , à gauche par une section cylindrique et au-dessus par une section radiale ; l'équilibre donne

$$\sum F_x = -\sigma_{\text{rad}} b r \cos \beta d\beta + \sigma_x b \frac{r d\beta}{\cos \beta} = 0$$

$$\sum F_y = -\sigma_{\text{rad}} b r \sin \beta d\beta + \tau_{xy} b \frac{r d\beta}{\cos \beta} = 0$$

d'où

$$\sigma_x = \sigma_{\text{rad}} \cos^2 \beta \quad (9.26)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{\text{rad}} \sin \beta \cos \beta \quad (9.27)$$

On en déduit la répartition des τ_{xy} sur la section droite (fig. 9.21). Elle est totalement différente de celle donnée par (9.18) (fig. 9.12) ; en particulier, τ_{xy} n'est pas nul en A et B (la section droite S n'est pas perpendiculaire au bord libre !). A l'axe neutre, τ_{xy} est nul, alors que, pour les poutres prismatiques, il est maximal.

On aboutit à des résultats analogues pour la poutre de la figure 9.22, dans laquelle la section droite AB est perpendiculaire à la fibre supérieure (et non normale à l'axe).

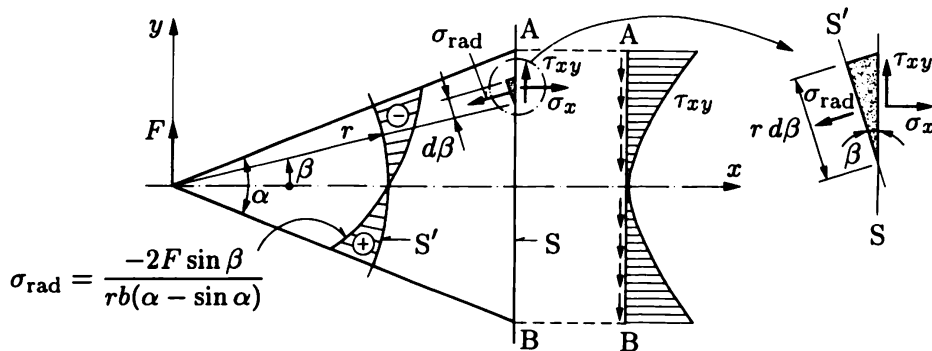


Fig. 9.21 Poutre en forme de coin, à section rectangulaire d'épaisseur b mince, sous charge concentrée F .

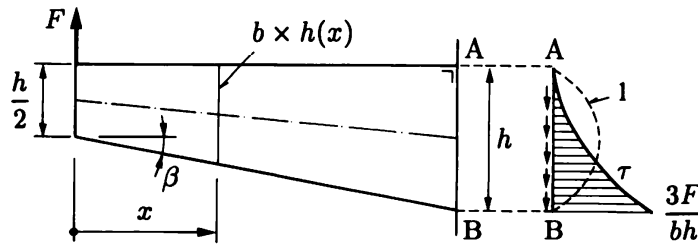


Fig. 9.22 Console à hauteur lentement variable (1 : diagramme des τ d'une poutre à hauteur h constante).

Lorsque l'angle d'inclinaison des fibres extrêmes sur l'axe reste modéré ($\alpha/2$ dans la figure 9.21 ; $\beta/2$ dans la figure 9.22), c'est-à-dire inférieur à quelques 15° ($\cong 1/4$ radian), on peut poser $\sin \beta \cong \beta$ et $\cos \beta \cong 1$, de sorte que (9.26) et (9.27) deviennent

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{rad}} &\cong \sigma_x \quad (\text{avec } \sigma_x = -My/I) \\ \tau_{xy} &\cong \sigma_{\text{rad}}\beta \cong \sigma_x\beta\end{aligned}$$

On en conclut que :

- la distribution des contraintes normales calculée selon la loi $\sigma = -My/I$ reste précise (pour toute forme de section droite d'ailleurs) ;
- pour la section rectangulaire, le diagramme des contraintes tangentielles a les allures paraboliques des figures 9.21 et 9.22, avec maximum sur la (les) fibre(s) extrême(s), ce maximum valant à peu près le double de la valeur (9.19).

Ces considérations peuvent jouer un rôle important pour les poutres en béton et en bois lamellé collé, qui sont fréquemment à hauteur variable.

9.11.3 Section âme(s)-semelles

En béton précontraint et en acier, on rencontre fréquemment des poutres à section en I ou en caisson à hauteur variable. Si les contraintes normales flexionnelles σ s'obtiennent toujours avec précision par $\sigma = -My/I$, la distribution des contraintes tangentielles d'effort tranchant τ est à nouveau différente de celle d'une poutre à hauteur constante.

L'important est de remarquer que l'effort tranchant repris par l'âme (résultante F_w des $\tau_{xy} dA$ sur l'âme) est *différent* de l'effort tranchant appliqué V . Considérons par exemple le cas de la figure 9.23 ; dans la section polygonale S , on appelle N_{sup} et N_{inf} les résultantes des σ agissant sur la section droite des semelles supérieure et inférieure, et F_w la résultante des τ_{xy} agissant sur l'âme. Le principe d'équivalence fournit (selon y)

$$V = F_w + N_{\text{sup}} \sin \alpha_{\text{sup}} + N_{\text{inf}} \sin \alpha_{\text{inf}}$$

de sorte que l'effort tranchant qui sollicite l'âme ne vaut que

$$F_w = V - N_{\text{sup}} \sin \alpha_{\text{sup}} - N_{\text{inf}} \sin \alpha_{\text{inf}} \quad (9.28)$$

et s'appelle parfois *effort tranchant réduit*. La réduction⁽⁸⁾, due à l'inclinaison des semelles, peut être très importante et cette circonstance est souvent intéressante pour le dimensionnement (appuis intermédiaires des poutres continues).

Enfin, en première approximation, on peut se contenter d'une répartition uniforme des τ_{xy} sur l'âme ($\tau_{xy} \cong F_w/A_w$).

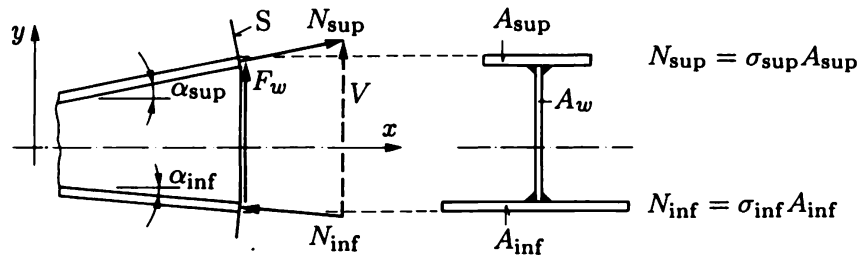


Fig. 9.23 Poutre âme-semelles à hauteur variable.

9.12 Résistance

L'effort tranchant est toujours accompagné d'un moment fléchissant. L'état de contrainte est donc bidimensionnel (σ_x , τ et $\sigma_y = 0$) et la résistance de la matière doit être vérifiée par les règles de la section 7.10 (critères de von Mises ou de Mohr-Coulomb).

L'effort tranchant n'est pas fréquemment prédominant pour le dimensionnement, surtout dans les sections massives. Il peut jouer un rôle plus important dans les poutres à parois minces. Pour bien y résister, il suffit que certaines parois (âmes) soient parallèles à son plan d'action. S'il faut renforcer la résistance d'une section, on accroît l'épaisseur (éventuellement la hauteur) ou le nombre des âmes.

9.13 Exercices

9.13.1 Un profilé en acier IPE 300 est soumis à l'effort tranchant $V = 100$ kN dans le plan de l'âme. Calculer et dessiner, dans l'âme seulement, la distribution des contraintes tangentielles (a) exacte, puis (b) moyenne. Discuter les résultats obtenus.

Le même effort tranchant V agit maintenant parallèlement aux semelles. Calculer et dessiner le diagramme des contraintes tangentielles dans toute la section.

Note : soit A le centre de l'âme et B le point de l'âme situé à la naissance des congés de raccordement âme-semelle. On trouve des tableaux des valeurs S_A et S_B du moment statique intervenant dans la formule générale $\tau = -VS/It$, par rapport à l'axe d'inertie maximale. Pour la section IPE 300, on a $S_A = 314$ cm³ et $S_B = 259$ cm³.

9.13.2 La section droite du demi-profilé laminé IPE 600 est soumise à un effort tranchant $V = 120$ kN agissant dans le plan de l'âme. Dessiner d'abord l'allure du diagramme des contraintes tangentielles (en indiquer aussi le sens); calculer ensuite les valeurs caractéristiques. On donne $I_h = 6\,500$ cm⁴.

⁽⁸⁾ Elle peut se transformer en augmentation si la hauteur de la section droite et l'intensité du moment varient en sens opposé.

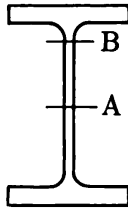


Fig. Ex. 9.13.1

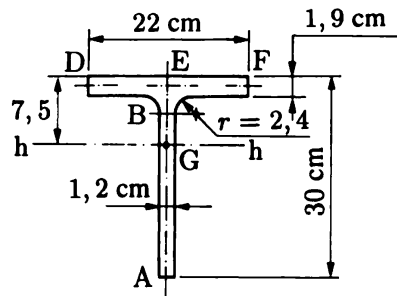


Fig. Ex. 9.13.2

9.13.3 La figure donne la section schématique du pont enjambant le Talent, sur l'autoroute Lausanne-Yverdon, réalisé en béton précontraint. Sous l'action d'un effort tranchant $V = 2\,000\text{ kN}$, on demande de dessiner d'abord et de calculer ensuite la distribution des contraintes tangentielles dans cette section. On donne $I_z = 365\,441\,540\text{ cm}^4$.

9.13.4 Les deux ailes de la section droite d'une poutre en tôle d'acier pliée ont une inclinaison α sur l'axe z . Pour un effort tranchant V parallèle à l'âme et pour les valeurs successives $\alpha = 90^\circ, 45^\circ, 0^\circ, -45^\circ$ et -90° ,

- 1) dessiner l'allure du diagramme des contraintes tangentielles;
- 2) si σ_e est la limite d'élasticité de l'acier, calculer l'effort tranchant maximal que ces sections peuvent transmettre sans se plastifier (littéral).

9.13.5 Une poutre encastree-libre en tôle pliée est chargée dans le plan vertical $v-v$ par une force F de 5 kN à l'extrémité libre. Calculer tous les efforts intérieurs agissant dans la section d'encastrement. On donne $I_z = 4\,410\text{ cm}^4$.

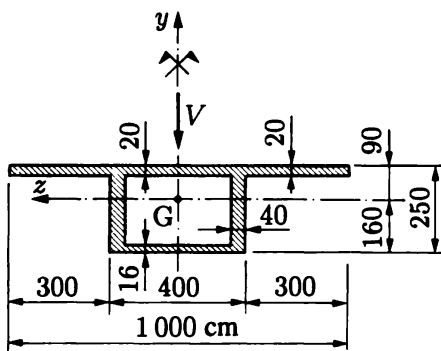
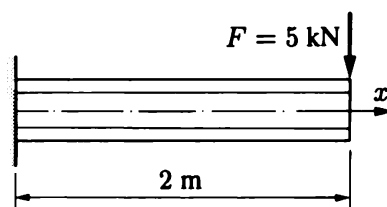
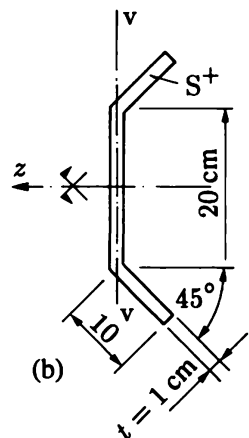


Fig. Ex. 9.13.3



(a)



(b)

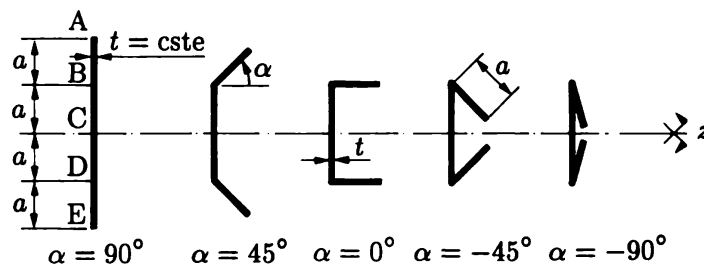
 Fig. Ex. 9.13.5 Poutre en tôle pliée :
(a) élévation : (b) section droite.


Fig. Ex. 9.13.4

9.13.6 La poutre en tôle pliée, dont la section droite ouverte est représentée sur la figure, est soumise à la flexion simple dans le plan vertical.

- 1) Dessiner le long de la ligne moyenne de la paroi le diagramme des contraintes tangentielles; en indiquer le sens.
- 2) Calculer les résultantes des contraintes tangentielles sur les cinq rectangles composant la section droite et contrôler le principe d'équivalence.
- 3) Déterminer la position du centre de cisaillement.

Note : garder en paramètres V , I_z et t ; calculer I_z à part pour l'utiliser si besoin est; exprimer toute longueur en [mm].

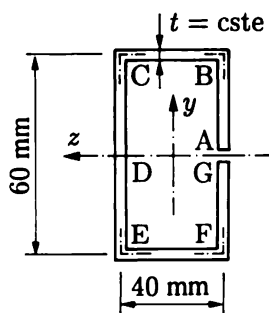


Fig. Ex. 9.13.6

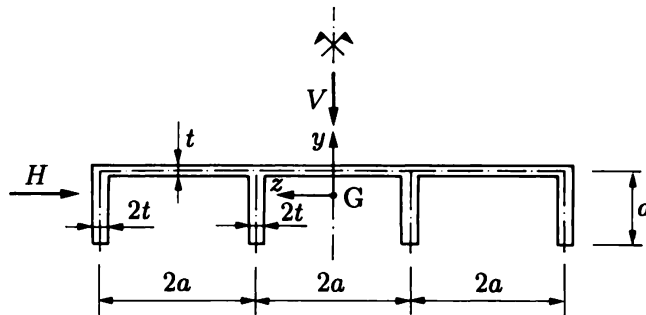


Fig. Ex. 9.13.7

9.13.8 La section acier-béton d'un pont-route est soumise à l'action d'un effort tranchant V agissant horizontalement (vent).

- 1) Représenter graphiquement le diagramme des contraintes tangentielles τ dans les parois; en indiquer le sens.
- 2) Calculer les valeurs caractéristiques de τ .
- 3) En déduire la position du centre de cisaillement.

On donne $I_{a,y} = 785,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$, $n = E_a/E_b = 8$ et on admet que les semelles des poutres en acier peuvent être modélisées par des *aires concentrées* (A_s et A_i).

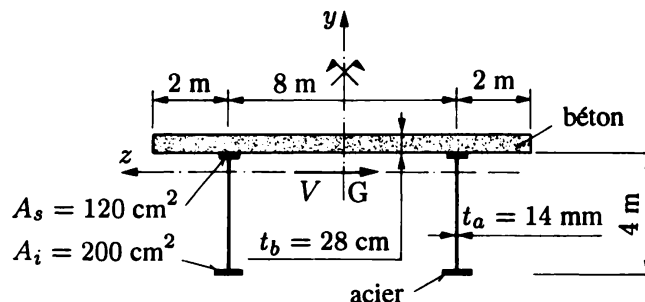


Fig. Ex. 9.13.8

9.13.9 La position du centre géométrique G ($a = 18 \text{ cm}$) et le moment d'inertie maximal ($I_h = 188\,820 \text{ cm}^4$) d'une section droite de poutre sont connus.

- 1) Calculer la position du centre de cisailment C_T .
- 2) Dessiner le noyau central et calculer les cotes nécessaires à le définir.

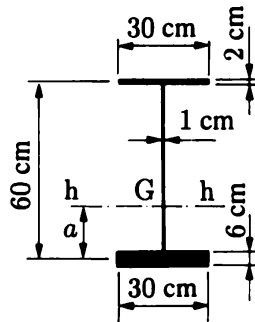


Fig. Ex. 9.13.9

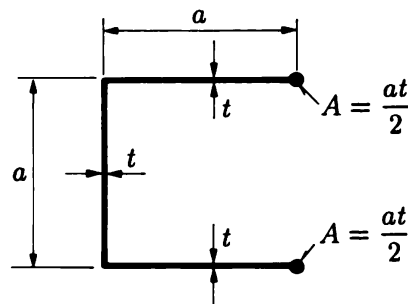


Fig. Ex. 9.13.10

9.13.11 Pour une poutre console en tôle mince soumise à la charge verticale F ,

- 1) étudier qualitativement la distribution des contraintes tangentielles τ , puis
- 2) déterminer quelques valeurs caractéristiques (littéral).

Note : l'épaisseur t peut être admise concentrée sur la ligne moyenne.

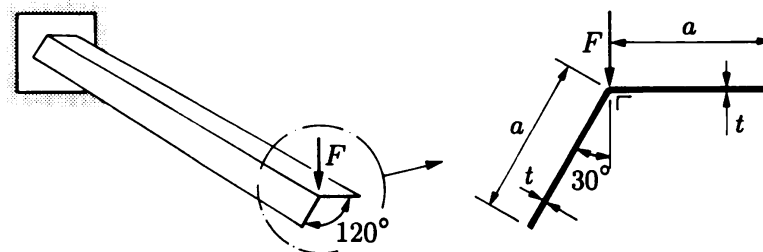


Fig. Ex. 9.13.11

9.13.12 Pour les sections droites tubulaires circulaires (a) ouverte et (b) fermée soumises à un effort tranchant V agissant verticalement, trouver la valeur maximale de la contrainte tangentielle, exprimée en fonction de l'aire commune A des deux sections. Déterminer ensuite la position du centre de cisailment de la section ouverte (littéral).

9.13.13 Déterminer le diagramme des contraintes tangentielles produit, dans une section fermée en forme de triangle équilatéral à paroi mince, d'épaisseur constante, par un effort tranchant agissant parallèlement à l'une des parois. Le module de glissement du matériau est constant (littéral).

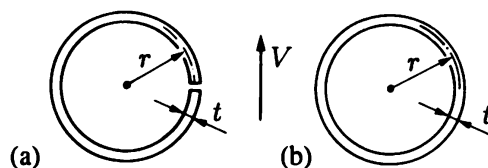


Fig. Ex. 9.13.12

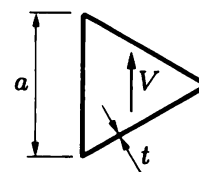


Fig. Ex. 9.13.13

9.14 Lexique

Flexion simple	Sollicitation par moment fléchissant et effort tranchant simultanément.
Théorie <i>élémentaire</i> (erronée)	Théorie supposant que, sous l'effort tranchant, <ul style="list-style-type: none"> • les τ se répartissent uniformément sur la section droite ; • la section droite reste plane pendant la déformation. Ces deux hypothèses sont fausses !
Théorie technique classique	Théorie basée sur le seul équilibre, permettant d'obtenir les τ d'effort tranchant à partir des contraintes de flexion (les glissements sont ensuite déduits des contraintes par la loi de Hooke $\gamma = \tau/G$).
Contraintes tangentiell ⁽⁹⁾ es rasantes	Contraintes τ longitudinales entre fibres.
Contraintes tangentiell ⁽⁹⁾ es tranchantes	Contraintes τ transversales, sur la section droite.
Effort rasant (R ; dR) ⁽¹⁰⁾	Effort tendant à faire glisser une partie d'une poutre sur l'autre, dans le sens longitudinal ; résultante des contraintes τ rasantes sur la surface de coupe cylindrique longitudinale séparant les deux fragments en question ($dR = ((-V)S/I) dx$) ; moment statique de l'aire de la section droite (partielle) du fragment qui tend à glisser sur l'autre, par rapport à l'axe neutre.
• S	
Flux de cisaillement (f)	Dans une paroi mince (épaisseur t), effort rasant par unité de longueur de paroi, tangent à la ligne moyenne de cette paroi ($f = \tau t$).
$\tau = \frac{(-V)S}{It}$	Formule donnant le diagramme des τ d'effort tranchant dans la section droite d'une poutre prismatique à parois minces, fléchie dans un plan contenant un axe principal d'inertie de la section.
Centre de cisaillement ou torsion (C_T)	Point de la section <ul style="list-style-type: none"> • où doit agir l'effort tranchant (ou les charges) pour éviter toute torsion (vraie flexion simple) ; • autour duquel la section tourne en bloc en torsion de Saint-Venant (vol. 3, chap. 6, en particulier sect. 6.2 et 6.4).
Axe de torsion ou cisaillement (x_T)	Lieu des centres de torsion ou cisaillement dans une poutre.

⁽⁹⁾ Les contraintes tangentiell⁽⁹⁾es sont parfois aussi appelées *contraintes de cisaillement*.

⁽¹⁰⁾ On dit aussi *effort de cisaillement*.

10. Déformée des poutres soumises à flexion simple

10.1 Introduction

Si une poutre est soumise à flexion simple, son *axe* s'incurve légèrement en une courbe appelée *déformée* (fig. 10.1a). Les points de l'axe subissent des déplacements, du type translation ; l'angle de la déformée donne la rotation de cet axe. La connaissance de ces deux types de déplacement offre un grand intérêt pratique.

Ce chapitre présente les propriétés et équations de la déformée, dans le cadre suivant :

- la flexion simple est plane ;
- l'axe de la poutre est rectiligne dans la configuration initiale et les charges agissent perpendiculairement à cet axe⁽¹⁾ ;
- le plus souvent, en pratique, les déplacements restent très petits, ce qui permet d'introduire l'hypothèse de linéarisation géométrique ;
- les effets du moment de flexion et de l'effort tranchant sont dissociés.

10.2 Déformée due au moment de flexion

10.2.1 Equation de la déformée

Dans les axes (x, y) , on appelle $u(x)$ et $v(x)$ les composantes du déplacement d'un point de l'axe de la poutre, et $\theta(x)$ l'angle de rotation de cet axe (fig. 10.1a). En flexion seule, les normales restent perpendiculaires à l'axe déformé (loi de Bernoulli) ; l'angle $A'OB'$ interceptant l'élément ds vaut donc $d\theta$ et l'on a $ds = r d\theta$. La courbure est ainsi égale à la variation de l'angle

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad (10.1)$$

⁽¹⁾ Une charge oblique a une composante transversale (d'où $M \neq 0$ et $N = 0$) et une composante longitudinale (d'où $M = 0$ et $N \neq 0$) ; on sait déjà calculer les déplacements dus à l'effort normal (chap. 4).

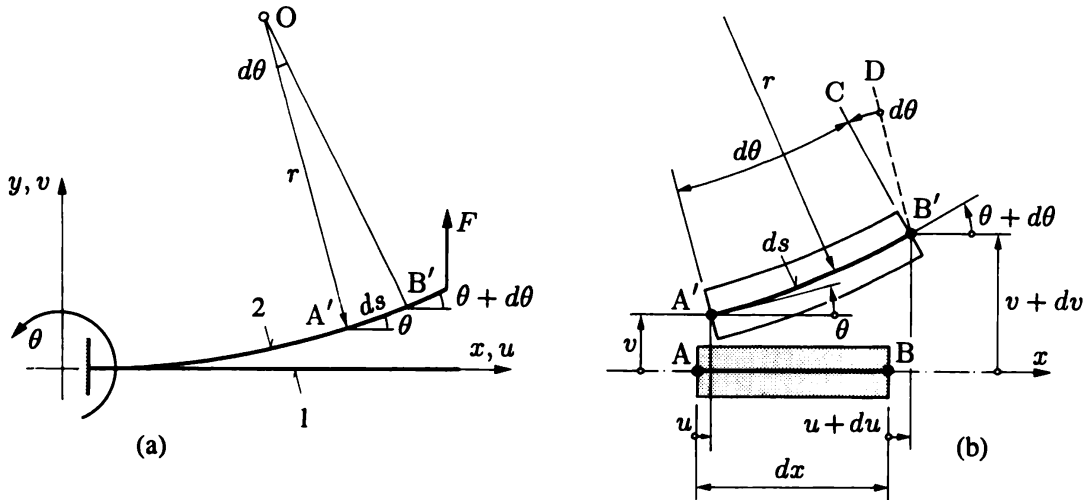


Fig. 10.1 Déplacements en flexion (M seul) : (a) déformée d'ensemble (1 : axe en configuration initiale ; 2 : déformée) ; (b) déformée de l'élément AB (angle $CB'D = d\theta =$ rotation de la section B' par rapport à la section A').

On introduit maintenant la linéarisation géométrique. Les angles doivent rester petits, d'où

$$\operatorname{tg}^2 \theta \ll 1 \quad \operatorname{tg} \theta \cong \theta \quad \cos \theta \cong 1 \quad (a)$$

Un élément dx de l'axe devient ds dans la configuration déformée (fig. 10.1b) ; mais, sur l'axe, on a $\varepsilon = 0$ (plan neutre), et les longueurs dx et ds sont égales. La projection de ds sur x donne

$$ds \cos \theta \cong ds = dx \quad (b)$$

d'où il résulte, puisque $u + ds \cos \theta = dx + u + du$ (fig. 10.1b),

$$du = 0 \quad (10.2)$$

On en déduit que *l'axe d'une poutre fléchie ne change pas de longueur* (vol. 1, § 9.4.3), ou encore, lorsque la poutre a un blocage dans le sens x par ses appuis, que *les déplacements longitudinaux u de l'axe sont nuls en flexion*. Dans la figure 10.1(b), les points A, A' et B, B' sont donc situés sur une perpendiculaire à l'axe x . Ils ne subissent qu'un *déplacement transversal v* , souvent appelé *flèche*⁽²⁾.

L'approximation (a) permet ensuite de dire que *l'angle de rotation tant des sections droites que de l'axe est égal à la pente de la déformée*

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (10.3)$$

Avec (b), puis (10.3), la *courbure* (10.1) s'écrit

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (10.4)$$

et s'exprime donc par la dérivée seconde de la flèche.

⁽²⁾ La *flèche* d'une poutre caractérise donc sa configuration déformée, alors que la *flèche* d'un câble définit sa configuration initiale (vol. 1, § 10.4.3).

Avec (5.6) $1/r = M/EI$, on obtient d'abord la relation

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (10.5)$$

qui lie la dérivée de l'angle au moment, ou encore

$$d\theta = \frac{M dx}{EI} \quad (10.6)$$

qui définit l'angle élémentaire dont tourne une section par rapport à sa voisine (fig. 10.1b); ensuite, on a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (10.7)$$

qui est l'équation différentielle de la déformée flexionnelle.

Remarque

En coordonnées cartésiennes, la courbure (10.1) d'une courbe plane $v(x)$ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (10.8)$$

Ici, avec (10.3) et (a), on a $1 + (dv/dx)^2 \cong 1$; par suite

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (c)$$

et, puisque $1/r = M/EI$, on retrouve l'équation (10.7). En fait, en passant de (10.8) à (c), on a linéarisé l'expression de la courbure en négligeant le carré de la pente (vol. 3, sect. 3.4).

10.2.2 Equations différentielles des poutres fléchies

Les équations d'équilibre (vol. 1, § 9.2.1)

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \frac{dM}{dx} = -V \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q \quad (d)$$

permettent d'écrire la cascade d'équations différentielles

$$v(x) \quad (\text{équation de la déformée}) \quad (10.9a)$$

$$\frac{dv}{dx} = \theta \quad (\text{pente ou rotation}) \quad (10.9b)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow \quad M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{courbure, moment}) \quad (10.9c)$$

$$V = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad \text{si } EI = \text{cste} : \frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad (10.9d)$$

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad \text{si } EI = \text{cste} : \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (10.9e)$$

La dernière exprime la déformée $v(x)$ en fonction de la force répartie transversale $q(x)$.

10.2.3 Recherche par intégration et propriétés de la déformée

Une première intégration de l'équation (10.7) fournit l'inclinaison de la tangente à la déformée ou encore l'angle θ [rad] dont tourne chaque section ; la seconde intégration donne l'ordonnée v de la déformée. Cette intégration répétée introduit deux constantes arbitraires que l'on détermine par les conditions aux limites, ici les conditions cinématiques portant sur v et θ .

Si M/EI est un polynôme de degré p en x , v est un polynôme de degré $p + 2$; en particulier, la déformée d'un tronçon prismatique non chargé est une cubique (fig. 10.2).

Si, dans une section d'une poutre, on a $M = 0$, la déformée présente en cette section un *point d'inflexion*, puisque la courbure $1/r$ est nulle (fig. 10.2).

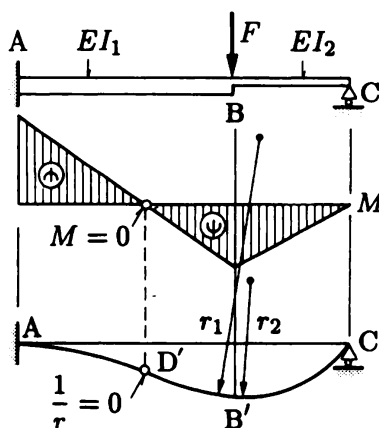


Fig. 10.2 Déformées cubiques ; inflexion ; discontinuité de la courbure (AB' et $B'C$: arcs de cubique ; D' : point d'inflexion ; B' : point de discontinuité).

Il est évident que la flèche v et la pente θ ne peuvent présenter de discontinuités (sauf aux liaisons), car, dans le premier cas, l'axe de la poutre serait interrompu et, dans le second, il serait brisé. Par contre, la dérivée seconde $1/r = d^2 v/dx^2 = M/EI$ peut être discontinue en toute section où M , I ou E sont discontinus (action d'un moment extérieur, variation brusque de section, changement de matériau), ce qui correspond, géométriquement, à une variation brusque du rayon de courbure (fig. 10.2).

Si l'on préfère, on peut intégrer la dernière équation (10.9) ; il en résulte quatre constantes que l'on trouve grâce aux conditions cinématiques et statiques, portant sur v , θ , M et V .

Ces intégrations ne peuvent d'ailleurs s'effectuer aisément que si le second membre a une expression analytique simple, en particulier si la charge varie de manière simple et, surtout, si l'inertie I est constante. De plus, si l'expression analytique du moment change, son intégrale seconde change

aussi. Par exemple, dans le cas représenté à la figure 10.3, le moment a trois expressions différentes (M_1 , M_2 , M_3) et il faut par suite intégrer séparément dans les trois champs AB, BC et CD. Les trois expressions différentes de v (v_1 , v_2 , v_3) contiennent au total six constantes d'intégration. Elles se déterminent en exprimant

- les conditions d'appui

$$v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = L$$

- les conditions de continuité à la jonction des divers champs ; ainsi, aux points B et C, l'axe de la poutre ne peut être ni interrompu ni brisé, d'où

$$v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad \frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} \quad \text{pour } x = x_B$$

$$v_2 = v_3 \quad \text{et} \quad \frac{dv_2}{dx} = \frac{dv_3}{dx} \quad \text{pour } x = x_C$$

Au total, il faut, pour déterminer les constantes d'intégration, résoudre un système de six équations à six inconnues, ce qui est déjà fort laborieux.

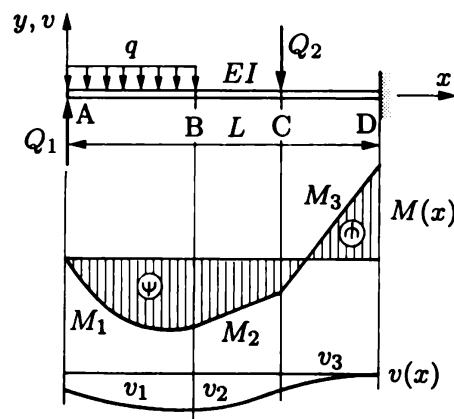


Fig. 10.3 Déformée par intégration et conditions aux limites ($EI = \text{cste}$).

En conclusion, *déterminer les déplacements par intégration de l'équation de la déformée n'est guère recommandable*. Si, de plus, on ne désire connaître les déplacements qu'en un nombre limité de sections, ce qui est pratiquement toujours le cas, il vaut mieux utiliser une autre méthode (théorème de la force unitée, chap. 12).

Application

Soit à établir l'équation de la déformée d'une poutre prismatique sur appuis simples, supportant une charge uniformément répartie (fig. 10.4).

Le moment fléchissant a pour expression

$$M = \frac{qx(L - x)}{2}$$

L'équation de la déformée (10.7) s'écrit donc

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{qx(L-x)}{2}$$

En l'intégrant, on trouve

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{q}{2} \int x(L-x) dx = \frac{q}{2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$EI v = \frac{q}{2} \left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2$$

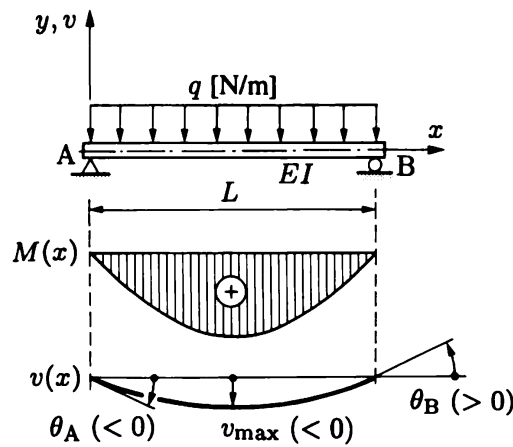


Fig. 10.4 Déformée d'une poutre simple uniformément chargée ($EI = \text{cste}$).

Les deux constantes d'intégration C_1 et C_2 se déterminent à l'aide des conditions aux limites ; ici, le déplacement est nul sur les appuis A ($x = 0$) et B ($x = L$) :

- la condition $v(0) = 0$ donne $C_2 = 0$;
- la condition $v(L) = 0$ donne $C_1 = -qL^3/24$.

L'équation de la déformée est donc

$$v = -\frac{q}{24 EI} (x^4 - 2x^3 L + xL^3) \quad (10.10)$$

Cette déformée doit évidemment être symétrique par rapport au milieu de la poutre, et l'on peut aisément vérifier qu'il en est ainsi dans (10.10). Par suite, la flèche maximale se produit au milieu et a pour valeur

$$v_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5qL^4}{384 EI} \quad (10.11)$$

L'angle de rotation de la poutre sur l'appui A vaut

$$\theta_A = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{qL^3}{24 EI} \quad (10.12)$$

et, par symétrie, $\theta_B = -\theta_A$ sur l'appui B.

10.3 Cinématique sous l'action de l'effort tranchant

10.3.1 Déformation d'un tronçon de poutre

Soit une tranche dx d'une poutre à section rectangulaire mince (fig. 10.5a). Sous l'action des contraintes tangentielles, les éléments $dx dy$ subissent des glissements $\gamma = \tau/G$. Comme τ est variable, l'angle γ varie aussi sur la hauteur de la section. Cette dernière ne peut donc rester plane, mais *gauchit*. Ce gauchissement est le plus fort au niveau de l'axe neutre ($\tau_{\max} \Rightarrow \gamma_{\max}$) et s'annule aux fibres extrêmes ($\tau = 0 \Rightarrow \gamma = 0$). Si l'on garde l'axe AB fixe, la configuration déformée montre le glissement longitudinal des fibres les unes par rapport aux autres (fig. 10.5b).

Si l'effort tranchant est constant, le gauchissement de toutes les sections droites est le même ; par suite, une fibre telle que CD (fig. 10.5b) se déplace d'un bloc en C'D' sans s'allonger ni se raccourcir ; il en résulte que le calcul des contraintes normales de flexion par la relation $\sigma = -My/I$ est encore exact ; par contre, ce calcul devient approché si l'effort tranchant est variable. On peut cependant démontrer que l'erreur reste insignifiante, parce que la variation du gauchissement est très faible tant que la longueur de la poutre est au moins égale à trois fois sa hauteur. Ainsi, *la formule de flexion pure $\sigma = -My/I$ reste valable en présence d'effort tranchant, c'est-à-dire en flexion simple.*

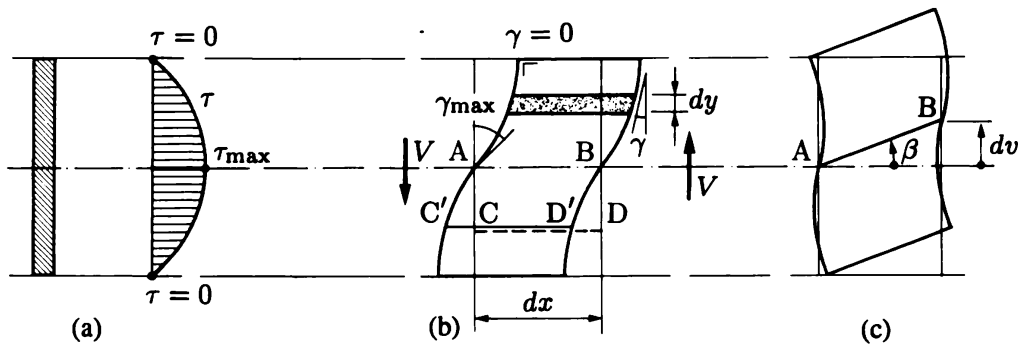


Fig. 10.5 Déformation d'une tranche dx d'une poutre à section rectangulaire sous l'effet de l'effort tranchant : (a) diagramme τ ; (b) gauchissement des sections ; (c) angle de glissement moyen.

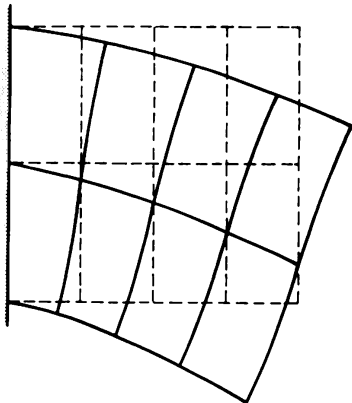
La déformation par effort tranchant se combine avec celle due à la flexion ; elle peut accroître légèrement les déplacements de flexion d'une quantité élémentaire $dv = \beta dx$ (fig. 10.5c) ; cette dernière apparaît lorsqu'on redresse l'élément déformé pour faire coïncider, le mieux possible, les sections gauchies avec leur configuration initialement plane. Cette opération peut se réaliser par une petite rotation β autour du point A.

10.3.2 Incompatibilité cinématique, glissement moyen et aire réduite

L'angle β s'appelle le *glissement moyen* ; il n'existe pas de procédé simple pour le calculer. On remarque, en effet, que le gauchissement ne peut pratiquement jamais se produire librement (V variable) ; les conditions aux limites le contrarient aussi, même si l'effort tranchant est constant : dans une poutre console par exemple (fig. 10.6), la section encastree n'a aucun gauchissement et ce dernier variera donc avec x .

En conclusion, *les déformations d'effort tranchant, déduites des contraintes tangentielles issues de l'équilibre, conduisent à l'incompatibilité cinématique ; elles ne peuvent se calculer isolément, en négligeant en particulier leur couplage avec la flexion et les conditions d'appui. Chaque problème*

de flexion simple a sa solution particulière; il n'existe d'ailleurs que très peu de solutions exactes connues.



La console est soumise à une charge verticale répartie paraboliquement sur l'extrémité libre. L'échelle des déplacements est exagérée d'un facteur 250 (dessin du post-processeur du programme d'éléments finis SAFE, Prof. J. Jirousek, LSC, EPFL).

Fig. 10.6 Déformée d'une console à section rectangulaire, en tenant compte de l'effort tranchant. A cause de l'encastrement, le gauchissement varie, bien que l'effort tranchant soit constant.

On doit donc se contenter d'une approximation. Pour l'obtenir, on considère que l'angle β représente une *moyenne* des glissements dans la section droite. La valeur livrée par le principe des forces virtuelles (vol. 3, chap. 7), qui permet de satisfaire la cinématique en moyenne, au sens intégral, est reconnue comme la meilleure.

Travaillons sur un élément dx de poutre, soumis à l'effort tranchant (fig. 10.7); cet effort extériorisé joue le rôle de force extérieure. Le champ cinématique réel se compose

- à l'intérieur, des glissements $\gamma = \tau/G$;
- à l'extérieur, du déplacement $dv = \beta dx$.

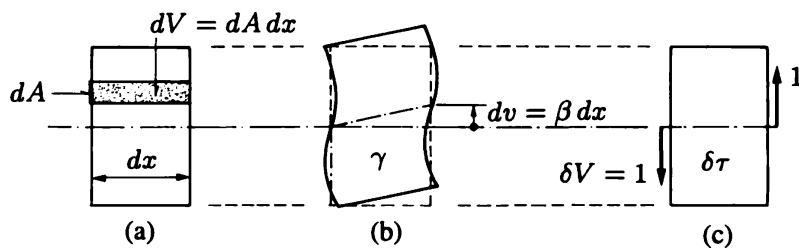


Fig. 10.7 Calcul de l'angle de glissement moyen β par le théorème des forces virtuelles appliqué à un élément de poutre soumis à l'effort tranchant : (a) élément dx ; (b) cinématique réelle; (c) statique virtuelle.

Le champ virtuel en équilibre est choisi comme l'indique la figure, à savoir

- à l'extérieur, un effort tranchant unité $\delta V = 1$;
- à l'intérieur, les contraintes tangentielles $\delta \tau$ qui en résultent.

Les travaux virtuels externe δW_{ext}^* et interne δW_{int}^* valent

$$\delta W_{\text{ext}}^* = 1 dv = dv = \beta dx$$

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \left(\int_A \delta \tau \gamma dA \right) dx = \frac{1}{G} \left(\int_A \delta \tau \tau dA \right) dx$$

d'où

$$\frac{dv}{dx} = \beta = \frac{1}{G} \int_A \delta \tau \tau dA$$

Si l'on désigne par τ_1 les contraintes tangentielles produites par un effort tranchant unité, on a $\delta \tau \equiv \tau_1$ et $\tau = V \tau_1$, puis

$$\frac{dv}{dx} = \beta = \frac{V}{G} \int_A \tau_1^2 dA = \frac{V}{GB} \quad (10.13)$$

où la quantité $B = 1 / \int_A \tau_1^2 dA$ s'appelle **aire réduite** parce qu'elle a les dimensions d'une aire. B ne dépend que de la géométrie de la section droite ; en effet, $|\tau_1| = S/(It)$ et

$$B = \frac{1}{\int_A \tau_1^2 dA} = \frac{I^2}{\int_A \frac{S^2}{t^2} dA} \quad (10.14)$$

Si l'on compare l'expression (10.13) du glissement moyen à l'axe

$$\beta = \frac{V}{GB}$$

avec l'expression erronée (9.3b) de la théorie élémentaire (sect. 9.2)



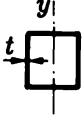

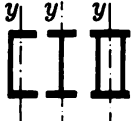
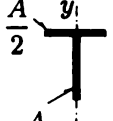
$$\gamma = \frac{V}{GA}$$

on voit que, *au point de vue cinématique et en vue de calculer les déplacements, il suffit, pour rectifier la formule erronée, d'y remplacer l'aire réelle par l'aire réduite B .*

Pour chaque section droite, on peut, par (10.14), calculer son aire réduite. On obtient les résultats résumés au tableau 10.8. D'importance particulière est le résultat obtenu *pour les sections de type âme(s)-semelles fléchies dans le plan de l'âme (des âmes) : l'aire réduite est approximativement égale à celle de l'aire de l'âme (des âmes).* Cette approximation est évidemment en relation directe avec la formule (9.10).

Tableau 10.8 Aires réduites B .

La valeur $B = 9A/10$, fréquemment donnée pour la section circulaire pleine, est obtenue en ne considérant dans le terme central de (10.14) que la composante verticale τ_{xy} de la contrainte tangentielle (§ 9.8.3, appl.). Ce résultat est moins précis que $27A/32$.

Section droite (effort tranchant V_y)						
			Tube carré			$\frac{A}{2} = A_w$
Aire réduite B	$\frac{5}{6} A$	$\frac{27}{32} A$	$\frac{5}{12} A$	$\frac{1}{2} A$	$\sim A_w$	$\sim 0,8 A_w$

10.3.3 Equation différentielle de la déformée due à l'effort tranchant

L'effort tranchant produit des déplacements transversaux v (flèches) donnés par (10.13)

$$\frac{dv}{dx} = \beta = \frac{V}{GB}$$

Dérivons cette équation par rapport à x en supposant GB constant ; avec les équations d'équilibre (d) $dV/dx = -q$ et $q = d^2M/dx^2$, on obtient

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{GB} \frac{dV}{dx} = -\frac{q}{GB} = -\frac{1}{GB} \frac{d^2M}{dx^2} \quad (10.15)$$

Ces relations expriment la *courbure due à l'effort tranchant* $V(x)$ en fonction de ce dernier, de la force répartie transversale $q(x)$, ou du moment fléchissant $M(x)$.

L'intégration de (10.15) doit être faite *indépendamment* de celle donnant la déformée en flexion (10.7), parce que les conditions aux limites respectives ne sont pas nécessairement de même nature (fig. 10.9) ; la déformée totale s'obtient ensuite par superposition ($v_{\text{tot}} = v_M + v_V$). En dehors des cas simples, l'emploi de (10.15) peut s'avérer délicat, voire impossible (expression des conditions aux limites en liaison avec l'incompatibilité cinématique citée plus haut). Pour contourner ces difficultés, et si l'on ne désire connaître la valeur des déplacements qu'en quelques points, il est recommandé d'utiliser le théorème de la force unité (chap. 12).

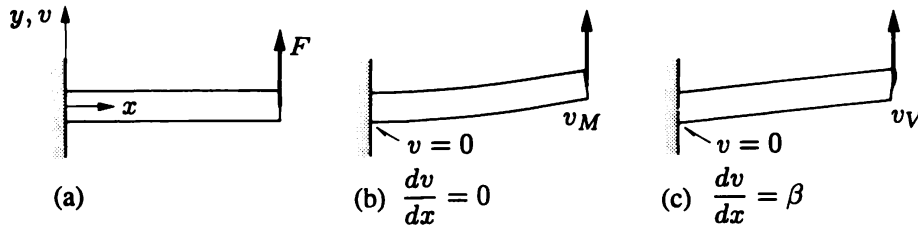


Fig. 10.9 Conditions aux limites pour calculer la déformée d'une console : (a) poutre console ; (b) déformée de flexion ; (c) déformée d'effort tranchant.

Application

Pour la poutre simple uniformément chargée (fig. 10.4), on trouve, avec $v = 0$ en $x = 0$ et $x = L$ (mêmes conditions qu'en flexion),

$$v(x) = -\frac{q}{2GB} x(L - x)$$

d'où

$$v_{\text{max}} = v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{qL^2}{8GB}$$

et

$$|v_{\text{tot, max}}| = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{qL^2}{8GB} \quad (10.16)$$

Remarque

Si les conditions aux limites sont identiques pour la flexion et l'effort tranchant, la relation (10.15) $d^2v/dx^2 = (-1/GB) d^2M/dx^2$ montre qu'on a, directement, $v = (-1/GB)M$. C'est bien le résultat obtenu dans l'application précédente.

10.3.4 Importance relative des déplacements dus à l'effort tranchant

Pour une charge concentrée agissant à mi-portée d'une poutre simple, et en appelant v_M et v_V les flèches sous charge dues au moment de flexion et à l'effort tranchant, on obtient

- pour une section rectangulaire et $\nu = 0,25$: $v_V/v_M = 3(h/L)^2$;
- pour une section âme-semelles et $\nu = 0,3$: $v_V/v_M = 7,8(h/L)(\tau/\sigma)$, où τ est la contrainte tangentielle maximale dans l'âme et σ la contrainte normale maximale aux fibres extrêmes (au centre) ; si la matière travaille au maximum simultanément en σ et τ , on prend, pour les métaux, avec (7.19), $\tau = \sigma/\sqrt{3} = 0,577 \sigma$.

Le tableau 10.10 donne les valeurs numériques du rapport v_V/v_M pour quelques valeurs usuelles du rapport h/L de la hauteur de la section de la poutre à la portée.

Tableau 10.10

h/L		1/20	1/15	1/10	1/8
v_V/v_M (%)	section rectangulaire	0,8	1,3	3,0	4,7
	section âme-semelles	22	30	45	56

Ces résultats montrent que, dans le cas où la poutre est de section rectangulaire, les déplacements élastiques dus à l'effort tranchant peuvent être négligés devant ceux dus à la flexion. En revanche, dans le cas d'une poutre âme-semelles et contrairement à l'opinion courante, ces déplacements sont loin d'être toujours négligeables, spécialement si la hauteur relative h/L de la poutre est grande. Cependant, le calcul ci-dessus suppose que l'âme travaille à sa contrainte tangentielle maximale, ce qui se présente rarement. En réalité, on a plutôt $\tau \cong 0,2 \sigma$, voire $0,1 \sigma$, et les pourcentages correspondants sont au moins trois à cinq fois plus petits.

En conclusion, *les déplacements dus à l'effort tranchant sont négligeables devant ceux dus à la flexion. On peut donc les ignorer dans le calcul des déplacements et, en particulier, lors de la résolution des structures hyperstatiques.* Les poutres de type âme-semelles, à âme mince ou de grande hauteur par rapport à leur portée, peuvent faire exception à cette règle.

10.4 Exercices

10.4.1 Une poutre simple AB, de portée L , prismatique, est soumise à un moment concentré \bar{M} à l'extrémité B.

- 1) Etablir l'équation de la déformée due au moment de flexion.
- 2) En déduire la valeur des angles de rotation θ_A et θ_B sur les appuis A et B, ainsi que celle de la flèche maximale v_{\max} en travée.

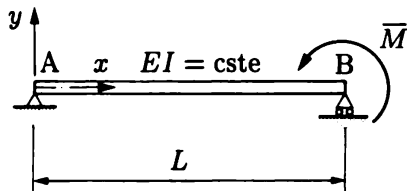


Fig. Ex. 10.4.1

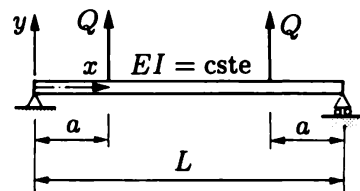


Fig. Ex. 10.4.2

10.4.2 Déterminer les équations de la déformée flexionnelle de l'axe d'une poutre simple prismatique ($EI = \text{cste}$) chargée symétriquement de deux forces concentrées Q .

10.4.3 L'appui B d'une poutre prismatique hyperstatique AB subit un déplacement vertical \bar{v} . On néglige la déformation due à l'effort tranchant.

- 1) Sans calcul, donner la nature de l'équation de la déformée.
- 2) Trouver l'équation de la déformée.
- 3) En déduire le diagramme des moments.
- 4) Trouver les réactions d'appui.

10.4.4 Une poutre prismatique AB, encastrée en A, appuyée sur un rouleau en B, est chargée par un moment concentré \bar{M} agissant en B. On ne considère que les effets du moment de flexion.

- 1) Quel est le degré d'hyperstaticité de cette poutre ?
- 2) Dessiner l'allure de la déformée et l'allure du diagramme des moments de flexion.
- 3) Etablir l'équation de la déformée.
- 4) En déduire le diagramme des moments exacts, en particulier la valeur du moment d'encastrement M_A .

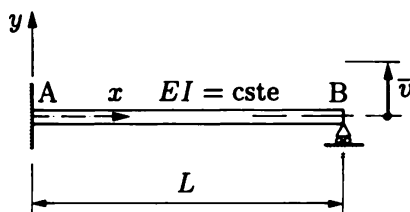


Fig. Ex. 10.4.3

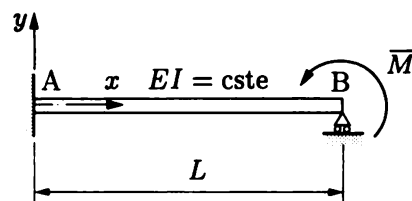


Fig. Ex. 10.4.4

10.4.5 Une poutre est soumise, en toute section droite d'abscisse x , à l'action thermique suivante :

- les fibres supérieures et inférieures, distantes de h , sont soumises aux variations de température T_{sup} et T_{inf} ;
- la variation de température est linéaire sur h et nulle au droit de l'axe neutre.

Montrer que l'équation différentielle de la déformée est

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\alpha \Delta T}{h} \quad \text{avec} \quad \Delta T(x) = T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}}$$

Application. Une poutre simple prismatique est soumise à l'action thermique $\Delta T = \text{cste}$ décrite ci-dessus. Trouver l'équation de sa déformée.

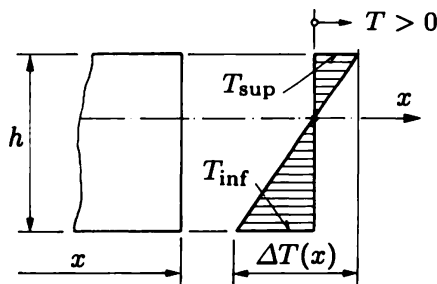


Fig. Ex. 10.4.5

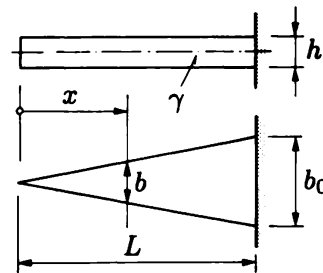


Fig. Ex. 10.4.6

10.4.6 Une poutre console, à section rectangulaire de hauteur constante et de largeur b linéairement et lentement variable, est soumise à l'action de son poids propre (poids volumique γ). Calculer l'expression des déformées dues à la flexion et à l'effort tranchant, ainsi que les flèches maximales correspondantes.

10.4.7 Une console en acier doux, de 2 m de long, doit supporter une charge répartie uniforme de service $q = 23 \text{ kN/m}$. On néglige le poids propre. Le coefficient de pondération γ_F est égal à 1,5.

- 1) Calculer à la flexion le profilé HEA nécessaire.
- 2) Vérifier la contrainte de comparaison dans l'âme à la naissance des arrondis, et la contrainte tangentielle maximale.
- 3) Calculer, par intégration de l'équation de la déformée, la flèche maximale en service due
 - au moment de flexion,
 - à l'effort tranchant.

Comparer les valeurs obtenues.

Note : en se référant à la figure de l'exercice 9.13.1, on a ici, pour divers HEA, les moments statiques suivants :

HEA 140	$S_A = 87 \text{ cm}^3$	$S_B = 81 \text{ cm}^3$
160	123	115
180	162	151
200	215	200

10.5 Lexique

Déformée d'une poutre	Configuration déformée de l'axe d'une poutre (sollicitée ici en flexion simple).
Flèche	Déplacement d'un point de l'axe, normalement à cet axe, dit aussi déplacement transversal.
Glissement moyen (angle β)	Angle (apparent) dont tourne l'axe d'une poutre suite aux déformations de l'effort tranchant ; cet angle permet de calculer approximativement les déplacements dus à l'effort tranchant.
Aire réduite (B)	Caractéristique géométrique de la section droite permettant d'évaluer l'angle de glissement moyen par la relation élémentaire $\beta = V/GB$.

11. Sollicitation composée

Cisaillement direct

Assemblages

11.1 Sollicitation composée

11.1.1 Principe de résolution

Dans les chapitres précédents, on a étudié les contraintes, déformations et déplacements produits par chaque effort intérieur agissant isolément. Le tableau 11.1 rappelle, de manière condensée, les principaux résultats obtenus.

Tableau 11.1

STATIQUE

Sollicitation	Déformation en tout point	Sections droites	Condition cinématique	Contraintes (Hooke)		Formules (valeur absolue)	Chap.
N (effort normal)	ε	restent planes	nécessaire ⁽⁷⁾	σ	constantes	$\sigma = N/A$	4
M (flexion plane)	ε	restent planes	nécessaire ⁽⁷⁾	σ	linéaires	$\sigma = My/I$	5
T (torsion)	γ	gauchissent ⁽¹⁾	nécessaire ⁽⁸⁾	τ	quelconques ⁽²⁾	$\begin{cases} \tau = T\tau/I_p^{(2)} \\ \tau = Tt/J^{(3)} \\ \tau = T/2\Omega t^{(4)} \end{cases}$	8
V (effort tranchant)	γ	gauchissent	—	τ	quelconques ⁽⁵⁾	$\tau = VS/It^{(6)}$	9

(1) restent planes pour cercle, couronne, tube circulaire

(2) linéaires sur le rayon pour cercle, couronne, tube circulaire

(3) sections ouvertes à parois minces

(4) sections fermées à parois minces

(5) obtenues par équilibre à partir des σ de flexion

(6) sections à parois minces

(7) loi de Bernoulli

(8) théorie de la torsion de Saint-Venant

Tableau 11.1 (fin).

CINÉMATIQUE					
Sollicitation	Déplacement de l'axe	Déformation type de l'axe		Equation différentielle	Chap.
N	u	ε	dilatation	$\varepsilon = u' = N/EA$	4
M	$v, \theta = v' \text{ (1)}$	$1/r$	courbure	$1/r = \theta' = v'' = M/EI$	10
T	θ_x	χ	angle de torsion par unité de longueur	$\chi = \theta'_x = T/GJ$	8
V	v	β	glissement moyen	$\beta = v' = V/GB$	10

(1) $v' = dv/dx$; $v'' = d^2v/dx^2$; etc.

Lorsque plusieurs efforts intérieurs se présentent simultanément dans une section droite de poutre, on parle de ***sollicitation composée***. Le cas le plus général est celui où les six efforts intérieurs (N , V_y , V_z , T , M_y , M_z) agissent ensemble, ce qui est assez peu fréquent en pratique ; par contre, la *flexion oblique*, la *flexion composée* (chap. 6) et la *flexion simple* (chap. 5 et 9) sont des cas courants de sollicitation composée ; dans le premier cas agissent simultanément M_y et M_z , dans le deuxième N et M_z (et, éventuellement, M_y) et dans le troisième M_z et V_y (ou M_y et V_z).

Pour résoudre un cas de sollicitation composée, *on traite séparément chaque effort intérieur, puis on superpose les résultats* (algébriquement). Le *principe de superposition* justifie cette façon de procéder (§ 2.7.4) ; il faut donc que la double hypothèse de linéarisation soit satisfaite.

La seule difficulté est, peut-être, de trouver

- et le long de la poutre,
- et dans la section droite,

quels sont les points les plus sollicités.

Pratiquement, on commence par analyser les sections où se produit un maximum des divers efforts intérieurs. Lorsque les charges sont mobiles, chaque effort intérieur peut avoir un maximum déterminant dans une même section (par exemple N_{\max} , V_y , M_z ou N , $V_{y\max}$, M_z ou N , V_y , $M_{z\max}$), ce qui peut allonger considérablement le nombre de cas à vérifier. Puis, dans la section, il faut souvent analyser l'état de contrainte en plusieurs points, afin de trouver celui qui est le plus sollicité, ce dernier pouvant changer selon les efforts intérieurs agissant.

Quant à la sécurité, on la teste à l'aide des règles de la section 7.10. Pour les métaux ductiles, on recourt au critère de plastification de von Mises et, pour les matériaux raides, on peut utiliser le critère de la courbe intrinsèque.

11.1.2 Pièces composées

On sait comment transformer les propriétés géométriques de la section droite d'une pièce composée de deux matériaux en celles d'une section fictive rapportée à un seul matériau de référence (sect. 4.4, 5.6, 8.10 et 9.6). En cas de sollicitation composée, et pour plus de souplesse, il est utile de disposer de relations générales définissant les propriétés géométriques utiles de la section droite.

Une fois choisi un matériau de référence, le coefficient d'équivalence (n ou m) est défini *en tout point* de la section droite. L'aire, et les moments statique et d'inertie (où y et d sont la coordonnée et la distance par rapport à l'axe du calcul), valent

$$\tilde{A} = \int_A \frac{dA}{n} \quad \tilde{S} = \int_A y \frac{dA}{n} \quad \tilde{I} = \int_A y^2 \frac{dA}{n} \quad (11.1)$$

ou, si la section peut se décomposer en figures simples i (vol. 1, § 13.3.2 et 13.5.2),

$$\tilde{A} = \sum \frac{A_i}{n_i} \quad \tilde{S} = \sum \frac{S_i}{n_i} = \sum \frac{A_i y_{ci}}{n_i} \quad \tilde{I} = \sum \frac{I_i}{n_i} = \sum \frac{I_{ci} + d_i^2 A_i}{n_i} \quad (11.2)$$

Ces formules sont la généralisation évidente des formules (4.19) pour l'aire, (5.24) pour le moment statique et (5.25) pour le moment d'inertie. Il est clair que \tilde{S} sert aussi au calcul direct de la position de l'axe neutre.

Les contraintes sont données par

$$\sigma = \frac{N}{n\tilde{A}} \quad \sigma = -\frac{M}{n\tilde{I}} y \quad \tau = \frac{(-V)\tilde{S}}{\tilde{I}t} \quad (11.3)$$

Pour les caractéristiques de torsion, on a simplement, comme généralisation de (8.30) et (8.32),

$$\tilde{J} = \sum \frac{J_i}{m_i} = \frac{1}{3} \sum \frac{b_i t_i^3}{m_i} \quad \tilde{J} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{m}{t} ds} \quad (11.4)$$

et les contraintes se calculent par

$$\tau_{\max i} = \frac{T}{m_i \tilde{J}} t_i \quad \tau = \frac{T}{2\Omega t} \quad (11.5)$$

11.2 Assemblages et moyens d'assemblage

11.2.1 Types d'assemblage

La disposition technique réalisant la jonction de deux ou plusieurs pièces s'appelle **assemblage**. Les boulons, clous, cordons de soudure, colles, chevilles, anneaux, goujons, clavettes, rivets, axes... réalisant l'assemblage s'appellent **moyens d'assemblage**.

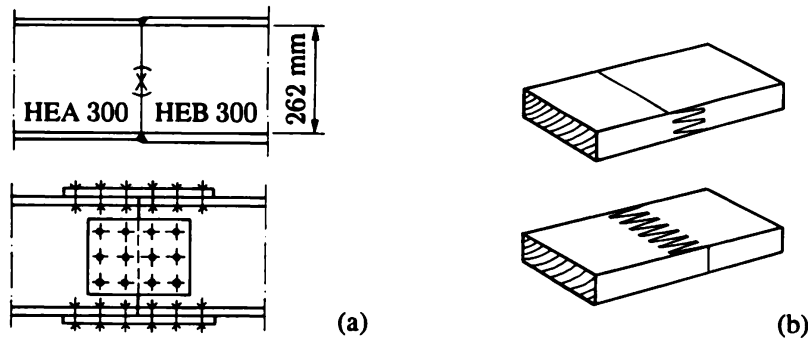


Fig. 11.2 Joints : (a) acier (joint soudé et joint boulonné) ; (b) bois (joint par entures collées).

Les **assemblages longitudinaux** lient plusieurs pièces de manière à réaliser une grande section droite monolithique (sect. 11.4). Les **assemblages transversaux**, ou **joints**, servent au prolongement d'une poutre suivant son axe (pour changer de section droite, parce que les longueurs des profilés laminés sont insuffisantes, pour limiter le poids ou l'encombrement au transport ou au montage, etc. ; fig. 11.2). Les **nœuds** solidarisent deux ou plusieurs pièces dont les axes n'ont pas la même direction (vol. 1 : nœuds des treillis (fig. 7.4), de poutres (fig. 8.11), de câbles (fig. 10.6), etc.). Certains joints ou nœuds jouent le rôle d'organes de liaison des structures composées (fig. 11.3).

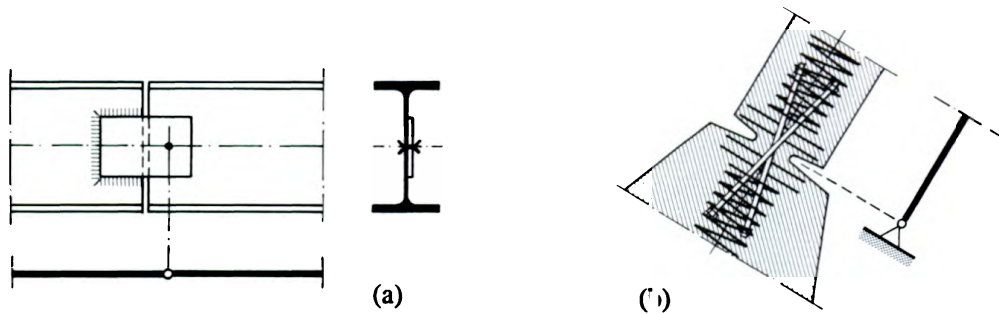


Fig. 11.3 Articulations : (a) acier ; (b) béton.

11.2.2 Rôle et conception

La réalisation des inévitables assemblages d'une structure est un point important et délicat du projet. L'assemblage a deux objectifs essentiels :

- réaliser la transmission des forces (charges, réactions d'appui), des efforts intérieurs (N , V , M , T) ou des contraintes (τ longitudinaux, sect. 11.4) ;
- être techniquement simple, peu encombrant, facile à réaliser et entretenir, durable dans le temps.

Ce double but est souvent délicat à atteindre. L'assemblage doit réaliser les exigences du schéma statique (encastrement ? articulation ? monolithisme ?...) et résister aux efforts qui en découlent ; sa conception dépend du matériau, du moyen d'assemblage et de toute une série d'exigences et de règles qui résultent du cadre général du projet, de l'expérience et de la pratique.

11.2.3 Analyse

Le calcul des joints et nœuds est décrit dans les ouvrages de construction. Le principe du calcul des assemblages longitudinaux est donné ci-après. Tout calcul théorique du moyen d'assemblage lui-même est ordinairement voué à l'échec, tant la statique et la cinématique y sont complexes. Le calcul de l'assemblage peut même être fort délicat. La meilleure voie consiste souvent à recourir à l'essai de laboratoire, jusqu'à rupture (état limite ultime). On dimensionne ensuite vis-à-vis de la charge de ruine, soit en prenant une sécurité convenable selon la méthode des contraintes admissibles, soit en choisissant des coefficients de pondération du matériau – c'est-à-dire ici de l'assemblage – appropriés selon la méthode semi-probabiliste (chap. 3). C'est pourquoi beaucoup d'assemblages et moyens d'assemblage sont standardisés, et leur résistance établie une fois pour toutes et donnée sous forme de tableaux. Le calcul se résume alors à trouver la sollicitation de l'assemblage ou du moyen d'assemblage, et à la comparer aux valeurs tabulées.

Beaucoup de moyens d'assemblage sont, comme on dit couramment en pratique, *cisaillés*. La section suivante donne la signification de ce terme, montre du même coup où se situe la complexité d'un calcul théorique et souligne l'intérêt qu'il y a à connaître les modes de rupture possibles d'un assemblage.

11.3 Cisaillage direct et rupture des assemblages

Considérons l'assemblage de deux barres par un rivet (fig. 11.4), assemblage transmettant un effort de traction N ; en faisant croître N , on peut rompre cet assemblage en *cisaillant* la tige du rivet au niveau du plan hh (fig. 11.4a).

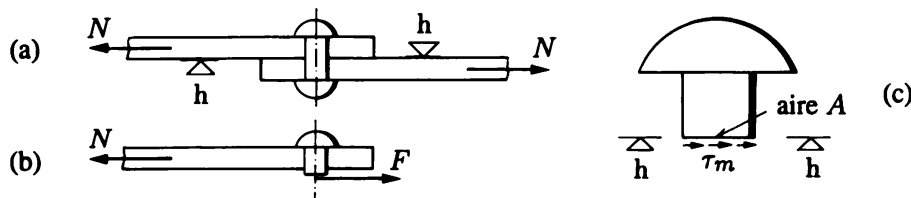


Fig. 11.4 Exemple d'un assemblage cisaillé.

En coupant l'assemblage suivant ce plan, le schéma de la partie supérieure isolée montre qu'il faut effectivement introduire une force $F = N$ pour garantir l'équilibre de translation (fig. 11.4b). Cette force peut être considérée comme un effort tranchant si l'on assimile la tige du rivet à une poutre. Il s'ensuit qu'il doit apparaître sur la section droite A de la tige des contraintes tangentielles τ_m équivalentes par leur ensemble à F (fig. 11.4c), soit

$$\int_A \tau_m dA = F \quad (11.6)$$

Mais on ne peut rien dire de plus ; vu les proportions du rivet, la modélisation de sa tige par une poutre n'est guère correcte ; de plus, les forces N sollicitent cette tige au voisinage immédiat de la section hh ; par suite, en vertu du principe de Saint-Venant (§ 2.7.5), la notion d'effort intérieur n'a pas de sens et l'état de contrainte dans hh est complètement perturbé et affreusement compliqué.

En particulier, *on n'a surtout pas un état de cisaillement pur*.

On appelle **cisaillement direct** (ou *brut, moyen, technologique, d'assemblage...*) ce type de sollicitation ; il convient de bien le distinguer de l'état de contrainte parfaitement défini qu'est le cisaillement pur, lequel se produit par exemple dans une poutre tordue (torsion uniforme) ou au plan neutre des poutres en flexion simple.

Le cisaillement direct caractérise la transmission des forces intérieures à travers certains moyens d'assemblage, en général selon un ou plusieurs plans parallèles à l'effort transmis ; dans ces plans, les moyens d'assemblage sont dits *cisaillés*, parce que, si on accroît l'effort transmis, la *rupture* se produit effectivement par un cisaillement du moyen d'assemblage selon le(s) plan(s) en question. La figure 11.5 montre divers cas pratiques de ce genre.

Au point de vue calcul, tout ce qu'on peut faire est d'apprécier la valeur moyenne de la *contrainte de cisaillement* $\tau_m = F/A$, rapport entre la force F transmise par le moyen d'assemblage et l'aire de sa *section de rupture*, c'est-à-dire l'aire de la matière qui se rompt selon un plan parallèle à l'effort

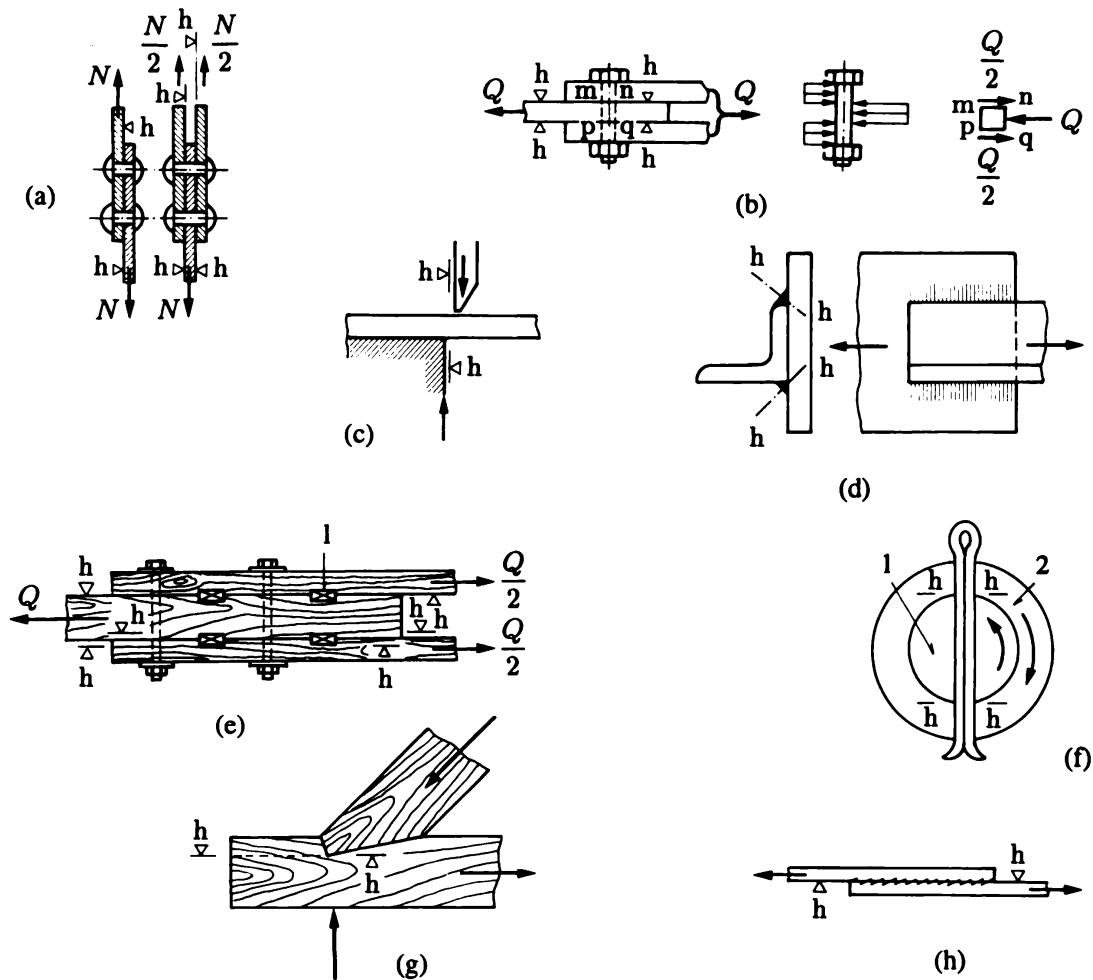


Fig. 11.5 Cisaillement direct de divers assemblages dans le(s) plan(s) hh :

(a) rivets en simple et double cisaillement ; (b) boulon ou axe ; (c) tôle coupée à la cisaille ; (d) cordons de soudure ; (e) assemblage en bois (1 : clavette ou clé) ; (f) goupille (1 : axe ; 2 : cylindre) ; (g) embrèvement ; (h) pièces collées.

au stade de ruine. Comme τ_m n'a aucune signification réelle, on doit se contenter de comparer cette valeur à celle obtenue par des essais effectués jusqu'à ruine sur des assemblages réels.

En général, d'autres vérifications que le cisaillement direct du moyen d'assemblage sont en plus nécessaires ; les pièces de l'assemblage peuvent aussi être cisillées (fig. 11.5e), la pression de contact entre le moyen d'assemblage et la pièce doit être limitée (fig. 11.5b), etc.

Il est fort utile de voir comment un assemblage peut se rompre, car ce renseignement aide beaucoup au calcul et à la réalisation des deux exigences mentionnées au paragraphe 11.2.2. Bien qu'on ne puisse donner de règle générale, le plus souvent

- la rupture se produit selon un ou plusieurs plans parallèles à l'effort à transmettre ;
- la rupture peut avoir lieu dans les moyens d'assemblage, dans la matière des pièces assemblées, ou dans les deux ;
- dans un même assemblage, plusieurs ruptures différentes peuvent survenir.

En examinant avec soin les divers modes de ruine possibles, on peut détecter à temps les points faibles ou les erreurs de conception et de calcul.

11.4 Calcul des assemblages longitudinaux

Une application importante du cisaillement direct touche le dimensionnement des moyens d'assemblage des divers composants d'une poutre de grande section droite, simplement fléchie ou tordue.

Rappelons que les contraintes tangentielles longitudinales créent, dans les parois minces, un flux de cisaillement f dont l'intensité vaut

- pour le moment de torsion agissant sur une section fermée (8.21)

$$f_T = \frac{T}{2\Omega}$$

- pour l'effort tranchant (9.7)

$$f_V = \frac{VS}{I} = \frac{dR}{dx}$$

Si ces flux longitudinaux sont constants sur une longueur L , ils engendrent les efforts rasants

$$R_T = Lf_T \quad R_V = Lf_V \quad (11.7)$$

Ce sont précisément ces efforts rasants qui, agissant au niveau des assemblages longitudinaux, sollicitent les moyens d'assemblage correspondants en cisaillement direct et permettent leur dimensionnement, comme l'illustrent les applications suivantes.

Applications

1. Flexion simple (effort tranchant)

La figure 11.6 montre trois sections droites sollicitées par un effort tranchant V agissant dans le plan vertical.

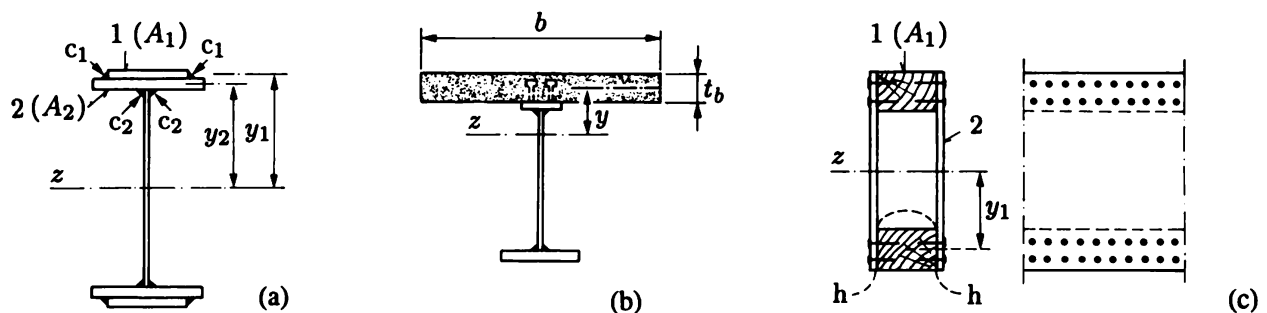


Fig. 11.6 Sections droites : (a) poutre en acier composée soudée ; (b) poutre acier-béton ; (c) poutre en bois (1 : bois équarri ; 2 : contreplaqué).

La semelle 1 de la poutre en acier (fig. 11.6a) a, sous l'effet de V , tendance à glisser sur le reste du profil, ce que les deux cordons de soudure longitudinaux c_1 empêchent. L'effort rasant sollicitant ces deux cordons vaut, par unité de longueur de poutre,

$$R_1 = \frac{VS_1}{I_z}$$

avec $S_1 = A_1 y_1$ où A_1 est l'aire de la section de la semelle 1. Chaque cordon d'angle supporte, par unité de longueur, l'effort $F_1 = R_1/2$ qui le soumet au cisaillement direct à l'image de la figure 11.5(d).

Par un raisonnement semblable, chaque cordon d'angle c_2 doit être dimensionné pour résister, par unité de longueur, à l'effort de cisaillement direct

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{VS_2}{I_z}$$

avec $S_2 = A_1 y_1 + A_2 y_2$.

Les organes d'ancrage d'une poutre composée, liant la dalle de béton au profilé en acier (fig. 11.6b), se calculent de manière analogue ; ces organes – ici des goujons soudés par résistance sur la semelle d'acier supérieure – empêchent le glissement du béton sur l'acier, et garantissent ainsi que les deux matériaux travaillent solidairement (sect. 5.6). On a, par unité de longueur de semelle supérieure (sect. 9.6),

$$R = \frac{VS_b}{n\tilde{I}_a} = \frac{V\tilde{S}_a}{\tilde{I}_a}$$

avec $S_b = bt_b y$ et $\tilde{S}_a = S_b/n$. Si, comme à la figure, il y a deux rangées de goujons, avec un écartement s dans chaque rangée, chaque goujon est sollicité au cisaillement direct par la force $F = sR/2$.

Finalement, examinons le cas d'une poutre en bois formée de deux semelles et deux âmes liées par des clous (fig. 11.6c). A nouveau on peut dimensionner ces clous en remarquant qu'ils s'opposent au glissement des semelles entre les âmes. Sur la double surface de glissement hh et par unité de longueur de poutre, l'effort rasant vaut

$$R = \frac{VS_1}{\tilde{I}_{z1}}$$

avec $S_1 = A_1 y_1$; \tilde{I}_{z1} est le moment d'inertie équivalent rapporté au bois 1 ($E_1 \neq E_2$) et A_1 l'aire de la section droite du bois équarri 1. S'il y a k clous sur hh , l'effort de cisaillement direct par clou est $F = R/k$.

2. Torsion

Le problème est le même lorsque la section droite est cellulaire et soumise au moment de torsion T . Les moyens d'assemblage doivent être dimensionnés tant pour transmettre le flux de cisaillement longitudinal (8.21) que pour y résister, flux que les parois interrompues ne peuvent reprendre.

Dans le cas de la figure 11.7 par exemple, si s est l'espacement des boulons, chacun d'eux doit résister à l'effort

$$F = fs = \frac{T}{2\Omega} s$$

qui le sollicite au cisaillement direct.

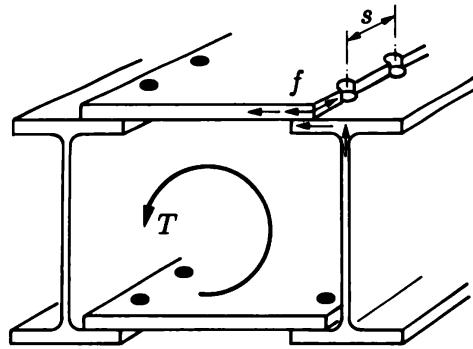


Fig. 11.7 Section droite tordue.

3. Effort tranchant et torsion

Dans les sections fermées, soumises simultanément à l'effort tranchant et au moment de torsion, les flux correspondants doivent être ajoutés (algébriquement) pour dimensionner le moyen d'assemblage.

Dans le cas de la figure 11.8, si les boulons de la rangée A sont écartés en long de s , on a, sous l'action d'un effort tranchant V_y ,

$$R_V = f_V s = \frac{V_y S_{ABC}}{I_z} s$$

où S_{ABC} est le moment statique de la portion ABC par rapport à l'axe neutre z ; puis, sous l'effet d'un moment de torsion T ,

$$R_T = f_T s = \frac{T}{2\Omega} s$$

Un boulon doit ainsi transmettre l'effort (rasant) total $R_{tot} = R_V + R_T$ à travers deux sections de cisaillement direct, de sorte que la tige du boulon est soumise à $F = R_{tot}/2$ (fig. 11.8b).

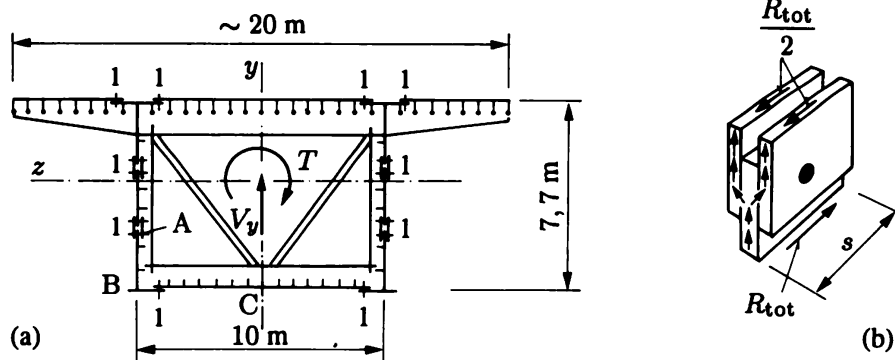


Fig. 11.8 Pont de l'Europe (Autriche; poutre continue en caisson de portées 81-108-198-108-81-81 m):
(a) coupe transversale schématique (1 : assemblages longitudinaux boulonnés); (b) détail A.

11.5 Exercices

11.5.1 Une poutre en acier faiblement allié, coudée à angle droit, formée d'un tube carré MSH 200·200·10, est chargée d'une force concentrée F agissant perpendiculairement à son plan. Rechercher la valeur maximale de F . On prendra pour limite d'élasticité de l'acier $\sigma_e = 355 \text{ N/mm}^2$; le poids propre peut être négligé.

11.5.2 Une poutre console en alliage d'aluminium supporte une charge répartie variant linéairement et agissant de manière excentrée. On néglige le poids propre. Rechercher, dans la section la plus chargée,

- 1) les efforts intérieurs;
- 2) le diagramme des contraintes propre à chaque effort intérieur; dessiner ces diagrammes sur des graphiques séparés;
- 3) la contrainte de comparaison maximale; en déduire le type d'alliage d'aluminium nécessaire.

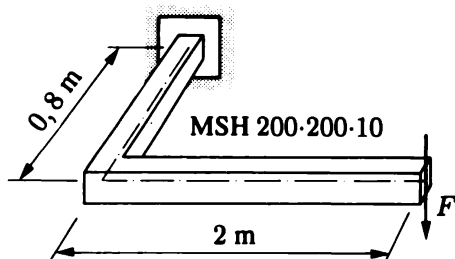


Fig. Ex. 11.5.1

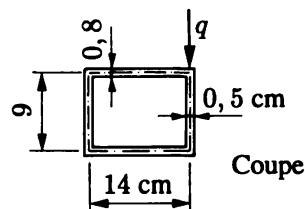
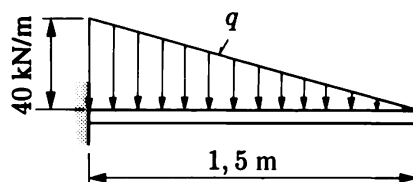


Fig. Ex. 11.5.2

11.5.3 Un panneau de signalisation autoroutière est fixé rigidement sur un poteau tubulaire carré, en alliage d'aluminium, encastré à la base. Le poids du panneau est de 16 kN, celui du poteau de 1 kN; le vent exerce une pression normale de $0,75 \text{ kN/m}^2$ sur le panneau (l'action du vent sur le poteau est négligeable). Dans la section du poteau la plus sollicitée,

- 1) calculer les efforts intérieurs et les représenter sur un dessin avec leur sens réel;
- 2) calculer et dessiner (en perspective) le diagramme des contraintes normales totales;
- 3) calculer et dessiner les diagrammes des contraintes tangentielles;
- 4) trouver le point où se produit la contrainte de comparaison de von Mises la plus grande.

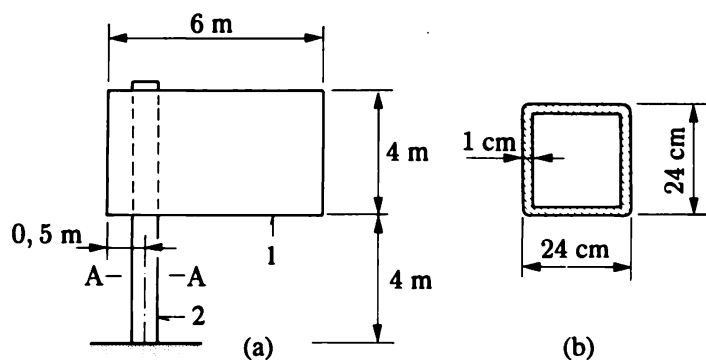


Fig. Ex. 11.5.3 Panneau de signalisation :
(a) élévation (1 : panneau ; 2 : poteau);
(b) coupe AA.

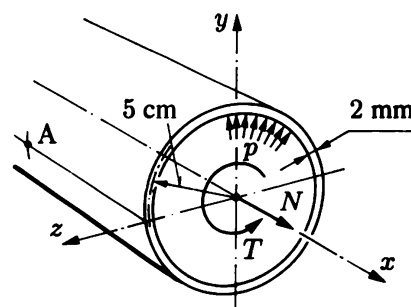


Fig. Ex. 11.5.4

11.5.4 Dans une machine d'essai, on soumet une éprouvette à

- un effort normal $N = 90 \text{ kN}$,
- une pression intérieure $p = 300 \text{ N/cm}^2$,
- un moment de torsion $T = 200 \text{ kN}\cdot\text{cm}$.

L'éprouvette est un tube cylindrique circulaire (rayon moyen 5 cm ; épaisseur 2 mm admise mince), ouvert aux deux extrémités, libre de se dilater.

- 1) Calculer l'état de contrainte en tout point de l'éprouvette et expliquer de quel état il s'agit.
- 2) Tracer le cercle de Mohr de cet état de contrainte au point A de la surface externe.
- 3) Au même point, dessiner les directions principales de cet état de contrainte ; mesurer la valeur des contraintes principales et vérifier analytiquement.
- 4) Calculer τ_{\max} .
- 5) Calculer la contrainte de comparaison de von Mises.

11.5.5 La barre de stabilisation d'une suspension arrière d'automobile (barre de torsion) est un fer rond en acier de 25 mm de diamètre, plié à angle droit en U et disposé dans un plan horizontal. La barre s'appuie en B et C sur le châssis, tandis qu'en A et D les roues transmettent des forces verticales égales et opposées $F = 700$ N.

- 1) Tracer et coter les diagrammes des divers moments agissant le long de cette poutre.
- 2) Dans la section B et à la fibre supérieure, calculer et représenter l'état de contrainte dû à ces moments ; calculer la contrainte de comparaison de von Mises.
- 3) Dans la section B, calculer la contrainte tangentielle maximale due à l'effort tranchant et vérifier qu'elle est négligeable devant celle due à la torsion.

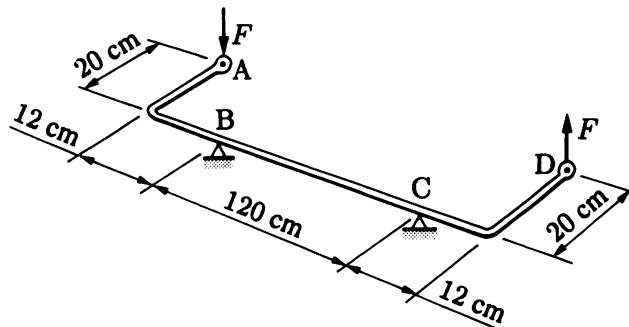


Fig. Ex. 11.5.5

11.5.6 La figure représente l'assemblage d'un tirant à une structure ; toutes les pièces sont en acier. Déterminer

- 1) l'effort normal maximal N dans le tirant, sachant que c'est un tube 60, 3-6, 3 et que $\sigma_{\text{adm}} = 160$ N/mm² ;
- 2) la longueur c des cordons de soudure, sachant que, pour un cordon d'angle $a = 5$ mm, la résistance admissible au cisaillement direct est de 5 000 N/cm ;
- 3) le diamètre d de l'axe qui assemble les plaques, sachant que $\tau_{m \text{ adm}} = 112$ N/mm².

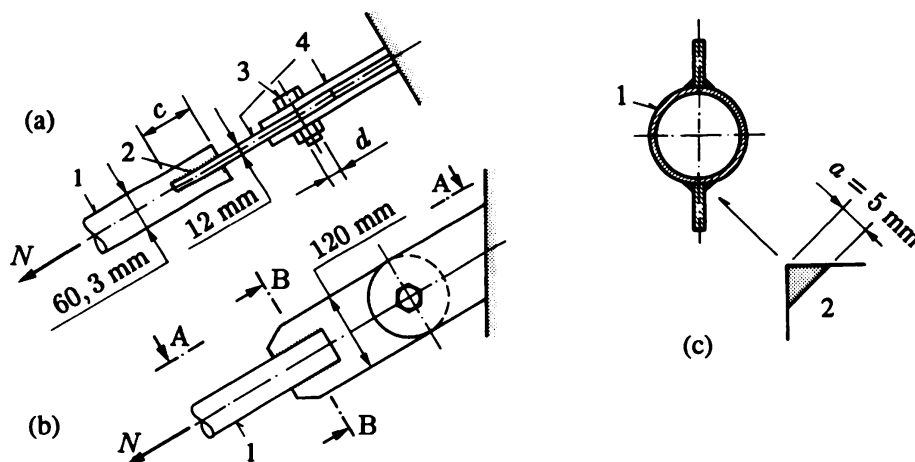


Fig. Ex. 11.5.6 Assemblage : (a) vue AA (1 : tirant, tube 60, 3-6, 3 ; 2 : soudure ; 3 : axe, boulon de diamètre d ; 4 : plaques) ; (b) élévation ; (c) coupe BB (1 : tube ; 2 : soudure par cordon d'angle $a = 5$ mm).

11.5.7 Deux profilés en U sont assemblés, par leur âme, sur une plaque à l'aide d'une rangée de quatre boulons de diamètre 16 mm. Déterminer la valeur admissible de F sachant que la résistance admissible au cisaillement direct de la tige d'un boulon est de 22 kN.

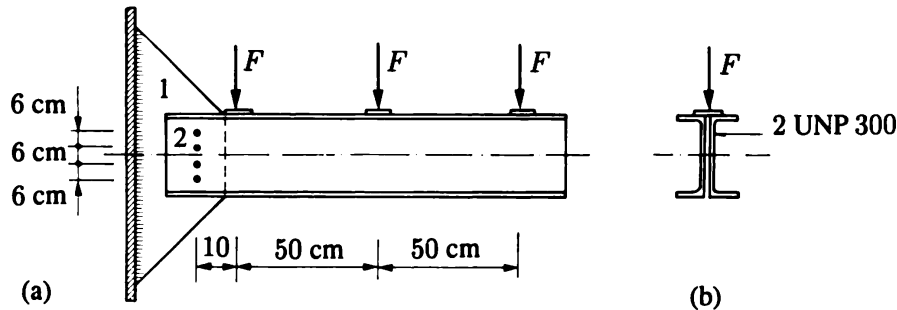


Fig. Ex. 11.5.7 Profilés en U : (a) élévation (1 : plaque ; 2 : boulons) ; (b) coupe.

11.5.8 L'assemblage transversal d'un tube en acier doux est réalisé à l'aide de boulons disposés sur une circonférence de rayon $R = 90$ mm. Sachant que la charge de rupture par cisaillement direct de la tige du boulon vaut 22 kN, calculer le nombre nécessaire de boulons pour pouvoir transmettre le moment de torsion plastique du tube.

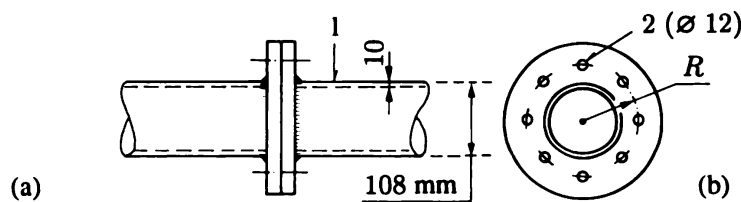


Fig. Ex. 11.5.8 Joint : (a) élévation (1 : tube 108·10) ; (b) coupe (2 : boulon Ø 12).

11.5.9 Une poutre à appuis simples est composée de deux semelles en bois équerri (bois 1) et de deux âmes en contreplaqué (bois 2). Ces pièces sont liées longitudinalement par huit rangées de clous ; dans chaque rangée, les clous sont distants de 4,5 cm. Déterminer la charge uniforme admissible q que peut supporter cette poutre (poids propre inclus). On donne

- bois 1 (équerri) : $E = 10\,000$ N/mm² ; $\sigma_{\text{adm}} = 10$ N/mm² ; $\tau_{\text{adm}} = 1$ N/mm² ;
- bois 2 (contreplaqué) : $E = 5\,000$ N/mm² ; $\sigma_{\text{adm}} = 9$ N/mm² ; $\tau_{\text{adm}} = 1,8$ N/mm² ;
- clou : résistance admissible au cisaillement direct $F_{\text{adm}} = 375$ N.

