

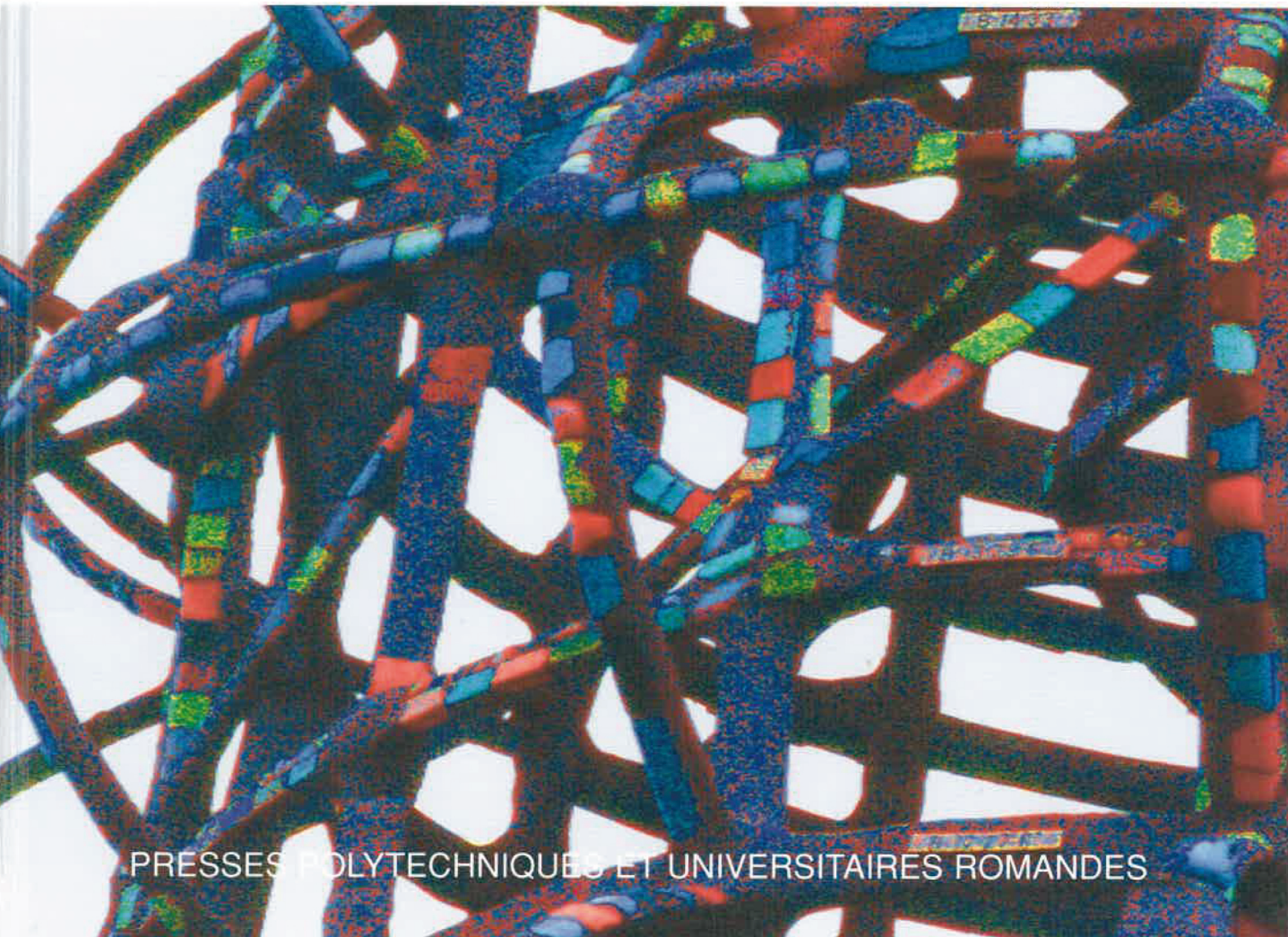
——— Traité de Génie Civil ———  
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Volume 6

# ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS

Méthode des éléments finis

François Frey et Jaroslav Jirousek



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES



# ——— Traité de Génie Civil ———

Volume 6

## ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS



**Watts Towers** (photo Fr. Frey)

*« The engineer has, since the early days of his activities, been concerned with discrete systems composed of simple elements for which he knew the basic governing behaviour... »*

Professor O. C. Zienkiewicz.

Introduction to keynote lecture *The Finite Element Method – Its Origin and Development*, 5th U. S. National Congress on Computational Mechanics, University of Colorado at Boulder, USA, 1999.

Illustration de couverture (photo Fr. Frey) :

**Watts Towers** (détail)

*Watts Towers of Simon Rodia State Historic Park,  
Los Angeles, California, USA.*



——— Traité de Génie Civil ———  
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

publié sous la direction de René Walther et Manfred A. Hirt

Volume 6

# ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS

Méthode des éléments finis

François Frey

Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Jaroslav Jirousek

Professeur honoraire à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

# Traité de Génie Civil

## de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Cet ouvrage fait partie d'une série d'une vingtaine de volumes qui sont publiés sous la direction de René Walther et Manfred Hirt, professeurs à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, dont la liste suivante, non exhaustive, présente le plan général de publication (voir l'état des parutions sur notre site web [www.epflpress.org](http://www.epflpress.org)).

1. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Statique appliquée
2. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Mécanique des structures
3. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Mécanique des solides
4. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Poutres et plaques
5. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Coques
6. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS  
Méthode des éléments finis
7. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON  
Bases et technologie
8. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON  
Aptitude au service et éléments de structures
9. PONTS EN BÉTON  
Généralités, conception et dimensionnement
10. CONSTRUCTION MÉTALLIQUE  
Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement
11. CHARPENTES MÉTALLIQUES  
Conception et dimensionnement des halles et bâtiments
12. PONTS EN ACIER  
Conception et dimensionnement des ponts métalliques et mixtes acier-béton
13. CONSTRUCTION EN BOIS  
Matériau, technologie et dimensionnement
14. VOIES DE CIRCULATION  
Routes et chemins de fer, conception et construction
15. CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES  
Ecoulements stationnaires
16. HYDRAULIQUE FLUVIALE  
Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple
17. BARRAGES  
Conception, construction, contrôle
18. MÉCANIQUE DES SOLS ET DES ROCHES
19. FOUILLES ET FONDATIONS
20. OUVRAGES ET TRAVAUX SOUTERRAINS
21. SYSTÈMES ÉNERGÉTIQUES  
Offre et demande d'énergie : méthodes d'analyse
22. AMÉNAGEMENTS ÉNERGÉTIQUES
23. ÉTUDES D'IMPACT SUR L'ENVIRONNEMENT
24. MATÉRIAUX  
Constitution et lois de comportements rhéologiques