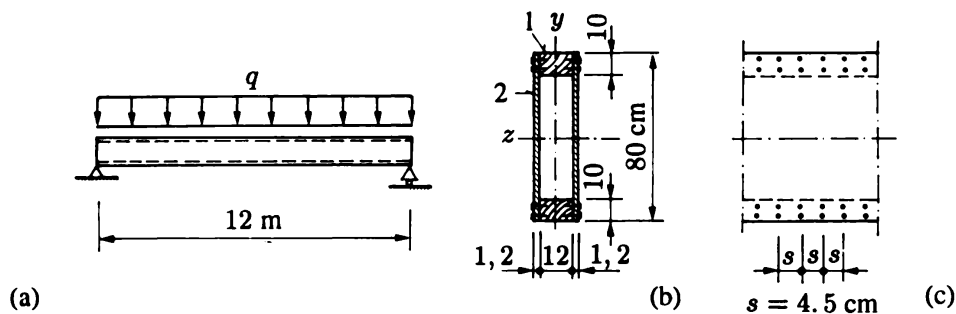


Fig. Ex. 11.5.9 Poutre composée en bois : (a) élévation (vue d'ensemble) ; (b) coupe (1 : bois 1 ; 2 : bois 2) ; (c) élévation (détail).

11.5.10 Les deux matériaux d'une poutre simple acier-béton sont liés par deux rangées de goudons. La poutre pèse 7 kN/m et porte une charge uniforme de 9 kN/m. Calculer l'espacement s des goudons sur appui, sachant que la charge admissible en cisaillement direct d'un goudon est de 24 kN. On donne encore $n = E_a/E_b = 10$ et $I_{az} = 158\,000\text{ cm}^4$.

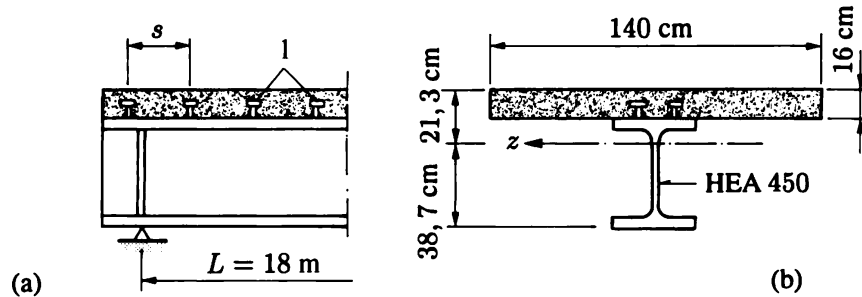


Fig. Ex. 11.5.10 Poutre acier-béton : (a) élévation (1 : goudons $\varnothing 16\text{ mm}$) ; (b) coupe.

11.5.11 Une poutre en bois en caisson est formée de quatre planches identiques, de section $20\text{ cm} \times 3\text{ cm}$, liées par des clous ; dans chaque rangée, les clous sont distants de 2,5 cm. La poutre est placée sur appuis simples en A et B. Elle est chargée dans le plan vertical et dans le plan horizontal comme indiqué. Trouver l'effort maximal sollicitant un clou et l'endroit où il se produit.

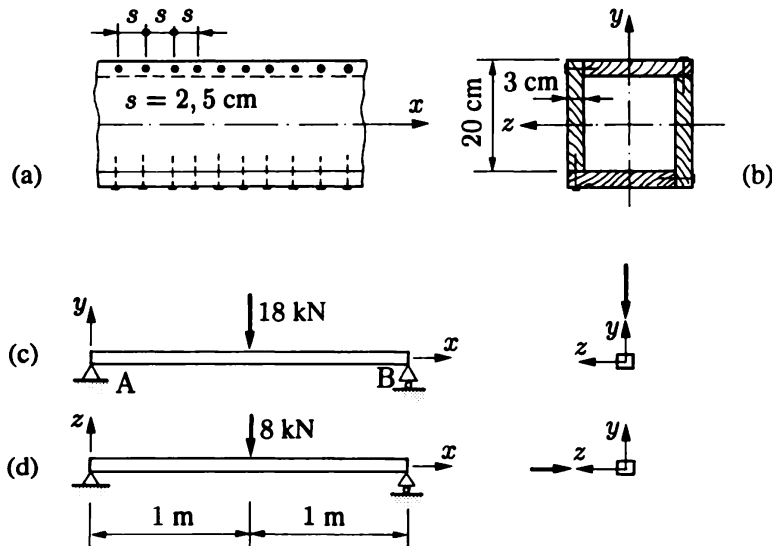


Fig. Ex. 11.5.11 Poutre en bois en caisson : (a) élévation (détail) ;
(b) coupe ; (c) élévation avec charge verticale ;
(d) vue avec charge horizontale.

11.5.12 On reprend la poutre en bois en caisson de l'exercice 11.5.11. Calculer le moment de torsion maximal qui peut agir sur la section droite de cette poutre si, pour le bois, τ_{adm} est fixé à 100 N/cm^2 et, pour un clou, la charge admissible en cisaillement direct vaut $F_{adm} = 625\text{ N}$.

11.5.13 La section droite d'une poutre en acier doux est constituée de deux profilés HEA 200 boulonnés l'un à l'autre comme le montre la figure. L'acier a une limite d'élasticité σ_e de 25,5 kN/cm² ; la force de rupture par cisaillement direct d'un boulon vaut $F_u = 52$ kN.

- 1) Calculer l'effort tranchant maximal V , agissant dans un plan vertical, que peut transmettre cette section sans se plastifier.
- 2) Calculer et dessiner la répartition correspondante des contraintes tangentielles τ .

Note : en se référant à la figure de l'exercice 9.13.1, on a ici, pour le HEA 200, $S_A = 215$ cm³.

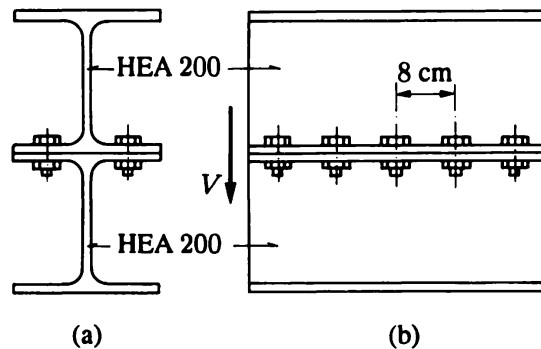


Fig. Ex. 11.5.13 Profilés HEA boulonnés : (a) coupe ; (b) élévation.

11.5.14 La section droite d'une poutre en acier doux est constituée de deux profilés HEB 100 soudés l'un à l'autre longitudinalement en A et B selon les arrangements (a) ou (b). La résistance à la ruine (par plastification) d'un cordon de soudure au cisaillement direct vaut 7,5 kN/cm. Pour chacun des deux arrangements (a) et (b),

- 1) calculer l'effort tranchant maximal V , agissant dans un plan vertical, que peut transmettre la section sans se plastifier ;
- 2) dessiner (sans calcul) l'allure correspondante du diagramme des contraintes tangentielles τ .

Note : en se référant à la figure de l'exercice 9.13.1, on a ici, pour le HEB 100, $S_A = 52$ cm³.

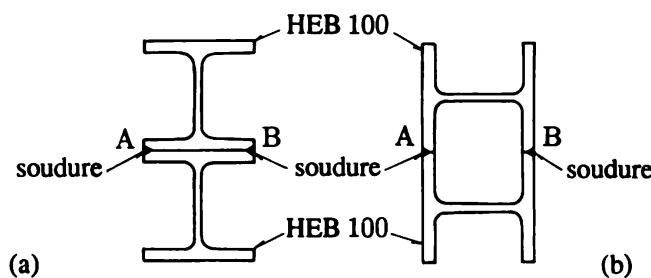


Fig. Ex. 11.5.14

11.5.15 Une console de 1,2 m de portée est chargée à l'extrémité libre d'une force concentrée pondérée $F_d = 16$ kN agissant verticalement au point A ; le poids propre est négligeable. Cette poutre est formée de deux tôles d'acier pliées en Ω formant par leur ensemble la section droite indiquée par la coupe. Les tôles sont minces (3 mm) et l'épaisseur peut être concentrée sur la ligne moyenne ; elles sont liées longitudinalement par des petits rivets régulièrement espacés.

- 1) Trouver l'espacement s des rivets sachant que la résistance au cisaillement direct d'un rivet est de 4,4 kN.
- 2) Dessiner l'allure des diagrammes des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant d'une part, au moment de torsion d'autre part, sur la ligne moyenne de la section droite.
- 3) Calculer τ_{\max} .

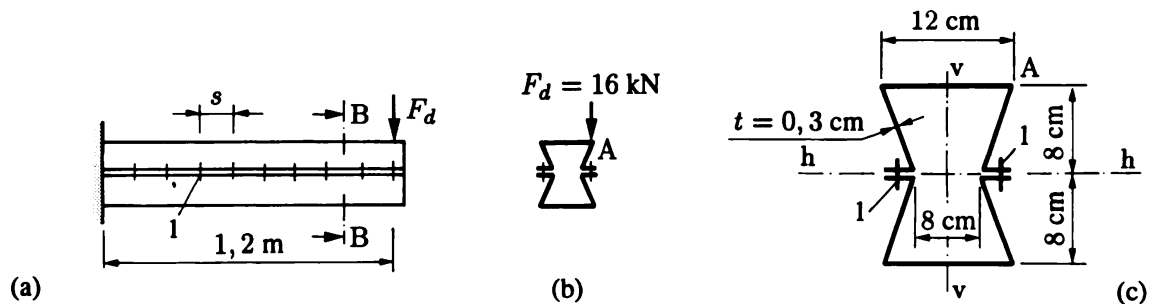


Fig. Ex. 11.5.15 Console : (a) élévation (1 : rivet) ; (b) coupe BB ; (c) section droite (1 : rivet) :

$$I_h = 672 \text{ cm}^4, I_v = 400 \text{ cm}^4, A = 19,5 \text{ cm}^2.$$

11.5.16 Une console de 1,2 m de portée est chargée à l'extrémité libre d'une force concentrée pondérée $F_d = 13 \text{ kN}$, agissant verticalement au point A ; le poids propre est négligeable. Cette poutre est formée de deux tôles d'acier pliées en Ω formant par leur ensemble la section droite indiquée par la coupe. Les tôles sont minces (3 mm) et l'épaisseur peut être concentrée à la ligne moyenne ; elles sont liées longitudinalement par des boulons espacés de 12 cm.

Vérifier la résistance de cette poutre, sachant que la tôle est en acier doux, pour lequel $\sigma_e = 25 \text{ kN/cm}^2$, et que la résistance au cisaillement direct d'un boulon est de 4 kN.

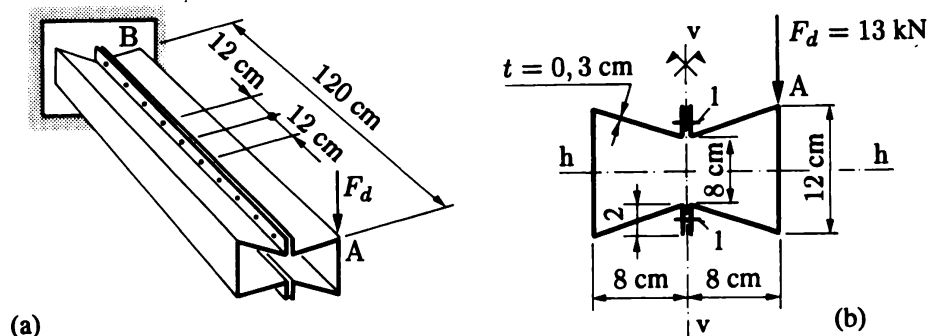


Fig. Ex. 11.5.16 Console : (a) vue ; (b) section droite (1 : boulon) : $A = 19,5 \text{ cm}^2$; $I_h = 400 \text{ cm}^4$; $I_v = 672 \text{ cm}^4$.

11.5.17 La section droite d'une poutre, formée de trois rectangles (admis minces en torsion), est sollicitée par flexion simple dans le plan de l'âme (M et V) et par torsion (T). Chaque rectangle est composé d'un matériau différent et l'ensemble est supposé monolithique.

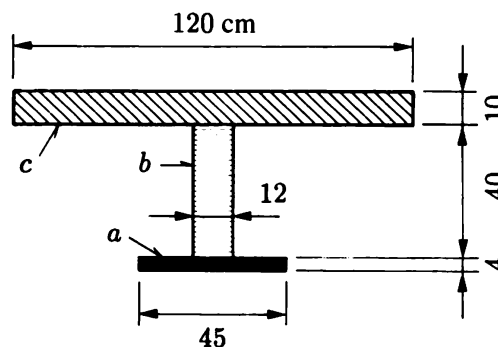


Fig. Ex. 11.5.17

On donne :

- matériau a : $E_a = 7\,000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu_a = 0,33$ (alliage d'aluminium) ;
- matériau b : $E_b = 1\,000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu_b = 0,45$ (bois) ;
- matériau c : $E_c = 2\,500 \text{ kN/cm}^2$; $\nu_c = 0,15$ (béton).

Calculer dans cette section droite :

- 1) $\sigma_{a \text{ inf}}$, $\sigma_{b \text{ inf}}$ et $\sigma_{c \text{ sup}}$ sous $M = 70\,000 \text{ kN}\cdot\text{cm}$ (fibres inférieures tendues) ; dessiner également le diagramme des contraintes normales ;
- 2) la plus grande contrainte tangentielle sous $V = 66 \text{ kN}$;
- 3) la plus grande contrainte tangentielle dans chacun des matériaux sous $T = 900 \text{ kN}\cdot\text{cm}$;
- 4) la position du centre de torsion.

11.6 Lexique

Sollicitation composée

Dans la section droite d'une poutre, action simultanée de deux à six efforts intérieurs.

Assemblage

- longitudinal
- transversal ou joint
- nœud

Liaison entre les éléments d'une structure ;

réalisation d'une grande section droite (pièce composée) ; dans une section droite, entre deux éléments de même axe ; entre éléments d'axes de directions différentes.

Moyens d'assemblage

Organes de liaison (boulons, soudure...).

Cisaillement direct
(brut, moyen...)

Mode de travail particulier propre à de nombreux assemblages ou moyens d'assemblage, où ces derniers sont sollicités suivant un ou plusieurs plans parallèles à l'effort transmis, plans selon lesquels peut se produire la rupture (du moyen d'assemblage ou de l'assemblage) par un cisaillement d'ensemble de la matière à la ruine. (Ne pas confondre le cisaillement direct avec le cisaillement pur.)

12. Principes des travaux virtuels et calcul des déplacements

12.1 Introduction

Les structures en barres et en poutres ne sont pas de véritables milieux continus ; bien que tridimensionnelles, les barres et poutres peuvent se traiter, en mécanique des structures, avec suffisamment de précision, en les réduisant à leur *axe*, donc comme des éléments à une seule dimension. Un treillis n'est finalement qu'un ensemble de points, les nœuds. Une structure en poutres peut souvent être considérée comme telle : tout est défini si l'on connaît, en chaque point de l'axe (= nœud), les efforts intérieurs, les déformations et les déplacements ; par exemple, les distributions continues des contraintes dans la section droite sont remplacées par les efforts intérieurs N , V , M , T ponctuels. Les forces extérieures elles-mêmes n'ont guère un caractère continu : le plus souvent, elles sont, ou peuvent être, concentrées. Enfin, les structures en barres et poutres admettent les *actions concentrées*, telles que force concentrée, réaction ponctuelle ou déplacement imposé en un nœud.

Treillis et poutres ont ce qu'on appelle un caractère *discret* : il suffit de connaître certaines grandeurs statiques ou cinématiques en un *nombre fini de nœuds* pour que les déplacements, déformations et contraintes soient entièrement déterminés en tous les points de la structure. Ce caractère discret permet, dans de nombreux cas, de simplifier considérablement les calculs d'un point de vue pratique ; c'est le cas, en particulier, pour le calcul des déplacements.

Dans ce chapitre et le suivant, où la clef de tout problème réside dans la notion de *travail*, les grandeurs tant extérieures qu'intérieures

- statiques d'une part, et
- cinématiques (ou géométriques) d'autre part,

doivent être choisies correctement en sorte que leur produit soit un travail. Elles sont alors dites *associées* (vol. 1, chap. 4). Cette corrélation est essentielle pour résoudre avec succès les problèmes, la notion de travail résolvant du même coup l'éternelle question des signes.

Les grandeurs extérieures sont ordinairement les forces concentrées (charges données, réactions extériorisées) et les déplacements des nœuds des treillis ou des points de l'axe des poutres ; à une force s'associe la translation de même direction, et à un moment la rotation de même axe.

Les grandeurs statiques internes sont les efforts intérieurs ; ils résultent d'une intégration sur l'aire de la section droite (principe d'équivalence), de sorte que l'intégrale de volume sur un élément $dV = dA dx$ de poutre se ramène à une intégrale simple sur l'axe de longueur L ; si X désigne un effort intérieur, on a

$$\int_V \dots dV = \int_L \dots \left(\int_A \dots dA \right) \dots dx = \int_L \dots (X) \dots dx \quad (12.1)$$

A ces efforts intérieurs s'associent les grandeurs cinématiques propres aux barres et poutres ; pour les éléments droits, elles sont rappelées au tableau 12.1.

Tableau 12.1

Contrainte (intensité)	↔	Effort intérieur ↔	Déplacement (u, v, θ, θ_x)	⇒	Déformation axe (section)
$\sigma = \frac{N}{A}$		N	$du = \varepsilon dx$		$\varepsilon = \frac{du}{dx}$ ($\varepsilon = \text{cste}$)
$\tau = \frac{VS}{It}$		V	$dv = \beta dx$		$\beta = \frac{dv}{dx}$ ($\Rightarrow \gamma$)
$\sigma = \frac{M}{I} y$		M	$d\theta = \psi dx^{(*)}$		$\psi = \frac{d\theta}{dx}$ ($\varepsilon = -\psi y$)
$\tau = \frac{T}{J} t, \frac{T}{2\Omega t}, \text{etc.}$		T	$d\theta_x = \chi dx$		$\chi = \frac{d\theta_x}{dx}$ ($\Rightarrow \gamma$)

(*) Voir remarque.

Remarque

Pour la courbure, on introduit une nouvelle notation :

$$\psi \equiv \frac{1}{r}$$

12.2 Forme du travail virtuel intérieur

Etudions, sur le cas simple de la poutre droite,

- ce que devient le travail virtuel intérieur de la mécanique des solides (vol. 3, chap. 7) ;
- l'interprétation physique correspondante.

Envisageons le travail virtuel complémentaire interne d'une poutre en flexion pure plane. Dans ce cas, l'expression

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV$$

se réduit à

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_V \varepsilon \delta \sigma dV$$

car l'état de contrainte et déformation est unidimensionnel en flexion pure ($\varepsilon \equiv \varepsilon_x, \sigma \equiv \sigma_x$).

Indépendamment de toute loi constitutive, la cinématique fournit, avec (5.2) et la nouvelle notation de la courbure (tableau 12.1),

$$\varepsilon = -\psi y$$

d'où, avec (12.1) et le principe d'équivalence,

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_L \int_A (-\psi y) \delta \sigma dA dx = \int_L \left(- \int_A \delta \sigma y dA \right) \psi dx = \int_L \delta M \psi dx \quad (12.2)$$

La quantité sous l'intégrale n'est rien d'autre que le travail virtuel (fig. 12.2)

- d'un moment δM sur la rotation $d\theta = \psi dx$ d'une face du petit élément par rapport à l'autre supposée fixe (fig. 12.2b) ; ou encore, ce qui est équivalent,
- de la paire de moments δM sur la rotation relative $d\theta = \psi dx$ des deux faces (fig. 12.2c).

Ainsi, on retrouve exactement

- l'interprétation physique propre au travail virtuel interne (vol. 3, sect. 7.6) ;
- l'association moment-rotation du tableau précédent.

On pourrait procéder de même avec tout autre effort intérieur ; par simplicité dans ce qui suit, on adopte le point de vue physique intuitif.

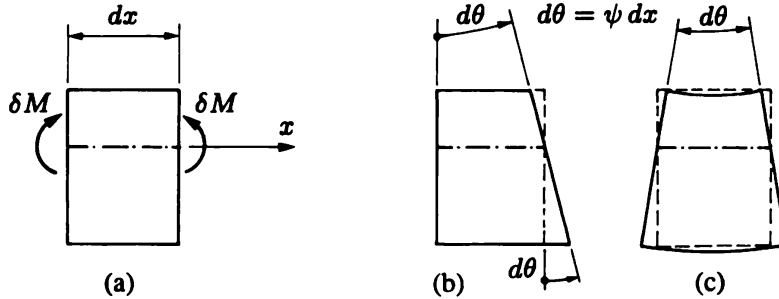


Fig. 12.2 Interprétation physique liée au travail interne : (a) statique virtuelle ; (b), (c) cinématique réelle.

12.3 Forme intégrale de l'équilibre ou principe des déplacements virtuels

Au vu de ce qui précède et à l'aide de la figure 12.3, le travail virtuel interne d'un élément de poutre s'écrit (cas plan)

$$d(\delta W_{\text{int}}) = N d\delta u + V d\delta v + M d\delta \theta \quad (12.3)$$

Avec la cinématique de la poutre droite (tableau 12.1), ce travail devient, pour toute la poutre,

- dans le plan

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (N \delta \varepsilon + V \delta \beta + M \delta \psi) dx \quad (12.4)$$

- dans l'espace

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (N \delta \varepsilon + V_y \delta \beta_y + V_z \delta \beta_z + T \delta \chi + M_y \delta \psi_y + M_z \delta \psi_z) dx \quad (12.5)$$

Le travail virtuel extérieur vaut

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum F \delta u_F + \sum R \delta u_R \quad (12.6)$$

- δu_F est le déplacement virtuel associé à la force F , et la première somme s'étend à toutes les charges extérieures ;
- δu_R est le déplacement virtuel associé à la réaction d'appui R , et la seconde somme s'étend à toutes les réactions d'appui extériorisées.

Enfin, la forme intégrale de l'équilibre s'écrit

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (12.7)$$

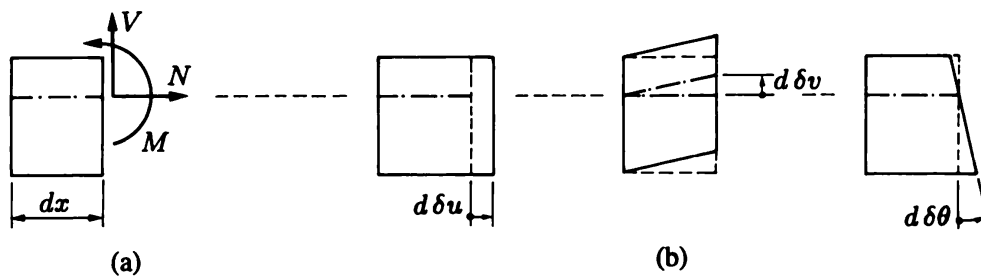


Fig. 12.3 Principe des déplacements virtuels (poutre) : (a) statique réelle ; (b) cinématique virtuelle.

12.4 Forme intégrale de la cinématique ou principe des forces virtuelles

Avec la figure 12.4 et en suivant la même démarche qu'à la section 12.3, on obtient, pour les travaux virtuels complémentaires,

- élément de poutre (fig. 12.4, cas plan)

$$d(\delta W_{\text{int}}^*) = \delta N du + \delta V dv + \delta M d\theta \quad (12.8)$$

- poutre droite (tableau 12.1), cas plan

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_L (\delta N \varepsilon + \delta V \beta + \delta M \psi) dx \quad (12.9)$$

- poutre droite, cas spatial

$$\delta W_{\text{int}}^* = \int_L (\delta N \varepsilon + \delta V_y \beta_y + \delta V_z \beta_z + \delta T \chi + \delta M_y \psi_y + \delta M_z \psi_z) dx \quad (12.10)$$

- travail externe

$$\delta W_{\text{ext}}^* = \sum \delta F u_F + \sum \delta R u_R \quad (12.11)$$

- forme intégrale de la cinématique

$$\delta W_{\text{int}}^* = \delta W_{\text{ext}}^* \quad (12.12)$$

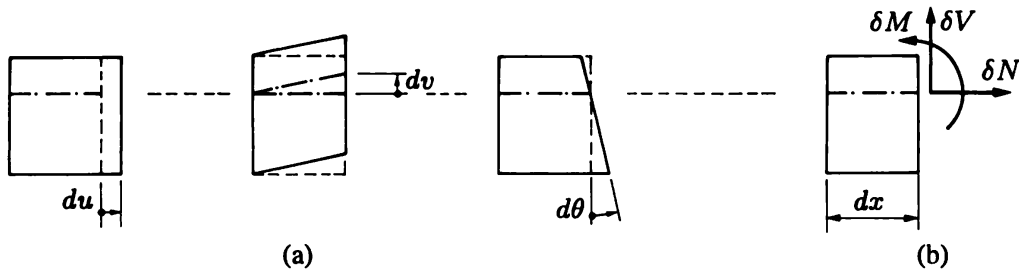


Fig. 12.4 Principe des forces virtuelles (poutre) : (a) cinématique réelle ; (b) statique virtuelle.

12.5 Remarques et rappels

S'il y a plusieurs poutres, il est entendu que l'intégrale sur L , dans δW_{int} et δW_{int}^* , s'étend à toutes les poutres. Si l'axe d'une poutre est courbe (dans les limites du paragraphe 2.7.7), l'intégrale porte sur l'axe curviligne de la poutre ($dx \mapsto ds$).

Aucune hypothèse relative au comportement du matériau n'a encore été introduite. Les relations précédentes s'appliquent quelle que soit la loi constitutive ; en particulier, la formule (12.4) est la relation de base du *calcul plastique des constructions* (chap. 16).

De plus, ces formules ne sont pas, malgré leur aspect, une conséquence du principe de superposition ! Le fait que les travaux correspondant à chaque effort intérieur s'ajoutent simplement provient de ce que, pour un certain déplacement donné, seul l'effort intérieur associé travaille, les autres ne fournissant aucun travail sur ce déplacement. Ainsi par exemple, pour du (fig. 12.4), seul δN travaille, δM et δV ne produisant aucun travail. Il n'intervient donc aucun terme de couplage et c'est la vraie raison pour laquelle les travaux intérieurs se réduisent aux expressions précédentes.

Le principe des déplacements virtuels exprime l'équilibre ; il s'utilise donc a priori pour déterminer le jeu des forces. Le principe des forces virtuelles exprime la compatibilité géométrique ; il s'utilise donc d'abord pour calculer des déplacements.

Dans le cas des *treillis*, le travail interne s'écrit simplement,

- pour le principe des déplacements virtuels (fig. 12.5a),

$$\delta W_{\text{int}} = \sum N \delta u \quad (12.13)$$

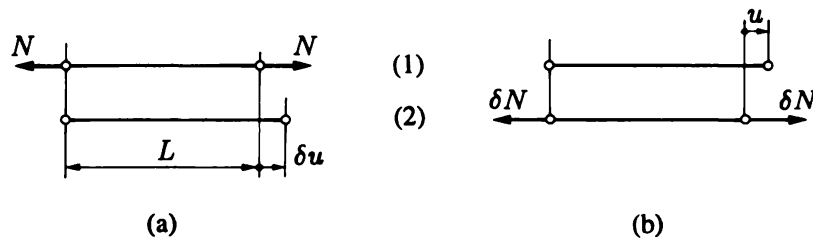


Fig. 12.5 Cas des treillis : (a) déplacements virtuels ; (b) forces virtuelles ; (1) état réel ; (2) état virtuel.

- pour le principe des forces virtuelles (fig. 12.5b),

$$\delta W_{\text{int}}^* = \sum \delta N u \quad (12.14)$$

où la somme \sum s'étend à toutes les barres.

Si les charges extérieures sont *réparties*, il suffit d'intégrer ; par exemple

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_L q \delta u_q dx \quad (12.15)$$

où le déplacement δu_q est associé, point par point, à la charge répartie q .

12.6 Théorème de la force unité

Considérons une structure déformable soumise à des actions diverses (forces extérieures, tassements d'appui, actions thermiques, retrait...). On désire résoudre le problème suivant (fig. 12.6) : *que vaut le déplacement u_A du point A de la structure, dans la direction donnée Δ_A ?*

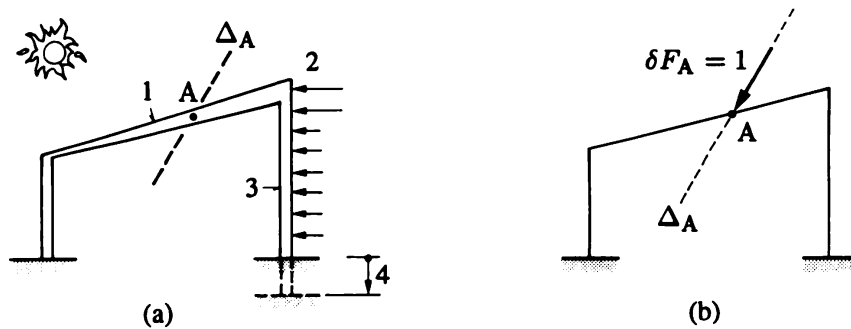


Fig. 12.6 Théorème de la force unité : (a) actions réelles produisant l'état cinématique réel (1 : gradient thermique ; 2 : vent ; 3 : matériau non linéaire ; 4 : tassement d'appui) ; (b) action virtuelle conduisant à l'état statique virtuel.

Pour répondre à cette question, appliquons le principe des forces virtuelles (12.9) en choisissant comme état statique virtuel celui résultant dans la structure d'une *seule force concentrée unité* $\delta F_A = 1$ appliquée au point A dans la direction Δ_A . En désignant par l'indice 1 les grandeurs relatives à cet état particulier, on obtient (cas plan)

$$1u_A = \int_L (N_1 \varepsilon + V_1 \beta + M_1 \psi) dx - \sum R_1 u_R \quad (12.16)$$

où

- N_1, V_1, M_1 et R_1 représentent un champ virtuel d'efforts intérieurs et de réactions, *en équilibre* avec l'unique force extérieure virtuelle 1 et produit par cette force (cf. encore § 12.9.2) ;
- ε, β et ψ caractérisent le champ de déformation *réel* de la structure, produit par les diverses actions ; les u_R sont les tassements d'appui (ces quantités étant généralement connues, on a mis le travail leur correspondant à droite du signe égal dans (12.16), bien que $\sum R_1 u_R$ soit un travail extérieur ou, plus exactement, *extériorisé*) ;

- le travail extérieur de la force unité est écrit $1u_A$ – et non simplement u_A – pour bien rappeler qu’il s’agit d’un travail (et, par suite, clarifier la question des signes et garantir la cohérence des unités).

L’équation (12.16) traduit le théorème suivant :

Théorème de la force unité : le déplacement d’un point d’une structure, dans une direction donnée, s’obtient en calculant, sous l’action d’une force virtuelle unité associée, le travail virtuel complémentaire interne de la structure, moins celui externe des réactions d’appui.

Ce théorème présente un intérêt exceptionnel en calcul des structures, car il résout, de manière générale, efficace, simple et élégante, le problème du *calcul des déplacements* des nœuds d’une ossature en barres et poutres. Sous sa forme (12.16) – que l’on généraliserait au cas spatial à l’aide de (12.10) – il est encore indépendant de toute loi constitutive du matériau.

Aucune des autres méthodes particulières développées pour le calcul des déplacements des nœuds des treillis et poutres⁽¹⁾ n’est supérieure au théorème de la force unité, dont la technique d’utilisation est illustrée ci-après dans le cas où le matériau obéit à la loi de Hooke.

12.7 Cas des matériaux élastiques linéaires

Si le matériau accepte la loi de Hooke, il existe une relation entre l’effort intérieur et sa déformation associée (tableau 12.1). Ces relations sont :

- cas plan (voir les formules (4.4), (10.13) et (5.6) avec, pour cette dernière, $\psi \equiv 1/r$)

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad \beta = \frac{V}{GB} \quad \psi = \frac{M}{EI}$$

- cas spatial (voir la formule (8.1) pour la torsion)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EA} & \beta_y &= \frac{V_y}{GB_y} & \beta_z &= \frac{V_z}{GB_z} \\ \chi &= \frac{T}{GJ} & \psi_y &= \frac{M_y}{EI_y} & \psi_z &= \frac{M_z}{EI_z} \end{aligned}$$

On peut alors introduire ces relations dans les équations des sections 12.3 et 12.4 pour exprimer ces équations en fonction des seules grandeurs statiques ou cinématiques ; ces transformations ne présentent guère d’intérêt.

⁽¹⁾ Il est donc inutile de s’encombrer l’esprit de méthodes telles que *poutre auxiliaire, méthode de Mohr, méthode de Williot, équation de l’élastique, méthode des charges fictives, théorèmes de Castigliano et d’Engesser*, etc.

12.8 Calcul des déplacements

12.8.1 Calcul de tout déplacement

Un quelconque déplacement s'obtenant par (12.16), développons quelque peu cette formule pour les cas les plus courants, dans le cadre des structures planes en barres et poutres à matériau élastique linéaire.

L'état de déformation réel est produit par des efforts intérieurs

Dans ce cas, on peut remplacer les déformations ε , β et ψ par les relations de la section 12.7. On obtient la *forme statique*⁽²⁾

$$1u_A = \int_L N_1 \frac{N dx}{EA} + \int_L V_1 \frac{V dx}{GB} + \int_L M_1 \frac{M dx}{EI} \quad (12.17)$$

Cette relation est plus agréable que (12.16), car les diagrammes des efforts intérieurs *réels* N , V et M sont ordinairement aisés à déterminer.

L'état cinématique réel résulte des seules déformations thermiques

Si un petit tronçon de poutre est soumis à une variation *uniforme* de température T_0 (fig. 12.7), le seul déplacement produit est la variation de longueur (sect. 4.8)

$$du = \alpha T_0 dx$$

où α est le coefficient de dilatation thermique. Il en résulte la dilatation thermique (4.36)

$$\varepsilon = \alpha T_0$$

Par suite,

$$1u_A = \int_L N_1 \alpha T_0 dx \quad (12.18)$$

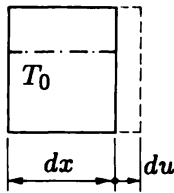


Fig. 12.7
Variation uniforme
de température.

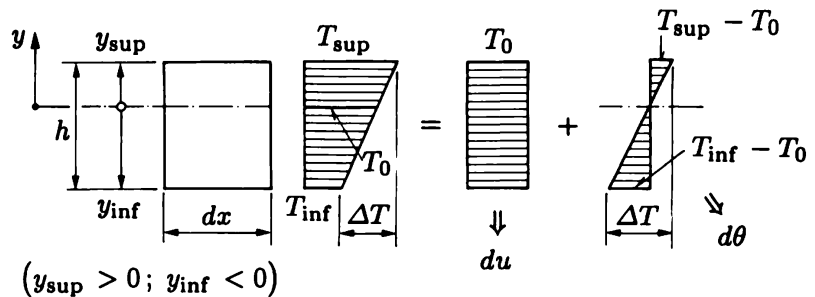


Fig. 12.8 Gradient thermique constant sur la hauteur de poutre h .

⁽²⁾ Malgré son aspect purement statique, (12.17) contient toujours le produit (travail) d'une grandeur *statique virtuelle* (par exemple N_1) par une grandeur *cinématique réelle* (par exemple $N dx/E A = du$); on ne perdra jamais de vue ce fait essentiel.

Si un petit tronçon de poutre est soumis à une variation *linéaire* de la température sur sa hauteur h (T_{sup} à la fibre supérieure, T_{inf} à l'inférieure), il se déforme en trapèze (comme en flexion composée plane), de sorte que, par superposition (fig. 12.8),

$$du = \alpha T_0 dx \quad d\theta = \frac{-\alpha \Delta T dx}{h}$$

avec

$$T_0 = \frac{y_{\text{sup}} T_{\text{inf}} - y_{\text{inf}} T_{\text{sup}}}{h} \quad \Delta T = T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}}$$

où T_0 est la variation de température à l'axe de la poutre. Il en résulte la dilatation thermique (4.36) et la courbure thermique (ex. 10.4.5)

$$\varepsilon = \alpha T_0 \quad \psi = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha \Delta T}{h}$$

Par suite,

$$1u_A = \int_L N_1 \alpha T_0 dx + \int_L M_1 \left(-\frac{\alpha \Delta T}{h} \right) dx \quad (12.19)$$

On traite de la même manière le retrait (béton).

Cas général

L'état géométrique réel dépend en général de plusieurs causes simultanées ; par exemple, dans les structures hyperstatiques, les effets thermiques et les tassements d'appui provoquent aussi des efforts intérieurs et réactions d'appui. Par conséquent, la formule complète est

$$1u_A = \int_L \frac{N_1 N}{EA} dx + \int_L \frac{V_1 V}{GB} dx + \int_L \frac{M_1 M}{EI} dx \\ + \int_L N_1 \alpha T_0 dx + \int_L M_1 \left(-\frac{\alpha \Delta T}{h} \right) dx - \sum R_1 u_R \quad (12.20)$$

Treillis

Dans une barre de treillis, toutes les grandeurs sont constantes (N , N_1 , E , A) et, par suite, (12.20) s'écrit

$$1u_A = \sum_b \frac{N_1 N L}{EA} + \sum_b N_1 \alpha T_0 L - \sum_r R_1 u_R \quad (12.21)$$

où les deux premières sommes s'étendent à toutes les barres composant le treillis et la troisième à toutes les réactions d'appui. Pour les treillis, il faut disposer les calculs en tableau.

Corollaires

Les mots *force* et *déplacement* peuvent prendre ici un sens *généralisé* (tel qu'il a déjà été esquissé au chapitre 11 du volume 1), c'est-à-dire que :

- pour connaître la variation de distance entre deux points A et B d'une structure (fig. 12.9a), on adopte comme état virtuel deux forces unités de sens opposés, ayant AB comme support ;

- on obtient la rotation d'une *section* en appliquant un *moment unité* dans la section considérée⁽³⁾ (fig. 12.9b);
- on obtient la rotation relative de deux sections en utilisant comme état statique virtuel deux moments unités de sens opposés, appliqués dans les sections considérées (fig. 12.9c);
- on trouve la rotation en bloc d'une barre de treillis de longueur d en appliquant un couple unité sur cette barre, à l'aide de deux forces $1/d$ agissant normalement à la barre sur ses nœuds (fig. 12.9d).

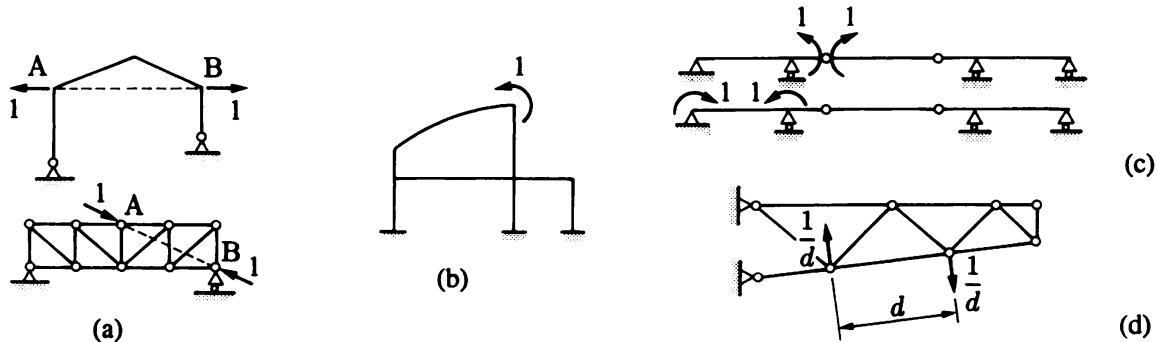


Fig. 12.9 Comment placer l'action virtuelle unité pour calculer les déplacements.

Remarques

On observe que, bien souvent, la loi constitutive a pour seul effet de permettre de développer jusqu'au bout les formules. Par conséquent, l'essentiel des idées données ci-dessus s'applique aussi si le matériau n'est pas du type Hooke.

De même, on généralise aisément les formules au cas tridimensionnel.

12.8.2 Calcul pratique des déplacements

En pratique, les déplacements se calculent de façon très efficace grâce aux particularités suivantes.

Hypothèses simplificatrices

Dans le cas des poutres essentiellement fléchies, on néglige toujours les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal, sauf pour certaines structures à caractère spécial (arcs très surbaissés par exemple). Dans les pièces telles que tirants, tendeurs, suspentes... qui sont du type barre de treillis, et qu'on trouve fréquemment incorporées dans des structures en poutres (toitures haubanées, ponts bowstring, etc.), *il ne faut évidemment pas négliger l'effet de l'effort normal*.

Dans ces conditions, en ne tenant compte que des effets statiques par simplicité d'écriture, l'expression (12.20) se réduit à

$$1u_A = \int_L \frac{M_1 M}{EI} dx \quad (12.22)$$

Dans le cas des structures spatiales, il faut tenir compte des deux moments de flexion, du moment de torsion et, éventuellement, de l'effort normal.

⁽³⁾ Si l'on tient compte de l'effort tranchant V , on prendra garde au fait que la rotation de la section, issue de (12.20), diffère de celle de l'axe de la poutre, d'une quantité égale à l'angle de glissement moyen $\beta(1) = V(1)/GB$ de l'endroit (1) où agit le moment unité. On a donc (respecter les signes) : $\theta(\text{axe}) = \theta(\text{section}) + \beta(1)$.

Ces chers signes !

L'intégrale (12.22) faisant intervenir le produit de deux moments fléchissants est indépendante de la convention de signe adoptée, car, si l'on inverse cette convention, les deux termes du produit changent simultanément de signe. Seul compte le signe *relatif* des moments M et M_1 .

Il est donc peu utile de donner un signe positif ou négatif aux moments : il suffit de pouvoir discerner les moments de même sens et ceux de sens opposé. A cet effet, la convention du papillon (Ψ , \curvearrowright) ou de la fibre tendue est entièrement satisfaisante. Une intégrale $\int_L (M_1 M / EI) dx$ relative à un tronçon de poutre est positive quand M et M_1 sont de même sens dans ce tronçon, négative dans le cas contraire.

La situation est d'ailleurs identique pour toute intégrale du même type, faisant intervenir un quelconque effort intérieur.

Calcul des intégrales

Le plus souvent, les moments d'inertie et modules d'élasticité sont constants dans les diverses poutres composant une structure, ou constants par tronçon le long de ces poutres. Le long d'un tronçon de longueur a où EI est constant, le second membre de (12.22) s'écrit

$$\frac{1}{EI} \int_0^a M_1 M dx \quad (12.23)$$

Il est alors possible de dresser des tableaux donnant les valeurs toutes calculées des intégrales $\int_0^a M_1 M dx$, pour les formes courantes des diagrammes des moments (constant, linéaire, parabolique). De tels tableaux sont donnés à l'annexe 23.2. Il est clair qu'ils s'appliquent aussi aux autres efforts intérieurs, car M et M_1 dans (12.23) peuvent être considérés comme des fonctions sans signification physique.

Dans les autres cas (par exemple : I variable), il faut procéder par une intégration numérique (vol. 1, chap. 13), *ce qui est toujours préférable à une intégration analytique*.

Exemple 12.1

Calculer la flèche v et l'angle de rotation θ à l'extrémité libre d'une console uniformément chargée (négliger l'effet de V).

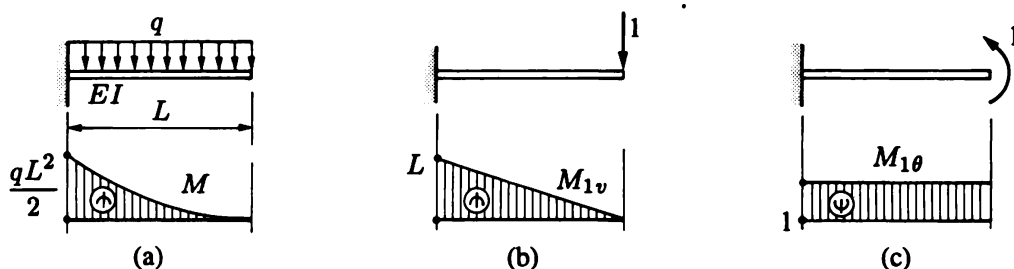


Fig. 12.10 Application du théorème de la force unitée : (a) cinématique réelle (caractérisée par M et $EI = \text{cste}$); (b) statique virtuelle pour calculer v ; (c) statique virtuelle pour calculer θ .

La figure 12.10 montre les diagrammes des moments nécessaires. On en tire

$$1v = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{1v} M dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} \right) (L) \left(\frac{qL^2}{2} \right) (L) = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$1\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{1\theta} M dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \right) (1) \left(\frac{qL^2}{2} \right) (L) = -\frac{qL^3}{6EI}$$

La flèche v se produit dans le sens de la force unité (signe +, vers le bas), l'angle θ dans le sens contraire au moment unité (signe -, sens horlogique), ce qui est ici évident.

12.9 Structures hyperstatiques

12.9.1 Résolution des structures hyperstatiques

Le théorème de la force unité permet de résoudre toute structure hyperstatique, puisqu'il fournit la solution au problème du calcul des déplacements.

Soit Ω_{hyp} une structure hyperstatique de degré h et Ω_0 une structure isostatique déduite de Ω_{hyp} en y pratiquant h coupures simples (vol. 1, chap. 11). Appelons X_i , $i = 1, \dots, h$, les h forces extériorisées au droit des coupures (réactions d'appui, paires d'efforts intérieurs). Désignons par u_i , $i = 1, \dots, h$, les h déplacements relatifs des faces des coupures simples; on sait les calculer par le théorème de la force unité.

Or ils doivent être nuls dans la structure Ω_{hyp} . Par suite, les h équations

$$1u_i = 0 \quad (i = 1, \dots, h) \quad (12.24)$$

résolvent la structure hyperstatique en fournissant les h inconnues X_i .

Si le matériau est élastique linéaire, ces équations sont linéaires.

Exemple 12.2

Pour résoudre la poutre encastree-appuyée de la figure 12.11(a), qui est une fois hyperstatique, adoptons comme coupure simple la suppression de la liaison verticale en A, ce qui produit une poutre console comme structure isostatique; l'inconnue hyperstatique est donc la réaction d'appui X en A (fig. 12.11b). Calculons le déplacement vertical en A à l'aide d'une force virtuelle unité (fig. 12.11c). On a

$$M(x) = Xx - \frac{qx^2}{2} \quad M_1(x) = -1x$$

d'où, dans (12.22), avec (12.24) et une loi constitutive de Hooke,

$$1v_A = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 M dx = \frac{1}{EI} \int_0^L (-x) \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left(-X \frac{L^3}{3} + q \frac{L^4}{8} \right) = 0$$

On en tire $X = 3qL/8$.

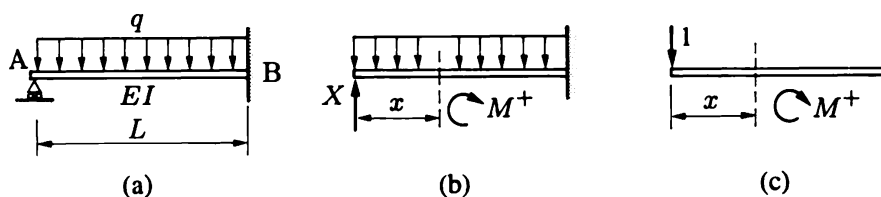


Fig. 12.11 Résolution d'une poutre hyperstatique par le théorème de la force unité ($EI = \text{cste}$).

12.9.2 Calcul des déplacements

Evidemment, le théorème de la force unité permet aussi de calculer les déplacements des nœuds des structures hyperstatiques. Toute la puissance et l'élégance de ce théorème apparaissent ici, car, rappelons-le, *il suffit que l'état statique virtuel soit en équilibre*. Par suite, on peut faire agir la force virtuelle (généralisée) unité dans n'importe quelle structure *déduite de la structure hyperstatique donnée en y pratiquant k coupures simples, avec $0 \leq k \leq h$* . Bien entendu, *on choisira toujours une structure isostatique*. Or par un choix judicieux, on peut réduire considérablement le volume des calculs ; *l'important est donc de choisir habilement la structure isostatique de l'état virtuel*. Cette structure n'est pas nécessairement la même que celle utilisée pour résoudre l'hyperstaticité et elle peut très bien varier d'un calcul de déplacement à l'autre.

En désignant par M_{10} et N_{10} les moments et efforts normaux virtuels dans ce cas, le théorème de la force unité s'écrit (matériau élastique linéaire),

- pour les poutres,

$$1u_A = \int_L \frac{M_{10}M}{EI} dx \quad (12.25)$$

- pour les treillis,

$$1u_A = \sum \frac{N_{10}NL}{EA} \quad (12.26)$$

Ces relations sont aussi connues sous l'appellation de *premier théorème de réduction*.

Exemple 12.3

On désire calculer la flèche v au milieu de la travée non chargée de la poutre de la figure 12.12(a).

Cette poutre continue sur trois appuis est hyperstatique de degré 1. On suppose ce problème résolu ; le diagramme M (caractérisant l'état cinématique réel $\psi = M/EI$) est donné à la figure 12.12(a).

On obtient un état statique virtuel M_1 simple et avantageux en choisissant comme structure isostatique celle déduite de la structure hyperstatique en y pratiquant une coupure simple relative au moment sur l'appui B (fig. 12.12b). D'où

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \left(\frac{qL^2}{16} \right) (L) = -\frac{qL^4}{256 EI}$$

et la flèche se produit vers le haut (signe $-$).

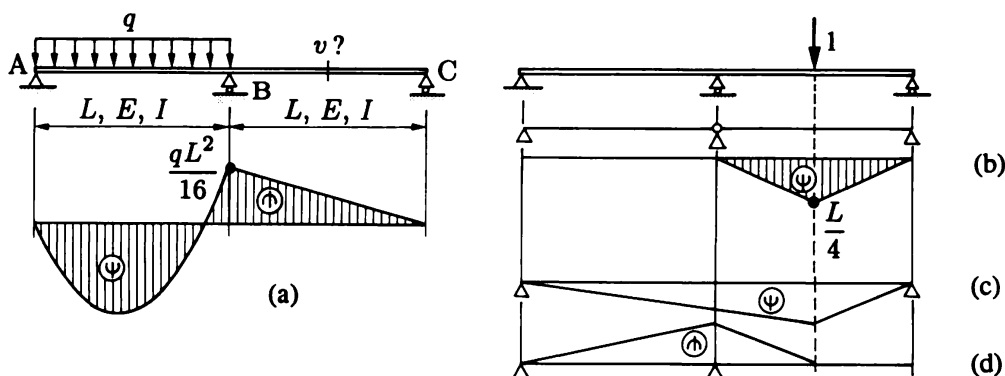


Fig. 12.12 Calcul d'une flèche d'une poutre continue par le théorème de la force unité : (a) poutre et son diagramme des moments réels ; (b) diagramme des moments virtuels ; (c), (d) autres diagrammes virtuels possibles.

Les états virtuels possibles des figures 12.12(c) et 12.12(d) sont visiblement mal choisis. Mais on pourrait vérifier qu'ils conduisent au même résultat.

Remarques

Lorsqu'on a résolu une structure hyperstatique en négligeant l'effet de certains efforts intérieurs, on doit aussi négliger l'effet de ces mêmes efforts lors du calcul des déplacements par le théorème de la force unité. Il serait donc faux, et c'est une erreur classique, de penser pouvoir évaluer l'influence qu'a l'effort tranchant sur le calcul d'une flèche d'une structure hyperstatique résolue en négligeant les déformations d'effort tranchant.

Dans le *second théorème de réduction*, la cinématique peut être calculée dans une structure isostatique quelconque ($\Rightarrow M_0$ et N_0), si la statique virtuelle est alors calculée dans la structure hyperstatique réelle ($\Rightarrow M_1$ et N_1); d'où

- poutres

$$1u_A = \int_L \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

- treillis

$$1u_A = \sum \frac{N_1 N_0 L}{EA}$$

La démonstration est laissée au lecteur.

12.10 Exercices

Remarque

Dans ces exercices, le comportement constitutif des structures est admis élastique linéaire ; sauf contre-indication, on néglige les déformations dues à l'effort normal N et à l'effort tranchant V dans les poutres.

12.10.1 On considère un tronçon L de poutre droite dans lequel, pour simplifier, on ne tient pas compte de l'effet de l'effort tranchant. A partir des deux équations d'équilibre suivantes, exprimant l'équilibre différentiel d'un élément de poutre (vol. 1, § 9.2.1),

$$N' + n(x) = 0 \quad M'' - q(x) = 0$$

trouver les expressions de l'équilibre intégral ; utiliser dans ce but l'intégration par parties (vol. 3, sect. 7.4) et traiter successivement N puis M . Interpréter cet équilibre sous forme de principe des déplacements virtuels et comparer avec les expressions des sections 12.3 et 12.5.

12.10.2 Dans la poutre cantilever ABCD, calculer (littéral)

- 1) la flèche de l'articulation B ;
- 2) la rotation au point B de la poutre BCD.

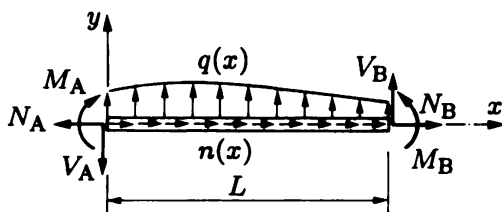


Fig. Ex. 12.10.1

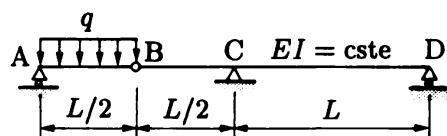


Fig. Ex. 12.10.2

12.10.3 Une structure plane ABCD est soumise en B à l'action d'une force F . Calculer tous les déplacements du point D (littéral).

12.10.4 Un portique à trois articulations en acier est soumis à une charge uniforme $q = 10 \text{ kN/m}$. On donne $I = 3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$. Calculer le déplacement horizontal de la traverse BC.

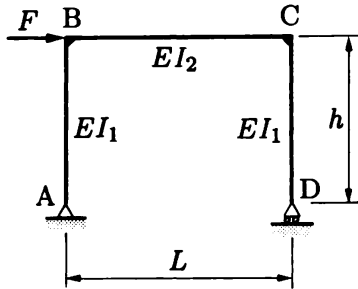


Fig. Ex. 12.10.3

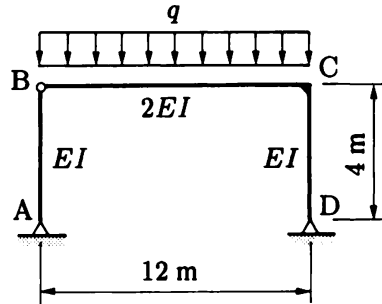


Fig. Ex. 12.10.4

12.10.5 Un treillis formé de deux barres ($A = 1,5 \text{ cm}^2$) en acier ($E = 20\,500 \text{ kN/cm}^2$) supporte une charge verticale F . Calculer les composantes du déplacement du nœud C.

12.10.6 Une poutre en acier ($E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$; $I = 2 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$) est haubanée par un câble ($E_c = 16\,000 \text{ kN/cm}^2$; $A_c = 100 \text{ cm}^2$).

- 1) Calculer la flèche au point B d'attache du câble avec la poutre et à l'extrémité C du porte-à-faux; dessiner l'allure de la configuration déformée.
- 2) Calculer la flèche supplémentaire produite au point B par l'action de l'effort normal dans la poutre ($A = 2\,000 \text{ cm}^2$).

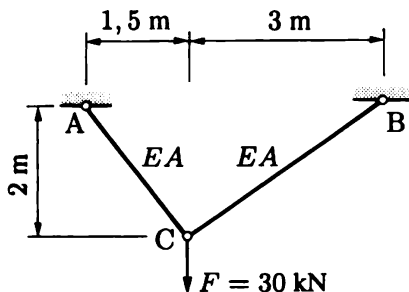


Fig. Ex. 12.10.5

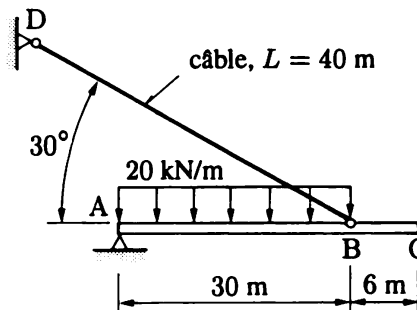


Fig. Ex. 12.10.6

12.10.7 Déterminer les composantes du déplacement de l'articulation C de la structure ACB dû au déplacement horizontal $\bar{u} = 5 \text{ cm}$ de l'appui B.

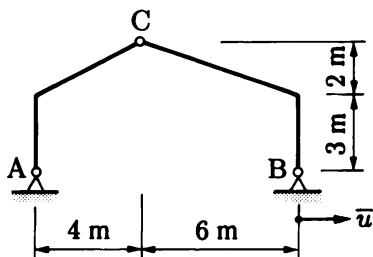


Fig. Ex. 12.10.7

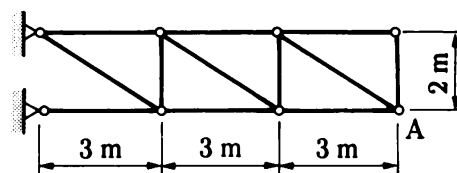


Fig. Ex. 12.10.8

12.10.8 Calculer les composantes du déplacement du nœud A d'une console réticulée en acier, suite à un échauffement de 40°C de la seule membrure supérieure.

12.10.9 La traverse BC d'une structure ABC faite de deux laminés IPE est soumise, en chaque section droite, à une augmentation de température variant linéairement, de 0°C à la fibre inférieure à 40°C à la fibre supérieure. Calculer le déplacement horizontal du rouleau C.

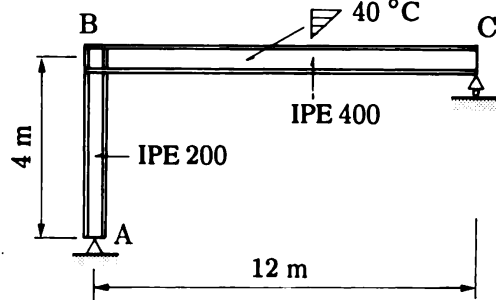


Fig. Ex. 12.10.9

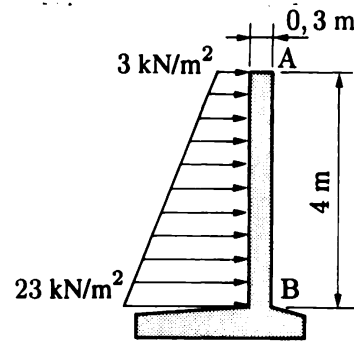


Fig. Ex. 12.10.10

12.10.10 Calculer la flèche en A d'un mur de soutènement en béton armé en admettant

- un comportement élastique linéaire du béton armé ($E = 2000 \text{ kN/cm}^2$),
- une poussée des terres variant linéairement,
- un encastrement à la base B du mur.

12.10.11 Un treillis en acier est soumis à une force concentrée verticale $F = 120 \text{ kN}$ au nœud C. Calculer la flèche verticale en ce nœud. Le tableau fournit, pour l'ensemble des barres, la longueur L , l'aire A de la section droite et l'effort normal N sous la charge F .

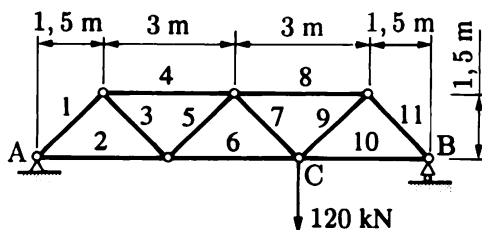


Fig. Ex. 12.10.11

Barre i	L [m]	A [mm ²]	N [kN]
1	2,12	2 285	-56,57
2	3,00	2 285	40,00
3	2,12	2 285	56,57
4	3,00	3 110	-80,00
5	2,12	1 550	-56,57
6	3,00	2 285	120,00
7	2,12	1 550	56,57
8	3,00	3 110	-160,00
9	2,12	2 285	113,14
10	3,00	2 285	80,00
11	2,12	2 285	-113,14

12.10.12 Calculer la flèche à l'extrémité libre de la console coudée de l'exercice 11.5.1.

12.10.13 Une console, coudée en forme de U et placée dans un plan horizontal, est soumise à une charge uniforme verticale agissant sur le tronçon AB. Cette console est constituée d'un fer rond en acier de diamètre 1,3 cm. Le poids propre est négligé.

- 1) Calculer le déplacement vertical w_A du point A.
- 2) Calculer la rotation θ_{yB} au point B du tronçon BC et autour de l'axe y .

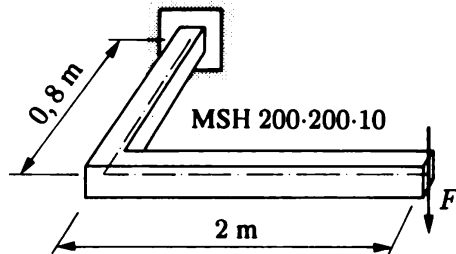


Fig. Ex. 12.10.12

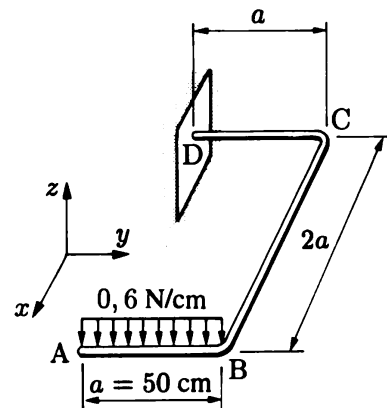


Fig. Ex. 12.10.13

12.10.14 Trouver le déplacement vertical à la clef d'une poutre en arc de cercle ACB, sous l'action d'une force concentrée horizontale en B (littéral).

12.10.15 Déterminer la flèche v aux extrémités A et A' du ressort ABCB'A' (littéral).

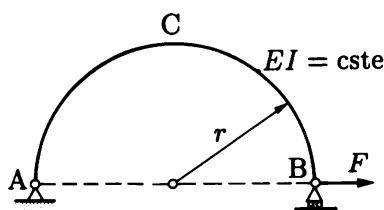


Fig. Ex. 12.10.14

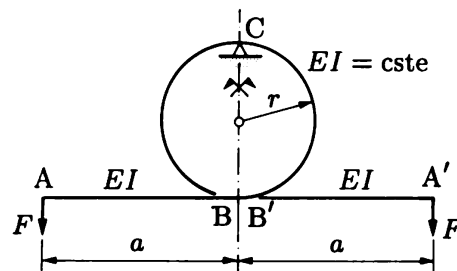


Fig. Ex. 12.10.15

12.10.16 La flèche admissible d'une poutre en chêne de section rectangulaire ($b = 10$ cm, $h = 15$ cm) est limitée à 1 cm. Calculer l'intensité maximale de la charge q .

12.10.17 La longueur totale L d'une poutre prismatique ABCD étant constante, déterminer l'entredistance b des appuis telle que la flèche au centre soit maximale (littéral).

12.10.18 Calculer la valeur de la force X qu'il faut appliquer au point B pour que le déplacement de translation de ce point soit nul (littéral).

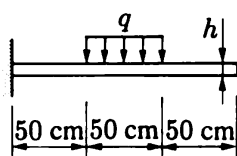


Fig. Ex. 12.10.16

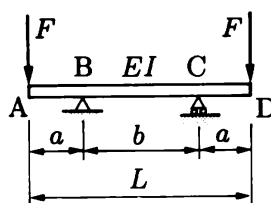


Fig. Ex. 12.10.17

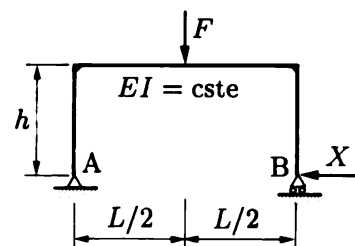


Fig. Ex. 12.10.18

12.10.19 Une poutre AE en bois (sapin) comporte une partie renforcée sur l'appui C. On donne $I = 20\,000\text{ cm}^4$. Calculer la flèche sous la charge Q .

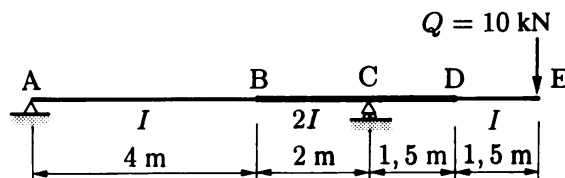


Fig. Ex. 12.10.19

12.10.20 Connaissant le diagramme des moments M d'une poutre prismatique hyperstatique ($E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $I = 17\,000\text{ cm}^4$), calculer la flèche en A et la rotation à l'appui B.

12.10.21 On connaît le diagramme des moments M d'un cadre bi-encasté, soumis à une charge concentrée F . Calculer

- 1) le déplacement horizontal de la traverse ;
- 2) la flèche en A.

On donne $I_t = 180\,000\text{ cm}^4$, $I_m = 60\,000\text{ cm}^4$ et $E = 2\,000\text{ kN/cm}^2$.

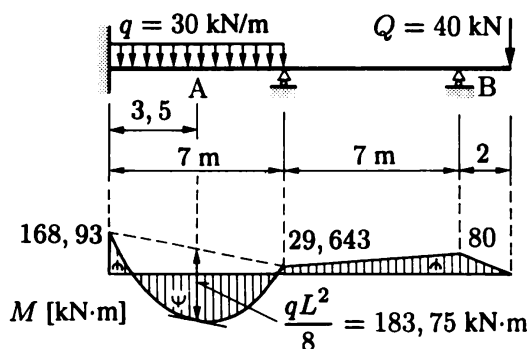


Fig. Ex. 12.10.20

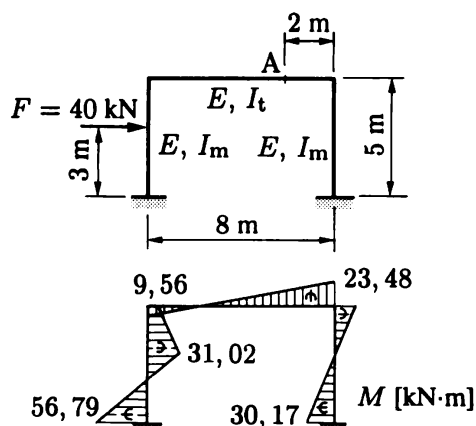


Fig. Ex. 12.10.21

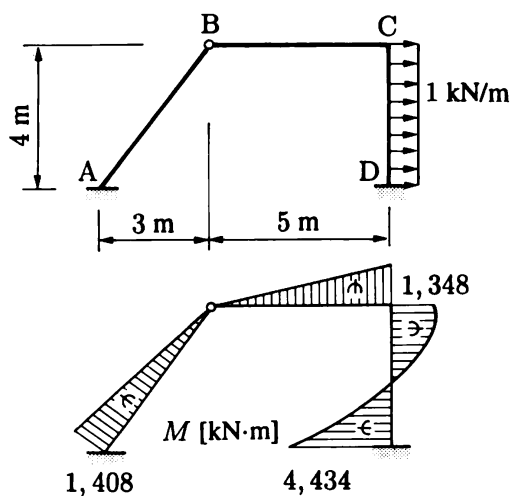


Fig. Ex. 11.10.22

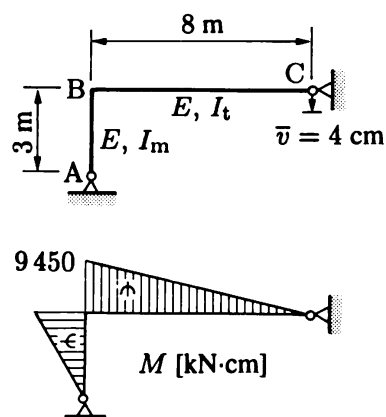


Fig. Ex. 12.10.23

12.10.22 Le diagramme des moments M d'une structure plane ABCD est connu. Calculer le déplacement horizontal du nœud C et la rotation de la traverse BC en B ($EI = \text{cste} = 4\,074 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$). Esquisser l'allure de la déformée.

12.10.23 Un semi-portique ABC est soumis à un tassement vertical \bar{v} de 4 cm de l'appui C. Il en résulte le diagramme des moments M . Calculer la flèche au milieu de BC. On donne $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $I_t = 48\,000 \text{ cm}^4$ et $I_m = 18\,000 \text{ cm}^4$.

12.10.24 Une poutre simple âme-semelles en acier, à âme très mince, a été testée en laboratoire, sous une charge uniforme q croissante, jusqu'à ruine. Calculer la flèche au quart de la portée ($L = 810 \text{ cm}$) pour $q = 0,1 \text{ kN/cm}$, en tenant compte de l'effort tranchant. A partir de ce résultat, reporter la droite traduisant le comportement linéaire sur le graphique des courbes flèche-charge expérimentales. (Tiré de Frey F., Anslijn R., *Dimensionnement des poutres à âme pleine sans raidisseurs*, Rapport MT 114, CRIF, Bruxelles, 1976.)

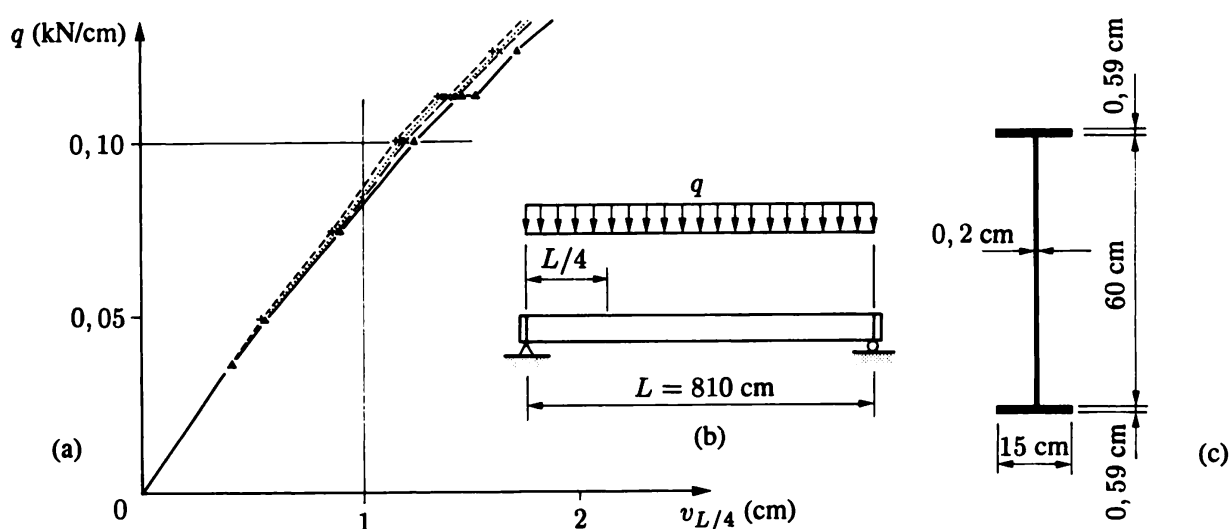


Fig. Ex. 12.10.24 Poutre à âme mince : (a) courbes expérimentales ; (b) élévation ; (c) section droite.

12.10.25 Une poutre à hauteur variable, en bois lamellé collé et de section rectangulaire, est soumise à une charge uniformément répartie q . Calculer la flèche au centre de la poutre

- 1) sous l'effet de la flexion ;
- 2) sous l'effet de l'effort tranchant ; que penser de la valeur de ce calcul ?

On donne $E = 1\,100 \text{ kN/cm}^2$ et $G = 50 \text{ kN/cm}^2$.

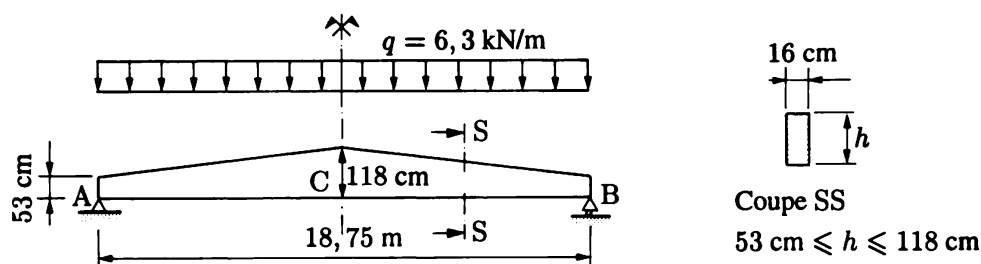


Fig. Ex. 12.10.25

12.10.26 Une pièce, en alliage d'aluminium 7020 (Al Mg Zn1), est chargée à son extrémité libre d'une force axiale centrée F . Sur la moitié de sa longueur, cette pièce a une section réduite d'un tiers (coupe bb).

- 1) Calculer l'effort F maximal que cette pièce peut supporter sans se plastifier.
- 2) Calculer le déplacement transversal de l'extrémité libre.

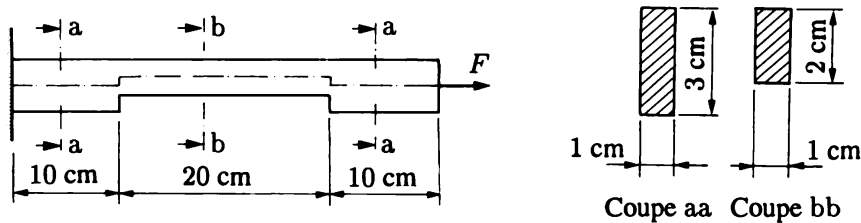


Fig. Ex. 12.10.26

12.10.27 Trois barres en acier, de section droite de même aire $A = 2 \text{ cm}^2$, forment un treillis supportant une charge $Q = 100 \text{ kN}$. Calculer l'effort normal dans chaque barre et le déplacement vertical du nœud D.

12.10.28 Calculer les réactions d'appui de la poutre en demi-cercle, formant arc bi-articulé et portant une force concentrée F en clef (littéral).

12.10.29 Deux poutres identiques forment une structure composée. Calculer la force de liaison en B (littéral).

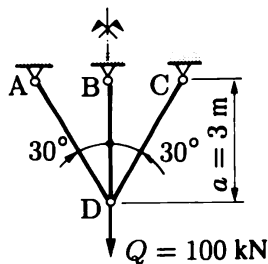


Fig. Ex. 12.10.27

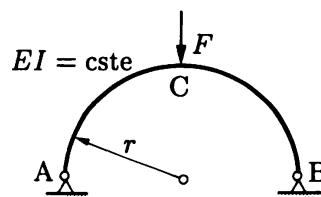


Fig. Ex. 12.10.28

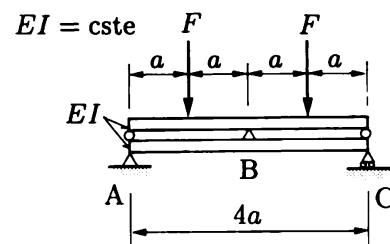


Fig. Ex. 12.10.29

12.11 Lexique

Grandeurs cinématiques
(ou géométriques)

Flèches, pentes, déplacements, angles de rotation, déformations, glissements, dilatations, courbures, tassements d'appui, retrait...

Grandeurs statiques

Forces, contraintes, charges réparties, réactions d'appui, efforts intérieurs, forces d'inertie, efforts tranchants, moments...

Deux de ces grandeurs, l'une statique et l'autre cinématique, sont dites associées si leur produit peut être utilisé pour représenter un travail ; elles doivent donc agir au même point et dans la même direction.

Principes des travaux virtuels pour les poutres (cas plan) :

- équilibre intégral ou déplacements virtuels

$$\int_L (N \delta \varepsilon + M \delta \psi + V \delta \beta) dx = \sum F \delta u_F + \sum R \delta u_R$$

- cinématique intégrale ou forces virtuelles

$$\int_L (\delta N \varepsilon + \delta M \psi + \delta V \beta) dx = \sum \delta F u_F + \sum \delta R u_R$$

Théorème de la force unité (u_A = déplacement cherché au nœud A) :

- formule de base

$$1u_A = \int_L (N_1 \varepsilon + V_1 \beta + M_1 \psi) dx - \sum R_1 u_R$$

$\varepsilon, \beta, \psi, u_R$: état cinématique réel, compatible et connu,

$1, N_1, V_1, M_1, R_1$: état statique virtuel, en équilibre ;

- forme classique (loi de Hooke valable)

$$1u_A = \int_L \frac{M_1 M}{EI} dx \quad (\text{poutres}) \qquad 1u_A = \sum \frac{N_1 N L}{EA} \quad (\text{treillis})$$

- premier théorème de réduction (structures hyperstatiques)

$$1u_A = \int_L \frac{M_{10} M}{EI} dx \quad (\text{poutres}) \qquad 1u_A = \sum \frac{N_{10} N L}{EA} \quad (\text{treillis})$$

13. Energie

13.1 Introduction

Dans ce chapitre, on établit d'abord la forme que prend l'énergie dans le cas des treillis et poutres à matériau élastique linéaire. Puis on donne la forme discrétisée des théorèmes de stationnarité et on rappelle pour mémoire l'existence des théorèmes énergétiques propres à l'analyse des structures. Enfin, on introduit la méthode de Rayleigh-Ritz qui, appliquée à l'énergie, permet une résolution approchée des structures.

Par souci de simplicité, on n'envisage, dans le matériau, que les efforts intérieurs et leurs déformations associées et, à l'extérieur, que les forces concentrées et leurs déplacements associés. On suppose également connues les notions d'énergie propres à la mécanique des solides (vol. 3, chap. 4, 7 et 8).

13.2 Expression de l'énergie

13.2.1 Energie de déformation

L'énergie potentielle de déformation⁽¹⁾ U est donnée par le *théorème de Clapeyron intérieur* (vol. 3, sect. 4.6)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (13.1)$$

Appliquons à nouveau cette formule au cas de la flexion pure plane d'une poutre (sect. 12.2) ; on a

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV$$

et, avec $\sigma = E\varepsilon$ et $\varepsilon = -\psi y$, il vient (forme cinématique, typique de l'énergie potentielle)

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A (-E\psi y)(-\psi y) dA dx = \frac{1}{2} \int_L E\psi^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_L EI\psi^2 dx \quad (13.2)$$

⁽¹⁾ Pour un matériau élastique linéaire, l'énergie complémentaire U^* a la même valeur.

Pour les poutres droites on écrit volontiers, avec (10.4) $\psi = d^2v/dx^2 = v''$,

$$U = \frac{1}{2} \int_L EI(v'')^2 dx \quad (13.3)$$

Avec cette fois $\varepsilon = \sigma/E$, puis $\sigma = -My/I$, on obtient (forme statique, généralement réservée à l'énergie complémentaire U^*)

$$U = U^* = \frac{1}{2} \int_L \int_A \sigma \frac{\sigma}{E} dA dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} dx \quad (13.4)$$

En procédant semblablement avec les autres effets statiques ou cinématiques dont une *poutre* peut être le siège, on obtient les formules suivantes :

- cas plan, forme cinématique

$$U = \frac{1}{2} \int_L (EA\varepsilon^2 + GB\beta^2 + EI\psi^2) dx \quad (13.5)$$

- cas plan, forme statique

$$U (= U^*) = \frac{1}{2} \int_L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V^2}{GB} + \frac{M^2}{EI} \right) dx \quad (13.6)$$

- cas spatial, forme cinématique

$$U = \frac{1}{2} \int_L (EA\varepsilon^2 + GB_y\beta_y^2 + GB_z\beta_z^2 + GJ\chi^2 + EI_y\psi_y^2 + EI_z\psi_z^2) dx \quad (13.7)$$

- cas spatial, forme statique

$$U (= U^*) = \frac{1}{2} \int_L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GB_y} + \frac{V_z^2}{GB_z} + \frac{T^2}{GJ} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) dx \quad (13.8)$$

Pour les *treillis*, on a simplement

$$U (= U^*) = \frac{1}{2} \sum EA\varepsilon^2 L = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 L}{EA} \quad (13.9)$$

Rappelons que ces formules *ne résultent pas du principe de superposition* (comme déjà expliqué à la section 12.5), d'autant plus qu'elles sont une *forme quadratique* des quantités statiques ou cinématiques, et cela malgré l'hypothèse de linéarité matérielle.

13.2.2 Théorème de Clapeyron extérieur

Pour une structure soumise à des forces concentrées F , dont les points d'application subissent les déplacements associés u , le *théorème de Clapeyron extérieur* (vol. 3, sect. 7.9) se réduit à

$$U = \frac{1}{2} \sum F u \quad (13.10)$$

13.2.3 Énergie potentielle des forces extérieures

Semblablement, l'énergie potentielle des forces extérieures (vol. 3, chap. 8) s'écrit simplement

$$P = - \sum F u \quad (13.11)$$

13.3 Théorème de réciprocité de Betti

De même, le *théorème de réciprocité de Betti* (vol. 3, sect. 7.10) devient

$$\sum F u' = \sum F' u \quad (13.12)$$

Dans cette équation,

- les (F, u) et les (F', u') sont les forces et déplacements d'un premier et d'un second cas de charge d'une *même* structure ;
- les (F, u') et (F', u) sont associés.

13.4 Théorème de Maxwell

Le théorème de Maxwell est un cas particulier du théorème de Betti et s'en déduit donc directement. Pour fixer les idées, considérons un arc bi-encasté (matériau élastique linéaire), deux points A et B de cet arc et deux directions Δ_A et Δ_B par ces points (fig. 13.1a).

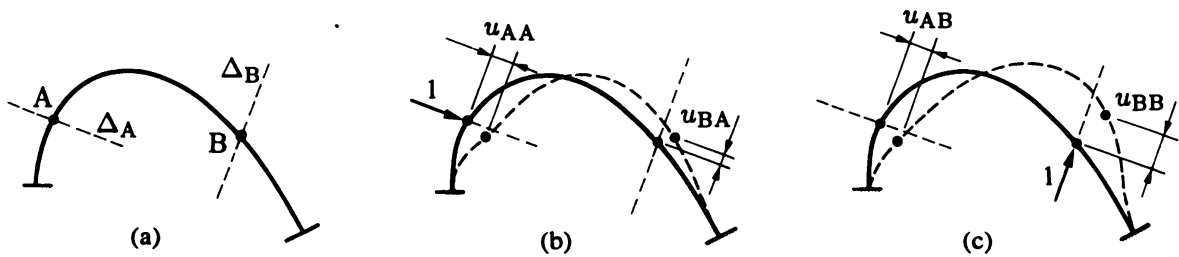


Fig. 13.1 Théorème de Maxwell.

Comme premier cas de charge, appliquons une force *unité* au point A selon Δ_A ; soit u_{AA} et u_{BA} les déplacements en A et B selon Δ_A et Δ_B (fig. 13.1b). Comme second cas de charge, appliquons une force *unité* au point B selon Δ_B ; soit u_{AB} et u_{BB} les déplacements en A et B selon Δ_A et Δ_B (fig. 13.1c). Par le théorème de réciprocité, on a

$$1u_{AB} + 0u_{BB} = 0u_{AA} + 1u_{BA}$$

d'où

$$u_{AB} = u_{BA} \quad (13.13)$$

relation qui traduit le théorème suivant :

Théorème de Maxwell : le déplacement provoqué au point B par une force unité appliquée au point A est égal au déplacement provoqué au point A par une force unité agissant au point B, forces et déplacements étant associés.

Comme pour le théorème de Betti, certaines forces peuvent être des *moments* (ou des paires de moments) et les déplacements associés des *rotations* (ou des rotations relatives).

13.5 Théorèmes de stationnarité et théorèmes énergétiques

On a déjà expliqué pourquoi les structures en barres et poutres avaient un caractère *discret* (sect. 12.1); appelons d_i , $i = 1, \dots, n$, les n déplacements des *nœuds* pouvant caractériser la configuration déformée d'une structure; soit également S_j , $j = 1, \dots, m$, les m forces pouvant caractériser l'état statique de la structure (efforts intérieurs, réactions d'appui). On suppose ces grandeurs indépendantes les unes des autres, de manière à ce qu'elles puissent former deux ensembles de *variables indépendantes*, et on utilise ces ensembles pour caractériser les énergies en lieu et place des champs continus $u_i(x, y, z)$ ou $\sigma_{ij}(x, y, z)$. Alors les énergies – potentielle Π et complémentaire Π^* – totales cessent d'être des fonctionnelles et deviennent des fonctions ordinaires des variables d_i et S_j :

$$\begin{aligned} \Pi[u_i(x_j)] &\mapsto \Pi(d_i) \\ \Pi^*[\sigma_{ij}(x_k)] &\mapsto \Pi^*(S_j) \end{aligned}$$

Les deux théorèmes de stationnarité (vol. 3, chap. 8) prennent alors la forme suivante :

- **théorème de l'énergie potentielle totale stationnaire** : l'énergie potentielle totale d'une structure en équilibre est stationnaire minimale, ce qui s'écrit

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0 \quad (13.14)$$

cette condition exprime l'équilibre et livre n équations ;

- **théorème de l'énergie complémentaire totale stationnaire** : l'énergie complémentaire totale d'une structure dont la cinématique est compatible est stationnaire minimale, soit

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial S_j} = 0 \quad (13.15)$$

condition qui garantit la compatibilité cinématique et fournit m équations.

A partir de ces équations et suivant l'interprétation particulière donnée aux valeurs d_i et S_j (déplacements des nœuds, déplacements relatifs aux faces des coupures des structures hyperstatiques, réactions d'appui, inconnues hyperstatiques, etc.), on peut établir une impressionnante série de *théorèmes énergétiques propres au calcul des structures en barres et poutres*. D'un point de vue pratique,

ces théorèmes n'offrent aucun avantage décisif, par exemple sur le théorème de la force unité (ils conduisent à la même formulation). Ils ont pour noms *théorèmes de Castigliano, de Crotti-Engesser, de Menabrea*, etc. Ils sont certes célèbres par les importantes contributions qu'ils ont apportées au calcul des structures pendant près d'un siècle (1860-1960 environ). Malgré cela, il ne se justifie plus de les enseigner en détail aujourd'hui. Pour ceux qui s'intéressent à ces contributions historiques, on renvoie à la bibliographie.

13.6 Méthode de Rayleigh-Ritz

L'une des applications principales des principes des travaux virtuels (chap. 12) et des théorèmes de stationnarité est l'analyse approchée des structures.

On se borne ici au minimum (13.14) de l'énergie potentielle. Cette énergie doit s'exprimer en fonction des *déplacements* de la structure. Les déplacements exacts étant inconnus, introduisons un *champ de déplacements approché*, mais plausible et logique ; dans la *méthode de Rayleigh-Ritz*, ce champ s'exprime analytiquement sous forme d'une combinaison linéaire de n fonctions, par exemple

$$\tilde{v}(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \quad (13.16)$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ s'appellent *modes de déplacement* et les *paramètres* a_i peuvent être soit des déplacements des nœuds, soit des intensités des modes de déplacement. Dans l'un et l'autre cas, ces paramètres ont un caractère cinématique et constituent les *inconnues* du problème.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur numérique des paramètres a_i telle que (13.16) soit une solution aussi précise que possible (vis-à-vis de la solution exacte). Dans ce but, on introduit cette configuration déformée approximative dans l'énergie Π , qui devient une fonction des n paramètres a_i . En appliquant n fois le principe de stationnarité (13.14), on obtient n équations aux n inconnues a_i . La résolution de ce système fournit les *meilleures valeurs* que doivent prendre les paramètres pour la configuration déformée approchée choisie, c'est-à-dire celles qui respectent au mieux la satisfaction du principe (13.14), donc finalement l'*équilibre global* de la structure.

Si le matériau est élastique linéaire, Π est quadratique en les déplacements, donc aussi en les paramètres, et les équations fournies par la dérivation sont *linéaires*.

Connaissant la configuration déformée approximative, on peut en tirer les efforts intérieurs ou contraintes par les relations classiques. Or ces relations introduisent des *dérivées* (par exemple $M = EIv''$ en flexion) et la dérivée d'une fonction approchée est encore moins précise – relativement – que la fonction elle-même. Ainsi, dans le principe de stationnarité de l'énergie potentielle, l'approximation sur les déplacements est, comme on dit, *forte*, et celle sur les efforts intérieurs est *faible*.

Il est donc important de choisir au mieux la déformée approximative de départ ; plus elle est précise, meilleure est l'approximation ; en particulier, *il est indispensable qu'elle satisfasse aux conditions cinématiques, donc qu'elle soit compatible avec les appuis*. Enfin, plus on choisit de paramètres inconnus, plus on augmente la précision⁽²⁾ (mais aussi le volume des calculs).

(2) L'approximation (13.16), compatible avec les appuis, converge vers la solution exacte quand $n \rightarrow \infty$.

La méthode de Rayleigh-Ritz est d'un emploi très répandu et étonnamment puissant, non seulement en calcul des structures, mais dans tous les problèmes de physique appliquée. En particulier, elle peut servir de base à la *méthode des éléments finis*⁽³⁾, qui permet de résoudre aujourd'hui des problèmes d'une affolante complexité.

Exemple 13.1

Cherchons à résoudre approximativement la poutre de la figure 13.2. Pour la déformée de flexion, dessinée en trait interrompu, on adopte l'approximation⁽⁴⁾

$$\tilde{v}(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (a)$$

Cette déformée est compatible avec les appuis, puisque $\tilde{v} = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. On voit que le paramètre A représente physiquement la flèche sous la charge (en $x = L/2$, $\tilde{v} = A$).

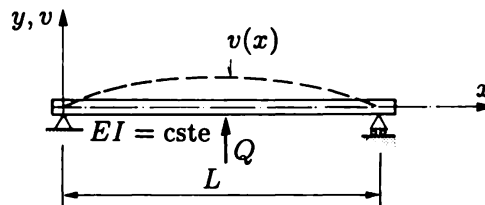


Fig. 13.2 Poutre simple avec charge concentrée à mi-portée.

On a, avec (13.3) et (13.11), en négligeant l'énergie d'effort tranchant,

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L (v'')^2 dx - Q v_{x=L/2}$$

puis, avec (a),

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L A^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - QA$$

d'où, en intégrant,

$$\Pi = \Pi(A) = \frac{EI}{2} \frac{A^2 \pi^4}{L^4} \frac{L}{2} - QA$$

Alors, par stationnarité,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2QL^3}{\pi^4 EI} = 0,02053 \frac{QL^3}{EI} \quad (b)$$

La valeur exacte de la flèche au centre est $v = QL^3/48EI = 0,02083 QL^3/EI$; l'approximation (b) est donc précise à moins de 2 %.

Puisque $v'' = M/EI$, la courbe des moments est, avec (a) et (b),

$$\tilde{M} = -\frac{2QL}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (c)$$

C'est un arc de sinuséide, *faible* approximation du diagramme exact en chevron (fig. 13.3). Au centre, on obtient $\tilde{M} = -0,2026 QL$, alors que la valeur exacte est $M = -QL/4 = -0,25 QL$ (erreur 19 %).

(3) Cette méthode est exposée dans le volume 6.

(4) *Polynômes et fonctions trigonométriques* sont les approximations usuellement employées.

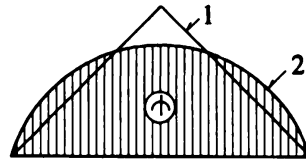


Fig. 13.3 Diagramme M (1 : exact ; 2 : approximatif).

13.7 Exercices

13.7.1 Une charge $F_P = 12$ kN agit en un point P d'une poutre et provoque aux trois points A, B, C des déplacements respectivement de 3 mm, 8 mm et 5 mm (fig. ex. 13.7.1a). Quel sera le déplacement de P provoqué par des charges $F_A = 15$ kN, $F_B = 7$ kN et $F_C = 10$ kN, agissant respectivement en A, B, C (fig. ex. 13.7.1b) ?

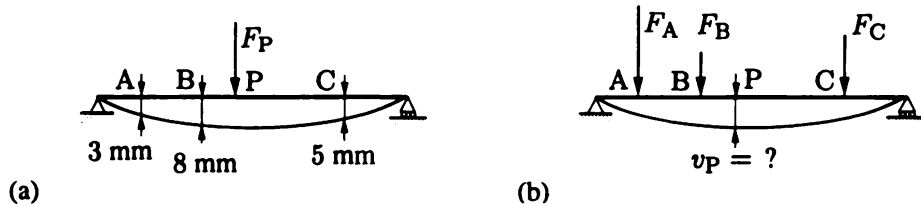


Fig. Ex. 13.7.1

13.7.2 Démontrer que la ligne d'influence de la flèche en un point quelconque A d'une poutre quelconque (isostatique ou hyperstatique) est donnée par la déformée de l'axe de cette poutre chargée d'une force unité en A . *Indication* : démonstration immédiate par le théorème de Maxwell.



Fig. Ex. 13.7.2

13.7.3 Démontrer, illustrer et énoncer le théorème traduit par la formule

$$R_{AB} = R_{BA}$$

dans lequel R est une réaction produite par un déplacement d'appui unité (théorème de Maxwell n° 2).

13.7.4 Une poutre âme-semelles en acier, à âme mince, à appuis simples, est soumise à une force concentrée F en son centre.

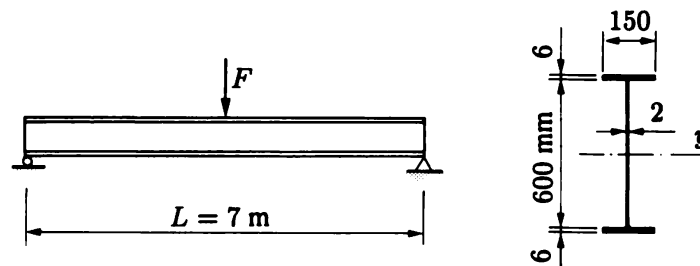


Fig. Ex. 13.7.4 ($I_y = 20\,125$ cm⁴)

- 1) Calculer par (13.6) l'énergie (complémentaire) totale emmagasinée dans cette poutre, en ne négligeant pas la contribution de l'effort tranchant (littéral).
- 2) Calculer la flèche prise par la poutre en son centre à l'aide du théorème de stationnarité (littéral).
- 3) Introduire les valeurs numériques et comparer les contributions de M et V à la flèche.

13.7.5 Une poutre simple est chargée de deux forces égales aux tiers de sa portée. La flèche sous la charge vaut $v_Q = 5Qa^3/(6EI)$ et la flèche au centre vaut $v_c = 23Qa^3/(24EI)$. En fonction de Q , a et EI , et en négligeant l'effet de l'effort tranchant,

- 1) calculer l'énergie potentielle de déformation U par (13.6);
- 2) vérifier cette valeur par le théorème de Clapeyron extérieur;
- 3) calculer l'énergie potentielle des forces extérieures P , puis l'énergie totale Π ;

ces valeurs exactes étant obtenues, supposer que la déformée est

$$\tilde{v} = A \sin \frac{\pi x}{3a}$$

et

- 4) déterminer le paramètre A par le théorème de stationnarité;
- 5) comparer les flèches exactes aux flèches approximatives;
- 6) calculer l'énergie potentielle totale approximative et vérifier le théorème du minimum de l'énergie potentielle totale.

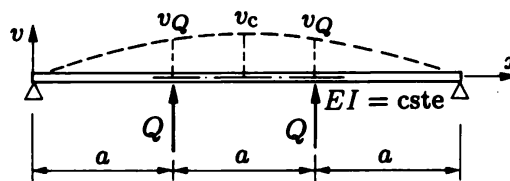


Fig. Ex. 13.7.5

13.8 Lexique

Energie de déformation ou
théorème de Clapeyron intérieur
(poutres en flexion plane et treillis)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_L EI \psi^2 dx + \frac{1}{2} \sum EA \varepsilon^2 L \\ &= \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 L}{EA} \end{aligned}$$

Théorème de Clapeyron extérieur

$$U = \frac{1}{2} \sum F u.$$

Energie potentielle des forces
extérieures

$$P = - \sum F u.$$

Théorème de réciprocité de Betti

$$\sum F u' = \sum F' u.$$

Théorème de Maxwell

$$u_{AB} = u_{BA}.$$

Théorèmes de stationnarité discrétisés	$\frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0 \quad (\text{exprime l'équilibre});$ $\frac{\partial \Pi^*}{\partial S_j} = 0 \quad (\text{exprime la compatibilité cinématique}).$
Méthode de Rayleigh-Ritz	Méthode déterminant la valeur approchée d'une fonction rendant stationnaire une fonctionnelle. (En structures, la fonction approchée doit être compatible avec les appuis.)

13.9 Annexe – Passage de la forme variationnelle à la forme différentielle

Considérons le cas d'une poutre simple avec charge répartie normale à l'axe $q(x)$, de déformée $v(x)$ en flexion (fig. 13.4). Il est clair qu'en analysant cette poutre avec l'équation différentielle d'équilibre (10.9e)

$$EIv'''' - q = 0 \quad (d)$$

on doit aboutir aux mêmes résultats qu'en l'analysant avec l'équation variationnelle ou intégrale

$$\delta \Pi[v(x)] = 0 \quad (e)$$

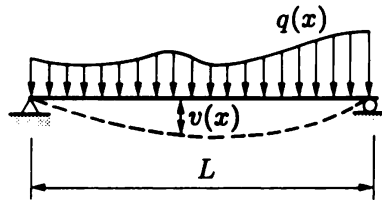


Fig. 13.4

On montre ici que l'on peut effectivement passer de l'une à l'autre. On a successivement

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx \quad P = - \int_0^L qv dx$$

d'où

$$\delta \Pi = \delta(U + P) = \frac{EI}{2} \int_0^L 2v'' \delta v'' dx - \int_0^L q \delta v dx = 0$$

Intégrons par parties l'expression $\int_0^L v'' \delta v'' dx$, deux fois de suite ; cela donne

$$\begin{aligned} \int_0^L v'' \delta v'' dx &= v'' \delta v' \Big|_0^L - \int_0^L v''' \delta v' dx \\ &= v'' \delta v' \Big|_0^L - v''' \delta v \Big|_0^L + \int_0^L v'''' \delta v dx \end{aligned}$$

et les deux premiers termes sont nuls à cause des conditions aux limites : sur les appuis ($x = 0$, $x = L$), M est nul ($\Rightarrow v'' = 0$) et v est nul ($\Rightarrow \delta v = 0$). Alors $\delta \Pi$ devient

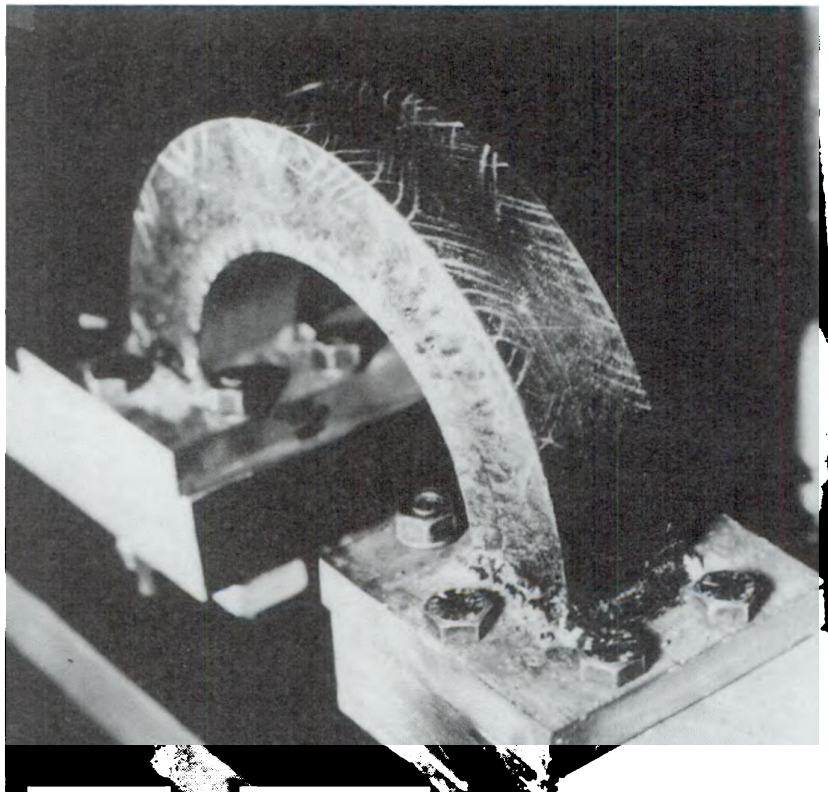
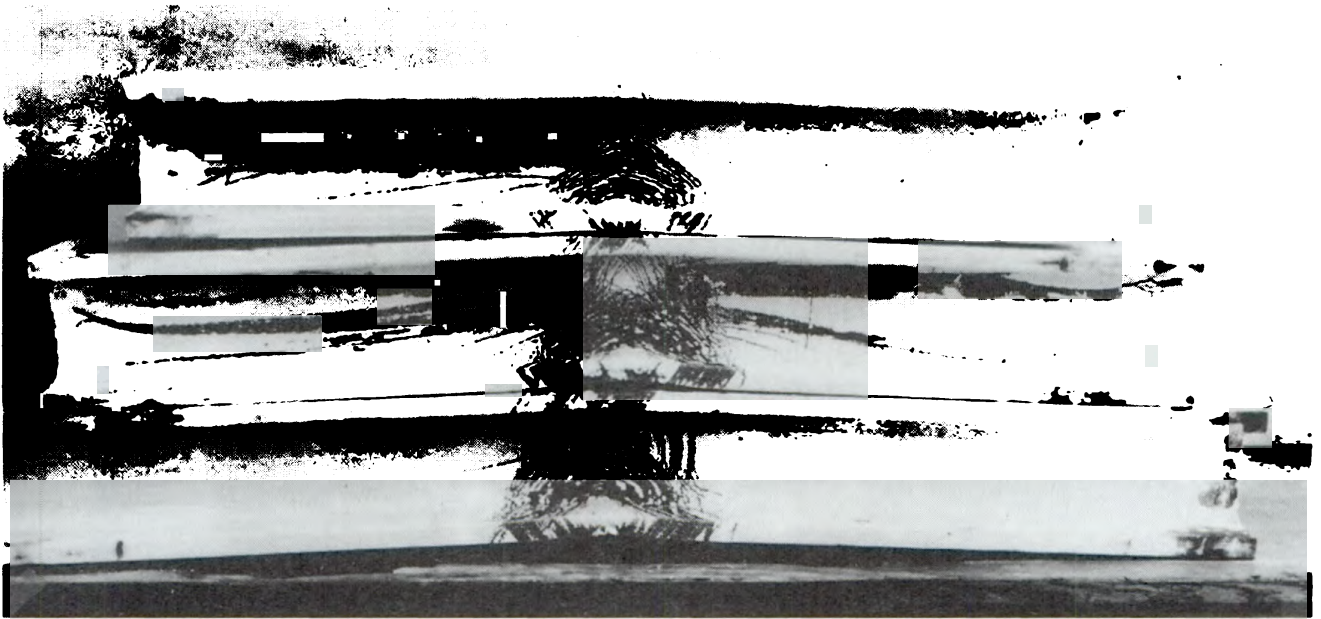
$$\delta \Pi = EI \int_0^L v'''' \delta v \, dx - \int_0^L q \delta v \, dx = \int_0^L (EI v'''' - q) \delta v \, dx = 0$$

La variation δv étant arbitraire, on doit avoir

$$EI v'''' - q = 0$$

ce qui est bien l'équation différentielle (d). On dit que cette équation est l'*équation d'Euler-Lagrange* du problème variationnel (e).

Deuxième partie



Plastification (acier)

Poutres simples fléchies par une force concentrée à mi-portée

Lorsque la poutre est suffisamment longue, la ruine a lieu par plastification locale due au moment de flexion : une rotule plastique naît dans la zone du moment maximal ; quand la poutre est courte, l'âme se plastifie sous l'action de l'effort tranchant avant que la rotule de flexion ne puisse se développer.

Essai d'une poutre courbe en flexion pure élasto-plastique

Vu que le rayon de l'axe de la poutre est petit vis-à-vis de la hauteur de la section, les contraintes ne sont plus réparties de manière antisymétrique. Les lignes de Lüders montrent la pénétration de la plastification.

(Photos MSM, Université de Liège.)

Plasticité et analyse limite

Cette deuxième partie présente les bases du calcul plastique des structures formées de barres et poutres ; elle se limite aux structures planes et n'aborde, de ce sujet, que les aspects liés à la mécanique des structures, soit, principalement, la plastification des sections et les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite. L'étude plastique des ossatures (méthode par combinaison de mécanismes, etc.) relève de la théorie des structures en barres et poutres (vol. 4). De plus, seule la *théorie plastique simple* est abordée (hypothèse de linéarisation géométrique).

La théorie de la plasticité et de l'analyse limite a été développée intensivement en Grande-Bretagne sous l'impulsion du Professeur John Baker (Université de Cambridge), dès 1938, pour être appliquée aux charpentes métalliques. Elle a ensuite trouvé un domaine d'utilisation beaucoup plus vaste (acier, béton armé et précontraint, alliages d'aluminium). Bien qu'elle donne une vue largement plus réaliste du comportement des structures à la ruine et du degré de sécurité réel que la théorie élastique, bien qu'elle conduise à un dimensionnement plus économique et à des calculs souvent plus simples, elle n'est – curieusement – que peu utilisée par les ingénieurs praticiens. Alors qu'elle convient idéalement à l'acier, c'est encore dans les structures en béton armé et précontraint qu'elle trouve le plus d'applications concrètes et d'adeptes grâce essentiellement au dynamisme des ingénieurs et chercheurs attachés à ce matériau.

La plasticité permet d'évaluer avec sûreté l'état limite ultime d'une construction, au sens de la méthode semi-probabiliste de la sécurité.

Rappelons néanmoins que cette vérification ne dispense en aucun cas l'ingénieur d'examiner soigneusement l'état limite de service, dans lequel la structure se comporte généralement élastiquement. Plasticité et élasticité ne s'excluent donc nullement, mais doivent au contraire se compléter harmonieusement dans l'étude d'une construction.

14. Traction plastique

14.1 Matériau élastique parfaitement plastique

Jusqu'ici, on a essentiellement appris à calculer les éléments structuraux selon la *méthode élastique*, supposant que le milieu était continu et que le matériau obéissait à la loi de Hooke (§ 2.7.3). L'hypothèse de linéarisation matérielle s'épanouit dans la *théorie de l'élasticité* issue des travaux de Cauchy (1822), amenée à un grand degré de perfection par bientôt deux siècles de recherches et permettant aujourd'hui de résoudre, grâce aux méthodes numériques de discrétisation (éléments finis), les problèmes les plus complexes.

Mais l'ingénieur praticien fait à cette théorie le reproche très grave d'être basée sur une loi (droite OA, fig. 14.1) qui ne représente absolument pas le comportement réel du matériau – pour autant qu'il soit ductile, même faiblement – au-delà du domaine élastique borné par la limite d'élasticité σ_e .

Selon le dimensionnement élastique, la ruine d'une structure serait atteinte dès qu'en un seul point la contrainte de comparaison (7.18) maximale atteint σ_e

$$\sigma_{\max}^* = \sigma_e \quad (14.1)$$

Cette méthode néglige la capacité d'adaptation élasto-plastique des matériaux ductiles que l'expérience montre être très importante et d'ailleurs très variable d'un matériau et d'une structure à l'autre. Elle est actuellement jugée très insuffisante pour mesurer avec précision la résistance ultime des structures employées en génie civil et, par suite, leur *degré réel de sécurité*.

La *théorie de la plasticité*, dont les premiers progrès importants datent de 1925, ce qui lui donne trois quarts de siècle d'âge, est basée sur le milieu continu et le *modèle élastique parfaitement plastique*⁽¹⁾ (fig. 14.1), caractérisé par le palier *indéfini* de plasticité et le déchargement élastique (§ 7.7.2). Aucun matériau ductile de construction n'obéit rigoureusement à ce modèle ; les aciers au carbone (aciers doux et faiblement alliés) s'en approchent fort (palier étendu, mais comportement discontinu dans ce palier, suivi d'une zone d'écrouissage), tandis que les autres matériaux de construction (aciers alliés, alliages d'aluminium, béton) ont un comportement plus complexe (absence de palier ; chap. 7).

⁽¹⁾ On ne considère ici que la théorie de la plasticité *sans écrouissage*.

Néanmoins, ce modèle est bien meilleur que le modèle élastique ; il permet de prédire l'extension progressive des zones plastifiées dans une structure soumise à des charges croissantes et aussi, ce qui est d'un grand intérêt, la charge de ruine ou d'effondrement, dite **charge limite**, de cette structure ; on appelle **analyse limite** la partie de la théorie de la plasticité vouée au calcul des charges limites.

Le succès de la **méthode plastique** va grandissant ; non seulement les calculs ne sont pas plus compliqués qu'en méthode élastique (ils peuvent être plus simples), mais concordent fort bien avec les expériences menées jusqu'à ruine sur des structures réelles.

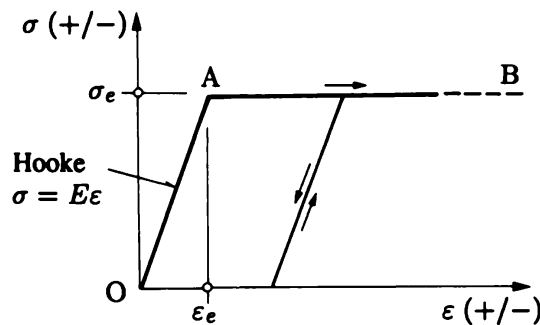


Fig. 14.1 Loi élastique parfaitement plastique.

14.2 Traction plastique

14.2.1 Pièce homogène

Pour une *pièce formée d'un seul matériau*, l'**effort normal plastique** N_{pl} coïncide avec l'**effort normal élastique maximal** N_e et est donné par (A est l'aire de la section droite)

$$N_{pl} \equiv N_e = A\sigma_e \quad (14.2)$$

C'est la **charge limite** de la pièce en traction⁽²⁾ ; lorsqu'elle est atteinte, la pièce s'allonge indéfiniment (fig. 14.1). Ici, le dimensionnement plastique conduit à la même sécurité que le dimensionnement élastique.

14.2.2 Pièce composée

La situation change pour une *pièce formée de deux matériaux 1 et 2* (fig. 14.2). Analysons qualitativement le phénomène jusqu'à ruine, en se rappelant que la loi cinématique de conservation des sections planes reste valable (§ 2.4.3)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

⁽²⁾ En compression, cette charge ne peut être atteinte à cause du phénomène de flambement.

Selon la méthode élastique, l'effort normal élastique maximal N_e est atteint dès que l'un des matériaux arrive à sa limite d'élasticité, par exemple le matériau 1 dans le cas de la figure 14.2 (sect. 4.3 et 4.4),

$$N_e = \tilde{A}_1 \sigma_{e1}$$

avec

$$\tilde{A}_1 = A_1 + \frac{A_2}{n} \quad n = \frac{E_1}{E_2}$$

A cet instant (fig. 14.2a), la résistance du second matériau n'est pas épuisée. Si l'on accroît l'allongement de la pièce (fig. 14.2b), le matériau 1 s'étire sous contrainte constante, tandis que les contraintes du second matériau continuent à croître ; on peut donc appliquer à la pièce un effort normal N supérieur à N_e .

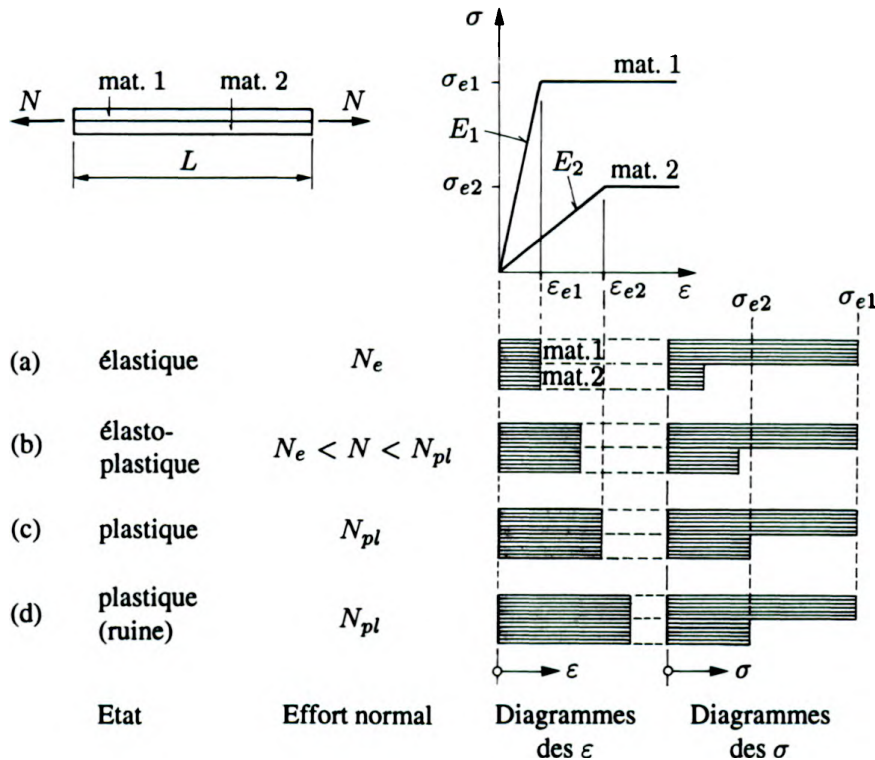


Fig. 14.2 Traction élasto-plastique d'une pièce composée de deux matériaux.

La pièce est dite en *état élasto-plastique* et cette situation s'achève au moment où le second matériau se plastifie à son tour (fig. 14.2c). Dès cet instant, l'effort reste constant (fig. 14.2d) ; la pièce s'allonge indéfiniment et est dite en *état plastique*.

Cet état, où les deux matériaux sont plastifiés, correspond à la ruine ; l'effort normal plastique (*charge limite*) N_{pl} de la pièce composée est donc

$$N_{pl} = A_1 \sigma_{e1} + A_2 \sigma_{e2} \quad (14.3)$$

et découle directement du principe d'équivalence.

Le diagramme de l'allongement u en fonction de l'effort normal N est donné à la figure 14.3. Il comprend trois phases et montre que le déplacement n'est pas proportionnel à l'effort ; en conséquence, le principe de superposition ne s'applique plus (perte de la linéarité matérielle).

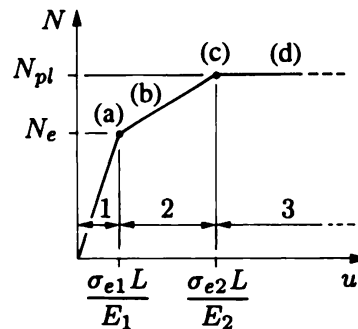


Fig. 14.3 Courbe allongement-effort normal (pièce composée ; 1 : état élastique ; 2 : état élasto-plastique ; 3 : état plastique ; (a) à (d) : voir fig. 14.2).

14.3 Quelques propriétés importantes

14.3.1 Bénéfice dû à la plasticité

Dans le problème précédent, prenons par exemple $E_1 = 3E_2$ (acier-aluminium), $A_1 = A_2$ et $\sigma_{e1} = \sigma_{e2}$. Il vient

$$\frac{N_{pl}}{N_e} = \frac{2A_1\sigma_{e1}}{(4/3)A_1\sigma_{e1}} = 1,5$$

Ce rapport mesure le *gain* réalisé par *plastification de la section droite*, soit ici 50 %. Ce gain est fort variable et on verra qu'un autre gain peut être acquis grâce au comportement plastique de la *structure*, lorsqu'elle est hyperstatique (sect. 16.1).

14.3.2 Isostaticité de la charge limite

On a obtenu la charge limite (14.3) en exprimant que les contraintes avaient atteint la limite d'élasticité, puis en utilisant le principe d'équivalence ou, ce qui revient au même, l'équilibre statique. On peut donc énoncer la propriété suivante :

La charge limite est statiquement déterminée et directement calculable sans devoir analyser préalablement le comportement élasto-plastique.

Ici, pour la trouver, il suffit de connaître les aires et les limites d'élasticité ; le calcul de N_e – par ailleurs *hyperstatique* (sect. 4.3) – n'est pas nécessaire.

14.3.3 Conception de la ruine

La ruine d'une structure (état limite ultime) est maintenant basée sur sa charge limite, c'est-à-dire en réalité sur l'état à partir duquel la structure peut subir de *grands déplacements*, en principe illimités, et par suite s'effondrer sous charge constante.

Dans la méthode élastique, le critère de ruine est plutôt basé sur les *contraintes*, donc la résistance de la matière, ce qui n'est de loin pas identique.

Ces deux conceptions de la ruine marquent une différence essentielle entre les théories de l'élasticité et de la plasticité. Il en est résulté des paradoxes célèbres, dont en particulier le suivant : il est possible, en renforçant une structure, de diminuer sa résistance ! Par exemple, si l'on enrobe de béton une barre d'acier, la résistance à l'effort de traction tombe quasiment à zéro en théorie élastique.

14.3.4 Contraintes résiduelles et dilatations permanentes

Après avoir atteint N_{pl} dans la pièce composée précédente (sect. 14.2), déchargeons complètement cette dernière. Ce déchargement est élastique linéaire et l'on doit respecter la loi des sections planes ($\varepsilon_{dec,1} = \varepsilon_{dec,2}$). On voit (fig. 14.4) que le matériau 2 ne peut reprendre sa longueur initiale parce que le matériau 1 a subi une déformation permanente et est trop long. Par conséquent, il subsiste une *dilatation permanente* commune, ε_{per} , ainsi que des *contraintes résiduelles* dans les matériaux, de compression dans 1 et de traction dans 2. Ces contraintes résiduelles valent

$$\sigma_{rsd,1} = \sigma_{e1} - \frac{N_{pl}}{A_1} \quad \sigma_{rsd,2} = \sigma_{e2} - \frac{N_{pl}}{nA_1}$$

et ont une résultante nulle (*autocontrainte*)

$$A_1 \sigma_{rsd,1} + A_2 \sigma_{rsd,2} = 0$$

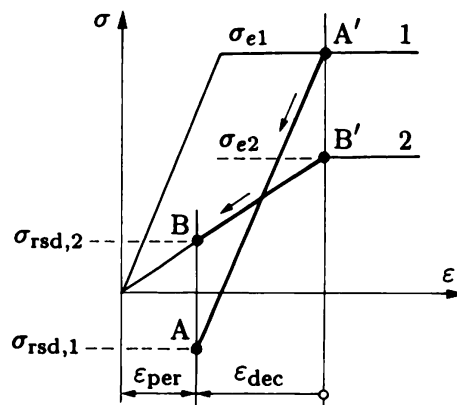


Fig. 14.4 Déchargement.

Si l'on charge à nouveau la pièce, elle se comporte maintenant *élastiquement*, car les contraintes dans les deux matériaux suivent les lignes AA' et BB' de la figure 14.4. L'ensemble de ces observations s'énonce ainsi :

Une structure ne se comporte plastiquement qu'à sa première mise en charge, après quoi elle se comporte élastiquement grâce aux contraintes résiduelles produites par la déformation plastique initiale.

14.3.5 Insensibilité aux états d'autocontrainte

Dans la pièce composée (sect. 14.2) non chargée, on chauffe le seul matériau 1 ; comme il ne peut se dilater librement à cause du matériau 2, il naît des contraintes de compression dans 1 et de traction dans 2. On peut aisément calculer cet *état d'autocontrainte* en stade élastique (ex. 4.10.14 par exemple). On soumet alors la pièce à l'effort normal et il s'agit de savoir si la présence des contraintes initiales thermiques a une influence sur la valeur de la charge limite N_{pl} . La réponse est non, car il est toujours possible d'amener les deux matériaux à plastification (comme à la figure 14.2), et par suite N_{pl} est toujours donné par (14.3). De manière générale, on peut affirmer ce qui suit :

La charge limite est totalement indépendante de toutes les actions telles que erreur sur la longueur des pièces, défauts de montage, effets thermiques, tassement d'appui, contraintes initiales ou résiduelles, etc., qui provoquent dans une structure un état d'autocontrainte.

Cette propriété remarquable résulte d'ailleurs directement du *caractère isostatique de la charge limite* : une structure isostatique est insensible aux actions susmentionnées. Dans une structure hyperstatique, ces actions provoquent un état d'autocontrainte qui, par nature, ne contribue en rien au principe d'équivalence et ne modifie donc pas la charge limite. Au contraire, selon la méthode élastique, on devrait en tenir compte dans le calcul, ce qui le compliquerait sérieusement. En réalité, on ne le fait généralement pas parce qu'on sait que la plasticité *efface* l'effet des autocontraintes.

Remarque

On décrit ultérieurement (sect. 21.1) les imperfections auxquelles le phénomène de flambement est très sensible ; certaines d'entre elles sont identiques aux états d'autocontrainte : on prendra garde à ne pas mélanger.

14.3.6 Conclusion

Comme on le verra encore, *toutes les propriétés précédentes, mises en évidence sur l'exemple simple de la traction d'une pièce composée, se maintiennent pour toutes les structures, si complexes soient-elles.*

14.4 Exercices

14.4.1 La section droite d'une pièce acier-béton est formée d'un HEM 200 enrobé de béton. En admettant que le béton se comporte de façon élastique parfaitement plastique, calculer l'effort normal plastique de compression que peut supporter cette section, si $\sigma_{ea} = 24 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_{cb} = 2 \text{ kN/cm}^2$. Trouver le gain réalisé par rapport au dimensionnement élastique, si $n = E_a/E_b = 10$.

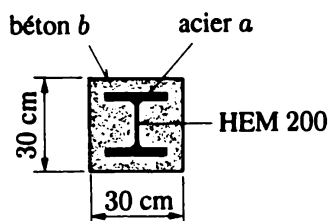


Fig. Ex. 14.4.1 (HEM 200 : $A = 131 \text{ cm}^2$)

14.4.2 Trouver la charge limite du treillis plan ABCD. Les trois barres ont la même section et sont constituées du même acier. On donne $A = 2 \text{ cm}^2$, $\sigma_e = 25 \text{ kN/cm}^2$ (acier doux) et $h = 100 \text{ cm}$. Ce treillis est-il hyperstatique ? Sa charge élastique maximale étant de $F_e = 85,36 \text{ kN}$, quel est le gain dû à la plasticité ?

14.4.3 Un tube en acier doux ($\sigma_e = 24 \text{ kN/cm}^2$, $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$), de longueur $L = 42 \text{ cm}$, à parois minces d'épaisseur $t = 1 \text{ cm}$, a une section de forme carrée de côté $a = 20 \text{ cm}$ (mesuré à la ligne moyenne ; fig. ex. 14.4.3a). Chaque paroi a un diagramme birectangulaire de contraintes résiduelles, constantes à travers l'épaisseur t (fig. ex. 14.4.3b).

- 1) Calculer x pour que les contraintes résiduelles soient autoéquilibrées.
- 2) Calculer et dessiner le diagramme (N, u) (u = raccourcissement) lorsqu'on soumet ce tube à compression pure N jusqu'à plastification complète (essai sur tronçon court).

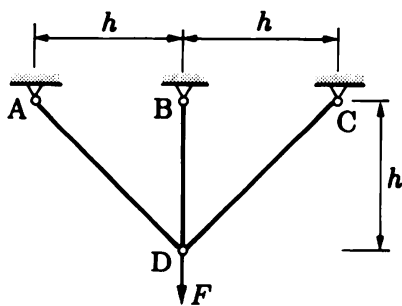


Fig. Ex. 14.4.2

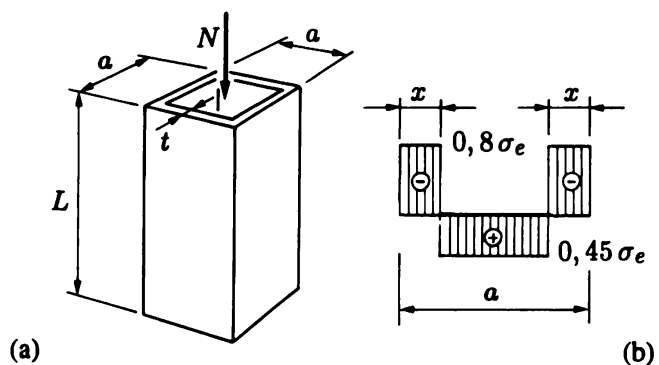


Fig. Ex. 14.4.3

14.5 Lexique

Théorie de la plasticité

Théorie tenant compte de la loi constitutive réelle des matériaux présentant de la plasticité ; la loi couramment adoptée est le modèle élastique parfaitement plastique.

Charge limite

Charge de ruine en plasticité (état limite ultime).

Analyse limite

Recherche directe des charges limites.

Etat de déformation ou contrainte

- élastique
- élasto-plastique
- plastique

Loi de Hooke respectée ($\sigma \leq \sigma_e$; $\varepsilon \leq \varepsilon_e$) ;

état partiellement plastifié, avant ruine, accompagné de déplacements encore petits ;

état entièrement plastifié, correspondant à la charge limite, avec déplacements croissant sans limite sous charge constante.

Effort normal

- élastique maximal (N_e)
- plastique (N_{pl})

Valeur de l'effort normal N

en théorie élastique (valeur maximale) ;

en théorie plastique (charge limite).

Propriétés de la charge limite

- Gain par plastification ;
- caractère isostatique ;
- état limite ultime (effondrement sous charge constante) ;
- contraintes résiduelles et dilatations permanentes si déchargement ; réponse élastique dès la deuxième mise en charge ;
- insensibilité aux autocontraintes.

15. Flexion plastique plane

15.1 Généralités

On étudie dans ce chapitre la flexion plastique plane des poutres faites d'un matériau élastique parfaitement plastique et on dégage les deux concepts fondamentaux qui sont à la base du calcul plastique des structures en poutres : celui de *moment plastique* et celui de *rotule plastique*.

Les facteurs particuliers influençant le comportement des poutres fléchies, tels que l'effort normal et l'effort tranchant, ne sont pas envisagés ici. On développe donc la théorie dans le cas où le moment de flexion est constant (flexion pure) et on l'applique provisoirement à tous les cas de flexion simple et flexion composée.

La loi de conservation des sections planes de Bernoulli reste d'application (loi cinématique) ; elle se traduit par la relation connue (§ 5.2.1)

$$\varepsilon = -\frac{y}{r} = -\psi y$$

où, pour rappel, la grecque ψ désigne la courbure $1/r$ (fig. 15.1). Ainsi, les *dilatations* des fibres restent distribuées linéairement sur la section droite.

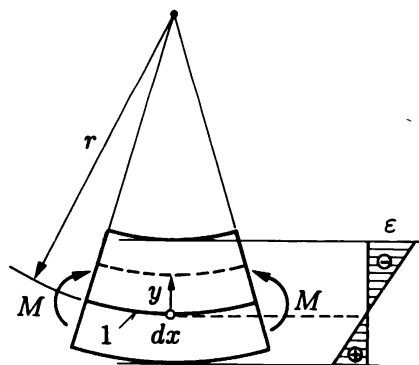


Fig. 15.1 Cinématique en flexion pure (1 : fibre ou plan neutre).

15.2 Sections doublement symétriques

15.2.1 Moment et module plastiques

En théorie élastique, l'axe neutre passe par le centre géométrique situé à mi-hauteur de la section. Le *moment élastique maximal* M_e est réalisé à l'instant où la contrainte dans les fibres extrêmes atteint la limite d'élasticité σ_e (fig. 15.2a)

$$M_e = W \sigma_e = \frac{I}{y_{\max}} \sigma_e \quad (15.1)$$

La courbure correspondante est la *courbure élastique maximale*

$$\psi_e = \frac{M_e}{EI} \quad (15.2)$$

Lorsqu'on dépasse le moment M_e , les fibres supérieures et inférieures de la poutre se plastifient ; au fur et à mesure que le moment augmente, les zones plastifiées se propagent vers l'axe de la pièce comme le montre la figure 15.2. La condition d'équivalence de translation (effort normal nul) s'écrit

$$\int_A \sigma dA = 0$$

et, vu la symétrie de la section droite, cette condition exige que *l'axe neutre reste à mi-hauteur de la section droite*.

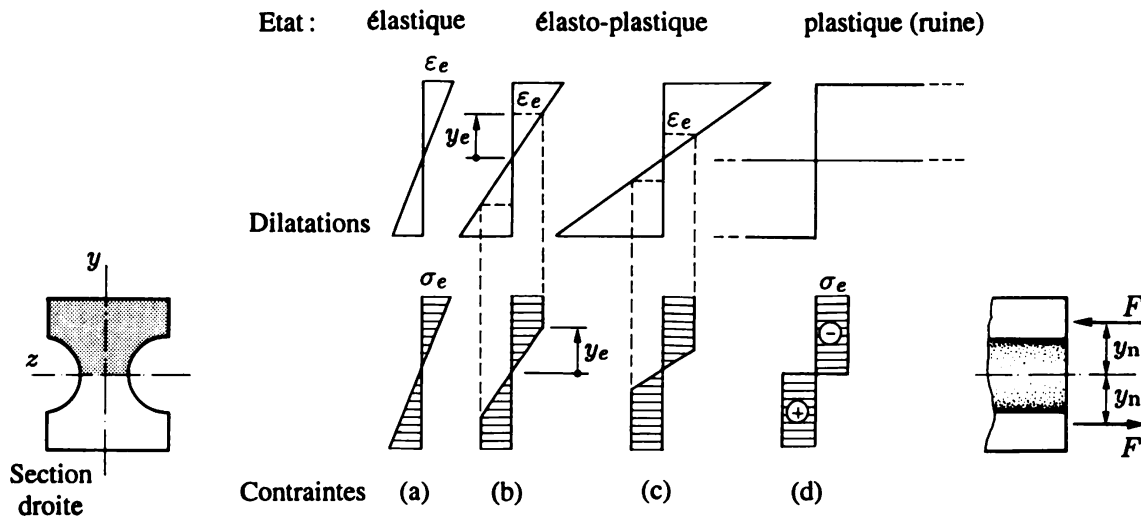


Fig. 15.2 Plastification par flexion.

Durant cet état élasto-plastique (fig. 15.2b et 15.2c), la hauteur de la partie centrale de la pièce, qui reste seule élastique, diminue toujours davantage ; la distance y_e de l'interface élastique plastique à l'axe neutre est donnée par, où $\varepsilon_e = \sigma_e/E$ est la dilatation élastique maximale (2.11),

$$y_e = -\frac{\varepsilon_e}{\psi} \quad (15.3)$$

et décroît donc en raison inverse de la courbure ψ de l'axe.

Théoriquement, pour une courbure infinie, $y_e = 0$ et on tend vers le *diagramme birectangulaire* des contraintes (fig. 15.2d) ; la section droite est entièrement plastifiée et on atteint donc l'état plastique (ruine). Le moment fléchissant correspondant est le plus grand moment que peut supporter la poutre et s'appelle **moment plastique** M_{pl} . On a (principe d'équivalence)

$$M_{pl} = - \int_A \sigma y dA$$

où $\sigma = -\sigma_e$ du côté des $y > 0$ et $\sigma = \sigma_e$ du côté des $y < 0$; alors

$$M_{pl} = \sigma_e \int_A |y| dA = 2\sigma_e \int_{A/2} |y| dA = 2S_{\text{demi}}\sigma_e = Z\sigma_e \quad (15.4)$$

Le moment plastique est proportionnel à une quantité géométrique, fonction de la forme de la section droite, appelée **module plastique** et égale à deux fois le moment statique de la demi-section droite par rapport à l'axe neutre

$$Z = 2S_{\text{demi}} \quad ([\text{cm}^3] \text{ par exemple}) \quad (15.5)$$

Application

Pour une section rectangulaire (fig. 15.3), on a

- $W = bh^2/6$
- $S_{\text{demi}} = b(h/2)(h/4) = bh^2/8 \Rightarrow Z = bh^2/4$

d'où

- moment élastique maximal

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e$$

- moment plastique

$$M_{pl} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e \quad (15.6)$$

Le gain de résistance dû à la plastification vaut

$$\frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{6}{4} = 1,5 \quad (15.7)$$

soit 50 %.

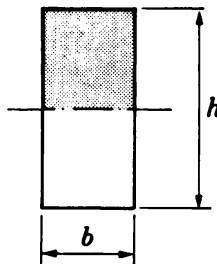


Fig. 15.3 Section rectangulaire.

Remarques

Les tableaux des profilés métalliques laminés donnent les valeurs de S_{demi} ou Z (annexe 23.4).

On peut aussi établir (15.4) aisément en remplaçant le diagramme birectangulaire des contraintes (fig. 15.2d) par deux résultantes internes partielles F , appliquées aux centres géométriques des demi-sections, distantes de y_n de l'axe neutre. Ces deux forces forment un couple de moment M_{pl} . On a

$$F = \sigma_e \frac{A}{2}$$

$$M_{pl} = 2Fy_n = 2\sigma_e \frac{A}{2} y_n$$

et, puisque $(A/2)y_n = S_{\text{demi}}$, on retrouve (15.4).

Il est clair que la notion de moment plastique est une modélisation parce que, d'une part, la courbure ne peut jamais dépasser $2/h$ (pliage à bloc, h = hauteur de la section), de sorte qu'il subsiste toujours une mince zone médiane élastique, et que, d'autre part, les dilatations des fibres extrêmes finissent par dépasser le palier et entrer dans la zone d'écrouissage. Cependant, au moment où on atteint l'extrémité du palier, les dilatations des fibres extrêmes valent (fig. 7.3) en moyenne 13 fois la dilatation élastique maximale ε_e (acier doux) ; la zone médiane élastique a comme hauteur $h/13$ et la différence entre le moment atteint et M_{pl} est inférieure à 1,5 % pour une section rectangulaire, c'est-à-dire totalement négligeable.

15.2.2 Déchargement

Si on soumet une poutre de section bisymétrique à un moment M de flexion pure élasto-plastique ($M_e < M \leq M_{pl}$), il se produit des dilatations permanentes dans le matériau. Il en résulte qu'après déchargement, il subsiste une *courbure permanente* (d'où déformée, flèches et angles permanents), ainsi que des *contraintes résiduelles* (§ 14.3.4).

Pour obtenir ces dernières, il suffit de soustraire du diagramme trapézoïdal élasto-plastique (fig. 15.4) un diagramme des contraintes de déchargement linéaire élastique, puisque le déchargement

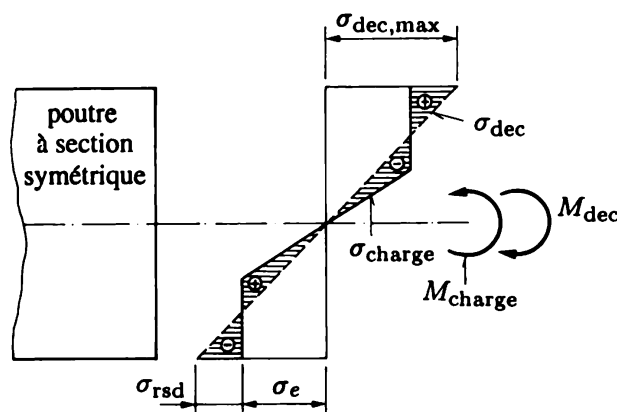


Fig. 15.4 Contraintes résiduelles après flexion élasto-plastique.

est un phénomène élastique. Les contraintes résiduelles sont alors représentées par la différence des deux diagrammes (zones hachurées). Aux fibres extrêmes, elles valent

$$\sigma_{\text{rsd}} = \mp \left(\sigma_e - \frac{M}{W} \right) \quad (15.8)$$

15.3 Sections à un seul axe de symétrie

La construction emploie assez souvent des poutres dont la section n'a qu'un seul axe de symétrie, comme le T (fig. 15.5). L'évolution de la répartition des contraintes sur une telle section droite s'obtient aisément en considérant les deux situations extrêmes suivantes :

- tant que le diagramme des contraintes est élastique, l'axe neutre passe par le centre G (fig. 15.5a) ; le moment élastique maximal vaut (y_{max} en valeur absolue)

$$M_e = \frac{I}{y_{\text{max}}} \sigma_e$$

- quand la section est complètement plastifiée (fig. 15.5d), l'axe neutre se détermine par la condition d'effort normal nul

$$\int_A \sigma dA = \sigma_e (A_2 - A_1) = 0$$

qui signifie que *les aires des deux côtés de l'axe neutre plastique sont égales* ; dans le cas de la figure 15.5, cet axe est situé nettement plus haut que l'axe neutre élastique.

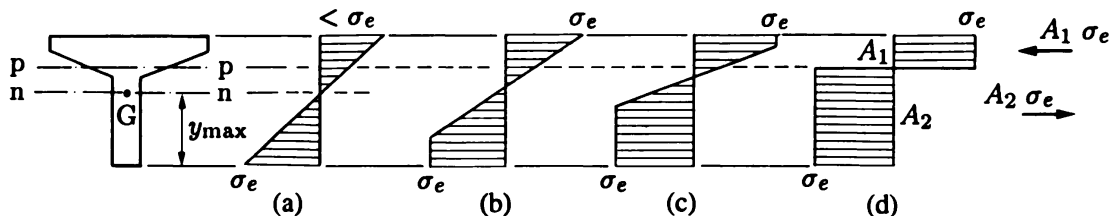


Fig. 15.5 Plastification progressive d'une section non symétrique (n-n : axe neutre de flexion élastique sous l'action de M_e ; p-p : axe neutre de flexion plastique sous l'action de M_{pl}).

Entre ces deux états extrêmes et pour le cas de la figure 15.5, la plastification envahit d'abord la section du côté de l'âme (fig. 15.5b) ; ce diagramme des contraintes se maintient jusqu'à ce que la fibre supérieure atteigne la limite d'élasticité. Puis le matériau commence à se plastifier au-dessus de l'axe neutre, pendant que le moment tend asymptotiquement vers sa valeur ultime M_{pl} (fig. 15.5c).

De manière générale, l'*axe neutre plastique* d'une section quelconque à un axe de symétrie est la droite normale à cet axe qui divise la section en deux parties de même aire ; le *module plastique* correspondant vaut

$$Z = \frac{A}{2} (y_1 + y_2) \quad (15.9)$$

où y_1 et y_2 sont les distances à l'axe neutre plastique des centres géométriques des deux moitiés, prises en valeur absolue (fig. 15.6).

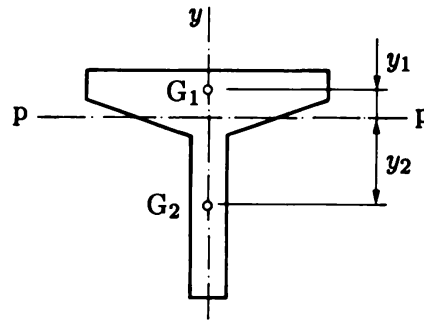


Fig. 15.6 Axe neutre plastique (p-p) d'une section à un seul axe de symétrie.

15.4 Pièces composées

Considérons l'état plastique d'une poutre composée ; chaque matériau de la section droite a atteint sa limite d'élasticité, qui peut d'ailleurs être différente en traction et en compression. L'*axe neutre plastique* se détermine alors par la condition générale

$$\int_A \sigma dA = 0$$

qu'on peut devoir résoudre par tâtonnements. Le *moment plastique* se calcule ensuite aisément à l'aide des résultantes internes $A_i \sigma_{ei}$ de chaque matériau i , appliquées au centre géométrique des aires A_i .

15.5 Loi moment-courbure

15.5.1 Introduction

Lors de la flexion élasto-plastique, on peut établir, à tout instant, une relation entre le moment appliqué et la courbure produite : c'est la *loi moment-courbure* (M, ψ) . On la traduit volontiers en un diagramme non dimensionnel montrant comment varie le rapport M/M_e en fonction de ψ/ψ_e . Cette loi dépend de la forme de la section droite, et on l'établit ci-après pour une section rectangulaire à titre d'illustration.

15.5.2 Section rectangulaire

En *état élastique*, la loi est $\psi = M/EI$ (5.6), soit $M = EI\psi$; en non dimensionnel ; on a $M/M_e = EI\psi/M_e$; enfin en remplaçant M_e dans le membre de droite par sa valeur tirée de (15.2), il vient

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e} \quad (0 \leq M/M_e \leq 1) \quad (15.10)$$

En *état élasto-plastique*, la section est partiellement plastifiée (fig. 15.7). Les résultantes partielles des contraintes fournissent le moment élasto-plastique

$$\begin{aligned}
 M &= \sigma_e b \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{2} + y_e \right) + \frac{1}{2} \sigma_e b y_e \frac{4}{3} y_e = \sigma_e b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right) \\
 &= \sigma_e \frac{bh^2}{4} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right] = M_{pl} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{a}$$

où $M_{pl} = (bh^2/4)\sigma_e$ est le moment plastique (15.6) de la section rectangulaire.

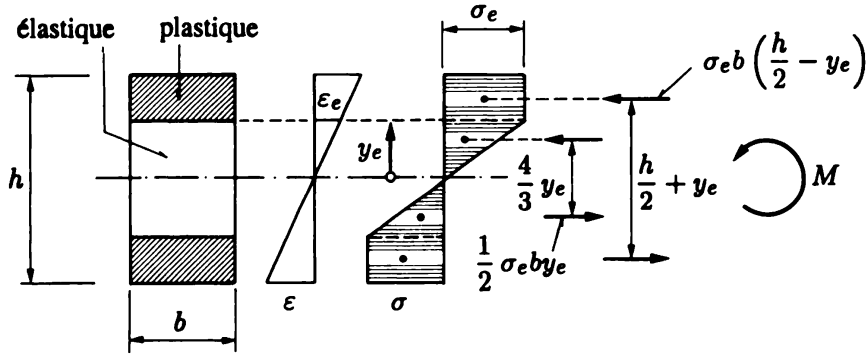


Fig. 15.7 Flexion élasto-plastique d'une section rectangulaire.

Lorsque $M = M_e$ (début de la plastification), la loi cinématique (5.2) s'écrit

$$\varepsilon_e = -\psi_e \frac{h}{2} \tag{b}$$

Substituant cette valeur dans (15.3), on obtient

$$y_e = \frac{\psi_e}{\psi} \frac{h}{2} \tag{c}$$

On introduit (c) dans la dernière des égalités (a) précédentes, ce qui fournit la loi, après division des deux côtés par M_e ,

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_{pl}}{M_e} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^2 \right] \tag{15.11}$$

valable dans l'intervalle $1 \leq M/M_e \leq 1,5$ en vertu de (15.7).

Enfin, en *état plastique*, la courbure tend vers l'infini et le moment vers le moment plastique M_{pl} (15.6), d'où

$$\frac{\psi}{\psi_e} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{M_e} \rightarrow \frac{M_{pl}}{M_e} = 1,5 \tag{15.12}$$

ce qui constitue une asymptote horizontale à la courbe (15.11).

La figure 15.8 montre, en trait fort, la *loi moment-courbure* formée de l'ensemble des relations (15.10), (15.11) et (15.12).

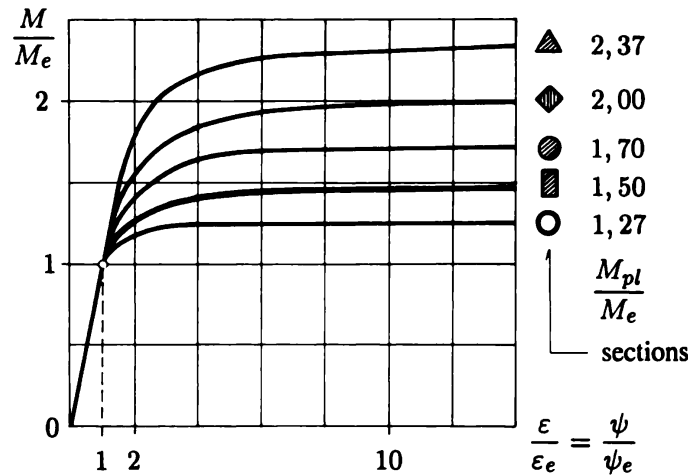


Fig. 15.8 Lois moment-courbure pour diverses formes de section droite.

15.5.3 Autres sections et facteur de forme

On peut construire des courbes analogues pour diverses formes de section droite. Toutes ces courbes sont asymptotiques à l'horizontale d'ordonnée M_{pl}/M_e valable pour la section considérée et dépendent donc essentiellement de la valeur du rapport M_{pl}/M_e . D'après les formules (15.1) et (15.4), ce rapport vaut

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{Z}{W} \quad (15.13)$$

et s'appelle **facteur de forme** de la section considérée. Il mesure le *gain* réalisé par *plastification de la section droite*.

La contrainte dans les fibres extrêmes ne pouvant dépasser σ_e , le bénéfice dû à la plastification provient uniquement des moments intérieurs supplémentaires dus à la plastification des fibres proches de l'axe neutre. Ce bénéfice est élevé si la section est renflée au voisinage de l'axe neutre (section circulaire et, plus encore, section en forme de losange). Il reste faible, par contre, pour les profilés industriels en I, où l'âme est mince, et pour toutes les sections travaillant selon le principe de la section âme-semelles en général.

On étudie ci-après la section âme-semelles bisymétrique qui présente une importance exceptionnelle en construction.

15.6 Sections âme-semelles bisymétriques

15.6.1 Loi moment-courbure

Deux cas sont à considérer :

- les semelles sont partiellement plastiques et l'âme est élastique ; avec les notations de la figure 15.9, on a

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e} \left(1 - \frac{bh^2}{6W} \right) + \frac{bh^2}{4W} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^2 \right] \quad (15.14)$$

- la plastification pénètre dans l'âme (fig. 15.10); dans ce cas

$$\frac{M}{M_e} = \alpha - \frac{t_w h^2}{12 W} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^2 \quad (15.15)$$

Les équations (15.14) et (15.15) permettent de tracer la loi $(M/M_e, \psi/\psi_e)$ pour n'importe quel type de section droite.

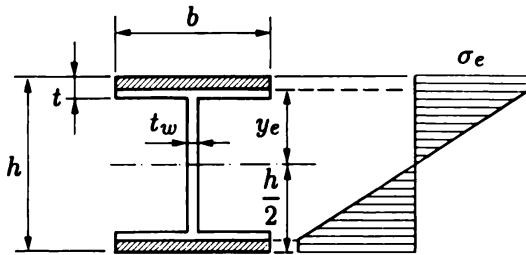


Fig. 15.9

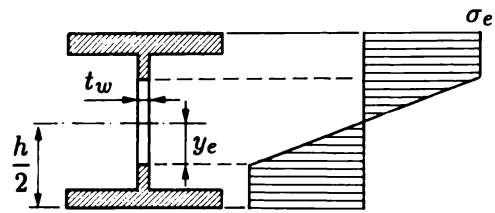


Fig. 15.10

La figure 15.11 donne la courbe obtenue pour une poutrelle laminée à larges ailes. On voit que la plastification des ailes se produit très rapidement et que la courbe est surtout gouvernée par la formule (15.15) qui décrit la plastification progressive de l'âme. Pour cette raison, le bénéfice dû à la plastification de la section est *faible*.

Pour les profilés en acier, le facteur de forme α (15.13) varie avec la forme de la section entre 1,10 environ (certains HEA) et 1,22 (certains HEM). La valeur moyenne se situe aux environs de (HEA, HEB, HEM, IPE, INP, UNP, UAP)

$$\alpha = 1,15 \quad (15.16)$$

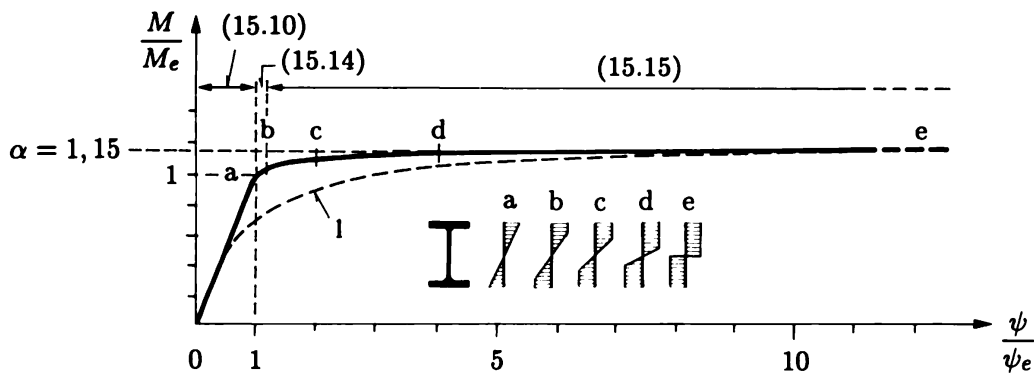


Fig. 15.11 Loi moment-courbure d'une poutrelle laminée en I (1 : loi en présence de contraintes résiduelles).

Les nombreux essais de flexion pure réalisés sur des poutres à section âme-semelles montrent que ces poutres suivent les lois théoriques obtenues ci-dessus, à condition qu'elles soient exemptes de contraintes résiduelles. Ces dernières, on le sait (§ 14.3.5), n'ont pas d'influence sur la valeur du moment plastique M_{pl} , mais modifient l'allure de la loi moment-courbure, car elles provoquent la plastification prématurée de la section (fig. 15.11, courbe en trait interrompu).

15.6.2 Propriété de la loi moment-courbure

Si la section avait une âme négligeable et si les ailes ne se plastifiaient, brusquement, qu'au moment où ε_y atteint partout ε_e , la courbe moment-courbure comporterait deux parties (fig. 15.12) :

- une partie élastique rectiligne OA d'équation

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e}$$

- une partie plastique horizontale d'équation

$$\frac{M}{M_e} = \alpha$$

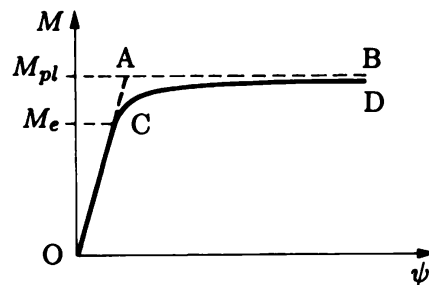


Fig. 15.12 Lois moment-courbure réelle (OCD) et modélisée (OAB), pour une section en I.

En réalité, les semelles se plastifient progressivement et l'âme a une légère influence sur la forme de la courbe. Néanmoins, à cause du coude brusque de celle-ci en C, on voit qu'on ne commet guère d'erreur en remplaçant la courbe réelle OCD par la ligne brisée OAB, ce qui revient à admettre la modélisation suivante :

La poutre a un comportement élastique parfaitement plastique : elle reste élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique M_{pl} est atteint, puis elle fléchit plastiquement à moment constant.

Cette hypothèse simplificatrice est à la base de la notion de rotule plastique, exposée ci-après.

15.7 Notion de rotule plastique

15.7.1 Introduction

La théorie de la flexion pure développée dans les sections précédentes peut s'appliquer avec une très bonne approximation à des poutres sollicitées par flexion simple sous l'action de forces transversales. On montre en effet ultérieurement (chap. 18) que, dans le domaine plastique, l'effort tranchant a une influence très faible sur la valeur du moment plastique, tant qu'il ne dépasse pas une certaine limite pour laquelle la plastification due aux contraintes tangentiels surviendrait avant celle due aux contraintes normales (soit, dans une section en I, plastification de l'âme avant celle des semelles).

La théorie peut même s'appliquer au cas des colonnes comprimées et fléchies, pour autant que l'effort normal reste une fraction suffisamment faible ($< 15\%$) de l'effort normal plastique (chap. 18).

On peut donc baser la théorie de la flexion plastique sur l'hypothèse suivante :

Une poutre faite d'un matériau obéissant au modèle élastique parfaitement plastique, tant en traction qu'en compression, peut supporter le moment fléchissant maximal donné par la formule

$$M_{pl} = Z\sigma_e$$

où Z est le module plastique de la section et σ_e la limite d'élasticité du matériau ; ce moment provoque dans la poutre une courbure très grande (théoriquement infinie).

15.7.2 Rotule plastique

Considérons une poutre simple chargée d'une force concentrée Q en son milieu (fig. 15.13 et 15.14). Faisons croître la force Q jusqu'à ce que le moment maximal $QL/4$ atteigne le moment plastique M_{pl} et comparons les deux cas suivants :

- *loi moment-courbure réelle* ; dans ce cas (fig. 15.13), les déformations plastiques s'étendent sur toute la zone CD où le moment dépasse le moment élastique maximal M_e (fig. 15.13b) ; si le facteur de forme avoisine $\alpha = 1,15$, cette zone a pour longueur

$$b = \frac{M_{pl} - M_e}{M_{pl}} L = 0,13 L$$

environ ; vu la forme de la loi moment-courbure (fig. 15.11 ; fig. 15.12, courbe OCD), la courbure reste très faible tant dans les portions élastiques AC et DB qu'aux environs des extrémités C et D de la zone plastifiée ; par contre, près du point E où le moment atteint son maximum, la courbure est extrêmement forte (fig. 15.13c) ; il en résulte que la déformée AE'B de la poutre est due, essentiellement, à cette concentration de la courbure ;

- *loi moment-courbure simplifiée* ; dans ce cas (fig. 15.14), les déformations plastiques tendent à se concentrer dans la section E de moment maximal ; la courbure reste faible sur toute la longueur de la poutre, sauf en E où elle tend à devenir infinie (fig. 15.14c), en accord avec la modélisation par deux droites de la loi (M, ψ) (fig. 15.12, loi bilinéaire OAB) ; la déformée de la poutre tend donc à présenter un point anguleux en E' et tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons articulés l'un sur l'autre au point E' (fig. 15.14d).

Si l'on compare les deux cas précédents, on observe que les différences sont minimes, vu que *la zone des déformations importantes est très localisée*. On peut donc admettre que la modélisation de la loi (M, ψ) , qui conduit à une concentration de la plastification et de la forte courbure en une seule section, représente bien la réalité : la poutre, à l'état limite, se compose de deux tronçons articulés au point de moment maximal (M_{pl}). En conclusion :

*Dans la section où le moment est maximal se forme une rotule à frottement qui reste bloquée tant que $M < M_{pl}$ et qui permet la rotation relative, dite **rotation plastique**, des deux tronçons de poutre dès que le moment atteint sa valeur plastique M_{pl} ; une telle rotule s'appelle **rotule plastique**⁽¹⁾.*

⁽¹⁾ En anglais *plastic hinge* et en allemand *Fliessgelenk*.

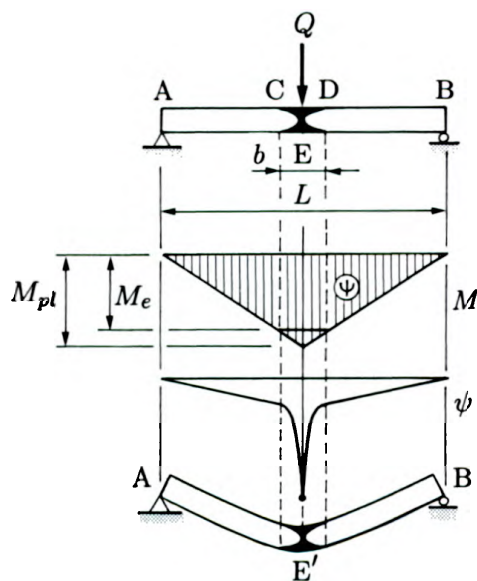


Fig. 15.13 Poutre simple sous force concentrée ; plastification et déformation pour la loi moment-courbure réelle.

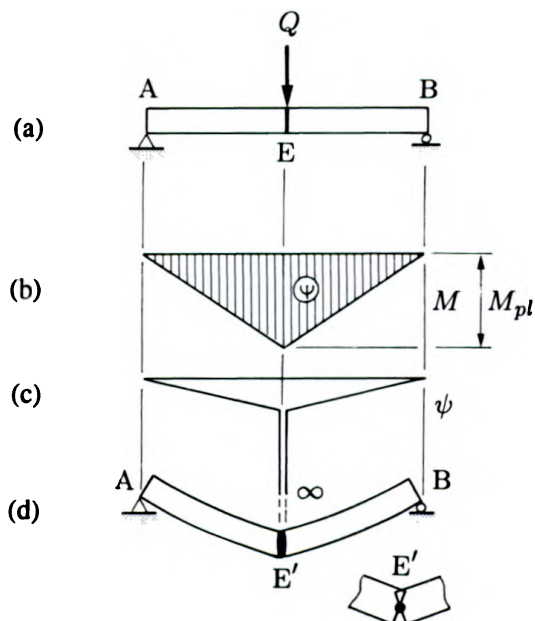


Fig. 15.14 Poutre simple sous force concentrée ; plastification et déformation pour la loi moment-courbure modélisée par deux droites.

Ce terme est en réalité mal choisi, parce qu'il fait naître l'idée de rotation libre, tandis qu'il s'agit ici de rotation bridée ; mais il est employé par tous. La figure 15.15 montre l'aspect d'une rotule plastique obtenue sous charge concentrée dans une poutrelle laminée. La zone plastifiée est effectivement très localisée et les lignes dessinées par l'écaillage de la chaux (§ 7.2.2) ne sont peut-être pas étrangères au choix du terme *rotule plastique*...

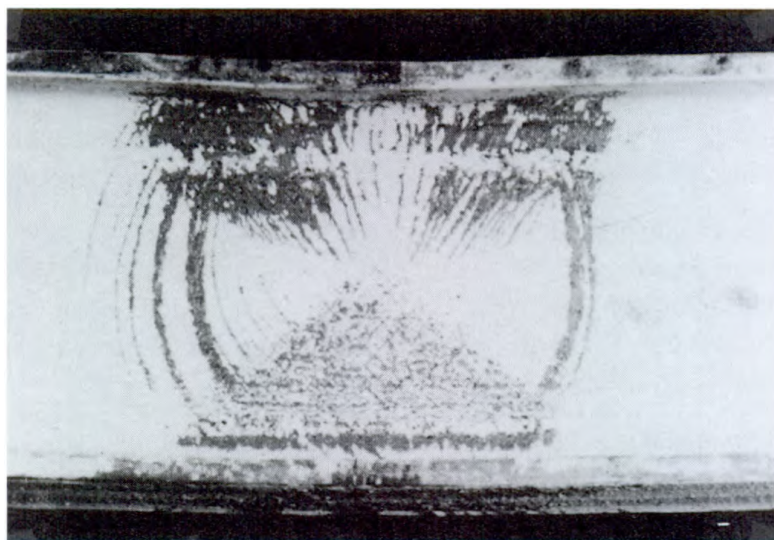


Fig. 15.15 Rotule plastique (photo MSM, Université de Liège).

15.7.3 Vérification expérimentale

Le résultat qui vient d'être obtenu a été contrôlé expérimentalement à de nombreuses reprises. La figure 15.16 montre par exemple la courbe flèche-charge enregistrée sur une poutrelle DIR 10 de 850 mm de portée chargée d'une force concentrée en son milieu⁽²⁾. Comme la déformation plastique est ici étroitement localisée et très forte, le métal de la zone plastique atteint rapidement l'extrémité du palier et s'écrouit. En conséquence, la poutre résiste à un moment plus grand que le moment plastique ; sa résistance continue à croître au fur et à mesure que la déformation augmente, mais la pente du diagramme devient beaucoup plus faible.

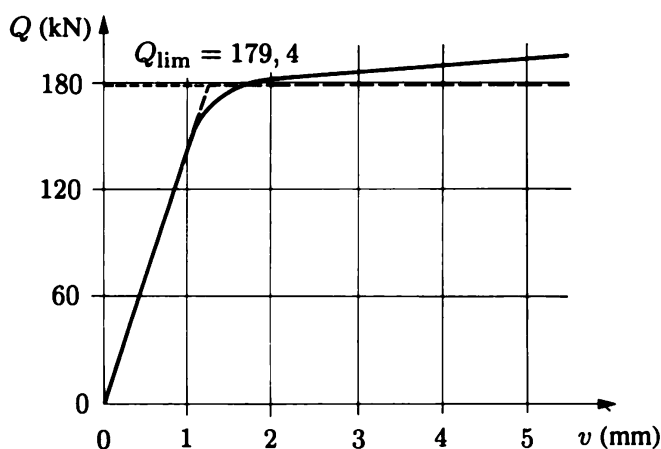


Fig. 15.16 Essai de flexion élasto-plastique.

Il faut retenir de ce qui précède que *l'écrouissage améliore la capacité de résistance des poutres fléchies*. Bien que cette réserve de résistance supplémentaire soit négligée dans la théorie développée ici, elle existe effectivement dans la plupart des structures en acier et contribue à leur donner une sécurité réelle supérieure à celle calculée.

Revenant à la figure 15.16, il est utile de pouvoir comparer la charge limite expérimentale avec celle donnée par l'analyse théorique. Pour un DIR 10, $Z = 186 \text{ cm}^3$; la mesure de la limite d'élasticité a fourni $\sigma_e = 20,5 \text{ kN/cm}^2$, d'où $M_{pl \text{ théorie}} = Z\sigma_e = 3813 \text{ kN}\cdot\text{cm} = QL/4$; enfin, $Q_{lim, \text{ théorie}} = 4M_{pl}/L = 179,4 \text{ kN}$. On voit que ce résultat (trait interrompu) est en excellent accord avec l'expérience.

15.8 Conclusions

On peut récapituler comme suit les principaux résultats pratiques obtenus dans ce chapitre. En première approximation, pour un matériau élastique parfaitement plastique tant en traction qu'en compression :

- la résistance plastique ultime d'une section soumise à flexion est caractérisée par le moment plastique $M_{pl} = Z\sigma_e$ qui ne dépend que de la qualité du matériau et de la forme de la section

⁽²⁾ Extrait de tests effectués au Laboratoire MSM de l'Université de Liège (voir photo de la page d'introduction à la Deuxième partie) ; le laminé DIR 10 correspond à l'actuel HEM 100.

droite ; pour les sections droites du type âme-semelles et la flexion autour de l'axe fort (plan de l'âme), M_{pl} dépasse le moment élastique maximal $M_e = W\sigma_e$ de 15 % en moyenne, ce qui représente la réserve de résistance au-delà de la limite d'élasticité ;

- de part et d'autre de toute section où le moment fléchissant passe par un maximum, il se forme une zone de déformations plastiques où la courbure est beaucoup plus forte que dans le restant de la poutre ; cette zone reste localisée si le facteur de forme est petit (section âme-semelles par exemple) ; pour l'étude analytique du comportement des ossatures, il est commode et suffisamment précis d'admettre qu'*il se forme dans chaque section de moment maximal une rotule plastique où la poutre se comporte comme si elle avait une articulation, la rotule opposant cependant à la rotation un moment constant M_{pl} .*

Dans la suite, les sections de rotule plastique seront caractérisées par un petit disque noir.

15.9 Exercices

15.9.1 Une poutre HEB 300, en acier doux ($\sigma_e = 25 \text{ kN/cm}^2$), est soumise à plastification complète par flexion dans le plan de l'âme, puis déchargée entièrement. Calculer et dessiner le diagramme des contraintes résiduelles.

15.9.2 On considère le profilé creux carré MSH 100·100·8, dont l'acier a une limite d'élasticité de 36 kN/cm^2 . Pour une flexion parallèle aux parois, calculer son facteur de forme. Si le profilé est fléchi dans un plan diagonal, le facteur de forme est-il le même ? Comparer les résistances élastique et plastique selon ces deux plans.

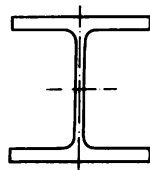


Fig. Ex. 15.9.1

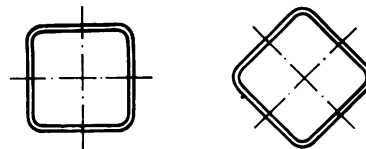


Fig. Ex. 15.9.2

15.9.3 Une section droite âme-semelles à semelles inégales est soumise à plastification complète. Calculer le moment plastique M_{pl} si la flexion a lieu dans le plan de l'âme et si le matériau est l'acier doux.

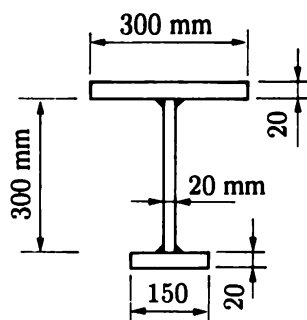


Fig. Ex. 15.9.3

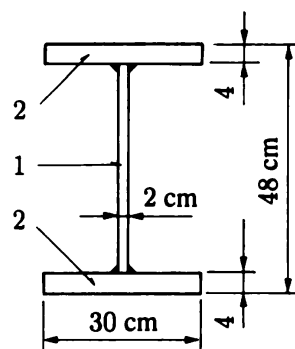


Fig. Ex. 15.9.4 (1 : acier doux ;
2 : acier faiblement allié).

15.9.4 On considère une poutre fléchie, à section transversale doublement symétrique du type âme-semelles, les semelles et l'âme étant constituées d'aciers différents. Sous l'effet d'un moment agissant dans le plan de l'âme, étudier la plastification progressive de cette section jusqu'à plastification complète ; calculer le moment plastique M_{pl} et le

facteur de forme α . Etudier ensuite le déchargement de la poutre (après plastification totale); calculer et dessiner le diagramme des contraintes normales résiduelles.

15.9.5 Calculer le moment plastique d'une poutre en béton armé, en admettant que le béton

- se comporte en compression selon une loi constitutive du type élastique parfaitement plastique,
- n'a aucune résistance en traction.

On donne $\sigma_{ea} = 46 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_{cb} = 1,6 \text{ kN/cm}^2$.

15.9.6 Calculer le moment plastique d'une poutre acier-béton à section monolithique, le béton obéissant à la même loi qu'à l'exercice précédent. La flexion a lieu dans le plan moyen. On néglige les armatures du béton et on donne $\sigma_{ea} = 24 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_{cb} = 2,5 \text{ kN/cm}^2$.

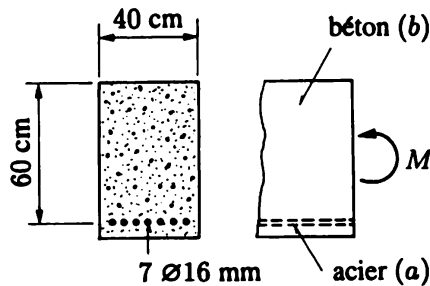


Fig. Ex. 15.9.5

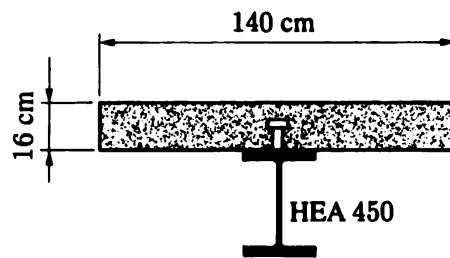


Fig. Ex. 15.9.6

15.10 Lexique

Moment élastique maximal

$$M_e = W \sigma_e = (I/y_{\max}) \sigma_e.$$

Courbure élastique maximale

$$\psi_e = M_e / EI.$$

Moment plastique

$$M_{pl} = Z \sigma_e.$$

Module plastique

Z ($[\text{cm}^3]$ par exemple);
section symétrique;
section non symétrique.

- $Z = 2S_{\text{demi}}$
- $Z = A(y_1 + y_2)/2$

Loi moment-courbure

Fonction $M(\psi)$.

Facteur de forme (α)

Mesure du gain obtenu par plastification de la matière *au droit de la section* ($\alpha = M_{pl}/M_e = Z/W$);

- section âme-semelles

α faible (1, 15 en moyenne); loi moment-courbure approximativement formée de deux droites (à l'image du modèle élastique parfaitement plastique).

Rotule plastique

Rotule à frottement, ne permettant la rotation que sous le moment plastique M_{pl} constant (la rotule plastique est une modélisation de la zone localement plastifiée et fortement courbée d'une poutre au voisinage immédiat d'une pointe ou d'un maximum du moment de flexion);
rotation sous M_{pl} .

- rotation plastique

16. Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples

16.1 Poutre bi-encastée chargée uniformément

A titre d'introduction à ce chapitre, considérons une poutre prismatique de longueur L , bi-encastée et uniformément chargée (fig. 16.1a). Cette poutre est deux fois hyperstatique⁽¹⁾. Soit $Q = qL$ sa charge totale.

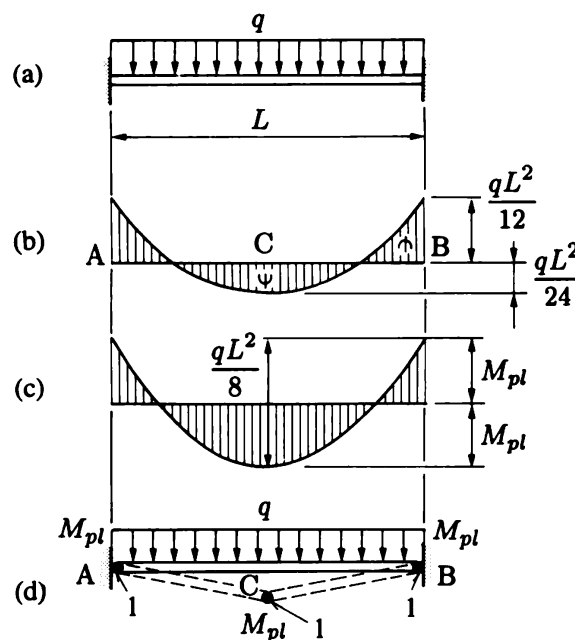


Fig. 16.1 Ruine plastique d'une poutre bi-encastée (1 : rotules plastiques).

⁽¹⁾ L'hyperstaticité axiale ne joue pas de rôle dans ce problème.

A l'état élastique, le diagramme des moments est la parabole variant de $qL^2/12$ aux appuis A et B à $qL^2/24$ au centre C (fig. 16.1b). La charge élastique maximale résulte de l'égalité (intensité)

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{12} = \frac{QL}{12} = M_e$$

d'où

$$Q_e = 12 \frac{M_e}{L} \quad (16.1)$$

Mais d'après le concept de rotule plastique (§ 15.7.2), la poutre se comporte élastiquement jusqu'à ce que les moments d'encastrement atteignent le moment plastique

$$M_A = M_B = \frac{qL^2}{12} = M_{pl}$$

A cet instant se forment des rotules plastiques en A et B, simultanément par symétrie (fig. 16.2).

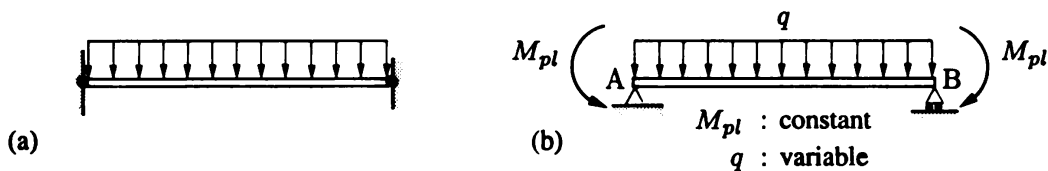


Fig. 16.2 Etat élasto-plastique de la poutre bi-encastree.

Si l'on augmente la charge, ces rotules tournent d'un certain angle (rotation plastique), mais la valeur des moments d'encastrement ne change pas. La poutre est en *état élasto-plastique*, à l'image de la figure 16.2(b); elle est isostatique, l'hyperstaticité ayant disparu parce que les deux moments d'encastrement se sont stabilisés à la valeur connue M_{pl} .

Donc, si l'on accroît la charge, la parabole des moments se creuse toujours plus jusqu'à l'instant où le moment au milieu atteint à son tour le moment plastique (fig. 16.1c). Une rotule plastique se forme alors en C et la poutre se transforme en un *mécanisme articulé à un degré de liberté*, qui s'effondre sous charge constante (fig. 16.1d) et s'appelle le *mécanisme de ruine* (§ 16.2.1).

On atteint l'*état plastique* et la charge correspondante est la *charge limite* cherchée. Du diagramme des moments associé (fig. 16.1c) et du théorème des deux moments, on tire

$$\frac{qL^2}{8} = 2M_{pl}$$

d'où la charge limite ($Q = qL$)

$$Q_{\lim} = 16 \frac{M_{pl}}{L} \quad (16.2)$$

obtenue par de simples considérations d'équilibre (caractère isostatique).

Si l'on compare le comportement de cette poutre avec celui de la poutre simple étudiée à la section 15.7, on constate qu'ils sont essentiellement différents. La poutre sur deux appuis simples est ruinée dès que le moment maximal y atteint la valeur plastique M_{pl} . Ici, au contraire, la plastification des sections d'extrémités produit une nouvelle évolution du diagramme des moments fléchissants dans la poutre, les parties les moins sollicitées venant au secours des plus chargées. Ce phénomène s'appelle

redistribution plastique entre sections et est caractéristique des structures hyperstatiques. L'analyse qui vient d'être développée montre que *les structures hyperstatiques fléchies possèdent une réserve de résistance* qui leur est propre et que la plasticité du matériau permet d'exploiter.

Ici, le gain de résistance de la poutre, procuré par la plasticité, vaut

$$\frac{Q_{\text{lim}}}{Q_e} = \frac{16}{12} \frac{M_{pl}}{M_e} = 1,33 \alpha$$

Le rapport 16/12 mesure le gain dû à la redistribution entre sections et le rapport M_{pl}/M_e celui dû à la plastification de la section.

On peut résumer le comportement de la poutre dans les trois états obtenus en traçant le diagramme (Q, v) de la flèche au centre v en fonction de la charge totale Q (fig. 16.3). La flèche maximale de la poutre au moment où elle entre en état plastique est $v = M_{pl}L^2/(12 EI)$. Légèrement inférieure au triple de la flèche élastique maximale, elle est donc suffisamment petite pour que *l'hypothèse de linéarisation géométrique reste vérifiée*.

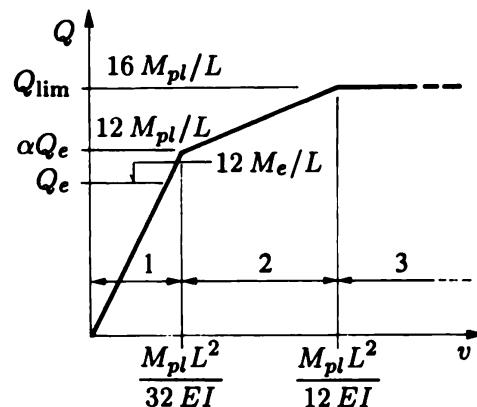


Fig. 16.3 Courbe flèche-charge de la poutre bi-encastée
(1 : état élastique ; 2 : état élasto-plastique ; 3 : état plastique).

16.2 Ruine d'une structure hyperstatique

16.2.1 Cas général

Considérons une ossature hyperstatique de degré h soumise à un système de forces qui *grandissent toutes proportionnellement l'une à l'autre*.

Au fur et à mesure que les forces augmentent, des rotules plastiques apparaissent successivement en diverses sections où le moment fléchissant a un maximum local. Si la structure est chargée de forces concentrées, les seules sections possibles sont les sections d'application des forces et les sections d'extrémités des poutres. Dans les poutres chargées de forces réparties, il peut naître en outre des rotules plastiques en pleine poutre, comme on l'a vu à la section précédente.

Chaque fois qu'une rotule plastique apparaît, le moment fléchissant s'y fixe à la valeur connue $M_{pl} = Z\sigma_e$ et le degré d'hyperstaticité de la structure se trouve réduit d'une unité.

Au moment où la h^{e} rotule se forme, la structure est statiquement déterminée. La formation de la $(h + 1)^{\text{e}}$ rotule transforme cette structure isostatique en un *mécanisme articulé à un degré de liberté*, qui prend sous charge constante des déplacements indéfinis, conduisant à la mise hors service de la structure. Ce mécanisme s'appelle *mécanisme de ruine*.

On appelle *charge limite*⁽²⁾ la mise en charge qui correspond à l'apparition de la $(h + 1)^{\text{e}}$ rotule plastique. C'est elle qui est la véritable *charge de ruine* de la structure, et c'est donc *vis-à-vis de cette charge qu'il faut calibrer la sécurité* lorsqu'on dimensionne selon la méthode plastique.

Remarque

Le fait que les forces augmentent proportionnellement est une condition importante : elle signifie en particulier que les forces ont un *multiplicateur commun* (λ) qui décrit l'accroissement de la mise en charge. La charge limite est alors définie par un seul paramètre, la *valeur limite de ce multiplicateur* (λ_{lim}).

16.2.2 Ruine partielle

Il peut se faire que certaines structures soient mises hors service par la ruine plastique d'une portion de la structure seulement, ce qui correspond à la formation d'un nombre de rotules plastiques inférieur à $h + 1$. Ainsi, le portique double de la figure 16.4, qui est six fois hyperstatique, peut être mis hors service par l'apparition des quatre rotules plastiques (1, 2, 3, 4) qui entraînent une déformation illimitée de la portion ABCD, la structure entière restant trois fois hyperstatique.

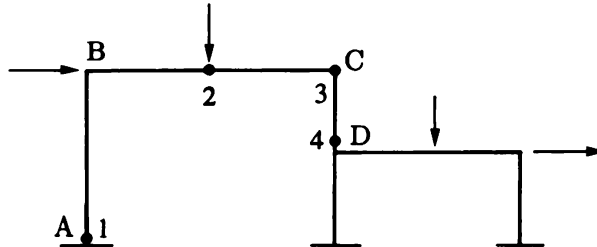


Fig. 16.4

16.2.3 Ruine plus que complète

Par contre, dans certaines structures symétriques, il peut se faire que la mise hors service entraîne la formation à la ruine de plus de $h + 1$ rotules. Ainsi, dans la poutre continue de la figure 16.5, il se forme d'abord une rotule plastique en C, puis, par symétrie, il apparaît simultanément deux rotules en D et E, soit au total trois rotules, alors que la structure n'est qu'une fois hyperstatique.

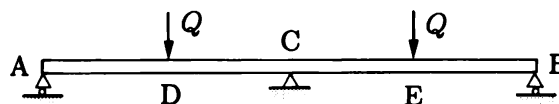


Fig. 16.5

⁽²⁾ En anglais *limit load* ou *collapse load* ; en allemand *Traglast*.

16.3 Calcul de la charge limite par le principe des déplacements virtuels

Toute charge limite a un caractère isostatique (§ 14.3.2 et 16.2.1) et est définie par un seul paramètre (λ_{lim} ; § 16.2.1). Or le principe des déplacements virtuels exprime l'équilibre et se trouve être fort puissant quand il n'y a qu'une inconnue à calculer (vol. 1, sect. 11.7). On établit ici la forme particulière qu'il prend en analyse limite (structures formées de poutres).

On choisit constamment comme champ cinématique virtuel, *les déplacements* (très petits, mais d'intensité arbitraire) *que subit la structure en train de s'effondrer sous charge constante*, c'est-à-dire *le mouvement d'un mécanisme de ruine*; dans ce dernier, *les déformations élastiques de la structure ne varient pas*; elles n'interviennent donc pas dans le travail et il revient au même de ne pas les considérer. On peut ainsi admettre que les poutres se comportent comme des bielles rigides, articulées les unes sur les autres aux rotules plastiques.

Il s'ensuit que, dans le travail virtuel interne δW_{int} (12.4), seul travaille le moment de flexion plastique M_{pl} sur la *rotation plastique* concentrée arbitraire θ , à l'endroit où se forment les rotules plastiques. La formule (12.4) se réduit donc à (on écrit θ et u à la place de $\delta\theta$ et δu)

$$\sum M_{pl} \theta = \sum F u \quad (16.3)$$

où

- la première somme touche les rotules plastiques qui se forment ;
- la seconde, l'ensemble des charges appliquées ;
- M_{pl} et F sont en équilibre : le diagramme des moments doit être en équilibre avec les charges extérieures dont il dérive ;
- θ et u sont compatibles : le mécanisme de ruine doit être possible (continu) et respecter les appuis (compatible avec les appuis) ; les déplacements θ et u restent très petits (linéarité géométrique) ; ils représentent la *cinématique virtuelle*.

Exemple 16.1

Soit à trouver la charge limite de la poutre bi-encastree uniformément chargée ($M_{pl} = \text{cste}$; fig. 16.6).

On a $h = 2$ et il faut donc 3 rotules pour créer un mécanisme de ruine. La position de ces rotules est clairement définie par l'étude de la section 16.1 précédente, et correspond d'ailleurs aux extremums du diagramme M (fig. 16.6). A la ruine, le moment vaut M_{pl} en chacune d'elle.

On définit la configuration du mécanisme de ruine par l'angle θ en A ; il en découle les rotations 2θ en C et θ en B. Pour exprimer le travail, la charge répartie sur les tronçons rectilignes AC et BC peut être remplacée par sa résultante $qL/2 = Q/2$ au centre de chaque tronçon⁽³⁾ ; cette résultante s'abaisse de $v = \theta L/4$ dans le mécanisme. D'où, à partir de (16.3),

$$M_{pl}\theta + M_{pl}(2\theta) + M_{pl}\theta = 2 \frac{Q}{2} \frac{\theta L}{4}$$

et

$$Q_{\text{lim}} = 16 \frac{M_{pl}}{L}$$

(3) $\int_0^{L/2} qv \, dx = q \int_0^{L/2} \theta x \, dx = q\theta \frac{L^2}{8} = \left(q \frac{L}{2}\right) \left(\theta \frac{L}{4}\right) = \left(\frac{Q}{2}\right) \left(\theta \frac{L}{4}\right)$;
avec $\int_0^{L/2} \theta x \, dx = \text{aire du triangle ACC}'$.

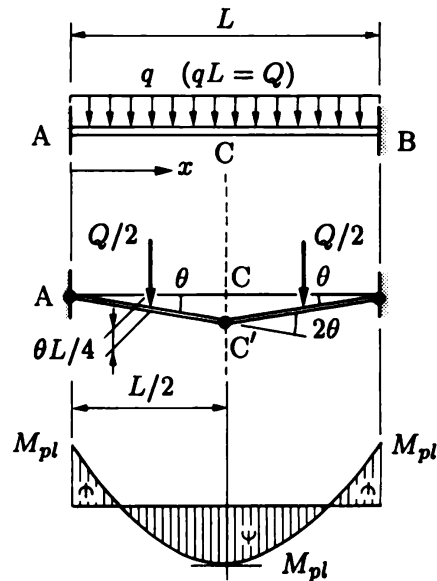


Fig. 16.6 Mécanisme de ruine de la poutre bi-encastée uniformément chargée.

Exemple 16.2

On désire trouver la charge limite de la poutre encastée appuyée sous charge concentrée à mi-portée ($M_{pl} = \text{cste}$; fig. 16.7).

La poutre est hyperstatique de degré 1 et il faut 2 rotules pour provoquer le mécanisme de ruine. Leur position est évidente (en A et C). Pour le mécanisme défini par la rotation plastique θ , on a, selon (16.3),

$$M_{pl}\theta + M_{pl}(2\theta) = F \frac{\theta L}{2}$$

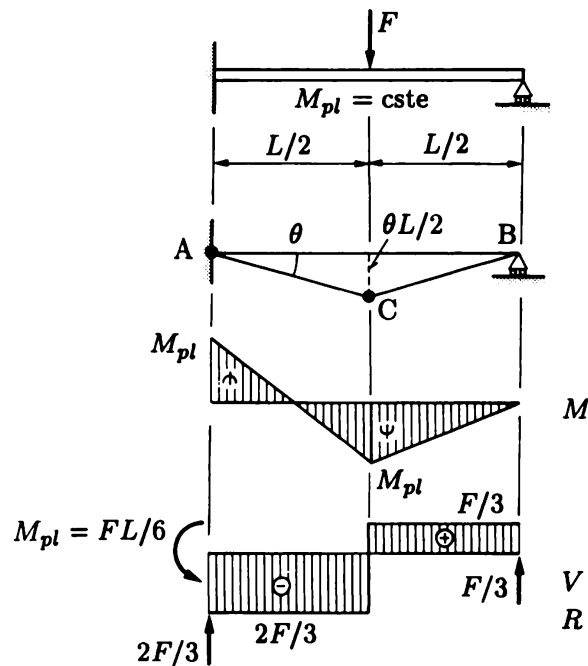


Fig. 16.7 Poutre encastée appuyée sous charge ponctuelle.

d'où

$$F_{\text{lim}} = 6 \frac{M_{pl}}{L}$$

Le diagramme M est évident. On en déduit le diagramme V par dérivation ($V = -dM/dx$), d'où les réactions R . Le gain vis-à-vis de la solution élastique est ici⁽⁴⁾

$$\frac{F_{\text{lim}}}{F_e} = \frac{6M_{pl}/L}{16M_e/3L} = \frac{9}{8} \alpha = 1,13 \alpha$$

Remarque

Dans ces deux exemples simples, il n'y a aucune ambiguïté ni sur le nombre ni sur la position des rotules, ce qui permet de calculer directement la solution (charge limite) par le principe des déplacements virtuels. Tel n'est pas, en général, le cas (chap. 17).

16.4 Bénéfice dû à la plasticité

Le bénéfice réalisé en remplaçant la charge élastique maximale par la charge limite est essentiellement variable selon le type de structure étudiée et la disposition des charges.

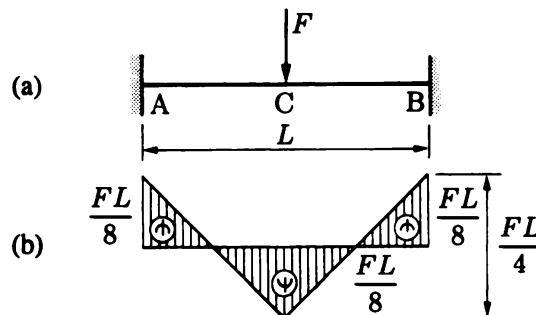


Fig. 16.8

Ainsi, alors que le bénéfice était de 33,3 % dans le cas de la poutre bi-encastée chargée uniformément, il peut fort bien être nul pour une autre distribution des charges. Il suffit, pour trouver un exemple de ce genre, de choisir des charges telles que les trois rotules plastiques se forment simultanément : si la poutre est chargée d'une force concentrée en son milieu (fig. 16.8a), le diagramme des moments présente trois moments extrêmes d'intensité égale et de valeur $FL/8$ (fig. 16.8b). Il s'ensuit que, lorsque $FL/8 = M_{pl}$, c'est-à-dire quand la force atteint la valeur limite $F_{\text{lim}} = 8M_{pl}/L$, des rotules plastiques apparaissent simultanément aux points A, B, C, et la structure se transforme instantanément en mécanisme.

La charge élastique maximale est ici presque égale à la charge limite : la plasticité n'apporte pas d'autre bénéfice que celui dû à la plastification de la section droite, mesuré par le facteur de forme α (15.13).

⁽⁴⁾ F_e est tiré de l'annexe 23.3.

De manière plus générale, il ne se produit aucune redistribution des moments fléchissants et la plasticité n'apporte aucun bénéfice quand toutes les rotules nécessaires à la formation du mécanisme de ruine se produisent simultanément. Or, dans la conception élastique classique, les dimensions d'une ossature destinée à supporter des charges *fixes* sont optimales quand un très grand nombre de sections droites, sinon toutes, travaillent simultanément à la limite d'élasticité. Il faut reconnaître que cette circonstance ne se produit que rarement, voire jamais. Par exemple, en construction métallique, les ossatures ordinaires sont formées de poutres prismatiques laminées appartenant à une série discrète de profilés, de sorte qu'elles ne sont jamais optimales et que le bénéfice dû à la redistribution plastique entre sections est généralement très appréciable.

16.5 Domaine de validité de la théorie de l'analyse limite

La théorie de l'analyse limite développée jusqu'ici est valable pour autant que les hypothèses suivantes soient remplies :

- chaque poutre de la structure possède un moment fléchissant maximal, le moment plastique $M_{pl} = Z \sigma_e$, correspondant à la plastification entière de la section droite ;
- au voisinage des sections où $M = M_{pl}$, il se forme, à cause de la ductilité du matériau, des zones à forte courbure qu'on peut supposer concentrées dans ces sections (rotules plastiques) ;
- le matériau reste ductile jusqu'à la charge de ruine ; il ne se rompt pas avant d'avoir subi les importantes déformations plastiques locales accompagnant la formation des rotules ;
- la valeur du moment plastique d'une poutre n'est pas influencée par les grandeurs de l'effort normal et de l'effort tranchant existant dans la section de rotule plastique⁽⁵⁾, ni par les surtensions locales dues à une force concentrée éventuelle appliquée dans cette section ;
- les actions appliquées à la structure sont supposées grandir toutes proportionnellement ;
- la structure ne manifeste aucun phénomène d'instabilité, tant locale que globale, avant que la dernière rotule du mécanisme de ruine ne se soit formée ;
- au moment où la dernière rotule se forme, les déplacements sont encore acceptables au point de vue de l'usage qui doit être fait de la structure ; ils sont assez faibles pour ne pas modifier sensiblement le jeu des forces dans cette structure ;
- les assemblages de la structure sont capables de transmettre le plein moment plastique ;
- il n'y a pas de fatigue.