Le Traité de Génie Civil est une publication des Presses polytechniques et universitaires romandes, fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Première édition  
© 2001, Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne  
ISBN 978-2-88074-463-2, version imprimée  
ISBN 978-2-88914-294-1, version ebook (PDF), [doi.org/10.55430/0206MEFFJ](https://doi.org/10.55430/0206MEFFJ)

Ce texte est sous licence Creative Commons :



elle vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur,  
la source et l'éditeur original, sans modifications du texte  
ou de l'extrait et sans utilisation commerciale

# Avant-propos

Cet ouvrage est le sixième et dernier de la série consacrée à l'analyse des structures et milieux continus. Le lecteur peut consulter l'avant-propos du premier ouvrage (TGC vol. 1, *Statique appliquée*), qui reste d'actualité.

Ce livre reflète, à nouveau, le cours – intitulé *Modélisation numérique des structures et solides* – dispensé aux étudiants de la section de Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) durant le cinquième semestre. Dans l'esprit du nouveau plan d'études (1999), cet ouvrage se limite volontairement à une introduction à la méthode des éléments finis dans le domaine du calcul numérique des structures et solides. Les bases présentées sont toutefois suffisamment robustes et complètes pour pouvoir aisément aborder des domaines plus larges par la suite.

La valeur du présent texte doit beaucoup à deux spécialistes de la méthode des éléments finis, G. Fonder, professeur à l'Université de Liège, et B. Rebora, collaborateur et chargé de cours du LSC. Le manuscrit a été relu entièrement par leurs soins, épuré de moult fautes et imprécisions et, de ce fait, considérablement amélioré. De plus, nous n'avons pu satisfaire que partiellement à certaines suggestions générales de G. Fonder, même si le plus souvent nous les approuvions, car les objectifs de l'enseignement sont sensiblement différents entre Liège et Lausanne. Nous avons toutefois tenu compte de la plupart de ses remarques, toujours pertinentes et constructives. Mlle P. Bomme et MM. E. Davalle et M.-A. Studer, qui ont en particulier encadré les étudiants dans les séances d'exercices et de travaux pratiques, ont aussi fortement contribué à la qualité de ce livre.

Enfin, nous remercions également les Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) qui ont apporté un soutien décisif à la réalisation de ce volume et mis à notre disposition les talents de Mme M.-H. Gellis pour la composition et la mise en page et ceux de M. J.-F. Casteu pour l'exécution des dessins et graphiques.

François Frey  
Jaroslav Jirousek



# Introduction

## La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle connaît, depuis 1970 environ, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voire familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capables de résoudre des problèmes d'une étonnante complexité. Mais, pour l'utilisateur, il s'agit souvent de boîtes noires. De l'avis des auteurs, il est primordial d'avoir une connaissance de base solide des principes, théories et méthodes utilisés dans la méthode des éléments finis pour pouvoir utiliser ces programmes dans les problèmes pratiques avec sûreté et sécurité. Certains appliquent la méthode des éléments finis d'une façon inconsidérée ou abusive ; d'autres font confiance aux résultats d'un programme sans les contrôler. De telles attitudes sont extrêmement dangereuses et peuvent conduire à des catastrophes (cela s'est, malheureusement, déjà produit).

## Un défi

L'enseignement de la méthode des éléments finis aux étudiants se destinant au Génie civil est devenu, depuis 1990 environ, un véritable défi.

Cet enseignement se place, d'ordinaire, au début du second cycle des études universitaires, vu qu'il nécessite, pour être valorisé, de connaître plusieurs disciplines de base : analyse (calcul différentiel et intégral) et calcul numérique, algèbre linéaire et géométrie, mécanique des structures et solides. Or, au second cycle, la nature de l'enseignement quitte ces disciplines théoriques pour s'orienter largement dans celles plus concrètes du métier de l'ingénieur civil. L'étudiant attend cette transition avec impatience. La méthode des éléments finis, avec ses nombreuses équations, interpolations et intégrales, apparaît alors comme une intruse et est souvent mal reçue.

Cette situation est d'autant plus paradoxale que la méthode des éléments finis est précisément un outil destiné à épauler l'étudiant et l'ingénieur dans l'étude d'un projet, en le soulageant des calculs fastidieux par exemple. Elle permet aussi d'aborder des problèmes complexes, puisqu'elle peut résoudre les équations générales décrivant les phénomènes physiques, ce qui évite de devoir recourir aux multiples méthodes particulières et approximatives destinées au calcul manuel. Or cette méthode a, aujourd'hui encore et notamment en Suisse, de la peine à pénétrer dans certains milieux : la résistance à l'innovation reste, parfois, marquée...

Les auteurs ont testé, pendant plus de quinze ans, diverses approches dans l'enseignement de la méthode des éléments finis, de la plus concrète à la plus abstraite. Une approche trop simple lasse



rapidement l'étudiant, qui ne voit pas le potentiel promis de la méthode, tandis qu'une approche plutôt abstraite et mathématique le décourage, car trop éloignée des préoccupations de l'ingénieur.

Finalement – et une fois de plus – l'approche déductive s'avère la plus porteuse. Appliquant d'abord la méthode des éléments finis à des notions connues, on peut ensuite généraliser et extrapoler plus facilement. A ce propos, il est remarquable de constater que l'étudiant accepte et utilise les notions mathématiques de la méthode s'il en a préalablement reçu les interprétations concrètes et pratiques.

## Cadre de l'ouvrage

Certains regretteront que cet ouvrage se limite à l'application de la méthode des éléments finis aux solides et structures.

L'expérience a appris aux auteurs qu'il fallait d'abord bien ancrer les notions nouvelles propres à la méthode en s'appuyant sur un domaine d'application que l'étudiant domine. Les extensions sont alors plus faciles à formuler. De plus, suite à la mise en application du nouveau plan d'études de la section de Génie civil à l'EPFL (1999), ce choix s'est trouvé justifié : en effet, l'esprit du nouveau plan d'études est de donner, dans chacune des branches de l'ingénieur civil, une formation de base restreinte, mais permettant ensuite à l'étudiant de choisir et construire lui-même son plan d'études selon ses aspirations propres. C'est ainsi que la plupart des branches possèdent un cours de base (en tronc commun jusqu'au cinquième semestre), suivi de cours d'approfondissement (en option du sixième au huitième semestre).