16.6 Insensibilité de la charge limite vis-à-vis des autocontraintes de la structure

Dans le cadre des hypothèses énumérées ci-dessus, on peut affirmer que la charge limite ne dépend aucunement des autocontraintes de la structure, provenant des contraintes de bridage (dus aux erreurs sur les dimensions des pièces, au retrait, etc.), des contraintes thermiques (effet de la température), du tassement d'un ou de plusieurs appuis, de la déformabilité des assemblages supposés parfaitement rigides dans l'étude théorique, des contraintes initiales (par exemple résiduelles dans les pièces laminées ou composées par soudure), de la précontrainte (béton précontraint), etc. (§ 14.3.5).

⁽⁵⁾ Cette hypothèse est relaxée au chapitre 18.

En effet, la charge limite est statiquement déterminée et calculable dès que la position des rotules plastiques est connue : un état d'autocontrainte, de par sa nature, ne saurait donc la faire varier. Par contre, le comportement élasto-plastique (représenté par exemple par une courbe flèche-charge ; fig. 15.11) est évidemment affecté par les autocontraintes précitées.

Les conclusions théoriques précédentes ont été vérifiées expérimentalement par de nombreux auteurs. Ainsi, Maier-Leibnitz (1928) a exécuté des essais sur une poutre continue à deux travées égales, faite de deux poutrelles prismatiques en I.

Dans un premier essai, les trois appuis étaient rigoureusement de niveau (fig. 16.9). Dans un deuxième, et avant mise en charge, l'appui central fut surélevé jusqu'à atteindre dans la fibre supérieure de la section médiane la contrainte admissible de traction. Dans la conception classique de la sécurité, la poutre ne pouvait supporter aucune charge supplémentaire. Malgré cela, la charge limite expérimentale atteignit la valeur théorique. Il en fut de même lorsque l'appui central fut, dans un troisième essai, abaissé de façon à atteindre, dans la fibre supérieure de la section médiane, la contrainte admissible en compression.

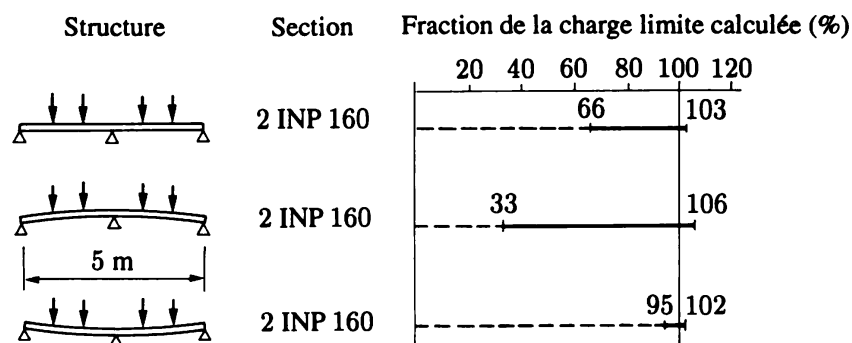


Fig. 16.9 Essais de Maier-Leibnitz (Maier-Leibnitz H., *Beitrag zur Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St 37 und aus Holz*, Die Bautechnik, Hefte 1 und 2, 1928, S. 11 und 27).

En face de chaque essai, une échelle en pour cent (fig. 16.9) donne les valeurs suivantes :

- la charge limite calculée correspond à 100 % ;
- la portion en trait interrompu exprime la charge élastique maximale calculée ;
- la longueur totale représente la charge limite expérimentale ;
- la portion en trait plein donne le bénéfice dû à la plasticité.

On voit que les autocontraintes imposées modifient profondément la valeur de la charge élastique maximale et pourraient même l'annuler. Au contraire, il y a bon accord entre les charges limites calculées et observées, quelles que soient les autocontraintes imposées à la poutre.

16.7 Vérifications expérimentales de la théorie de l'analyse limite

Divers auteurs ont confronté la théorie avec des essais exécutés sur des poutres continues et sur des portiques simples. Dans ce qui suit, on ne retient que quelques essais en vraie grandeur effectués sur des structures faites de poutrelles laminées en I ou sur des poutres en béton armé.

L'examen de ces échelles montre que :

- la charge limite expérimentale est quasi toujours supérieure à la charge limite calculée, c'est-à-dire que la sécurité est pratiquement toujours garantie par la théorie ;
- les structures dimensionnées en suivant une conception élastique de la sécurité (chap.3) possèdent une sécurité réelle très variable : cette conception ne fournit pas une sécurité homogène des ossatures faites d'un matériau élasto-plastique.

16.8 Exercices

16.8.1 Calculer la charge limite $Q_{\text{lim}} = qL$ de la poutre encastree appuyee ($M_{pl} = \text{cste}$) uniformement chargée (littéral). Chiffrer le bénéfice vis-à-vis de la charge élastique Q_e .

16.8.2 Une panne de toiture horizontale forme une poutre continue sur six appuis équidistants. La charge de service (poids propre estimé compris) est de 4,4 kN/m. Un dimensionnement élastique conduit à un IPE 180 en acier doux. Faire l'analyse plastique de cette panne et trouver le IPE nécessaire. On donne $\gamma_F = 1,5$ et $\sigma_e = 24 \text{ kN/cm}^2$.

16.8.3 Déterminer la charge limite d'une poutre sur trois appuis ABC ($M_{pl} = \text{cste}$; littéral). Indication : étudier séparément chaque travée.

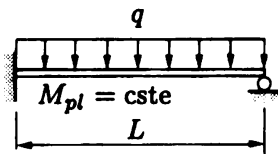


Fig. Ex. 16.8.1

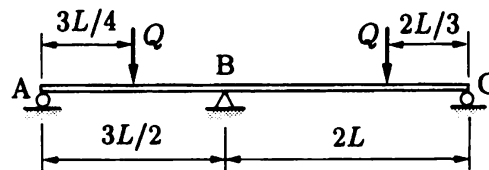


Fig. Ex. 16.8.3

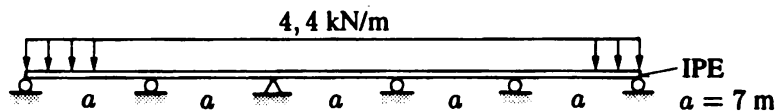


Fig. Ex. 16.8.2

16.8.4 Trouver la force limite F_{lim} d'un anneau ($M_{pl} = \text{cste}$) pincé par deux forces F (littéral ; négliger l'influence de N et V).

16.8.5 Un cadre bi-encastree en acier doux ($\sigma_e = 23,5 \text{ kN/cm}^2$) est soumis aux actions F et Q . Pour chacune d'elle séparément, dessiner le mécanisme de ruine et calculer la charge limite (F_{lim} , Q_{lim}).

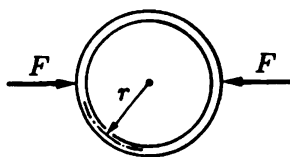


Fig. Ex. 16.8.4

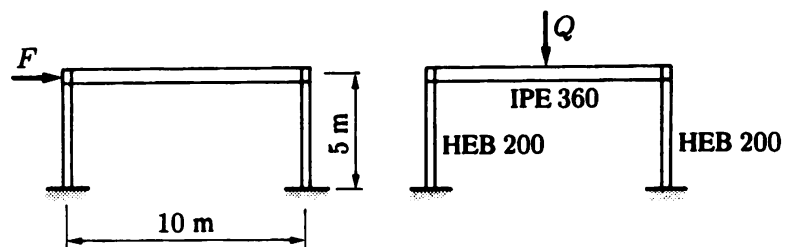


Fig. Ex. 16.8.5

16.9 Lexique

Charge limite	Mise en charge provoquant la ruine (état limite ultime) d'une structure par formation d'un mécanisme de ruine.
Mécanisme de ruine	Mécanisme articulé à un degré de liberté, comportant $h+1$ rotules plastiques, s'effondrant sous charge limite constante (h est le degré d'hyperstaticité de la structure).
Redistribution plastique <ul style="list-style-type: none"> • entre sections • dans la section 	Evolution de la répartition des efforts intérieurs dans la structure hyperstatique suite à la formation des rotules plastiques ; des contraintes dans la section droite, dite plastification de la section droite (et mesurée par le facteur de forme α).
Principe des déplacements virtuels (en analyse limite)	Expression de l'équilibre global du mécanisme de ruine au moment où il se forme : $\sum M_{pl}\theta = \sum Fu$ les rotations plastiques θ et les déplacements u associés aux forces F forment la cinématique virtuelle du mécanisme de ruine.

17. Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite

17.1 But des théorèmes

Considérons le portique de la figure 17.1. Trois fois hyperstatique, quatre rotules plastiques le transformeront en mécanisme de ruine. Mais des rotules sont susceptibles d'apparaître en huit sections (numérotées sur la figure). Parmi les 70 combinaisons possibles, quelle est la bonne ?

La solution exacte d'un problème d'analyse limite doit satisfaire :

- la statique (équilibre) ;
- la cinématique (compatibilité) ;
- la loi constitutive (élasto-plastique).

Ces conditions sont évidemment identiques à celle d'un problème d'élasticité (statique – cinématique – loi de Hooke) ; comme en élasticité, elles sont souvent difficiles à remplir.

Les méthodes générales de recherche de la charge limite s'appuient sur les deux **théorèmes fondamentaux de l'analyse limite** (1938 à l'est ; 1949 à l'ouest, indépendamment) qui permettent de trouver des valeurs approchées de la solution lorsque toutes les conditions précédentes ne sont pas remplies : le *théorème statique* fournit une valeur de la charge limite erronée par défaut ; le *théorème cinématique* une valeur erronée par excès.

Un troisième *théorème*, dit *combiné*, permet de vérifier si la solution obtenue est la solution exacte.

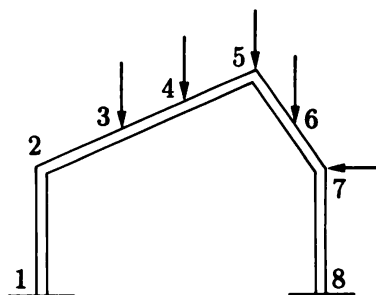


Fig. 17.1 Portique bi-encasté.

Les démonstrations qui suivent sont basées sur les structures en poutres fléchies, mais se généralisent à toute structure ou solide.

17.2 Loi constitutive

Suite à l'introduction du concept de rotule plastique (sect. 15.7), la *rotation plastique* θ dans une rotule obéit aux relations

$$\begin{aligned} \theta &= 0 & \text{si } -M_{pl} < M < M_{pl} \\ \theta &> 0 & \text{si } M = M_{pl} \\ \theta &< 0 & \text{si } M = -M_{pl} \end{aligned} \quad (17.1)$$

où θ est d'amplitude indéterminée dans les inéquations.

Ces relations traduisent la *loi constitutive* (M, θ) liant la rotation plastique θ au moment M (fig. 17.2). Cette loi est du type rigide parfaitement plastique (§ 7.7.2). Elle sert de base à l'étude *matériellement non linéaire* de l'analyse limite basée sur le concept de rotule plastique.

La loi constitutive (17.1) contient deux conditions bien précises, l'une de caractère *statique*, l'autre *cinématique*.

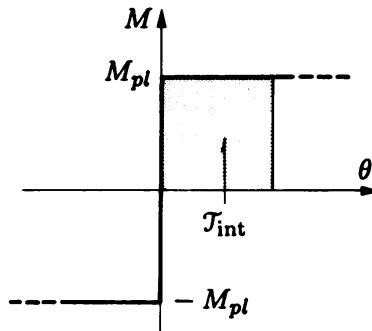


Fig. 17.2 Loi constitutive de la rotule plastique.

Condition statique

Tout moment ou diagramme de moments $M(x)$ doit être tel que

$$-M_{pl} \leq M(x) \leq M_{pl} \quad (17.2)$$

C'est la *condition statique de plasticité*⁽¹⁾.

Condition cinématique

On appelle *travail interne dissipé dans une rotule* le produit $M_{pl}\theta$ et la loi constitutive montre qu'il doit être *positif* (car si $\theta > 0$, alors M_{pl} aussi, et si $\theta < 0$, alors M_{pl} aussi ; fig. 17.2)

$$\mathcal{J}_{int} = M_{pl}\theta > 0 \quad (17.3)$$

⁽¹⁾ Elle est équivalente au critère de plasticité des métaux $\sigma^* \leq \sigma_e$ (§ 7.10.1).

C'est la *condition cinématique de plasticité*⁽²⁾. Elle exprime simplement le fait que, dans une rotule plastique, *moment et rotation tournent dans le même sens*.

17.3 Statique licite

Lorsque les efforts intérieurs et les actions

- sont en équilibre,
- vérifient la condition statique de plasticité,

la statique est dite *licite*.

En général, il suffit de satisfaire à ces conditions au niveau du diagramme des moments fléchissants.

17.4 Cinématique licite

Lorsqu'un mécanisme de ruine

- est continu et compatible avec les appuis,
- respecte la condition cinématique de plasticité,

la cinématique est dite *licite*.

17.5 Multiplicateur limite

Soit une structure soumise à un jeu de forces F_i connues ; on suppose que toutes ces forces grandissent proportionnellement : elles sont donc de la forme λF_i où λ est le *multiplicateur* des charges.

Le problème d'analyse limite revient à trouver le *multiplicateur limite* λ_{lim} pour lequel la structure s'effondre sous mise en charge constante par formation d'un mécanisme de ruine (§ 16.2.1).

17.6 Théorème statique

Ce théorème tente d'estimer la valeur du multiplicateur limite sur la base d'une statique licite seulement.

Dans la structure à analyser, construisons un diagramme de moments M^- quelconque, mais *licite* (il suffit pour cela de faire varier la valeur des inconnues hyperstatiques tout en respectant (17.2) ; fig. 17.3) ; soit λ^- le multiplicateur qui lui correspond. Que penser de cette valeur vis-à-vis de la valeur exacte λ_{lim} ?

⁽²⁾ Ces résultats sont identiques à ceux obtenus pour la densité d'énergie de déformation U_0 (vol. 3, chap. 4). Le travail interne $M_{pl}\theta$ correspond à l'énergie U_0 , qui est aussi définie positive, et mesure l'aire sous la courbe (M, θ) comme U_0 sous (σ, ε) . Mais vu qu'on est ici en présence d'une loi dissipative (plasticité !), on ne peut se permettre d'employer les termes propres aux systèmes conservatifs.

La statique étant licite, il y a toujours équilibre ; on peut donc utiliser le principe des déplacements virtuels (16.3), couplé à la cinématique du mécanisme de ruine réel, pour exprimer l'équilibre entre :

- les forces $\lambda^- F$ et les moments licites M^- , d'une part,
- les forces $\lambda_{\text{lim}} F$ et les moments réels M , d'autre part.

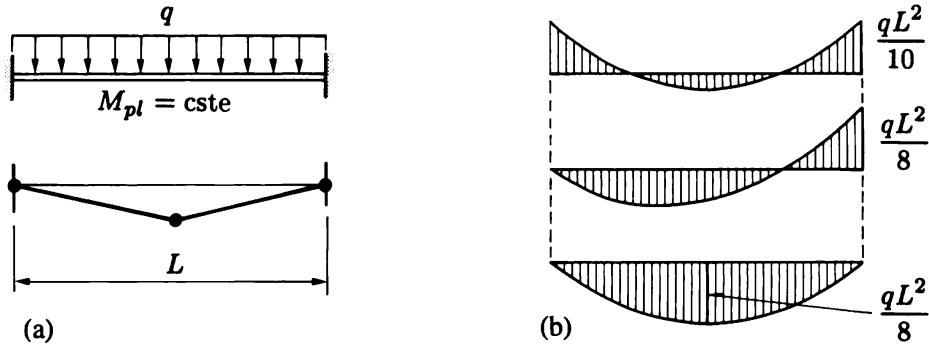


Fig. 17.3 Théorème statique : (a) structure et son mécanisme de ruine réel ; (b) diagrammes M^- licites.

On obtient

$$\sum M^- \theta = \lambda^- \sum F u \quad (\text{statique licite}) \quad (a)$$

$$\sum M_{pl} \theta = \lambda_{\text{lim}} \sum F u \quad (\text{réel}) \quad (b)$$

Mais, dans (a), $M^- \leq M_{pl}$; donc, avec (b),

$$\lambda^- \leq \lambda_{\text{lim}} \quad (17.4)$$

Cette inégalité exprime le théorème suivant :

Théorème statique : toute charge limite obtenue à partir d'une distribution licite des efforts intérieurs est inférieure ou égale à la charge limite réelle.

Il s'agit là d'un théorème tout à fait remarquable pour l'ingénieur. Il signifie que, *dans les structures faites d'un matériau ductile* (acier, béton armé, alliages d'aluminium...), *un dimensionnement basé sur le seul respect des conditions statiques d'équilibre et de plasticité place forcément du côté de la sécurité*. On ne se préoccupe pas de la cinématique : elle peut être violée.

C'est la raison pour laquelle, en construction métallique par exemple, on ne s'intéresse pas aux concentrations de contrainte qui naissent au bord des trous de boulons, lors du dimensionnement des barres ou des poutres ; il suffit de calculer avec l'aire nette (aire totale moins celle due aux trous).

On dit qu'on utilise la *méthode statique* quand on recherche une valeur approchée λ^- de λ_{lim} sur la base de la seule statique licite (§ 17.9.2).

17.7 Théorème cinématique

Ce théorème recherche une valeur approchée du multiplicateur limite en ne satisfaisant qu'aux seules conditions cinématiques.

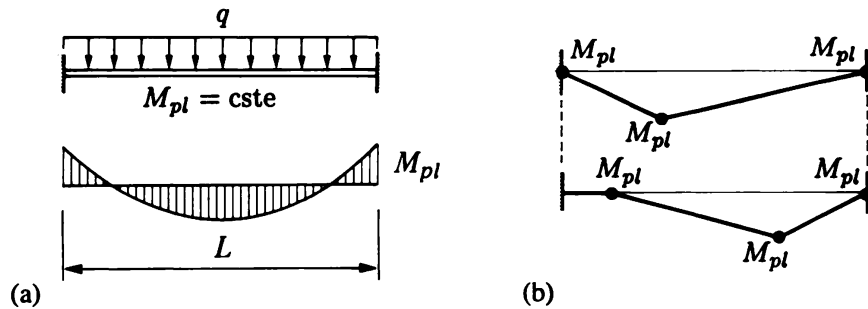


Fig. 17.4 Théorème cinématique : (a) structure et son diagramme des moments réel ; (b) mécanismes θ^+ licites.

Dans la structure étudiée, construisons un mécanisme de ruine θ^+ quelconque, mais *licite* (il suffit pour cela de faire varier la position des rotules et d'appliquer (17.3); fig. 17.4); soit λ^+ le multiplicateur qui lui correspond. Que vaut λ^+ vis-à-vis de la vraie valeur λ_{lim} ?

Utilisons comme cinématique ce mécanisme licite θ^+ et comme statique :

- les forces $\lambda^+ F$ et les moments M_{pl} aux rotules de ce mécanisme (du diagramme M^+ , seules interviennent les valeurs prédéterminées M_{pl} aux rotules), d'une part,
- les forces $\lambda_{\text{lim}} F$ et les moments M réels (donc licites), d'autre part.

Mais, dans le premier cas, on ne peut pas appliquer le principe des déplacements virtuels parce que la statique ($\lambda^+ F, M^+$) n'est pas nécessairement licite. En effet, le choix d'un quelconque mécanisme (u^+, θ^+) n'implique pas que le diagramme des moments correspondant (M^+) soit en équilibre avec les forces extérieures ou respecte la condition statique de plasticité (17.2).

Pour calculer λ^+ , on écrit alors une égalité entre

- le *travail interne* dissipé aux rotules

$$\mathcal{T}_{\text{int}} = \sum M_{pl} \theta^+ \quad (17.5)$$

et, ce faisant, on respecte la condition cinématique de plasticité (17.3);

- le *travail externe* des forces appliquées

$$\mathcal{T}_{\text{ext}} = \lambda^+ \sum F u^+ \quad (17.6)$$

qui doit être positif, parce que (17.5) l'est par nature (et à cause de l'équation suivante).

On appelle **équation de travail** l'égalité

$$\mathcal{T}_{\text{int}} = \mathcal{T}_{\text{ext}} \quad (17.7)$$

qui définit λ^+ .

On a donc, avec (17.7) pour le premier cas et le principe des déplacements virtuels pour le second

$$\sum M_{pl} \theta^+ = \lambda^+ \sum F u^+ \quad (\text{équation de travail}) \quad (c)$$

$$\sum M \theta^+ = \lambda_{\text{lim}} \sum F u^+ \quad (d)$$

Dans (c), $M_{pl} \geq M$; donc, avec (d),

$$\lambda^+ \geq \lambda_{\lim} \quad (17.8)$$

Ce résultat conduit au théorème suivant :

Théorème cinématique : *tout multiplicateur limite obtenu à partir d'une cinématique licite est supérieur ou égal au vrai multiplicateur.*

Ce théorème signifie qu'on surestime la capacité portante réelle d'une structure si on la calcule en ne respectant que les seules conditions cinématiques de compatibilité et de plasticité. Violer l'équilibre ou la condition statique de plasticité ne place donc pas du côté de la sécurité.

On dit qu'on recourt à la *méthode cinématique* quand on effectue l'analyse limite sur la base de la seule cinématique licite (§ 17.9.3). Cette méthode est attrayante parce qu'elle visualise la ruine par le tracé du mécanisme ; simple, intuitive et rapide, elle acquiert toute sa valeur grâce au *théorème combiné*, donné ci-après.

17.8 Théorème combiné

Les théorèmes précédents peuvent être combinés pour former un nouveau théorème ; en effet, la seule valeur du multiplicateur qui correspond simultanément à un diagramme des moments et à un mécanisme tous deux licites est la valeur limite réelle, puisque, de (17.4) et (17.8),

$$\lambda^- \leq \lambda_{\lim} \leq \lambda^+ \quad (17.9)$$

ce qui s'exprime ainsi :

Théorème combiné : *si, dans une structure donnée soumise à un chargement donné, on peut trouver une statique et une cinématique simultanément licites, alors le multiplicateur obtenu est le multiplicateur limite exact.*

Remarque

Le théorème combiné n'affirme pas que le diagramme des moments à la ruine est unique, ni que le mécanisme de ruine est unique.

17.9 Mise en œuvre des théorèmes

17.9.1 Les trois théorèmes

Les trois théorèmes de l'analyse limite se représentent de manière claire et synthétique par le diagramme de la figure 17.5.

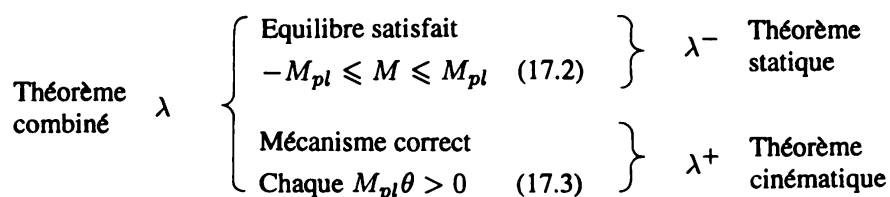


Fig. 17.5 Diagramme des trois théorèmes.

17.9.2 Méthode statique

Pour mettre en œuvre le théorème combiné dans la méthode statique, on doit examiner particulièrement la correspondance entre le diagramme des moments fléchissants et le mécanisme.

Si l'on a trouvé un diagramme de moments licite, où la condition $|M| = M_{pl}$ a lieu en un nombre $h + 1$ de sections, de façon à former un mécanisme de ruine, il ne s'ensuit pas qu'il y corresponde effectivement un mécanisme licite : on doit encore vérifier, dans toutes les rotules plastiques, que la condition cinématique de plasticité est satisfaite, c'est-à-dire que les rotations θ et les moments plastiques M_{pl} tournent dans le même sens.

17.9.3 Méthode cinématique

Le théorème combiné permet également de contrôler si un mécanisme licite donné est bien un mécanisme de ruine réel.

En chacune des $h + 1$ rotules de ce mécanisme, le moment fléchissant doit avoir la grandeur du moment plastique correspondant et un sens de rotation adéquat. Ces $h + 1$ moments étant connus, la distribution des moments est statiquement déterminée et on l'obtient aisément. Si elle est en équilibre avec les forces extérieures et vérifie la condition statique de plasticité $|M| \leq M_{pl}$ en toute section, le mécanisme donné est un mécanisme de ruine réel.

Insistons, à propos du théorème cinématique, sur *une erreur par trop fréquente*, à savoir croire que l'équilibre doit aussi être satisfait. Il n'en est rien, puisque choisir un mécanisme licite n'implique pas nécessairement qu'il existe un diagramme de moments en équilibre avec les actions extérieures pour ce mécanisme.

Pour la poutre de la figure 17.6 par exemple, le premier mécanisme, exact, conduit à $q_{lim} = 10,67 M_{pl}/L^2$; le second, licite seulement, fournit la valeur $q^+ = 16 M_{pl}/L^2$, supérieure à q_{lim} comme il se doit ; néanmoins, on vérifie aisément que l'équilibre n'est pas satisfait dans les porte-à-faux ($M_A = qL^2/32 \neq M_{pl} = qL^2/16$).

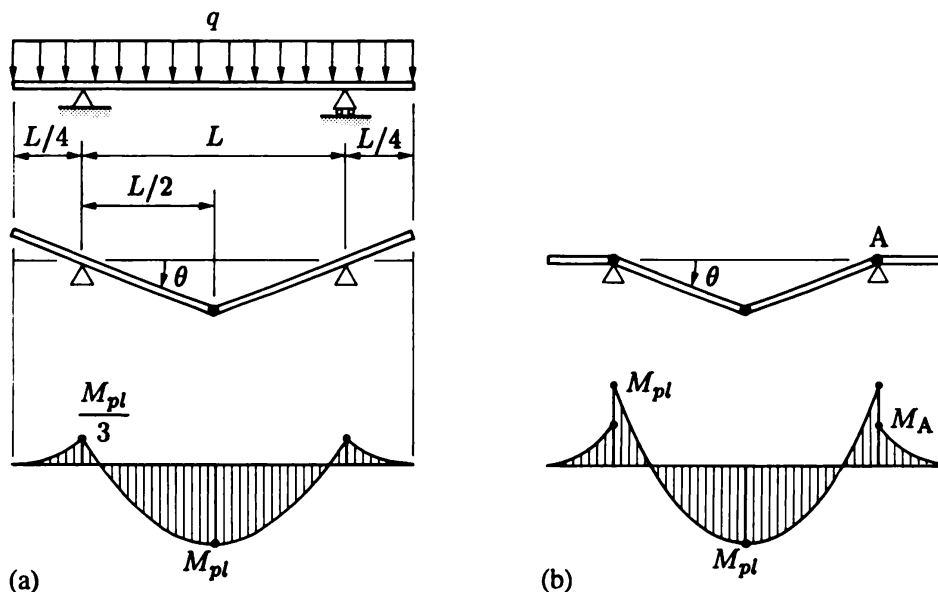


Fig. 17.6 La méthode cinématique n'exige pas l'équilibre : (a) poutre et sa solution exacte ; (b) mécanisme licite sans équilibre du diagramme des moments avec la charge appliquée.

17.9.4 Lemmes de Feinberg

Considérons une structure de poutres fléchies soumise à un cas de charge donné ; si on la renforce, c'est-à-dire si le moment plastique augmente dans au moins une section sans diminuer nulle part ailleurs, on a la propriété suivante :

Lemme : *si on renforce une structure, la valeur du multiplicateur limite ne peut pas diminuer.*

En effet, le diagramme des moments à l'état limite pour la structure originelle reste un diagramme licite pour la structure renforcée. Par suite, le multiplicateur limite de la structure originelle devient un multiplicateur statique, un λ^- , pour la structure renforcée. De ce fait, le multiplicateur limite de la structure renforcée lui est supérieur ou égal, en vertu du théorème statique.

Ce lemme s'oppose à un résultat paradoxal propre à la méthode élastique de dimensionnement, selon lequel la résistance d'une structure renforcée peut diminuer.

Semblablement, on a :

Lemme : *si l'on affaiblit une structure, le multiplicateur limite ne peut pas augmenter.*

17.10 Applications

17.10.1 Méthode cinématique

Soit une poutre prismatique soumise à deux forces concentrées (fig. 17.7). Ici $h = 1$ et il faut deux rotules pour avoir un mécanisme de ruine. Or trois rotules sont susceptibles de naître, dans les sections A, B et C. On essaie alors successivement les deux mécanismes proposés aux figures 17.7(b) et 17.7(c) (la troisième possibilité n'est visiblement pas intéressante). Ecrivant l'équation de travail⁽³⁾ (17.7), on a :

- (fig. 17.7b) $M_{pl}(\theta) + M_{pl}(3\theta) = Q(\theta a) + Q(2\theta a)$, d'où

$$Q_1^+ = \frac{4}{3} \frac{M_{pl}}{a}$$

- (fig. 17.7c) $M_{pl}(2\theta) + M_{pl}(3\theta) = Q(2\theta a) + Q(\theta a)$, d'où

$$Q_2^+ = \frac{5}{3} \frac{M_{pl}}{a}$$

D'après le théorème cinématique, la première charge limite Q_1^+ est la plus voisine de la vraie charge limite. Est-ce la charge limite exacte ? Pour le savoir, il suffit d'examiner si la statique est licite. Dans ce but, on construit le diagramme des moments M_1 associé à ce mécanisme. La seule valeur encore inconnue est M_B ; par des considérations de statique élémentaire, on trouve $M_B = (2/3)M_{pl}$ et M_1 est licite. Donc, en vertu du théorème combiné, Q_1^+ est la vraie charge limite

$$Q_{\lim} = \frac{4}{3} \frac{M_{pl}}{a}$$

⁽³⁾ Dans les exemples de la section 16.3, on pouvait appliquer le principe des déplacements virtuels parce qu'on calculait directement la solution exacte, vu que la position des rotules était connue d'avance.

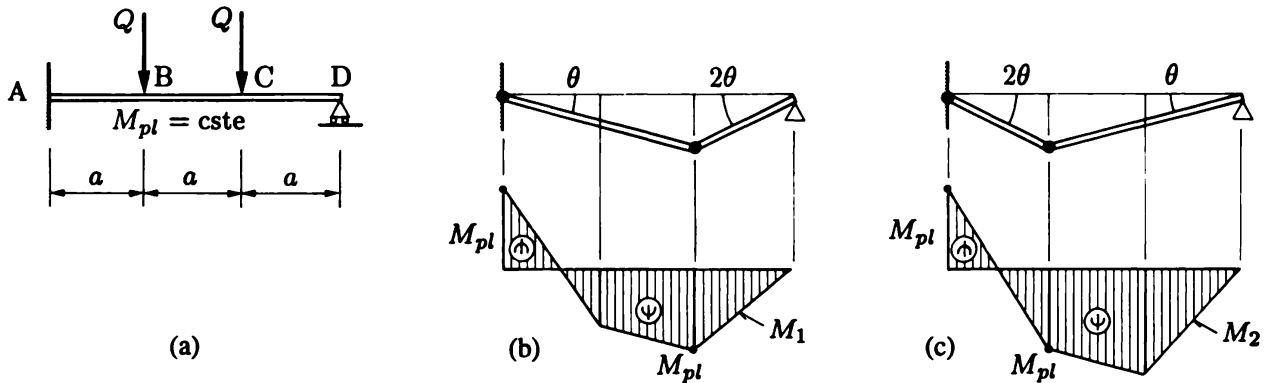


Fig. 17.7 Etude d'une poutre par la méthode cinématique.

Au contraire, on trouve aisément que le diagramme M_2 associé à la valeur Q_2^+ n'est pas licite ; en effet, on calcule $M_C = (4/3)M_{pl} > M_{pl}$, et les moments ne respectent pas la condition statique de plasticité.

17.10.2 Méthode statique

Reprenons la même poutre par la méthode statique et essayons successivement les trois diagrammes de moments licites M_1 , M_2 et M_3 de la figure 17.8. Pour chacun d'eux, il est aisé de calculer la réaction verticale en D par équilibre :

- (fig. 17.8a) $D_y = Q$;
- (fig. 17.8b) $D_y = Q - M_{pl}/(3a)$;
- (fig. 17.8c) $D_y = Q - M_{pl}/(3a)$.

Connaissant cette force, on calcule par réduction la valeur du moment en un point de la poutre où il est connu, par exemple en C (fig. 17.8a, valeur M_{pl}), en B (fig. 17.8b, valeur choisie nulle) et en C (fig. 17.8c, valeur M_{pl}) ; on en déduit la charge Q^- :

- (fig. 17.8a) $M_C = M_{pl} = D_y a \Rightarrow Q_1^- = M_{pl}/a$;
- (fig. 17.8b) $M_B = 0 = D_y (2a) - Qa \Rightarrow Q_2^- = 2M_{pl}/(3a)$;
- (fig. 17.8c) $M_C = M_{pl} = D_y a \Rightarrow Q_3^- = 4M_{pl}/(3a)$.

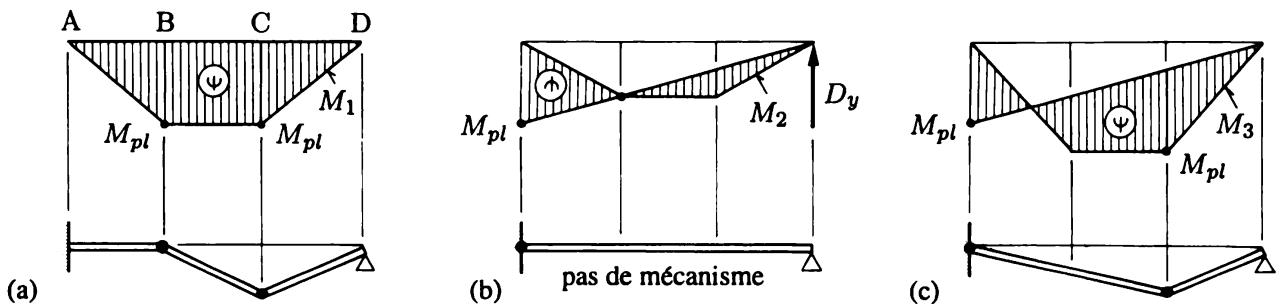


Fig. 17.8 Etude d'une poutre par la méthode statique.

D'après le théorème statique, la valeur Q_3^- est la plus probable. Pour savoir si c'est la vraie charge limite, il faut examiner la cinématique. Dans le mécanisme associé au diagramme M_1 (fig. 17.8a), la rotule en B tourne en sens inverse du moment, et la condition cinématique de plasticité est violée. Dans le cas de M_2 (fig. 17.8b), il n'y a pas assez de rotules pour former un mécanisme. Enfin, dans M_3 (fig. 17.8c), les deux rotules permettent la formation d'un mécanisme où la condition cinématique de plasticité est vérifiée. La charge Q_3^- est donc la vraie charge limite

$$Q_{\text{lim}} = \frac{4}{3} \frac{M_{pl}}{a}$$

17.11 Exercices

Remarque

Dans ces problèmes, on néglige l'éventuelle influence de l'effort normal N et de l'effort tranchant V sur la valeur du moment plastique M_{pl} .

17.11.1 Une poutre bi-encastée ABCD est soumise à deux charges F et $2F$ concentrées. Les moments plastiques M_{pl} et $M'_{pl} = 1,5 M_{pl}$ caractérisent la résistance des sections des tronçons respectivement CD et AC.

- 1) Trouver le mécanisme déterminant et la charge limite correspondante.
- 2) Dessiner les diagrammes M et V et calculer leurs valeurs caractéristiques.

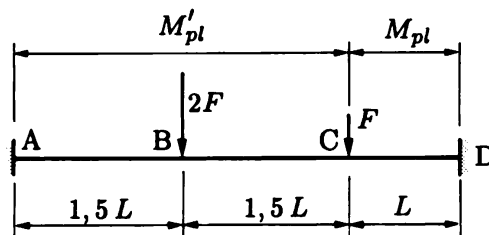


Fig. Ex. 17.11.1

17.11.2 Utiliser la méthode cinématique pour trouver la charge limite de la structure ABCD formée d'une traverse ABC ($2M_{pl}$) et d'une colonne CD (M_{pl}). Vérifier que la solution obtenue est la solution exacte à l'aide du théorème combiné.

17.11.3 Employer la méthode cinématique pour trouver la charge limite de la structure ABCDE. Vérifier que la solution obtenue est la solution exacte à l'aide du théorème combiné.

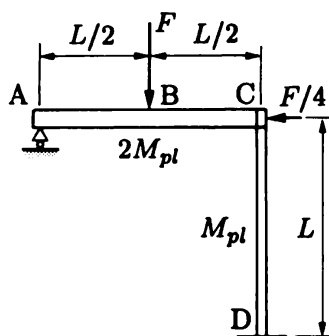


Fig. Ex. 17.11.2

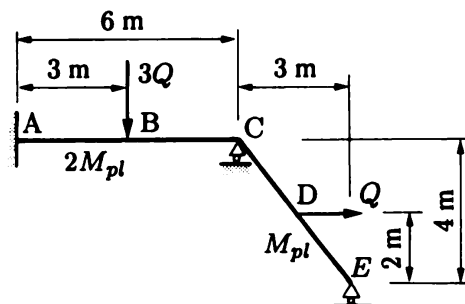


Fig. Ex. 17.11.3

17.11.4 Calculer la charge limite Q_{lim} du cadre à deux articulations ABCDE. Vérifier si la solution obtenue est la solution exacte du problème. *Indication* : utiliser la notion de centre instantané de rotation (vol. 1, sect. 11.8).

17.11.5 On prévoit d'utiliser un HEA 140 pour le montant DE et des HEA 100 pour les autres éléments du cadre ABCDE articulé en A et encastré en E. Vérifier si ce choix est correct en faisant une étude d'analyse limite de la structure proposée. On donne $F = 10 \text{ kN}$, $\gamma_F = 1,5$ (pondération des actions), $L = 1,8 \text{ m}$ et $\sigma_e = 25,5 \text{ kN/cm}^2$.

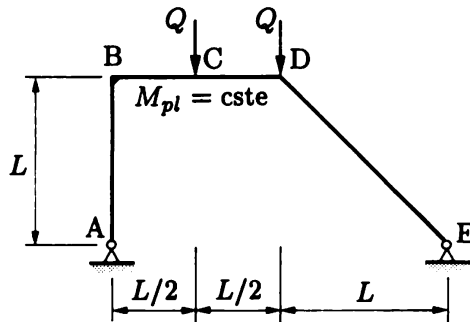


Fig. Ex. 17.11.4

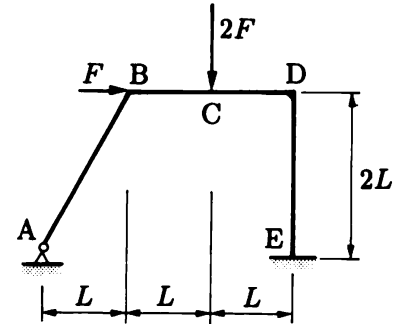


Fig. Ex. 17.11.5

17.11.6 La structure d'un auvent, du type grille de poutres, est représentée en plan dans la figure. L'extrémité est chargée par une force verticale pondérée $Q = 200 \text{ kN}$. Toutes les poutres ont la même section. Déterminer le profilé IPE nécessaire ($\sigma_e = 36 \text{ kN/cm}^2$). *Indication* : trouver d'abord les mécanismes de ruine possibles, puis sélectionner le plus défavorable.

17.11.7 Trouver la charge limite de l'arc bi-articulé, en demi-cercle, soumis à une force concentrée Q en clef. *Indication* : utiliser la méthode statique ; raisonner graphiquement sur le jeu de forces.

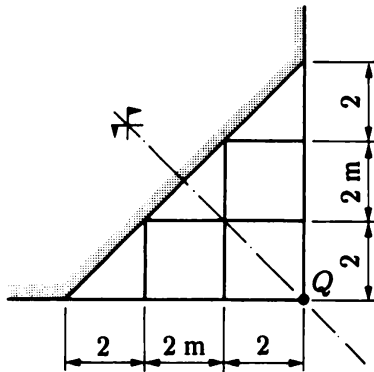


Fig. Ex. 17.11.6

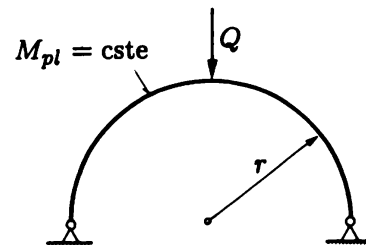


Fig. Ex. 17.11.7

17.12 Lexique

Loi constitutive (M, θ)

- condition statique de plasticité
- condition cinématique de plasticité

Statique licite

Cinématique licite

Loi liant le moment à la rotation plastique de la rotule, du type rigide parfaitement plastique, en analyse limite ;

$$|M| \leq M_{pl}$$

$\mathcal{T}_{\text{int}} = M_{pl}\theta > 0$ (travail interne dissipé plastiquement dans une rotule) ; rotule et moment tournent dans le même sens.

Statique en équilibre et respectant la condition statique de plasticité.

Cinématique continue, conforme avec les appuis et respectant la condition cinématique de plasticité.

Multiplicateur des charges (λ)

- multiplicateur limite

Théorème statique

- méthode statique

Théorème cinématique

- méthode cinématique

Equation de travail

- travail externe

Théorème combiné

Lemmes de Feinberg

Facteur d'accroissement proportionnel de toutes les forces extérieures ;
 λ_{lim} .

$\lambda^- \leq \lambda_{\text{lim}}$: toute charge limite basée sur le respect des seules conditions statiques est inférieure ou égale à la valeur réelle (\Rightarrow sécurité) ;

$\lambda^+ \geq \lambda_{\text{lim}}$: toute charge limite basée sur le respect des seules conditions cinématiques est supérieure ou égale à la valeur réelle ;

Egalité donnant λ^+ dans la méthode cinématique ($\mathcal{T}_{\text{int}} = \mathcal{T}_{\text{ext}}$) ;
 $\mathcal{T}_{\text{ext}} = \lambda^+ \sum F u^+$.

$\lambda^- \leq \lambda_{\text{lim}} \leq \lambda^+$ (vraie charge limite si tout est licite).

La charge limite d'une structure

- renforcée, ne peut pas diminuer ;
- affaiblie, ne peut pas augmenter.

18. Flexion plastique composée et simple

18.1 Introduction

Aux chapitres précédents, on a développé la théorie plastique basée sur les notions de moment et de rotule plastiques, obtenues en flexion pure ; puis on a appliqué cette théorie aux poutres soumises tant à flexion composée que simple. Il faut donc étudier plus en détail l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant sur la valeur du moment plastique.

On se restreint ici au cas des poutres à plan moyen (flexion plane). En flexion composée (sect. 18.2), l'effort tranchant est supposé nul ($M = \text{cste}$).

18.2 Flexion composée

18.2.1 Section doublement symétrique

Lorsque, dans une section droite, l'effort normal N et le moment M augmentent proportionnellement, la distribution des contraintes évolue à l'image de la figure 18.1. La plastification progressive

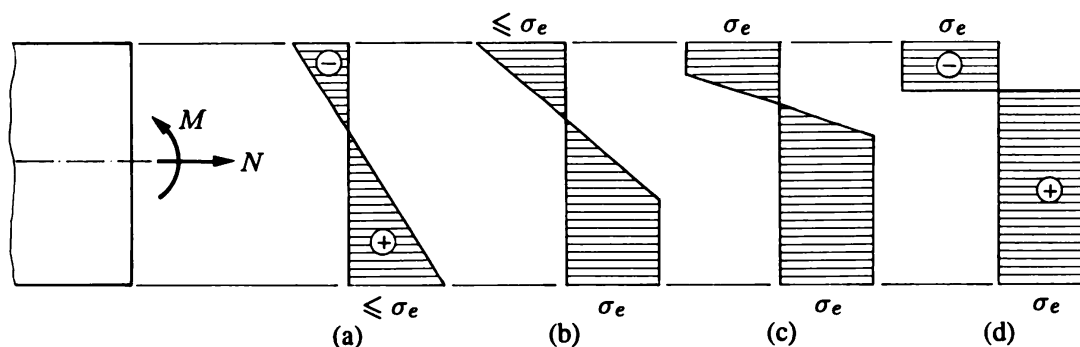


Fig. 18.1 Evolution des contraintes en flexion composée : (a) état élastique ; (b) et (c) états élasto-plastiques ; (d) état plastique.

de la section est obtenue en faisant croître dilatation axiale et courbure ; finalement, le diagramme des contraintes tend vers la distribution birectangulaire non symétrique de la figure 18.1(d) ; il y correspond un couple de valeurs (M, N) du moment et de l'effort normal formant par leur ensemble la *sollicitation plastique* ou *limite* de la section.

On détermine aisément ces deux valeurs en décomposant le diagramme des contraintes en deux parties, l'une symétrique et l'autre antisymétrique par rapport à l'axe de symétrie de la section, comme le montre la figure 18.2.

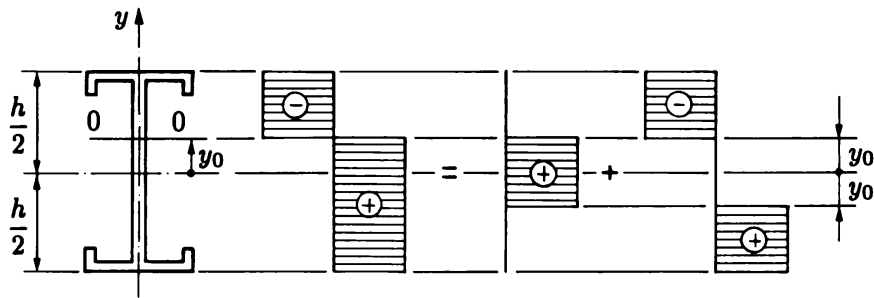


Fig. 18.2 Décomposition des contraintes en flexion composée.

La zone symétrique contribue à l'effort normal, mais non au moment, tandis que la zone antisymétrique produit un moment sans effort normal. Par suite

$$N = A_0 \sigma_e \quad (18.1)$$

$$M = (Z - Z_0) \sigma_e \quad (18.2)$$

où A_0 est l'aire contribuant à la transmission de l'effort normal, c'est-à-dire l'aire de la portion centrale de la poutre de hauteur $2y_0$ (où y_0 est l'ordonnée de la ligne de contrainte nulle), et Z_0 est le module plastique de cette même portion.

Divisant (18.1) par l'effort normal plastique (14.2), et (18.2) par le moment plastique (15.4), on obtient

$$\frac{N}{N_{pl}} = \frac{A_0}{A} \quad (18.3)$$

$$\frac{M}{M_{pl}} = 1 - \frac{Z_0}{Z} \quad (18.4)$$

Connaissant N , on en déduit A_0 par (18.1) ou (18.3) ; on calcule alors y_0 et Z_0 , d'où l'on tire M par (18.2) ou (18.4). Pour chaque forme de section droite, il existe une liaison entre les caractéristiques géométriques A_0 , y_0 et Z_0 , et donc aussi entre les grandeurs statiques M et N . On l'écrit

$$f \left(\frac{M}{M_{pl}}, \frac{N}{N_{pl}} \right) = 0 \quad (18.5)$$

et les ingénieurs l'appellent *formule d'interaction*.

Les relations précédentes montrent que, pour les sections doublement symétriques, la présence de l'effort normal est de *réduire* la capacité de la section à transmettre un moment ($M \leq M_{pl}$). On

appelle *moment plastique réduit* le moment correspondant, calculé par (18.5). Cette réduction reste faible et négligeable tant que N/N_{pl} est petit ($N/N_{pl} \leq 0,15$ environ), parce que la portion A_0 de la section équilibrant N étant centrée, Z_0 reste très petit.

Application : section rectangulaire

On a (fig. 18.3a)

$$A_0 = 2y_0b \quad Z_0 = y_0^2b$$

d'où

$$\frac{N}{N_{pl}} = \frac{2y_0}{h} \quad \frac{M}{M_{pl}} = 1 - \frac{4y_0^2}{h^2}$$

et par suite

$$\frac{M}{M_{pl}} = 1 - \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 \quad (18.6)$$

Dans un système d'axes $(M/M_{pl}, N/N_{pl})$, la formule d'interaction (18.6) est une parabole à axe horizontal (fig. 18.3b). Selon la méthode de dimensionnement élastique, la formule (6.3), écrite sous la forme $N/A + M/W = \sigma_e$, est représentée par la droite en trait interrompu de la figure ; la différence avec la parabole montre le gain dû à la plastification de la section droite.

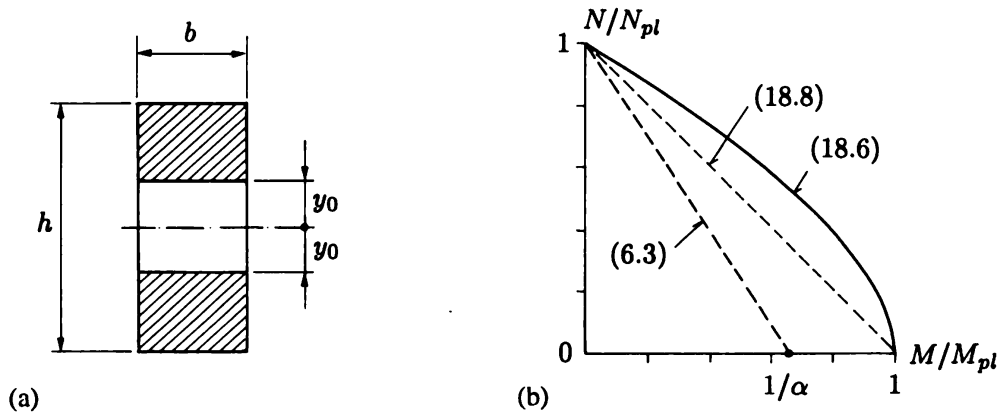


Fig. 18.3 Section rectangulaire en flexion composée plane : (a) section ; (b) courbe d'interaction (trait plein).

18.2.2 Autres sections

On traiterait de manière analogue une section droite simplement symétrique (en T par exemple) ; les calculs correspondants sont fastidieux. De plus, selon les proportions géométriques et les valeurs de M et N , on peut aboutir tant à une réduction qu'à une augmentation du moment transmissible en présence de l'effort normal.

On peut, par le théorème statique (17.4), obtenir une borne inférieure de la sollicitation limite (M, N) . Tout effort normal N peut être repris par une distribution de contraintes

$$\sigma = \frac{N}{N_{pl}} \sigma_e$$

et tout moment de flexion M par

$$\sigma = \frac{M}{M_{pl}} \sigma_e$$

Par conséquent, la distribution cumulée

$$\sigma = \frac{N}{N_{pl}} \sigma_e + \frac{M}{M_{pl}} \sigma_e \quad (18.7)$$

équilibre toute sollicitation (M, N) . Le respect de la loi constitutive exige alors $|\sigma| \leq \sigma_e$, c'est-à-dire

$$\frac{|N|}{N_{pl}} \sigma_e + \frac{|M|}{M_{pl}} \sigma_e \leq \sigma_e$$

On en déduit que toute sollicitation (M, N) qui respecte la condition

$$\frac{|N|}{N_{pl}} + \frac{|M|}{M_{pl}} \leq 1 \quad (18.8)$$

est forcément du côté de la sécurité. Cette relation, interprétée en loi d'interaction, représente la droite joignant les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ dans le diagramme d'interaction $(M/M_{pl}, N/N_{pl})$. Puisque cette droite est une borne inférieure, toute courbe d'interaction est nécessairement *convexe* (fig. 18.3b).

18.3 Flexion simple

18.3.1 Introduction

Il est tentant de rechercher, par analogie avec ce qui précède, une formule d'interaction du genre

$$f\left(\frac{M}{M_{pl}}, \frac{V}{V_{pl}}\right) = 0 \quad (18.9)$$

permettant de déterminer l'influence de l'effort tranchant V sur la valeur du moment plastique. En fait, énoncé ainsi, le problème est incorrectement posé ; en effet, l'effort tranchant étant la dérivée du moment (au signe près), *les variables M et V ne sont pas indépendantes*. Il n'existe donc aucune formule d'interaction unique ; chaque problème particulier (conditions d'appui, chargement, section) a sa solution propre. Une console à section rectangulaire uniformément chargée aura une autre solution que la même console soumise à une force concentrée.

Jusqu'à présent, aucune solution théorique exacte n'a été trouvée en flexion simple plastique ; heureusement, en pratique, l'effet de l'effort tranchant est généralement faible, et l'on peut se contenter d'utiliser des solutions donnant des bornes inférieures approximatives.

Ces solutions approximatives ne satisfont le plus souvent que

- la loi constitutive, et
- le principe d'équivalence

dans la seule section droite où agissent simultanément M et V . Au reste, l'équilibre est violé, de sorte que ces solutions ne représentent ni une borne inférieure, ni une borne supérieure. On vérifie

néanmoins qu'elles sont voisines des solutions statiques plus rigoureuses d'une part, et concordantes avec l'expérience d'autre part.

Puisque l'état de contrainte est bidimensionnel (σ, τ) , respecter la loi constitutive revient à satisfaire au critère de von Mises (7.21)

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_e$$

selon lequel la limite d'élasticité en cisaillement pur τ_e est donnée par (7.19)

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

En pratique, l'effet de l'effort tranchant dans les sections massives est totalement négligeable ; seule la section en I mérite quelque attention.

18.3.2 Section en I

On choisit un diagramme de contraintes tangentielles τ_w uniforme sur la hauteur h_w de l'âme⁽¹⁾, et une répartition des contraintes normales d'allure birectangulaire, mais avec une contrainte réduite dans l'âme (fig. 18.4). On va en déduire une relation d'interaction de la forme (18.9), bien que ces contraintes ne correspondent pas, rappelons-le, à un vrai champ de contrainte licite.

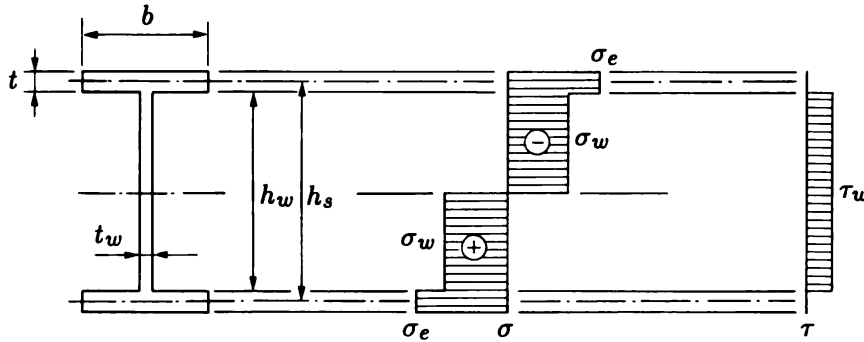


Fig. 18.4 Contraintes σ et τ en flexion simple.

On définit

$$M_s = Z_s \sigma_e \quad \text{avec} \quad Z_s = b t h_s \quad (18.10)$$

$$M_w = Z_w \sigma_e \quad \text{avec} \quad Z_w = \frac{t_w h_w^2}{4} \quad (18.11)$$

$$V_{pl} = A_w \tau_e = \frac{A_w \sigma_e}{\sqrt{3}} \quad \text{avec} \quad A_w = t_w h_w \quad (18.12)$$

où M_s est le moment plastique des semelles seules, M_w celui de l'âme seule (avec $M_{pl} = M_s + M_w$) et V_{pl} l'effort tranchant plastique. De la répartition des σ (fig. 18.4), on déduit

$$M = M_s + M'_w = M_s + \frac{\sigma_w}{\sigma_e} M_w = M_{pl} - \left(1 - \frac{\sigma_w}{\sigma_e}\right) M_w \quad (18.13)$$

⁽¹⁾ On peut assimiler h_w à h_s , l'entredistance des semelles, sans erreur sensible.

où la part du moment transmise par l'âme vaut $M'_w = Z_w \sigma_w$ et peut s'écrire

$$M'_w = Z_w \sigma_w \frac{M_w}{Z_w \sigma_e} = \frac{\sigma_w}{\sigma_e} M_w$$

Du diagramme des τ (fig. 18.4), on tire $V = A_w \tau_w$, d'où

$$\tau_w = \frac{V}{A_w} = \frac{V}{A_w} \frac{A_w \tau_e}{V_{pl}} = \frac{V}{V_{pl}} \tau_e$$

De von Mises, $\sigma_w^2 + 3\tau_w^2 = \sigma_e^2$, on obtient aisément, avec la valeur précédente de τ_w ,

$$\sigma_w = \sigma_e \sqrt{1 - \left(\frac{V}{V_{pl}} \right)^2}$$

La relation d'interaction cherchée (où, rappelons-le, M_w est le moment plastique de l'âme) s'obtient en introduisant la valeur précédente de σ_w dans (18.13) :

$$M = M_{pl} - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{V_{pl}} \right)^2} \right) M_w \quad (18.14)$$

On voit que, si $V = 0$, $M = M_{pl}$, et si $V = V_{pl}$, $M = M_{pl} - M_w = M_s$; donc, au pire, le moment plastique est amputé de la contribution de l'âme, ce qui est toujours assez faible. Par exemple, pour un profilé HEB 400, $M_w = 0,16 M_{pl}$; si $V = 0,5 V_{pl}$, alors $M = 0,98 M_{pl}$; si $V = 0,8 V_{pl}$, alors $M = 0,93 M_{pl}$. En bref,

- *l'effort tranchant ne doit pas dépasser la valeur*

$$V_{pl} = A_w \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (18.15)$$

sinon l'âme se déforme par cisaillement pur plastique avant que les rotules plastiques de flexion ne se développent ;

- *la réduction du moment est négligeable tant que V/V_{pl} est petit ($\leq 0,5$) et ne devient sensible que si l'effort tranchant atteint la valeur plastique (18.15).*

Des essais sur profilés laminés en acier, formant poutres simples et continues, ont été faits pour vérifier les prédictions théoriques ci-dessus. Ils montrent tous que l'effet de l'effort tranchant est négligeable tant qu'on n'atteint pas la valeur plastique V_{pl} (18.15).

En conclusion,

- *dans les poutres âme-semelles, l'effort tranchant n'a pratiquement pas d'influence sur le moment plastique tant qu'il satisfait à*

$$V < V_{pl} = 0,577 A_w \sigma_e \quad (18.16)$$

- *on calcule la charge limite de la structure sans se préoccuper de l'effet de l'effort tranchant, et on vérifie après coup que l'inégalité (18.16) est bien remplie partout.*

Remarque

Certaines normes vont même jusqu'à admettre, pour l'effort tranchant plastique, la formule

$$V_{pl} = 0,6 A_w \sigma_e \quad (18.17)$$

plus favorable que (18.15), simplement parce que l'âme, plus mince que les semelles, a toujours une limite d'élasticité réelle supérieure à celle des semelles (fig. 21.4a, par exemple) et à celle utilisée pour le calcul.

18.4 Action simultanée du moment de flexion, de l'effort normal et de l'effort tranchant

Ici également, l'influence de l'effort tranchant est négligeable tant que V n'atteint pas V_{pl} (18.15). Il faut donc, avant tout, se préoccuper de l'effet de N sur M (sect. 18.2).

18.5 Analyse limite en présence de l'effort normal et de l'effort tranchant

Les effets de N et surtout V sont généralement faibles sur le calcul de la charge limite. On calcule donc d'abord cette dernière en les ignorant. Connaissant les valeurs de N et V aux rotules, on peut alors en déduire les valeurs des *moments plastiques réduits*, puis la nouvelle charge limite. On peut en tirer les nouvelles valeurs de N et V , et répéter le calcul, mais les corrections sont ordinairement négligeables.

Si N est grand, il est avantageux d'estimer les réductions dès le départ. Si en plus N est une compression, les effets d'instabilité deviennent prépondérants et diminuent beaucoup plus les charges limites que les formules d'interaction précédentes.

18.6 Exercices

18.6.1 Etudier l'analyse limite du portique ABCD, encastré appuyé,

- 1) en négligeant,
- 2) en tenant compte de

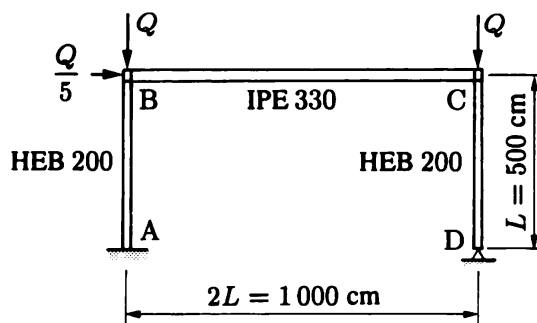


Fig. Ex. 18.6.1

l'effet de l'effort normal sur la valeur du moment plastique. Chercher Q_{lim} . Les profilés travaillent selon l'axe fort et la formule d'interaction est (avec A = aire de la section, A_w = aire de l'âme, $\sigma_e = 25 \text{ kN/cm}^2$)

$$\frac{M}{M_{pl}} = \frac{A}{A - A_w/2} \left(1 - \frac{N}{N_{pl}} \right) \leq 1$$

L'effort normal a-t-il un effet négligeable ? Quelle est, finalement, la valeur de Q_{lim} ? *Note* : on ne considère pas ici le flambement qui est, en fait, déterminant pour le dimensionnement.

18.6.2 Une pièce plane en acier ($\sigma_e = 40 \text{ kN/cm}^2$), d'épaisseur 1 cm, percée d'un trou circulaire excentré, est soumise à une traction de bord t uniforme, agissant sur les deux bords verticaux. Calculer la valeur limite t_{lim} de cette traction et dessiner la répartition correspondante des contraintes normales dans la section nette (section médiane). *Note* : cette pièce a fait l'objet de tests en laboratoire (Rimawi W. H., Dogan E., *Experiments on yielding of tension specimens with notches and holes*, Exp. Mech., Vol. 10, No. 10, October 1970) et de simulations numériques (Frey F., Thèse de doctorat, Université de Liège, 1978). L'expérience fournit $t_{lim} = 17,6 \text{ kN/cm}^2$ et la simulation 18,0 kN/cm^2 . Le théorème statique est-il vérifié ?

18.6.3 On considère un matériau élastique parfaitement plastique, mais sans résistance à la traction. Pour une section rectangulaire soumise à un effort normal excentré, faire l'analyse limite de la section droite (diagramme des contraintes). Comparer avec la solution élastique (§ 6.3.5) et chiffrer le gain apporté par la plasticité ($0 \leq e \leq h/2$).

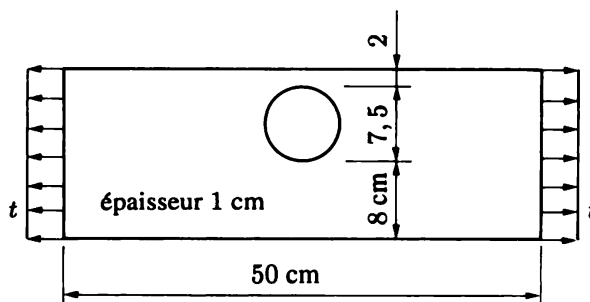


Fig. Ex. 18.6.2

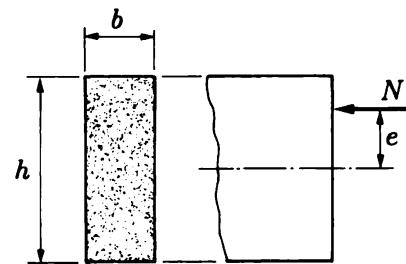


Fig. Ex. 18.6.3

18.6.4 Quelle portée minimale une poutre bi-encastée, à section âme-semelles,

- 1) uniformément chargée,
- 2) chargée d'une force concentrée au centre,

doit-elle avoir pour éviter la ruine par plastification de l'âme avant celle par formation de rotules et d'un mécanisme ?

18.7 Lexique

Sollicitation plastique

Deux ou plusieurs efforts intérieurs qui, par leur action simultanée, provoquent la plastification complète de la section.

Formule d'interaction

Formule traduisant le phénomène ci-dessus.

Effort tranchant plastique (V_{pl})

Dans une poutre en I, effort tranchant plastifiant l'âme par cisaillement pur ($V_{pl} = A_w \tau_e$).

Moment plastique réduit

Valeur réduite de M_{pl} en présence de l'effort normal et, éventuellement, de l'effort tranchant (à déduire d'une formule d'interaction).

19. Torsion plastique uniforme

19.1 Sections massives

19.1.1 Théorie

La théorie de la torsion uniforme de Saint-Venant se généralise aisément au cas où la limite d'élasticité en cisaillement pur τ_e est atteinte. Soit une section partiellement plastifiée par torsion. Dans la partie de cette section où le matériau est encore élastique, l'équation (vol. 3, chap. 6)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\chi \quad (19.1)$$

reste d'application ($\Phi(y, z)$: fonction de contrainte ; G : module de glissement ; χ angle de torsion par unité de longueur). Dans la portion plastique, il faut respecter la loi constitutive (critère de von Mises), soit, ici,

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau_e^2$$

Avec $\tau_{xy} = \partial\Phi/\partial z$ et $\tau_{xz} = -\partial\Phi/\partial y$, encore applicable en plasticité puisque la définition de la fonction de contrainte Φ découle de l'équilibre, cela s'écrit

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = \tau_e^2 \quad (19.2)$$

Le membre de gauche de cette équation représente le carré de la plus grande pente de la surface Φ . Donc, *dans le domaine plastique, la fonction de contrainte est une surface à pente maximale constante et égale à la limite d'élasticité en cisaillement pur τ_e* . La base de cette surface est à nouveau le contour extérieur de la section ($\Phi = 0$), puisque cette condition découle aussi de l'équilibre seul.

Lorsque la section droite est *complètement plastifiée* (charge limite), on matérialise aisément la surface Φ à l'aide d'un tas de sable fin (obéissant à la loi d'équilibre de Coulomb $\tau - \sigma \tan \varphi = 0$) dont la base est la section droite de la poutre tordue (fig. 19.1). C'est l'*analogie du tas de sable*, due

à Nadai (1923). Ce tas de sable a les mêmes propriétés que la membrane (analogie de la membrane, Prandtl, 1903), à savoir :

- les lignes de niveau sont les lignes de cisaillement ($\tau = \text{cste} = \tau_e$);
- en un point, la plus grande pente donne la valeur de τ (ici τ_e);
- le double du volume livre le **moment de torsion plastique** T_{pl} .

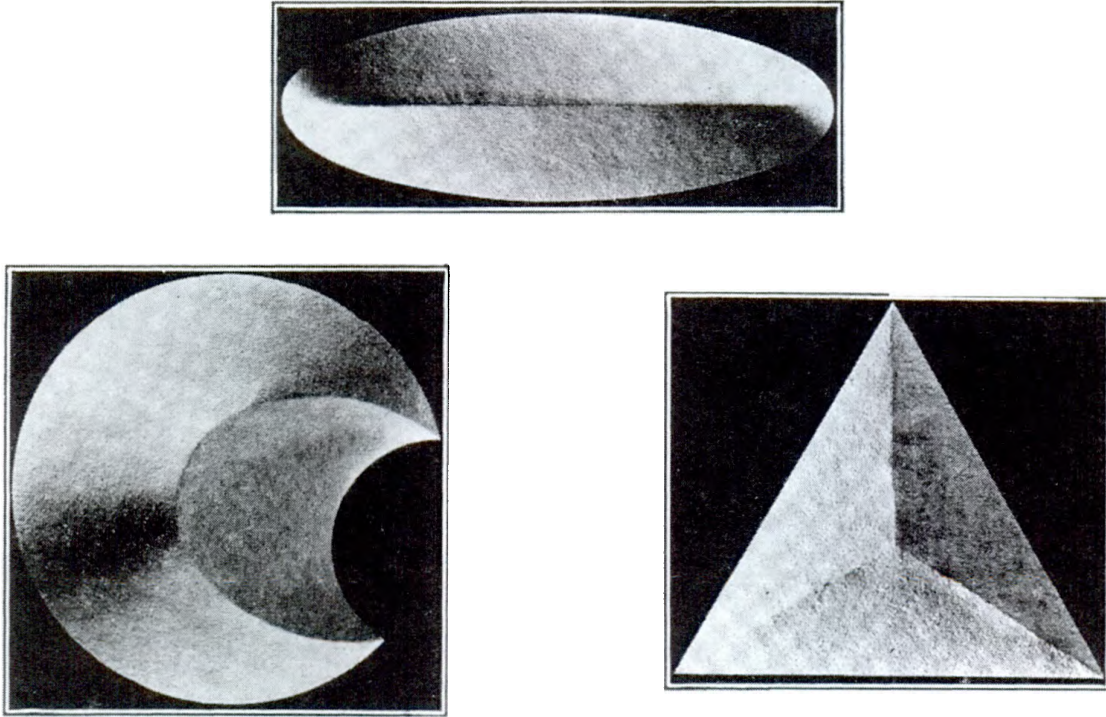


Fig. 19.1 Analogie du tas de sable (source : Nadai A., *Theory of flow and fracture of solids*, Vol. 1, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1950).

Applications

Dans le cas d'une *section circulaire*, le tas de sable est un cône dont les génératrices ont la pente τ_e (fig. 19.2). D'où

$$T_{pl} = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_e \quad (19.3)$$

contre un *moment de torsion élastique maximal* $T_e = (1/2) \pi r^3 \tau_e$, soit un gain de 33 %.

Pour une *section rectangulaire*, la surface du tas de sable est le *toit* de la figure 19.3. D'où

$$T_{pl} = \frac{1}{6} b^2 (3a - b) \tau_e \quad (19.4)$$

Pour la *section carrée* de côté b , on a une pyramide, et

$$T_{pl} = \frac{1}{3} b^3 \tau_e \quad (19.5)$$

contre $T_e = 0,208 b^3 \tau_e$, soit un gain de 60 %.

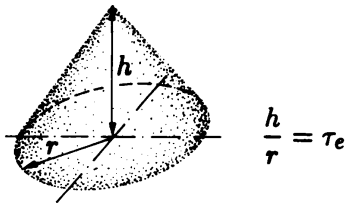


Fig. 19.2 Tas de sable de la section circulaire.

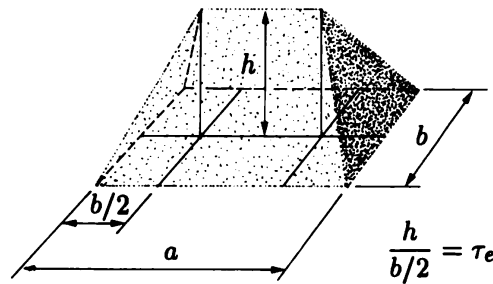


Fig. 19.3 Tas de sable de la section rectangulaire.

19.1.2 Plastification progressive

Pour se représenter la progression de la plasticité, il suffit d'utiliser simultanément les deux analogies. Matérialisons la surface du tas de sable, à l'image d'un toit construit sur la section droite (fig. 19.4, section triangulaire par exemple) et tendons la membrane sur le contour de cette même section. Pour une faible pression, la membrane ne touche pas le toit et les contraintes sont toutes inférieures à τ_e (état élastique, fig. 19.4a). Pour une certaine pression (correspondant à T_e), la membrane devient tangente au toit en un ou plusieurs points du contour (ici les milieux des côtés); la plasticité débute en ces points où la contrainte tangentielle vaut τ_e . Ensuite la membrane se colle contre le toit selon des surfaces plus ou moins étendues qui imagent la progression de la plasticité (état élasto-plastique, fig. 19.4b). Finalement la membrane envahit tout le toit, à l'exception peut-être de bandes très étroites situées le long des arêtes; on atteint l'état plastique (fig. 19.4c) et le moment plastique T_{pl} .

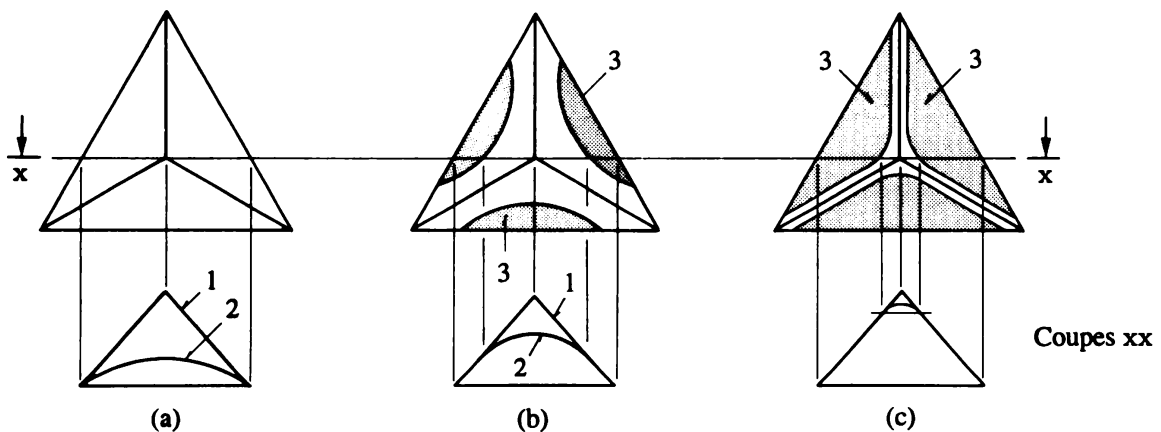


Fig. 19.4 Plastification progressive en torsion (1 : tas de sable ; 2 : membrane ; 3 : zones plastifiées).

19.2 Sections ouvertes à parois minces

Par l'analogie du tas de sable, on obtient aisément le moment de torsion plastique. Aux extrémités des parois minces, on peut négliger les petits pans obliques selon l'épaisseur et prendre un tas de sable prismatique, comme dans le cas élastique (fig. 19.5).

Par exemple, pour le laminé HEB 300, on trouve, en négligeant les congés (fig. 19.5),

$$T_{pl} = 124,15 \tau_e \quad [\text{kN}\cdot\text{cm}]$$

alors que la valeur exacte est $140,23 \tau_e^{(1)}$.

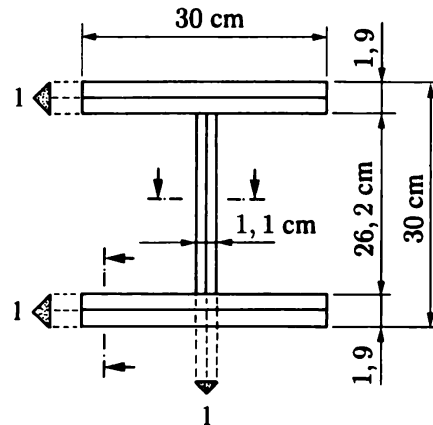


Fig. 19.5 Tas de sable approximatif pour un HEB 300 (1 : coupes).

Le moment de torsion élastique maximal T_e que peut transmettre une section ouverte est, à partir de (8.17),

$$T_e = \frac{J}{t_{\max}} \tau_e \quad (19.6)$$

où J est la constante de torsion et t_{\max} l'épaisseur de la plus forte paroi. Semblablement, le moment plastique peut s'écrire

$$T_{pl} = Z_T \tau_e \quad (19.7)$$

où Z_T serait le *module plastique de torsion*. Le rapport

$$\frac{T_{pl}}{T_e} = \frac{Z_T}{J} t_{\max} = \alpha_T \quad (19.8)$$

définit le gain dû à la plastification de la section droite. Pour les profilés laminés, on trouve les valeurs moyennes du tableau 19.6.

Tableau 19.6 Valeur de α_T pour les profilés laminés.

h	HEA	HEB	HEM	IPE	INP	UNP
≤ 400	1,35	1,40	1,50	1,45	1,45	1,55
> 400	1,50	1,55	1,60	1,50	1,45	—

Il faut noter que dans les poutres à section ouverte et parois minces, les phénomènes de torsion non uniforme deviennent largement prépondérants bien avant d'atteindre le plein moment plastique de torsion uniforme.

⁽¹⁾ Bäcklund J., Akesson B., *Plastisches Saint-Venantsches Torsionswiderstandsmoment offener Walzprofile*, Der Stahlbau, Helf 10, Berlin, Oktober 1972, S. 302-306.

19.3 Sections creuses unicellulaires

Examinons le cas d'une section circulaire avec un trou circulaire excentré (fig. 19.7). Comme en théorie élastique, la fonction de contrainte Φ doit, le long du trou, prendre une valeur constante. On trouve facilement cette valeur en remarquant que le niveau de Φ le long du trou s'obtient à l'aide d'une génératrice de pente τ_e élevée à l'endroit où l'épaisseur est *la plus faible* (t_{\min}). Le reste du tas de sable s'en déduit aisément. On constate qu'il se forme une crête là où l'épaisseur est supérieure à t_{\min} .

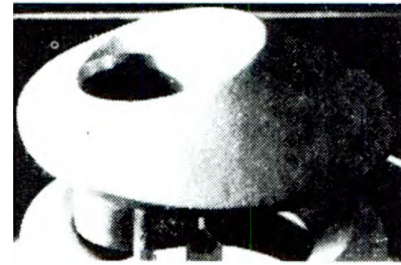
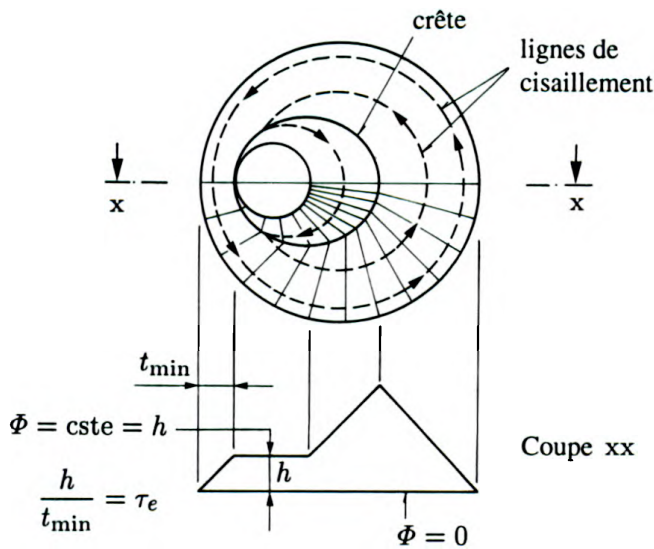


Fig. 19.7 Tas de sable d'une section creuse à une cellule (photographie tirée de la source indiquée à la figure 19.1).

Si le tas de sable est relativement facile à visualiser, son volume n'est certainement pas simple à calculer.

Dans le cas où la paroi est partout *mince* et d'épaisseur *constante* t , on se trouve dans la même situation qu'en théorie élastique, et la formule de Bredt (8.20) donne de suite

$$T_e \equiv T_{pl} = 2\Omega t \tau_e \quad (19.9)$$

où Ω est l'aire limitée par la ligne moyenne de la paroi.

Si l'épaisseur est *mince*, mais *variable*, on se retrouve dans une situation en principe aussi compliquée qu'à la figure 19.7. La plastification commence là où l'épaisseur est la plus mince (pour un moment donné par (19.9) avec $t = t_{\min}$), puis envahit peu à peu le reste de la section. On obtient une bonne approximation du moment plastique en supposant que la section est d'épaisseur t_{\min} constante, cette épaisseur étant comptée à partir du bord extérieur. (Cela revient, dans la coupe xx de la figure 19.7, à négliger le volume du tas de sable situé au-dessus de la cote h .)

Exemple 19.1

Pour la section tubulaire de la figure 19.8(a), on a :

- calcul élastique (fig. 19.8a) :

$$\Omega = 2a^2 \quad t_{\min} = \frac{a}{10}$$

d'où

$$T_e = 0,4 a^3 \tau_e$$

- calcul plastique approximatif (fig. 19.8b) :

$$\Omega = \left(a + \frac{a}{10}\right) \left(2a + \frac{a}{20}\right) = 2,255 a^2 \quad t_{\min} = \frac{a}{10}$$

d'où

$$T_{pl} \cong 0,451 a^3 \tau_e$$

soit un gain de 13 % ;

- valeur exacte :

$$T_{pl} = 0,475 a^3 \tau_e$$

avec un gain de 19 %.

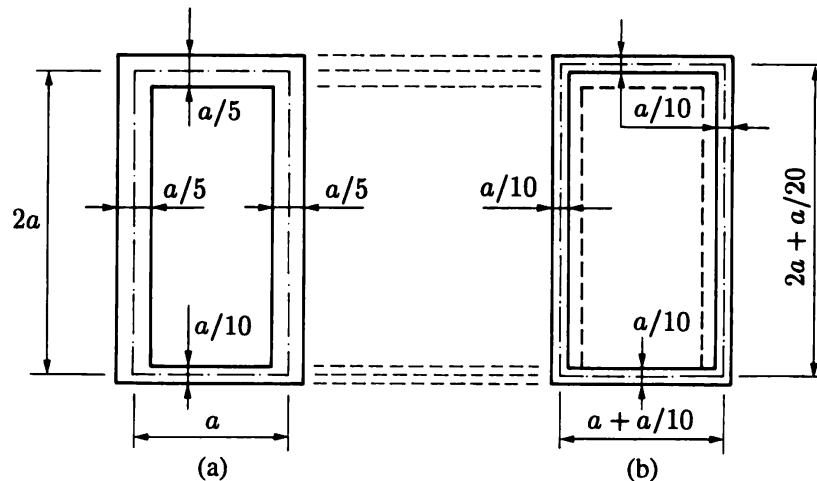


Fig. 19.8 Calcul approximatif d'une section tubulaire.

19.4 Exercices

19.4.1 Calculer le moment de torsion plastique de la section en triangle équilatéral, ainsi que le gain α_T apporté par la plasticité (vol. 3, ex. 6.7.3).

19.4.2 Calculer le moment de torsion plastique d'une section carrée de côté a percée d'un trou carré de côté $a/3$ (littéral).

19.4.3 Déterminer le diagramme des contraintes résiduelles d'un arbre à section circulaire pleine de rayon a après plastification complète suivie de déchargement complet (littéral).

19.4.4 Etablir la loi exprimant le moment de torsion T en fonction de l'angle de torsion par unité de longueur χ , pour une poutre à section circulaire pleine, de $T = 0$ à $T = T_{pl}$. Exprimer et dessiner cette courbe dans le diagramme $(T/T_e, \chi/\chi_e)$.

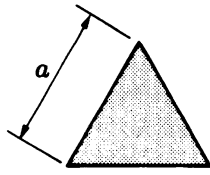


Fig. Ex. 19.4.1

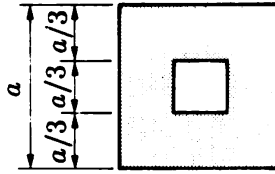


Fig. Ex. 19.4.2

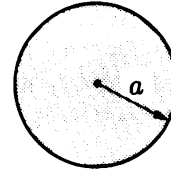


Fig. Ex. 19.4.3 et 19.4.4

19.5 Lexique

Fonction de contrainte Φ en plasticité

Analogie du tas de sable

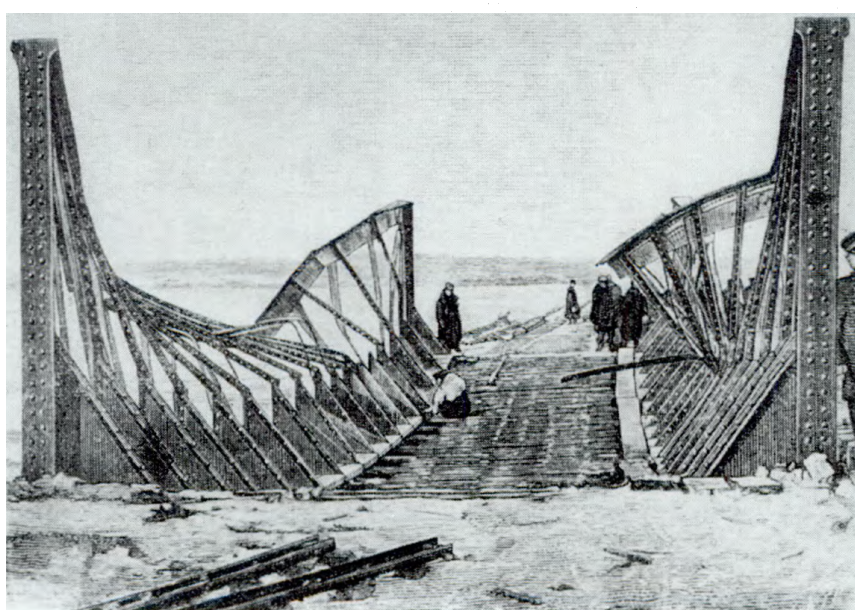
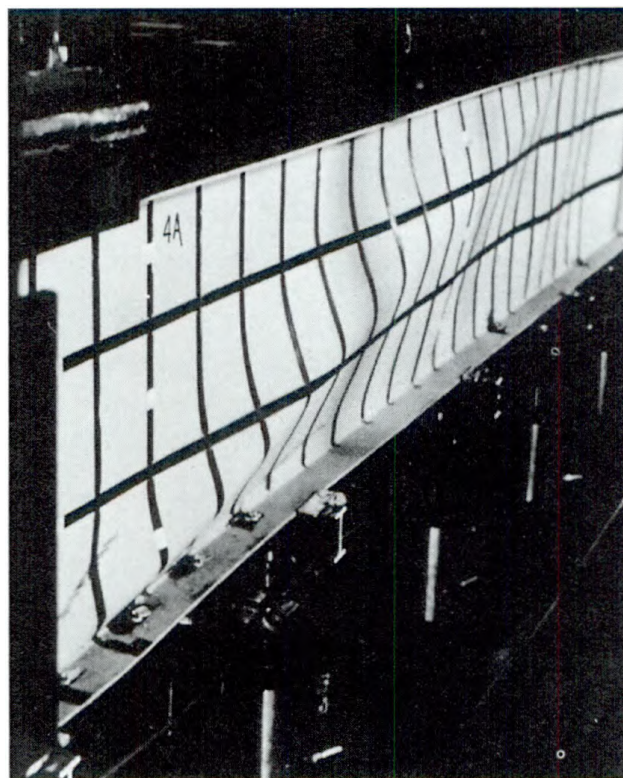
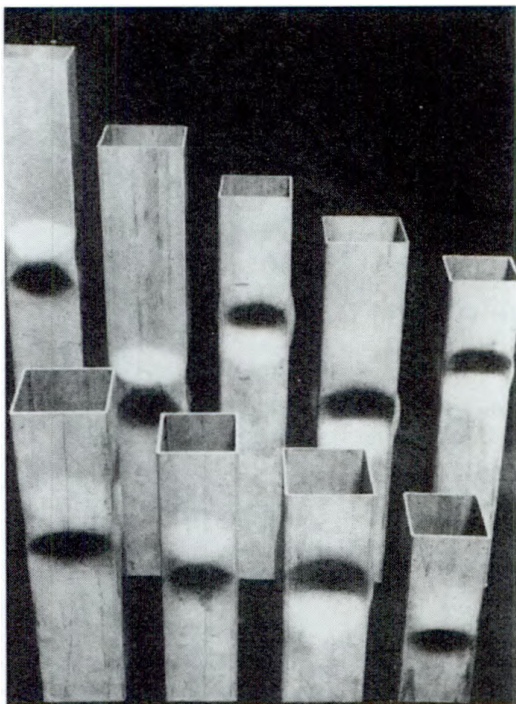
Moment de torsion plastique (T_{pl})

Surface à plus grande pente constante égale à τ_e .

Matérialisation de Φ par un tas de sable fin déposé sur le plan de la section droite (avec les mêmes propriétés que l'analogie de la membrane).

En torsion uniforme, moment de torsion plastifiant complètement la section par les seules contraintes tangentielles.

Troisième partie



Instabilité

Voilement d'ensemble de l'âme mince d'une poutre en acier

L'âme (épaisseur de 2 mm et hauteur de 600 mm) n'est pas raidie, sauf sur appui (à gauche). Les charges sont appliquées par des vérins à la semelle inférieure. La longue cloque oblique est due essentiellement à l'effort tranchant.

(Essai et photo de l'auteur.)

Voilement local des parois de tubes à section carrée en alliage d'aluminium

Lorsque les parois d'une pièce comprimée sont minces, leur voilement peut survenir avant le flambement d'ensemble de la pièce, diminuant ainsi sensiblement la capacité portante de cette dernière.

(Source : Bulson P. S., *Local instability problems of light alloy struts*, Research Report No. 29, The Aluminium Development Association, London, 1955.)

Flambement d'ensemble de la membrure supérieure des poutres en treillis d'un pont de chemin de fer (Russie, vers 1890)

La membrure supérieure, comprimée, n'est que faiblement appuyée dans le plan horizontal, par l'effet de cadre en U obtenu en liant rigidement les montants aux entretoises. Le phénomène est assimilable au déversement d'une poutre fléchie.

(Source : Timoshenko S. P., *History of strength of materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.)

Instabilité par flambement

Cette Troisième partie se limite à l'étude du flambement plan, le phénomène d'instabilité le plus commun et le plus fréquent, propre aux pièces comprimées. Toutefois, on tient à souligner, en guise d'introduction, l'importance que revêtent les phénomènes d'instabilité pour l'ingénieur, au sens large. Les lignes qui suivent sont empruntées, avec quelques adaptations, à l'ouvrage du Professeur Ch. Massonnet (*Résistance des matériaux*, vol. 2, chap. 19 ; voir bibliographie).

La construction moderne est caractérisée dans tous les domaines (génie civil, construction des machines, construction navale, automobile et aéronautique, véhicules spatiaux) par l'emploi de structures toujours plus grandes et par la réduction progressive des sections résistantes. Cette réduction est exigée par l'économie et la légèreté, qui est capitale dans tous les véhicules. Elle est rendue possible par l'emploi de matériaux à haute résistance tels que les aciers spéciaux, les alliages d'aluminium et de titane, les matériaux composites à fibres de carbone, d'aramide ou de verre, et par l'utilisation de contraintes en service toujours plus élevées. C'est pourquoi le danger d'instabilité, qui était quasi inexistant au temps de la construction en pierre et bois, devient de plus en plus menaçant pour l'ingénieur chargé de dessiner une structure.

Les phénomènes d'instabilité se présentent sous les formes les plus variées et souvent imprévisibles. Aussi ont-ils été cause de grandes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 morts). Aujourd'hui, bien que mieux connus, ils surprennent toujours perfidement les ingénieurs. Demain, il en sera encore ainsi...

D'autre part, leur étude présente de sérieuses difficultés d'ordre mathématique.

On peut dire qu'à l'heure actuelle, à l'exception des barres tendues, le danger d'instabilité est partout présent. En effet, il menace les poutres droites sollicitées à la compression (flambement), à la flexion (déversement), à la torsion (voilement des parois). Il est présent dans les arcs, qui peuvent céder soit dans leur plan, soit transversalement à celui-ci ; dans les plaques planes, qui peuvent se voiler perpendiculairement à leur plan, et dans les coques, qui présentent les phénomènes les plus variés.

De plus, les phénomènes d'instabilité peuvent se manifester dans des parties isolées des constructions (par exemple, flambement des barres comprimées dans les poutres en treillis, voilement des panneaux d'âme dans les poutres à âme pleine), auquel cas il est généralement possible de les prévoir et de les étudier assez facilement. Mais *ils peuvent aussi affecter l'ensemble d'une construction* (flambement d'ensemble des portiques, des ponts en arc, des poutres en treillis, des ossatures tridimensionnelles, etc.), auquel cas leur prévision et leur étude deviennent très ardues et incertaines.

En conclusion, il n'est pas exagéré de dire que la majeure partie des écroulements des constructions est due à des phénomènes d'instabilité, plutôt qu'à une sollicitation excessive des matériaux. C'est ce qui justifie l'importance sans cesse croissante qui est réservée à l'étude de ces phénomènes dans les ouvrages de mécanique des structures.

20. Flambement des poutres

20.1 Phénomènes de flambement

20.1.1 Flambement par divergence

Considérons⁽¹⁾ une poutre AB, d'axe non pas rectiligne, mais légèrement courbe dans le plan (x, y) , chargée par deux forces F égales et directement opposées, appliquées aux extrémités (fig. 20.1). Prenons x selon AB et y par A ; l'axe de la poutre est défini par l'ordonnée $v_0(x)$; sa pente $\text{tg } \theta_0 = v'_0 = dv_0/dx$ étant petite, on a

$$\text{tg } \theta_0 \cong \theta_0 \quad \sin \theta_0 \cong \theta_0 \quad \cos \theta_0 \cong 1 \quad |\theta_0| \ll 1$$

En toute section droite, les efforts intérieurs sont, en valeur absolue,

$$N = F \cos \theta_0 \cong F \quad M = F v_0 \quad V = F \sin \theta_0 \cong F \theta_0$$

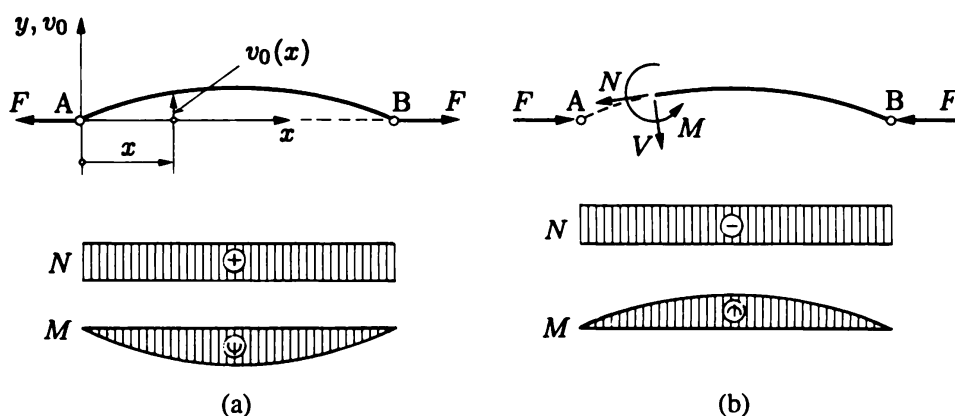


Fig. 20.1 Poutres légèrement courbes : (a) sollicitation par traction ; (b) sollicitation par compression.

⁽¹⁾ L'auteur n'a pas manqué de tenir compte des suggestions constructives que son collègue R. Maquoi, de l'Université de Liège, lui a aimablement transmises après lecture des chapitres 20 et 21.

On suppose que l'effort tranchant V , par ailleurs petit, a un effet négligeable, de sorte que la poutre est essentiellement soumise à la flexion composée plane. Pour calculer cette poutre, il suffit donc d'ajouter algébriquement les effets de l'effort normal à ceux du moment (chap. 6), en vertu de l'hypothèse de linéarité géométrique qui suppose les configurations initiale et déformée confondues.

Cette simplification n'est pas toujours valable.

Lorsque les forces F agissent *en traction* (fig. 20.1a), elles créent, via leur moment, une courbure de sens *contraire* à la courbure initiale. La courbure et la flèche vont donc diminuer et la configuration déformée tend à se rapprocher de la ligne AB ; de ce fait, le moment devient inférieur à la valeur Fv_0 .

En revanche, dans le cas où les forces F agissent *en compression* (fig. 20.1b), elles *accentuent*, par leur moment, la courbure initiale et provoquent une flèche Δv_1 qui s'ajoute à v_0 . Il naît donc un moment additionnel $\Delta M_1 = F \Delta v_1$, qui à son tour accroît encore la déformée d'une quantité Δv_2 . Il en résulte un nouveau moment $\Delta M_2 = F \Delta v_2$, et ainsi de suite (F restant constant !).

Si ce processus s'atténue, c'est-à-dire si la série $v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots$ est convergente, la poutre prend une configuration déformée en équilibre bien déterminée ; elle est dite *stable* (fig. 20.2a). Si, au contraire, la série est divergente, la poutre se courbe toujours davantage, ce qui entraîne sa ruine ; la poutre est dite *instable* (fig. 20.2b).

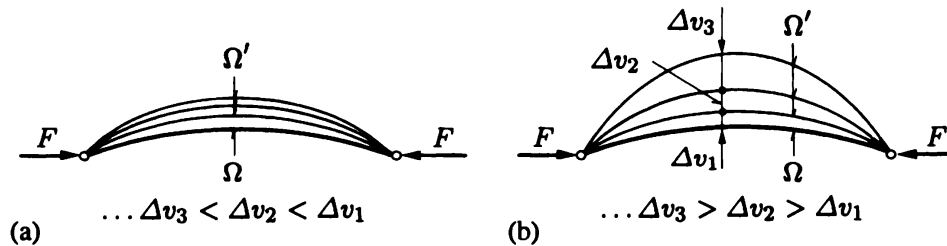


Fig. 20.2 Poutres sollicitées par compression : (a) poutre stable : convergence vers une configuration déformée en équilibre ; (b) poutre instable : divergence de l'équilibre ou flambement par divergence.

Le phénomène divergent décrit ci-dessus se nomme le **flambement par divergence** (on utilise indifféremment le terme *flambement* ou *flambage*). Il est caractérisé par le fait essentiel que *la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement*. Il se déclenche à cause de la *flexion initiale* – courbure initiale (fig. 20.1b), charge excentrée (fig. 20.3a), charge transversale (fig. 20.3b), etc. – que l'effort normal, de compression, *accentue*, comme on s'en rend compte en se plaçant en configuration déformée (fig. 20.3).

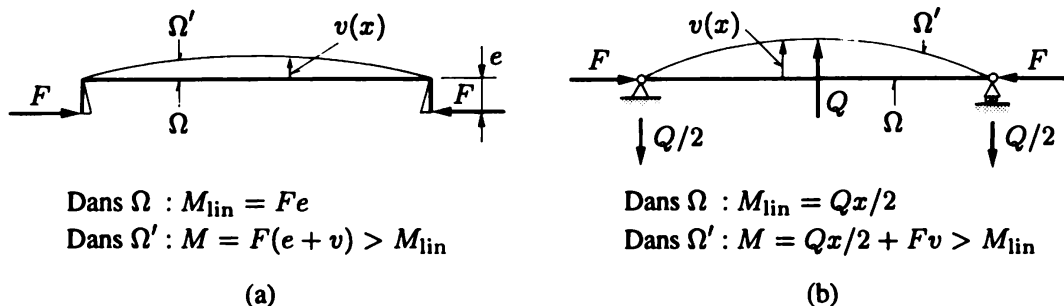


Fig. 20.3 Accroissement du moment en configuration déformée sous la sollicitation de compression (moments en valeur absolue) : (a) charge excentrée ; (b) charge axiale et charge transversale.

20.1.2 Forme et importance des phénomènes de flambement

Le flambement affecte tous les éléments structuraux *comprimés* : colonnes des bâtiments, piles des ponts, barres des treillis, étais des fouilles, pylônes, tours, etc. Dans cette Troisième partie, on englobe dans l'expression *poutre* ou *pièce* l'ensemble de ces éléments.

Lorsque le flambement se produit par accroissement flexionnel de la déformée *dans un plan*, le phénomène s'appelle **flambement plan** ou **par flexion** (fig. 20.4a). C'est le cas le plus courant et le seul étudié dans cette partie.

Deux autres types de flambement sont toutefois aussi possibles.

La pièce comprimée peut s'enrouler (se *visser*) sur elle-même en hélice : c'est le **flambement par torsion**, chaque section tournant autour de son centre de torsion (fig. 20.4b). Ce type de flambement est rare et n'est déterminant que pour les pièces à section ouverte et parois minces.

La poutre comprimée peut devenir instable par flexion oblique et torsion simultanément ; c'est une sorte de combinaison des deux cas précédents, appelé **flambement spatial** ou **par flexion et torsion** (fig. 20.4c). Ce cas, de fréquence moyenne, est difficile à calculer.

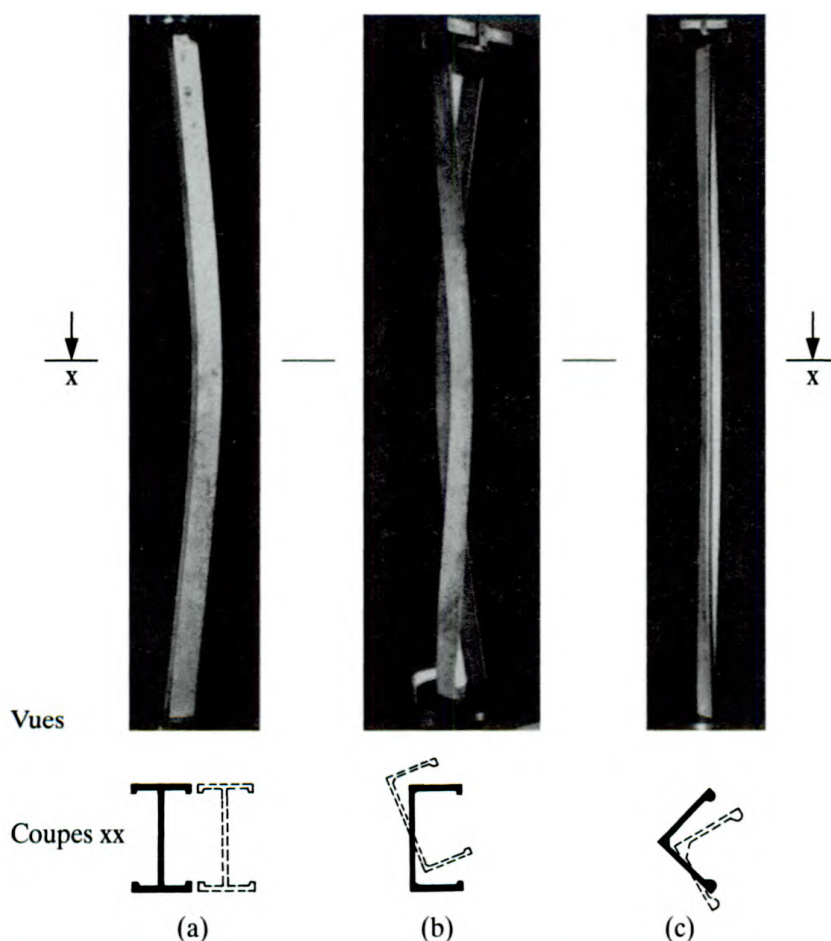


Fig. 20.4 Flambement des poutres droites comprimées : (a) flambement plan ou par flexion (section en I) ; (b) flambement par torsion (section en U) ; (c) flambement spatial ou par flexion et torsion (cornière).
(Source : Smith R. E., *Column tests on some proposed aluminium standard structural sections*, Research Report No. 28, The Aluminium Development Association, London, 1955.)

De manière générale, le *flambement* s'attaque à tous les éléments structuraux qui sont le siège de contraintes normales de compression ; on réunit dans l'expression **phénomènes de flambement** ou **d'instabilité** les formes très diverses qu'il peut prendre⁽²⁾, dont les flambements par flexion, par torsion et par flexion-torsion précédents sont quelques exemples. Pour le constructeur, *ces phénomènes sont extrêmement dangereux*, car ils se manifestent de manière insidieuse et brutale, le plus souvent sous des charges très inférieures à celles qui découlent d'un traditionnel calcul des contraintes.

20.1.3 Théories non linéaires

L'étude du paragraphe 20.1.1 montre que, pour saisir le flambement, il faut raisonner dans la configuration déformée Ω' . Cette Troisième partie se distingue de ce fait nettement des précédentes, car, pour la première fois, *il faut analyser l'action des forces sur la poutre déformée* et non sur sa configuration initiale Ω .

L'hypothèse de linéarité géométrique et son corollaire, le principe de superposition, ne sont donc plus applicables. On appelle *théorie géométriquement non linéaire* une théorie dans laquelle on étudie la structure sur la base de sa configuration déformée. Une telle théorie est *indispensable* pour l'étude des phénomènes d'instabilité⁽³⁾.

Souvent, le flambement se produit alors que la structure est encore très peu déformée ; dans un tel cas, les *rotations* ou pentes de la configuration déformée restent suffisamment petites pour pouvoir introduire l'*hypothèse des rotations modérées* et, par suite, simplifier certaines expressions cinématiques (§ 20.2.1). La théorie non linéaire approchée qui en résulte s'appelle **théorie du second ordre**⁽⁴⁾ ou *des rotations modérées*. Sa limite de validité est fixée par l'amplitude des rotations (en pratique 0, 1 radian). On l'utilise dans cette Troisième partie, car elle suffit à résoudre les problèmes qui y sont développés.

En outre, il faudra tenir compte, le plus souvent, de la *non-linéarité matérielle* (théorie géométriquement et matériellement non linéaire) ; elle complique énormément l'étude mathématique des phénomènes d'instabilité. Comme, en fait, c'est la non-linéarité géométrique qui déclenche l'instabilité, la plasticité l'accentuant par la suite, on introduira la non-linéarité matérielle en second lieu, supposant d'abord que le matériau obéit à la loi de Hooke.

Remarque

La théorie du second ordre utilisée dans ce chapitre cache une hypothèse supplémentaire : *la distribution des efforts normaux a un caractère isostatique*. Cette distribution, directement proportionnelle aux actions, est admise connue a priori ; éventuellement, elle est obtenue par une analyse linéaire hyperstatique, mais en aucun cas elle n'est issue d'une résolution faisant appel au second ordre. Cette hypothèse évite le couplage non linéaire de l'effort normal avec le moment de flexion. Elle permet, pour ce dernier, d'exprimer les contributions provenant des sollicitations axiales directement en fonction des actions plutôt que des efforts normaux. On fera un large usage de cette simplification, bien que les efforts normaux de compression soient, en réalité, les vrais responsables de l'instabilité.

(2) Voir le texte introductif à la Troisième partie.

(3) Elle est, par ailleurs, *recommandable* si la structure est souple : ponts suspendus, structures en câbles, ponts en arc flexibles, portiques non contreventés, etc.

(4) Traduction de l'allemand *Theorie zweiter Ordnung* ; la théorie du *premier ordre* est alors la théorie linéaire.

20.2 Flambement plan élastique par divergence

20.2.1 Equations nécessaires

Le flambement plan est un phénomène essentiellement flexionnel ; les équations utiles sont donc :

- cinématique ($v'' = d^2v/dx^2$)

$$\frac{1}{r} = v'' \quad (20.1)$$

- loi constitutive (Hooke)

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (20.2)$$

- statique (équilibre ou réduction)

$$M = M(v, F \dots) \quad (20.3)$$

L'équation (20.1) introduit l'hypothèse des rotations modérées ($< 0, 1$ rad) et limite donc la théorie au *second ordre* (§ 20.1.3) ; en effet, l'expression complète de la courbure $1/r = v''/[1 + (v')^2]^{3/2}$ (10.8) a été simplifiée en négligeant le carré de la pente. L'équation (20.3) par contre calcule M en configuration déformée (présence de v) ; c'est elle qui fait apparaître la non-linéarité.

En introduisant (20.2) et (20.3) dans (20.1), on obtient l'équation différentielle décrivant le phénomène

$$v'' = \frac{M(v, F \dots)}{EI} \quad (20.4)$$

On admet qu'on peut négliger le raccourcissement de la poutre par compression, qui est toujours très faible, ainsi que les déplacements transversaux produits par l'effort tranchant⁽⁵⁾.

20.2.2 Poutre droite comprimée excentriquement

Une poutre prismatique de longueur L est chargée de deux forces F égales, directement opposées et excentrées d'une distance e de l'axe. Soit x l'axe de la poutre ; on place l'axe y à mi-longueur sur l'axe de symétrie du problème (fig. 20.5).

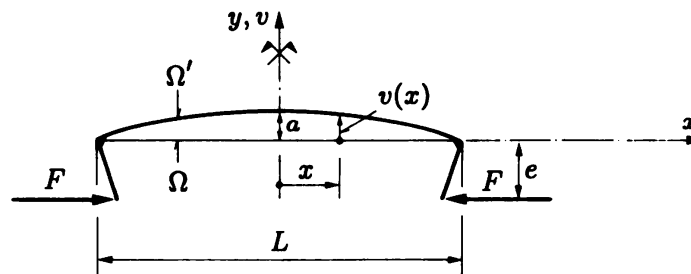


Fig. 20.5 Poutre comprimée excentriquement ($EI = \text{cste}$).

⁽⁵⁾ L'erreur ainsi commise ne dépasse ordinairement pas :

- 1 à 2 ‰ pour l'effort normal ;
- 1 à 2 % pour l'effort tranchant (exception : pièces en treillis, diaphragmées, etc., calculées comme des pièces monolithiques).

Dans une section d'abscisse x de la *configuration déformée* Ω' , le moment de flexion (20.3) vaut, en grandeur et en signe⁽⁶⁾,

$$M = -F(e + v)$$

L'équation différentielle (20.4) devient

$$v'' + \frac{F}{EI}(e + v) = 0$$

Pour simplifier l'écriture ultérieure, on utilise la notation

$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad (20.5)$$

d'où

$$v'' + k^2 v = -k^2 e$$

L'intégrale de cette équation linéaire du second ordre à coefficients constants est

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 se déterminent par les deux conditions aux limites

$$v\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad v\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

On en tire $C_1 = 0$ ⁽⁷⁾ et $C_2 = e/\cos(kL/2)$; l'équation de la déformée est ainsi

$$v = e \left(\frac{\cos kx}{\cos(kL/2)} - 1 \right) \quad (20.6)$$

Puisque $k = \sqrt{F/EI}$ (20.5), on constate que v n'est pas linéaire en F . La flèche maximale a se produit au milieu de la poutre et a pour valeur

$$a = v_{\max} = v(0) = e \left(\frac{1}{\cos(kL/2)} - 1 \right) = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (20.7)$$

La représentation graphique de la variation de a en fonction de F fournit la courbe à l'allure hyperbolique de la figure 20.6(a), admettant une certaine asymptote horizontale. En effet :

- si $F = 0$, alors $k = 0$, $\cos(kL/2) = 1$ et $a = 0$; la tangente en ce point a pour équation

$$a = Fe \frac{L^2}{8EI} = a_{\text{lin}} \quad (20.8)$$

qui n'est autre que la solution linéaire du problème (flèche a_{lin} d'une poutre soumise à un moment constant Fe);

⁽⁶⁾ L'excentricité e est prise en valeur absolue.

⁽⁷⁾ Par symétrie, la fonction impaire $\sin kx$ doit en effet disparaître.

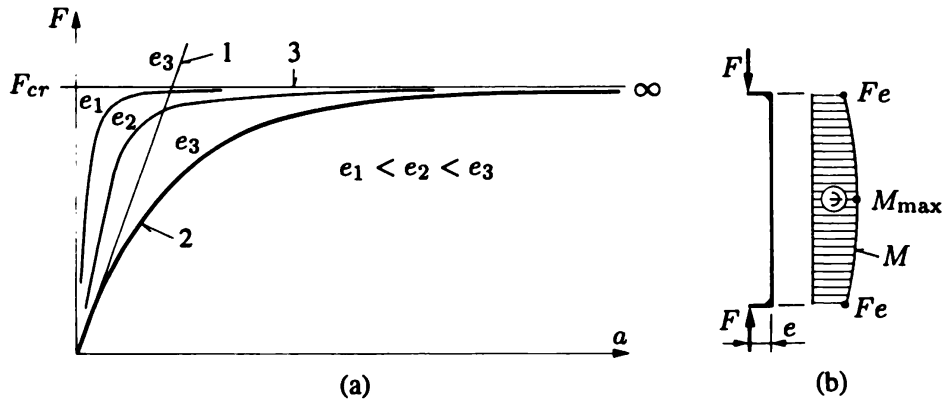


Fig. 20.6 Poutre comprimée excentriquement : (a) courbes flèche-charge pour diverses valeurs (e_1, e_2, e_3) de l'excentricité e (1 : linéaire, (20.8), pour $e = e_3$; 2 : second ordre (20.7), pour $e = e_3$; 3 : asymptote (20.9), quelle que soit la valeur de e); (b) diagramme des moments de flexion.

- si F croît par incréments égaux ($\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 \dots$), les incréments correspondants de flèche augmentent toujours davantage ($\Delta a_1 < \Delta a_2 < \Delta a_3 \dots$), soulignant ainsi le caractère divergent du phénomène ;
- le cosinus du dénominateur s'annule lorsque $kL/2 = \pi/2$, ce qui fournit $F = \pi^2 EI/L^2$, ordonnée de l'asymptote horizontale ; lorsque la force de compression tend vers cette valeur, le dénominateur $\cos(kL/2)$ diminue indéfiniment et la flèche a de la poutre croît au-delà de toute limite.

Cette valeur particulière de la force s'appelle **force** ou **charge critique** F_{cr}

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (20.9)$$

et on observe qu'elle ne dépend pas de l'excentricité e . De plus, la poutre ne saurait en aucun cas supporter une force supérieure à cette valeur critique.

Le moment de flexion maximal se produit au milieu de la poutre (fig. 20.6b) et vaut, en valeur absolue,

$$M_{\max} = F(e + a) = \frac{Fe}{\cos(kL/2)} \quad (20.10)$$

Il croît aussi indéfiniment lorsque F tend vers la valeur limite F_{cr} (20.9).

20.2.3 Poutre comprimée possédant une légère courbure initiale

Cette poutre et les axes choisis sont représentés à la figure 20.7. On appelle $v_0(x)$ l'équation de la déformée initiale et $v(x)$ celle de la déformée additionnelle, comptée à partir de la configuration initiale Ω . Le moment de flexion vaut, dans Ω' ,

$$M = -F(v_0 + v)$$

et l'équation différentielle du phénomène s'écrit

$$v'' + k^2(v + v_0) = 0$$

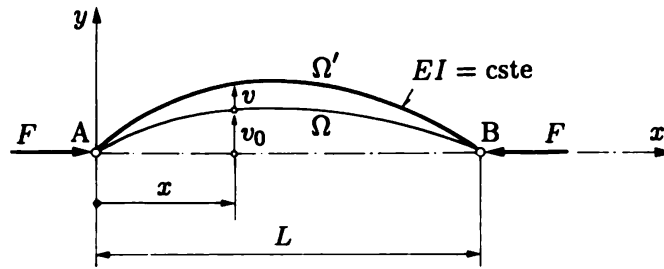


Fig. 20.7 Flambement d'une poutre possédant une déformée initiale $v_0(x)$.

Si la courbe initiale est un arc de sinuséide d'équation

$$v_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

l'équation différentielle devient

$$v'' + k^2 v = -k^2 a_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

L'intégrale en est, compte tenu des conditions aux limites $v(0) = v(L) = 0$,

$$v = \frac{a_0}{\frac{\pi^2}{k^2 L^2} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (20.11)$$

et l'on observe que les déformées initiale v_0 et de flambement v ont une forme semblable (affinité).

Si l'on remplace k^2 par F/EI (20.5), puis $\pi^2 EI/L^2$ par F_{cr} (20.9), et si l'on calcule la flèche a au milieu, on trouve, après multiplication haut et bas par F/F_{cr} ,

$$a = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{a_0 F/F_{cr}}{1 - F/F_{cr}} \quad (20.12)$$

Dans les axes (a, F) , c'est l'équation d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes l'horizontale d'ordonnée $F = F_{cr}$ et la verticale d'abscisse $a = -a_0$ (fig. 20.8). A nouveau,

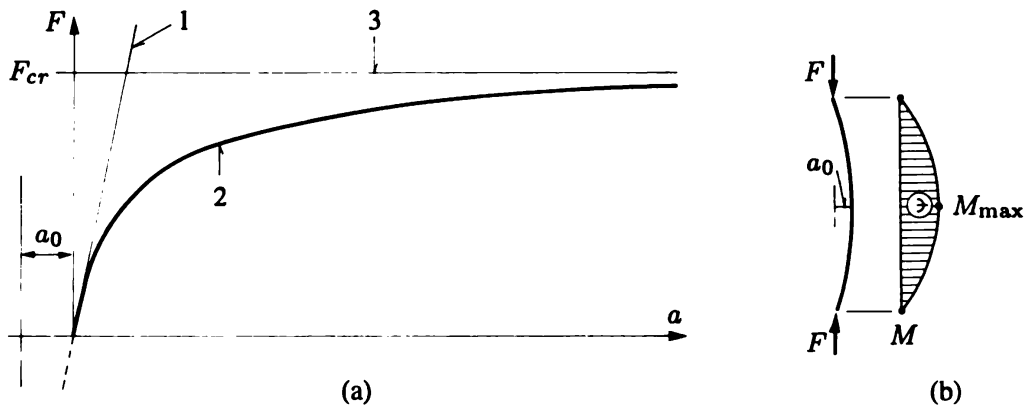


Fig. 20.8 Poutre à déformée initiale sinuséidale : (a) courbe flèche-charge (1 : linéaire (20.13); 2 : second ordre (20.12) ou (20.14); 3 : asymptote F_{cr} , quelle que soit la flèche initiale a_0); (b) diagramme des moments.

- si $F = 0$, $a = 0$; la tangente à l'origine a pour équation

$$a = \frac{a_0}{F_{cr}} F = a_{\text{lin}} \quad (20.13)$$

qui est la solution linéaire du problème ; la flèche non linéaire (20.12) peut donc aussi s'écrire

$$a = a_{\text{lin}} \frac{1}{1 - F/F_{cr}} \quad (20.14)$$

- si F tend vers la *charge critique* (20.9)

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

le dénominateur s'amenuise sans cesse et la flèche a tend à dépasser toute limite ; on constate que F_{cr} ne dépend pas de l'intensité a_0 caractérisant la déformée initiale.

La flèche totale au centre de la poutre vaut

$$a_{\text{tot}} = a_0 + a = a_0 + \frac{a_0 F/F_{cr}}{1 - F/F_{cr}} = a_0 \frac{1}{1 - F/F_{cr}} \quad (20.15)$$

On en déduit le moment maximal (valeur absolue)

$$M_{\text{max}} = F a_{\text{tot}} = F a_0 \frac{1}{1 - F/F_{cr}} = M_{\text{lin}} \frac{1}{1 - F/F_{cr}} \quad (20.16)$$

où $M_{\text{lin}} = F a_0$ est le moment linéaire (au premier ordre).

20.2.4 Autres cas

On peut traiter de manière identique d'autres cas de poutres comprimées et fléchies, tels ceux représentés à la figure 20.9. Le moment fléchissant total dans la poutre en configuration déformée s'écrit

$$M(x) = -Fv - M_0(x)$$

où $M_0(x)$ est le moment produit par les forces transversales seules. L'équation de la déformée est donc

$$EIv'' + Fv = -M_0(x)$$

et on peut l'intégrer dès que la fonction $M_0(x)$ et les conditions aux limites sont connues.

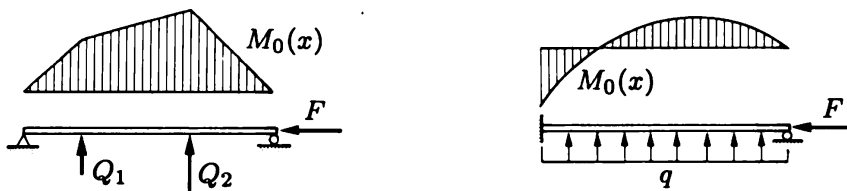


Fig. 20.9 Poutres comprimées et fléchies par des forces transversales.

On établit ainsi des formules analogues aux formules (20.7) et (20.10) donnant l'évolution d'une flèche et d'un moment en fonction de la force de compression F . On trouve comme précédemment que

- ces quantités tendent vers l'infini lorsque F atteint une certaine *charge critique*

$$F_{cr} = K \frac{EI}{L^2} \quad (20.17)$$

où K est un facteur numérique ; dans le cas de la figure 20.9, ce facteur vaut π^2 pour la poutre simple, et $2,05 \pi^2$ pour la poutre encastrée appuyée (§ 20.3.4) ;

- cette charge critique *ne dépend pas de la flexion initiale*, c'est-à-dire *de la cause qui provoque la déformée transversale linéaire* (e dans la figure 20.5 ; v_0 dans la figure 20.7 ; Q_1 , Q_2 ou q dans la figure 20.9) ; elle ne dépend que de l'effort normal (diagramme N), de la géométrie (L , I), du module d'élasticité (E) et des conditions d'appui ; ainsi, deux poutres identiques soumises à des forces transversales différentes ont la même charge critique ; cette importante propriété permettra de simplifier le calcul des charges critiques (sect. 20.3).

Le tableau 20.32 (§ 20.8.4) donne la valeur du moment du second ordre de diverses poutres ; ces valeurs seront utiles ultérieurement (§ 21.4.2).

20.2.5 Une généralisation via une approximation

On peut vérifier que l'on obtient une bonne approximation de la flèche non linéaire a et du moment de flexion non linéaire M à mi-portée d'une *poutre simple* comprimée et fléchie, par les formules

$$a \cong a_{lin} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (20.18)$$

$$M \cong M_{lin} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (20.19)$$

où a_{lin} et M_{lin} sont la flèche et le moment linéaires, c'est-à-dire calculés en configuration initiale ; la quantité $1/(1 - F/F_{cr})$ s'appelle **facteur d'amplification du second ordre**.



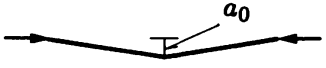
De même, si la poutre possède une légère déformée initiale *quelconque*, d'intensité a_0 à mi-portée, la flèche non linéaire *totale* (c'est-à-dire par rapport à la corde) est, avec une bonne approximation, donnée par

$$a_{tot} \cong a_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (20.20)$$

Ces formules sont tirées du cas de la poutre à déformée initiale sinusoïdale, (20.14), (20.16), (20.15), pour lequel elles sont exactes. Par suite, l'approximation n'est satisfaisante que si la répartition de la flexion initiale a même allure générale et ne s'écarte que peu d'une répartition symétrique par rapport au centre de la poutre. Par exemple, pour la poutre chargée excentriquement (§ 20.2.2), celle supportant une charge concentrée à mi-portée et celle dont la déformée initiale a l'allure d'un V

aplatis, le tableau 20.10 donne les valeurs exactes de a/a_{lin} , M/M_{lin} et a_{tot}/a_0 à mi-portée, que l'on peut comparer avec la valeur approximative du facteur d'amplification $1/(1 - F/F_{cr})$. On constate que l'approximation est tout à fait satisfaisante et qu'elle tend vers l'infini lorsque F tend vers F_{cr} , comme il se doit.

Tableau 20.10 Précision du facteur d'amplification.

	kL	0,2	0,6	1,0	2,0	3,0	π
	$\frac{1}{1 - F/F_{cr}}$	1,004	1,038	1,113	1,68	11,4	∞
	$\frac{a}{a_{\text{lin}}}$	1,004	1,039	1,116	1,70	11,7	∞
	$\frac{M}{M_{\text{lin}}}$	1,005	1,047	1,139	1,85	14,1	∞
	$\frac{a}{a_{\text{lin}}}$	1,004	1,037	1,111	1,67	11,2	∞
	$\frac{M}{M_{\text{lin}}}$	1,003	1,031	1,093	1,56	9,4	∞
	$\frac{a_{\text{tot}}}{a_0}$	1,003	1,031	1,093	1,56	9,4	∞
	$\frac{M}{M_{\text{lin}}}$						

Remarque

Les formules approchées sont encore valables si la force F agit *en traction* ; il suffit de remplacer le facteur d'amplification par

$$\frac{1}{1 + \frac{F}{F_{cr}}}$$

On voit par là que, sous l'action d'une force de traction, les effets du second ordre ont tendance à s'atténuer, comme déjà mentionné (§ 20.1.1).

20.2.6 Diagramme de Southwell

Pour déterminer *expérimentalement* la charge critique d'une pièce comprimée et fléchie, on doit tracer la courbe (F, a) , puis rechercher son asymptote horizontale dont l'ordonnée donne F_{cr} . Il est malaisé de situer la position de cette asymptote avec précision, surtout si la flexion initiale est grande.

On peut améliorer la détermination de F_{cr} en changeant de coordonnées. Multiplions (20.18) par $(1 - F/F_{cr})/F$; après quelques transformations, il vient

$$\frac{a}{F} = \frac{1}{F_{cr}} a + \frac{a_{\text{lin}}}{F} \quad (20.21)$$

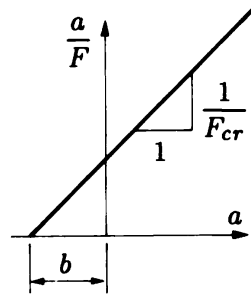


Fig. 20.11 Diagramme de Southwell.

Dans un *diagramme*, dit *de Southwell* (1932), où l'on porte en ordonnée le rapport a/F et en abscisse a , c'est l'équation d'une droite (fig. 20.11). L'inverse de sa pente donne la charge critique. Cette droite coupe l'axe horizontal ($a/F = 0$) à la distance

$$b = -\frac{F_{cr}}{F} a_{lin}$$

de l'origine ; pour la poutre chargée excentriquement, cette distance vaut $-e\pi^2/8$ (cf. (20.8)) et, pour la poutre à courbure initiale sinusoïdale, elle vaut $-a_0$ (cf. (20.13)). Cette distance est donc une mesure de l'*imperfection initiale* – au sens de la section 21.1 – de la poutre (a_0) ou de son chargement (e).

Si la flexion initiale provient de plusieurs causes, le diagramme expérimental de Southwell est encore une droite, et son abscisse à l'origine est une mesure de l'imperfection globale, tant de la géométrie que du chargement de la poutre.

20.2.7 Limitation des résultats obtenus

Les résultats précédents ne sont valables que si les rotations restent suffisamment faibles puisque, dans la cinématique (20.1), on a négligé le carré de la pente (hypothèse des rotations modérées, § 20.1.3). Par suite, les conclusions que l'on peut tirer, à la limite ($a \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$), des équations précédentes, sont incorrectes.

Si une poutre subit de grandes rotations de flexion, il faut utiliser l'équation complète de la déformée

$$\frac{1}{r} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{M(F, v \dots)}{EI} \quad (20.22)$$

dont l'intégration exacte peut se faire à l'aide des fonctions elliptiques. Pour fixer les idées, et sans entrer dans le détail des calculs, examinons le cas de la poutre possédant une légère courbure initiale (fig. 20.12). Le diagramme flèche-charge montre la courbe obtenue par l'équation (20.22), comparée aux résultats précédents.

Cette courbe présente une inflexion à pente faible, qui révèle l'ordonnée F_{cr} où se produit la transition rapide – c'est-à-dire sous faible accroissement de la charge – de la configuration peu courbée à celle fortement incurvée. De plus, cette courbe est constamment croissante. La poutre peut donc rester en équilibre stable sous une force supérieure à la limite F_{cr} . Si ce fait a un intérêt théorique considérable, il ne peut être exploité dans la construction courante parce que, au voisinage de la charge F_{cr} , les déplacements sont déjà très largement supérieurs à ceux qui correspondent à l'épuisement de la capacité portante de la plupart des poutres utilisées en pratique.

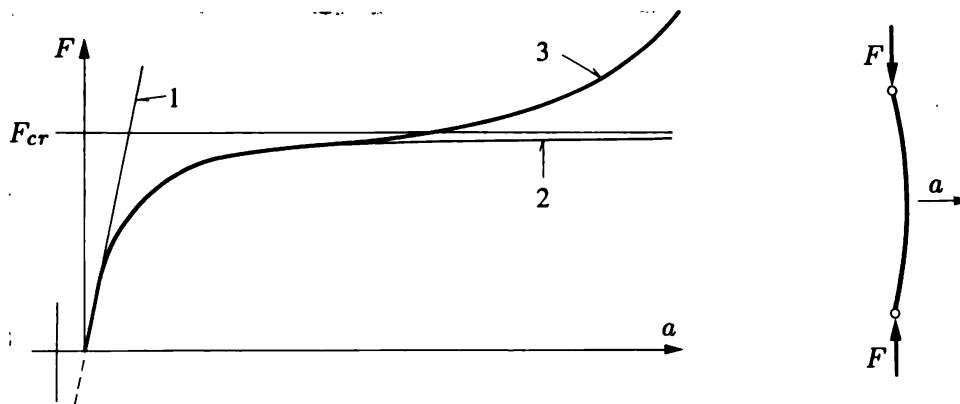


Fig. 20.12 Diagrammes flèche-charge linéaire et non linéaires (1 : théorie linéaire, petites rotations ; 2 : théorie du second ordre, rotations modérées ; 3 : théorie non linéaire, grandes rotations).

20.2.8 Résistance et sécurité

Dans toute cette section, une poutre, soumise à compression et flexion initiale, voit ses déplacements flexionnels augmenter sans cesse davantage lorsque la force de compression atteint la charge critique F_{cr} . Ce comportement est caractéristique du phénomène de *flambement par divergence*, qui doit être considéré comme un état limite ultime particulièrement dangereux (§ 3.4.2), contre lequel il faut se prémunir avec une sécurité convenable. La vérification correspondante est un problème délicat qui est examiné plus loin (chap. 21).

Pour l'instant, on a supposé le matériau élastique linéaire jusqu'à ruine ; la charge critique est alors indépendante de la limite d'élasticité du matériau, n'étant fonction que de son module de Young E . Deux poutres identiques, l'une en acier spécial à haute résistance et l'autre en acier doux, s'écroulent par flambement exactement sous la même charge, bien que la résistance du matériau soit très différente d'un cas à l'autre. Toutefois, à cause de la plasticité inévitable, il conviendra d'apporter certaines réserves à cette conclusion (sect. 20.5 et chap. 21).

20.3 Flambement plan élastique par bifurcation

20.3.1 Flambement par bifurcation

Dans le flambement par divergence, la charge critique d'une poutre donnée conserve la même valeur quelles que soient

- l'origine de la flexion initiale (courbure de l'axe, excentricité de la force de compression, force transversale...);
- l'intensité et, en particulier, la *petitesse* de cette flexion.

Par conséquent, *il doit encore exister une charge critique si la poutre est parfaitement rectiligne, libre de toute force transversale et soumise à une force de compression exactement centrée.*

Il s'agit en fait d'un passage à la limite où la poutre n'est soumise qu'à *compression pure*, toute flexion initiale disparaissant. Dans le cas de la poutre comprimée excentriquement par exemple, si $e \rightarrow 0$, la courbe flèche-charge (fig. 20.6) se rapproche toujours plus de l'axe vertical et de l'asymptote horizontale et, pour $e = 0$, elle est remplacée par ces deux droites (fig. 20.13).

Il y a donc maintenant *deux* courbes flèche-charge, qui décrivent *deux comportements différents* :

- la première, l'axe vertical, correspond à la compression *sans flexion* de la poutre ;
- la seconde est l'horizontale F_{cr} , où la poutre est comprimée *et fléchie*.

L'intersection B de ces deux courbes s'appelle le *point de bifurcation* ; en ce point, exceptionnellement, les deux comportements coïncident sous la même charge.

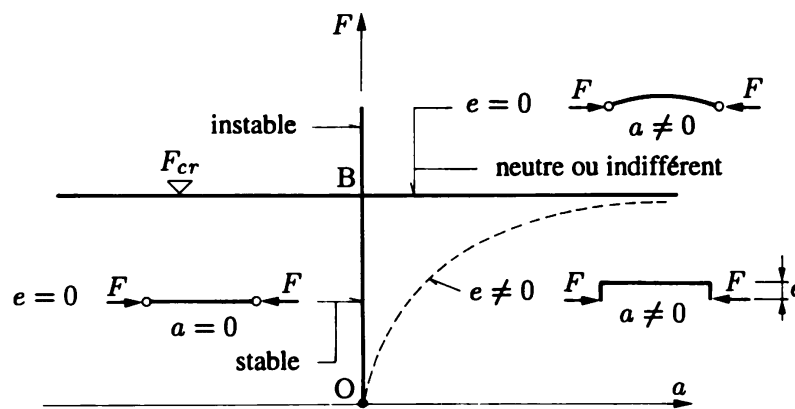


Fig. 20.13 Bifurcation : limite de la courbe flèche-charge quand la flexion initiale tend vers zéro (ici $e \rightarrow 0$).

Lorsque la charge augmente de zéro à F_{cr} , le point représentatif du comportement de la poutre sur le diagramme de la figure 20.13, suit d'abord la verticale OB. Tant que $F < F_{cr}$, la poutre est *stable* et sa configuration est rectiligne, unique et bien déterminée. L'*équilibre* est dit *stable* également ; ceci signifie que si l'on applique, par exemple, une légère force transversale produisant une petite flèche, cette flèche disparaît lorsqu'on retire la force transversale, et la poutre recouvre sa position rectiligne⁽⁸⁾. Lorsque $F = F_{cr}$, au point de bifurcation, l'*équilibre cesse d'être stable* ; en effet, la seconde courbe est une horizontale, de sorte que *la poutre peut rester en équilibre dans toute configuration déformée d'intensité quelconque a, sous charge constante F_{cr}* . L'équilibre lié à cette situation exceptionnelle (positions d'équilibre multiples) est qualifié de *neutre* ou *indifférent*. Si a peut théoriquement s'accroître indéfiniment, il faut en réalité apporter certaines réserves suite à l'hypothèse des rotations modérées (§ 20.3.6). Enfin, si le cas $F > F_{cr}$ est théoriquement imaginable, en réalité la moindre perturbation empêchera de l'atteindre, la poutre bifurquant dès F_{cr} sur l'équilibre neutre ; dans cette zone, l'équilibre est *instable*.

Le phénomène que l'on achève de décrire s'appelle le **flambement par bifurcation** ; c'est un *cas limite* lié à une *modélisation*, la poutre *parfaite*, irréalisable en pratique. Il est caractérisé, dans un diagramme force-déplacement, par la présence de deux courbes, représentatives de l'équilibre de deux comportements différents ; à leur intersection, ou point de bifurcation, s'associe la perte de stabilité ; la force correspondante s'appelle **charge critique de bifurcation**.

⁽⁸⁾ Voir le chapitre 22 pour une définition plus large de la stabilité de l'équilibre.

La bifurcation permet, vis-à-vis de la divergence, un calcul simplifié de la charge critique, car elle élimine la flexion initiale, d'où son intérêt. Pour résoudre un problème de bifurcation, il suffit d'écrire l'équilibre de la configuration déformée exprimant le comportement instable, appelée **mode de flambement**, puis d'étudier dans quelles conditions cet équilibre est réalisable ; c'est la **méthode de l'équilibre adjacent**.

Le problème qui apparaît alors est le choix *a priori* de l'allure correcte du mode de flambement ; on le résout intuitivement, en respectant les conditions d'appui.

La solution du problème de la poutre parfaite a été découverte par Euler en 1744 et reste l'une des plus célèbres de la mécanique des structures ; pour cette raison, les charges critiques de bifurcation sont souvent appelées **charges critiques d'Euler**, et la méthode de l'équilibre adjacent **méthode d'Euler**.

20.3.2 Cas fondamental d'Euler

On nomme ainsi le cas de la poutre simple prismatique, soumise à compression constante. On choisit les axes comme l'indique la figure 20.14 ; puis on esquisse la déformée (le **mode**) de flambement Ω' et, dans une section droite d'abscisse x , on y calcule le moment $M = -Fv$.

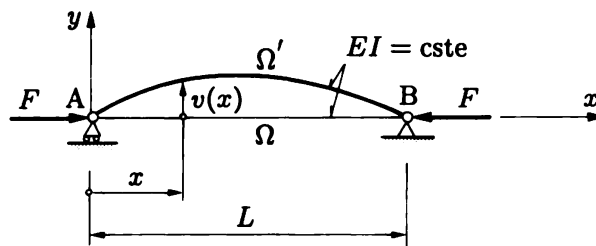


Fig. 20.14 Cas fondamental d'Euler.

L'équation différentielle (20.4) décrivant le phénomène prend la forme, avec $k^2 = F/EI$ (20.5),

$$v'' + k^2 v = 0$$

Elle est *homogène* et son intégrale (ou fonction propre) en est

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (20.23)$$

La détermination de la charge critique de bifurcation va découler de l'étude de cette déformée et de ses conditions aux limites (constantes C_1 et C_2), dont la première, $v(0) = 0$ au droit de l'appui A, fournit

$$C_2 = 0$$

La déformée (20.23) se réduit ainsi à

$$v = C_1 \sin kx \quad (20.24)$$

La seconde condition, $v(L) = 0$ au droit de l'appui B, conduit à

$$0 = C_1 \sin kL$$

Si l'on suppose $C_1 = 0$, la déformée se ramène à $v = 0$ partout, ce qui signifie que la poutre est droite ; cette valeur (solution triviale) est à rejeter, puisqu'on étudie la configuration fléchie. On doit donc admettre $C_1 \neq 0$ et prendre

$$\sin kL = 0$$

Les racines de cette équation trigonométrique sont (valeurs propres)

$$kL = n\pi \quad (n \text{ entier}) \quad (20.25)$$

En élevant au carré et en remplaçant k^2 par F/EI , il vient

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

Pour $n = 0$, la force F est nulle et la poutre est évidemment rectiligne. Pour qu'elle puisse rester fléchie, il faut prendre $n \geq 1$. La plus petite valeur de F réalisant l'équilibre indifférent est donc

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (20.26)$$

Cette valeur est la *charge critique de bifurcation du cas fondamental* (poutre simple), dite aussi *charge critique d'Euler*. Elle coïncide avec la valeur obtenue au paragraphe 20.2.2 dans le cas du flambement par divergence, comme il se doit.

Avec $n = 1$ et $k = \pi/L$ (20.25), la déformée instable (20.24) est représentée par l'arc de sinussoïde

$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (20.27)$$

dont l'amplitude (flèche maximale en $x = L/2$) vaut C_1 . Or la constante C_1 reste indéterminée, ce qui est en accord avec la description de la bifurcation et de l'équilibre neutre faite au paragraphe précédent (fig. 20.13).

Cette déformée est le *premier mode de flambement*. Pour $n = 2, 3 \dots$ on trouve successivement les charges

$$F_{cr 2} = 4 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad F_{cr 3} = 9 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \dots$$

auxquelles s'associent les déformées de la figure 20.15, dites *deuxième, troisième ... modes de flambement*. Elles n'ont pas de signification physique, car l'instabilité de la poutre survient dès que la force F atteint $F_{cr 1} = \pi^2 EI/L^2$.



Fig. 20.15 Deuxième et troisième modes de flambement de la poutre d'Euler : (a) mode 2 ($n = 2$) ; (b) mode 3 ($n = 3$).

20.3.3 Cas de flambement déduits du cas fondamental

Pour quelques autres types d'appui des poutres prismatiques, on peut obtenir directement la charge critique par un raisonnement géométrique.

Le mode de flambement de la poutre encastrée libre est montré à la figure 20.16(b). La pente à l'encastrement reste nulle ; de ce fait, et suite à une symétrie d'axe y de ce mode, l'ensemble des deux poutres (fig. 20.16c) est identique à la poutre simple du cas fondamental. La *charge critique de la poutre console* vaut donc

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (20.28)$$

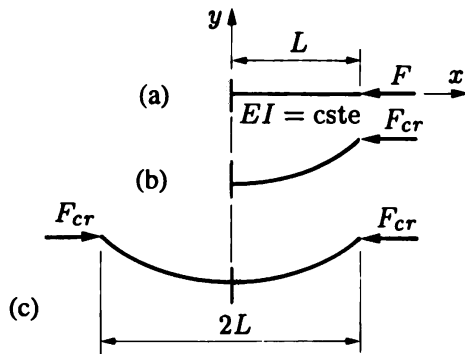


Fig. 20.16 Mode de flambement d'une poutre console.

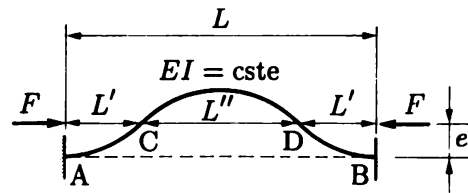


Fig. 20.17 Mode de flambement d'une poutre bi-encastrée.

La déformée d'instabilité de la poutre encastrée aux deux extrémités a l'allure représentée à la figure 20.17⁽⁹⁾. La courbure qu'elle présente aux encastremets A et B signifie qu'il existe des moments M en ces points (réactions), égaux par symétrie. L'ensemble (M, F) est équivalent à une force F excentrée de $e = M/F$; la ligne d'action de cette force doit passer par les points d'inflexion de la déformée, car le moment y est nul. On ne change rien en introduisant en ces points des articulations. Les portions AC et BD de la poutre sont donc assimilables à des consoles, et la portion CD à une poutre simple. Ces trois portions sont instables simultanément, ce qui s'écrit

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L')^2} = \frac{\pi^2 EI}{(L'')^2}$$

d'où l'on déduit $L'' = 2L'$. Or $L = 2L' + L''$, donc $L' = L/4$ et $L'' = L/2$. En remplaçant L'' par $L/2$ dans l'expression de F_{cr} ci-avant, on trouve la *charge critique de la poutre bi-encastrée*

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (20.29)$$

Remarque

La charge critique d'une poutre bi-encastrée est quatre fois plus grande que celle d'une poutre simple et seize fois supérieure à celle d'une console, en supposant L , E et I identiques. Ces différences sont considérables, si l'on songe qu'elles ne proviennent que des conditions d'appui variant d'un cas à l'autre ; ces dernières jouent donc un rôle essentiel en instabilité : plus la poutre a de liaisons, plus sa charge critique augmente (§ 21.3.3).

⁽⁹⁾ On suppose que les encastremets autorisent l'introduction de la force F .

20.3.4 Poutre encastrée appuyée et déterminant de stabilité

Le mode de flambement de cette poutre est dessiné sur la figure 20.18. En A naît un moment d'encastrement qui permet d'excentrer la ligne d'action de la force de compression F ; mais cette ligne doit passer par l'appui B qui est à rouleur (ainsi que par le point d'inflexion de la déformée) ; puisque cette ligne est inclinée, il apparaît une réaction transversale R comme l'indique la figure.

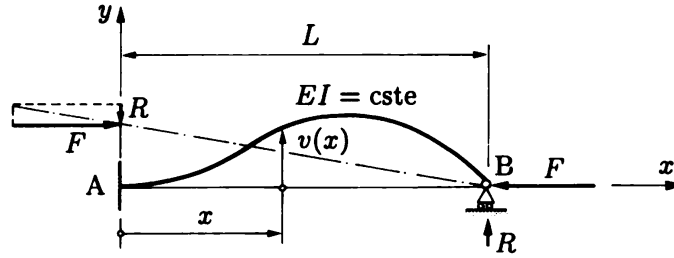


Fig. 20.18 Mode de flambement de la poutre encastrée appuyée.

Le mode d'instabilité obéit à l'équation différentielle

$$EI v'' = M = -Fv + R(L - x)$$

La solution générale en est (avec $k^2 = F/EI$)

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{R}{F} (L - x) \quad (a)$$

Pour déterminer les constantes d'intégration C_1 et C_2 , la réaction inconnue R et la charge de bifurcation F_{cr} , on exprime les conditions d'extrémité

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad v'(0) = 0$$

Introduites dans (a), elles s'écrivent

$$C_2 + \frac{RL}{F} = 0 \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0 \quad kC_1 - \frac{R}{F} = 0 \quad (b)$$

La solution non nulle de ce système homogène s'obtient en annulant le déterminant⁽¹⁰⁾

$$\Delta_{sta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & L/F \\ \sin kL & \cos kL & 0 \\ k & 0 & -1/F \end{vmatrix} = 0$$

dit **déterminant de stabilité**, qui fournit l'équation

$$\operatorname{tg} kL = kL$$

⁽¹⁰⁾ La solution triviale $C_1 = C_2 = R = 0$ conduit à la configuration non déformée $v = 0$; il faut donc l'écarter.

Cette équation se résout par approximations successives ou graphiquement. Sa plus petite racine positive non nulle est $kL \cong 4,4934$. La *charge critique de la poutre encastree appuyee* est donc

$$F_{cr} = k^2 EI \cong \frac{20,2 EI}{L^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{(0,7 L)^2} \cong 2,05 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (20.30)$$

Conservant C_1 comme paramètre indéterminé et éliminant C_2 et R par (b), l'équation (a) de la déformée s'écrit, avec $m = kL (\cong 4,4934)$,

$$v = C_1 \left(\sin \frac{mx}{L} - m \cos \frac{mx}{L} + m - \frac{mx}{L} \right)$$

Remarques

De façon générale, les conditions aux limites résultant d'un problème de bifurcation conduisent toujours à un *système homogène*. Ecartant la solution triviale correspondant à la configuration non déformée, la solution non triviale, qui livre la charge critique de bifurcation et la déformée (à l'amplitude près), s'obtient en *annulant le déterminant de stabilité*.

Qualitativement, les liaisons de la poutre encastree appuyee sont supérieures à celles de la poutre simple, mais inférieures à celles de la poutre bi-encastree. Quantitativement, il en est de même des charges critiques correspondantes.

20.3.5 Autres poutres

De nombreux autres cas peuvent se traiter de manière analogue :

- poutre continue (fig. 20.19a) ;
- poutre encastree élastiquement à ses deux extrémités (fig. 20.19b) ;
- poutre chargée de forces axiales réparties, par exemple le poids propre (fig. 20.19c) ;
- poutre composée de tronçons de raideur flexionnelle (EI) différente (fig. 20.19d) ;
- poutre à moment d'inertie variable (fig. 20.19e) ;
- poutre soumise à plusieurs forces axiales (fig. 20.19f), etc.

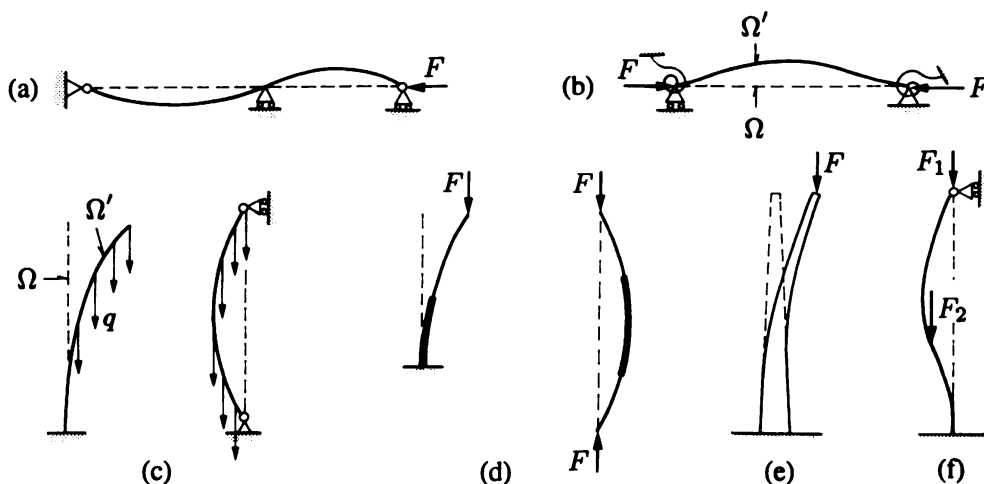


Fig. 20.19 Cas de flambement divers.

Leur analyse sort du cadre de ce livre, mais on peut en trouver une étude détaillée dans divers ouvrages spécialisés⁽¹¹⁾.

Jusqu'ici on a supposé que la ou les forces appliquées à la pièce conservaient, en configuration déformée, la même direction qu'en configuration stable. Il peut arriver que cette situation ne soit pas vérifiée, auquel cas la charge critique peut varier fortement.

Ainsi, par exemple, pour la poutre console, on peut soit appliquer la charge à l'extrémité libre par l'intermédiaire d'une bielle (fig. 20.20a) ou d'un câble (fig. 20.20b), qui sont alignés avec la poutre en configuration initiale, soit, comme avant, supposer qu'elle reste verticale (fig. 20.20c). Si les modes d'instabilité ont un aspect semblable dans les trois cas, les charges critiques peuvent par contre être très différentes de la valeur classique $F_{cr \text{ console}} = 0,25 \pi^2 EI/L^2$ (20.28).

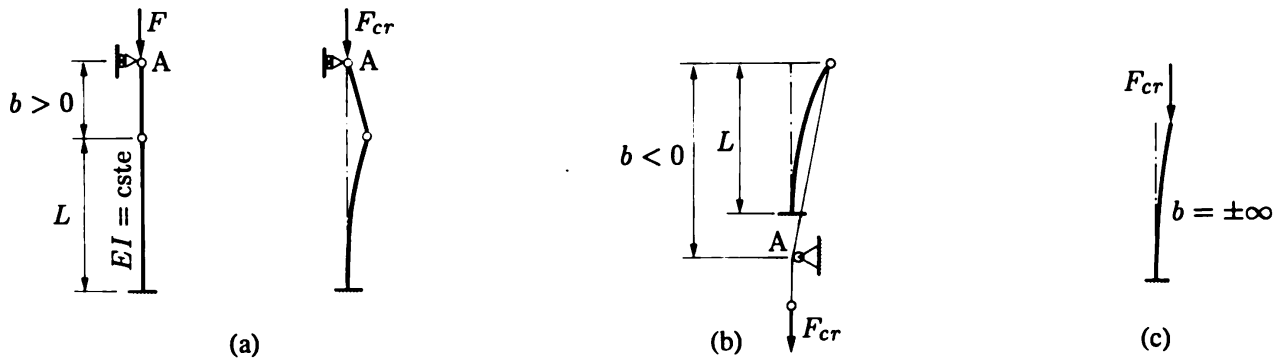


Fig. 20.20 Bifurcation d'une console soumise à une charge de direction variable, passant par un point fixe A :
 (a) $b > 0$ (pour $b = L$, $F_{cr} = 0,14 \pi^2 EI/L^2$); (b) $b < 0$ (pour $b = -1,5 L$, $F_{cr} = 0,53 \pi^2 EI/L^2$);
 (c) $b = \pm\infty$ ($F_{cr} = 0,25 \pi^2 EI/L^2$).

La résolution de ce problème conduit à l'équation transcendante (où $k = \sqrt{F/EI}$)

$$\operatorname{tg} kL - \left(1 + \frac{b}{L}\right) kL = 0$$

où la distance b doit être affectée d'un signe (fig. 20.20). Pour $b > 0$, on a $F_{cr} < F_{cr \text{ console}}$, et inversement. En particulier, pour $b = -L$, $b = 0$ et $b = \pm\infty$, on retrouve les cas classiques étudiés précédemment, soit la poutre simple, celle encastree appuyée et la console.

Des cas de ce genre se présentent en pratique dans le flambement des mâts de charge, des portiques des ponts à voie inférieure, des poutres précontraintes sous l'effet de la précontrainte du câble supposé guidé dans diverses sections droites par des diaphragmes transversaux, des pylônes des ponts suspendus et haubanés, etc.

⁽¹¹⁾ Voir par exemple Timoshenko S. P., *Théorie de la stabilité élastique*, Dunod, Paris, 1966, ou encore le *Handbook of structural stability*, Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Co., Tokyo, 1971, qui regroupe des résultats très complets. Le cas des figures 20.19(a) et 20.19(b) est donné en annexe (§ 20.8.2 et 20.8.3).

20.3.6 Limite de validité des résultats obtenus

Les résultats précédents ne sont valables, comme en divergence (§ 20.2.7), que dans le cadre de la théorie correspondante (rotations modérées ou second ordre). Si l'on recourt à l'équation non linéaire complète (20.22)

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{M(F, v \dots)}{EI}$$

on trouve la même charge critique d'Euler ; en effet, la courbe du second comportement est maintenant croissante, mais présente un minimum au point de bifurcation ; elle est donc tangente à l'horizontale d'ordonnée F_{cr} (fig. 20.21).

Ainsi, la poutre n'est en équilibre neutre, donc instable, qu'au *voisinage immédiat* du point de bifurcation ; même si, juste après F_{cr} , un très faible supplément de charge provoque des déplacements transversaux très importants, la déformée n'est pas indéterminée ; à chaque valeur de F supérieure à F_{cr} correspond une forme courbe déterminée de la poutre pour laquelle l'équilibre est, à nouveau, *stable*.

Pour une poutre simple par exemple, la bifurcation s'illustre par deux courbes dans un diagramme flèche-charge (fig. 20.21) : la première est l'axe vertical (§ 20.3.1) et la seconde est une courbe très aplatie au voisinage du point de bifurcation B. En raisonnant comme au paragraphe 20.3.1, on constate qu'il s'agit là de la limite, lorsque la flexion initiale tend vers zéro, de la courbe non linéaire obtenue en divergence (§ 20.2.7, fig. 20.12).

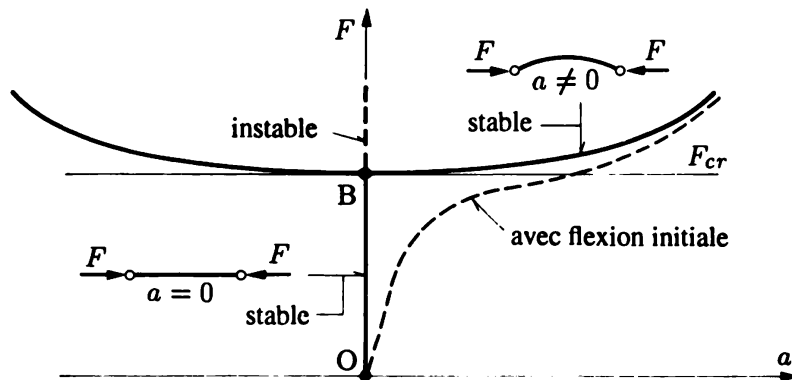


Fig. 20.21 Bifurcation avec comportement non linéaire complet.

On en conclut que *la notion d'équilibre neutre (ou indifférent) est la conséquence irréaliste d'une simplification de la théorie non linéaire*.

Toutefois, dans le cas de la poutre simple, la flèche au centre atteint déjà 10 % de la longueur pour une charge ne dépassant F_{cr} que de 1,25 % ; en pratique, il est inconcevable d'atteindre de telles flèches. Par conséquent, la théorie du second ordre donne une vue suffisamment précise de la réalité, et la charge critique qu'elle fournit représente effectivement une limite supérieure de la charge ultime d'une poutre comprimée.

20.4 Elancement

20.4.1 Longueur de flambement

Pour les diverses poutres comprimées, on a trouvé des expressions différentes de la charge critique. Vu qu'il est pratique d'avoir une seule formule couvrant tous les cas, on convient de ramener un cas quelconque de flambement au cas fondamental, en mettant sa charge critique sous une forme analogue à (20.26), à savoir

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2} \quad (20.31)$$

La grandeur L_K porte le nom de **longueur de flambement** ; par définition, c'est la *longueur d'une poutre simple fictive qui a la même charge critique que la pièce donnée*.

Pour une poutre dont EI est constant, la charge critique s'écrit sous la forme (§ 20.2.4, (20.17))

$$F_{cr} = K \frac{EI}{L^2}$$

La valeur de L_K s'obtient alors en égalant cette formule à la précédente, ce qui donne

$$L_K = \frac{\pi L}{\sqrt{K}} \quad (20.32)$$

En appliquant cette relation aux poutres des paragraphes 20.3.2 à 20.3.4, on obtient

- poutre console

$$L_K = 2L \quad (20.33a)$$

- poutre simple

$$L_K = L \quad (20.33b)$$

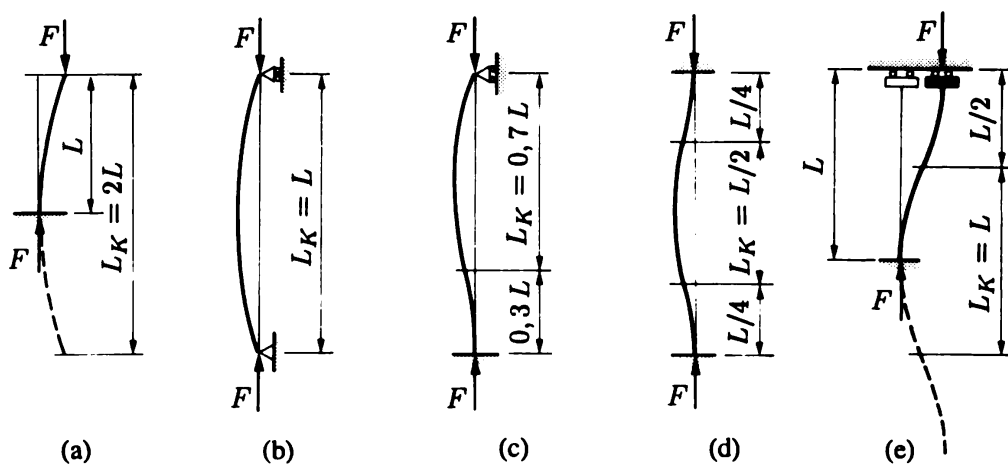


Fig. 20.22 Longueurs de flambement ($EI = \text{cste}$).

- poutre encastrée appuyée

$$L_K \cong 0,7 L \quad (20.33c)$$

- poutre bi-encastrée

$$L_K = 0,5 L \quad (20.33d)$$

Pour ces divers cas particuliers, on observe que L_K est donnée par l'arc de sinusoïde compris entre deux points d'inflexion successifs du mode de flambement (fig. 20.22). *Généraliser cette constatation serait faux et pourrait conduire à des valeurs de L_K complètement erronées* (et souvent dans le sens de l'insécurité).

On prendra garde à ne pas tomber dans ce piège tentant, mais fallacieux : dessiner la déformée d'instabilité probable et en repérer les points d'inflexion pour estimer L_K est un usage malheureusement trop répandu qui ne doit être appliqué qu'avec la plus grande réserve ; la figure 20.23 en donne un exemple (ex. 20.6.9 et 20.6.10).

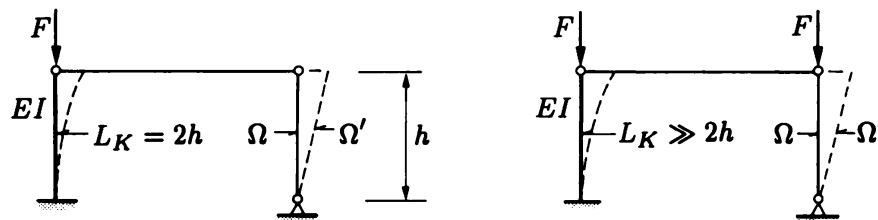


Fig. 20.23 Attention à l'estimation intuitive de la longueur de flambement !

Bien que très pratique, la notion de longueur de flambement est délicate et devrait être évitée ; elle devient difficile à définir dès que la poutre comporte plusieurs travées (fig. 20.19a), est à matériau (E) ou inertie (I) variables (fig. 20.19d et 20.19e), est soumise à un effort normal variable (fig. 20.19c et 20.19f), etc.

20.4.2 Contrainte critique et élancement

Au point de bifurcation, on peut calculer la **contrainte critique** de compression pure

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_K^2}$$

où le signe de l'effort normal est, par commodité, ignoré ($|N| = F_{cr}$). Posons

$$\frac{I}{A} = i^2$$

i est le rayon d'inertie ou de giration de la section (vol. 1, sect. 13.7) correspondant au plan de flambement considéré (voir la première remarque ci-après) ; il a la dimension d'une longueur. Il vient

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{i}{L_K} \right)^2$$

ce qui peut s'écrire

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (20.34)$$

à condition de poser

$$\lambda = \frac{L_K}{i} \quad (20.35)$$

La quantité sans dimension λ s'appelle l'**élancement** de la pièce. Cette appellation correspond à la notion courante d'une pièce élancée car, plus λ est grand, plus la longueur de la poutre est grande vis-à-vis des dimensions de sa section droite.

Remarques

L'**élancement** d'une pièce dépend du plan dans lequel le flambement peut se produire. En effet, d'un plan à l'autre, l'inertie I change et, en outre, la longueur de flambement peut être différente car les conditions d'appui de la pièce ne sont pas nécessairement les mêmes.

Pour l'ingénieur, l'élancement est un chiffre très parlant, qui qualifie à lui seul la **sensibilité au flambement**. En pratique, les élancements supérieurs à 150 sont rares ; les pièces comprimées usuelles (colonnes des bâtiments, piles des ponts, mâts, barres des treillis, etc.) ont un élancement de l'ordre de 50 à 80. Au-dessous de $\lambda = 20$, le danger de flambement disparaît (pièces massives).

20.4.3 Courbe de flambement et élancement limite

On obtient une vue d'ensemble de la sensibilité au flambement par bifurcation en traçant le graphique de la fonction $\sigma_{cr} = f(\lambda)$, appelée **courbe de flambement**. Elle est donnée par l'équation $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$ (20.34), dénommée **courbe d'Euler** et asymptotique aux axes (fig. 20.24).

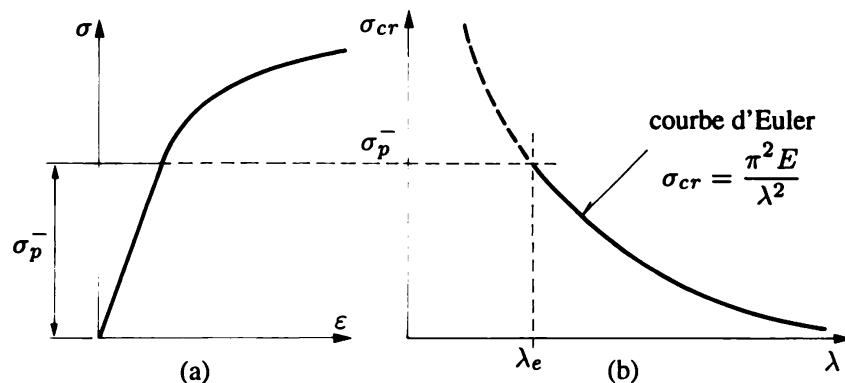


Fig. 20.24 Courbe de flambement (d'Euler).

Mais la théorie développée jusqu'ici est basée sur la loi de Hooke ((20.2), § 20.2.1). Elle n'est donc valable que si, au niveau de la bifurcation, le matériau dont la pièce est faite obéit encore à cette loi. La contrainte σ_{cr} de compression pure doit donc être inférieure ou au plus égale à la limite de proportionnalité en compression du matériau σ_p^- (fig. 20.24a).

La condition de validité de la théorie d'Euler s'écrit donc

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p^-$$

ce qui limite la courbe d'Euler à l'ordonnée σ_p^- (fig. 20.24b) ; on en déduit l'abscisse correspondante appelée **élancement limite** λ_e

$$\lambda_e = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p^-}} \quad (20.36)$$

C'est l'élancement au-dessous duquel la formulation matériellement linéaire du flambement cesse d'être valable. On appelle parfois *pièces longues* celles dont l'élancement est supérieur à λ_e ; les autres sont dites *pièces courtes*.

Pour l'acier doux (Fe 360), on a $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ et $\sigma_p^- \equiv \sigma_e \cong 255 \text{ N/mm}^2$; il en résulte

$$\lambda_{e \text{ acier doux}} = 3,14 \sqrt{\frac{210\,000}{255}} \cong 90$$

Pour cet acier, la formulation d'Euler n'est valable que pour les pièces dont l'élancement dépasse 90 environ. Pour d'autres matériaux, les constantes E et σ_p^- étant différentes, l'élancement limite n'est pas le même que celui de l'acier doux.

20.5 Flambement plan élasto-plastique par bifurcation

20.5.1 Difficultés théoriques

L'établissement d'une théorie du flambement en domaine élasto-plastique est difficile et il n'y a pas, aujourd'hui, de solution analytique générale.

Supposons que le niveau du point de bifurcation d'une poutre soit tel que $\sigma_{cr} > \sigma_p^-$ (fig. 20.25a). Pour la configuration rectiligne, la distribution des contraintes normales en toute section est uniforme ($\sigma = \sigma_{cr}$, au signe près ; fig. 20.25b). Pour la configuration déformée, la flexion transversale accroît les dilatations ε des fibres situées du côté concave de la courbure, mais décharge les fibres situées du côté convexe (fig. 20.25c). Pour les premières, le module d'élasticité à considérer est le module tangent E_t (fig. 20.25a), tandis que pour les secondes, c'est le module de Young E qui entre en jeu par déchargement élastique.

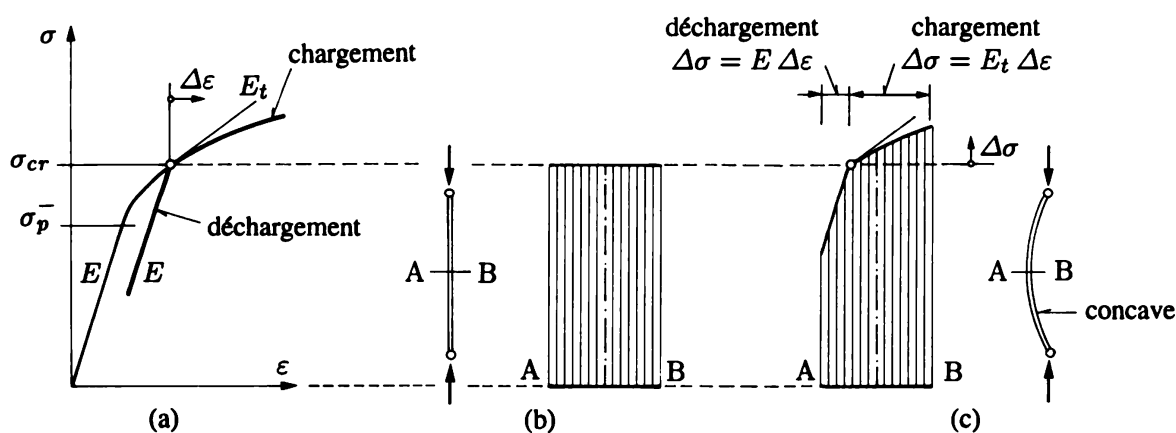


Fig. 20.25 Evolution des contraintes lors d'une bifurcation élasto-plastique : (a) diagramme (σ, ε) ; (b) configuration rectiligne et diagramme des contraintes normales dans la section médiane AB ; (c) configuration déformée.

Le diagramme des contraintes prend donc une allure complexe, variable d'une section à l'autre et dépendant de la forme de la section. Si en plus la pièce est à section variable ou soumise à un effort normal variable, le problème est inextricable. (On peut néanmoins le résoudre par voie numérique.)

20.5.2 Théorie d'Engesser

La première théorie du flambement élasto-plastique est due à Engesser (1889). Il omet le déchargement élastique d'une part et suppose que E_t est constant dans toute la pièce d'autre part. Alors tout doit se passer comme si le matériau était élastique linéaire de module E_t . Par conséquent, la *charge critique de bifurcation élasto-plastique*, dite *d'Engesser* ou *du module tangent*, a pour valeur

$$F_{cr,t} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}$$

Cette théorie est incorrecte puisqu'elle ne tient pas compte du déchargement élastique de certaines fibres en configuration déformée. Ce phénomène augmente la résistance de la pièce (car $E > E_t$), de sorte que la vraie charge critique est supérieure à celle d'Engesser.

20.5.3 Théorie de Shanley

Les tentatives de correction de cette erreur (Engesser 1895, von Karman 1910 ; théories du module d'élasticité *réduit*) sont restées vaines jusqu'à ce que Shanley, en 1947, démontre que (fig. 20.26) :

- la poutre est stable et rectiligne pour $F \leq F_{cr,t}$;
- la charge $F_{cr,t}$ correspond au point de bifurcation ;
- pour toute charge légèrement supérieure à $F_{cr,t}$, il existe une configuration déformée *stable* (où certaines fibres sont déchargées élastiquement) ; la courbe (F, a) correspondante atteint un maximum qui est la vraie *charge critique*, dite *de Shanley* ;
- cette charge n'est que très peu supérieure à celle d'Engesser (quelques pour cent).

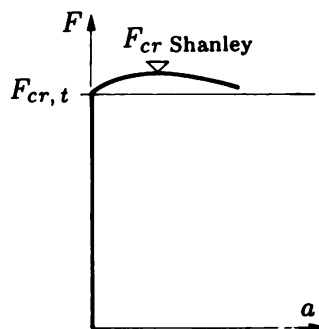


Fig. 20.26 Courbe flèche-charge en flambement élasto-plastique par bifurcation.

20.5.4 Charge critique et courbes de flambement en régime élasto-plastique

Au vu de ce qui précède, *il est raisonnable d'utiliser en pratique la charge critique du module tangent*

$$F_{cr,t} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (20.37)$$

qui donne des valeurs légèrement erronées par défaut, donc présentant toute sécurité. Cette formule est d'ailleurs en excellent accord avec les résultats d'essais (fig. 20.27). On en déduit la contrainte critique

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (20.38)$$

Comme le module E_t dépend de la valeur de la contrainte σ_{cr} (fig. 20.25a), il faut, pour calculer les couples de valeurs σ_{cr} et λ , procéder de la manière suivante : on s'impose une valeur arbitraire de σ_{cr} ; on en déduit E_t par le diagramme (σ, ε) ; puis, par (20.38), on calcule la valeur correspondante de l'élancement λ . On peut ainsi construire point par point la courbe $\sigma_{cr} = f(\lambda)$. Si l'on dispose d'une expression analytique du diagramme (σ, ε) , on peut, bien entendu, calculer σ_{cr} analytiquement ($E_t = d\sigma/d\varepsilon$). La courbe de flambement obtenue se raccorde, au droit de l'élancement limite λ_e , à la courbe d'Euler (fig. 20.27 et 20.28).

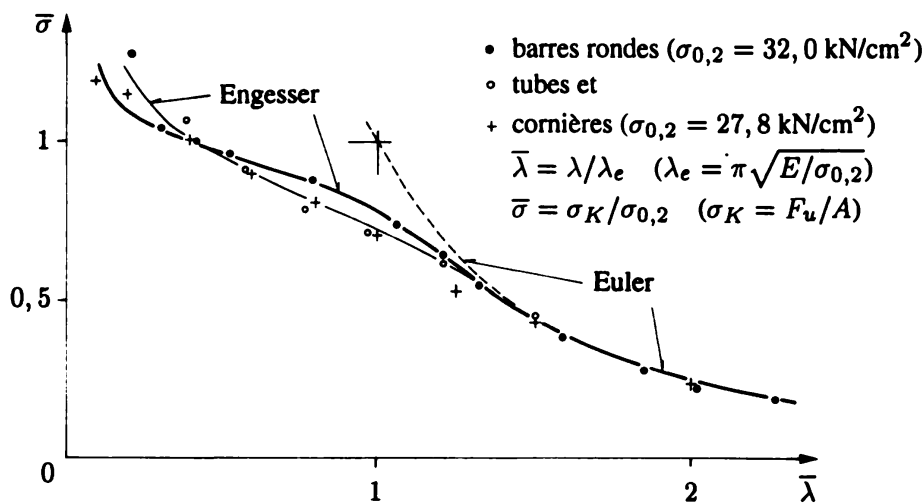


Fig. 20.27 Courbes de flambement d'un alliage d'aluminium et comparaison avec l'expérience. On a porté, dans le diagramme non dimensionnel $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ (§ 21.3.2), deux courbes de l'alliage 7020 T6 associées l'une à des essais sur des barres rondes, l'autre à des essais sur des tubes et des cornières. (Source : Templin R. L., Sturm R. G., Hartmann E. C., Holt M., *Column strength of various aluminium alloys*, ALCOA Technical Paper No. 1, Pittsburgh, 1938.)

Le cas important des aciers à palier présente la particularité suivante : dans le palier, on serait tenté de poser $E_t = 0$, ce qui, dans (20.38), conduit à la valeur absurde $\sigma_{cr} = 0$. Un étude détaillée montre qu'on se trouve en fait dans un cas limite ; lorsque E_t tend vers zéro, la courbe (20.38) tend vers l'horizontale d'ordonnée σ_e (limite d'élasticité). D'ailleurs, d'un point de vue physique, la contrainte de ruine ne saurait être supérieure à σ_e , à cause du palier, ce que l'expérience confirme (fig. 20.28).

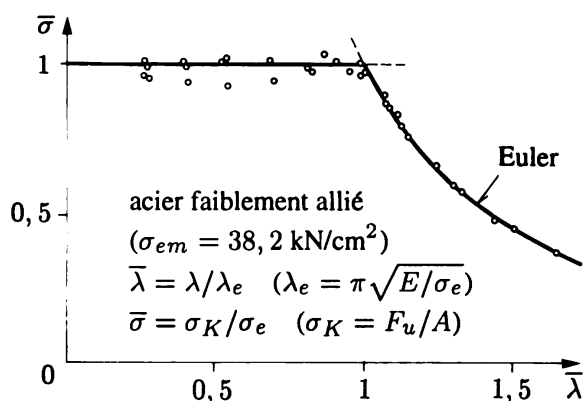


Fig. 20.28 Courbe de flambement d'un acier à palier et comparaison avec des essais sur des pièces à section rectangulaire. (Source : Rein W., *Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle*, Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Heft B/4, Deutscher Stahlbau-Verband, Springer, Berlin, 1930.)

20.5.5 Limitation de la notion de longueur de flambement dans le cas élasto-plastique

En admettant les hypothèses d'Engesser, il est clair que les notions de longueur de flambement L_K et d'élancement λ ne s'étendent au domaine élasto-plastique que pour les poutres prismatiques, soumises à effort normal constant et libres d'appuis élastiques.

En effet, dans le cas de pièces à section ou effort normal variables, on ne peut plus passer du domaine élastique à celui élasto-plastique en remplaçant simplement E par E_t car, le long de la pièce, la contrainte de compression est variable et donc E_t aussi. Le problème est le même pour une poutre – même prismatique – appuyée élastiquement, parce que le rapport entre la rigidité de ces appuis et la raideur de la pièce varie quand on passe de E à E_t .

20.6 Exercices

20.6.1 Etudier le flambement par divergence d'une poutre simple prismatique comprimée par une force F et fléchiée par une charge uniforme q (littéral). Etablir l'équation de la déformée, de la flèche maximale et du moment maximal. Vérifier ce dernier résultat avec celui du tableau 20.32 (§ 20.8.4). Comparer à mi-portée les valeurs a/a_{lin} et M/M_{lin} exactes avec celles approximatives découlant du facteur d'amplification du second ordre (§ 20.2.5). *Note* : prendre l'origine des axes à mi-portée.

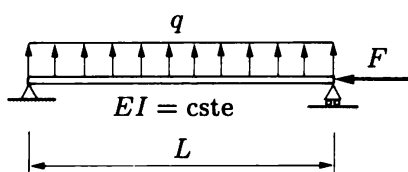


Fig. Ex. 20.6.1

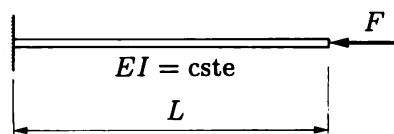


Fig. Ex. 20.6.2

20.6.3 Pour calculer la charge critique d'une poutre encastree appuyee, on decompose cette poutre comme indique à la figure, puis on egale les charges critiques des deux tronçons ; on obtient ainsi

$$\frac{\pi^2 EI}{(L')^2} = \frac{\pi^2 EI}{4(L'')^2}$$

Avec $L' + L'' = L$, on en tire

$$F_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} \cong \frac{22,2 EI}{L^2}$$

Cette valeur est fautive. Pourquoi ?

20.6.4 Dessiner le mode de flambement de diverses poutres prismatiques (fig. ex. 20.6.4a à 20.6.4g) et donner, dans chaque cas, la valeur probable de L_K ($EI = \text{cste}$).

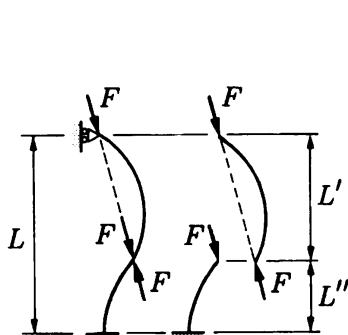


Fig. Ex. 20.6.3

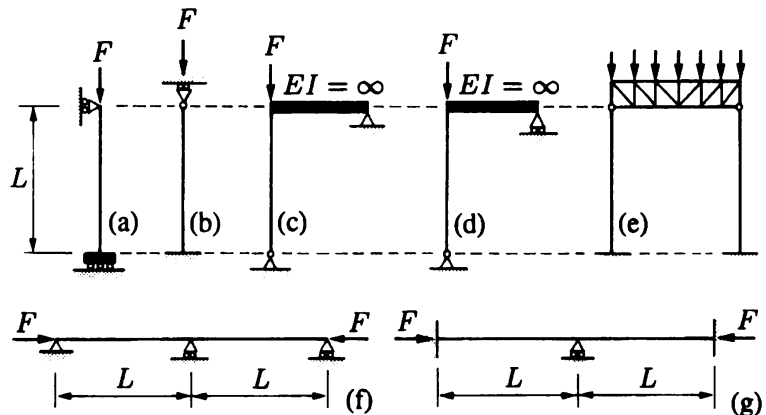


Fig. Ex. 20.6.4

20.6.5 Dessiner et, éventuellement, discuter le(s) mode(s) d'instabilité probable(s) de diverses structures (fig. ex. 20.6.5a à 20.6.5f) dans leur plan (CC = pièces comprimées).

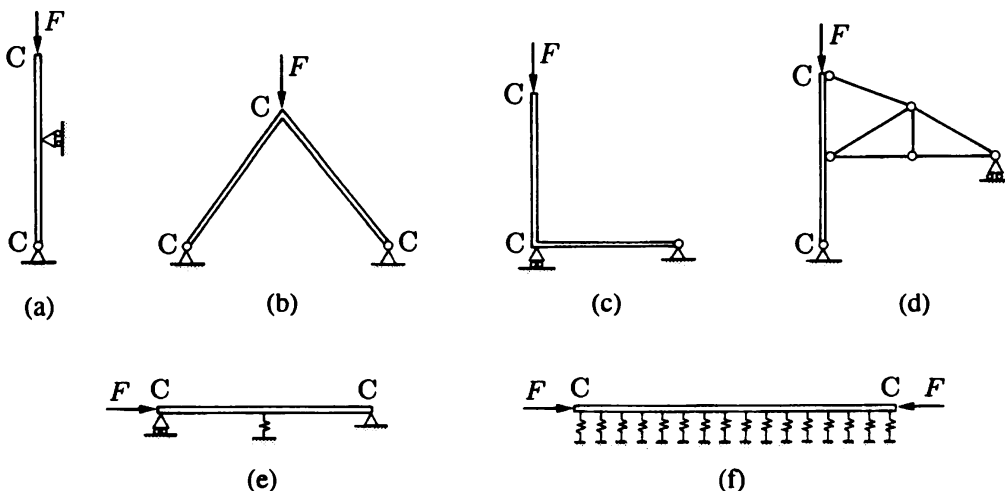


Fig. Ex. 20.6.5

20.6.6 Trouver dans lequel des plans (x, y) ou (x, z) le flambement de la pièce AB, d'axe x , supposée parfaite, risque de se produire, les conditions d'appui n'étant pas les mêmes d'un plan à l'autre. On donne $E_d/E_b = 10$. Tout rapporter au béton (comme c'est l'usage en béton armé) ; négliger l'inertie propre de l'acier.

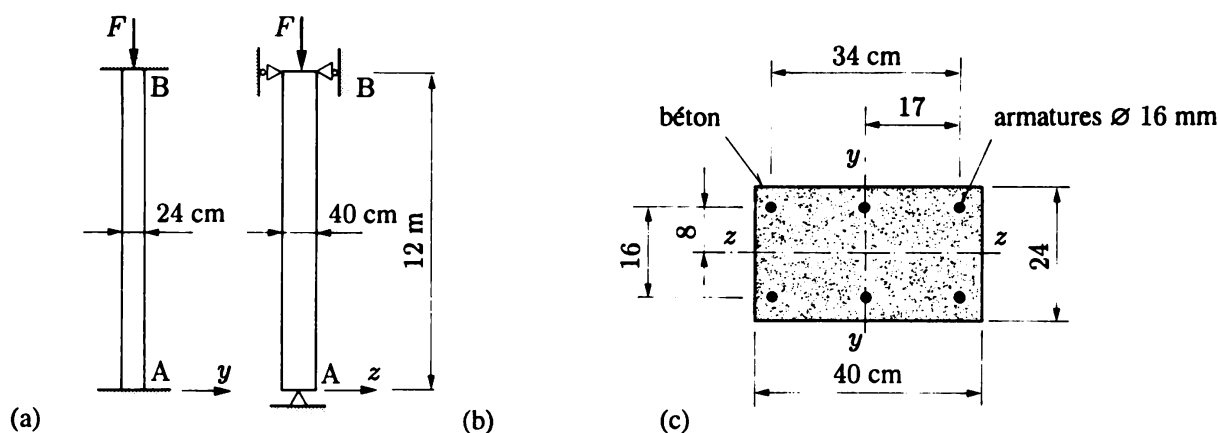


Fig. Ex. 20.6.6 Colonne en béton armé : (a) élévation du plan (x, y) ; (b) élévation du plan (x, z) ; (c) section droite.

20.6.7 Une colonne, formée d'un IPE 200, est disposée dans la façade d'une halle comme l'indique la figure. On suppose la colonne parfaite.

- 1) Dans quel plan principal le flambement risque-t-il de se produire ?
- 2) La colonne est-elle du type pièce longue ou pièce courte ?
- 3) Calculer sa charge critique d'Euler.

Prendre $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_e = 35,5 \text{ kN/cm}^2$ (acier faiblement allié).

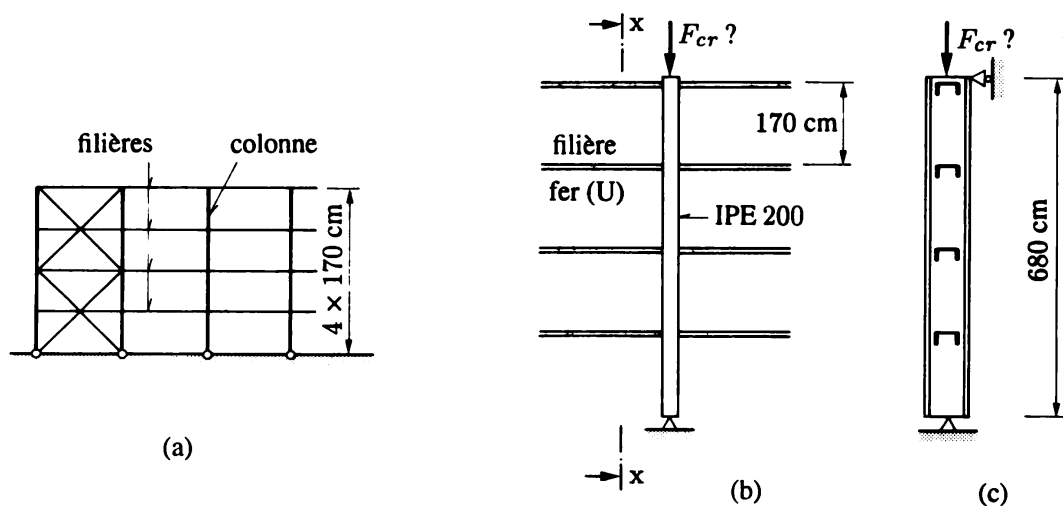


Fig. Ex. 20.6.7 Colonne de halle : (a) élévation de la façade ; (b) élévation de la colonne ; (c) coupe xx.

20.6.8 Déterminer quelle est l'élévation de température T_{cr} nécessaire à produire le flambement par bifurcation d'une pièce prismatique bi-articulée, articulée encastree ou bi-encastree (littéral).

20.6.9 Calculer la charge critique de bifurcation F_{cr} de la structure ABCDEF, composée d'une colonne encastree, qui assure la stabilité d'ensemble, et de poutres et colonnes bi-articulées. Utiliser la méthode d'Euler et le déterminant de stabilité.

Donner également la charge critique pour le cas particulier d'un simple cadre ABCD.

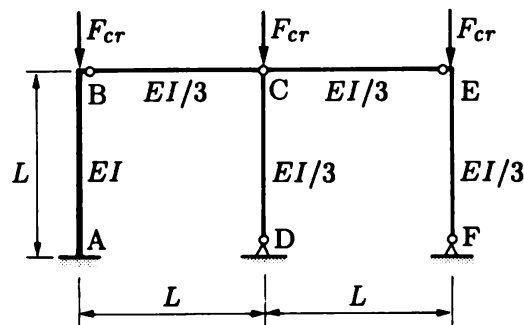
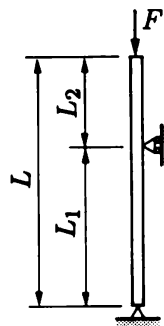


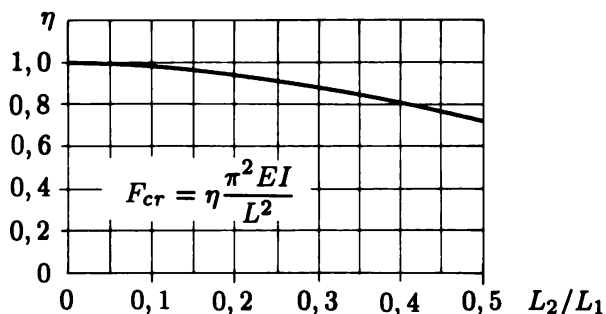
Fig. Ex. 20.6.9

20.6.10 On considère le flambement par bifurcation d'une poutre simple avec porte-à-faux, prismatique, de portées L_1 et L_2 , avec $L = L_1 + L_2 = \text{cste}$ et $0 \leq L_2 < L$ (fig. ex. 20.6.10a).

- 1) Dessiner l'allure du premier mode de flambement.
- 2) Entre quelles limites la longueur de flambement L_K se situe-t-elle ? *Indication* : trouver ces limites via celles de L_2 .
- 3) Pour $L_2 = 0, 4 L_1$, utiliser l'abaque (fig. ex. 20.6.10b) pour trouver la vraie longueur de flambement $L_{K(0,4)}$.
- 4) Sur le mode de flambement dessiné sous 1), repérer les points de moment nul (inflexions); en déduire la longueur de flambement $L_{K(\text{inf})}$ et discuter cette valeur au vu des résultats précédents.
- 5) Expliquer pourquoi $L_{K(0,4)}$ est différent de $L_{K(\text{inf})}$. *Indication* : dessiner les lignes d'action des forces et réactions sur le mode de flambement.



(a)



(b)

Fig. Ex. 20.6.10

20.6.11 Une colonne prismatique AB, encastrée en A, s'articule en B sur une poutre prismatique horizontale BC, encastrée en C (fig. ex. 20.6.11a).

- 1) Déterminer les longueurs de flambement probables de la colonne AB ou, à défaut, entre quelles limites se situent ces longueurs de flambement, pour le flambement dans le plan ABC et perpendiculairement au plan ABC. Dessiner les modes d'instabilité.
- 2) Si l'on choisit pour AB un profilé du genre HEB, comment doit-on l'orienter ?
- 3) L'abaque (fig. ex. 20.6.11b) résout le problème du flambement d'une poutre encastrée à une extrémité et appuyée sur un ressort de translation à l'autre extrémité. Cet abaque est-il utile à la résolution de la question 1) ? *Note* : voir le paragraphe 20.8.1.
- 4) Dans le cas où poutre et colonne sont constituées d'un tube carré MSH 200-200-10, de longueur $L_c = L_p = 6$ m, calculer la longueur de flambement L_K de la colonne.

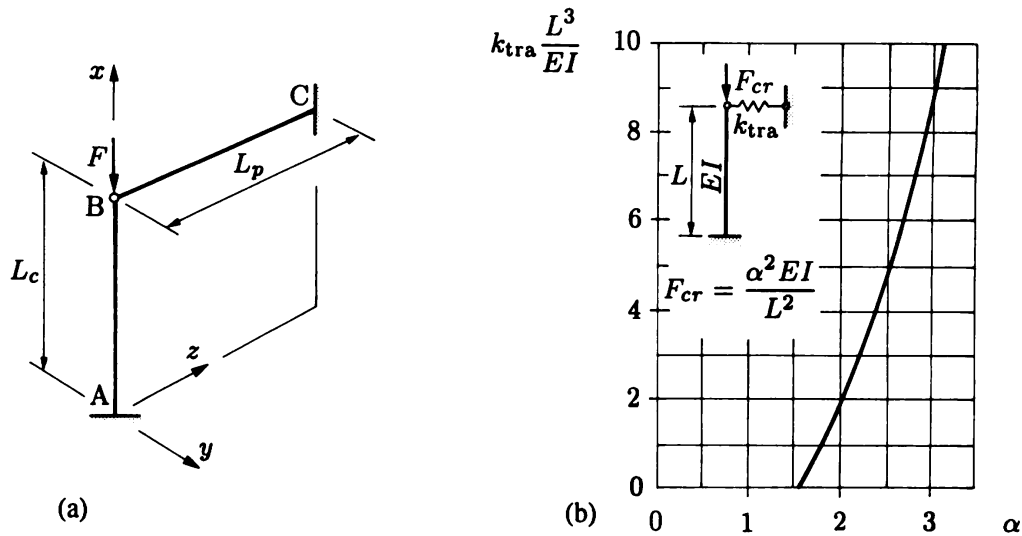


Fig. Ex. 20.6.11

20.6.12 On considère deux cadres rectangulaires symétriques ABCD, l'un bi-articulé (fig. ex. 20.6.12a), l'autre bi-encasté (fig. ex. 20.6.12b); pour chacun d'eux :

- 1) dessiner les deux premiers modes d'instabilité dans le plan du cadre;
- 2) trouver entre quelles limites se situent les longueurs de flambement des montants (*indication* : examiner les deux cas extrêmes $I_t \rightarrow 0$ et $I_t \rightarrow \infty$); en déduire le mode de flambement le plus dangereux.