Le cadre de cet ouvrage est finalement le suivant. Seul le comportement statique linéaire (matériel et géométrique) des solides et structures est envisagé. En structures, on s'arrête aux plaques ; les coques, dont la formulation numérique par la méthode des éléments finis est nettement plus difficile, sont abordées dans le volume 5 du Traité de Génie civil en même temps que la théorie des coques. Les méthodes numériques en dynamique font l'objet d'un cours donné par le Dr Th. Zimmermann, collaborateur et chargé de cours du LSC. De même, certains problèmes non linéaires (de géométrie et de matériau) sont traités dans des cours séparés. Enfin, la plupart des aspects mathématiques de la méthode des éléments finis sont laissés de côté et, au niveau des éléments finis, on ne traite en détail que le modèle déplacement, qui est le plus répandu.

Pour les applications de la méthode des éléments finis aux domaines autres que les solides et structures, mentionnés au chapitre 13, on consultera les ouvrages spécialisés (bibliographie).

## Notations

La notation utilisée est, évidemment, la notation matricielle (symbole romain gras). Toutefois, on n'a pas cherché à l'imposer systématiquement ; quand les notations traditionnelles (explicite ou indicielle) sont plus appropriées, on y recourt.

De même, on a renoncé à une rigueur de notation excessive (par exemple : lettres majuscules pour les matrices et minuscules pour les vecteurs, ou majuscules au niveau de la structure et minuscules au niveau d'un élément fini) ; une certaine tolérance, par ailleurs, ne nuit pas à la clarté du texte.

# Table des matières

AVANT-PROPOS .....	v
INTRODUCTION .....	vii
TABLE DES MATIÈRES .....	ix
<b>1 Mécanique et méthodes numériques – Méthode des déplacements</b>	
1.1 Mécanique numérique .....	1
1.2 Méthode des éléments finis .....	2
1.3 Cadre de l’ouvrage .....	5
1.4 Méthode des déplacements (structures en barres et poutres) .....	7
1.5 Exercices .....	16
1.6 Lexique .....	19
1.7 Annexe – Convention graphique .....	19
<b>2 Méthode matricielle des déplacements (structures en barres et poutres)</b>	
2.1 Introduction .....	21
2.2 Découper et assembler .....	21
2.3 Matrice de rigidité et vecteur charge de l’élément .....	22
2.4 Rotation .....	25
2.5 Combinaison d’états indépendants .....	29
2.6 Condensation .....	29
2.7 Assemblage .....	32
2.8 Conclusions .....	38
2.9 Exercices .....	38
2.10 Lexique .....	42
2.11 Annexe – Quelques notations .....	43
<b>3 Vers la méthode des éléments finis</b>	
3.1 Introduction .....	45
3.2 Interprétation physique .....	45
3.3 Attributs d’un élément fini .....	48
3.4 Conditions aux limites .....	51
3.5 Nécessité d’une théorie .....	53
3.6 Forme différentielle ou forte des équations de la mécanique des solides et des poutres ..	54

3.7	Forme intégrale ou faible des équations d'équilibre de la mécanique des solides et des poutres .....	57
3.8	Exercices .....	59
3.9	Lexique .....	61
<b>4</b>	<b>Construire un élément fini – Choix des champs inconnus</b>	
4.1	Nouveautés .....	63
4.2	Modèles d'éléments finis .....	65
4.3	Méthode de Galerkin .....	67
4.4	Caractéristiques de la méthode de Galerkin .....	68
4.5	Choix du champ des déplacements (interpolation) .....	69
4.6	Exercices .....	74
4.7	Lexique .....	75
<b>5</b>	<b>Critères de convergence</b>	
5.1	Notion de convergence .....	77
5.2	Critères de convergence – Point de vue physique .....	79
5.3	Assouplissement des critères et <i>patch test</i> .....	81
5.4	Critères de convergence – Un rien plus mathématique .....	82
5.5	Applications .....	85
5.6	Exercices .....	91
5.7	Lexique .....	92
<b>6</b>	<b>Construire un élément fini – Caractéristiques de l'élément</b>	
6.1	Introduction .....	95
6.2	Formulation de l'élément fini .....	95
6.3	Contraintes .....	98
6.4	Application .....	101
6.5	Exercices .....	106
6.6	Lexique .....	108
<b>7</b>	<b>Elasticité et interpolation <math>C^0</math></b>	
7.1	Introduction .....	109
7.2	Interpolation 1D .....	109
7.3	Interpolation 2D .....	110
7.4	Interpolation 3D .....	116
7.5	Transformation isoparamétrique .....	117
7.6	Intégration numérique .....	122
7.7	Distorsion des éléments finis .....	127
7.8	Vecteur force consistant .....	128
7.9	Qualités d'un élément fini .....	130

7.10	Exercices .....	131
7.11	Lexique .....	133
7.12	Annexe – Formulation d’un élément fini isoparamétrique .....	133
<b>8</b>	<b>Structures</b>	
8.1	Structures et éléments finis .....	137
8.2	Déformations et contraintes en structures .....	137
8.3	Caractéristiques des éléments finis de structure .....	140
8.4	Structures minces (continuité $C^1$ ) .....	141
8.5	Théories des structures minces .....	142
8.6	Structures d’épaisseur modérée (continuité $C^0$ ) .....	146
8.7	Théories des structures d’épaisseur modérée .....	148
8.8	Lexique .....	152
<b>9</b>	<b>Eléments finis des structures</b>	
9.1	Introduction .....	153
9.2	Poutre de Bernoulli (cas plan) .....	153
9.3	Poutre de Timoshenko (cas plan) .....	156
9.4	Plaque de Kirchhoff .....	159
9.5	Plaque de Mindlin .....	167
9.6	Eléments de plaque fiabiles .....	169
9.7	Elément de plaque-membrane et élément de coque .....	172
9.8	Exercices .....	176
9.9	Lexique .....	178
<b>10</b>	<b>Méthode des déplacements et assemblage</b>	
10.1	Introduction .....	179
10.2	Transformation de coordonnées .....	180
10.3	Localisation .....	182
10.4	Assemblage et résolution .....	183
10.5	Bielles et ressorts d’appui .....	187
10.6	Exercices .....	188
10.7	Lexique .....	190
<b>11</b>	<b>Convergence et erreur</b>	
11.1	Introduction .....	191
11.2	Energie de déformation et convergence du modèle déplacement conforme .....	191
11.3	Convergence énergétique des autres modèles .....	195
11.4	Erreur de discrétisation et taux de convergence .....	196
11.5	Mesure de l’erreur .....	198
11.6	Estimation d’erreur a priori .....	199

11.7	Estimation d'erreur a posteriori .....	200
11.8	Superconvergence .....	201
11.9	Utilisation de l'erreur et adaptation du maillage .....	203
11.10	Lexique .....	206
<b>12</b>	<b>Modélisation et discrétisation</b>	
12.1	Introduction .....	207
12.2	Modélisation du comportement de la structure .....	208
12.3	Discrétisation de la structure modélisée .....	210
12.4	Responsabilité de l'ingénieur .....	214
12.5	Application .....	214
12.6	Exercices .....	217
<b>13</b>	<b>Valeur de la méthode des éléments finis</b>	
13.1	Puissance de la méthode des éléments finis .....	219
13.2	Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis .....	224
13.3	Examen critique de la méthode des éléments finis .....	225
<b>14</b>	<b>Annexe – Calcul matriciel</b>	
14.1	Introduction .....	229
14.2	Définitions, notations et conventions .....	229
14.3	Opérations sur les matrices .....	231
14.4	Déterminant, rang et trace d'une matrice carrée .....	233
14.5	Inverse d'une matrice carrée .....	234
14.6	Décomposition des matrices en sous-matrices .....	237
14.7	Dérivation et intégration d'une matrice .....	238
14.8	Norme d'un vecteur .....	239
14.9	Résolution d'un système d'équations linéaires .....	239
14.10	Transformations .....	244
14.11	Valeurs propres et vecteurs propres .....	246
<b>15</b>	<b>Annexe – Matrices de rigidité et vecteurs charges des barres et poutres prismatiques</b>	
15.1	Introduction .....	253
15.2	Structure spatiale – Poutre à 12 degrés de liberté – Axes locaux $(x, y, z)$ .....	254
15.3	Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 6 degrés de liberté .....	255
15.4	Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulation) .....	256
15.5	Poutre continue (cas plan ; sans déplacement axial) .....	257
15.6	Structure plane chargée perpendiculairement à son plan (grille de poutres) Poutre à 6 degrés de liberté .....	258
15.7	Barre d'un treillis spatial .....	259



15.8	Barre d'un treillis plan .....	260
15.9	Structure plane chargée dans son plan – Vecteurs charges pour une poutre à 6 degrés de liberté – Axes locaux $(x, y)$ .....	260
15.10	Structure plane chargée dans son plan – Vecteurs charges pour une poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulé) – Axes locaux $(x, y)$ .....	263
<b>16</b>	<b>Annexe – Intégration numérique</b>	
16.1	Introduction .....	267
16.2	Principe de l'intégration numérique .....	267
16.3	Formules d'intégration numérique .....	268
16.4	Quelques règles d'utilisation .....	272
16.5	Intégration numérique sur les domaines bidimensionnels et tridimensionnels .....	272
	SOLUTION DES EXERCICES .....	277
	BIBLIOGRAPHIE .....	287
	INDEX .....	289
	NOTATIONS .....	293
	ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES .....	297



# 1 Mécanique et méthodes numériques

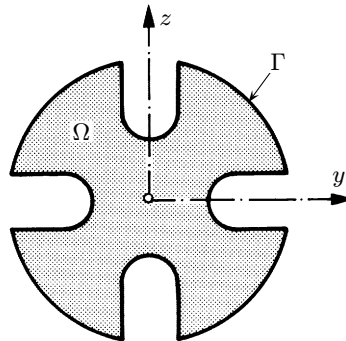
## Méthode des déplacements

### 1.1 Mécanique numérique

En mécanique de l'ingénieur, on distingue volontiers, aujourd'hui, trois domaines. La *mécanique expérimentale* est l'observation directe en laboratoire des phénomènes physiques réels. La *mécanique appliquée* crée des modèles mathématiques pour représenter ces phénomènes : c'est la *modélisation* ; elle opère le transfert des notions fondamentales de la mécanique théorique au monde des ingénieurs. La *mécanique numérique* étudie les méthodes qui permettent de résoudre les équations de la mécanique appliquée par voie numérique.

On appelle **simulation** la modélisation *et* la résolution d'un problème physique ; la simulation est *numérique* si la résolution l'est aussi. La simulation est un auxiliaire précieux de la mécanique expérimentale ; elle peut même s'y substituer lorsque sa fiabilité est garantie.

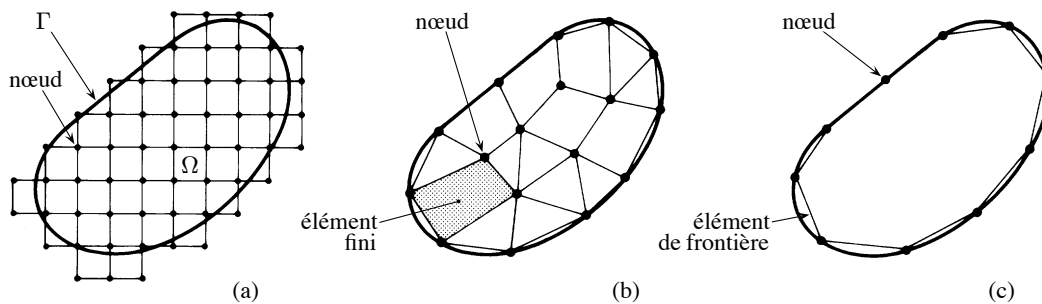
La modélisation d'un phénomène physique conduit habituellement à l'établissement, dans un domaine  $\Omega$  (volume/surface/ligne), d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, accompagnées, à la frontière  $\Gamma$  du domaine (surface/ligne/points), de conditions aux limites (fig. 1.1). Cet ensemble s'appelle, en abrégé, un *problème aux limites* et en constitue la *forme différentielle*. Il n'est pas fréquent de pouvoir en obtenir la solution analytique.



**Fig. 1.1** Problème aux limites : torsion de Saint-Venant d'une poutre prismatique (équation aux dérivées partielles dans  $\Omega$  :  $\partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = -2G\chi$  ; condition aux limites sur  $\Gamma$  :  $\phi = \text{cste}$  ;  $\Phi(y, z) =$  fonction de contrainte ;  $G =$  module de glissement ;  $\chi =$  angle de torsion par unité de longueur).

Les ingénieurs se sont donc tournés vers des méthodes de résolution approximatives qui, le plus souvent, remplacent la recherche des fonctions inconnues par la détermination d'un nombre fini de paramètres (nouvelles inconnues) liés par des équations algébriques. De telles méthodes, purement numériques, s'appellent *méthodes de discrétisation* et la plus utilisée en mécanique des structures et solides est la *méthode des éléments finis*. La *méthode des différences finies* et la *méthode des éléments de frontière* sont aussi d'emploi courant.