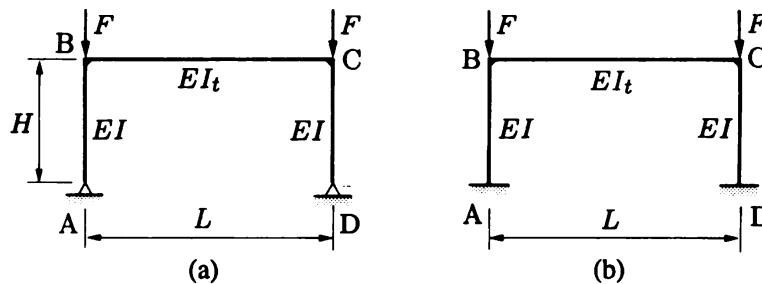


Fig. Ex. 20.6.12

20.6.13 Calculer la force critique de la colonne AB du cadre ABC (fig. ex. 20.6.13a), dans le plan du cadre, en utilisant la méthode d'Euler et le déterminant de stabilité. En déduire la longueur de flambement de cette colonne.

Solution. Le mode de flambement de la colonne produit une flexion de la poutre BC (fig. ex. 20.6.13b); l'encastrement élastique dû à cette poutre sur la colonne fait naître un moment M_B et une réaction horizontale $H = M_B/L$ (fig. ex. 20.6.13c). D'où

$$M(x) = -Fv + Hx = -Fv + \frac{M_B x}{L}$$

et, après intégration de $v'' = M/EI$, avec $k^2 = F/EI$,

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{M_B}{F} \frac{x}{L}$$

Les conditions aux limites sont

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad -v'(L) = \alpha$$

où $\alpha = M_B L / (4EI)$ est l'angle produit par M_B dans la poutre BC en B (fig. ex. 20.6.13c). Le déterminant de stabilité conduit à

$$\operatorname{ctg} kL = \frac{1}{kL} + \frac{kL}{4}$$

d'où

$$F_{cr} = 14,66 \frac{EI}{L^2} \quad \Rightarrow \quad L_K = 0,8205 L$$

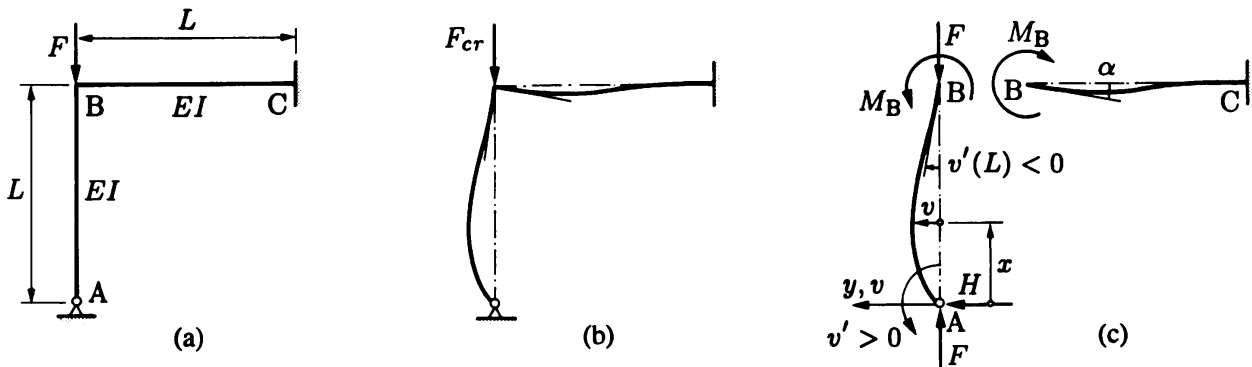


Fig. Ex. 20.6.13

20.6.14 Calculer la longueur de flambement et la charge critique de la colonne AB du cadre ABC de l'exercice précédent en utilisant la formule de Donnell (§ 20.8.2).

20.6.15 Trouver la force critique de bifurcation du cadre bi-encasté ABCD dans son plan, associée au premier mode de flambement (ex. 20.6.12), et en déduire la longueur de flambement des montants AB et CD.

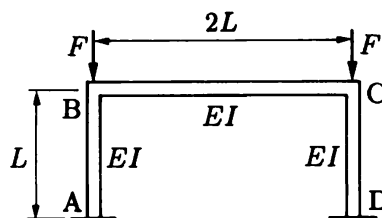


Fig. Ex. 20.6.15

20.6.16 Déterminer l'équation de la courbe de flambement d'Euler-Engesser-Shanley du matériau (alliage d'aluminium) obéissant à la loi de Ramberg-Osgood $\varepsilon = \sigma/E + (\sigma/B)^n$ ((7.7), § 7.7.2; littéral).

Application. Pour l'alliage 7020 T6 dont les caractéristiques sont $E = 7356,7 \text{ kN/cm}^2$, $B = 41,28 \text{ kN/cm}^2$ et $n = 35,78$, tracer la courbe de flambement dans l'intervalle $0 < \lambda < 100$. Pour cet alliage et des tubes 95.4, on a obtenu, par simulation numérique, les charges critiques de Shanley $F_{cr,S}$ suivantes (source : Frey F., *Note sur l'effet Shanley*, Schweizerische Bauzeitung, Heft 31, August 1973, S. 755-759) :

$\lambda = 15$	$F_{cr,S} = 393,38 \text{ kN}$
30	373,48
45	350,38

Vérifier que ces valeurs ne sont que très peu supérieures à celles du module tangent $F_{cr,t}$.

20.6.17 Tracer l'allure de la courbe de flambement d'Euler-Engesser-Shanley du matériau élastique plastique à écrouissage linéaire (une droite de Hooke, de pente E , limitée à σ_e , suivie d'une droite de pente E_t ; ex. 7.11.3).

Application. On obtient une bonne approximation de la loi (σ, ε) de l'alliage 7020 T6 de l'exercice précédent par une loi bilinéaire formée

- de la droite de Hooke limitée à $\sigma_e = 34 \text{ kN/cm}^2$,
- d'une droite passant par σ_e et $\sigma_{0,2}$.

Reporter la courbe de flambement d'Euler-Engesser-Shanley correspondante sur celle de l'exercice précédent ; comparer.

20.7 Lexique

Instabilité ou flambement ou flambage ou équilibre instable	Caractère d'une structure qui, <ul style="list-style-type: none"> • sous une très faible variation des charges, voit sa configuration changer considérablement ; • sous la moindre perturbation, peut changer de configuration d'équilibre.
Force ou charge critique	Niveau de charge <ul style="list-style-type: none"> • à partir duquel la configuration d'une structure cesse d'être unique et bien déterminée ; • maximal qu'une structure peut supporter au moment où elle devient instable.
Flambement par divergence	Instabilité avec changement progressif de configuration ; la courbe flèche-charge typique présente ordinairement un maximum au niveau de la charge critique (tangente horizontale).
Flambement par bifurcation <ul style="list-style-type: none"> • point de bifurcation 	Instabilité caractérisée par la présence, au voisinage de la charge critique, de deux configurations d'équilibre différentes associées à des courbes flèche-charge distinctes ; cas limite du flambement par divergence, pour une structure <i>parfaite</i> ; intersection des deux courbes, propres aux comportements distincts de l'instabilité par bifurcation, définissant le niveau de la charge critique.
Phénomène d'instabilité	Manière dont une instabilité se manifeste ; forme que prend cette instabilité ; par exemple : <ul style="list-style-type: none"> • <i>flambement plan</i> ou <i>par flexion</i>, <i>par torsion</i>, <i>spatial</i> ou <i>par flexion-torsion</i> : phénomènes d'instabilité des poutres (§ 20.1.2) ; • <i>flambement latéral</i> ou <i>déversement</i> : phénomène d'instabilité des poutres fléchies, où la zone comprimée devient instable latéralement ; • <i>voilement</i> : phénomène d'instabilité des plaques et coques comprimées ou cisailées dans leur surface moyenne, caractérisé par un bossellement et plissement de cette surface.
Théorie géométrique non linéaire	Théorie abandonnant l'hypothèse de linéarisation géométrique, c'est-à-dire se basant sur la configuration déformée de la structure pour l'analyser.
Hypothèse des rotations modérées	Cas où les rotations restent suffisamment faibles ($< 0,1 \text{ rad}$) pour pouvoir simplifier les équations non linéaires de la cinématique.

Théorie du second ordre ou des rotations modérées	Théorie géométriquement non linéaire basée sur l'hypothèse des rotations modérées.
Théorie matériellement non linéaire	Théorie abandonnant l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau, au profit d'une loi constitutive non linéaire (plasticité).
Diagramme de Southwell	Représentation graphique particulière de la courbe flèche-charge expérimentale d'un flambement par divergence, permettant une mesure aisée de la charge critique.
Facteur d'amplification du second ordre	Coefficient approximatif donnant, lors du comportement géométriquement non linéaire d'une poutre simple, la variation non linéaire d'une grandeur (moment, flèche, etc.).
Méthode de l'équilibre adjacent (ou d'Euler)	Etude de l'instabilité par bifurcation où l'on formule l'équilibre de la structure dans la configuration déformée, voisine de la configuration stable.
Déterminant de stabilité (Δ_{sta})	Déterminant provenant de l'étude ci-dessus, issu des conditions aux limites, à annuler pour éviter la solution triviale correspondant à la configuration stable, et fournissant la charge critique.
Mode de flambement	Configuration déformée instable possible (en bifurcation).
Cas fondamental d'Euler	Instabilité par bifurcation de la poutre simple, prismatique, parfaite, comprimée.
Charge critique d'Euler	Charge critique d'instabilité par bifurcation ; charge critique du cas fondamental (d'Euler) $F_{cr} = \pi^2 EI / L^2$ (matériau élastique linéaire).
Equilibre neutre ou indifférent	Instabilité particulière où le niveau critique de charge d'une structure ne change pas, quelle que soit l'amplitude du mode de flambement (bifurcation en théorie du second ordre).
Longueur de flambement (L_K)	Longueur d'une poutre simple fictive qui a la même charge critique que la pièce réelle.
Contrainte critique (σ_{cr})	$\sigma_{cr} = F_{cr} / A = \pi^2 E / \lambda^2$.
Elancement (λ)	Paramètre géométrique (sans dimension) caractérisant la sensibilité au flambement ($\lambda = L_K / i$).
Elancement limite (λ_e)	Elancement limitant la validité de la formule d'Euler au domaine élastique linéaire ($\sigma_{cr} \leq \sigma_p^-$).
Pièces longues ou courtes	Pièces d'elancement supérieur ou inférieur à l'elancement limite.
Courbe de flambement	Diagramme $\sigma_{cr} = f(\lambda)$, représentant la contrainte critique en fonction de l'elancement (typique d'un matériau).
Courbe d'Euler	Partie du diagramme (σ_{cr}, λ), d'équation $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$, où le matériau obéit à la loi de Hooke ($\lambda > \lambda_e$).
Charge critique d'Engesser ou du module tangent	Charge critique de bifurcation de la poutre simple dans le domaine élasto-plastique (approximation négligeant le déchargement élastique) $F_{cr,t} = \pi^2 E_t I / L^2 \Rightarrow \sigma_{cr,t} = \pi^2 E_t / \lambda^2$
Charge critique de Shanley	Vraie charge critique de la poutre simple pour un matériau élasto-plastique (divergence après bifurcation à $F_{cr,t}$; supérieure de quelques pour cent à $F_{cr,t}$).

20.8 Annexe

20.8.1 Ressorts

L'instabilité est un phénomène dangereux : il faut l'analyser avec précision. On doit considérer l'élasticité des appuis des structures, si ces appuis ne sont réellement fixes ni en translation, ni en rotation, car il en résulte une diminution de la charge critique ; toute liaison, même faible, qu'on négligerait dans le calcul traditionnel, peut par contre avoir un effet bénéfique. On peut modéliser ces appuis et liaisons par des *ressorts* qui, s'ils sont admis élastiques linéaires, obéissent à la loi de Hooke originale (2.1).

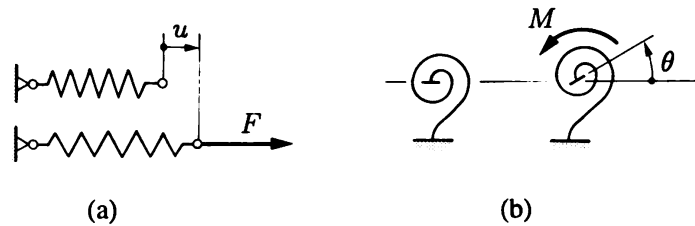


Fig. 20.29 Ressorts : (a) de translation ; (b) de rotation.

Le *ressort de translation* (ou *appui élastique*) obéit donc à la loi (fig. 20.29a)

$$F = k_{\text{tra}} u \quad (20.39a)$$

ou

$$u = c_{\text{tra}} F \quad (20.39b)$$

et le *ressort de rotation* (ou *encastrement élastique*) à (fig. 20.29b)

$$M = k_{\text{rot}} \theta \quad (20.40a)$$

ou

$$\theta = c_{\text{rot}} M \quad (20.40b)$$

Il est clair que dans chaque cas on a $k = 1/c$ ou $c = 1/k$; les constantes k s'appellent *rigidité* du ressort, et les constantes c *flexibilité* du ressort. Le ressort de translation ne s'oppose élastiquement qu'au *seul* déplacement de translation selon son axe, et celui de rotation qu'à la *seule* rotation autour de son axe (déplacement *associé* à la force).

Les unités sont, par exemple : k_{tra} [N/m], c_{tra} [m/N], k_{rot} [Nm/rad], c_{rot} [rad/Nm].

20.8.2 Poutre encastree élastiquement à ses deux extrémités

Le flambement d'une poutre simple prismatique, dont les sections terminales sont solidaires de ressorts s'opposant élastiquement à leur rotation (fig. 20.30), a été étudiée par Donnell⁽¹²⁾. Cet auteur

⁽¹²⁾ Donnell L. H., *The critical axial compression or tension on a bar, for all possible positive or negative end fixities*, in *Reissner Anniversary Volume – Contributions to Applied Mechanics* (ed. by the Staff of the Aero. Eng. Dept. of the Polytechnic Inst. of Brooklyn), J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1949, pp. 183-196.

appelle coefficients d'encastrement élastique les quantités

$$f_1 = \frac{L}{6,5 EI} k_{\text{rot},1} \quad f_2 = \frac{L}{6,5 EI} k_{\text{rot},2}$$

Un tel coefficient est nul pour une extrémité articulée et infini pour une extrémité parfaitement encastree. Le facteur numérique 6,5 a été choisi uniquement pour rendre aussi aisée que possible la représentation algébrique ci-après. La charge critique est donnée par la formule

$$F_{cr} = \eta \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \Rightarrow \quad L_K = \frac{L}{\sqrt{\eta}} \quad (20.41)$$

Donnell a réussi à obtenir une expression empirique simple donnant la valeur du coefficient η avec une précision de 2 % environ

$$\eta \cong \frac{1 + 2,9(f_1 + f_2) + 7,2 f_1 f_2}{1 + 1,4(f_1 + f_2) + 1,8 f_1 f_2} \quad (20.42)$$

Dans le cas particulier fréquent où $f_1 = f_2 = f$, cette formule se réduit à

$$\eta \cong \frac{1 + 4f}{1 + f} \quad (20.43)$$

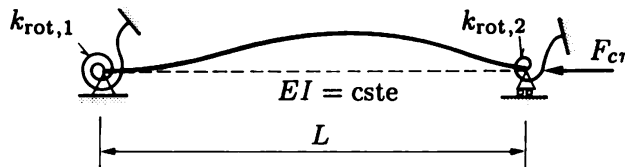


Fig. 20.30 Poutre simple élastiquement encastree.

20.8.3 Poutre continue sur trois appuis

La théorie de ce cas (fig. 20.31) montre qu'on peut représenter la charge critique par la formule approchée, qui donne des résultats exacts à 2 % près,

$$F_{cr} \cong (2 - \eta) \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} \quad (20.44)$$

avec $\eta = L_2/L_1$ et $L_1 > L_2$.

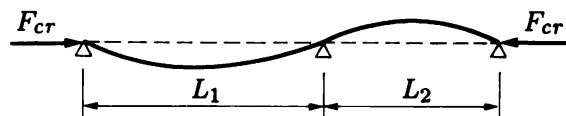


Fig. 20.31 Poutre sur trois appuis ($EI = \text{cste}$).

20.8.4 Moment non linéaire de quelques poutres comprimées et fléchies

Le tableau 20.32 donne la valeur μ du rapport $|M_{nl}/M_{lin}|$, où M_{nl} est le moment non linéaire, pour quelques poutres usuelles représentées par leur figure dans la première colonne. La valeur exacte est fonction de

$$\xi = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

et la valeur approchée est obtenue, lorsqu'on remplace le moment par son développement en série

$$M_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

à partir des deux premiers termes. Cette valeur approchée est toujours de la forme

$$\tilde{\mu} = 1 + \beta \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 + \gamma\alpha}{1 - \alpha}$$

où

- $\alpha = F/F_{cr}$;
- β et γ sont des coefficients numériques ($\beta = \gamma + 1$).

L'erreur de la formule approchée est très faible ($< 1\%$) tant que F n'avoisine pas F_{cr} ($\alpha < 0,9$ environ). On voit d'autre part que le facteur d'amplification (§ 20.2.5)

$$\frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

s'obtient en posant $\gamma = 0$ (ou $\beta = 1$), ce qui permet d'estimer sa précision.

Tableau 20.32 Moment non linéaire de quelques poutres prismatiques.

Type de poutre et charge (portée L ; $EI = \text{cste}$)	Point	Valeur exacte de $\mu = M_{nl}/M_{lin} $ ($\xi = kL/2$ et $k = \sqrt{F/EI}$)	Valeur approchée $\tilde{\mu}$ ($\alpha = F/F_{cr}$)	F_{cr}
	C	$\frac{1}{\cos \xi}$	$1 + 1,24 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 + 0,24\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
	C	$\frac{2}{\xi^2} \left(\frac{1}{\cos \xi} - 1 \right)$	$1 + 1,03 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 + 0,03\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
	C	$\frac{1}{\xi} \operatorname{tg} \xi$	$1 + 0,82 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,18\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
	A C	$\frac{3}{\xi} \left(\frac{1}{\xi} - \operatorname{ctg} \xi \right)$ $\frac{6}{\xi} \left(\frac{1}{\sin \xi} - \frac{1}{\xi} \right)$	$1 + 0,64 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,36\alpha}{1 - \alpha}$ $1 + 1,2 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 + 0,2\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$
	A et C	$\frac{2}{\xi} \frac{1 - \cos \xi}{\sin \xi} = \frac{\operatorname{tg}(\xi/2)}{\xi/2}$	$1 + 0,82 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,18\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$
	A B	$\frac{4 \operatorname{tg} 2\xi}{\operatorname{tg} 2\xi - 2\xi} \frac{\operatorname{tg} \xi - \xi}{\operatorname{tg} \xi}$ $\frac{25}{14} \left(\frac{2}{\xi^2} \left(\frac{\cos 0,2\xi}{\cos \xi} - 1 \right) - \mu_A \frac{\sin 0,8\xi}{\sin 2\xi} \right)$	$1 + 0,65 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,35\alpha}{1 - \alpha}$ $1 + 1,1 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 + 0,1\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$
	A C	$\frac{8}{3} \frac{1 - \cos \xi}{\cos \xi} \frac{\operatorname{tg} 2\xi}{\operatorname{tg} 2\xi - 2\xi}$ $\frac{8}{5} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi} - \frac{3}{5} \frac{\mu_A}{\cos \xi}$	$1 + 0,75 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,25\alpha}{1 - \alpha}$ $1 + 0,7 \frac{F}{F_{cr} - F} = \frac{1 - 0,3\alpha}{1 - \alpha}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$
$\mu_A = \text{valeur de } \mu \text{ au point } A$				

21. Flambement plan des pièces industrielles

21.1 Imperfections des pièces industrielles

Jusqu'ici on a étudié, essentiellement, le comportement de poutres comprimées exemptes de tout défaut. En réalité, de telles poutres n'existent pas. Les pièces industrielles, par exemple laminées, extrudées, fabriquées en atelier ou sur chantier, sont le siège de *défauts inévitables*, qu'on appelle *imperfections*, peut-être à tort d'ailleurs, puisque ces imperfections représentent la réalité concrète, la signature, des pièces industrielles.

Les imperfections les plus caractéristiques sont les suivantes :

- *les poutres* – dites droites – *ne sont pas rectilignes* ; elles présentent toujours une légère courbure initiale (fig. 21.1) ;
- *les forces de compression* – dites centrées – *sont toujours appliquées de manière légèrement excentrique* : appuis imparfaits, défauts de centrage, etc. ;

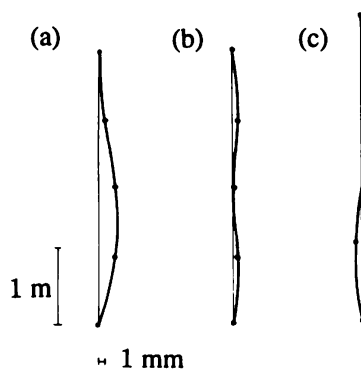


Fig. 21.1 Imperfection géométrique de l'axe : (a) et (b) tubes carrés 3,5'' ; (c) tube rond 115-6,5.
(Mesures de la CECM.)

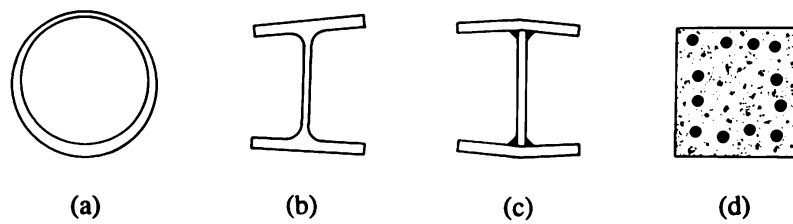


Fig. 21.2 Imperfections géométriques de la section : (a) excentricité des tubes ; (b) tolérances de laminage ; (c) retrait des soudures ; (d) position des armatures du béton armé.

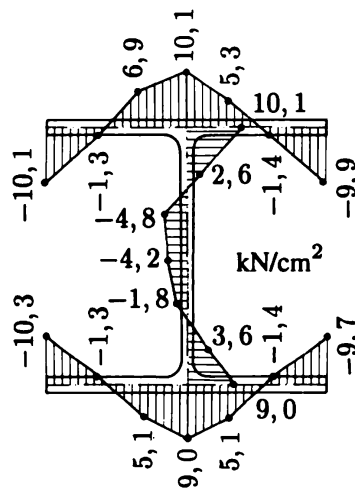


Fig. 21.3 Contraintes normales résiduelles après laminage dans un HEA 200 (contraintes à la ligne moyenne, rabattues dans le plan de la section).

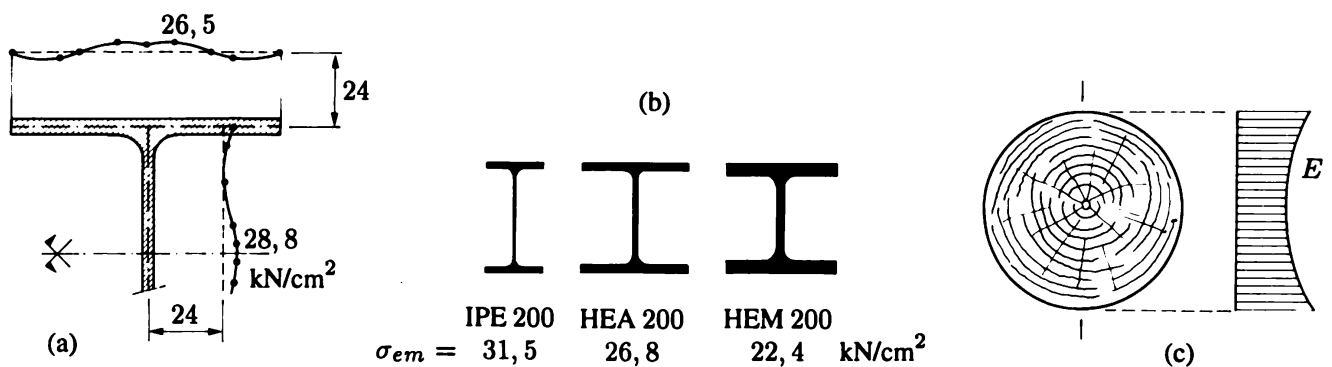


Fig. 21.4 Imperfections des caractéristiques mécaniques : (a) dispersion de la limite d'élasticité sur un profilé HEA 200 (acier doux) ; (b) moyenne de la limite d'élasticité dans divers profilés (acier doux) ; (c) variation du module de Young longitudinal dans la section d'un tronc.

- les dimensions réelles de la section diffèrent des dimensions nominales et varient le long de la pièce : excentricité des tubes, tolérances de laminage, déformation par soudage, position des armatures en béton armé, etc. (fig. 21.2) ;
- en dehors de toute mise en charge, il existe dans les poutres des *contraintes résiduelles* qui résultent du processus de fabrication : laminage (fig. 21.3), soudage (fig. 2.12), retrait, etc. ;
- le matériau est hétérogène ; d'une fibre à l'autre de la section, les propriétés mécaniques varient ; par exemple (fig. 21.4) :
 - la limite d'élasticité de l'acier change d'un point à l'autre de la section, et d'un type de profilé à l'autre (influence de l'épaisseur) ;
 - dans une poutre en bois tirée du tronc d'un arbre, le module d'élasticité varie.

Les trois premières imperfections sont dites *géométriques*, les deux dernières *matérielles*. Pourquoi sont-elles si importantes en flambement, alors qu'elles ont toujours été ignorées antérieurement ?

21.2 Importance des imperfections en instabilité

Il a fallu des décennies et de nombreux accidents pour reconnaître le rôle décisif que jouent les imperfections dans tous les phénomènes d'instabilité. En effet, ce sont les imperfections inévitables qui constituent la cause même du phénomène de flambement :

- les imperfections géométriques déclenchent d'emblée un processus de *flambement par divergence*, comme on l'a montré à la section 20.2 à l'aide de modèles simplifiés ;
- les imperfections matérielles provoquent un *affaiblissement supplémentaire* de la résistance de la pièce, ordinairement par l'apparition prématurée de la plastification due à la flexion initiale.

Le flambement est donc un *phénomène non linéaire de flexion composée* ; à la non-linéarité géométrique se combine nécessairement celle matérielle, puisqu'il faut, à la ruine, tenir compte du comportement réel du matériau ; le phénomène se produit *toujours par divergence*. L'instabilité par bifurcation est irréalisable en pratique ; les charges critiques d'Euler et du module tangent sont des limites essentiellement mathématiques, qui ne correspondent pas à la réalité (fig. 21.5).

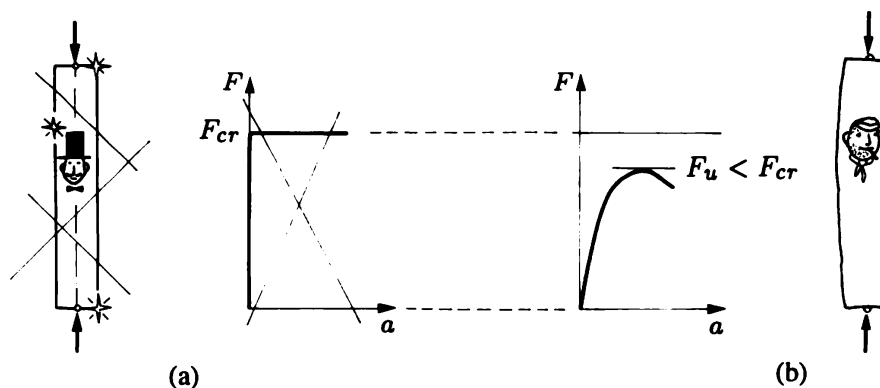


Fig. 21.5 Les imperfections abaissent la résistance des pièces comprimées : (a) pièce parfaite ; (b) pièce réelle.

Pour les poutres, l'étude du flambement par bifurcation se justifie cependant pleinement parce que, en éliminant des calculs les imperfections de la pièce et de sa mise en charge, on obtient la valeur de la force critique avec un minimum de peine ; or cette force est généralement prise comme référence et utilisée dans les méthodes pratiques tenant compte des imperfections.

21.3 Pièces industrielles essentiellement comprimées

21.3.1 Comportement jusqu'à ruine

Pour les pièces industrielles, on peut décrire comme suit le phénomène du flambement (fig. 21.6a).

Le phénomène suit d'abord approximativement la loi d'allure hyperbolique précédemment décrite (§ 20.2.2. et 20.2.3). Pour une certaine flèche a_A donnée par le point A du diagramme, le matériau atteint la limite de proportionnalité (ou d'élasticité) dans les fibres extrêmes de la section la plus chargée, soit au point M (fig. 21.6b). Il se développe autour de ce point une zone plastique dont les dimensions s'accroissent avec la charge F , ce qui diminue la résistance de la pièce. A partir du point A du diagramme, les déplacements suivent donc une nouvelle courbe qui se raccorde en A à la courbe précédente et qui est située sous cette dernière.

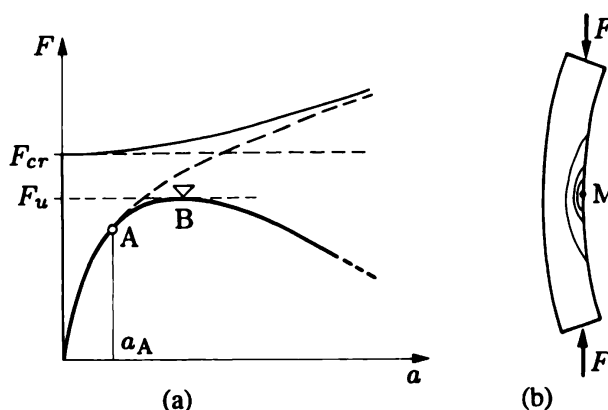


Fig. 21.6 Comportement d'une pièce imparfaite comprimée.

L'allure de cette courbe dépend en ordre principal du matériau utilisé, de l'élancement de la pièce et des imperfections, en particulier matérielles. Elle passe par un maximum en un certain point B d'ordonnée F_u , puis se recourbe vers le bas (ruine de la poutre).

La valeur F_u représente la charge maximale que la poutre réelle et imparfaite peut supporter, dite *force* ou *charge ultime de flambement*.

Si, a priori, on peut avoir $F_u < F_{cr}$, $F_u = F_{cr}$ ou même $F_u > F_{cr}$, cependant, vu la raideur des pièces utilisées en pratique, F_u est très généralement inférieure à F_{cr} . En fait, on a toujours

$$F_u < F_{cr} \quad (21.1)$$

Il faut donc bien se garder de confondre la charge critique, donnée par la théorie du flambement par bifurcation, avec la force ultime réelle des pièces imparfaites (fig. 21.5).

21.3.2 Dimensionnement

L'étude précédente explique pourquoi les moindres imperfections abaissent, souvent considérablement, la résistance d'une pièce sollicitée en compression. Etant donné la difficulté, voire l'impossibilité, d'établir une théorie *simple* tenant compte des imperfections, les ingénieurs préfèrent, le plus souvent, se baser sur les résultats d'expériences qui prennent en compte automatiquement les imperfections des pièces et leur donnent ainsi toute confiance.

Soit F_u un résultat d'essai ; afin d'utiliser la notion très pratique de courbe de flambement (§ 20.4.3 et 20.5.4), on calcule

- l'élancement $\lambda = L_K/i$ (20.35) de la pièce testée, et
- la **contrainte moyenne de flambement** (intensité)

$$\sigma_K = \frac{F_u}{A} \quad (21.2)$$

qui n'a *aucune signification*, puisque la distribution réelle des contraintes résulte d'une flexion composée élasto-plastique avec imperfections matérielles.

Pour un élancement donné, on réalise plusieurs tests de manière à calculer, selon la relation statistique (3.6), une *contrainte caractéristique*. L'ensemble de ces dernières (fig. 21.7) fournit la courbe de flambement expérimentale cherchée (non dessinée sur la figure).

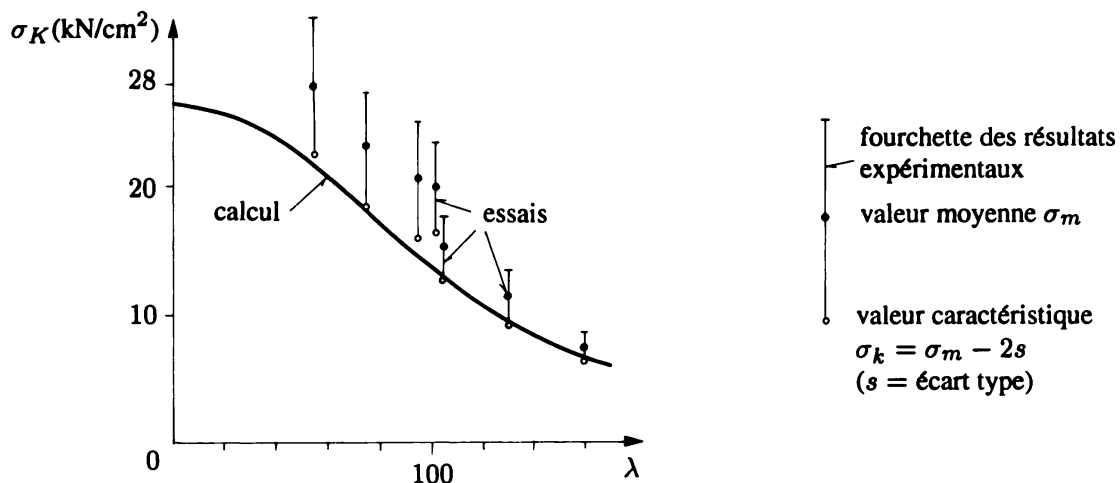


Fig. 21.7 Courbe de flambement ; comparaison entre les essais et la simulation numérique (cas du profilé IPE 160 en acier doux).

Ces expériences peuvent être utilement complétées par des simulations numériques sur ordinateur, qui permettent d'obtenir à bon marché des résultats fiables, lorsqu'on inclut dans le calcul les imperfections réelles des pièces (fig. 21.7).

Dans le domaine de la construction métallique, cette conjonction de l'expérience et du calcul numérique a permis d'établir, pour les pièces usuelles en acier et alliages d'aluminium, des **courbes**

européennes de flambement (travaux de la CECM). La figure 21.8 montre l'allure de ces courbes pour l'acier⁽¹⁾, sous forme non dimensionnelle $\bar{\sigma} = f(\bar{\lambda})$, avec

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_K}{\sigma_e} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e} \quad (21.3)$$

La courbe la plus basse s'adresse aux poutres qui ont les plus fortes imperfections (surtout les contraintes résiduelles). Pour un élancement donné, on trouve σ_K via la courbe adéquate, puis la charge ultime par (21.2)

$$F_u = A\sigma_K = A\bar{\sigma}\sigma_e \quad (21.4)$$

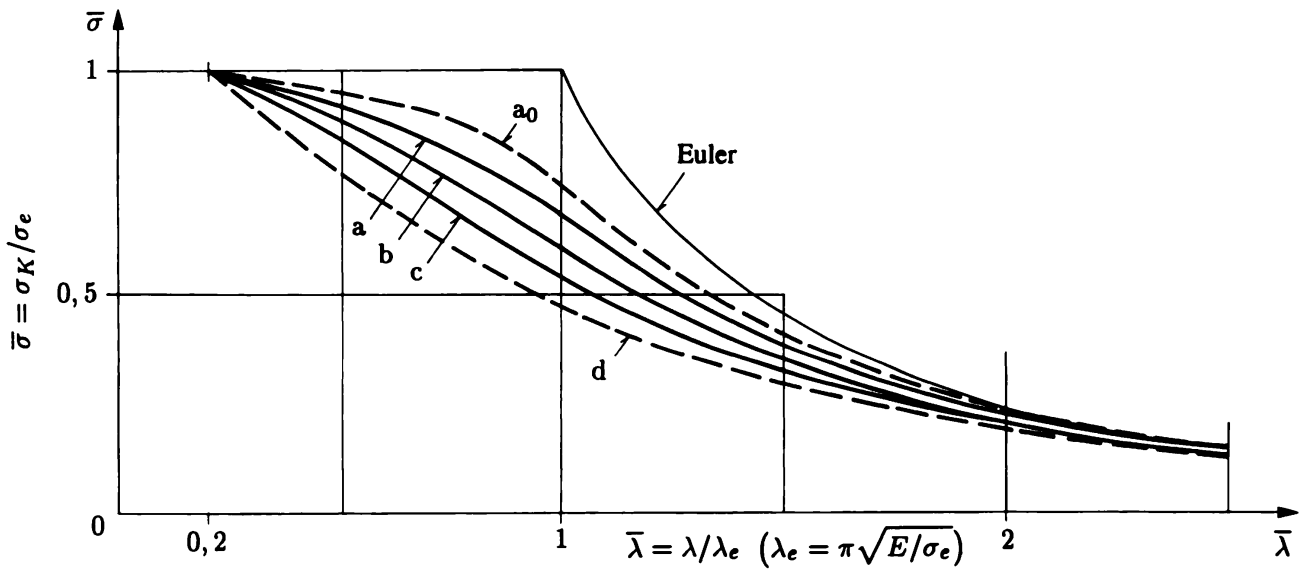


Fig. 21.8 Courbes de flambement des pièces industrielles en acier (CECM).

En conclusion, le calcul des pièces industrielles soumises à des charges de compression reste basé sur la notion de courbe de flambement via une contrainte moyenne $\sigma_K = F_u/A$, déterminée le plus souvent empiriquement, parfois par une simulation numérique. Les courbes sont propres à chaque matériau. On trouvera dans les ouvrages traitant les problèmes de construction (vol. 7, 8, 10 et 13) le détail du calcul pratique des pièces industrielles comprimées.

Remarque

La procédure décrite ci-dessus, adoptée par toutes les normes, est nécessairement une *méthode à la ruine* (§ 2.7.3 et 3.4.2); il y a donc incohérence lorsqu'une norme recommande ou accepte, pour le dimensionnement, la méthode de calcul élastique; or c'est le cas, pratiquement, de toutes les normes...

⁽¹⁾ Pour plus d'information, voir l'annexe 21.8 et, surtout, le volume 10.

21.3.3 Forme rationnelle des pièces en danger de flambement

Les courbes de flambement, tant théoriques que pratiques, montrent que *la contrainte de ruine par flambement* (σ_{cr} , σ_K) *diminue quand l'élancement de la pièce augmente*. Comme le flambement a toujours lieu dans le plan le plus défavorable, il est souhaitable d'avoir le même élancement dans tous les plans, en particulier dans les deux plans principaux de flexion ; de plus, *cet élancement doit être aussi petit que possible*.

Puisque $\lambda = L_K/i$ (20.35), il faut réaliser soit

$$i \quad \text{maximal}$$

ce qui conduit à écarter le matériau aussi loin que possible du centre géométrique dans toutes les directions ($i = \sqrt{I/A}$), soit

$$L_K \quad \text{minimal}$$

ce qui conduit à accroître le nombre de liaisons de la pièce (encastrement des extrémités, appuyer des points intermédiaires, etc.).

Il peut arriver que, dans un des plans principaux, la poutre soit maintenue en divers points de sa longueur par des pièces d'entretoisement ; les longueurs de flambement dans les deux plans sont alors différentes et on peut adopter une poutre dont la section a des rayons d'inertie principaux i_y et i_z différents, tels que, autant que possible, les contraintes de flambement soient les mêmes pour les deux plans principaux de flexion (x, y) et (x, z)

$$\sigma_{K,y} = \sigma_{K,z}$$

Cette condition n'exige pas nécessairement que les élancements $\lambda_y = L_{K,y}/i_y$ et $\lambda_z = L_{K,z}/i_z$ soient égaux, parce que la pièce peut, selon la direction (y ou z) de flambement, obéir à une loi pratique de flambement différente. Toutefois, on est toujours voisin de la condition plus simple

$$\lambda_y = \lambda_z$$

Si la longueur de flambement est la même pour les deux plans principaux, la pièce idéale est un tube circulaire à paroi juste suffisamment épaisse pour éviter que son *voilement* ne précède le flambement.

21.4 Pièces industrielles comprimées et fléchies

21.4.1 Le problème, ses difficultés et son importance

On a appris, en flexion composée plane (§ 6.3.2), à dimensionner les poutres comprimées et fléchies par la relation

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (21.5)$$

Dans cette superposition, l'effort normal N et le moment M ont un caractère *local*, en ce sens qu'ils ne dépendent que de la section considérée et non du comportement d'ensemble de la pièce étudiée.

La relation (21.5) ignore donc la *nature globale du phénomène du flambement*. On ne peut pas, en présence de compression, la négliger : la résistance doit être testée en incluant cette particularité, qui se traduit ici par l'*accroissement non linéaire du moment*.

Si, en principe, la relation (21.5) n'est plus valable, l'erreur commise en l'utilisant est ordinairement négligeable pour les pièces massives (très peu élancées : $\lambda < 20$), comme les piliers en maçonnerie ; parfois, elle est aussi négligeable pour les pièces courtes et même pour les pièces longues, parce que la contrainte de flexion M/W est de loin prédominante ; cependant, elle devient importante lorsque *la contrainte de compression N/A se rapproche de la valeur limite σ_{cr} ou σ_K* , c'est-à-dire quand le phénomène devient sensible au flambement. Il est certain que, dans ce cas, la formule (21.5) n'est plus valable, parce que la seule contrainte de compression N/A est déjà limitée à la contrainte de flambement σ_{cr} ou σ_K , qui est toujours inférieure à la valeur σ_{adm} , σ_{dim} , σ_e , etc.

Le comportement d'une pièce comprimée et fléchiée est très difficile à analyser ; pour être réaliste, il faut considérer la pièce comme industrielle ; à ce premier obstacle s'ajoutent les *difficultés introduites par la flexion extérieure*⁽²⁾ ; ce sont essentiellement les suivantes :

- le diagramme des moments dû à la flexion extérieure est a priori quelconque et évolue de façon non linéaire ;
- la flexion extérieure se combine avec celle due aux imperfections géométriques ; pour être cohérent, cette dernière doit être traitée maintenant sur le même pied que la flexion extérieure (et non pas être noyée dans une compression fictive $\sigma_K = F_u/A$) ;
- à cause de la flexion extérieure, les imperfections matérielles et la plastification entrent en jeu beaucoup plus rapidement (au reste, le comportement d'ensemble d'une pièce comprimée et fléchiée est semblable à celui d'une pièce simplement comprimée, décrit au paragraphe 21.3.1) ;
- l'instabilité par divergence peut se manifester de deux manières différentes (§ 20.1.2) :
 - elle peut avoir lieu *dans le même plan que celui où agit la flexion* ; le phénomène d'ensemble est *plan* et c'est le seul examiné ci-après ;
 - elle peut se développer *hors du plan où agit la flexion* ; le phénomène devient alors *spatial*, s'accompagnant de flexion oblique et torsion ; il se manifeste surtout dans les pièces à section ouverte dont la résistance torsionnelle est très faible, et particulièrement si la raideur de la poutre est beaucoup plus faible dans la direction transversale que dans le plan de sollicitation, comme c'est le cas par exemple pour les poutrelles en acier des séries INP ou IPE ; il est moins à craindre dans le cas de poutrelles à larges ailes, qui sont habituellement utilisées comme colonnes de bâtiment, et encore moins dans les pièces en bois ou béton, qui sont toujours plus massives.

Devant tant de complexité, il est inutile d'espérer trouver une solution simple à ce problème. Or, il faut le reconnaître, presque toutes les pièces industrielles comprimées sont *simultanément fléchies* ; la flexion extérieure peut provenir des charges transversales, mais aussi du poids propre, de l'excentricité des forces axiales et, très souvent, des continuités aux nœuds (colonnes des bâtiments).

Le dimensionnement des pièces comprimées et fléchies a donc une grande importance pratique sans qu'on ait trouvé, à ce jour, de solution vraiment satisfaisante.

⁽²⁾ Dans cette section et la suivante, on utilisera cette expression pour qualifier la flexion introduite, d'emblée, par les actions extérieures.

21.4.2 Calcul du moment non linéaire

Linéarité matérielle

Dans ce cas, on sait calculer le moment non linéaire (M_{nl}) par la théorie du second ordre exposée précédemment (§ 20.2.2 à 20.2.4). Pour rappel, les résultats suivants sont valables pour une poutre simplement appuyée, à caractéristique flexionnelle EI constante.

Si la poutre est droite et chargée excentriquement (fig. 21.9a), le moment maximal, au milieu, vaut (§ 20.2.2)

$$M_{nl, \max} = \frac{Fe}{\cos \frac{kL}{2}} = \frac{M_{lin}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{cr}}} \right)} \quad (21.6)$$

$M_{nl, \max}$ désigne le maximum du moment non linéaire et M_{lin} le moment linéaire correspondant.

Pour une poutre possédant une légère déformée initiale sinusoïdale (fig. 21.9b), on a (§ 20.2.3)

$$M_{nl, \max} = \frac{Fa_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} = \frac{M_{lin}}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (21.7)$$

où a_0 est la flèche initiale à mi-portée.

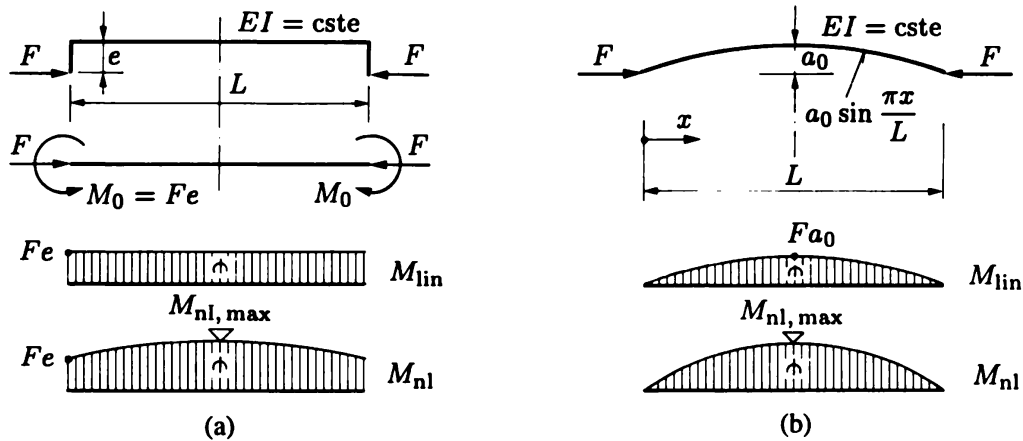


Fig. 21.9 Moments linéaires et non linéaires de deux poutres simples : (a) pièce droite sous charge excentrique ; (b) pièce légèrement courbe.

A défaut d'un calcul exact, on peut, grâce au *facteur d'amplification du second ordre* (§ 20.2.5), se contenter de la formule approximative unique

$$M_{nl} \cong M_{lin} \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (21.8)$$

valable dans la zone *centrale* d'une poutre dont le diagramme de flexion ne s'écarte pas trop d'une répartition symétrique.

Pour d'autres types de poutres (EI variable, N variable, autres conditions d'appui, poutres continues...), il est difficile d'établir une relation simple générale telle que (21.8). Le cas important de la poutre simple avec moments d'extrémité est traité ci-après (§ 21.4.3). En annexe du chapitre précédent (sect. 20.8), on donne la solution de quelques cas courants.

Non-linéarité matérielle

Lorsqu'on quitte la loi de Hooke, les formules précédentes perdent leur validité. Néanmoins, à titre d'approximation et par simplicité, on admet en général qu'elles restent applicables, arguant que, à l'état limite ultime, la plastification n'est que partielle dans la poutre ; même la section la plus sollicitée est, en général, loin d'être totalement plastifiée.

Par suite, on doit toujours calculer F_{cr} par la formule d'Euler dans l'évaluation du facteur d'amplification $1/(1 - F/F_{cr})$, même si on est dans le cas d'une pièce courte ($\lambda < \lambda_e$).

Pièces industrielles

La détermination du moment non linéaire se complique encore en présence des imperfections. Par simplicité, on recourt aux approximations précédentes pour la flexion extérieure ; de plus, on introduit l'imperfection géométrique essentielle, celle de courbure ou flèche initiale a_0 (sect. 21.1), puisqu'elle doit se traiter au même titre que la flexion extérieure (§ 21.4.1). On adopte donc

$$M_{nl} \cong \frac{Fa_0 + M_{lin}}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad (21.9)$$

Il est recommandé de toujours utiliser cette expression, même si on ne connaît pas a priori la valeur de l'imperfection a_0 (ce qui est presque toujours le cas...). Les mesures effectuées sur des pièces réelles ont montré que, le plus souvent, on se situe dans la fourchette

$$\frac{L}{750} \geq a_0 \geq \frac{L}{1000} \quad (21.10)$$

21.4.3 Notion de moment équivalent

Considérons le cas d'une poutre simple, prismatique, comprimée par une force F et fléchiée par deux moments d'extrémité M_1 et M_2 (fig. 21.10), ces trois forces variant proportionnellement l'une par rapport à l'autre ; cette sollicitation est identique à une force excentrique agissant obliquement par rapport à l'axe de la pièce, avec $e_1 = M_1/F = \text{cste}$ et $e_2 = M_2/F = \text{cste}$ (en valeur absolue). Ici, on doit tenir compte du signe relatif de M_1 et M_2 d'une part, et on suppose $|M_2| > |M_1|$ d'autre part.

Pour un matériau linéaire, la solution au second ordre de ce problème est la suivante : si

$$A = \frac{M_2 - M_1 \cos kL}{\sin kL} \quad B = M_1$$

le maximum du moment non linéaire $M_{nl, \max}$ et son abscisse x_{\max} sont donnés par

$$M_{nl, \max} = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{tg } kx_{\max} = \frac{A}{B} \quad (21.11)$$

Si $x_{\max} \geq L$ (ou $M_1/M_2 < \cos kL$), le moment maximal est M_2 (fig. 21.10).

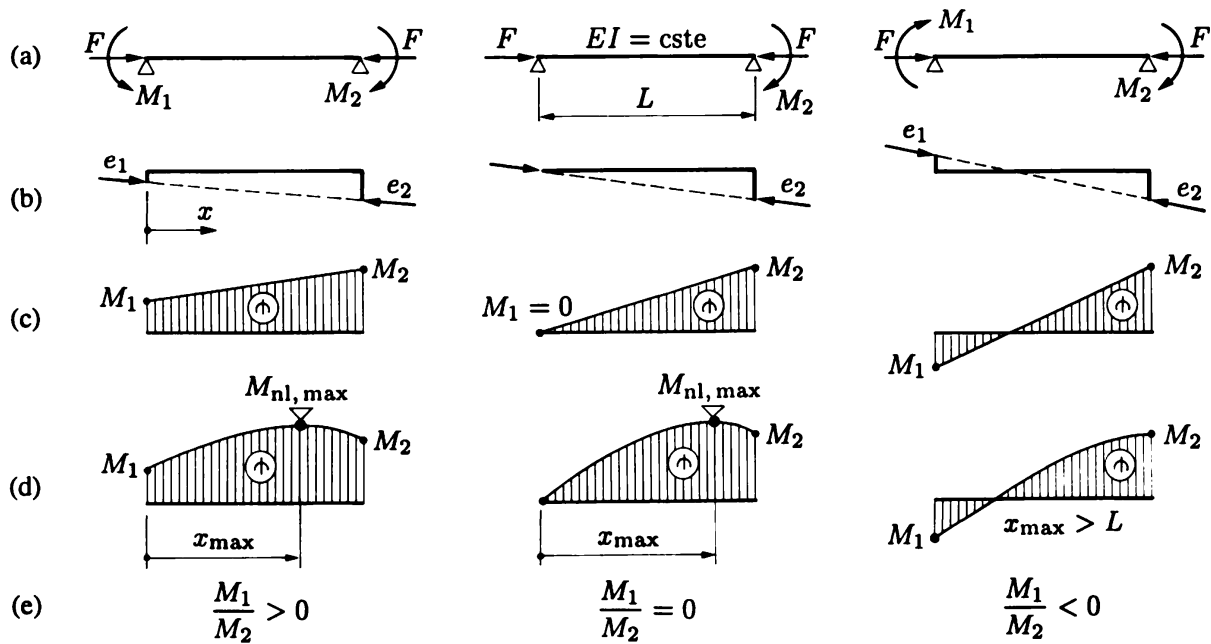


Fig. 21.10 Poutre simple comprimée et fléchiée par moments d'extrémité : (a) sollicitation ; (b) sollicitation équivalente excentrique ; (c) moments linéaires ; (d) moments non linéaires ; (e) rapports M_1/M_2 ($1 \geq M_1/M_2 \geq -1$).

Pour éviter l'emploi fastidieux de ces formules, on introduit la notion de **moment équivalent** M_{eq} . C'est le moment qui, appliqué aux deux extrémités ($M_1 = M_2 = M_{eq}$), conduit au même maximum non linéaire (fig. 21.11) :

$$M_{nl, \max}(M_1, M_2) = M_{nl, \max}(M_{eq})$$

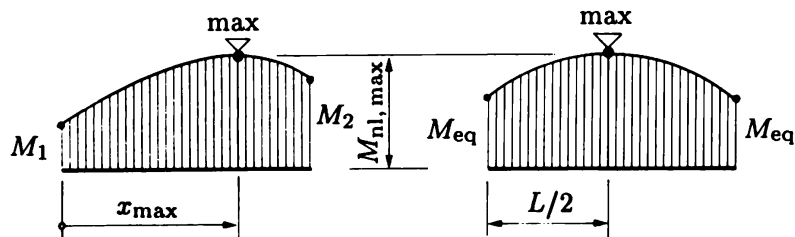


Fig. 21.11 Moments réels (M_1, M_2) et moment équivalent (M_{eq}).

On en trouverait la valeur en égalant les expressions (21.11a) et (20.10), mais on vérifie qu'on obtient une bonne approximation par la formule simple suivante (Austin, 1961)

$$M_{eq} = C M_2 \quad (21.12a)$$

avec

$$C = 0,6 + 0,4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0,4 \quad (21.12b)$$

qui présente l'avantage d'être indépendante de $k = \sqrt{F/EI}$. On peut ensuite estimer $M_{nl, \max}$ par (21.8)

$$M_{nl, \max} \cong \frac{M_{eq}}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}$$

mais on ne sait plus où se produit cette valeur (x_{\max} inconnu). Il faut donc la comparer à M_2 , qui peut lui être supérieure (§ 21.5.3).

La notion de moment équivalent a reçu deux extensions.

Tout d'abord, elle s'applique aussi aux cas matériellement non linéaires et aux pièces industrielles. A ce point de vue, on la trouve dans toutes les normes.

Ensuite, et cette extension est beaucoup plus délicate, elle est employée pour les pièces qui présentent, aux appuis, des continuités avec d'autres éléments structuraux, de sorte que les moments M_1 et M_2 sont introduits par ces éléments, et *non plus sous forme de charges extérieures*.

Considérons, pour fixer les idées, l'ossature de la figure 21.12. Les colonnes AB et BC sont des pièces comprimées et fléchies par moments d'extrémité. Il est d'usage courant de les isoler, puis de les calculer par la formule du moment équivalent. Ce faisant, on commet *deux erreurs* :

- les pièces AB et BC ne sont pas des poutres simples indépendantes, mais réagissent l'une avec l'autre et avec les poutres horizontales ;
- les moments d'extrémité ne gardent, en non linéaire, ni une valeur constante, ni un rapport constant, de sorte que le vrai moment équivalent n'est pas donné par (21.12).

Il est difficile de savoir, en toute généralité, si ces deux erreurs sont faibles ou non.

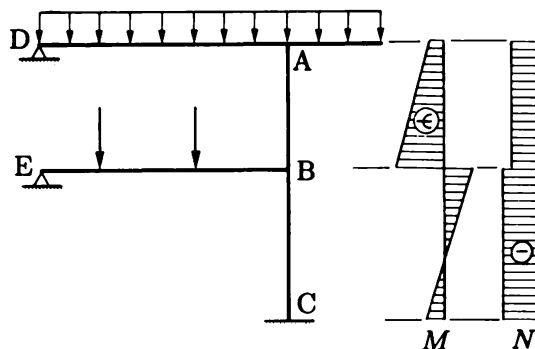


Fig. 21.12 Ossature à nœuds rigides (M et N issus d'un calcul linéaire).

21.5 Vérification de la résistance

21.5.1 Le calcul élastique et son appréciation

Si on limite les contraintes au domaine élastique linéaire (Hooke), on utilise la relation

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{nl}}{I} y \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} \quad (21.13)$$

pour trouver le maximum σ_{\max} de la contrainte normale σ .

L'application pratique de la méthode élastique et de la formule (21.13) soulève les difficultés suivantes.

Méthode des contraintes admissibles

On serait tenté de vérifier la pièce comprimée et fléchie par la méthode des contraintes admissibles (§ 3.3.2), en posant

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{\text{adm}}$$

où la contrainte admissible est obtenue en divisant une certaine contrainte limite du matériau par le coefficient de sécurité γ . Cependant, la sécurité de la pièce n'est pas égale à γ parce que la nature même du phénomène calculé n'est pas linéaire : *la méthode des contraintes admissibles est inapplicable en présence de phénomènes d'instabilité !*

Conception semi-probabiliste

On évite cette difficulté grâce à la méthode semi-probabiliste (sect. 3.4) en calculant les valeurs pondérées des efforts intérieurs⁽³⁾. Cette démarche n'est pas équivalente à la précédente parce que le moment n'est pas une fonction linéaire des sollicitations extérieures (F apparaît au dénominateur du facteur d'amplification !). On calcule donc la contrainte maximale pondérée à partir de la relation

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} \pm \frac{M_{dnl}}{I} y \quad \Rightarrow \quad \sigma_{d\max} \quad (21.14)$$

et on vérifie

$$|\sigma_{d\max}| \leq \sigma_{\text{dim}} \quad (21.15)$$

où σ_{dim} est la contrainte de calcul du matériau (3.9).

Limite de proportionnalité et limite d'élasticité

Sauf pour les aciers à palier, utiliser, pour σ_{dim} , une limite d'élasticité conduit à appliquer la relation (21.14) au-delà de son strict domaine de validité, qui est la limite de proportionnalité σ_p . Pour les alliages d'aluminium par exemple, si $\sigma_{\text{dim}} = \sigma_{0,2}$, on a $\sigma_{0,2} > \sigma_p$; on surestime donc légèrement la sécurité.

Imperfection de flèche initiale a_0

Détaillons quelque peu (21.14) en admettant, par exemple, que le moment non linéaire est donné par (21.9) et que l'effort normal est égal à la force appliquée ; on obtient

$$\sigma_d \cong \frac{F_d}{A} \pm \frac{F_d a_0 + M_{d\text{lin}}}{1 - \frac{F_d}{F_{cr}}} \frac{y}{I} \quad (21.16)$$

⁽³⁾ Si le coefficient de pondération est uniforme, cela est équivalent à la conception déterministe avec coefficient de sécurité global (§ 3.3.1).

On serait tenté, dans cette relation, d'ignorer la flèche initiale ($a_0 = 0$). Alors, si la flexion extérieure tend vers zéro ($M_{d\text{lin}} \rightarrow 0$), la relation (21.16) se réduit à la formule de compression pure $\sigma_d = F_d/A$ qui ne tient aucun compte du danger de flambement. Ce sont les formules (21.5) et (21.13), dont (21.16) dérive, qui sont à l'origine de cette anomalie : négliger le terme de flexion revient précisément à éliminer le phénomène de flambement.

Pour l'éviter, il faut considérer les pièces comme imparfaites et affectées d'une *imperfection inévitable* a_0 qui ne doit jamais disparaître. La relation (21.16) est alors correcte pour toute valeur de $M_{d\text{lin}}$ et F_d (avec $F_d < F_{cr}$, § 21.5.3).

Ce que le calcul élastique ignore

Le calcul élastique néglige

- le *gain* de résistance qu'on peut obtenir par plastification partielle des sections ;
- les imperfections matérielles qui, en général, *diminuent* la résistance ultime de la pièce.

Ce gain et cette perte varient considérablement avec le type de pièce, la forme de la section, l'élancement, le matériau et l'intensité relative de la flexion extérieure.

Si les imperfections matérielles sont négligeables ou absentes, l'approche élastique proposée donne

- une bonne approximation de la solution exacte du problème si le matériau est raide ;
- une solution satisfaisante et probablement sûre, si le matériau est ductile (par exemple, pièces extrudées en alliages d'aluminium).

Par contre, *en présence d'imperfections matérielles*, la solution élastique n'est ni correcte ni sûre (par exemple, pièces en acier, béton ou bois). Même si le matériau est ductile, la perte de résistance due aux imperfections matérielles peut être *largement supérieure* au gain dû à la plastification.

Conclusion

A quelques rares exceptions près, le calcul élastique n'a pas d'application pratique...

21.5.2 Calcul à la ruine

Devant la complexité du problème (non-linéarités et imperfections géométriques et matérielles), il n'est plus possible d'extraire de la théorie des formules permettant de tester la résistance ultime des pièces comprimées et fléchies.

On utilise alors des relations où voisinent des éléments de théorie, d'empirisme et d'intuition, qui donnent *sécurité face aux essais de laboratoire* (formules dites d'*interaction*)⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Les ouvrages traitant les problèmes de construction (acier, béton, bois) donnent les renseignements nécessaires à ce sujet (vol. 7, 8, 10 et 13).

Pour les pièces métalliques, la première formule fiable de ce genre a été proposée par Clark et Hill (1951), pour une poutre prismatique soumise à un moment constant (fig. 21.9a), et confirmée par une série d'essais sur des pièces en aluminium; elle a été ensuite généralisée par Campus et Massonnet (1955), pour un moment linéairement variable (fig. 21.10), après une campagne d'essais sur des poutrelles âme-semelles en acier. Elle s'écrit

$$\frac{F_d}{F_u} + \frac{M_{d\text{lin}}}{M_u(1 - F_d/F_{cr})} \leq 1 \quad (21.17)$$

où $F_u = A\sigma_K$ (21.4) et $M_u = M_e = W\sigma_e$ (moment élastique maximal) ou $M_u = M_{pl} = Z\sigma_e$ (moment plastique); elle ne nécessite pas l'introduction explicite d'une imperfection géométrique a_0 , contenue en fait dans F_u .

La figure 21.13 montre la confrontation de la relation (21.17) avec quelques essais de laboratoire.

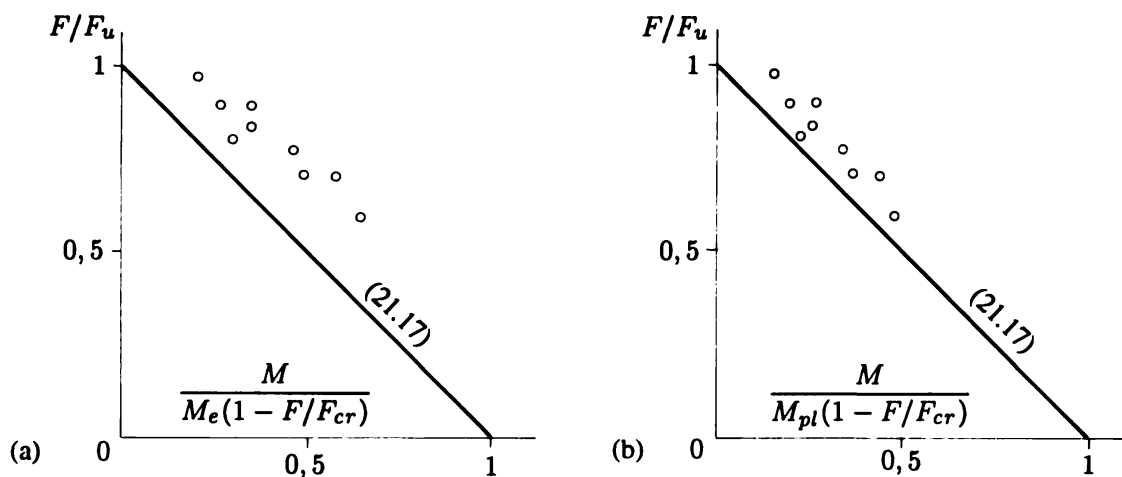


Fig. 21.13 Formule d'interaction (21.17) face aux essais de l'ALCOA sur des tubes en alliage d'aluminium 2017 T4 : (a) $M_u = M_e$; (b) $M_u = M_{pl}$ (facteur de forme $\alpha = 1,33$).
(Source des essais : Hill H. N., Hartmann E. C., Clark J. W., *Design of aluminium alloy beam-columns*, ASCE Transactions, Vol. 121, No. 2783, 1956, pp. 1-21.)

D'autres relations d'interaction sont inspirées de la formule élastique (21.16) avec l'artifice suivant : on accroît fictivement l'intensité de la flèche initiale (a_0) de manière à couvrir l'ensemble des imperfections – en particulier matérielles – par une seule imperfection appelée *imperfection géométrique équivalente*. Pour choisir cette valeur fictive exagérée a_0^* , on peut se baser sur les critères suivants :

- obtenir sécurité par rapport aux résultats expérimentaux ;
- en compression sans flexion, obtenir par (21.16) (avec $M_{d\text{lin}} = 0$) le même dimensionnement qu'avec (21.4) (ex. 21.6.6).

En divisant (21.16) par σ_d admis égal à la limite d'élasticité ($\sigma_d = \sigma_{\text{dim}} = \sigma_e$ ou $\sigma_{0,2}$), on obtient

$$\frac{F_d}{N_e} + \frac{F_d a_0^* + M_{d\text{lin}}}{M_u(1 - F_d/F_{cr})} \leq 1 \quad (21.18)$$

où $N_e \equiv N_{pl} = A\sigma_e$ (effort normal élastique maximal ou plastique).

Des relations de ce genre sont proposées dans la plupart des normes relatives aux structures en acier, aluminium, béton et bois. Malgré leur apparente similitude avec les formules du paragraphe précédent, on se souviendra qu'elles n'effectuent plus du tout une vérification élastique de la pièce et que les deux termes calculés n'ont aucune réalité physique.

Remarques

Dans les deux formules d'interaction précédentes,

- seul le signe *plus* est retenu entre les deux termes de gauche, les formules ne s'appliquant qu'aux poutres à section symétrique ;
- le choix entre M_e et M_{pl} est d'importance secondaire, puisque $M_{pl} = \alpha M_e$ avec $\alpha = 1,15$ (15.16).

L'intérêt remarquable de la formule (21.17) est qu'elle permet aussi de vérifier le *flambement spatial* (§ 20.1.2) ; il suffit de choisir pour F_u la plus petite force ultime de flambement (plan de résistance minimale) et pour M_u le moment de déversement (pour son calcul voir le volume 10).

21.5.3 Vérifications complémentaires

L'utilisation du facteur d'amplification $1/(1 - F_d/F_{cr})$ garantit qu'on n'atteindra pas la charge critique *élastique* (puisque'on doit satisfaire $1 - F_d/F_{cr} > 0$, ce qui implique $F_d < F_{cr}$). De plus, ce facteur est une *approximation* (élastique). Par conséquent, il est prudent de vérifier aussi la sollicitation par compression seule (§ 21.3.2), surtout pour les pièces courtes ($\lambda < \lambda_e$) et les faibles flexions extérieures. Cette vérification complémentaire est également recommandée lorsque la pièce est à section ou effort normal variables, auquel cas l'emploi précis des formules (21.13) à (21.18) peut s'avérer délicat.

Lorsque la flexion extérieure comporte des moments d'extrémité (§ 21.4.3 par exemple) et si le plus grand de ces moments reste supérieur au maximum du moment non linéaire (en valeur absolue et compte tenu d'une éventuelle courbure initiale), la vérification de résistance globale n'est, en calcul élastique, pas déterminante et seule subsiste la vérification locale (21.5). A la ruine par contre, il est prudent de toujours effectuer la vérification globale par (21.17) ou (21.18) parce que la recherche de M_{nl} , basée sur des hypothèses élastiques, reste une *approximation* (dans un calcul à la ruine, le maximum de M_{nl} peut être légèrement supérieur au moment d'extrémité, alors qu'il ne le serait pas dans le même calcul élastique).

21.6 Exercices

21.6.1 Déterminer la force F_u d'une colonne industrielle de 3 m de hauteur, encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre, constituée d'un profilé creux rectangulaire MSH 220-120-6, 3 laminé à chaud, en acier doux. On donne $\sigma_e = 23,5 \text{ kN/cm}^2$ et $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$. *Indications* : choisir la courbe de flambement à l'aide du tableau 21.15 (sect. 21.8) ; négliger le poids propre.

21.6.2 Une colonne, constituée d'un profilé laminé IPE 330 en acier doux, a des conditions d'appui différentes dans les deux plans (x, y) et (x, z) . On néglige le poids propre. Pour les deux plans (x, y) et (x, z) ,

- 1) calculer la charge critique d'Euler F_{cr} (pièce parfaite) ;
- 2) calculer la charge ultime F_u (pièce industrielle ; courbe de flambement selon la section 21.8) ;
- 3) chiffrer en % la perte due aux imperfections de la pièce industrielle (par rapport à F_{cr}) ; comparer les plans de flambement déterminants ; expliquer pourquoi la perte n'est pas la même dans les deux plans.

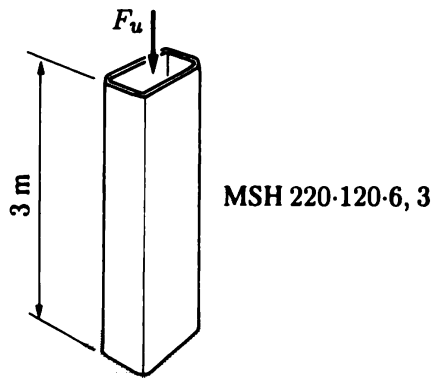


Fig. Ex. 21.6.1

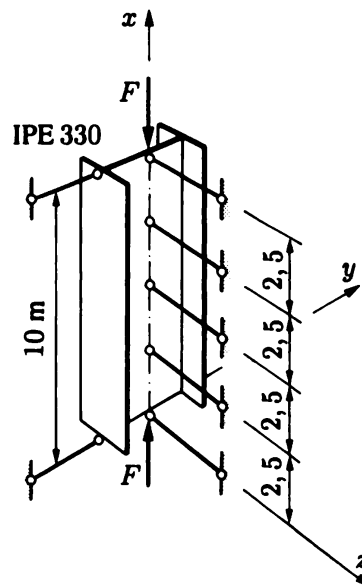


Fig. Ex. 21.6.2

21.6.3 Une poutre industrielle sur appuis simples A et B, formée d'un profilé laminé HEB 240 en acier doux, est soumise aux forces pondérées $F_d = 1\,400 \text{ kN}$, $M_{dA} = 90 \text{ kNm}$ et $M_{dB} = 45 \text{ kNm}$. On donne $\sigma_e = 23,5 \text{ kN/cm}^2$ et $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$; tout se passe dans le plan de l'âme (déversement et instabilité spatiale ne sont pas considérés ; en outre, le poids propre est négligé).

- 1) Vérifier la résistance en régime élastique linéaire.
- 2) Calculer l'élancement de la poutre et le facteur d'amplification du second ordre ; conclure.
- 3) Vérifier résistance et stabilité en régime non linéaire ; conclure.

Indications : utiliser la première formule d'interaction du paragraphe 21.5.2 ; choisir la courbe de flambement à l'aide du tableau 21.15 de la section 21.8.

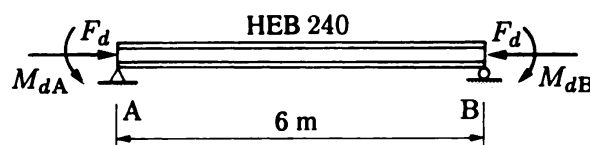


Fig. Ex. 21.6.3

21.6.4 La colonne d'une halle industrielle est une poutre encastree de 5 m de haut, faite d'un profilé HEB 260 en acier doux. Contrôler la résistance et la stabilité, au flambement plan seulement, dans les deux plans principaux d'inertie successivement. *Indications* : négliger le poids propre ; pondérer les charges par $\gamma_F = 1,6$; si nécessaire, prendre pour l'imperfection initiale équivalente la valeur $a_0^* = L_K/300$.

21.6.5 Une colonne de halle industrielle est soumise aux charges pondérées $Q_d = 850$ kN et $q_d = 4$ kN/m (vent). Déterminer le profilé laminé HEB qui convient. *Indications* : poids propre négligé ; acier doux avec $\sigma_e = 23,5$ kN/cm² et $E = 21\,000$ kN/cm² ; si nécessaire, $a_0^* = L_K/300$.

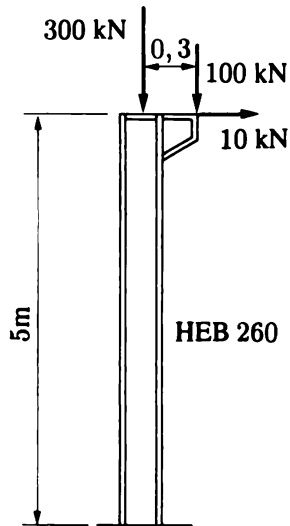


Fig. Ex. 21.6.4

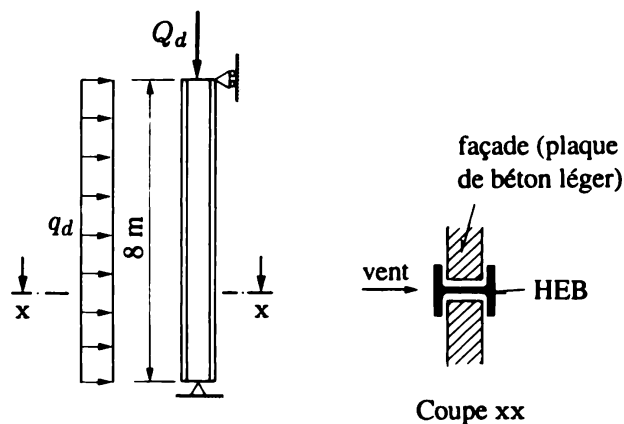


Fig. Ex. 21.6.5

21.6.6 Si, dans la formule d'interaction (21.18) du paragraphe 21.5.2, on omet la flexion extérieure ($M_{dlin} = 0$), on obtient une formule de dimensionnement au flambement sans flexion des pièces industrielles. Démontrer que, pour que cette relation conduise au même dimensionnement que les courbes européennes de flambement des pièces en acier, il faut prendre, comme imperfection géométrique équivalente, la valeur

$$a_0^* = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_K} - 1 \right) \left(1 - \frac{\sigma_K}{\sigma_{cr}} \right) \frac{W}{A} \quad (a)$$

Exprimer ensuite les fractions contenues dans les parenthèses de cette formule à l'aide des grandeurs non dimensionnelles $\bar{\sigma} = \sigma_K/\sigma_e$ et $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_e$; en déduire l'équation des courbes européennes de flambement

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\lambda}) \quad (b)$$

Montrer l'identité de l'équation (b) avec celle donnée au tableau 21.14 (sect. 21.8) et en déduire alors la valeur de l'imperfection géométrique équivalente

$$a_0^* = \eta(\bar{\lambda} - 0,2) \frac{W}{A} \quad (c)$$

Cette valeur peut être utilisée pour dimensionner les pièces industrielles en acier, comprimées et fléchies, à l'aide de la formule d'interaction (21.18).

Application. Calculer a_0^* pour un profilé HEB 200 en acier doux ($\sigma_e = 23,5$ kN/cm² et $E = 21\,000$ kN/cm²) pour les trois valeurs $\bar{\lambda} = 0,5$, $\bar{\lambda} = 1$ et $\bar{\lambda} = 1,5$ et pour le flambement selon les deux axes principaux d'inertie. Exprimer les résultats sous la forme $a_0^* = L_K/n$: vérifier que n n'est pas constant et est inférieur à 1 000 (c'est-à-dire que $a_0^* > a_0$ (21.10)).

21.7 Lexique

Imperfections <ul style="list-style-type: none"> • imperfections géométriques • imperfections matérielles 	Défauts inévitables des pièces industrielles ; déformée initiale, défaut de centrage, tolérance de laminage, etc. ; contraintes résiduelles, dispersion de la limite d'élasticité, du module de Young, etc.
Force ou charge ultime de flambement (F_u)	Charge de ruine par flambement des pièces industrielles, c'est-à-dire en présence des imperfections ; elle se produit toujours par divergence et est toujours inférieure à F_{cr} ou $F_{cr,t}$.
Contrainte moyenne de flambement (σ_K)	Contrainte fictive de flambement des pièces industrielles ($\sigma_K = F_u/A$).
Courbes européennes de flambement	Courbes $\sigma_K = f(\lambda)$ de la Convention Européenne de la Construction Métallique (CECM), régissant le flambement des pièces industrielles comprimées (acier et alliages d'aluminium).
Moment équivalent (M_{eq})	Moment constant remplaçant, dans une poutre simple, le moment linéaire et tel que le moment maximal du second ordre soit le même.
Formule d'interaction (pièce comprimée et fléchie)	Formule permettant de tester la résistance des pièces simultanément comprimées et fléchies, et comportant deux termes relatifs l'un à l'effort normal et l'autre au moment de flexion, dont la somme ne doit pas dépasser 1.
Imperfection géométrique équivalente (a_0^*)	Imperfection géométrique fictive, supérieure à la valeur réelle de manière à couvrir les autres imperfections.

21.8 Annexe – Courbes européennes de flambement des pièces en acier

Les courbes de la figure 21.8 sont données au tableau 21.14. Le choix d'une courbe de flambement est fonction

- du type et des proportions de la section droite,
- du mode de fabrication de la pièce,
- du plan de flambement,

et peut être fait à l'aide du tableau 21.15 (l'axe de flambement est perpendiculaire au plan de flambement).

Ces tableaux ont été construits à partir des sources suivantes :

- Eurocode n° 3, *Calcul des structures en acier*, version 3, avril 1990 ;
- *Stabilité des structures en profils creux*, Guide de dimensionnement CIDECT, Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1992.

L'exercice 21.6.6 donne l'imperfection géométrique équivalente a_0^* déduite des courbes.

Tableau 21.14 Courbes européennes de flambement des pièces en acier.

$\bar{\lambda}$	Valeur de $\bar{\sigma}$ pour la courbe de flambement				
	a_0	a	b	c	d
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,30	0,9859	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,40	0,9701	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,50	0,9513	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,60	0,9276	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,70	0,8961	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,80	0,8533	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,90	0,7961	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,00	0,7253	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,10	0,6482	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,20	0,5732	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,30	0,5053	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,40	0,4461	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,50	0,3953	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,60	0,3520	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,70	0,3150	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,80	0,2833	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,90	0,2559	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,00	0,2323	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,10	0,2117	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,20	0,1937	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,30	0,1779	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,40	0,1639	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,50	0,1515	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,60	0,1404	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,70	0,1305	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,80	0,1216	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,90	0,1136	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,00	0,1063	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

Equation des courbes ($\bar{\lambda} \geq 0,2$)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

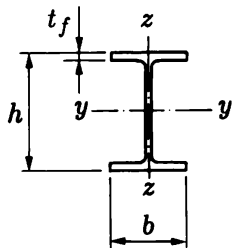
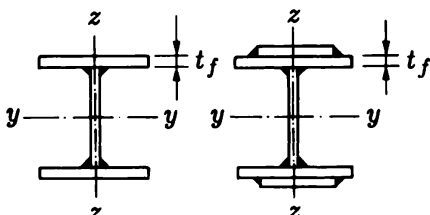
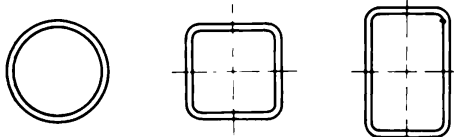
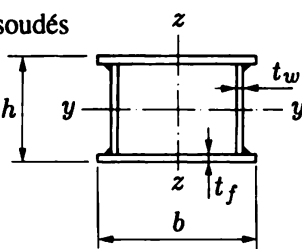
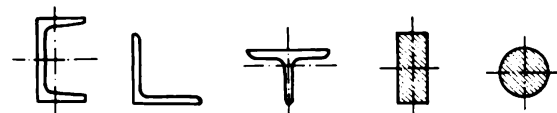
où

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_K}{\sigma_e} \quad \varphi = \frac{1}{2} (1 + \eta(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2) \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e} \quad (\lambda_e = \pi \sqrt{E/\sigma_e})$$

 η est le facteur d'imperfection

courbe	a_0	a	b	c	d
η	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tableau 21.15 Choix de la courbe de flambement des pièces en acier en fonction du type de la section.

Section	Limites		Axe de flambement	Courbe de flambement	
Sections en I laminées 	$\frac{h}{b} > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a b	
		$40 \text{ mm} \leq t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	
	$\frac{h}{b} \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	
		$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d d	
Sections en I soudées 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$		y-y z-z	b c	
	$t_f > 40 \text{ mm}$		y-y z-z	c d	
Sections creuses 	laminées à chaud		quel qu'il soit	a	$a_0^{(2)}$
	formées à froid ⁽¹⁾			b	$a^{(2)}$
	(1) avec σ_e de la tôle mère (2) pour l'acier à grain fin seulement				
Caissons soudés 	d'une manière générale (sauf ci-dessous)		quel qu'il soit	b	
	soudures épaisses et $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$		y-y z-z	c c	
Sections en U, L, T et sections pleines 			quel qu'il soit	c	

22. Instabilité énergétique

22.1 Critère et nature de l'équilibre élastique

Dans ce chapitre, on se place dans le cas des *systèmes conservatifs*, pour lesquels les notions énergétiques s'appliquent (vol. 3, chap. 4 et 8).

En mécanique, on dit que la configuration d'équilibre d'un corps est

- stable,
- indifférente (ou neutre),
- instable,

si, quand on écarte légèrement le corps de cette configuration, il

- y revient,
- reste écarté,
- s'écarte davantage,

ou encore si, quand on soumet la configuration d'équilibre à une *variation des déplacements*, l'énergie potentielle totale Π

- augmente,
- ne varie pas,
- diminue.

On illustre aisément la chose par des billes indéformables placées sur un contour rigide $y(x)$ (fig. 22.1). Pour toute bille de poids F , on a⁽¹⁾ $\Pi = P = Fy$ ($U = 0$, bille rigide). Elles sont toutes en équilibre : pour chacune d'elles, $dy/dx = 0$ et donc

$$\delta \Pi = F \delta y = F \frac{dy}{dx} \delta x = 0$$

⁽¹⁾ U et P sont les énergies potentielles de déformation et des forces extérieures ($\Pi = U + P$).

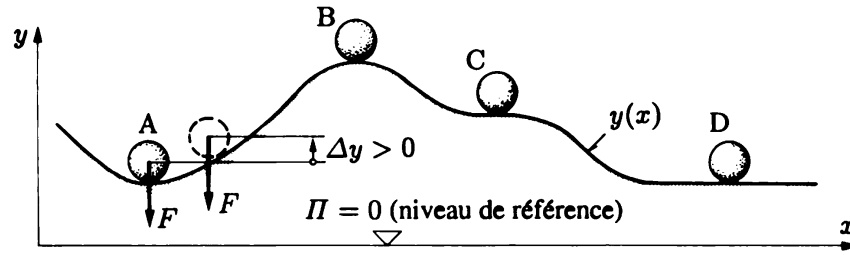


Fig. 22.1 Illustration de la nature de l'équilibre.

Si l'on écarte légèrement la bille A de sa position, son énergie potentielle augmente de $\Delta\Pi = F \Delta y$; or la bille A est, visiblement, en équilibre stable. Un raisonnement analogue montre que B, qui est en équilibre instable, voit son énergie diminuer, tandis que D, qui est en équilibre indifférent, ne subit pas de variation d'énergie. La bille C représente un cas spécial (point d'inflexion) ; l'équilibre y est instable car l'énergie diminue si on déplace la bille vers la droite.

En mécanique des structures et solides, les circonstances sont analogues de sorte que *les notions précédentes s'appliquent aux corps déformables*. Ainsi, on retrouve un résultat connu : *l'équilibre d'un solide déformable est stable si son énergie potentielle totale Π est stationnaire minimale* (sect. 13.5 et vol. 3, chap. 8) ; remarquons qu'il suffit d'avoir un minimum relatif.

Pour donner une forme mathématique à ce critère de stationnarité, considérons un solide *en équilibre* dans la configuration déformée Ω^1 ; si $\Pi[u_i(x_j)]$ désigne son énergie potentielle totale exprimée en fonction du champ des déplacements, par exemple $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ – ce qu'on écrira simplement $\Pi[u_i]$ ci-après – le *critère d'équilibre* est, puisque $\Pi[u_i]$ est stationnaire,

$$\delta\Pi[u_i] = 0 \quad (22.1)$$

Pour tester les propriétés d'extremum de cette énergie totale, on doit la comparer avec les valeurs qu'elle prend dans *toutes* les configurations possibles Ω^2 , *très voisines* de Ω^1 (de la même manière qu'à la figure 22.1). Soit δu_i la variation du champ des déplacements de Ω^1 à Ω^2 ; dans Ω^2 , l'énergie totale est $\Pi[u_i + \delta u_i]$. Le changement d'énergie totale $\Delta\Pi$ entre Ω^2 et Ω^1 est donc

$$\Delta\Pi = \Pi[u_i + \delta u_i] - \Pi[u_i] \quad (22.2)$$

Développons Π de Ω^2 autour de Ω^1 (Taylor) :

$$\Pi[u_i + \delta u_i] = \Pi[u_i] + \delta\Pi[u_i] + \frac{1}{2} \delta^2\Pi[u_i] + \dots \quad (22.3)$$

D'où, dans (22.2) et en tenant compte de (22.1),

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \delta^2\Pi[u_i] + \dots \quad (22.4)$$

Ainsi, *la nature de l'équilibre d'un corps élastique est donnée par le signe de la seconde variation de l'énergie potentielle totale* :

$$\text{équilibre} \begin{cases} \text{stable} & \delta^2\Pi > 0 \\ \text{indifférent} & \delta^2\Pi = 0 \\ \text{instable} & \delta^2\Pi < 0 \end{cases} \quad (22.5)$$

Pour l'instant, on a seulement qualifié la *nature de l'équilibre* d'un solide, ce qui est, a priori, sans rapport avec la notion d'instabilité ou de charge critique.

22.2 Nature de l'instabilité

L'étude de la *nature de l'instabilité* dont une structure peut être le siège est un problème complexe qu'on ne peut qu'effleurer ici.

Traçons la courbe force-déplacement (F, v) typique d'une structure ; l'instabilité peut se manifester essentiellement de *deux manières différentes* (fig. 22.2) ; au passage de la charge critique (F_{cr}) , il y a

- **divergence** lorsque la structure passe *progressivement* de la configuration *stable*, dite aussi configuration *primaire*, à celle *instable*, dite également *secondaire* ; il n'y a pas de différence essentielle de forme entre ces deux configurations ; la courbe (F, v) présente un maximum appelé *point limite* (fig. 22.2a) ;
- **bifurcation** lorsque la structure présente, au voisinage de la charge critique, *deux configurations en équilibre distinctes*, l'une primaire (stable), l'autre secondaire (généralement instable) ; cela se traduit dans le graphique (F, v) par l'intersection de deux courbes distinctes correspondant à des configurations *de formes nettement différentes* (branche stable, branche instable) ; on ne dessine généralement de ces courbes que la partie ayant une signification physique, ce qui fait apparaître le *point anguleux* typique de la bifurcation, dit *point de bifurcation* (fig. 22.2b) ; en ce point, les deux configurations sont identiques ; sur la base de ce dessin, on dit couramment que la structure *passse brusquement* de la configuration primaire à celle secondaire, ce qui est incorrect d'un strict point de vue théorique (voir aussi la fin du paragraphe 22.5.1).

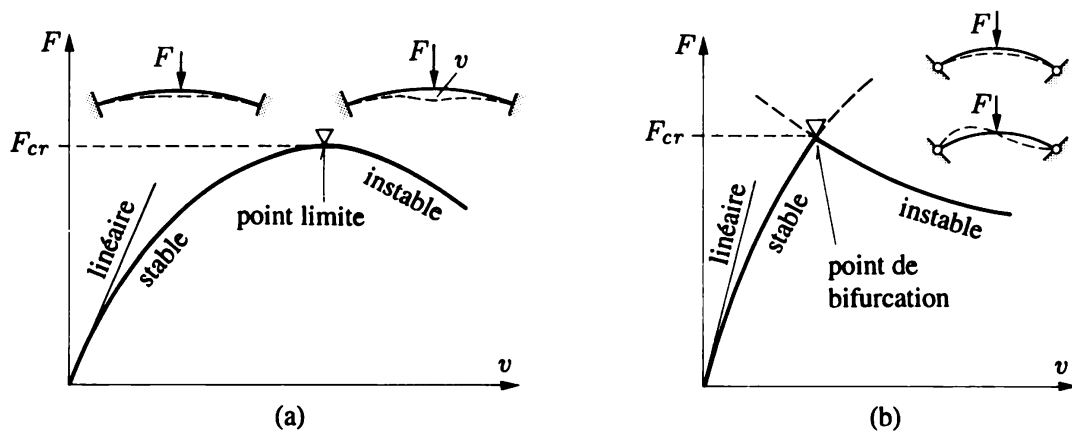


Fig. 22.2 Instabilité par : (a) divergence ; (b) bifurcation.

Dans les deux cas envisagés ci-dessus, les branches stables des courbes (F, v) sont non linéaires. Il s'agit donc d'une analyse géométriquement non linéaire de l'instabilité.

Instabilité linéaire

Dans beaucoup de cas, on peut se contenter d'une *analyse linéarisée de l'instabilité* : on suppose que le comportement stable de la structure est linéaire (géométriquement). Par suite, l'instabilité ne

peut se manifester que par bifurcation ; c'est le cas par exemple pour le flambement des colonnes parfaites (cas d'Euler). Ainsi :

En instabilité linéaire, la charge critique correspond toujours et forcément à une bifurcation.

Il est très important de bien comprendre la portée de l'hypothèse simplificatrice introduite : *le comportement de la structure avant instabilité est linéaire*. Cette hypothèse simplifie considérablement le calcul des charges critiques (comme on a déjà pu s'en rendre compte – sect. 20.3 – et comme on le verra encore ci-après), mais peut influencer fortement la valeur du résultat obtenu (par rapport à une théorie plus exacte). On entend souvent dire en effet que les charges critiques ainsi calculées ne coïncident guère, dans bien des cas pratiques, avec la réalité et que, par suite, la théorie livre des résultats suspects... En fait, le calcul des charges critiques est exact, mais l'hypothèse de linéarité peut être fausse ! Cette confusion a jeté un certain discrédit sur la théorie de l'instabilité, ce qui n'est pas du tout justifié.

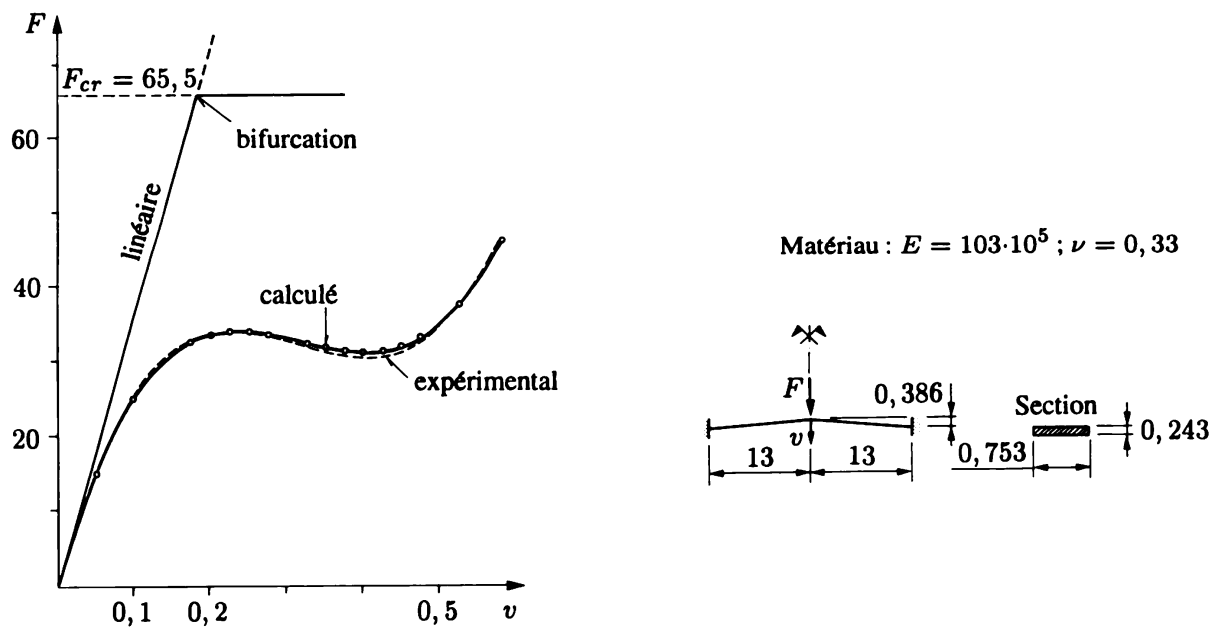


Fig. 22.3 Instabilité d'un cadre surbaissé.

La figure 22.3, par exemple, montre les courbes (F, v) typiques d'un cadre surbaissé en V renversé, bi-encasté. On voit que la théorie linéaire⁽²⁾ surestime la charge critique de près de 100 %. Or le calcul de $F_{cr \text{ lin}}$ est en soi inattaquable : c'est admettre un comportement linéaire du cadre avant flambement qui est faux, car ici la déformation par effort normal n'est pas négligeable sur les effets du second ordre.