En gros, la méthode des différences finies vise à résoudre directement la forme différentielle du problème, en recherchant la valeur numérique des inconnues en un certain nombre de points, dits *nœuds*, formant une grille usuellement régulière (fig. 1.2a). Pour appliquer les deux autres méthodes, il faut transformer la forme différentielle en une *forme intégrale*, mathématiquement équivalente, et diviser le domaine et la frontière en un *maillage* d'éléments de forme géométrique simple ; on recherche alors la valeur numérique des inconnues en un certain nombre de points typiques du maillage, les *nœuds*, situés dans le domaine  $\Omega$  et sur sa frontière  $\Gamma$  pour la méthode des éléments finis (fig. 1.2b), ou sur la frontière  $\Gamma$  pour la méthode des éléments de frontière (fig. 1.2c).

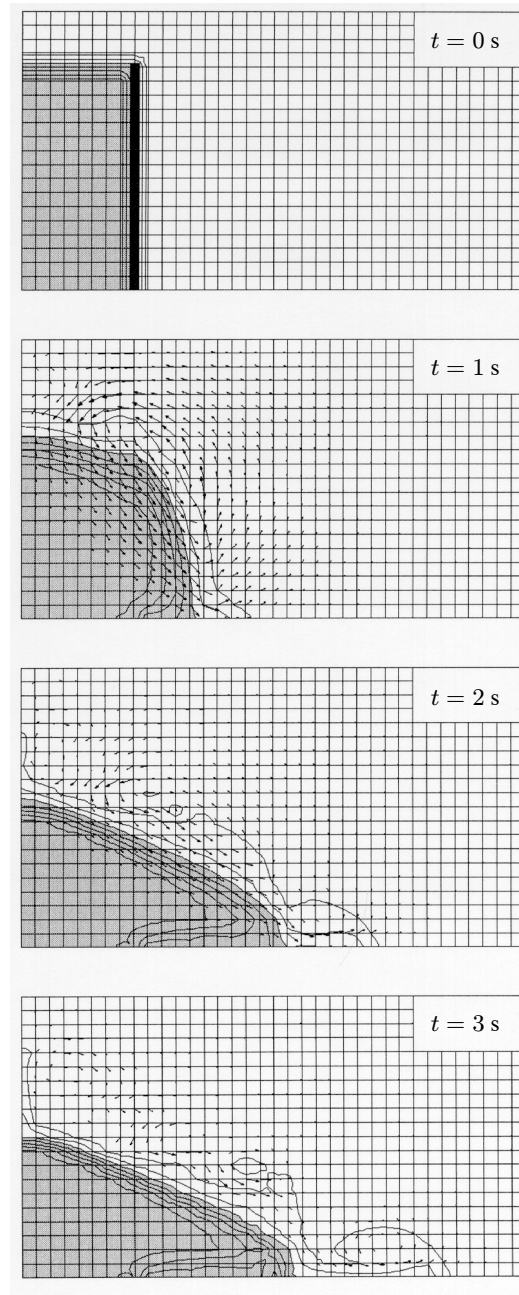


**Fig. 1.2** Maillages : (a) différences finies ; (b) éléments finis ; (c) éléments de frontière.

Différences finies, éléments finis et éléments de frontière ont leurs avantages, inconvénients et différences spécifiques, mais aussi certaines analogies (qui permettent de les coupler) ; la méthode des différences finies est toujours très populaire en mécanique des fluides, alors que celle des éléments finis domine en mécanique des structures et solides ; les éléments de frontière sont moins fréquemment utilisés.

## 1.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est apparue vers 1955, en même temps que les ordinateurs puissants (cf. encadré fin § 1.3.3). D'abord appliquée au calcul des structures et solides, elle a pris, dès 1965, une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait, en fait, une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites, lui devenait accessible : structure, solide, chaleur, fluide, combustion, électromagnétisme, acoustique... (fig. 1.3).



**Fig. 1.3** Écoulement d'un massif de granulats secs : au temps  $t = 0$ , on retire brusquement la paroi verticale ; au temps  $t = 3$  s, le massif s'immobilise selon l'angle de frottement interne. (Source : Frenette R., Eyheramendy D., Zimmermann Th., *Numerical modelling of dam-break type problems for Navier-Stokes and granular flows*, Proc. 1st Int. Conf. Debris-Flow Hazards Mitigation, ASCE, San Francisco, USA, 1997.)

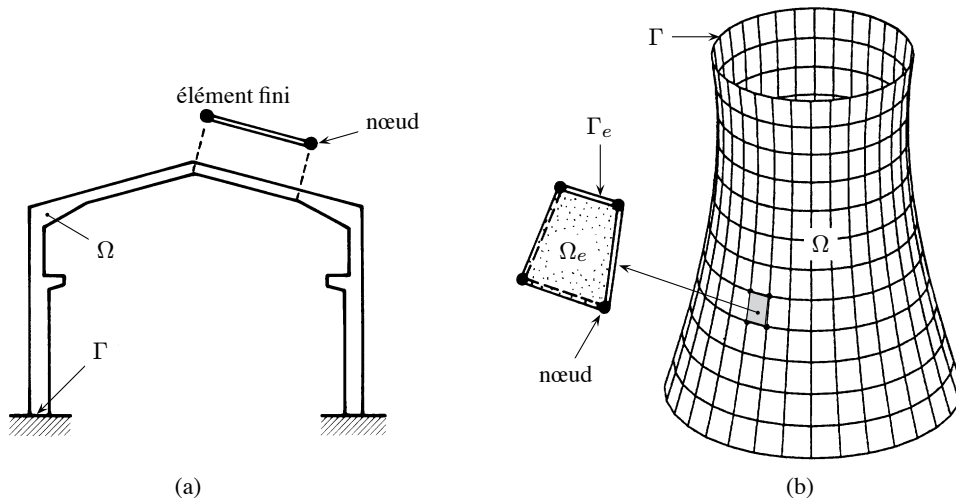


Le succès initial et actuel de la méthode des éléments finis auprès des ingénieurs confrontés au calcul des structures tient aussi dans le *point de vue physique* qu'on peut en donner. Cet aspect essentiel de la méthode est étroitement lié à ses premiers développements, qui s'inspirent directement

- du calcul des structures en barres et poutres par la *méthode des déplacements*, d'une part,
- d'un procédé de *découpage-assemblage* familier aux ingénieurs, d'autre part.

Rappelons ce procédé : si une structure a un comportement par trop complexe, l'ingénieur la subdivise en composants plus simples à analyser ; la réponse globale est alors celle des composants couplée à leurs interactions.

La méthode des éléments finis pousse ce procédé à l'extrême : le composant est un petit fragment de la structure, appelé *élément fini* et choisi de façon à être aussi simple que possible à traiter (fig. 1.4). Le découpage de la structure en éléments finis s'appelle le *maillage* (ou *réseau*). La liaison des éléments finis se formule en certains points privilégiés, les *nœuds*.



**Fig. 1.4** Découpage-assemblage : (a) cadre plan composé d'éléments finis de type poutre ; (b) tour hyperbolique découpée en quadrilatères de type coque (indice *e* pour *élément fini*).

### Remarque

**1.1 Le point de vue mathématique** considère la méthode des éléments finis comme une procédure d'approximation numérique de la solution d'un problème aux limites. On approche la solution par un ensemble (assemblage) de fonctions d'interpolation, dont chacune n'est non nulle que sur un sous-domaine de forme simple (découpage). La notion physique d'élément fini n'est, ici, nullement nécessaire.

Ce point de vue permet l'étude mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis et de ses propriétés importantes (conditions de convergence, restrictions sur le choix des fonctions, étude des erreurs, etc.), ainsi que la généralisation de son emploi aux problèmes dont l'interprétation physique est difficile (électromagnétisme, physique quantique, etc.).

## 1.3 Cadre de l'ouvrage

### 1.3.1 Formulation en déplacements

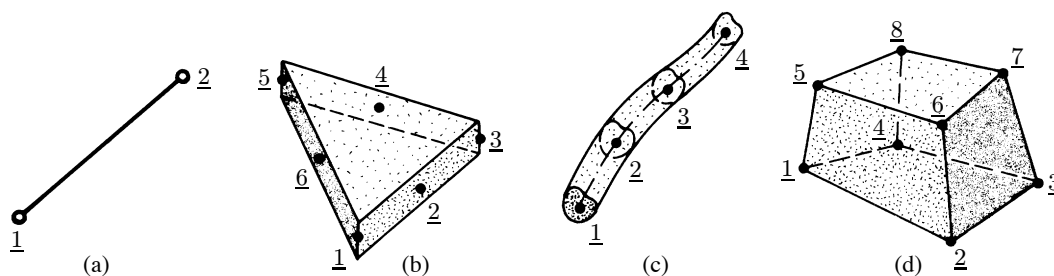
Ce texte aborde, principalement, l'application de la méthode des éléments finis au calcul des *solides* et *structures*, en régime statique matériellement et géométriquement linéaire (Introduction).

On se base avant tout sur le point de vue physique, qui permet d'expliquer pratiquement toute la démarche typique de la méthode des éléments finis. On en tire en plus l'avantage essentiel d'une compréhension concrète de la spécificité d'une méthode qui reste, ne l'oublions pas, approximative.

Enfin, on n'expose que la *formulation en déplacements*, la plus répandue, dans laquelle

- au niveau théorique, la formulation prend le champ des déplacements comme inconnue ;
- au niveau discrétisé (ou numérique), la résolution a lieu par la méthode des déplacements ;
- au niveau de l'élément fini, l'approximation porte sur le champ des déplacements.

Or la méthode des déplacements, propre à l'analyse des structures en barres et poutres (TGC vol. 4), se généralise sans difficulté aux éléments finis, quelque compliqués qu'ils soient (fig. 1.5). Il est donc naturel de commencer par elle (sect. 1.4 et chap. 2).



**Fig. 1.5** Eléments finis divers : (a) barre de treillis, élément fini le plus simple (2 nœuds) ;  
(b) élément triangulaire de plaque (6 nœuds) ; (c) élément de poutre courbe de l'espace (4 nœuds) ;  
(d) élément hexaédrique de solide (8 nœuds).

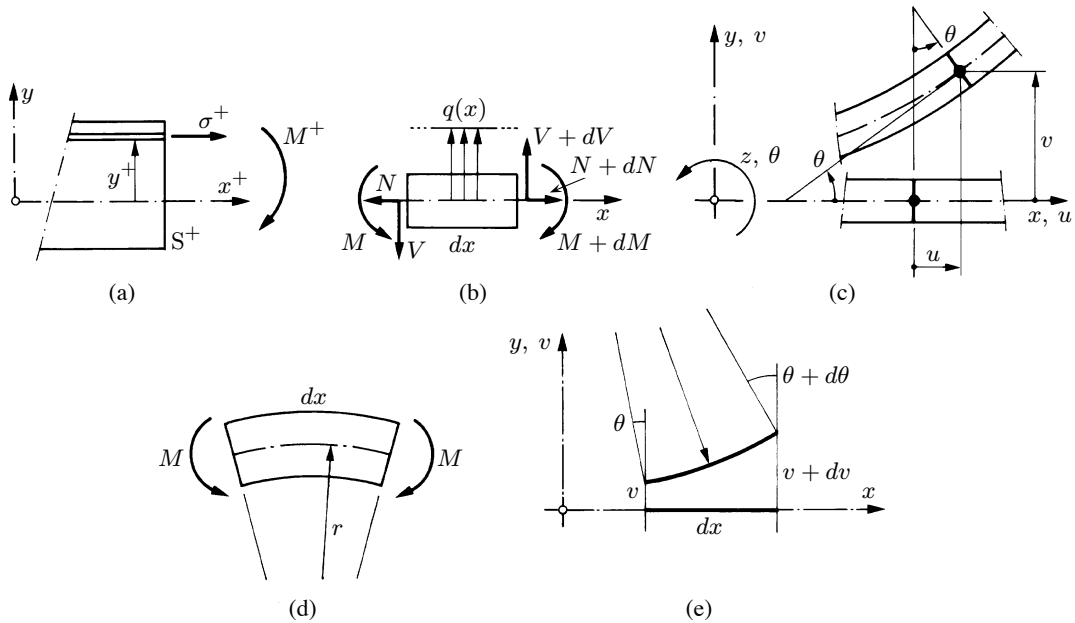
### 1.3.2 Quelques notations

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés aux structures en barres et poutres et illustrés à l'aide de cas plans. On y utilise les notations principales suivantes (TGC vol. 1, 2 et 3) :