Au contraire, l'analyse d'instabilité non linéaire (trait fort : calcul numérique par éléments finis) montre une concordance parfaite avec la réalité (trait interrompu : essai).

⁽²⁾ $F_{cr \text{ lin}}$ est calculé ici sans tenir compte de la déformation due à N .

22.3 Critère d'instabilité

On appelle *état d'équilibre critique* celui pour lequel *l'équilibre cesse d'être stable* ; le niveau de charge correspondant est aussi dit critique. D'usage courant, cette définition est un peu vague ; dans le cas de la poutre d'Euler par exemple (§ 20.3.6), on peut estimer qu'il n'y a jamais d'instabilité. On précise alors la notion comme suit : l'état critique est atteint quand *l'état d'équilibre de la configuration primaire cesse d'être unique*.

On préfère parler d'état d'équilibre critique plutôt que neutre ou indifférent ; dans ce dernier en effet, l'énergie ne varie pas tout le long d'une certaine séquence de configurations. En fait, au niveau critique, l'équilibre n'est que *localement* neutre, au seul voisinage immédiat du point limite ou de bifurcation. (Le cas exceptionnel de l'équilibre indifférent de la poutre d'Euler (§ 20.3.1) provient, rappelons-le, de la schématisation de la théorie.) En mécanique des structures, il y a quatre types d'état critique :

- *divergence avec point limite* (fig. 22.2a) ;
- *bifurcation asymétrique* (fig. 22.2b) ;
- *bifurcation symétrique stable* (fig. 22.4a) ;
- *bifurcation symétrique instable* (fig. 22.4b).

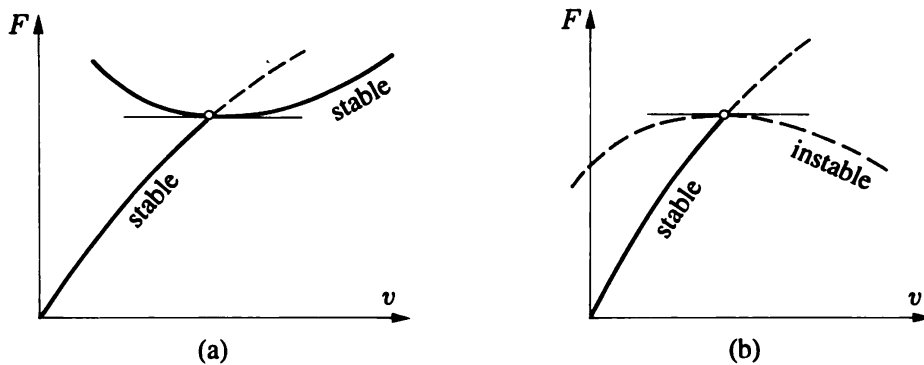


Fig. 22.4 Bifurcation symétrique : (a) stable ; (b) instable.

Comme pour les systèmes mécaniques, l'équilibre est stable tant que $\delta^2 \Pi > 0$ et instable lorsque $\delta^2 \Pi < 0$. L'équilibre critique est donc atteint pour

$$\delta^2 \Pi = 0 \quad (22.6)$$

Cet équilibre peut lui-même être stable si $\Delta \Pi > 0$ et instable si $\Delta \Pi < 0$ (où, dans $\Delta \Pi$ (22.4), il faut considérer les termes d'ordre supérieur). Pour la poutre d'Euler traitée en grands déplacements (§ 20.3.6), on aurait $\Delta \Pi > 0$ au point de bifurcation.

Dans les structures discrétisées, $\delta^2 \Pi$ devient une forme quadratique des paramètres de la discrétisation. On peut montrer que le critère (22.6) conduit à annuler le déterminant Δ_{sta} de cette forme quadratique, dit *déterminant de stabilité*,

$$\Delta_{\text{sta}} = 0 \quad (22.7)$$

22.4 Instabilité linéaire et principe de Rayleigh

En théorie linéarisée de l'instabilité, la configuration primaire Ω^1 coïncide avec la configuration initiale (non déformée) ; la variation du champ des déplacements δu_i , utilisée à la section 22.1, est par suite une mesure directe des déplacements de la configuration secondaire Ω^2 et coïncide, à l'instant critique, avec le mode d'instabilité par bifurcation ($\Omega^1 \rightarrow \Omega^2$). Appelons simplement u ce champ de déplacements.

Lorsqu'on met en charge progressivement une structure, la quantité $\delta^2 \Pi[u]$ est positive tant que l'équilibre est stable (sect. 22.3) ; pour un certain niveau de charge, il peut exister une configuration secondaire distincte Ω^2 , où la structure est en équilibre aussi bien dans Ω^1 que Ω^2 : c'est l'*équilibre critique* ; en appelant u_{cr} le champ des déplacements particulier qui caractérise Ω^2 au niveau critique, on a, pour ce seul champ,

$$\delta^2 \Pi[u_{cr}] = 0$$

et pour tout autre

$$\delta^2 \Pi[u] > 0 \quad (u \neq u_{cr})$$

Par conséquent :

L'instabilité est caractérisée par le fait que la variation seconde de l'énergie potentielle totale Π prend, pour la configuration critique u_{cr} , une valeur simultanément minimale et nulle :

$$\delta^2 \Pi[u_{cr}] = 0 = \text{minimum} \quad (22.8)$$

On supposera que toutes les charges augmentent proportionnellement, de sorte qu'elles peuvent s'écrire $\lambda F_1, \lambda F_2, \dots, \lambda F_n$, où λ est le multiplicateur. Rechercher le niveau critique de charge revient à rechercher le *multiplicateur critique* λ_{cr} . Puisque, dans un système conservatif, l'énergie est proportionnelle aux charges, on peut écrire

$$\delta^2 \Pi[u_{cr}] = A[u_{cr}] - \lambda_{cr} B[u_{cr}] = 0 \quad (a)$$

d'où

$$\lambda_{cr} = \frac{A[u_{cr}]}{B[u_{cr}]} \quad (22.9)$$

Si, à la place du mode d'instabilité exact u_{cr} , on introduit un champ voisin \tilde{u}_{cr} (par exemple à titre d'essai), *compatible avec les appuis* bien sûr, alors, à cause de (22.8),

$$\delta^2 \Pi[\tilde{u}_{cr}] = A[\tilde{u}_{cr}] - \lambda_{cr} B[\tilde{u}_{cr}] > 0 \quad (b)$$

d'où, en comparant avec (a),

$$\frac{A[u_{cr}]}{B[u_{cr}]} < \frac{A[\tilde{u}_{cr}]}{B[\tilde{u}_{cr}]} \quad (22.10)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lambda_{cr} < \tilde{\lambda}_{cr} \quad (22.11)$$

ou encore

$$\lambda_{cr} = \frac{A[u_{cr}]}{B[u_{cr}]} = \min \frac{A[\tilde{u}_{cr}]}{B[\tilde{u}_{cr}]} \quad (22.12)$$

Ce résultat très important conduit au principe suivant :

Principe de Rayleigh : si l'on calcule une valeur approchée $\tilde{\lambda}_{cr}$ de l'intensité critique λ_{cr} des charges extérieures correspondant à l'équilibre critique d'une structure élastique (instabilité linéaire par bifurcation) au moyen de (22.12), en utilisant un champ de déplacements compatible avec les appuis, mais quelconque, on obtient toujours une borne supérieure, c'est-à-dire une valeur du multiplicateur critique λ_{cr} erronée par excès.

Ce principe est un moyen de calcul très puissant ; on le verra ci-après dans le cas du flambement plan des poutres ; il s'applique aussi à d'autres domaines que l'instabilité (vibrations) ; enfin, on peut montrer qu'une erreur du premier ordre sur le choix de \tilde{u}_{cr} a pour conséquence une erreur du second ordre sur λ_{cr} (parce que (22.12) est basé sur la seconde variation de Π).

Toutefois, on n'oubliera pas que la valeur approchée est supérieure à la valeur réelle, c'est-à-dire qu'elle ne met pas du côté de la sécurité.

L'équation (22.8), connue sous les dénominations de *test de la variation seconde* ou *critère de Trefftz*, traduit la *méthode énergétique* de calcul des charges critiques (méthode variationnelle ou intégrale, par opposition à la méthode différentielle d'Euler du paragraphe 20.3.2). Cependant, elle exprime exactement la même démarche que celle d'Euler, à savoir l'équilibre (indifférent) dans deux configurations distinctes voisines (§ 20.3.1). On pourrait démontrer, comme à la section 13.9, que $\delta^2 \Pi[u_{cr}] = 0$ conduit, par intégrations par parties, à une équation différentielle d'équilibre dans Ω^2 , telle $v'' + k^2 v = 0$ pour le cas fondamental d'Euler par exemple.

22.5 Application au flambement des poutres

22.5.1 Quotient de Rayleigh et son interprétation physique

Dans le cas des poutres droites, on peut démontrer que le minimum (22.8) s'écrit

$$\delta^2 \Pi[v] = \int_L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx + \lambda_{cr} \int_L \frac{N}{2} (v')^2 dx = 0 \quad (22.13)$$

d'où le *quotient de Rayleigh* (22.12)

$$\lambda_{cr} = \frac{\int_L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx}{-\int_L \frac{N}{2} (v')^2 dx} \quad (22.14)$$

où $v(x)$ est la déformée d'instabilité Ω^2 (avec $v' = dv/dx$, $v'' = d^2v/dx^2$), EI la caractéristique flexionnelle et N l'effort normal. Ce dernier étant essentiellement négatif (compression), le signe *moins* du dénominateur disparaît dans les applications pratiques.

Les facteurs 1/2 ont été introduits pour mettre en évidence l'*interprétation physique* suivante des deux formules précédentes. Prenons, pour fixer les idées, le cas fondamental d'Euler (fig. 22.5). Avec $N = \text{cste}$, puis $\lambda_{cr} N = -F_{cr}$, on a

$$F_{cr} = \frac{\frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx} \quad (22.15)$$

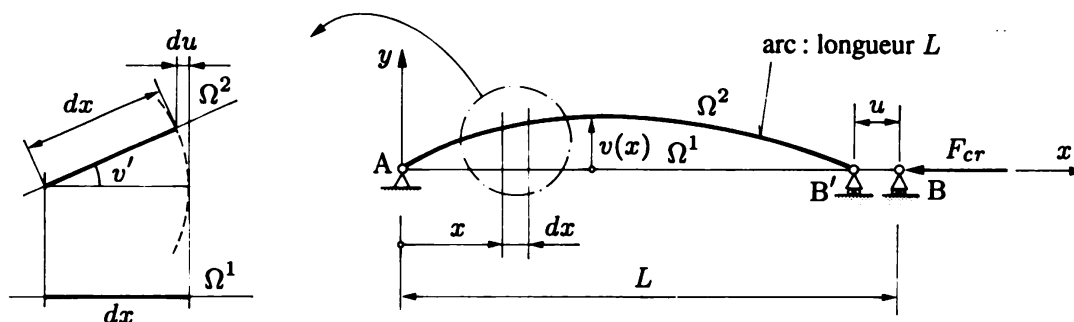


Fig. 22.5 Cas fondamental d'Euler et interprétation du quotient de Rayleigh.

L'expression $(EI/2) \int_0^L (v'')^2 dx$ (ou $\int_0^L (EI/2) (v'')^2 dx$) représente l'énergie potentielle de déformation, au second ordre ($v'' =$ courbure approchée), emmagasinée par flexion dans la configuration déformée Ω^2 (champ $u_{cr} \equiv v$).

L'expression $(1/2) \int_0^L (v')^2 dx$ est le déplacement, au second ordre, du point d'application de la charge dans la configuration déformée Ω^2 ; en effet, comme le montre le détail de la figure 22.5, $du = dx - dx \cos v' = (1 - \cos v') dx$; mais $\cos v' = 1 - (v')^2/2 + \dots$; donc, au second ordre, $du = [1 - 1 + (v')^2/2] dx = (v')^2 dx/2$ et $u = \int_0^L du = (1/2) \int_0^L (v')^2 dx$.

En écrivant (22.15) sous la forme

$$F_{cr}u = \delta^2 U[v] \quad (22.16)$$

puis en considérant le premier terme comme le *travail* des forces (critiques) extérieures – qu'on notera $\delta^2 W_{\text{ext}}$ puisqu'il s'agit d'un travail au second ordre – et, enfin, en assimilant ce travail à *moins* l'énergie potentielle des charges extérieures $\delta^2 P[v]$, on interprète (22.13) comme suit

$$\delta^2 \Pi[v] = \delta^2 U[v] + \delta^2 P[v] = 0$$

c'est-à-dire que les deux termes de la somme, dans une approximation au second ordre, sont assimilables aux variations secondes correspondantes. Physiquement, l'équation (22.16) s'accorde en plus assez bien avec l'idée intuitive qu'on peut se faire de l'instabilité : lorsque le flambement va se produire, la résistance propre de la poutre ($\delta^2 U$) équilibre juste le travail des forces extérieures ($\delta^2 W_{\text{ext}}$) ; si $\delta^2 U > \delta^2 W_{\text{ext}}$, la poutre est stable ; si $\delta^2 U < \delta^2 W_{\text{ext}}$, elle est instable ; donc l'équilibre critique a lieu pour $\delta^2 U = \delta^2 W_{\text{ext}}$.

C'est Timoshenko qui, le premier (1910), a appliqué le principe de Rayleigh, sous la forme de l'interprétation physique (22.16), à des problèmes d'instabilité élastique très divers (flambement, déversement, voilement). En effet, Rayleigh a établi son principe non pour l'instabilité, mais pour les vibrations (1877). Pour cette raison, la méthode énergétique de calcul des charges critiques d'instabilité linéaire est souvent appelée *méthode de Rayleigh-Ritz-Timoshenko*.

Signalons cependant que cette interprétation physique, si elle aide à saisir le sens des équations (22.13) à (22.15), doit être comprise avec prudence. En effet, une poutre parfaite ne passe jamais de Ω^1 à Ω^2 ; la bifurcation signifie que deux configurations d'équilibre distinctes peuvent exister sous la même charge ; mais elles n'ont a priori aucun rapport l'une avec l'autre. La configuration Ω^1 ne se transforme jamais d'elle-même en configuration Ω^2 , même si on dépasse F_{cr} .

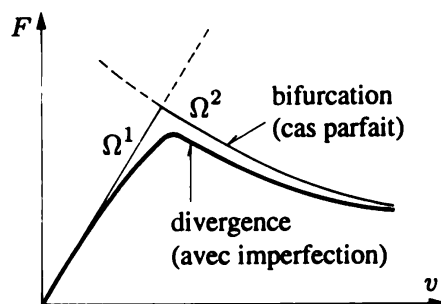


Fig. 22.6 A cause des imperfections, l'instabilité ne peut se produire que par divergence.

Rappelons enfin qu'il s'agit là d'un fait purement théorique. La réalité physique est naturellement autre : à cause des imperfections inévitables des pièces, la bifurcation se transforme toujours en divergence voisine, avec passage progressif de Ω^1 à Ω^2 via un point limite (fig. 22.6).

22.5.2 Généralisation

Les formules (22.13) à (22.15) se généralisent à toute structure en poutres et barres. Le premier terme (le numérateur) est l'énergie interne stockée dans *tous les éléments touchés par le mode de flambement* v (poutres fléchies, barres, appuis élastiques...), et le second (dénominateur) est, à λ_{cr} près, le travail de *toutes les charges* – ou, plus exactement, des efforts normaux qu'elles produisent – qui s'associent aux déplacements du mode de flambement v .

22.5.3 Technique numérique

Soit à trouver la charge critique du cas fondamental d'Euler par (22.15) (fig. 22.5). On sait que le mode d'instabilité est (§ 20.3.2)

$$v = C \sin \frac{\pi x}{L}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L (v')^2 dx &= \frac{C^2 \pi^2}{2L^2} \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{C^2 \pi^2}{4L} \\ \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx &= \frac{EI}{2} \frac{C^2 \pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{C^2 \pi^4 EI}{4L^3} \end{aligned}$$

et

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

ce qui est le résultat exact, puisqu'on a pris la déformée vraie.

En réalité, on ignore la forme exacte que peut prendre la poutre dans la configuration instable (sinon le problème serait résolu), mais on peut aisément estimer son allure générale. Si donc on adopte une courbe d'équation $\tilde{v}(x)$, satisfaisant aux conditions d'appui, pour calculer les quantités intervenant dans (22.13), (22.14) ou (22.15), on obtiendra, d'après le principe de Rayleigh, une valeur du multiplicateur ou de la charge critique erronée par excès.

Pour montrer quelle précision on peut obtenir de cette manière, supposons que la déformée soit celle d'une poutre sur deux appuis simples uniformément chargée (10.10)

$$\tilde{v}(x) = \frac{-q}{24 EI} (x^4 - 2x^3L + xL^3)$$

Le facteur $-q/24 EI$ peut être omis, car il disparaîtra dans le quotient (22.15). On a

$$\tilde{v}' = 4x^3 - 6x^2L + L^3 \quad \tilde{v}'' = 12x^2 - 12xL$$

et on trouve

$$\tilde{F}_{cr} = \frac{9,88 EI}{L^2}$$

ce qui est fort précis (et on a bien $9,88 > \pi^2$).

L'avantage de choisir une déformée due à des charges transversales (Q, q) est triple :

- on est sûr de satisfaire aux conditions d'appui ;
- on peut souvent s'abstenir d'intégrer le terme d'énergie de déformation grâce au théorème de Clapeyron extérieur (13.10)

$$\int_L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum Qv$$

- le plus souvent, on satisfait aussi à tout ou partie des *conditions statiques*, ce qui améliore encore la précision.

22.5.4 Méthode de Ritz

Elle donne la solution approchée directe du problème de minimum (22.13). Adoptant un mode de flambement compatible avec les appuis du type (sect. 13.6)

$$\tilde{v} = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

et l'introduisant dans (22.13), on obtient pour $\delta^2\Pi$ une *fonction quadratique homogène* en les paramètres a_i , du genre

$$\delta^2\Pi(a_i) = A(a_i) - \tilde{\lambda}_{cr}B(a_i) \quad (22.17)$$

qu'il suffit de minimiser, ce qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [\delta^2\Pi(a_i)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22.18)$$

Les dérivées premières seront linéaires, de sorte que (22.18) représente un système de n équations linéaires et homogènes, à l'aide desquelles on doit déterminer les paramètres a_i . Ce système n'admet de solution autre que la solution triviale $a_i = 0$ que si le *déterminant de stabilité* Δ_{sta} de ses coefficients est nul. La condition (22.7)

$$\Delta_{sta} = 0$$

est une équation de degré n par rapport à l'inconnue $\tilde{\lambda}_{cr}$ et représente la condition d'équilibre critique dont on peut déduire $\tilde{\lambda}_{cr}$.

La plus petite des racines de l'équation $\Delta_{sta} = 0$ est la charge (le multiplicateur) critique $\tilde{\lambda}_{cr1}$ du *premier* mode d'instabilité (indice 1). En remplaçant dans les équations (22.18) $\tilde{\lambda}_{cr}$ par λ_{cr1} , on obtient un ensemble de n équations linéaires et homogènes compatibles, dont on ne peut d'ailleurs tirer que $n - 1$ rapports $c_{i1} = a_{i1}/a_{11}$; le premier coefficient reste indéterminé et peut être choisi arbitrairement : $a_{11} = C$. Le premier mode d'instabilité est alors

$$\tilde{v}_1 = C(\phi_1 + c_{21}\phi_2 + \dots + c_{n1}\phi_n)$$

On pourrait rechercher de même les modes supérieurs.

22.6 Exercices

22.6.1 Un système mécanique est formé d'une poutre, d'une barre et d'un ressort de translation, comme l'indique la figure. Ces pièces sont supposées sans poids; la poutre et la barre sont admises indéformables; seule la déformabilité du ressort est considérée ($k_{tra} = 5 \text{ kN/m}$). Le système est au repos pour $\alpha = 60^\circ$. On le soumet à une force $Q = 2 \text{ kN}$ verticale au point A.

- 1) Ecrire l'énergie potentielle totale Π du système en fonction de α .
- 2) En déduire les positions d'équilibre possibles et étudier la nature de ces équilibres.
- 3) Tracer la courbe $\Pi(\alpha)$ en se limitant à l'intervalle $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

22.6.2 Employer le principe de Rayleigh pour calculer la force critique de la colonne encastree.

- 1) Dessiner le mode d'instabilité.
- 2) Utiliser la déformée $v = 1 - \cos(\pi x/2L)$; que peut-on en conclure?
- 3) Essayer une déformée polynomiale aussi simple que possible.
- 4) Essayer une déformée due à une charge transversale, par exemple une force concentrée à l'extrémité libre.
- 5) Essayer une cubique à deux paramètres (Ritz).

22.6.3 Utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz-Timoshenko pour trouver la charge critique d'une poutre simple soumise à deux forces axiales F .

- 1) Dessiner le mode de flambement.
- 2) Essayer une sinusoïde simple.
- 3) Essayer la combinaison de deux sinusoïdes $v = a \sin(\pi x/L) + b \sin(2\pi x/L)$; justifier ce choix.

Note : la solution exacte est $F_{cr} = 6,435 EI/L^2$.

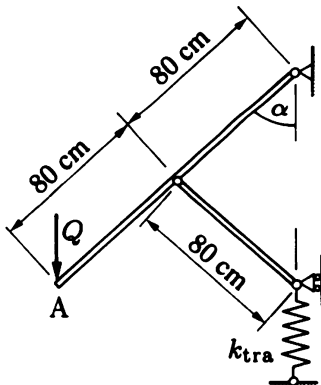


Fig. Ex. 22.6.1

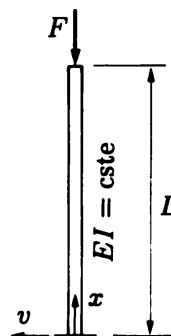


Fig. Ex. 22.6.2

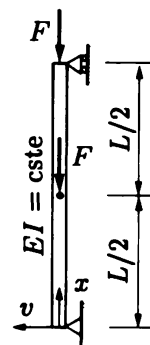


Fig. Ex. 22.6.3

22.6.4 Une structure est composée d'une colonne encastree, assurant la stabilité d'ensemble, et de poutres et colonnes bi-articulées.

- 1) Dessiner le mode d'instabilité.
- 2) Calculer F_{cr} par Rayleigh.
- 3) En déduire la longueur de flambement L_K .
- 4) Comparer avec la solution exacte (ex. 20.6.9).

22.6.5 La colonne AB d'une poutre coudée ABC est soumise à compression par la force F .

- 1) Dessiner le mode d'instabilité.
- 2) Employer la méthode énergétique pour calculer la force critique approximative (utiliser une courbe simple).
- 3) La force critique exacte est $F_{cr} = 1,82 EI/L^2$; le résultat précédent vérifie-t-il le principe de Rayleigh ?
- 4) Entre quelles limites extrêmes la longueur de flambement L_K se situe-t-elle ? Calculer sa valeur exacte.

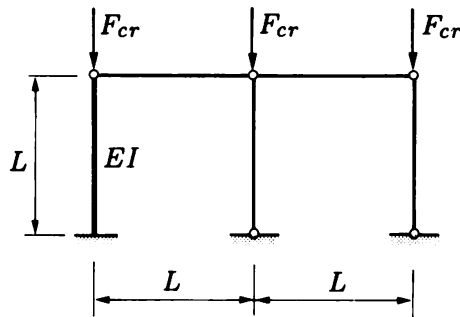


Fig. Ex. 22.6.4

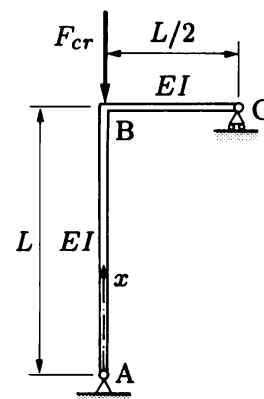


Fig. Ex. 22.6.5

22.7 Lexique

Equilibre :	Nature de l'équilibre	Π	$\delta^2 \Pi$	Le corps, si on l'écarte de sa position d'équilibre
	• stable	augmente	> 0	y revient
	• indifférent	ne varie pas	$= 0$	reste déplacé
	• instable	diminue	< 0	s'en écarte davantage

Instabilité :

Configuration primaire (Ω^1)	Configuration en équilibre stable ($\delta^2 \Pi > 0$).
Equilibre critique	Etat pour lequel l'équilibre cesse d'être stable ou cesse d'être unique.
Configuration secondaire (Ω^2)	Configuration d'équilibre (stable ou, le plus souvent, instable) au-delà de l'équilibre critique.
Charge ou multiplicateur critique (λ_{cr})	Niveau de charge correspondant à l'équilibre critique.
Divergence	Passage progressif de Ω^1 à Ω^2 (allures voisines pour Ω^1 et Ω^2).
Bifurcation	Simultanéité de Ω^1 et Ω^2 (allures différentes pour Ω^1 et Ω^2).
Point limite, point de bifurcation	Points associés à l'équilibre critique en divergence, en bifurcation.
Instabilité linéaire	Admettre la linéarisation géométrique pour Ω^1 , d'où bifurcation seule possible.

Critère énergétique de l'instabilité	$\delta^2 \Pi[u_{cr}] = 0 = \text{minimum, d'où état d'équilibre critique ;}$ u_{cr} : mode d'instabilité de Ω^2 (par rapport à Ω^1).
Principe de Rayleigh (instabilité linéaire)	$\lambda_{cr}[u_{cr}] < \tilde{\lambda}_{cr}[\tilde{u}_{cr}]$; u_{cr} : mode instable exact ; \tilde{u}_{cr} : mode instable approché (compatible avec les appuis).
Discrétisation par Ritz	$\Delta_{sta} = 0$; déterminant de stabilité.

22.8 Annexe

Lorsqu'on utilise comme déformées des fonctions où interviennent des sinus et cosinus, on intégrera en utilisant les formules classiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 \cos^2 a &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2a) & 2 \cos a \cos b &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\
 \sin^2 a &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2a) & 2 \sin a \sin b &= \cos(a - b) - \cos(a + b) \\
 & & 2 \sin a \cos b &= \sin(a + b) + \sin(a - b)
 \end{aligned}$$

23. Annexes

23.1 Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux

Généralités

Les propriétés mécaniques des matériaux solides sont généralement déterminées par des expériences normalisées, exécutées sur des machines spéciales dans un laboratoire d'essais des matériaux : essais de traction, compression, flexion, torsion ou essais sous sollicitations composées ; ces essais sont effectués à force imposée ou déplacement imposé, de manière statique (sollicitation lentement croissante), par choc ou fatigue, à température ambiante, basse ou élevée, sous courte ou longue durée, etc.

Les valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques des différents matériaux courants renseignés ici sont relatives à des essais statiques de traction et compression de courte durée, exécutés à une température d'environ 20 °C.

Le tableau 23.1 résume les propriétés physiques et mécaniques des principaux métaux et alliages.

Le tableau 23.2 donne les caractéristiques mécaniques en traction et compression d'une série d'autres matériaux solides, naturels ou artificiels⁽¹⁾.

Tableau 23.1 – Remarques

Les valeurs des limites d'élasticité (σ_e ou $\sigma_{0,2}$) et des résistances à la traction (σ_t) des métaux et alliages sont avant tout des ordres de grandeur, car ces propriétés mécaniques sont très sensibles aux divers traitements mécaniques (laminage, forgeage, etc.) ou thermiques (trempe, recuit, etc.) que peut subir le métal ou l'alliage de base. Les caractéristiques mécaniques restent valables jusqu'à une température d'environ 100 °C ; au-delà on observe une forte dépendance de toutes les caractéristiques vis-à-vis de la température et on doit, le plus souvent, prendre en compte le fluage.

⁽¹⁾ Cette section s'inspire directement de l'ouvrage de Ch. Massonnet et S. Cescotto, *Mécanique des matériaux* (voir la bibliographie).

Tableau 23.1 Valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques des principaux métaux et alliages.

Métaux	Masse volumique ρ [kg/m ³]	Module d'élasticité longitudinale E [kN/cm ²]	Coefficient de Poisson ν	Limite d'élasticité σ_e ou $\sigma_{0,2}$ [kN/cm ²]	Résistance à la traction ou contrainte de rupture ⁽¹⁾ σ_t [kN/cm ²]	Dilatation de rupture ⁽¹⁾ ε_5 [%]	Coefficient de dilatation thermique linéaire α [10 ⁻⁶ /°C]
Acier doux (S235 ou Fe E 235) ⁽³⁾	7 850	20 500	0,30	25,5 ⁽²⁾	40 ⁽²⁾	40	12
Acier faiblement allié (S355 ou Fe E 355) ⁽³⁾	7 850	20 500	0,30	38,5 ⁽²⁾	56 ⁽²⁾	30	12
Acier à grain fin (S460 ou Fe E 460) ⁽³⁾	7 850	20 500	0,30	~ 50 ⁽²⁾	~ 60 ⁽²⁾	17	12
Acier pour câble	7 850	20 500	0,30	150	170	6	12
Fonte grise en traction/compression	7 200	10 000	0,25	—	20/80	1	10
Aluminium pur laminé recuit	2 700	6 500	0,33	5	8	30	24
5083 H111 (Al-Mg 4,5 Mn)	2 660	7 000	0,33	17,5	32	12	24
Alliages 6061 T6 (Al-MgSi 0,5)	2 700	7 000	0,33	25	28	10	23
d'aluminium 7020 T6 (Al-MgZn 1)	2 780	7 000	0,33	32	39	9	23
7075 T6 (Al-ZnMgCu)	2 800	7 300	0,33	57	63	9	23
Cuivre pur recuit	8 930	12 000	0,35	4	21	50	17
Laiton (33 % Zn) laminé recuit	8 350	10 000	0,34	10	32	55	18
Bronze (10 % Sn) coulé brut	8 800	10 000	0,30	12	25	15	18
Zinc laminé à chaud recuit	7 100	8 500	0,25	6	12	55	26
Plomb laminé ou extrudé	11 350	1 700	0,45	1	1,5	100	29
Titane laminé/recuit	4 500	11 000	0,25	77/43	98/53	10/25	8,5

(1) Observée en traction ; ε_5 est la dilatation de rupture d'une base de mesure d'environ 5 diamètres.

(2) Les valeurs minimales garanties à l'état de livraison de σ_e/σ_t selon les normes européennes EN 10 025 et EN 10 113 sont respectivement, pour les nuances S235, S355 et S460 : 23, 5/36, 35, 5/51 et 46/55 kN/cm². On observe en général une décroissance de la limite d'élasticité des produits laminés avec l'épaisseur du produit.

(3) S : désignations européennes ; Fe E : désignations suisses (SIA)

On peut constater que le coefficient de Poisson ν des divers métaux et alliages reste voisin de 0,3 (sauf pour le plomb).

Le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν sont les mêmes en traction et compression. La limite d'élasticité en compression (σ_e ou $\sigma_{0,2}$) est pratiquement égale à la limite correspondante mesurée en traction, sauf pour la fonte grise.

Les caractéristiques de rupture (σ_t et ε_5) des métaux ductiles sont déterminées en traction. En compression, les éprouvettes ne se rompent généralement pas, mais s'écrasent plastiquement en gonflant dans le sens transversal, de sorte qu'il est impossible de déterminer une résistance et une dilatation de rupture en compression.

Tableau 23.2 – Remarques

Les valeurs de toutes les caractéristiques physiques et mécaniques ne sont qu'une indication des ordres de grandeur car, du fait de l'influence de divers facteurs (température, degré hygrométrique, procédé de fabrication, milieu naturel, etc.), les dispersions observées sont grandes.

Tableau 23.2 Valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques de quelques matériaux solides non métalliques.

Matériaux	Masse volumique ρ [kg/m ³]	Module d'élasticité longitudinale E [kN/cm ²]	Coefficient de Poisson ν	Résistance ou contrainte de rupture en		Coefficient de dilatation thermique linéaire α [10 ⁻⁶ /°C]
				traction σ_t [kN/cm ²]	compression σ_c [kN/cm ²]	
Sapin sec ⁽¹⁾	550	1 050	0,46 ⁽²⁾	8	4	4
Chêne sec ⁽¹⁾	800	1 250	0,45 ⁽²⁾	9	5	5
Grès quartzeux compact	2 300	3 000	0,2	0,9	10	10
Roche calcaire compacte	2 750	7 000	0,2	1	12	8
Granit	2 700	5 500	0,2	1,5	18	7,5
Mortier de ciment	2 400	2 500	0,2	0,2	3,5	12
Béton de maigre	2 300	2 500	0,18 ⁽²⁾	0,1	1,5	12
Béton de bon	2 300	3 500	0,18 ⁽²⁾	0,35	4	12
ciment à haute résistance	2 300	4 000	0,18 ⁽²⁾	0,4	6	12
Brique de bonne qualité	1 800	1 000	0,15	0,3	2,5	5
Verre ordinaire	2 500	7 000	0,22	6	45	8
Caoutchouc dur	1 200	5	0,50	5	—	80
Bakélite (polypropylène)	920	100	0,37	3,5	—	100
Plexiglas (résine acrylique)	1 180	300	0,36	6	—	90
Résine époxy	1 200	300	0,40	7	10	55

(1) Séché à l'air jusqu'à un degré d'humidité de 12 à 15 %. Toutes les propriétés des bois dépendent fortement du degré hygrométrique. La résistance des bois diminue avec l'humidité, mais peut être améliorée par une imprégnation d'huile. La résistance des pièces en bois décroît avec leur épaisseur.

(2) Mesuré en compression. Le coefficient de Poisson du béton en compression vaut environ 0,12. On adopte souvent la valeur moyenne $\nu = 0,15$.

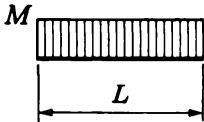
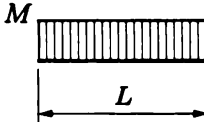


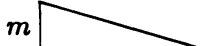
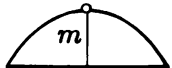
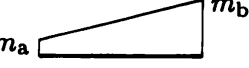
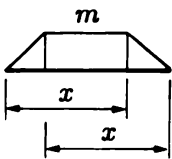
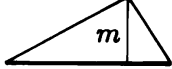
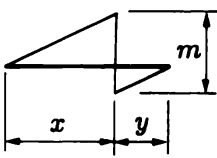
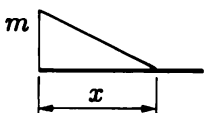

Le verre excepté, tous les matériaux sont plus ou moins non linéaires dans la phase élastique de leur diagramme (σ, ε) . Certains de ces matériaux manifestent, de plus, du fluage après mise en charge et déformation subséquente instantanée. Pour chaque matériau, le module d'élasticité E est le rapport σ/ε obtenu lors de faibles sollicitations de courte durée, soit, pratiquement, le module d'élasticité tangent à l'origine du diagramme (σ, ε) .

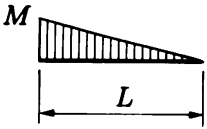
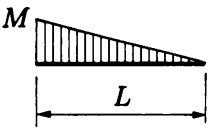
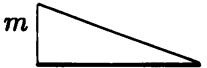

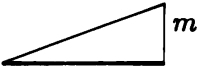



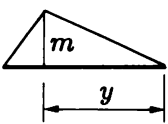
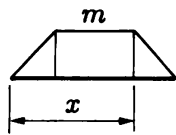
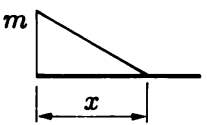
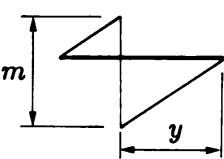
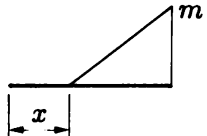
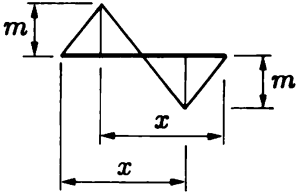


Les caractéristiques du bois sont relatives à du bois sans défaut (nœuds, etc.) sollicité parallèlement à ses fibres.

On observe que la résistance à la traction des roches, bétons de ciment et briques est de l'ordre du dixième de leur résistance à la compression.

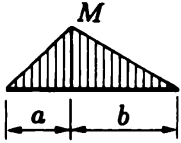
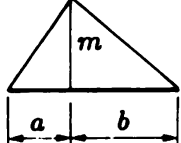
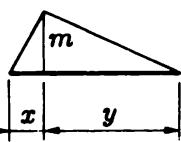
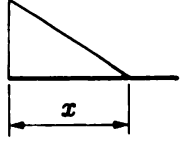

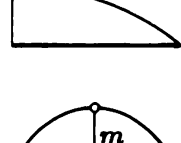
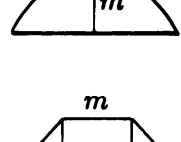
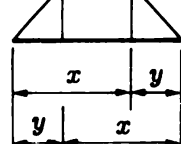
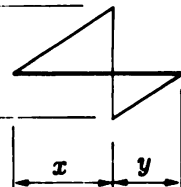
23.2 Tableaux de $\int_0^L Mm dx$

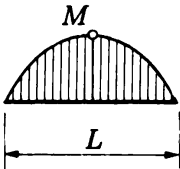
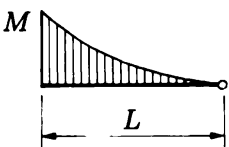
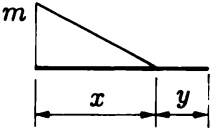
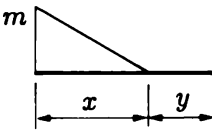
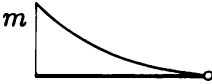
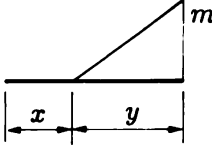
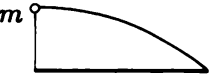
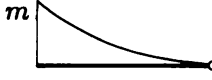
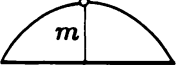
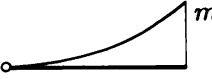
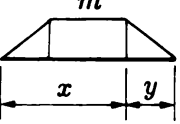

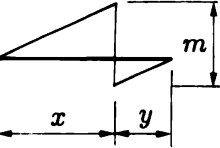
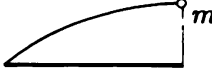
Les fonctions M (en tête des colonnes) et m doivent être considérées avec leur signe relatif. Les courbes sont des paraboles dont le sommet est indiqué par un petit cercle.

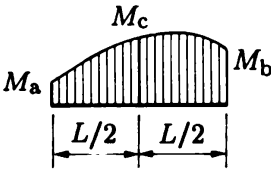
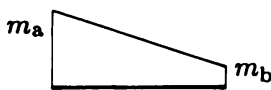
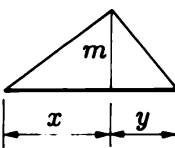
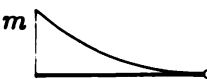

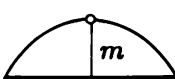
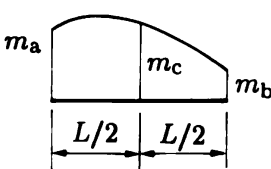
			
	MmL		$\frac{2}{3} MmL$
	$\frac{1}{2} MmL$		$\frac{2}{3} MmL$
	$\frac{1}{2} M(m_a + m_b)L$		Mmx
	$\frac{1}{2} MmL$		$\frac{1}{2} Mm(x - y)$
	$\frac{1}{2} Mmx$		
	$\frac{1}{3} MmL$		

			
	$\frac{1}{3} MmL$		$\frac{5}{12} MmL$
	$\frac{1}{6} MmL$		$\frac{1}{4} MmL$
	$\frac{1}{6} M(2m_a + m_b)L$		$\frac{1}{3} MmL$
	$\begin{cases} \frac{1}{6} Mm(L + y) \\ \text{si } y = \frac{L}{2} : \frac{1}{4} MmL \end{cases}$		$\frac{1}{2} Mmx$
	$\frac{1}{6} Mm \left(3 - \frac{x}{L} \right) x$		$\begin{cases} \frac{1}{6} Mm \left(1 - 3 \frac{y^2}{L^2} \right) L \\ \text{si } y = \frac{L}{2} : \frac{1}{24} MmL \end{cases}$
	$\frac{1}{6} Mm \frac{x^2}{L}$		$\frac{1}{6} Mmx$
	$\frac{1}{4} MmL$		
	$\frac{1}{12} MmL$		

	<p>M_a et M_b de même signe</p> <p>M_a et M_b de signe contraire</p>
	$\frac{1}{3} (M_a^2 + M_a M_b + M_b^2) L$
	$\frac{1}{6} (M_a(2m_a + m_b) + M_b(m_a + 2m_b)) L$
	$\begin{cases} \frac{1}{6} m (M_a(L + y) + M_b(L + x)) \\ \text{si } x = y = \frac{L}{2} : \frac{1}{4} m (M_a + M_b) L \end{cases}$
	$\frac{1}{2} m \left(M_a - \frac{x}{3L} (M_a - M_b) \right) x$
	$\frac{1}{12} m (3M_a + M_b) L$
	$\frac{1}{12} m (5M_a + 3M_b) L$
	$\frac{1}{3} m (M_a + M_b) L$
	$\frac{1}{2} m (M_a + M_b) x$
	$\begin{cases} \frac{1}{6} m \left(M_a \left(1 - 3 \frac{y^2}{L^2} \right) - M_b \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} \right) \right) L \\ \text{si } x = y = \frac{L}{2} : \frac{1}{24} m (M_a - M_b) L \end{cases}$
	$\frac{1}{6} m (M_a - M_b) x$

	$a + b = L$
	$\frac{1}{3} MmL$
	$\begin{cases} \text{pour } x \leq a : \frac{1}{6} Mm \left(2 - \frac{(a-x)^2}{ay} \right) L \\ \text{pour } x \geq a, \text{ intervertir} \end{cases}$
	$\begin{cases} \text{pour } x \leq a : \frac{1}{6} Mm \frac{x^2}{a} \\ \text{pour } x \geq a : \frac{1}{6} Mm \left(\frac{x}{b} \left(3 - \frac{x}{L} \right) - \frac{a}{b} \left(3 - \frac{a}{x} \right) \right) L \end{cases}$
	$\frac{1}{12} Mm \left(L + b \left(1 + \frac{b}{L} \right) \right)$
	$\frac{1}{12} Mm \left(5L - a \left(1 + \frac{a}{L} \right) \right)$
	$\begin{cases} \frac{1}{3} Mm \left(L + \frac{ab}{L} \right) \\ \text{si } a = b = \frac{L}{2} : \frac{5}{12} MmL \end{cases}$
	$\begin{cases} \text{pour } x \leq a : \frac{1}{6} Mm \left(3 - \frac{y^2}{ab} \right) L \\ \text{pour } x \geq a : \frac{1}{6} Mm \left(\frac{3xy - a^2}{yb} \right) L \end{cases}$
	$\begin{cases} \text{pour } y \leq a \leq x : -\frac{1}{6} Mm \left(L + b - 3\frac{x^2}{a} \right) \\ \text{pour } a \leq y : \frac{1}{6} Mm \left(L + a - 3\frac{y^2}{b} \right) \end{cases}$

			
	$\frac{1}{3} Mm \left(1 + \frac{y}{L}\right) \frac{x^2}{L}$		$\frac{1}{12} Mm \left(2 + \left(1 + \frac{y}{L}\right)^2\right) x$
	$\frac{1}{5} MmL$		$\frac{1}{12} Mm \left(\frac{y}{L}\right)^3 L$
	$\frac{7}{15} MmL$		$\frac{1}{5} MmL$
	$\frac{8}{15} MmL$		$\frac{1}{30} MmL$
	$\frac{2}{3} Mm \left(1 + \frac{xy}{L^2}\right) x$		$\frac{3}{10} MmL$
	$\frac{1}{3} Mm \left(1 + 2\frac{xy}{L^2}\right) (x - y)$		$\frac{2}{15} MmL$

	
	$\frac{1}{6} (M_a m_a + 2M_c (m_a + m_b) + M_b m_b) L$
	$\frac{1}{6} m \left(M_a \frac{y^2}{L} + 2M_c \frac{L^2 + xy}{L} + M_b \frac{x^2}{L} \right)$
	$\frac{1}{60} m (9M_a + 12M_c - M_b) L$
	$\frac{1}{60} m (11M_a + 28M_c + M_b) L$
	$\frac{1}{15} m (M_a + 8M_c + M_b) L$
	$\frac{1}{30} (4M_a m_a - M_a m_b + 2M_a m_c - M_b m_a + 4M_b m_b + 2M_b m_c + 2M_c m_a + 2M_c m_b + 16M_c m_c) L$

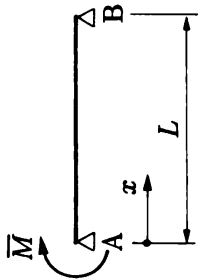
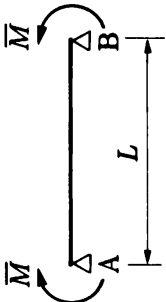
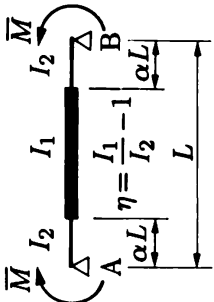
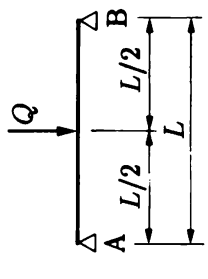
23.3 Réactions d'appui, moments fléchissants, flèches et angles de rotation des poutres à une travée

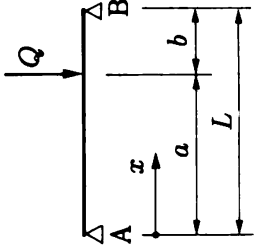
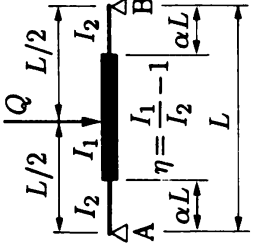
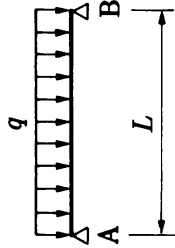
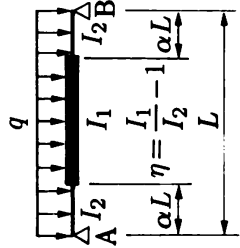
Convention de signe

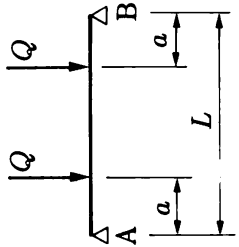
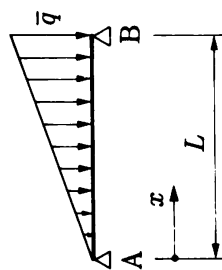
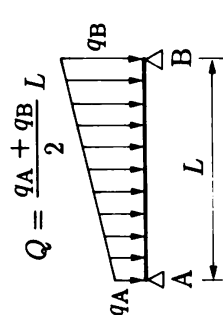
- Réaction d'appui R : positive vers le haut.
Moment fléchissant M : positif s'il tend les fibres inférieures.
Flèche v : positive vers le bas.
Angle de rotation θ : positif dans le sens trigonométrique.

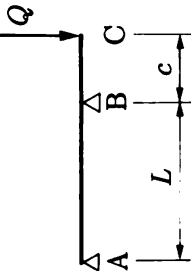
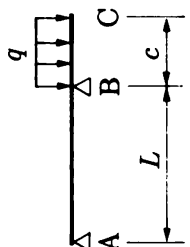
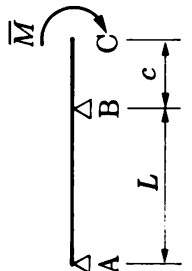
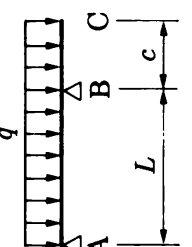
Remarques

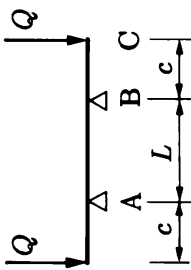
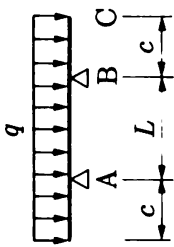
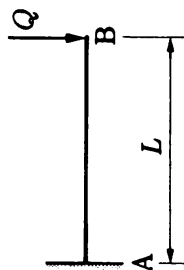
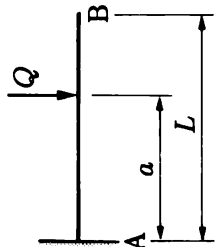
- La déformation par effort tranchant n'est pas prise en compte.
Les poutres sont prismatiques (éventuellement par tronçons).

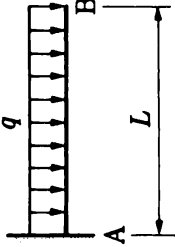
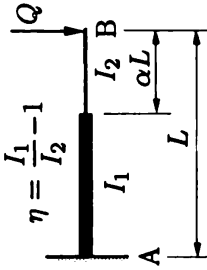
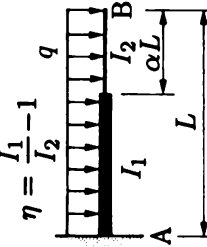
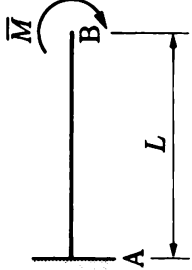
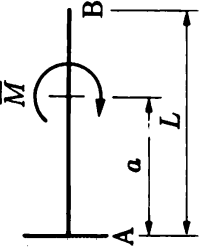
Poutre à deux appuis simples					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
	$-R_A = R_B = \frac{\bar{M}}{L}$	$M_A = \bar{M}$	$v_{\max} = \frac{\bar{M} L^2}{9\sqrt{3} EI}$ en $x = L - L/\sqrt{3}$ $v_{(L/2)} = \frac{\bar{M} L^2}{16 EI}$	$\theta_A = -\frac{\bar{M} L}{3 EI}$ $\theta_B = -\frac{\theta_A}{2} = \frac{\bar{M} L}{6 EI}$	
	$R_A = R_B = 0$	$M_A = M_B = M_{(L/2)} = \bar{M}$	$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{\bar{M} L^2}{8 EI}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{\bar{M} L}{2 EI}$	
	$R_A = R_B = 0$	$M_A = M_B = M_{(L/2)} = \bar{M}$	$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{\bar{M} L^2}{8 EI_1} (1 + 4\eta\alpha^2)$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{\bar{M} L}{2 EI_1} (1 + 2\eta\alpha)$	
	$R_A = R_B = \frac{Q}{2}$	$M_{\max} = M_Q = \frac{QL}{4}$	$v_{\max} = v_Q = \frac{QL^3}{48 EI}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{QL^2}{16 EI}$	

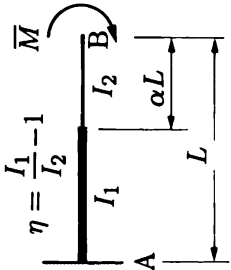
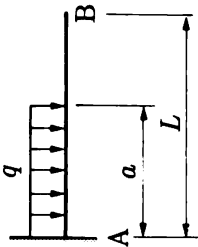
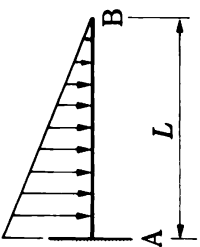
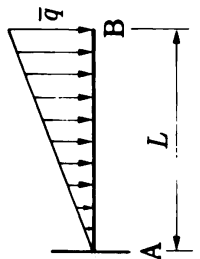
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = \frac{Qb}{L}$ $R_B = \frac{Qa}{L}$	$M_{\max} = M_Q = \frac{Qab}{L}$	<p>pour $a > b$:</p> $v_{\max} = \frac{Qb(L^2 - b^2)\sqrt{L^2 - b^2}}{9\sqrt{3} EIL}$ <p>en $x = \sqrt{(L^2 - b^2)/3}$</p> $v_Q = \frac{Qa^2b^2}{3 EIL}$	$\theta_A = -\frac{Qab(L+b)}{6 EIL}$ $\theta_B = \frac{Qab(L+a)}{6 EIL}$
	$R_A = R_B = \frac{Q}{2}$	$M_{\max} = M_Q = \frac{QL}{4}$	$v_{\max} = v_Q = \frac{QL^3}{48 E I_1} (1 + 8\eta\alpha^3)$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{QL^2}{16 E I_1} (1 + 4\eta\alpha^2)$
	$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$	$M_{\max} = M_{(L/2)} = \frac{qL^2}{8}$	$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{5qL^4}{384 E I}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24 E I}$
	$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$	$M_{\max} = M_{(L/2)} = \frac{qL^2}{8}$	$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{5qL^4}{384 E I_1} (1 + 12,8\eta\alpha^3 - 9,6\eta\alpha^4)$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24 E I_1} (1 + 6\eta\alpha^2 - 4\eta\alpha^3)$

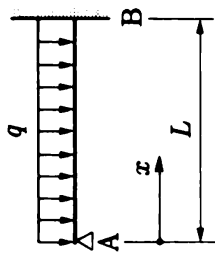
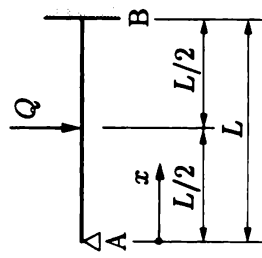
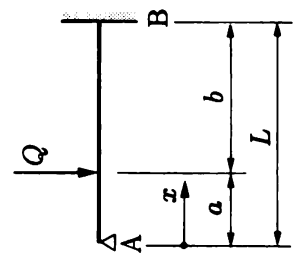
Poutre à deux appuis simples					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
	$R_A = R_B = Q$	$M_{\max} = M_Q = Qa$	$v_Q = \frac{Qa^2(3L - 4a)}{6EI}$ $v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{Qa(3L^2 - 4a^2)}{24EI}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{Qa(L - a)}{2EI}$	
	$R_A = \frac{\bar{q}L}{6}$ $R_B = \frac{\bar{q}L}{3}$	$M_{\max} = \frac{\bar{q}L^2}{9\sqrt{3}}$ en $x = L/\sqrt{3}$	$v_{\max} = \frac{\bar{q}L^4}{153,4EI}$ $= 0,00652 \frac{\bar{q}L^4}{EI}$ en $x = 0,51933 L$	$\theta_A = -\frac{7\bar{q}L^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{8\bar{q}L^3}{360EI} = \frac{\bar{q}L^3}{45EI}$	
	$R_A = \frac{(2q_A + q_B)L}{6}$ $R_B = \frac{(q_A + 2q_B)L}{6}$	$0,125 QL \leq M_{\max} \leq 0,128 QL$	$0,01302 \frac{QL^3}{EI} \leq v_{\max} \leq 0,01304 \frac{QL^3}{EI}$	$0,03889 \frac{QL^2}{EI} \leq \theta_B \leq 0,4444 \frac{QL^2}{EI}$ idem pour $ \theta_A $	

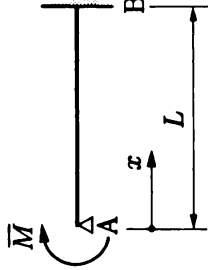
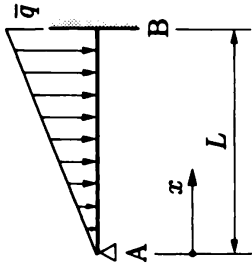
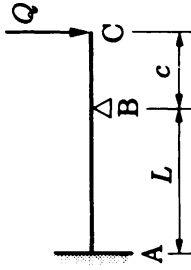
Poutre à deux appuis simples avec porte-à-faux					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
	$R_A = -\frac{Qc}{L}$ $R_B = \frac{Q(L+c)}{L}$	$M_B = -Qc$	$v_C = \frac{Qc^2(L+c)}{3EI}$	$\theta_A = \frac{QcL}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{QcL}{3EI}$ $\theta_C = -\frac{Qc(2L+3c)}{6EI}$	
	$R_A = -\frac{qc^2}{2L}$ $R_B = \frac{qc(2L+c)}{2L}$	$M_B = -\frac{qc^2}{2}$	$v_C = \frac{qc^3(4L+3c)}{24EI}$	$\theta_A = \frac{qc^2L}{12EI}$ $\theta_B = -\frac{qc^2L}{6EI}$ $\theta_C = -\frac{qc^2(L+c)}{6EI}$	
	$R_A = -\frac{\bar{M}}{L}$ $R_B = \frac{\bar{M}}{L}$	$M_B = -\bar{M}$	$v_C = \frac{\bar{M}c(2L+3c)}{6EI}$	$\theta_A = \frac{\bar{M}L}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{\bar{M}L}{3EI}$ $\theta_C = -\frac{\bar{M}(L+3c)}{3EI}$	
	$R_A = \frac{q(L^2 - c^2)}{2L}$ $R_B = \frac{q(L+c)^2}{2L}$	$M_B = -\frac{qc^2}{2}$	$v_C = \frac{qc(L+c)(3c^2 + cL - L^2)}{24EI}$	$\theta_A = -\frac{qL(L^2 - 2c^2)}{24EI}$ $\theta_B = \frac{qL(L^2 - 4c^2)}{24EI}$ $\theta_C = \frac{q(L^3 - 4c^2L - 4c^3)}{24EI}$	

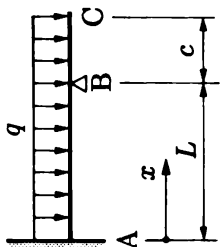
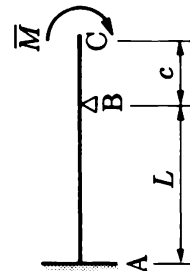
Poutre à deux appuis simples avec porte-à-faux				
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = R_B = Q$	$M_A = M_B = -Qc$	$v_C = \frac{Qc^2(3L+2c)}{6EI}$ $v_{(L/2)} = -\frac{QcL^2}{8EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{QcL}{2EI}$ $\theta_C = -\frac{Qc(L+c)}{2EI}$
	$R_A = R_B = \frac{q(L+2c)}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{qc^2}{2}$ $M_{(L/2)} = \frac{q(L^2-4c^2)}{8}$	$v_C = \frac{qc(3c^3+6c^2L-L^3)}{24EI}$ $v_{(L/2)} = \frac{qL^2(5L^2-24c^2)}{384EI}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{qL(L^2-6c^2)}{24EI}$ $\theta_C = \frac{q(L^3-6c^2L-4c^3)}{24EI}$
Poutre encastree				
	$R_A = Q$	$M_A = -QL$	$v_B = \frac{QL^3}{3EI}$	$\theta_B = -\frac{QL^2}{2EI}$
	$R_A = Q$	$M_A = -Qa$	$v_B = \frac{Qa^2(3L-a)}{6EI}$	$\theta_B = -\frac{Qa^2}{2EI}$

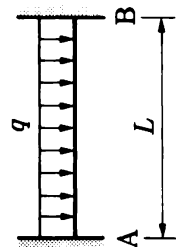
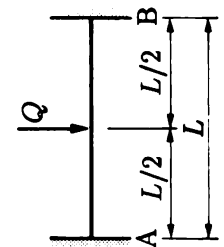
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = qL$	$M_A = -\frac{qL^2}{2}$	$v_B = \frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI}$
	$R_A = Q$	$M_A = -QL$	$v_B = \frac{QL^3}{3EI_1} (1 + \eta\alpha^3)$	$\theta_B = -\frac{QL^2}{2EI_1} (1 + \eta\alpha^2)$
	$R_A = qL$	$M_A = -\frac{qL^2}{2}$	$v_B = \frac{qL^4}{8EI_1} (1 + \eta\alpha^4)$	$\theta_B = -\frac{qL^3}{6EI_1} (1 + \eta\alpha^3)$
	$R_A = 0$	$M_A = -\bar{M}$	$v_B = \frac{\bar{M}L^2}{2EI}$	$\theta_B = -\frac{\bar{M}L}{EI}$
	$R_A = 0$	$M_A = -\bar{M}$	$v_B = \frac{\bar{M}a(2L - a)}{2EI}$	$\theta_B = -\frac{\bar{M}a}{EI}$

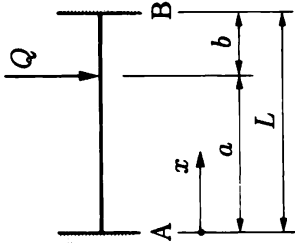
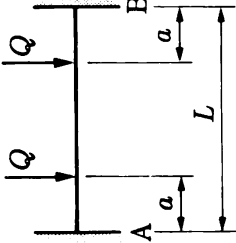
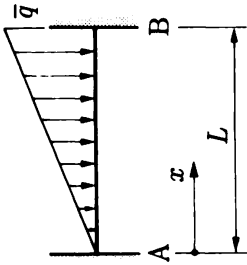
Poutre encastrée					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
 <p> $\eta = \frac{I_1}{I_2} - 1$ \bar{M} I_2 I_1 αL L A B </p>	$R_A = 0$	$M_A = -\bar{M}$	$v_B = \frac{\bar{M} L^2}{2EI_1} (1 + \eta \alpha^2)$	$\theta_B = -\frac{\bar{M} L}{EI_1} (1 + \eta \alpha)$	
 <p> q a L A B </p>	$R_A = qa$	$M_A = -\frac{qa^2}{2}$	$v_B = \frac{qa^3(4L - a)}{24EI}$	$\theta_B = -\frac{qa^3}{6EI}$	
 <p> \bar{q} L A B </p>	$R_A = \frac{\bar{q} L}{2}$	$M_A = -\frac{\bar{q} L^2}{6}$	$v_B = \frac{\bar{q} L^4}{30EI}$	$\theta_B = -\frac{\bar{q} L^3}{24EI}$	
 <p> \bar{q} L A B </p>	$R_A = \frac{\bar{q} L}{2}$	$M_A = -\frac{\bar{q} L^2}{3}$	$v_B = \frac{11 \bar{q} L^4}{120EI}$	$\theta_B = -\frac{\bar{q} L^3}{8EI}$	

Poutre encastree appuyee					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
	$R_A = \frac{3}{8} qL$ $R_B = \frac{5}{8} qL$	$M_B = -\frac{qL^2}{8}$ $M_{\max}^+ = \frac{9qL^2}{128}$ en $x = 3L/8$	$v_{\max} \cong \frac{qL^4}{185 EI}$ en $x = 0,4215L$	$\theta_A = -\frac{qL^3}{48 EI}$	
	$R_A = \frac{5}{16} Q$ $R_B = \frac{11}{16} Q$	$M_B = -\frac{3}{16} QL$ $M_Q = \frac{5}{32} QL$	$v_Q = \frac{7QL^3}{768 EI}$ $v_{\max} = \frac{QL^3}{48\sqrt{5}EI}$ en $x = L/\sqrt{5}$	$\theta_A = -\frac{QL^2}{32 EI}$	
	$R_A = \frac{Qb^2(3L-b)}{2L^3}$ $R_B = \frac{Qa(3L^2-a^2)}{2L^3}$	$M_B = -\frac{Qa(L^2-a^2)}{2L^2}$ $M_Q = \frac{Qab^2(3L-b)}{2L^3}$	$v_Q = \frac{Qa^2b^3(3L+a)}{12 EIL^3}$ $v_{\max} = v_Q \text{ quand } a = (\sqrt{2}-1)L = 0,414 L$ si $a \leq 0,414 L$: $v_{\max} = \frac{Qab^2}{6EI} \sqrt{\frac{a}{2L+a}}$ en $x = L\sqrt{a/(2L+a)}$ si $a \geq 0,414 L$: $v_{\max} = \frac{Qa}{3EI} \frac{(L^2-a^2)^3}{(3L^2-a^2)^2}$ en $x = L(L^2+a^2)/(3L^2-a^2)$	$\theta_A = -\frac{Qab^2}{4EIL}$	

Poutre encastrée appuyée					
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation	
	$R_A = -\frac{3}{2} \frac{\bar{M}}{L}$ $R_B = \frac{3}{2} \frac{\bar{M}}{L}$	$M_A = \bar{M}$ $M_B = -\frac{1}{2} \bar{M}$	$v_{\max} = \frac{\bar{M} L^2}{27 EI}$ en $x = L/3$	$\theta_A = -\frac{\bar{M} L}{4 EI}$	
	$R_A = \frac{\bar{q} L}{10}$ $R_B = \frac{2 \bar{q} L}{5}$	$M_B = -\frac{\bar{q} L^2}{15}$ $M_{\max}^+ = \frac{\bar{q} L^2}{15 \sqrt{5}}$ $\approx \frac{3 \bar{q} L^2}{100}$ en $x = L/\sqrt{5}$	$v_{\max} = \frac{2 \bar{q} L^4}{375 \sqrt{5} EI}$ $\approx \frac{\bar{q} L^4}{420 EI}$ en $x = L/\sqrt{5}$	$\theta_A = -\frac{\bar{q} L^3}{120 EI}$	
Poutre encastrée appuyée avec porte-à-faux					
	$R_A = -\frac{3 Q c}{2 L}$ $R_B = \frac{Q(2L + 3c)}{2L}$	$M_A = \frac{Q c}{2}$ $M_B = -Q c$	$v_C = \frac{Q c^2 (3L + 4c)}{12 EI}$	$\theta_B = -\frac{Q c L}{4 EI}$ $\theta_C = -\frac{Q c (L + 2c)}{4 EI}$	

Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = \frac{q(5L^2 - 6c^2)}{8L}$ $R_B = \frac{q(3L^2 + 8cL + 6c^2)}{8L}$	$M_A = -\frac{q(L^2 - 2c^2)}{8}$ $M_B = -\frac{qc^2}{2}$ $M_{\max}^+ = \frac{9qL^2}{128} + \frac{qc^2}{32} \left(9\frac{c^2}{L^2} - 7 \right)$ en $x = (5L^2 - 6c^2)/8L$	$v_C = \frac{qc(6c^3 + 6c^2L - L^3)}{48EI}$	$\theta_B = \frac{qL(L^2 - 6c^2)}{48EI}$ $\theta_C = \frac{q(L^3 - 6c^2L - 8c^3)}{48EI}$
	$R_A = -\frac{3}{2} \frac{\bar{M}}{L}$ $R_B = \frac{3}{2} \frac{\bar{M}}{L}$	$M_A = \frac{1}{2} \bar{M}$ $M_B = -\bar{M}$	$v_C = \frac{\bar{M}c(L + 2c)}{4EI}$	$\theta_B = -\frac{\bar{M}L}{4EI}$ $\theta_C = -\frac{\bar{M}(L + 4c)}{4EI}$

Poutre bi-encastée				
	$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $M_{\max}^+ = M_{(L/2)} = \frac{qL^2}{24}$	$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{qL^4}{384EI}$	
	$R_A = R_B = \frac{Q}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{QL}{8}$ $M_Q = M_{(L/2)} = \frac{QL}{8}$	$v_Q = \frac{QL^3}{192EI}$	

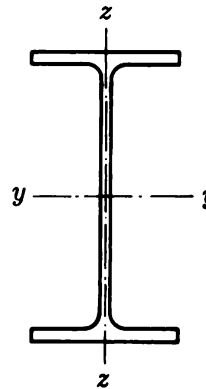
Poutre bi-encastrée				
Cas de charge	Réactions d'appui	Moments fléchissants	Flèches	Angles de rotation
	$R_A = \frac{Q(L-a)^2(L+2a)}{L^3}$ $R_B = \frac{Qa^2(3L-2a)}{L^3}$	$M_A = -\frac{Qa(L-a)^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Qa^2(L-a)}{L^2}$ $M_Q = \frac{2Qa^2(L-a)^2}{L^3}$	$v_Q = \frac{Qa^3(L-a)^3}{3EIL^3}$ <p>si $a > b$:</p> $v_{\max} = \frac{2Qa^3b^2}{3EI(L+2a)^2}$ <p>en $x = 2aL/(L+2a)$</p> <p>si $a < b$:</p> $v_{\max} = \frac{2Qa^2(L-a)^3}{3EI(3L-2a)^2}$ <p>en $x = L^2/(3L-2a)$</p>	
	$R_A = R_B = Q$	$M_A = M_B = -\frac{Qa(L-a)}{L}$ $M_Q = M_{(L/2)} = \frac{Qa^2}{L}$	$v_Q = \frac{Qa^3(2L-3a)}{6EIL}$ $v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{Qa^2(3L-4a)}{24EI}$	
	$R_A = \frac{3\bar{q}L}{20}$ $R_B = \frac{7\bar{q}L}{20}$	$M_A = -\frac{\bar{q}L^2}{30}$ $M_B = -\frac{\bar{q}L^2}{20}$ $M_{\max}^+ = \frac{\bar{q}L^2}{30} \left(3\sqrt{\frac{3}{10}} - 1 \right)$ $\cong \frac{\bar{q}L^2}{46,64}$ <p>en $x = L\sqrt{3/10}$</p>	$v_{\max} = \frac{\bar{q}L^4}{764EI}$ <p>en $x = 0,525L$</p>	

23.4 Module plastique Z de la section droite de quelques profilés laminés

Source : *Tables pour la construction métallique C5*, Centre suisse de la construction métallique, Zurich, 1992.

Attention aux puissances de dix données en tête des colonnes.

IPE
Profilés à
ailes étroites

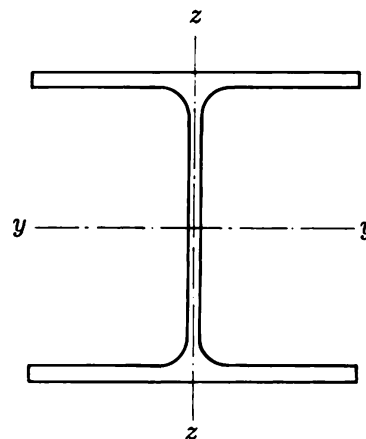


IPE	Z_y [mm ³]	Z_z [mm ³]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$
80	23,2	5,8
100	39,4	9,2
120	60,8	13,6
140	88,4	19,2
160	124	26,1
180	166	34,6
200	220	44,7
220	286	58,0
240	366	74,0
270	484	97,0
300	628	125
330	804	154
360	1020	191
400	1310	229
450	1700	275
500	2200	336
550	2780	401
600	3520	486

HEA	Z_y [mm ³]	Z_z [mm ³]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$
100	83	41,2
120	119	58,9
140	173	84,7
160	246	118
180	324	157
200	430	204
220	568	271
240	744	352
260	920	430
280	1110	518
300	1380	642
320	1630	710
340	1850	756
360	2080	803
400	2560	873
450	3220	966
500	3940	1060
550	4620	1110
600	5360	1160
650	6140	1200
700	7040	1260
800	8700	1310
900	10800	1420
1000	12800	1470

HEB	Z_y [mm ³]	Z_z [mm ³]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$
100	104	51
120	165	81
140	246	120
160	354	170
180	482	231
200	642	306
220	828	394
240	1050	499
260	1280	603
280	1530	718
300	1870	871
320	2140	940
340	2400	986
360	2680	1030
400	3240	1100
450	3980	1200
500	4820	1290
550	5600	1340
600	6420	1390
650	7320	1440
700	8320	1490
800	10220	1550
900	12580	1660
1000	14860	1710

HEA/HEB
Profilés à larges ailes



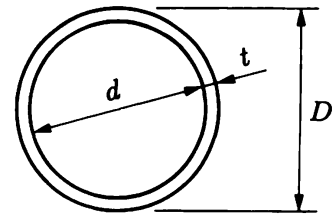
ROR

Tube circulaire

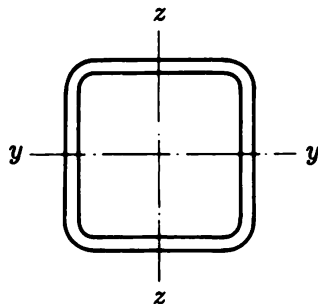
$$Z = \frac{D^3}{6} \left(1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^3 \right) = \frac{D^3 - d^3}{6} = \frac{t}{3} (D^2 + Dd + d^2)$$

Hypothèse du tube à paroi *mince*:

$$Z \cong t d_m^2 \quad \text{avec} \quad d_m = \frac{1}{2} (D + d)$$

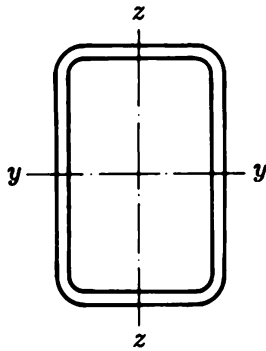
**MSH**

Profils creux carrés



MSH [mm]	Z [mm ³]	MSH [mm]	Z [mm ³]
	× 10 ³		× 10 ³
40·40·4,0	7,55	150·150·5,6	169
50·50·4,0	12,4	6,3	188
60·60·4,0	18,4	8,0	230
70·70·4,0	25,7	10,0	276
5,0	31,0	12,5	326
80·80·3,6	31,1	160·160·6,3	215
4,5	37,8	8,0	265
5,0	41,4	10,0	318
5,6	45,5	12,5	378
90·90·3,6	39,8	180·180·6,3	276
4,5	48,6	8,8	370
5,0	53,3	10,0	411
5,6	58,7	200·200·6,3	345
100·100·4,0	54,7	8,0	426
5,0	66,7	10,0	517
6,3	81,4	220·220·6,3	421
8,0	99,2	8,0	522
10,0	118	10,0	634
110·110·4,0	66,1	12,5	765
5,0	80,7	250·250·7,1	612
6,3	98,5	8,0	683
8,0	120	10,0	833
120·120·4,5	88,2	12,5	1010
5,0	97,0	16,0	1240
6,3	119	260·260·7,1	665
8,0	145	8,8	808
10,0	173	11,0	984
140·140·5,6	149	14,2	1220
6,3	165		
7,1	183		
8,8	219		
10,0	244		

MSH
Profils creux rectangulaire



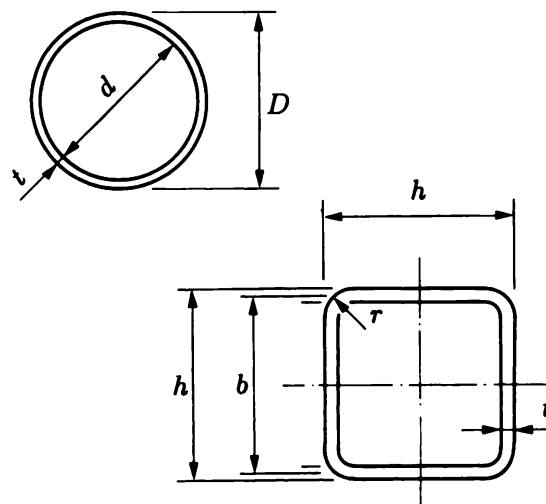
MSH [mm]	Z_y [mm ³]	Z_z [mm ³]	MSH [mm]	Z_y [mm ³]	Z_z [mm ³]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^3$	$\times 10^3$
50·30·4,0	8,72	5,97	160·80·5,0	113	69,7
60·40·4,0	14,0	10,4	6,3	138	84,6
80·40·4,0	22,0	13,3	8,0	167	102
90·50·3,2	24,7	16,3	10,0	198	120
4,0	30,0	19,8	160·90·4,5	110	74,0
5,0	36,3	23,7	5,6	133	89,5
100·50·3,6	32,3	19,7	7,1	163	109
4,0	35,5	21,6	180·100·5,6	170	113
4,5	39,3	23,8	7,1	209	139
5,0	43,0	26,0	200·100·5,6	201	124
5,6	47,2	28,4	6,3	223	137
100·60·3,6	35,8	25,0	8,0	273	167
5,6	52,5	36,4	10,0	327	200
7,1	63,6	43,8	12,5	386	235
120·60·4,0	51,5	31,6	200·120·6,3	247	174
5,0	62,5	38,1	8,0	304	213
6,3	75,7	45,9	10,0	365	255
120·80·5,0	74,0	55,8	220·120·6,3	286	188
6,3	90,1	67,7	8,0	352	231
8,0	109	81,7	10,0	424	277
10,0	129	96,2	250·150·6,3	395	278
140·70·4,0	71,2	43,8	8,0	489	344
6,3	106	64,5	10,0	593	416
7,1	117	71,0	300·200·7,1	687	521
140·80·4,0	76,7	52,0	8,0	765	580
5,0	93,6	63,3	10,0	934	707
6,3	114	77,0	12,5	1130	855
8,0	139	93,3	16,0	1390	1050
150·100·5,0	117	88,3			
6,3	142	108			
8,0	173	131			
10,0	206	155			

23.5 Caractéristiques géométriques de la section droite des profilés laminés des exercices

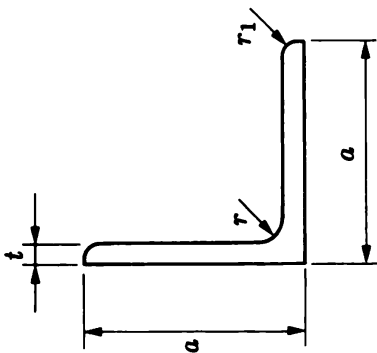
(Même source qu'à la section 23.4.)

Attention aux puissances de dix données en tête des colonnes.

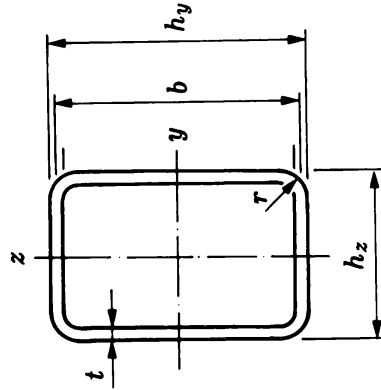
ROR						
$D \cdot t$ [mm]	m [kg/m]	A [mm ²]	I [mm ⁴]	W [mm ³]	Z [mm ³]	i [mm]
			$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	
60,3-2,9	4,11	523	0,216	7,16	9,56	20,3
5,0	6,82	869	0,335	11,1	15,3	19,6
6,3	8,39	1070	0,395	13,1	18,5	19,2
10,0	12,4	1580	0,520	17,2	25,6	18,1
108-3,6	9,27	1180	1,61	29,8	39,3	36,9
5,0	12,7	1620	2,15	39,8	53,1	36,5
7,1	17,7	2250	2,88	53,3	72,4	35,8
10,0	24,2	3080	3,73	69,2	96,4	34,8



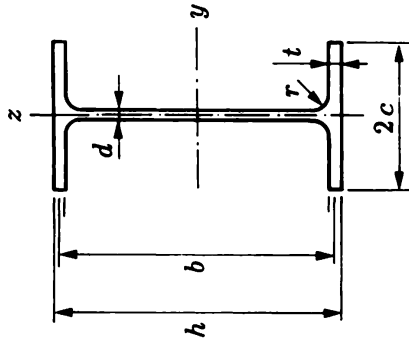
MSH								
$h \cdot h \cdot t$ [mm]	m [kg/m]	b [mm]	A [mm ²]	I [mm ⁴]	W [mm ³]	Z [mm ³]	i [mm]	J [mm ⁴]
				$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$
40-40-4,0	4,41	36	562	0,121	6,05	7,55	14,7	0,190
50-50-4,0	5,67	46	722	0,254	10,1	12,4	18,7	0,395
60-60-4,0	6,93	56	882	0,459	15,3	18,4	22,8	0,712
70-70-4,0	8,18	66	1040	0,753	21,5	25,7	26,9	1,16
5,0	10,0	65,0	1280	0,896	25,6	31,0	26,5	1,39
80-80-3,6	8,55	76,4	1090	1,06	26,4	31,1	31,1	1,62
4,5	10,5	75,5	1340	1,27	31,7	37,8	30,8	1,96
5,0	11,6	75,0	1480	1,38	34,5	41,4	30,6	2,14
5,6	12,9	74,4	1640	1,51	37,6	45,5	30,3	2,34
90-90-3,6	9,68	86,4	1230	1,53	34,0	39,8	35,2	2,34
4,5	11,9	85,5	1520	1,85	41,0	48,6	34,8	2,48
5,0	13,2	85,0	1680	2,01	44,7	53,3	34,6	3,11
5,6	14,6	84,4	1860	2,20	49,0	58,7	34,4	3,41
100-100-4,0	12,0	96	1520	2,33	46,6	54,7	39,1	3,57
5,0	14,7	95	1880	2,81	56,3	66,7	38,7	4,33
6,3	18,3	93,7	2330	3,39	67,8	81,4	38,2	5,25
8,0	22,7	92	2890	4,06	81,1	99,2	37,5	6,33
10,0	27,6	90	3510	4,72	94,5	118	36,7	7,43
200-200-6,3	37,5	193,7	4780	29,6	296	345	78,6	46,6
8,0	46,9	192	5980	36,2	362	426	77,8	57,8
10,0	57,6	190	7340	43,4	434	517	76,9	70,2



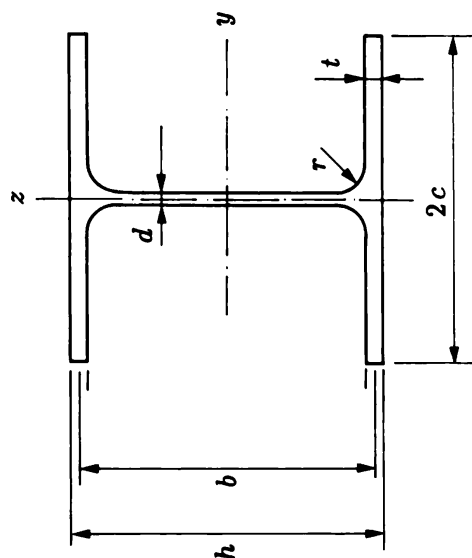
LNP	$a \cdot t$ [mm]	m [kg/m]	A [mm ²]
	40·4	2,42	308
	5	2,97	379
	45·5	3,38	430
	50·5	3,77	480
	6	4,47	569
	8	5,82	741
	55·6	4,95	631
	60·6	5,42	691
	8	7,09	903
	10	8,69	1110
	65·7	6,83	870



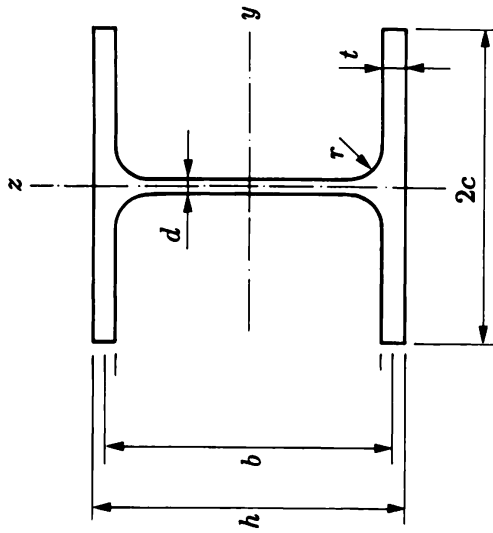
MSH	$h_y \cdot h_z \cdot t$ [mm]	m [kg/m]	b [mm]	A [mm ²]	I_y [mm ⁴]	W_y [mm ³]	Z_y [mm ³]	i_y [mm]	I_z [mm ⁴]	W_z [mm ³]	Z_z [mm ³]	i_z [mm]	J [mm ⁴]
					$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$
200-100-5,6	6,3	24,8	194,4	3150	16,1	161	201	71,4	5,46	109	124	41,6	13,3
	8,0	27,6	193,7	3520	17,7	177	223	71,0	6,00	120	137	41,3	14,7
	10,0	34,4	192,0	4380	21,5	215	273	70,0	7,19	144	167	40,5	18,0
	12,5	41,9	190,0	5340	25,3	253	327	68,8	8,39	168	200	39,6	21,4
200-120-6,3	8,0	50,8	187,5	6470	29,3	293	386	67,3	9,61	192	235	38,5	25,0
	10,0	59,6	193,7	3770	20,1	201	247	73,0	9,10	152	174	49,1	20,3
	12,5	69,9	192,0	4700	24,4	244	304	72,1	11,0	183	213	48,4	24,9
	15,0	81,1	190,0	5740	28,9	289	365	71,0	12,9	216	255	47,5	29,9
220-120-6,3	8,0	31,6	213,7	4020	25,4	231	286	79,5	9,92	165	188	49,7	23,2
	10,0	39,4	212,0	5020	31,0	281	352	78,5	12,0	200	231	48,9	28,5
	12,5	48,2	210,0	6140	36,8	335	424	77,4	14,1	236	277	48,0	34,2



IPE	m [kg/m]	h [mm]	$2c$ [mm]	d [mm]	t [mm]	r [mm]	b [mm]	A [mm ²]	A_w [mm ²]	I_y [mm ⁴]	W_y [mm ³]	Z_y [mm ³]	i_y [mm]	I_z [mm ⁴]	W_z [mm ³]	Z_z [mm ³]	i_z [mm]	J [mm ⁴]
										$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$				$\times 10^6$
80	6,0	80	46	3,8	5,2	5	74,8	764	284	0,801	20,0	23,2	32,4	0,085	3,69	5,8	10,5	0,0067
100	8,1	100	55	4,1	5,7	7	94,3	1030	387	1,71	34,2	39,4	40,7	0,159	5,79	9,2	12,4	0,0115
120	10,4	120	64	4,4	6,3	7	113,7	1320	500	3,18	53,0	60,8	49,0	0,277	8,65	13,6	14,5	0,0169
140	12,9	140	73	4,7	6,9	7	133,1	1640	626	5,41	77,3	88,4	57,4	0,449	12,3	19,2	16,5	0,0240
160	15,8	160	82	5,0	7,4	9	152,6	2010	763	8,69	109	124	65,8	0,683	16,7	26,1	18,4	0,0353
180	18,8	180	91	5,3	8,0	9	172,0	2390	912	13,2	146	166	74,2	1,01	22,2	34,6	20,5	0,0472
200	22,4	200	100	5,6	8,5	12	191,5	2850	1070	19,4	194	220	82,6	1,42	28,5	44,7	22,4	0,0685
220	26,2	220	110	5,9	9,2	12	210,8	3340	1240	27,7	252	286	91,1	2,05	37,3	58,0	24,8	0,0898
240	30,7	240	120	6,2	9,8	15	230,2	3910	1430	38,9	324	366	99,7	2,84	47,3	74,0	26,9	0,127
270	36,1	270	135	6,6	10,2	15	259,8	4590	1710	57,9	429	484	112	4,20	62,2	97,0	30,2	0,157
300	42,2	300	150	7,1	10,7	15	289,3	5380	2050	83,6	557	628	125	6,04	80,5	125	33,5	0,198
330	49,1	330	160	7,5	11,5	18	318,5	6260	2390	117,7	713	804	137	7,88	98,5	154	35,5	0,276
360	57,1	360	170	8,0	12,7	18	347,3	7270	2780	162,7	904	1020	150	10,4	123	191	37,9	0,371
400	66,3	400	180	8,6	13,5	21	386,5	8450	3320	231,3	1160	1310	165	13,2	146	229	39,5	0,504



HEA	m [kg/m]	h [mm]	2c [mm]	d [mm]	t [mm]	r [mm]	b [mm]	A [mm ²]	A _w [mm ²]	I _y [mm ⁴] ×10 ⁶	W _y [mm ³] ×10 ³	Z _y [mm ³] ×10 ³	i _y [mm]	I _z [mm ⁴] ×10 ⁶	W _z [mm ³] ×10 ³	Z _z [mm ³] ×10 ³	i _z [mm]	J [mm ⁴] ×10 ⁶
100	16,7	96	100	5	8	12	88,0	2120	440	3,49	73	83	40,6	1,34	26,8	41,2	25,1	0,0520
120	19,9	114	120	5	8	12	106,0	2530	530	6,06	106	119	48,9	2,31	38,5	58,9	30,2	0,0596
140	24,7	133	140	5,5	8,5	12	124,5	3140	685	10,3	155	173	57,3	3,89	55,6	84,7	35,2	0,0803
160	30,4	152	160	6	9	15	143,0	3880	858	16,7	220	246	65,7	6,16	76,9	118	39,8	0,118
180	35,5	171	180	6	9,5	15	161,5	4530	969	25,1	294	324	74,5	9,25	103	157	45,2	0,147
200	42,3	190	200	6,5	10	18	180,0	5380	1170	36,9	389	430	82,8	13,4	134	204	49,8	0,204
220	50,5	210	220	7	11	18	199,0	6430	1390	54,1	515	568	91,7	19,5	178	271	55,1	0,281
240	60,3	230	240	7,5	12	21	218,0	7680	1640	77,6	675	744	101	27,7	231	352	60,0	0,410
260	68,2	250	260	7,5	12,5	24	237,5	8680	1735	104,5	836	920	110	36,7	282	430	65,0	0,520
280	76,4	270	280	8	13	24	257,0	9730	2056	136,7	1010	1110	119	47,6	340	518	70,0	0,614
300	88,3	290	300	8,5	14	27	276,0	11300	2346	182,6	1260	1380	127	63,1	421	642	74,9	0,842
320	97,6	310	300	9	15,5	27	294,5	12400	2650	229,3	1480	1630	136	69,9	466	710	74,9	1,09
340	105	330	300	9,5	16,5	27	313,5	13300	2980	276,9	1680	1850	144	74,4	496	756	74,6	1,29
360	112	350	300	10	17,5	27	332,5	14300	3320	330,9	1890	2080	152	78,9	526	803	74,3	1,51
400	125	390	300	11	19	27	371,0	15900	4080	450,7	2310	2560	168	85,6	571	873	73,4	1,91
450	140	440	300	11,5	21	27	419,0	17800	4820	637,2	2900	3220	189	94,7	631	966	72,9	2,49



HEB	m [kg/m]	h [mm]	$2c$ [mm]	d [mm]	t [mm]	r [mm]	b [mm]	A [mm ²]	A_w [mm ²]	I_y [mm ⁴] $\times 10^6$	W_y [mm ³] $\times 10^3$	Z_y [mm ³] $\times 10^3$	i_y [mm]	I_z [mm ⁴] $\times 10^6$	W_z [mm ³] $\times 10^3$	Z_z [mm ³] $\times 10^3$	i_z [mm]	J [mm ⁴] $\times 10^6$
100	20,4	100	100	6	10	12	90,0	2600	540	4,50	90	104	41,6	1,67	33	51	25,3	0,0931
120	26,7	120	120	6,5	11	12	109,0	3400	708	8,64	144	165	50,4	3,18	53	81	30,6	0,139
140	33,7	140	140	7	12	12	128,0	4300	896	15,1	216	246	59,3	5,50	79	120	35,8	0,202
160	42,6	160	160	8	13	15	147,0	5430	1180	24,9	311	354	67,8	8,89	111	170	40,5	0,312
180	51,2	180	180	8,5	14	15	166,0	6530	1410	38,3	426	482	76,6	13,6	151	231	45,7	0,422
200	61,3	200	200	9	15	18	185,0	7810	1660	57,0	570	642	85,4	20,0	200	306	50,7	0,596
220	71,5	220	220	9,5	16	18	204,0	9100	1940	80,9	736	828	94,3	28,4	258	394	55,9	0,770
240	83,2	240	240	10	17	21	223,0	10600	2230	112,6	938	1050	103	39,2	327	499	60,8	1,04
260	93,0	260	260	10	17,5	24	242,5	11800	2420	149,2	1150	1280	112	51,3	395	603	65,8	1,26
280	103	280	280	10,5	18	24	262,0	13100	2750	192,7	1380	1530	121	65,9	471	718	70,9	1,45
300	117	300	300	11	19	27	281,0	14900	3090	251,7	1680	1870	130	85,6	571	871	75,8	1,87
320	127	320	300	11,5	20,5	27	299,5	16100	3440	308,2	1930	2140	138	92,4	616	940	75,7	2,29
340	134	340	300	12	21,5	27	318,5	17100	3820	366,6	2160	2400	146	96,9	646	986	75,3	2,62
360	142	360	300	12,5	22,5	27	337,5	18100	4220	431,9	2400	2680	155	101	676	1030	74,9	2,98
400	155	400	300	13,5	24	27	376,0	19800	5080	576,8	2880	3240	171	108	721	1100	74,0	3,61
450	171	450	300	14	26	27	424,0	21800	5940	798,9	3550	3980	191	117	781	1200	73,3	4,49
500	187	500	300	14,5	28	27	472,0	23900	6840	1072	4290	4820	212	126	842	1290	72,7	5,50

Solution des exercices

Lorsque, pour résoudre un exercice, certaines indications semblent manquer, il faut les rechercher dans le texte et ses annexes (par exemple : courbes européennes de flambement ; caractéristiques mécaniques des matériaux) ou dans les autres volumes (par exemple : charge de neige, intégration numérique, caractéristiques géométriques de la section des profilés laminés (vol. 1) ; état plan de contrainte, cercle de Mohr, loi de Hooke bi- et tridimensionnelle (vol. 3) ; etc.).

Les caractéristiques géométriques de la section des profilés laminés utiles aux exercices de ce volume sont données dans les annexes 23.4 et 23.5.

Ci-dessous, les flèches entre parenthèses indiquent le sens de la force, du déplacement, de l'axe, etc.

Chapitre 2

2.9.1 1) u_4 incorrect ; 2) $E \cong 7\,200 \text{ kN/cm}^2$; 3) $\sigma_{0,2} \cong 33 \text{ kN/cm}^2$; 4) alliage d'aluminium 7020 T6.

2.9.2 $\varepsilon_A = -2\nu\varepsilon_x$; acier pour câble : $\varepsilon_A = -0,44 \%$.

2.9.3 Verre ordinaire.

2.9.4 $E \cong 20\,200 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_e \cong 25,25 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_t = 40,2 \text{ kN/cm}^2$; acier doux.

Chapitre 3

3.6.1 $\sigma_{\text{adm}, A} = 0,86 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\text{adm}, B} = 0,74 \text{ kN/cm}^2$.

3.6.2 1) $Q = 125,2 \text{ kN}$; 2) $Q = 137,2 \text{ kN}$.

Chapitre 4

4.10.1 1) $\sigma_1 = 250 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_2 = -100 \text{ N/mm}^2$; 2) $u_1 = 3 \text{ mm}$; $u_2 = -1 \text{ mm}$; 3) $u_C = 1 \text{ mm}$ (\leftarrow) ; $v_C = 6,33 \text{ mm}$ (\downarrow).

4.10.2 1) LNP 50-6 ; 2) $u_B = 6 \text{ mm}$ (\rightarrow).

4.10.3 $u = \gamma L^2 / (2E)$. Acier : 1) $L = 3\,311 \text{ m}$; $u = 2,06 \text{ m}$; 2) $L = 5194 \text{ m}$. Alliage d'aluminium : 1) $L = 9\,439 \text{ m}$; $u = 16,85 \text{ m}$; 2) $L = 10\,571 \text{ m}$.

4.10.4 $6\,796 \text{ m}$.