- $M$ ,  $V$  et  $N$  sont les efforts intérieurs, où  $M$  est le moment de flexion,  $V$  l'effort tranchant et  $N$  l'effort normal ;  $q$  est la charge transversale répartie (fig. 1.6b) ;
- $u$  et  $v$  sont les déplacements de translation d'un point de l'axe (ou de la section droite) ;  $u$  est aussi appelé déplacement axial et  $v$  déplacement transversal ou flèche ;  $\theta$  est le déplacement de rotation de la section droite ; pour les poutres obéissant à la théorie de Bernoulli-Navier, la rotation de la section est identique à celle de l'axe, elle-même assimilable à la pente ( $\theta \cong \text{tg } \theta$  ; fig. 1.6c) ;
- $\varepsilon$  est la dilatation (axiale) ;  $r$  est le rayon de courbure de l'axe et  $\psi = 1/r$  la courbure (courbure géométrique ; fig. 1.6d) ;

- $E$ ,  $G$  et  $\nu$  sont le module d'élasticité (ou de Young), le module de glissement (ou de Coulomb) et le coefficient de Poisson ;  $T$  et  $\alpha$  désignent une variation de température (positive si la température augmente) et le coefficient de dilatation thermique linéaire ;  $L$  est la portée d'une poutre entre deux appuis successifs ;
- $A$ ,  $B$  et  $I$  sont l'aire, l'aire réduite (TGC vol. 2, § 10.3.2) et le moment d'inertie principal de la section droite de la poutre ; les produits  $EA$  et  $EI$  sont parfois appelés raideurs extensionnelle et flexionnelle.

Toutes ces grandeurs sont ou peuvent être fonction de  $x$ , où  $x$  est porté par l'axe (admis rectiligne) de la poutre :  $M(x)$ ,  $V(x)$ ,  $N(x)$ ,  $q(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $\theta(x)$ , etc.



**Fig. 1.6** Conventions de signe et élément de poutre : (a) moment positif ; (b) efforts intérieurs ; (c) déplacements ; (d) courbure (géométrique) sous l'action de  $M$  ; (e) courbure (mathématique) sous l'effet de  $v(x)$ .

### 1.3.3 Convention de signe en flexion

Afin d'effacer le flou qui subsiste au sujet de la convention de signe attachée aux moments de flexion (TGC vol. 2, § 5.4.1), on adopte désormais la convention suivante (fig. 1.6a) : *un moment positif agissant sur une face positive crée des contraintes positives du côté des ordonnées positives*. Cette convention est appliquée uniformément à tous les types d'éléments structuraux (poutres, plaques et coques).

Pour en comprendre l'effet, il suffit d'examiner le cas plan des poutres de Bernoulli-Navier ; les équations relatives à la flexion deviennent (fig. 1.6 ; TGC vol. 2, § 10.2.2) :

- équilibre

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \frac{dM}{dx} = V \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (1.1)$$

- loi de Hooke

$$\frac{1}{r} \equiv \psi = \frac{M}{EI} \quad (1.2)$$

- cinématique

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad \psi = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.3)$$

En fonction du champ des déplacements  $v(x)$ , on a ( $EI = \text{cste}$ )

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M \quad EI \frac{d^3v}{dx^3} = -V \quad EI \frac{d^4v}{dx^4} = q \quad (1.4)$$

### Remarque

**1.2** On relèvera, en particulier, le changement de signe survenant au niveau de la seconde équation cinématique (1.3).

#### Bref historique de la MEF

La MEF (Méthode des Eléments Finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement). Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles (Courant, 1943) ; mais elles restèrent sans suite.

L'expression *élément fini* date de 1960 (Clough). Les années 60 ont vu la MEF s'attaquer à tous les domaines du calcul des solides et structures, avant de déborder dans d'autres domaines : écoulements souterrains, transfert de chaleur, fluides, etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965). En fait, les ingénieurs (aéronautique, génie civil et mécanique surtout) développent la MEF pour l'appliquer à leurs problèmes pratiques, avant que les bases théoriques ne soient bien établies...

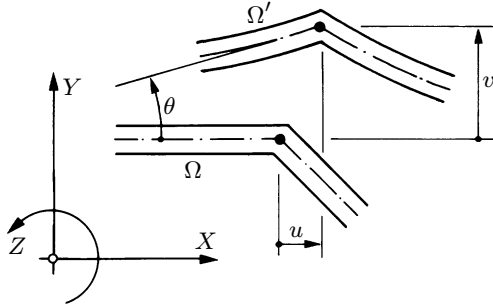
Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor est, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateurs.

## 1.4 Méthode des déplacements (structures en barres et poutres)

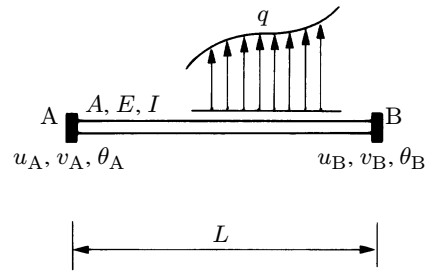
### 1.4.1 Définitions et conventions

Les *inconnues cinématiques* de la méthode des déplacements sont les composantes des déplacements des nœuds. Leur nombre et leur nature dépendent du type de structure étudiée (ex. 1.5.4).

Pour les structures en poutres situées et chargées dans un plan,  $(X, Y)$  par exemple, les trois inconnues sont, en tout nœud,  $u$ ,  $v$  et  $\theta$  (fig. 1.7). L'ingrédient de base est un tronçon AB de poutre prismatique (fig. 1.8) : si on en connaît les six déplacements des deux nœuds A et B, et les éventuelles charges, on sait en calculer la déformée, les réactions aux nœuds (ou nodales) et les efforts intérieurs.



**Fig. 1.7** Inconnues cinématiques (poutre, cas plan) : déplacements d'un nœud.

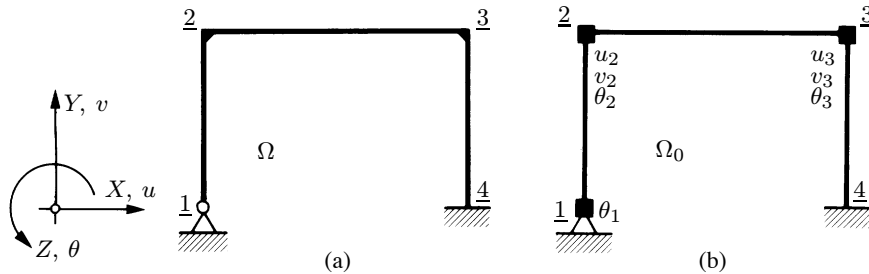


**Fig. 1.8** La poutre prismatique AB, élément de base de la méthode des déplacements.

Par suite, pour résoudre une structure plane  $\Omega$ , on la divise en poutres AB (fig. 1.8) reliées par leurs nœuds d'extrémité. En chacun d'eux, on identifie les inconnues cinématiques. Leur ensemble constitue les  $n_{\text{dep}}$  inconnues de la méthode des déplacements. On les désigne par la notation  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\text{dep}}$ .