4.10.5 $u_{\text{tot}} = 50,5 \text{ cm}$.

4.10.6 1) 83 mm^2 ; 2) $a' = 4,32 \text{ m}$ ($s = 100,107 \text{ m}$; $u = 0,390 \text{ m}$; $s' = s + u$).

4.10.7 Action F : $N_a = -Fb/L$; $N_b = Fa/L$. Action T : $N_a = N_b = -\alpha T b E A / L$.

4.10.8 1) N parabolique ; $N_B = 0$, $N_{A, \text{max}} = 394,3 \text{ kN}$; 2) $\sigma_{A, \text{max}} = 13,95 \text{ kN/cm}^2$; 3) $u_{B, \text{tot}} = 0,045 \text{ cm}$.

4.10.9 $u = 1,6\gamma/E$ (unité de longueur en m).

4.10.10 Avec deux points de Gauss : $u = 1,755 \text{ cm}$; avec trois points de Gauss : $u = 1,761 \text{ cm}$.

4.10.11 $F_{adm}^- = 1\,603\text{ kN}$.

4.10.12 1) $\sigma_a^0 = 100\text{ kN/cm}^2$; $\sigma_b^0 = -1\text{ kN/cm}^2$; 2) $\sigma_a = 105,66\text{ kN/cm}^2$; $\sigma_b = -0,057\text{ kN/cm}^2$; 3) $F = 424\text{ kN}$ ($> P$!); 4) $F_t = 636\text{ kN}$; $N_a = 436\text{ kN}$.

4.10.13 1) $\sigma_\ell^0 = -8,436\text{ kN/cm}^2$; $\sigma_a^0 = 16,872\text{ kN/cm}^2$; 2) pour $0 \leq F \leq F_{lim}$, avec $F_{lim} = 273,333\text{ kN}$, les contraintes augmentent linéairement de σ_ℓ^0 à zéro pour le laiton, et de σ_a^0 à $34,167\text{ kN/cm}^2$ pour l'acier; pour $F > F_{lim}$, seul l'acier travaille.

4.10.14 1) $N_a = -N_c = 27,718\text{ kN}$; 2) $u = 1,13\text{ mm}$.

4.10.15 1) $\sigma_{cir} = 112,5\text{ N/mm}^2$; $\sigma_{lon} = 56,25\text{ N/mm}^2$; 2) $\varepsilon_{cir} = 4,665 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_{lon} = 1,098 \cdot 10^{-4}$; 3) $u_{rad} = 0,420\text{ mm}$; $u_{lon} = 0,878\text{ mm}$; 4) $\Delta V/V = 2\varepsilon_{cir} + \varepsilon_{lon} = 10,428 \cdot 10^{-4}$; 5) $\sigma_{//} = 98,44\text{ N/mm}^2$; $\sigma_{\perp} = 70,31\text{ N/mm}^2$; $\tau = 24,36\text{ N/mm}^2$.

4.10.16 1) $0,041\text{ cm}$; 2) $0,952\text{ kN/cm}^2$; 3) $40,65\text{ }^\circ\text{C}$.

4.10.17 $v = \sqrt{\sigma_t/\rho} = 153\text{ m/s}$.

4.10.18 1) $\sigma_{a1} = 5$; $\sigma_{alu} = -2,381$; 2) $\sigma_{a1} = 2,283$; $\sigma_{a2} = 5$; $\sigma_{alu} = -3,468$; 3) $\sigma_{a1} = 0,522$; $\sigma_{a2} = 3,239$; $\sigma_{a3} = 5$; $\sigma_{alu} = -4,172$ (en kN/cm^2).

Chapitre 5

5.8.1 1) HEA 220; 2) $h = 44\text{ cm}$.

5.8.2 1) $Q_b = 4,45\text{ kN}$; $Q_a = 20,69\text{ kN}$; 2) $Q_b = 2,22\text{ kN}$; $Q_a = 3,04\text{ kN}$.

5.8.3 $a = 8\text{ cm}$; IPE 240.

5.8.4 $D = (E - \sigma_p)d/\sigma_p$. (Si on néglige d devant D , $D = Ed/\sigma_p$.)

5.8.5 W est maximal pour $b/h = 1/\sqrt{2} \cong 5/7$.

5.8.6 1) $b(x) = Bx/L$; 2) $h(x) = H\sqrt{x/L}$.

5.8.7 $t_w = 1\text{ cm}$.

5.8.8 $s = 1,3\text{ m}$.

5.8.9 $L_s = 10\text{ m}$ (exact : $9,934\text{ m}$); $t_s = 20\text{ mm}$ (exact : $20,7\text{ mm}$).

5.8.10 1) En base : $M = 560\text{ kN}\cdot\text{m}$ et $V = 36\text{ kN}$; 2) $\sigma_{max} = \pm 10,10\text{ kN/cm}^2$ ($I = 192\,000\text{ cm}^4$); 3) vibrations.

5.8.11 1) $q = 33\text{ kN/m}$ ($\tilde{I}_{az} = 21,23 \cdot 10^6\text{ mm}^4$); 2) $\sigma_{a\max} = \pm 140\text{ N/mm}^2$; $\sigma_{b\max} = \pm 7\text{ N/mm}^2$.

5.8.12 Avec $g = 9,81\text{ m/s}^2$: $q = 6,6\text{ kN/m}^2$ ($\tilde{I}_a = 157\,764\text{ cm}^4$ pour $1,4\text{ m}$ de dalle et son HEA); $\sigma_{a\max} = 16\text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{b\max} = -0,88\text{ kN/cm}^2$.

5.8.13 a) Le bois seul porte son poids propre et celui de béton; $\sigma_{bois} = \pm 0,568\text{ kN/cm}^2$; c) pour une section équivalente en béton, $\tilde{I}_b = 149\,149\text{ cm}^4$; sous la charge q : $\sigma_{b\sup} = -0,175\text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_{bois,\inf} = 0,278\text{ kN/cm}^2$. Au total : $\sigma_{b\sup} = -0,175\text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{b\inf} = -0,039\text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{bois,\sup} = -0,60\text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{bois,\inf} = 0,85\text{ kN/cm}^2$.

5.8.14 A droite et à $3,36\text{ m}$ de D, $M_{max} = 224,72\text{ kN}\cdot\text{m}$, d'où $\sigma_{max} = \pm 1,13\text{ kN/cm}^2$ ($< 1,2\text{ kN/cm}^2$).

Chapitre 6

6.5.1 1) $\sigma_C = -\sigma_A = 150\text{ N/cm}^2$; $\sigma_D = -\sigma_B = 950\text{ N/cm}^2$; 2) $z = 0,687y$ et $\beta = 34,5^\circ$.

6.5.2 $b = 14\text{ cm}$; $h = 20\text{ cm}$.

6.5.3 L'axe neutre est la diagonale BD de toute section; à la distance x de l'extrémité libre, avec $d = AC$, $\sigma_A = -\sigma_C = 12Fx/(dbh)$.

6.5.4 $\sigma_{\max}^+ = 97,5 \text{ N/mm}^2$.

6.5.5 $\sigma_{\sup} = -0,45 \text{ kN/cm}^2 (= \sigma_{\max}^-)$; $\sigma_{\inf} = -0,15 \text{ kN/cm}^2 (= \sigma_{\min}^-)$.

6.5.6 $\sigma_A = 0,323 \text{ kN/cm}^2 (= \sigma_{\max}^+)$; $\sigma_D = -1,123 \text{ kN/cm}^2 (= \sigma_{\max}^-)$; $y_0 = 174 \text{ cm}$; $z_0 = 283 \text{ cm}$.

6.5.7 $Q_{\text{adm}} = 8654 \text{ N}$.

6.5.8 $\sigma_{\max} = 19,36 \text{ kN/cm}^2$ (en $y = 20 \text{ cm}$ et $z = 18 \text{ cm}$); $\sigma_{\min} = -17,97 \text{ kN/cm}^2$ (à l'opposé).

6.5.9 $\sigma_{\max}^- = -22,23 \text{ N/cm}^2$ ($c = 51 \text{ cm}$).

6.5.10 (a) $\sigma_A = -88,9$ et $\sigma_B = 33,7 \text{ N/cm}^2$; (b) $\sigma_A = -141,8 \text{ N/cm}^2$ ($c = 52 \text{ cm}$).

6.5.11 $r = 25 \text{ cm}$; $|e| = 29,5 \text{ cm}$ (les contraintes changent de signe).

6.5.12 Soit y (\searrow) et z (\swarrow) les axes principaux centraux d'inertie; le noyau central est un triangle KLM avec $K(0; -4,71)$, $L(-18,86; 4,71)$ et $M(18,86; 4,71)$ (en mm).

6.5.13 Noyau central carré; longueur de la diagonale $= 2a/3$; côtés parallèles aux diagonales de la section.

6.5.14 Noyau central en losange; diagonales selon les axes y et z ; longueur des diagonales 120 et 278 cm.

6.5.15 Le noyau central est un triangle isocèle, homothétique au contour de la section par rapport au centre géométrique, quatre fois plus petit.

Chapitre 7

7.11.1 1) Diagramme trilineaire: élastique jusqu'en $(0,373 \text{ cm}; 76,5 \text{ kN})$, élasto-plastique jusqu'en $(0,563 \text{ cm}; 89,5 \text{ kN})$, palier au-delà; 2) $\sigma_{\text{rsd},1} = -4,33 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{\text{rsd},2} = 8,66 \text{ kN/cm}^2$.

7.11.2 1) $\sigma_{0,2} = 16,1 \text{ kN/cm}^2$; 2) $u = 9,46 \text{ cm}$; 3) $E_t = 329,25 \text{ kN/cm}^2$; 4) $u_{\text{per}} = 6,78 \text{ cm}$.

7.11.3 1) Un patin (σ_e) et un ressort (E) placés en série; (a) oui; (b) non; 2) un patin (σ_e) et un ressort (E') en parallèle, placés en série avec un ressort (E): pour $\sigma \leq \sigma_e$, $\sigma = E\varepsilon$ et pour $\sigma > \sigma_e$, $\sigma = E_t\varepsilon + \sigma_e(1 - E_t/E)$ avec $1/E_t = 1/E + 1/E'$.

7.11.4 Equation du modèle: $\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$; 1) fluage ($t_0 \leq t \leq t_1$): on intègre, d'où $\varepsilon = (\bar{\sigma}/E)(1 - e^{-(E/\mu)(t-t_0)})$; recouvrance ($t > t_1$): on intègre avec $\sigma = 0$, d'où $\varepsilon = (\bar{\sigma}/E)(e^{-(E/\mu)(t-t_1)} - e^{-(E/\mu)(t-t_0)})$ (fig. Sol. 7.11.4);
2) aucune relaxation n'est possible (si $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \text{cste}$, $\dot{\varepsilon} = 0$ et l'équation fournit $\sigma = E\bar{\varepsilon} = \text{cste}$).

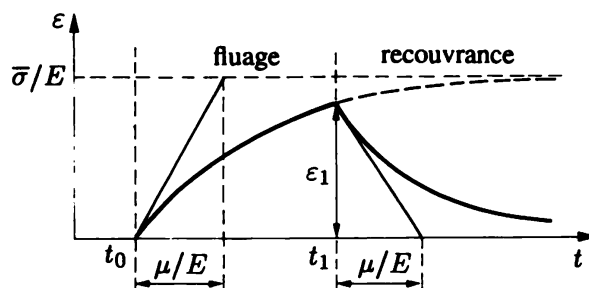


Fig. Sol. 7.11.4

7.11.5 Voir figure Sol. 7.11.5.

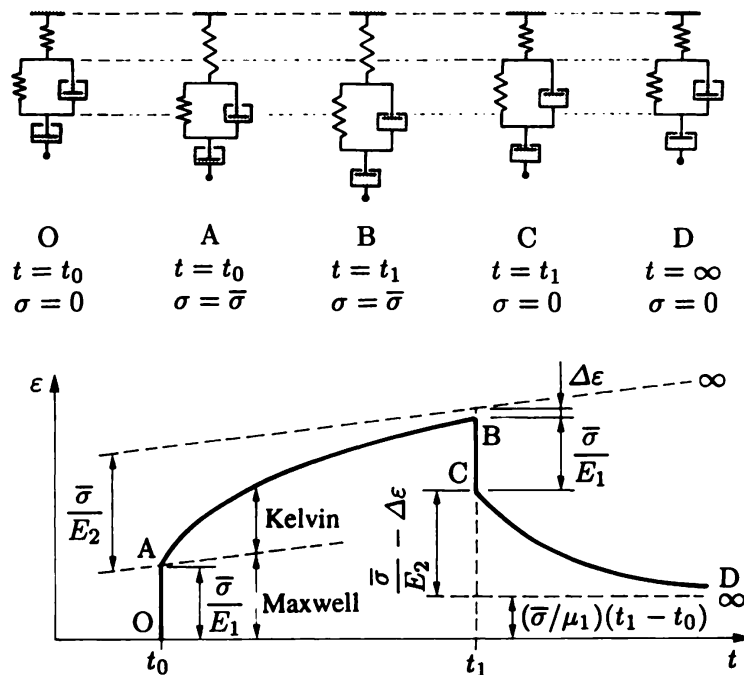


Fig. Sol. 7.11.5

7.11.6 1) $\gamma = 0,98$; 2) $\gamma = 1,70$.

7.11.7 Si, par exemple, $\sigma_{III} = 0$, il faut d'abord obtenir $\sigma^* = \sqrt{(\sigma_I + \sigma_{II})^2 - 3\sigma_I\sigma_{II}}$, puis introduire les invariants.

7.11.8 $\tau_u = \sigma_u^+ \sigma_u^- / (\sigma_u^+ + \sigma_u^-)$, chaque grandeur étant prise en valeur absolue.

7.11.9 $\tau = \pm(\sigma_c - (k-1)\sigma)/(2\sqrt{k})$.

Chapitre 8

8.11.1 1) 3,167 cm (torsion déterminante); 2) $D = 3,775$ cm; gain de 48,8 %; 3) $\theta_x = 2,65^\circ$ et $2,22^\circ$.

8.11.2 Alliage d'aluminium 7020 T6.

8.11.3 $\tau_{\max} = 90$ N/mm²; $\chi = 0,285$ rad/m.

8.11.4 $T = 8,69 \cdot 10^9$ N·mm; $\theta_x = 0,038$ rad = $2,17^\circ$.

8.11.5 $\tau_{o\max}/\tau_{f\max} = 3r/t$; $\chi_o/\chi_f = 3(r/t)^2$.

8.11.6 Parois minces: $\tau = 12,85$ dans la cellule fermée; parois d'épaisseur modérée: $9,88 \leq \tau \leq 14,82$ dans la cellule fermée et $|\tau_{\max}| = 2,47$ dans les ailes saillantes (en kN/cm²).

8.11.7 1a) $m = 6$ et $J_a = 112\,695\,652$ cm⁴; 2a) $\tau_a = 2,315$ kN/cm² et $\tau_b = 116$ N/cm²;

1b) $J_a = 113\,617\,252$ cm⁴; 2b) $\tau_a = 2,296$ kN/cm²; 150 N/cm² $\geq \tau_b \geq 79,6$ N/cm² dans la zone du caisson, et $|\tau_{b\max}| = 35,2$ N/cm² dans les ailes.

8.11.8 La ligne moyenne équivalente est située 7,333 cm au-dessus de la ligne moyenne de l'acier; $\tau_{a\max} = 3,87$ kN/cm² et $\tau_b = 0,155$ kN/cm².

8.11.9 $J_{SV} = 3b^3c^3/(10(b^2 + c^2))$.

8.11.10 Soit C un point intérieur à la cellule, $AB = ds$ l'élément de ligne moyenne, τdA la force élémentaire agissant sur $dA = t ds$ et r la distance de cette force à C (bras de levier). Le moment vaut $T = \oint \tau t r ds$; l'équilibre des flux donne $\tau t = \text{cste}$ et donc $T = \tau t \oint r ds$; $r ds$ est le double de l'aire du triangle ABC, donc $\oint r ds = 2\Omega$.

8.11.11 L'équivalence ne restitue que $T/2$! L'autre moitié provient des τ_{xy} agissant essentiellement aux extrémités du rectangle mince, négligés dans la théorie.

8.11.12 $T_{AB} = Tb/L$; $T_{BC} = Ta/L$.

8.11.13 Tresca : $\gamma = 1,56$; von Mises : $\gamma = 1,78$.

8.11.14 $T_u = 26\,624 \text{ kNcm}$; $\alpha = 18,44^\circ$ et $71,56^\circ$ par rapport à l'axe de la poutre.

8.11.15 On construit les deux droites de la courbe intrinsèque avec les cercles de traction (1) et compression (2) (fig. Sol. 8.11.15), puis le cercle de Mohr (3) de l'état de contrainte donné. On agrandit ce cercle homothétiquement par rapport à l'origine O pour qu'il devienne tangent en D' et D'' à la courbe intrinsèque (cercle 4). Alors $\gamma = OD'/OD = C'D'/CD \cong 1,29$. Avec le critère de la plus grande contrainte positive, $\gamma = \sigma_t/\sigma_1 \cong 1,8$.

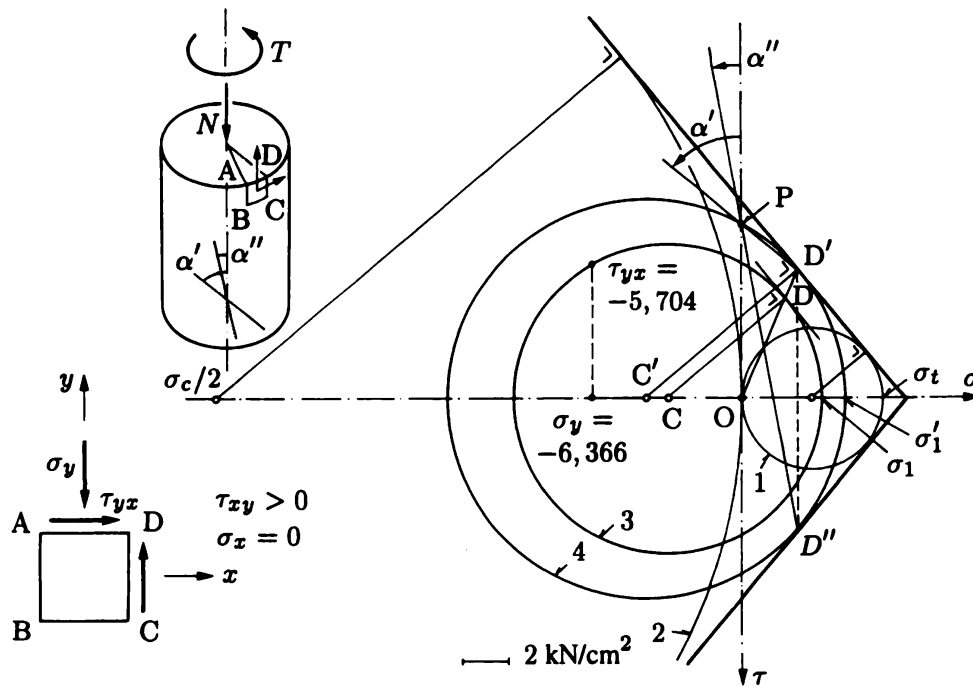


Fig. Sol. 8.11.15

8.11.16 1) $T_e = \pi a^3 \sigma_e / (2\sqrt{3})$; 2) $\theta_x = (2/3)TL(1/a^3 - 1/b^3) / (\pi G(b-a))$; 3) $\theta_{xm} = 32TL / (\pi G(a+b)^4)$; 4) erreur = 2,71 %.

8.11.17 Pour la figure Sol. 8.11.17(a), $J = 55,9 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$; pour la figure Sol. 8.11.17(b), $J = 59,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$.

8.11.18 On vérifie aisément cette propriété graphiquement, en faisant tendre σ_t vers zéro.



Fig. Sol. 8.11.17

Chapitre 9

9.13.1 V parallèle à l'âme : $\tau_A = \tau_{\max} = 5,29$ et $\tau_B = 4,36$; $\tau_{wm} = 4,87$. V parallèle aux semelles : répartition comme dans un rectangle avec $\tau_{\max} = 4,67$ au milieu de chaque semelle ; $\tau_w = 0$ (en kN/cm^2).

9.13.2 Voir figure Sol. 9.13.2 (pour la clarté, semelle et âme sont séparées).

9.13.3 Voir figure Sol. 9.13.3 (par symétrie, seule une demi-section est représentée). On observe que τ_{\max} se produit dans la semelle inférieure.

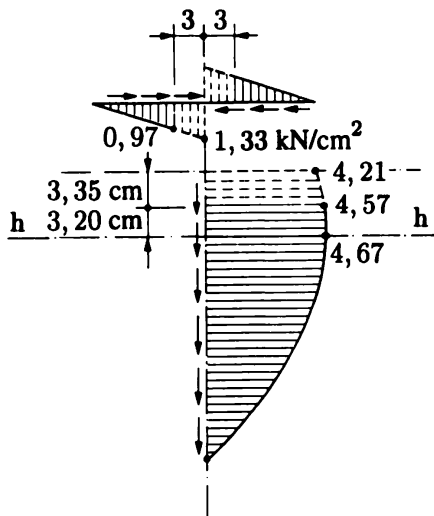


Fig. Sol. 9.13.2

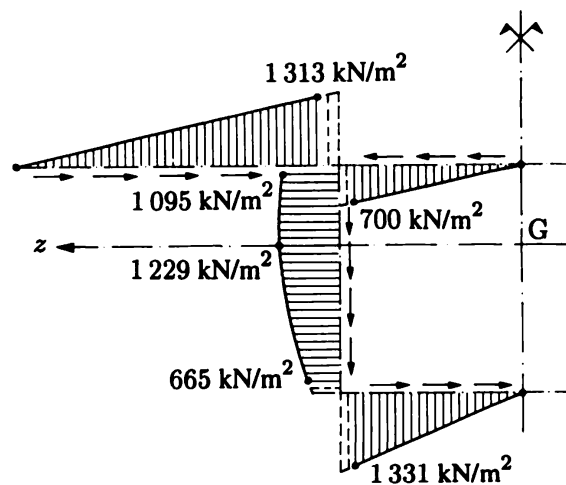


Fig. Sol. 9.13.3

9.13.4 1) Voir figure Sol. 9.13.4 ; 2) si $k = 4at\sigma_e/\sqrt{3}$, l'effort tranchant maximal vaut successivement, de $\alpha = 90^\circ$ à $\alpha = -90^\circ$, $V = (2/3)k$, $((3 + \sqrt{2})/(6 + \sqrt{2}))k$, $(4/9)k$, $((3 - \sqrt{2})/(6 - \sqrt{2}))k$ et $(1/3)k$.

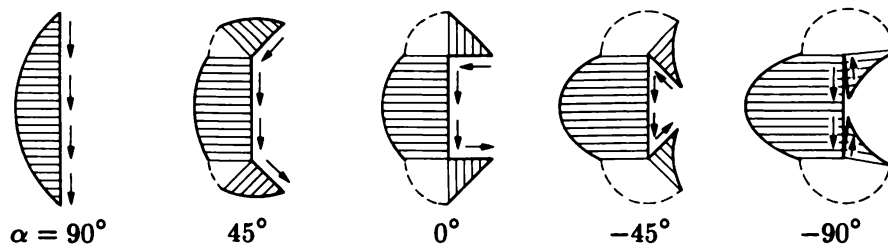


Fig. Sol. 9.13.4

9.13.5 $M_z = -10 \text{ kNm}$, $V_y = -5 \text{ kN}$ et $T = -0,1175 \text{ kNm}$ ($N = V_z = M_y = 0$). Position du centre de cisaillement dans le plan (y, z) : $C_T(0; 0,0235 \text{ m})$.

9.13.6 1) Voir figure Sol. 9.13.6 ; 3) $c_z = 46,67 \text{ cm}$.

9.13.7 1) Voir figure Sol. 9.13.7 ; 2) $c_y = 127,04 \text{ cm}$.

9.13.8 Voir figure Sol. 9.13.8.

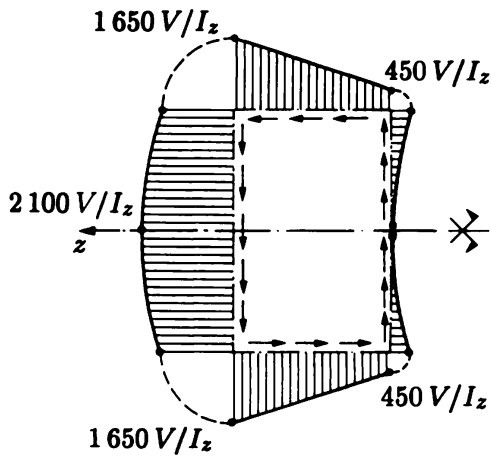


Fig. Sol. 9.13.6

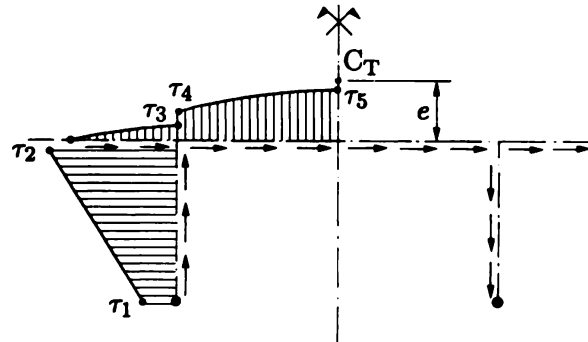


Fig. Sol. 9.13.8

$$\begin{aligned}\tau_1 &= V/13\,748 \\ \tau_2 &= V/3\,618 \\ \tau_3 &= V/62\,848 \\ \tau_4 &= V/31\,334 \\ \tau_5 &= V/22\,400 \\ e &= 78,21 \text{ cm}\end{aligned}$$

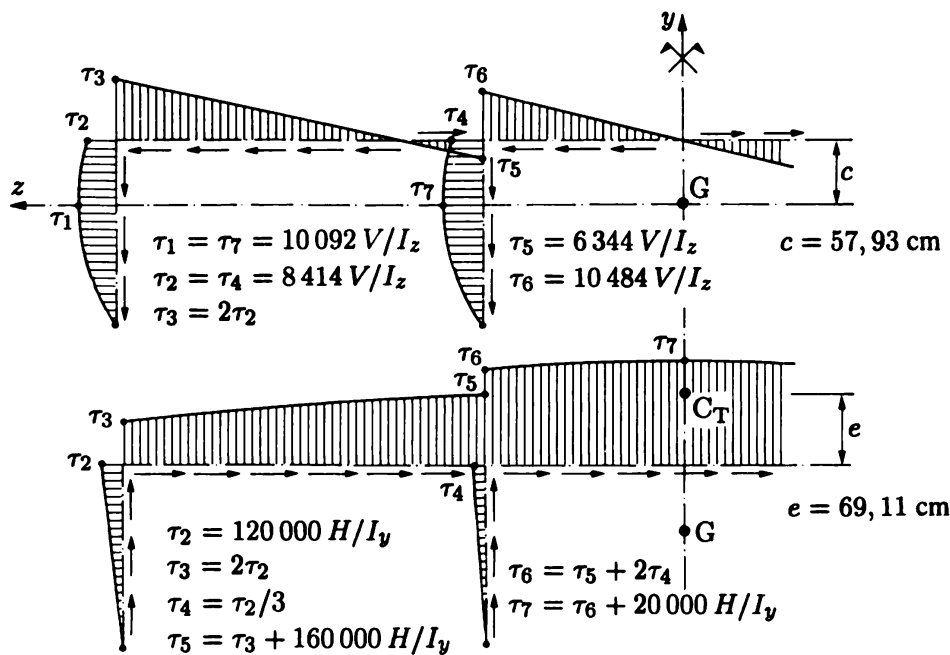


Fig. Sol. 9.13.7

9.13.9 Soit y (\uparrow) et z (\leftarrow) les axes principaux ; 1) $c_y = -3 \text{ cm}$; 2) le noyau central est le quadrilatère A (35, 44 ; 0), B (0 ; 4,05), C (-15, 19 ; 0), D (0 ; -4,05) (en cm).

9.13.10 Si z (\leftarrow) est l'axe de symétrie de la section, C_T est à $3a/5$ de l'âme sur z .

9.13.11 Il faut décomposer F selon les axes principaux d'inertie ! On trouve le résultat final de la figure Sol. 9.13.11.

9.13.12 Section ouverte : $\tau_{\max} = 4V/A$; si z (\leftarrow) est l'axe de symétrie, $c_z = 2r$ par rapport au centre du cercle. Section fermée : $\tau_{\max} = 2V/A$.

9.13.13 Résolution : voir le paragraphe 9.7.3. Solution : voir la figure Sol. 9.13.13.

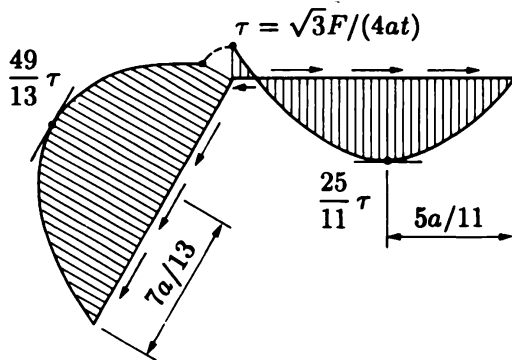


Fig. Sol. 9.13.11

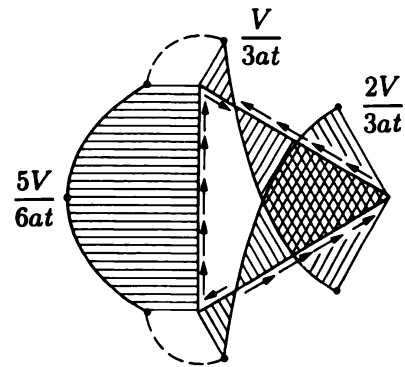


Fig. Sol. 9.13.13

Chapitre 10

10.4.1 1) $v(x) = (\bar{M}L/(6EI))x(x^2/L^2 - 1)$; 2) $\theta_A = -\bar{M}L/(6EI)$; $\theta_B = \bar{M}L/(3EI) = 2|\theta_A|$; $v_{\max} = -\bar{M}L^2/(9\sqrt{3}EI)$.

10.4.2 $0 \leq x \leq a, v(x) = (Q/(6EI))(x^3 - 3a(L-a)x)$; $a \leq x \leq L-a, v(x) = (Qa/(6EI))(3x^2 - 3Lx + a^2)$.

10.4.3 2) $v(x) = (\bar{v}/2)(x^2/L^2)(3 - x/L)$; 3) $M(x) = (3\bar{v}EI/L^2)(1 - x/L)$; 4) $B_y = 3\bar{v}EI/L^3$.

10.4.4 1) $h = 1$; 2) déformée cubique et moment linéaire; 3) $v(x) = (\bar{M}L^2/(4EI))(x^2/L^2)(x/L - 1)$; 4) $|M_A| = \bar{M}/2$.

10.4.5 Sur un tronçon dx , l'angle dont tourne la section de droite par rapport à celle de gauche est $d\theta = -\alpha \Delta T dx/h$. Application : $v(x) = (\alpha \Delta T/(2h))x(L - x)$, avec l'origine des x sur l'appui gauche.

10.4.6 $v_M(x) = -(\gamma/(6Eh^2))(x^4 - 4L^3x + 3L^4)$; $v_V(x) = (3\gamma/(10G))(x^2 - L^2)$.

10.4.7 1) HEA180; 2) $\sigma^* = 20,61 \text{ kN/cm}^2$; $\tau_{\max} = 7,42 \text{ kN/cm}^2$ (au milieu de l'âme); 3) $|v_{M \max}| = 0,894 \text{ cm}$; $|v_{V \max}| = 0,060 \text{ cm}$.

Chapitre 11

11.5.1 La section d'encastrement est déterminante : $F_{\max} = 64,8 \text{ kN}$ (section au coude : $F = 76,8 \text{ kN}$).

11.5.2 1) $M = 1500 \text{ kNcm}$; $V = 30 \text{ kN}$; $T = 210 \text{ kNcm}$ (intensités); 2) $\sigma_{M \max} = 14,22$; $\tau_{V \max} = 3,52$; $\tau_{T \max} = 1,67$ (intensités en kN/cm^2); 3) $\sigma_{\max}^* = 15,3 \text{ kN/cm}^2$; l'alliage 5083 H111 convient.

11.5.3 1) Seul l'effort tranchant agissant dans le plan du dessin est nul; 2) $\sigma_{\max} = -22,05 \text{ kN/cm}^2$; 3) $\tau_{\max} = 4,69 \text{ kN/cm}^2$; 4) $\sigma_{\max}^* = 23,4 \text{ kN/cm}^2$.

11.5.4 1) $\sigma_x = 14,32$; $\sigma_y = 7,50$; $\tau_{xy} = -6,37$ (en kN/cm^2 ; état plan de contrainte); 3) $\sigma_1 = 18,14$ et $\sigma_2 = 3,68 \text{ kN/cm}^2$; 4) $\tau_{\max} = 9,07 \text{ kN/cm}^2$; 5) $\sigma^* = 16,6 \text{ kN/cm}^2$.

11.5.5 1) $M_{\max} = 14 \text{ kNcm}$; $T_{\max} = 14 \text{ kNcm}$ (intensités); 2) $\sigma^* = 9,62 \text{ kN/cm}^2$; 3) $\tau_{V \max} = 0,19 \text{ kN/cm}^2$.

11.5.6 1) $N = 171,2 \text{ kN}$; 2) $c = 90 \text{ mm}$; 3) $d = 32 \text{ mm}$.

11.5.7 $F_{\text{adm}} = 4,87 \text{ kN}$.

11.5.8 12 boulons ($T_e = 2221 \text{ kNcm}$).

11.5.9 $q_{\text{adm}} = 45,7 \text{ N/cm}$: la résistance des clous est déterminante (résistance aux contraintes normales $\Rightarrow q_{\text{adm}} = 47,9 \text{ N/cm}$ et résistance aux contraintes tangentielles $\Rightarrow q_{\text{adm}} = 48,2 \text{ N/cm}$).

11.5.10 $s = 17 \text{ cm}$ ($R_{\max} = 2,715 \text{ kN/cm}$: effort rasant sur appui).

11.5.11 $0,63 \text{ kN}$ (clous des quadrants 2 et 4 de la section droite).

11.5.12 $T = 2,0 \text{ kNm}$ (clous déterminants).

11.5.13 1) $V_{\max} = 328,8 \text{ kN}$ (la résistance des boulons n'est pas déterminante); 2) $\tau_{\max} = 14,7 \text{ kN/cm}^2$ (dans l'âme, au centre, avant la naissance des congés).

11.5.14 (a) $V_{\max} = 9400 \text{ kN}$ et (b) $V_{\max} = 14760 \text{ kN}$ (soudures non déterminantes).

11.5.15 1) $s = 5 \text{ cm}$ ($R_V = 1,16$ et $R_T = 0,30 \text{ kN/cm}$); 3) $\tau_{\max} = 2,93 \text{ kN/cm}^2$.

11.5.16 Boulons : $F_{\max} = 3,9 \text{ kN} < 4 \text{ kN}$; contraintes : $\tau_{\max} = 3,34 < \tau_e = 14,4$ et $\sigma_{\max}^* = 23,9 < \sigma_e = 25$ au point B (en kN/cm^2).

11.5.17 1) $\sigma_{a \text{ inf}} = 7,913$; $\sigma_{b \text{ inf}} = 0,997$; $\sigma_{c \text{ sup}} = -1,666$; 2) $\tau_{b \text{ max}} = 0,119$;
3) $\tau_{a \text{ max}} = 0,175$; $\tau_{b \text{ max}} = 0,069$; $\tau_{c \text{ max}} = 0,181 \text{ [kN/cm]}^2$; 4) $46,31 \text{ cm}$ depuis le bas.

Chapitre 12

12.10.1 Effort normal : $\int_L N \delta \varepsilon dx = \int_L n \delta u dx + N_B \delta u_B - N_A \delta u_A$;
moment de flexion : $\int_L M \delta \psi dx = \int_L q \delta v dx + V_B \delta v_B - V_A \delta v_A + M_B \delta \theta_B - M_A \delta \theta_A$;
le premier terme est le travail des efforts internes (12.4), le deuxième celui des charges (12.15) et les derniers ceux des forces extérieures (12.6).

12.10.2 1) $qL^4/(32EI)$ (\downarrow); 2) $7qL^3/(96EI)$ (sens trig.).

12.10.3 $u_D = (Fh^2/E)(h/(3I_1) + L/(2I_2))$ (\rightarrow); $\theta_D = FhL/(6EI_2)$ (sens trig.).

12.10.4 $qL^3h/(48EI)$ (\leftarrow).

12.10.5 $u_C = 0,056 \text{ cm}$ (\leftarrow); $v_C = 0,296 \text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.6 1) $v_B = 3 \text{ cm}$ et $v_C = 0,39 \text{ cm}$ (\downarrow); 2) $v_{BN} = 0,064 \text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.7 $u_C = 3 \text{ cm}$ (\rightarrow) et $v_C = 2,4 \text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.8 $u_A = 0$ et $v_A = 0,65 \text{ cm}$ (\downarrow) (avec $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$).

12.10.9 $2,59 \text{ cm}$ (\leftarrow).

12.10.10 $0,59 \text{ cm}$ (\rightarrow).

12.10.11 $4,01 \text{ mm}$ (\downarrow) ($E = 205 \text{ kN/mm}^2$).

12.10.12 $5,9 \text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.13 1) $-qa^4(69/(24EI) + 5/(GJ)) = -12,2 \text{ cm}$; 2) $2qa^3(1/(EI) + 1/(GJ)) = 0,12 \text{ rad}$.

12.10.14 $Fr^3/(2EI)$ (\downarrow).

12.10.15 $(F/6EI)(2a^3 + 6\pi a^2 r + 24 ar^2 + 3\pi r^3)$ (\downarrow).

12.10.16 $0,1956 \text{ kN/cm}$.

12.10.17 $2L/3$; $v_{\max} = FL^3/(108EI)$ (\uparrow).

12.10.18 $X = 3FL^2/(8h(2h + 3L))$.

12.10.19 $7,97 \text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.20 $v_A = 9,24 \text{ mm}$ (\downarrow); $\theta_B = 0,0062 \text{ rad}$ (sens horl.).

12.10.21 1) $1,28 \text{ cm}$ (\rightarrow); 2) $0,16 \text{ cm}$ (\uparrow).

12.10.22 $u_C = 2,3 \text{ mm}$ (\rightarrow); $\theta_B = 6,21 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ (sens trig.).

12.10.23 1,625 cm (\downarrow).

12.10.24 1,046 cm (\downarrow) ($I = 19\,845\text{ cm}^4$; $B = A_w = 12,12\text{ cm}^2$).

12.10.25 1) 1,271 cm (4 points d'intégration de Gauss sur la demi-longueur); 2) 0,093 cm (idem); en réalité, la poutre n'est pas prismatique; le diagramme τ n'est donc pas la parabole conduisant à $B = (5/6)A$; le résultat 0,093 est incorrect et ne représente qu'un ordre de grandeur.

12.10.26 1) 25,6 kN; 2) 1,1 cm (\uparrow).

12.10.27 $N_{BD} = 43,5\text{ kN}$; $v_D = 0,32\text{ cm}$ (\downarrow).

12.10.28 Si $x = AB$, $A_x = F/\pi$ (\rightarrow).

12.10.29 $11 F/16$.

Chapitre 13

13.7.1 12,6 mm (\downarrow).

13.7.2 Soit une force unité en x : v_{Ax} est la ligne d'influence cherchée; soit ensuite une force unité en A : v_{xA} est la déformée; par Maxwell, $v_{Ax} = v_{xA}$.

13.7.3 La réaction provoquée au point B par un tassement d'appui unité imposé à l'appui A est égale à celle en A due au tassement unité de B, forces et déplacements étant associés.

13.7.4 1) $U(= U^*) = F^2 L^3 / (96 EI) + F^2 L / (8GB)$; $P = -Fv$; 2) $\Pi = \Pi(F) \Rightarrow d\Pi/dF = dU/dF - v = 0$, d'où $v = dU/dF$ (théorème de Castigliano) $\Rightarrow v = FL^3 / (48 EI) + FL / (4GB)$; 3) $v = 0,01732 F + 0,00147 F$.

13.7.5 1) $U = (5/6)Q^2 a^3 / (EI)$; 3) $P = -(5/3)Q^2 a^3 / (EI)$; 4) $A = (54 \sqrt{3} / \pi^4) Q a^3 / (EI)$; 5) différence de l'ordre de 0,2 %; 6) $\tilde{\Pi} = -0,83154 Q^2 a^3 / (EI) > \Pi$.

Chapitre 14

14.4.1 $|N_{pl}| = 4\,682\text{ kN}$; $|N_e| = 4\,158\text{ kN}$; gain de 12,6 %.

14.4.2 $F_{lim} = 120,7\text{ kN}$.

14.4.3 1) $x = 3,6\text{ cm}$; 2) $N_e = 384\text{ kN}$, $u_e = 0,0096\text{ cm}$; $N_{pl} = 1\,920\text{ kN}$, $u_{pl} = 0,0696\text{ cm}$ (en valeur absolue; diagramme (N, u) trilineaire).

Chapitre 15

15.9.1 $\sigma_{rsd} = \pm 2,83\text{ kN/cm}^2$ aux fibres extrêmes; $\sigma_{rsd} = \mp 25\text{ kN/cm}^2$ à l'axe neutre.

15.9.2 Flexion dans un plan parallèle aux parois: $\alpha = 1,22$; $M_e = 81,1\sigma_e$ (kNcm); $M_{pl} = 99,2\sigma_e$ (kNcm); flexion dans un plan diagonal: $\alpha \cong 1,5$; $M_e \cong 62\sigma_e$ (kNcm); $M_{pl} \cong 92\sigma_e$ (kNcm).

15.9.3 $Z = 1\,777,5\text{ cm}^3$; $M_{pl} = Z\sigma_e$.

15.9.4 La plastification commence dans l'âme; $M_{pl} = 223\,680\text{ kNcm}$ (avec 25,5 et 38,5 kN/cm² pour limites d'élasticité); $\alpha = 1,38$; $\sigma_{rsd} = \pm 3,72\text{ kN/cm}^2$ aux fibres extrêmes; $\sigma_{rsd} = \mp 3,32\text{ kN/cm}^2$ et $\pm 9,68\text{ kN/cm}^2$ aux jonctions âme-semelles; $\sigma_{rsd} = \mp 25,5\text{ kN/cm}^2$ au centre de l'âme.

15.9.5 $M_{pl} = 356\text{ kNm}$.

15.9.6 $M_{pl} = 136\,277\text{ kNcm}$.

Chapitre 16

16.8.1 $Q_{lim} = 11,66 M_{pl} / L$; gain de 1,46 %.

16.8.2 IPE 160.

16.8.3 $Q_{\text{lim}} = 3M_{pl}/L$.

16.8.4 $F_{\text{lim}} = 4M_{pl}/r$.

16.8.5 $F_{\text{lim}} = 120 \text{ kN}$; $Q_{\text{lim}} = 156 \text{ kN}$.

Chapitre 17

17.11.1 1) $F_{\text{lim}} = 1,25 M_{pl}/L$; 2) $|M_C| = 0,75 M_{pl}$; $|V_A| = 2M_{pl}/L$.

17.11.2 $F_{\text{lim}} = (20/3)M_{pl}/L$; $|M_C| = 2M_{pl}/3$.

17.11.3 $Q_{\text{lim}} = (8/11)M_{pl}$; $|M_C| = 6M_{pl}/11$.

17.11.4 $Q_{\text{lim}} = (8/3)M_{pl}/L$ (rotules en B et D); $|M_C| = 2M_{pl}/3$.

17.11.5 $\lambda_{\text{lim}} = 1,58 > \gamma_F$ (mécanisme de ruine : rotules en C, D et E; $\lambda_{\text{lim}} = 8,08M_{pl}/(6FL)$, si $M_{pl} = M_{pl} \text{ HEA } 100$; $|M_B| = 0,31M_{pl}$).

17.11.6 IPE 330.

17.11.7 $Q_{\text{lim}} = 8M_{pl}/r$.

Chapitre 18

18.6.1 1) $Q_{\text{lim}} = 481,5 \text{ kN}$; 2) $Q_{\text{lim}} = 424,3 \text{ kN}$ (l'effort normal n'est pas négligeable ; en admettant que l'effort normal des colonnes vaut Q , on trouve $Q_{\text{lim}} \cong 422 \text{ kN}$).

18.6.2 $t_{\text{lim}} = 16,5 \text{ kN/cm}^2$; diagramme de contraintes birectangulaire avec ligne de contrainte nulle à 1,4 cm du bord inférieur.

18.6.3 De $e = 0$ à $e = h/6$, le gain N_{pl}/N_e croît de 0 à 1,33 ; pour $h/6 \leq e \leq h/2$, le gain vaut 1,33.

18.6.4 1) $L \geq 8\sqrt{3} Z/A_w$; 2) $L \geq 4\sqrt{3} Z/A_w$.

Chapitre 19

19.4.1 $T_{pl} = a^3 \tau_e / 12$; $\alpha_T = 5/3$.

19.4.2 $(26/81)a^3 \tau_e$.

19.4.3 $\tau_{\text{rsd}} = -\tau_e/3$ au bord et τ_e au centre.

19.4.4 Domaine élasto-plastique : $T/T_e = (1/3)(4 - 1/(\chi/\chi_e)^3)$.

Chapitre 20

20.6.1 $v(x) = (q/(k^4 EI)) (\cos kx / \cos(kL/2) - 1 + k^2 x^2 / 2 - k^2 L^2 / 8)$; $M_{\text{max}} = (q/k^2)(1 - 1/\cos(kL/2))$.

20.6.2 Pour l'origine des axes à l'encastrement, x selon l'axe de la poutre et $C_3 = v(L)$ la flèche à l'extrémité libre du mode de flambement : $v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3$, d'où $\Delta_{\text{sta}} = k \cos kL = 0$ et $F_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$.

20.6.3 La charge critique du tronçon inférieur est incorrecte parce que la charge qui lui est appliquée ne reste pas verticale au cours du flambement (voir fig. 20.20a).

20.6.4 (a) $2L$; (b) $2L$; (c) $0,7L$; (d) $2L$; (e) $2L$; (f) L ; (g) $0,7L$.

20.6.6 Plan (x, z) ($\lambda_y = 101 > \lambda_z = 85$).

20.6.7 1) Plan de l'âme ; 2) pièce longue dans le plan de l'âme, pièce courte dans le plan de la façade ($\lambda_e = 76,4$) ; 3) $F_{cr} = 872 \text{ kN}$.

20.6.8 $T_{cr} = \pi^2 / (\alpha \lambda^2)$ (α = coefficient de dilatation thermique).

20.6.9 Il faut tenir compte, en configuration déformée, de la poussée horizontale due à l'inclinaison des barres CD et EF : $F_{cr} = 0,936 EI/L^2$ (d'où $L_K = 3,25L \gg 2L$; fig. 20.23). Pour un cadre simple, $F_{cr} = 1,359 EI/L^2$.

20.6.10 2) $L \leq L_K \leq 2L$; 3) $L_{K(0,4)} = 1,12L$; 4) $L_{K(infl)} = L = cste$; 5) la ligne d'action de F_{cr} est verticale sur le porte-à-faux et oblique entre les appuis.

20.6.11 1) Dans ABC : $L_K = 0,7L_c$; hors ABC : $0,7L_c \leq L_K \leq 2L_c$; 2) plan de l'âme \perp ABC; 3) oui : la poutre fait office de ressort; 4) $L_K = 1,43L_c$.

20.6.12 Premier mode avec déplacement latéral de la traverse BC : $2H \leq L_K \leq \infty$ pour (a) et $H \leq L_K \leq 2H$ pour (b); deuxième mode sans déplacement latéral : $0,7H \leq L_K \leq H$ pour (a) et $H/2 \leq L_K \leq 0,7H$ pour (b). Le flambement a toujours lieu avec déplacement latéral quand ce dernier est possible.

20.6.14 $k_{rot,B} = 4EI/L$; $F_{cr} = 14,76 EI/L^2$; $L_K = 0,818 L$.

20.6.15 Pour l'origine des axes en A et l'axe x selon AB, l'équation différentielle est $v'' + k^2 v = (Fa - M_B)/(EI)$ où a est le déplacement latéral de B (ou de la traverse BC) et M_B le moment en B du mode de flambement. Les conditions aux limites en A ($v = 0$ et $v' = 0$) et B ($v = a$ et $v' = M_B L/(3EI)$) conduisent, via le déterminant de stabilité, à l'équation $tg kL + kL/3 = 0$, d'où $L_K = 1,28 L$.

20.6.16 Equation : $\sigma_{cr}/E + n(\sigma_{cr}/B)^n - \pi^2/\lambda^2 = 0$. Application : $\lambda = 15 \Rightarrow F_{cr,t} = 390 \text{ kN}$; $\lambda = 30 \Rightarrow F_{cr,t} = 370,9 \text{ kN}$; $\lambda = 45 \Rightarrow F_{cr,t} = 348,8 \text{ kN}$.

20.6.17 Courbe en trois parties : $0 \leq \lambda \leq \pi\sqrt{E_t/\sigma_e} \Rightarrow \sigma_{cr} = \pi^2 E_t/\lambda^2$; $\pi\sqrt{E_t/\sigma_e} \leq \lambda \leq \lambda_e \Rightarrow \sigma_{cr} = \sigma_e$ (palier); $\lambda_e \leq \lambda \leq \infty \Rightarrow \sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$ (Euler).

Chapitre 21

21.6.1 $\lambda_e = 93,91$; $\bar{\lambda} = 1,285$; courbe a; $\bar{\sigma} = 0,479$; $\sigma_K = 11,26 \text{ kN/cm}^2$ et $F_u = 453 \text{ kN}$.

21.6.2 Avec $E = 20\,500 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_e = 25,5 \text{ kN/cm}^2$: 1) $F_{cr} = 2\,377 \text{ kN}$ (flambement dans le plan de l'âme); 2) $F_u = 1\,165 \text{ kN}$ (flambement réel parallèle aux semelles); 3) perte dans le plan fort = 47 %, dans le plan faible = 54 % (les contraintes résiduelles de compression aux bouts des ailes – fig. 21.3 – jouent un rôle déterminant).

21.6.3 1) $\sigma_d = F_d/A + M_{dA}/W = 22,8 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_e$; 2) $\lambda = 58,25$; $1/(1 - F_d/F_{cr}) = 1,275$; 3) $M_{deq} = 72 \text{ kNm}$; $\bar{\lambda} = 0,62$; courbe b; $\bar{\sigma} = 0,827$; $F_u = 2\,060 \text{ kN}$; $M_e = 220 \text{ kNm}$; dans (21.17) : $0,68 + 0,42 = 1,1 > 1 \Rightarrow$ le profilé proposé est trop faible.

21.6.4 Avec $E = 20\,500 \text{ kN/cm}^2$ et $\sigma_e = 25,5 \text{ kN/cm}^2$: parallèlement aux semelles, pièce essentiellement comprimée, courbe c, $F_u = 775 \text{ kN} > 640 \text{ kN}$ ($= \gamma_F 400$); dans le plan de l'âme, pièce comprimée et fléchie, courbe b, $F_u = 1\,796 \text{ kN}$, $M_{dlin} = 12\,800 \text{ kNcm}$, $M_e = W\sigma_e$ et, dans (21.17), $0,36 + 0,55 = 0,91 < 1$.

21.6.5 HEB 220 (il faut procéder par tâtonnement).

21.6.6 Application :

$\bar{\lambda}$	= 0,5	1	1,5
a_0^* (axe fort)	= 7,44	19,8	32,3 (mm)
a_0^* (axe faible)	= 3,76	10,0	16,3 (mm)

Chapitre 22

22.6.1 1) $\Pi = 3,2(2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1)$; 2) $d\Pi/d\alpha = 0$ pour $\alpha = 0 \Rightarrow d^2\Pi/d\alpha^2 = -3,2$: équilibre instable; $d\Pi/d\alpha = 0$ pour $\cos\alpha = 3/4 \Rightarrow \alpha = 41,41^\circ$ et $d^2\Pi/d\alpha^2 = 5,6$: équilibre stable; 3) la courbe $\Pi(\alpha)$ passe par les points suivants : (0; 0), (41,41°; -0,4); (60°; 0), (90°; 3,2).

22.6.2 2) $F_{cr} = \pi^2 EI/(4L^2) \Rightarrow$ déformée exacte; 3) pour $\tilde{v} = ax^2$, $\tilde{F}_{cr} = 3EI/L^2$; 4) $\tilde{F}_{cr} = 2,5 EI/L^2$; 5) pour $\tilde{v} = ax^2 + bx^3$, respectant les appuis, $\tilde{F}_{cr} = 2,486 EI/L^2$.

22.6.3 1) Le mode de flambement est plus ventru en bas qu'en haut ; 2) pour $\tilde{v} = a \sin(\pi x/L)$, $\tilde{F}_{cr} = 6,580 EI/L^2$; 3) $\tilde{F}_{cr} = 6,537 EI/L^2$ (valeur exacte : $F_{cr} = 6,435 EI/L^2$).

22.6.4 2) Il faut tenir compte du travail des trois forces ; avec $\tilde{v} = a(1 - \cos(\pi x/(2L)))$, on obtient $\tilde{F}_{cr} = 0,9413 EI/L^2$.

22.6.5 2) Il faut prendre en compte l'énergie emmagasinée par flexion dans la poutre BC ; avec $\tilde{v} = ax^2 + bx$, on obtient $\tilde{F}_{cr} = 2,13 EI/L^2$. *Note* : avec la déformée résultant d'une force horizontale agissant en B, le résultat est nettement meilleur : $\tilde{F}_{cr} = 1,84 EI/L^2$.

Bibliographie

Contrairement à la statique appliquée, les ouvrages traitant de la mécanique des structures sont légion. La valeur de ces ouvrages est parfois inégale ; certains développent divers sujets de manière très détaillée, d'autres omettent des notions considérées ici comme essentielles, d'autres enfin débordent souvent sur la théorie des structures, la mécanique des solides, voire les méthodes numériques.

Ce livre est construit en s'appuyant en partie sur les quatre premiers ouvrages cités ci-dessous ; les trois derniers traitent des sujets avancés ; le dernier n'aborde que deux sujets : les contraintes dans les poutres et les principes du travail virtuel et de l'énergie.

MASSONNET CH., *Résistance des matériaux* (vol. 1), Dunod, Paris, 1968 (épuisé).

MASSONNET CH., CESCOTTO S., *Mécanique des matériaux*, De Boeck, Bruxelles, 1992.

GERE J. M., TIMOSHENKO S. P., *Mechanics of Materials*, Chapman & Hall, London, 1998.

POPOV E. P., *Introduction to Mechanics of Solids*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

BEER F. P., JOHNSTON E. R., *Mechanics of Materials*, McGraw-Hill Book Co, New York, 1992.

FEODOSSIEV V., *Résistance des matériaux*, Editions MIR, Moscou, 1966.

SHANLEY F. R., *Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co, New York, 1957.

MASSONNET CH., *Résistance des matériaux* (vol. 2), Sciences et Lettres, Liège, 1976 (épuisé).

ODEN J. T., *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill Book Co, New York, 1967.

Plasticité et analyse limite des structures font souvent l'objet d'ouvrages séparés. En langue française, les deux premiers textes cités ci-dessous font référence et la Deuxième partie de ce livre s'en inspire fortement. La littérature en langue anglaise est beaucoup plus abondante et seuls quelques livres classiques sont rappelés ici.

MASSONNET CH., SAVE M., *Calcul plastique des constructions* (vol. 1, Structures dépendant d'un paramètre) :

- deuxième édition, Centre belgo-luxembourgeois d'information de l'acier, Bruxelles, 1967 (épuisé) ;
- troisième édition, Editions Nélisten, Angleur-Liège (Belgique), 1977 (épuisé).

HORNE M. R., *Plastic Theory of Structures*, Second edition (SI units), Pergamon Press, Oxford, 1979.

BAKER S. J., HEYMAN J., *Plastic Design of Frames* (Vol. 1, Fundamentals), Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

CALLADINE C. R., *Engineering Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

NEAL G. B., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Third edition, Chapman and Hall, London, 1977.

Index

Les numéros renvoient aux chapitres (un chiffre), aux sections (deux chiffres) ou aux paragraphes (trois chiffres).

- Accommodation, 7.5.4
- Acier à palier, 7.2.2
- Aire
 - équivalente, 4.4, 11.1.2
 - réduite, 10.3.2
- Akesson, 19.2
- Allongement, 2.3, 4
- Amortisseur, 7.8.1
- Analogie du tas de sable, 19.1.1
- Analyse limite, 14.1
 - théorèmes fondamentaux de l'—, 17, 17.1
- Angle de torsion, 8.1
 - par unité de longueur, 8.1
- Anisotrope, 2.2
- Anneau, 4.6
- Anslin, 12.10.24
- Appui élastique, 20.8.1
- Aptitude au service, 3.4.2
- Assemblage(s), 11.2.1
 - longitudinal, 11.2.1, 11.4
 - moyen d'—, 11.2.1
 - rupture des —, 11.3
 - transversal, 11.2.1
- Austin, 21.4.3
- Autocontrainte, voir état d'—
- Axe
 - de cisaillement ou torsion, 9.10
 - neutre, 5.2.1, 5.2.2
 - neutre plastique, 15.3, 15.4
- Bäcklund, 19.2
- Bande de Lüders, 7.2.2
- Bauschinger, 7.2.3
- Bernoulli, 2.4.3, 2.7.6, 5.2.1
- Betti, 13.3
- Bifurcation, 20.3, 22.2, 22.3
 - charge critique de —, 20.3.1
 - flambement par —, 20.3, 20.3.1, 20.5
 - point de —, 20.3.1, 22.2
- Boltzmann, 7.11.5
- Boucle d'hystérésis, 7.5.4
- Bredt, 8.7.2
- Burgers, 7.11.5
- Campus, 21.5.2
- Caquot, 7.10.3
- Caractéristiques mécaniques, 2.2, 2.5.5, 23.1
- Cas de charge de calcul, 3.4.5
- Castigliano, 12.6, 13.5
- Cauchy, 1.1, 14.1
- Cellule, 8.4
- Centre
 - de cisaillement, 9.9, 9.9.2, 9.10
 - de pression, 6.3.3
 - de torsion, 8.1, 9.9, 9.9.2, 9.10
- Charge
 - facteur de —, 3.4.3
 - limite, 14.1, 14.2, 16.1, 16.2.1
 - ultime de flambement, 21.3.1
- Charge critique, 20.2, 20.2.2, 20.3, 20.5
 - d'Engesser, 20.5.2
 - d'Euler, 20.3.1, 20.3.2
 - de bifurcation, 20.3.1
 - de Shanley, 20.5.3
 - du module tangent, 20.5.2, 20.5.4
- Cinématique licite, 17.4
- Cisaillement
 - axe de —, 9.10
 - centre de —, 9.9, 9.9.2, 9.10
 - direct, 11.3
 - flux de —, 8.7.2, 8.7.4, 9.4, 11.4
 - limite d'élasticité en — pur, 7.10.1
- Clapeyron, 13.2.1, 13.2.2
- Clark, 21.5.2
- Coefficient
 - d'équivalence, 4.4, 8.10
 - de dilatation thermique linéaire, 4.8
 - de Poisson, 2.6
 - de pondération, 3.4.3
 - de sécurité, 3.3.1
 - de viscosité, 7.8.1
- Compression, 4
 - essai de —, 2.4
 - résistance à la —, 2.5.3

- Conception (de la sécurité)
 - déterministe, 3.3
 - semi-probabiliste, 3.4, 21.5.1
- Condition
 - cinématique, 2.4.2
 - cinématique de plasticité, 17.2
 - statique de plasticité, 17.2
- Constante de torsion, 8.1
 - équivalente, 8.10
- Contraction latérale, 2.6
- Contrainte(s)
 - admissible, 3.3.2
 - critique, 20.4.2, 20.5.4
 - de comparaison, 7.10.1
 - différence des —, 7.3
 - état de —, 1.1
 - ligne de — nulle, 6.3.2, 6.4.1
 - moyenne de flambement, 21.3.2
 - nominale, 7.2.1
 - normale, 1.1
 - résiduelles, 14.3.4, 15.2.4, 21.1
 - tangentielle, 1.1
 - tangentielle longitudinale, 8.3, 9.3.1, 11.4
 - thermique, 4.8
 - vecteur —, 1.1
 - vraie, 7.2.1
- Coulomb*, 5.2.1, 7.10.3, 19.1.1
- Courbe(s)
 - critère de la — intrinsèque, 7.10.3
 - d'Euler, 20.4.3
 - de flambement, 20.4.3, 20.5.4
 - de Wöhler, 7.3
 - européennes de flambement, 21.3.2, 21.6.6, 21.8
 - intrinsèque, 7.10.3
- Courbure, 5.2.2, 10.2.1, 10.3.3, 15.5
 - élastique maximale, 15.2.1
 - permanente, 15.2.4
 - thermique, 10.4.5, 12.8.1
- Critère
 - d'équilibre, 22.1
 - d'instabilité, 22.3
 - de la courbe intrinsèque, 7.10.3
 - de plastification, 7.10.1
 - de résistance des matériaux raides, 7.10.2
 - de Tresca ou de la contrainte tangentielle maximale, 7.10.1
 - de Trefftz, 22.4
 - de von Mises, 7.10.1
 - rhéologique, 7.1, 7.10
- Crotti*, 13.5
- d'Alembert*, 2.8
- Déchargement élastique, 2.5.2, 7.7.2, 15.2.4
- Déformation
 - axiale, 2.3
 - latérale ou transversale, 2.6, 5.2.3
 - vitesse de —, 7.5.3
- Déformée, 5.1, 10, 10.1
- Déplacement, 5.4.3, 8.1, 10, 12, 23.3
 - axial, 4.1, 4.2
 - radial, 4.6
- Déterminant de stabilité, 20.3.4, 22.3, 22.5.4
- Déversement, 5.4.3, 20.7
- Diagramme
 - contrainte-dilatation, 2.5, 2.5.1, 7.2.1
 - de Southwell, 20.2.6
- Diaphragme, 8.8
- Différence des contraintes, 7.3
- Dilatation, 2.3
 - élastique maximale, 2.5.2
 - latérale ou transversale, 2.6
 - permanente, 2.5.2, 7.5.3, 14.3.4
 - thermique, 4.8
 - volumique, 2.6
- Divergence, 20.2, 22.2, 22.3
 - flambement par —, 20.1.1, 20.2, 21.2
- Dogan*, 18.6.2
- Donnell*, 20.8.2
- Droite de Hooke, 2.5.2, 7.7.1
- Ductile (matériau), 2.5.1
- Dynamique, 2.8
- Ecrouissage, 7.7.2
 - linéaire, 7.11.3
 - zone de l'—, 2.5.2
- Effet
 - Bauschinger, 7.2.3
 - différé, 7.5.2
- Effort normal, 4, 6, 11, 14, 18
 - élastique maximal, 14.2
 - excentré, 6.3.3
 - plastique, 14.2
- Effort rasant, 9.3, 9.3.2
- Effort tranchant, 9, 11, 18
 - plastique, 18.3.2
 - réduit, 9.11.3
- Egale résistance, 4.2, 5.5
- Elancement, 20.4.2, 21.3.3
 - limite, 20.4.3
- Elasticité, 2.1
 - limite d'—, 2.1, 2.5.2
 - limite d'— conventionnelle, 2.5.2
 - limite d'— inférieure, supérieure, 7.2.2
 - module d'—, 2.3, 2.4.5
 - module d'— à l'origine, 7.5.4

- Encastrement élastique, 20.8.1
 Energie, 13, 22
 — de déformation, 13.2.1
 — des forces extérieures, 13.2.3
Engesser, 12.6, 13.5, 20.5.2, 20.5.3
 Entretoise, 8.8
 Eprouvette, 2.4.1
 Equation
 — d'Euler-Lagrange, 13.9
 — de travail, 17.7
 Equation différentielle
 — de la déformée due à l'effort tranchant, 10.3.3
 — de la déformée flexionnelle, 10.2.1
 — des poutres fléchies, 10.2.2
 — du déplacement axial, 4.2
 Equilibre
 critère d'—, 22.1
 état d'— critique, 22.3
 — global, 3.4.2
 — indifférent, 20.3.1, 22.1
 — instable, 20.3.1, 22.1
 méthode de l'— adjacent, 20.3.1
 nature de l'—, 22.1
 — neutre, 20.3.1, 22.1
 — stable, 20.3.1, 22.1
 Essai
 — de courte durée, 7.5.4
 — de torsion, 8.3
 — de traction, de compression, 2.4, 7.2.1
 — sur tronçon court, 14.4.3
 Etat
 — d'autocontrainte, 4.5.2, 14.3.4, 14.3.5, 16.6
 — d'équilibre critique, 22.3
 — de contrainte, 1.1
 Etat limite, 3.4.2
 — d'utilisation, 3.4.2
 — ultime, 3.4.2
Euler, 2.3, 5.2.1, 13.9, 20.3.1, 20.4.3
 Facette, 1.1
 Facteur
 — d'amplification du second ordre, 20.2.5, 20.8.4, 21.4.2
 — de charge, 3.4.3
 — de forme, 15.5.3, 15.6.1
 — de résistance, 3.4.3
 Fatigue, 3.4.2, 7.3
 limite de —, 7.3
Feinberg, 17.9.4
 Fibre neutre, 5.2.1
Fisher, 7.3
 Flambage, voir flambement
 Flambement, 20, 21, 22
 charge ultime de —, 21.3.1
 contrainte moyenne de —, 21.3.2
 courbe de —, 20.4.3, 20.5.4
 courbes européennes de —, 21.3.2, 21.6.6, 21.8
 longueur de —, 20.4.1
 mode de —, 20.3.1
 — par bifurcation, 20.3, 20.3.1, 20.5
 — par divergence, 20.1.1, 20.2, 21.2
 — par torsion, 20.1.2
 phénomènes de —, 20.1.2
 — plan ou par flexion, 20, 20.1.2, 21, 21.4.1, 22
 — spatial ou par flexion-torsion, 20.1.2, 21.4.1, 21.5.2
 Flèche, 10.2.1, 23.3
 Flexibilité (ressort), 20.8.1
 Flexion
 — composée, 6.2
 — composée oblique, 6.4
 — composée plane, 6.3
 flambement par —, voir flambement
 module de —, 5.4.2
 — oblique, 6.1
 plan de —, 5.2.1, 5.3
 — plane, 5, 5.2.1, 5.3
 — pure, 5.1, 5.2
 — simple, 5.1, 5.7, 9.1
 Fluage, 7.5
 — primaire, secondaire, tertiaire, 7.5.3
 rupture par —, 7.5.4
 Fluide de Newton, 7.8.1
 Flux de cisaillement, 8.7.2, 8.7.4, 9.4, 11.4
 Fonction de contrainte, 8.1, 19.1.1
 Force
 — critique, voir charge critique
 — d'inertie, 2.8
 théorème de la — unité, 12.6, 12.8, 12.9.2
 Forme intégrale
 — de l'équilibre, 12.3
 — de la cinématique, 12.4
 Formule
 — d'interaction, 18.2, 18.3, 21.5.2
 — de Bredt, 8.7.2
 — de l'effort rasant, 9.3.2
 — de Navier, 5.2.2
 — de Saint-Venant, 8.5
 — du tube ou des chaudières, 4.7
 Fragilité, 7.4.1
Frangopol, 3
Frey, 12.10.24, 18.6.2, 20.6.16
Galilée, 5.2.1
 Gauchissement, 10.3.1
Gauss, 3.4.4
 Glissement
 module de —, 8.3
 — moyen, 10.3.2

- Gonflement latéral, 2.6
- Griffith*, 9.9.2
- Guest*, 7.10.1
- Hartmann*, 20.5.4, 21.5.2
- Hétérogène, 2.2
- Hill*, 21.5.2
- Hirt*, 7.3
- Holt*, 20.5.4
- Homogène, 2.2
- Hooke*, 2.1, 2.3, 5.2.1
- Huber*, 7.10.1
- Hypothèse
 - de linéarisation matérielle, 2.7.2
 - des rotations modérées, 20.1.3
- Hystérésis, 7.5.4
- Imperfection
 - géométrique équivalente, 21.5.2, 21.6.6
 - géométrique et matérielle, 21.1, 21.2
- Incertitude, 3.2
- Inertie
 - équivalente, 5.6, 11.1.2
 - force d'—, 2.8
- Instabilité, 3.4.2, 20.1.2, 22
 - critère d'—, 22.3
 - énergétique, 22
 - linéaire, 22.2, 22.4
 - nature de l'—, 22.2
 - phénomènes d'—, 20.1.2
- Interaction, formule d'—, 18.2, 18.3, 21.5.2
- Isotrope, 2.2
- Jirousek*, 10.3.2
- Joint, 11.2.1
- Jourawski*, 9.3.1
- Kelvin*, 7.11.4
- Lagrange*, 13.9
- Laplace*, 3.4.4
- Lemmes de Feinberg, 17.9.4
- Licite
 - cinématique —, 17.4
 - statique —, 17.3
- Ligne
 - de contrainte nulle, 6.3.2, 6.4.1
 - de Lüders, 7.2.2
 - moyenne, 8.4
- Limite
 - de fatigue, 7.3
 - de proportionnalité, 2.1, 2.5.2
- Limite d'élasticité, 2.1, 2.5.2
 - conventionnelle, 2.5.2
 - en cisaillement pur, 7.10.1
 - inférieure, supérieure, 7.2.2
- Linéarisation matérielle, hypothèse de —, 2.7.2
- Linéarité (matérielle), 2.1
- Loi
 - constitutive ou de comportement, 2.2, 2.3, 7.6, 17.2
 - de Bernoulli ou de conservation des sections planes, 2.4.3, 2.7.6, 5.2.1, 14.2.2, 15.1
 - de Laplace-Gauss, 3.4.4
 - de Ramberg-Osgood, 7.7.2
 - moment-courbure, 15.5, 15.6
- Loi de Hooke, 2.1, 2.3
 - généralisée, 7.9
 - unidimensionnelle, 2.3, 7.7.1
- Longueur de flambement, 20.4.1
- Lüders*, 7.2.2, 7.10.1
- Macroscopique, 1.2
- Maier-Leibnitz*, 16.6
- Maillart*, 9.9.2
- Maquoi*, 20
- Massonnet*, 21.5.2
- Matériau
 - ductile, 2.5.2, 7.10.1
 - élastique linéaire, 2.1, 2.3
 - incompressible, 2.6
 - raide, 2.5.3, 7.10.2
- Maxwell*, 7.8.2, 7.10.1, 13.4, 13.7.3
- Mécanisme de ruine, 16.1, 16.2.1
- Menabrea*, 13.5
- Méthode
 - cinématique, 17.7, 17.9.3
 - d'Euler ou de l'équilibre adjacent, 20.3.1
 - de Rayleigh-Ritz, 13.6, 22.5.4
 - de Rayleigh-Ritz-Timoshenko, 22.5.1
 - des contraintes admissibles, 3.3.2, 21.5.1
 - élastique, 2.7.3, 14.1
 - énergétique (de calcul des charges critiques), 22.4
 - plastique, 2.7.3, 14.1
 - statique, 17.6, 17.9.2
- Mode de flambement, 20.3.1
- Modèle
 - de Boltzmann ou Burgers, 7.11.5
 - de Kelvin, 7.11.4
 - de Maxwell, 7.8.2
 - élastique, 7.7.1, 7.9

- élastique parfaitement plastique, 7.7.2, 14.1
- élastique plastique, plastique, rigide plastique, 7.7.2
- rhéologique, 7.8.1
- viscoélastique linéaire, 7.8.2
- visqueux linéaire, 7.8.1
- Module**
 - de flexion, 5.4.2
 - de glissement ou de Coulomb, 8.3
 - plastique, 15.2.1, 15.3, 23.4
 - plastique de torsion, 19.2
- Module d'élasticité ou de Young**, 2.3, 2.4.5
 - à l'origine, 7.5.4
 - sécant, tangent, 7.7.2
- Mohr**, 7.10.3, 12.6
- Moment, moment de flexion**, 5, 6, 11, 15, 18
 - élastique maximal, 15.2.1
 - équivalent, 21.4.3
 - non linéaire, 20.8.4, 21.4.2
 - plastique, 15.2.1, 15.4
 - plastique réduit, 18.2.1, 18.5
- Moment de torsion**, 8, 11, 19
 - additionnel, 9.9.5
 - élastique maximal, 19.1.2
 - plastique, 19.1.1
- Moment statique équivalent**, 5.6, 9.6, 11.1.2
- Moyen d'assemblage**, 11.2.1
- Multiplicateur**, 16.2.1, 17.5
 - critique, 22.4
 - limite, 17.5
- Nadai**, 19.1.1
- Navier**, 2.6, 5.2.1, 5.2.2
- Newton**, 2.8, 7.8.1
- Nœud**, 11.2.1
- Noyau central**, 6.4.2
- Osgood**, 7.7.2
- Palier, palier d'étirage**, 2.5.2, 7.2.2
 - acier à —, 7.2.2
- Paroi**
 - d'épaisseur modérée, 8.9.4
 - mince, 8.4
- Patin**, 7.11.3
- Pièce, voir poutre**
- Plan**
 - de flexion, 5.2.1, 5.3
 - de sollicitation, 5.3
 - neutre, 5.2.1
- Plasticité**
 - condition cinématique de —, 17.2
 - condition statique de —, 17.2
 - théorie de la —, 14.1
 - zone de la —, 2.5.2
- Point**
 - d'inflexion, 10.2.3
 - de bifurcation, 20.3.1, 22.2
 - limite, 22.2
- Poisson**, 2.6
- Postulat (de Cauchy)**, 1.1
- Poutre**, 2.7.7
 - à parois minces, 8.4
 - composée, 4.3, 4.4, 5.6, 8.10, 9.6, 11.1.2, 14.2.2, 15.4
 - courte, longue, 20.4.3
- Prandtl**, 19.1.1
- Précontrainte**, 4.5
 - pertes de —, 4.5.6, 7.8.3
- Principe**
 - d'équivalence, 1.3
 - de d'Alembert, 2.8
 - de Rayleigh, 22.4
 - de Saint-Venant, 2.7.5
 - de superposition généralisé, 2.7.4
 - des déplacements virtuels, 12.3, 16.3
 - des forces virtuelles, 12.4
- Propriétés mécaniques**, 2.2, 2.5.5, 7, 23.1
- Quotient de Rayleigh**, 22.5.1
- Raccourcissement**, 2.3, 4
- Raide (matériau)**, 2.5.1
- Ramberg**, 7.7.2
- Rankine**, 7.11.9
- Rayleigh**, 13.3, 13.6, 22.4, 22.5.1
- Récipient sous pression**, 4.7
- Recouvrance**, 7.5
- Redistribution plastique entre sections**, 16.1
- Rein**, 20.5.4
- Relaxation**, 7.5
- Résistance**
 - à la compression, 2.5.3
 - à la traction, 2.5.2, 2.5.3
 - égale —, 4.2, 5.5
 - facteur de —, 3.4.3
- Ressort**, 2.1, 7.8.1, 20.8.1
- Retrait**, 7.8.3
- Rigidité (ressort)**, 20.8.1
- Rimawi**, 18.6.2
- Ritz**, 13.6, 22.5.1, 22.5.4
- Rotations modérées, hypothèse et théorie des —**, 20.1.3
- Rotation plastique**, 15.7.2, 16.3, 17.2

- Rotule plastique, 15.7.2
- Ruine, 3.2, 3.4.2, 14.1, 14.3.3
- Ruine plastique, 16.1, 16.2
 - partielle, 16.2.2
 - plus que complète, 16.2.3
- Rupture, 2.5.2, 2.5.3, 3.4.2, 7.2.1
 - des assemblages, 11.3
 - dilatation de —, 7.2.1
 - fragile, 3.4.2, 7.4.1
 - par fluage, 7.5.4
- Saint-Venant*, 2.7.5, 4.5.2, 5.2.1, 8.1, 8.5
- Second ordre
 - théorie du —, 20.1.3
 - facteur d'amplification du —, 20.2.5, 20.8.4, 21.4.2
- Section
 - âme-semelles, 5.5
 - composée, 8.4, 8.9
 - fermée, tubulaire, en caisson, 8.4, 8.7
 - massive, 8.4, 8.5
 - multicellulaire, 8.4
 - ouverte, 8.4, 8.6
- Sections planes, loi de conservation des —, 2.4.3, 2.7.6
- Sécurité, 3
 - coefficient de —, 3.3.1
 - conception déterministe de la —, 3.3
 - conception semi-probabiliste de la —, 3.4
 - structurale, 3.4.2
- Shanley*, 20.5.3
- Smith*, 20.1.2
- Solide de Hooke, 7.8.1
- Sollicitation
 - composée, 11.1
 - plastique, 18.2.1
- Southwell*, 20.2.6
- Statique licite, 17.3
- Striction, 7.2.1
- Structure hyperstatique, 12.9
- Sturm*, 20.5.4
- Superposition, principe de — généralisé, 2.7.4
- Taerwe*, 16.7
- Taylor*, 9.9.2
- Température, 4.8, 7.4, 12.8.1
 - de transition, 7.4.1
- Templin*, 20.5.4
- Test de la variation seconde, 22.4
- Théorème(s)
 - cinématique, 17.1, 17.7, 17.9.1
 - combiné, 17.1, 17.8, 17.9.1
 - de Clapeyron extérieur, 13.2.2
 - de Clapeyron intérieur, 13.2.1
 - de la force unité, 12.6, 12.8, 12.9.2
 - de Maxwell, 13.4, 13.7.3
 - de réciprocité de Betti, 13.3
 - de stationnarité, 13.5
 - énergétiques, 13.5
 - fondamentaux de l'analyse limite, 17, 17.1
 - premier — de réduction, 12.9.2
 - second — de réduction, 12.9.2
 - statique, 17.1, 17.6, 17.9.1
- Théorie
 - de l'élasticité, 14.1
 - de la plasticité, 14.1
 - des rotations modérées ou du second ordre, 20.1.3
 - géométriquement non linéaire, 20.1.3
- Tiers central, 6.3.3
- Timoshenko*, 9.9.4, 20.3.5, 22.5.1
- Torsion, 8, 19
 - angle de —, angle de — par unité de longueur, 8.1
 - axe de —, 9.10
 - centre de —, 8.1, 9.9, 9.9.2, 9.10
 - constante de —, 8.1
 - essai de —, 8.3
 - flambement par —, 20.1.2
 - pure, 8.1
 - uniforme, 8, 8.1
- Traction, 4
 - essai de —, 2.4, 7.2
 - résistance à la —, 2.5.2, 2.5.3
- Travail, 12.1
 - équation de —, 17.7
 - interne dissipé dans une rotule, 17.2
 - virtuel, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5
- Tresca*, 7.10.1
- Treffitz*, 22.4
- Tube, formule du —, 4.7
- Valeur
 - caractéristique, 3.4.3, 3.4.4
 - de calcul, de dimensionnement, 3.4.3, 3.4.5
- Vecteur contrainte, 1.1
- Viscosité, coefficient de —, 7.8.1
- Vitesse de déformation, 7.5.3
- Voilement, 5.5, 20.7
- Von Karman*, 20.5.3
- Von Mises*, 7.10.1
- Williot*, 12.6
- Wöhler*, 7.3
- Young*, 2.3, 2.6
- Zone de l'écrouissage, de la plasticité, des grandes déformations, 2.5.2

Notations

$a, b, c \dots$	dimension : longueur, largeur...
\vec{a}	accélération
a	flèche
a_0	imperfection géométrique (flambement)
a_0^*	imperfection géométrique équivalente (flambement)
b	largeur
c	cohésion ; flexibilité (ressort)
c_y, c_z	coordonnées de C_T dans (y, z)
d	distance ; bras de levier ; diamètre
e	excentricité
f	flux de cisaillement
\vec{f}	vecteur contrainte
g	accélération de la pesanteur
h	hauteur ; profondeur ; degré d'hyperstaticité
h_0	altitude
i	rayon de giration ou d'inertie ($\sqrt{I/A}$)
k	rigidité (ressort) ; coefficient
k^2	F/EI (flambement)
m	masse ; coefficient d'équivalence (G_a/G_b)
n	force axiale répartie ; coefficient d'équivalence (E_a/E_b) ; nombre de...
p	pression ; force répartie (poids propre)
q	force répartie (charge)
r	rayon ; rayon de courbure
$1/r$	courbure (aussi ψ pour les poutres)
s	abscisse curviligne ; longueur curviligne ; espacement ; écart type
t	épaisseur ; temps
u	déplacement en général ; déplacement axial ; allongement ; raccourcissement
u, v, w	composantes du déplacement de translation
v	déplacement transversal ; flèche
x	axe d'une poutre droite ; abscisse
(x, y, z)	système d'axes cartésiens (direct)
x, y, z	coordonnées
$A, B, C \dots F, G, H \dots P, Q, R$	force ou action concentrée
A_x, A_y, A_z	composantes de A
A	aire
dA	élément d'aire, facette
B	aire réduite (effort tranchant)
C	cas de charge (sécurité semi-probabiliste) ; constante ; coefficient du calcul du moment équivalent (flambement)
C_T	centre de cisaillement ou torsion

D	diamètre
E	module d'élasticité ou de Young
E_0	module d'élasticité à l'origine
E_s, E_t	module d'élasticité sécant, tangent
\vec{F}_a	force d'inertie (d'Alembert)
F_{cr}	force ou charge critique (flambement)
$F_{cr, t}$	charge critique du module tangent
F_u	force ou charge ultime de flambement
G	centre géométrique (figure plane)
G	poids propre ou mort total ; module de glissement ou de Coulomb
I	inertie (moment, produit)
I_p	moment d'inertie polaire
I_{\max}, I_{\min}	moments d'inertie principaux
J	constante de torsion
L	longueur ; portée
L_K	longueur de flambement
L_Ω	périmètre de la ligne moyenne d'une section fermée
M	moment ; moment de flexion
M_{eq}	moment équivalent (flambement)
N	effort normal
O	origine des axes
P	force de précontrainte ou prétension ; énergie potentielle des forces extérieures
Q	force concentrée ; action (sécurité semi-probabiliste)
R	effort rasant ; réaction d'appui ; rayon ; résistance (sécurité semi-probabiliste)
S	moment statique ; effet des actions (sécurité semi-probabiliste)
S_{demi}	moment statique de la demi-section droite par rapport à l'axe neutre ($Z = 2S_{\text{demi}}$)
S	coupe ; surface de coupe
S^+	face positive (d'une surface de coupe)
T	moment de torsion ; température ; variation de température
\mathcal{T}	travail (plasticité ; équation de travail)
U	énergie potentielle de déformation
U_0	densité d'énergie de déformation
U^*	énergie de déformation complémentaire
V	volume ; effort tranchant
W	module de flexion ; travail
W^*	travail complémentaire
X	inconnue hyperstatique
Z	module plastique
$\alpha, \beta, \gamma \dots$	angles ; coefficients
α	coefficient de dilatation thermique linéaire ; facteur de forme (Z/W)
β	glissement moyen (effort tranchant)
γ	coefficient de sécurité ; poids volumique (ρg) ; glissement (τ/G) ; coefficient de pondération (sécurité semi-probabiliste)
ε	dilatation ; déformation
ε_e	dilatation élastique maximale (σ_e/E)

ε_{lat}	déformation transversale (contraction latérale, gonflement latéral)
ε_V	dilatation volumique
$\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$	vitesse de déformation
ε_5	dilatation de rupture
ε_{ij}	tenseur déformation
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	composantes de la déformation
θ	rotation en général ; rotation (section) ; pente (poutre) ; rotation plastique
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	composantes du déplacement de rotation
θ_x	angle de torsion
λ	multiplicateur (des actions) ; élancement
λ_{lim}	multiplicateur limite (plasticité)
λ_e	élancement limite (flambement)
μ, η	coefficients
μ	coefficient de viscosité (Newton)
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique ($\gamma = \rho g$)
σ	contrainte normale
σ_e	limite d'élasticité
$\sigma_{0,2}$	limite d'élasticité conventionnelle
σ_p	limite de proportionnalité
σ_t, σ_c	résistance à la traction, à la compression
σ^*	contrainte de comparaison
σ_{cr}	contrainte critique
σ_K	contrainte moyenne de flambement
σ_{ij}	tenseur contrainte
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	composantes de l'état de contrainte
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} ; \sigma_1, \sigma_2$	contraintes principales (tridimensionnelles ; bidimensionnelles)
τ	contrainte tangentielle
τ_e	limite d'élasticité en cisaillement pur
φ	angle de frottement
ψ	courbure ($1/r$)
χ	angle de torsion par unité de longueur ($d\theta_x/dx$)
Δ	déterminant
Δ	axe ; direction
Π	énergie potentielle totale
Π^*	énergie complémentaire totale
Φ	fonction de contrainte
Ω	aire limitée par la ligne moyenne (section creuse)
Ω	solide ; corps ; configuration ; structure
Ω, Ω'	configuration initiale, déformée
Ω_0, Ω_{hyp}	structure isostatique, hyperstatique

Indices

<i>a</i>	acier ; premier matériau (pièce composée)
<i>b</i>	béton ; bois ; second matériau (pièce composée)
<i>c</i>	compression
<i>cr</i>	critique (flambement)
<i>d</i>	calcul, dimensionnement (dû aux actions ; sécurité semi-probabiliste)
<i>e</i>	élasticité ; limite d'élasticité ; élastique maximal
<i>f</i>	fermé (torsion)
<i>k</i>	caractéristique
<i>m</i>	moyen ; matériau
<i>mw</i>	moyen dans l'âme
<i>n</i>	normal
<i>o</i>	ouvert (torsion)
<i>p</i>	proportionnalité ; polaire ; précontrainte
<i>pl</i>	plastique
<i>s</i>	sécant
<i>t</i>	traction ; tangent
<i>th</i>	thermique
<i>u</i>	ultime ; ruine ; rupture
<i>w</i>	âme
<i>x, y, z</i>	coordonnée ; composante selon l'axe <i>x</i> , <i>y</i> ou <i>z</i>
<i>F</i>	action (γ_F ; sécurité semi-probabiliste)
<i>K</i>	flambement
<i>M</i>	flexion
<i>N</i>	effort normal
<i>T</i>	torsion
<i>V</i>	effort tranchant ; volume
0	à l'origine ; de référence
∞	à l'infini ; asymptotique
add	additionnel
adm	admissible
alu	aluminium (alliage)
cir	circonférentiel
dec	déchargement
dim	calcul, dimensionnement (résistance ; voir l'indice <i>d</i>)
el	élastique (phénomène élastique, par opposition à plastique)
ext, int	extérieur, intérieur
fat	fatigue
fl	fluage
hyp	hyperstatique
inf, sup	inférieur, supérieur
lat	latéral (déformation transversale)
lim	limite (plasticité)

lin	linéaire
lon	longitudinal
max, min	maximal, minimal
nl	non linéaire
per	permanent
pl	plastique (voir el)
rad	radial
rec	recouvrance
rot, tra	rotation, translation
rsd	résiduel
sta	stabilité
tot	total

Abréviations et symboles

Abréviations

°C	degré Celsius
h	heure
J	joule
kg	kilogramme
m	mètre
min	minute
N	newton
Nm, N·m	newton mètre (moment)
rad	radian
s	seconde

§	paragraphe
sect.	section
chap.	chapitre
vol.	volume
appl.	application
fig.	figure
ex.	exercice
sol.	solution
n°, No.	numéro
cf.	confer

cste	constant, constante
horl.	horlogique
mat.	matériau
trig.	trigonométrique

ALCOA	Aluminium Company of America
ASCE	American Society of Civil Engineering
CEB	Comité Euro-international du Béton
CECM	Convention Européenne de la Construction Métallique
CIDECT	Comité International pour le Développement et l'Etude de la Construction Tubulaire
CRIF	Centre de Recherches scientifiques et techniques de l'Industrie des Fabrications métalliques
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte
ICOM	Institut de statique et structures – Construction Métallique
LSC	Laboratoire de mécanique des Structures et milieux Continus
MSM	Mécanique des matériaux – Stabilité des constructions – Mécanique des structures
WRC	Welding Research Council

Symboles

\vec{a}	vecteur
\dot{a}	dérivée par rapport au temps
$f(\dots)$	fonction (de...)
$\delta \dots$	virtuel ; variation première
$\delta^2 \dots$	variation seconde
$\Delta \dots$	accroissement ; différence
π	3, 14159 ...
e	2, 71828 ... (base des ln)
\sum	somme
$ a $	valeur absolue
∞	infini
\rightarrow	tend vers
\Rightarrow	entraîne
\mapsto	devient
\varnothing	diamètre
$//$	parallèle (à)
\perp	perpendiculaire (à)
\sim	équivalence statique (vol. I, § 2.3.3)
ψ, ρ	papillon de courbure (vol. I, sect. 9.3)
\tilde{a}	valeur approchée
\underline{a}	valeur <i>équivalente</i> , au sens <i>plusieurs matériaux transformés en un</i>
\bar{a}	valeur imposée
a^+	valeur positive, plus grande que..., de traction
a^-	valeur négative, plus petite que..., de compression



François Frey, de nationalité suisse, né en 1941, obtient le diplôme d'ingénieur civil en 1965 à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). En 1967, il entre au Département MSM de l'Université de Liège. Il participe à l'enseignement, à la recherche, à l'activité des laboratoires, à diverses expertises, aux travaux de commissions nationales et internationales, etc. En 1978, il obtient le titre de docteur en sciences appliquées, sa thèse portant sur l'analyse numérique non linéaire des structures et solides. Nommé professeur à l'EPFL en 1979, il y enseigne le calcul des structures et solides, et les techniques de modélisation numérique, aux sections de Génie civil et d'Architecture. A la tête du Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus (LSC), il dirige un groupe de recherche essentiellement orienté vers le développement et l'application des méthodes numériques de l'ingénieur, dans les domaines suivants: non-linéarités des structures et milieux continus (grands déplacements, instabilité, plasticité, fracture...), théorie des éléments finis (éléments hybrides-Trefftz, singularités, estimations d'erreur), informatique avancée (programmation par objets, codage symbolique automatique, systèmes experts), EAO, CAO et graphisme. Suite à un séjour d'un an à l'Université de Californie de San Diego, le calcul et l'utilisation des matériaux composites avancés font également partie des sujets de recherche du LSC.

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE GÉNIE CIVIL

Le gel et son action sur les sols et les fondations

Finaliste au Prix Roberval 1992

Prix spécial du Jury Henri-Courbot 1993

Michel Dysli

Pour le constructeur de routes et en général pour l'ingénieur civil, le gel est un phénomène dont il faut tenir compte et que l'on peut dans certains cas utiliser. Sous les climats tempérés, l'ingénieur doit surtout le maîtriser: il doit concevoir ses constructions de manière à ce qu'elles résistent aussi bien au gel qu'au dégel des sols; le dégel étant le phénomène le plus critique.

Ce livre concerne essentiellement les régions du globe soumises à des climats tempérés à froids; il n'est pas prévu pour les climats très froids de l'Arctique ou de l'Antarctique. Il donne, tout d'abord, quelques éléments de climatologie, puis analyse les propriétés et les mécanismes des sols qui ont une relation avec le gel. L'action de ce dernier sur les sols est ensuite analysée en détail sur un plan pratique comme théorique. La fin de l'ouvrage est consacrée au dimensionnement au gel des constructions du génie civil et comprend de nombreux exemples. Cet ouvrage est, en grande partie, le résultat des recherches menées depuis de nombreuses années au Laboratoire de mécanique des sols de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Le climat et les échanges thermiques - Les sols - Le gel dans les sols - Dimensionnement au gel des voies de communication - Le verglas - Le gel et les autres ouvrages - Fondations dans les pergélisols.

1991, 260 pages, 20x24 cm, relié.

Construire en béton: Synthèse pour architectes

René Walther et Julien Treleani

Ce livre ne saurait imposer aux architectes une pseudo-formation d'ingénieur spécialisé dans l'analyse et le calcul des structures. Il se donne plutôt pour but d'éveiller la compréhension intuitive au comportement structural des constructions en béton. A cette fin, il présente la distinction entre le comportement de l'ouvrage à l'état de service et à l'état ultime. La notion de trajectoire des contraintes et la théorie de la plasticité sont traitées de manière approfondie, alors que le dimensionnement, relevant directement du domaine des ingénieurs du génie civil, est exposé de manière succincte. Un chapitre est consacré à la technologie des matériaux béton et acier; la précontrainte est très présente dans ce volume.

Enfin, cet ouvrage fait une large place à l'esthétique et à l'écologie. Ces critères sont rappelés tout au long du livre, sous forme de présentation de bons et mauvais exemples en tête de chapitres.

Bases. Matériaux - Trajectoires (lignes de forces) - Analyse structurale des systèmes - Bases générales du dimensionnement des pièces linéaires - Précontrainte. **Éléments structuraux.** Généralités et dispositions constructives - Poutres, cadres et grilles - Colonnes - Arcs - Murs - Dalles - Parois poreuses - Structures plissées - Coques - Structures tendues. **Exécution.** Méthodes de construction - Préfabrication - Traitement des surfaces - Fondations et fouilles.

1993, 368 pages, 20x24 cm, 144 photos couleur, relié.

Analyse des structures et milieux continus

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

François Frey

L'analyse des structures et milieux continus, discipline fondamentale pour l'ingénieur, intervient tant dans la conception d'un ouvrage que dans son calcul détaillé. Faisant suite au volume 1, *Statique appliquée*, la *Mécanique des structures*, matière riche et féconde, conduit au dimensionnement des éléments structuraux.

Pour construire, l'ingénieur doit posséder une connaissance aiguë des propriétés mécaniques des matériaux, du jeu des contraintes internes, de la déformation de la matière, de la sécurité et des dangers attachés à certaines sollicitations. Ces notions sont présentées dans ce livre sur la base des structures en barres, poutres et câbles avant tout, en se limitant à l'essentiel et au concret.

Assorti de nombreux exercices, ce livre s'adresse aux étudiants du premier cycle universitaire ainsi qu'aux ingénieurs praticiens. Il constitue le deuxième volet d'une série d'ouvrages consacrés à l'analyse des structures et milieux continus.

ISBN 2-88074-434-2



9 782880 744342 >