Pour la poutre de la figure 1.8 par exemple, on a  $n_{\text{dep}} = 6$  et  $d_1 = u_A$ ,  $d_2 = v_A$ ,  $\dots$ ,  $d_6 = \theta_B$ .

Le cadre de la figure 1.9(a), quant à lui, peut être divisé en trois poutres 1-2, 2-3 et 3-4. Il comporte alors  $n_{\text{dep}} = 7$  inconnues cinématiques (en tenant compte de la déformation par effort normal) :  $d_1 = \theta_1$  (nœud 1),  $d_2 = u_2$ ,  $d_3 = v_2$ ,  $d_4 = \theta_2$  (nœud 2) et  $d_5 = u_3$ ,  $d_6 = v_3$ ,  $d_7 = \theta_3$  (nœud 3). Chaque *blocage* (ou liaison) annule (ou fait disparaître) une inconnue. Si on bloque totalement tous les nœuds ( $d_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ ), on obtient la *structure de référence*  $\Omega_0$  (fig. 1.9b).



**Fig. 1.9** Cadre plan : (a) structure donnée  $\Omega$  ; (b) structure de référence  $\Omega_0$ .

### Remarques

**1.3** La méthode des déplacements propre aux structures en barres et poutres est admise connue (TGC vol. 4).

**1.4** On doit nécessairement prendre comme nœuds les points particuliers de la structure (appuis, intersections des axes...) ; au reste, on peut choisir comme nœud tout point de l'axe d'une quelconque poutre.



**1.5** Par concision, on appelle simplement *déplacements* les composantes des déplacements ; ce sont donc les inconnues cinématiques ; dans la méthode des éléments finis, on les nomme couramment *degrés de liberté*. On qualifie parfois  $n_{\text{dep}}$  de *degré d'indétermination cinématique*.

**1.6** Dans le cadre plan de la figure 1.9, on peut ne pas prendre  $d_1 = \theta_1$  comme inconnue : on doit alors connaître les caractéristiques d'une poutre à *cinq* degrés de liberté, possédant un nœud de type articulation (appl. 2.6).

**1.7** Dans ce même cadre, on peut aussi négliger la déformation d'effort normal : il ne reste que 4 inconnues ( $\theta_1, u_2, \theta_2$  et  $\theta_3$  car  $u_3 = u_2$  et  $v_2 = v_3 = 0$ ), voire 3 si on ignore  $\theta_1$ . Négliger la déformation d'effort normal est courant dans l'application manuelle de la méthode des déplacements (méthode des rotations, méthode de Cross, etc.). Ici, *on n'introduit pas cette hypothèse*, sauf dans quelques exercices (sect. 1.5).

## 1.4.2 Equilibre des nœuds

Les équations de la méthode des déplacements (par ailleurs établies au paragraphe 1.4.4)

$$\sum_j K_{ij} d_j + S_i = Q_i \quad (j = 1, 2, \dots, n_{\text{dep}} ; i = 1, 2, \dots, n_{\text{dep}}) \quad (1.5)$$

représentent l'*équilibre des nœuds*, exprimé d'ordinaire dans un système d'axes unique, le *système global*  $(X, Y, Z)$ , attaché à la structure. Les nœuds jouent donc un rôle essentiel : les grandeurs y sont *concentrées*, forces et déplacements devant être *associés* (TGC vol. 2, sect. 12.1).

En fait, pour être « pures », les équations d'équilibre (1.5) doivent s'écrire

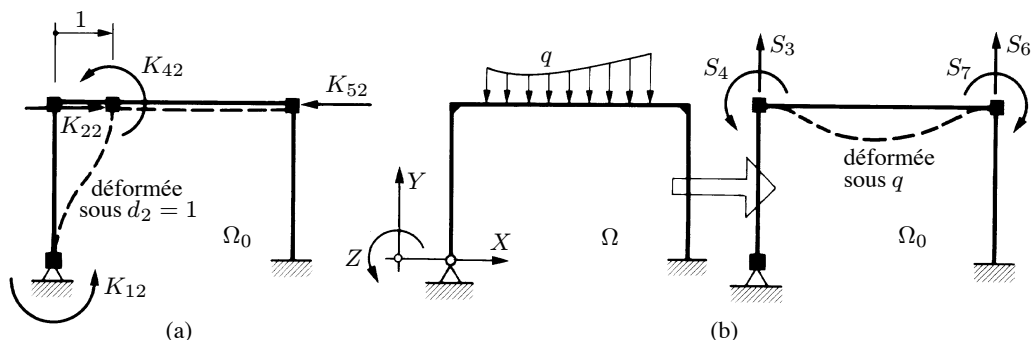
$$-\sum_j K_{ij} d_j - S_i + Q_i = 0 \quad (1.6)$$

ce qui met en évidence le fait que les termes  $K_{ij} d_j$  et  $S_i$  ne sont pas des forces exercées sur les nœuds, mais bien des *réactions*. Il en résulte les définitions suivantes :

- $K_{ij}$  est la réaction produite sur le blocage  $i$  par un déplacement unique et unité  $d_j = 1$ , et se nomme **coefficient de rigidité** ;
- $S_i$  est la réaction produite sur le blocage  $i$  par les charges (en abrégé : *réaction sous charge*).

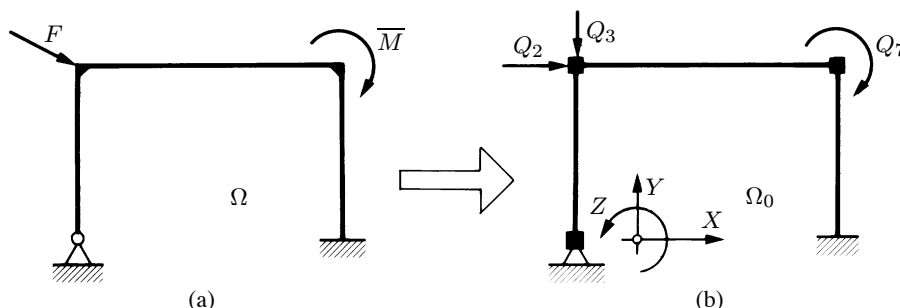
Ces définitions conduisent à :

- la propriété de symétrie  $K_{ij} = K_{ji}$  (théorème de Maxwell) du système d'équations de la méthode des déplacements ;
- la propriété  $K_{ii} > 0$  ;
- l'extériorisation des réactions  $K_{ij}$  et  $S_i$  dans la structure de référence  $\Omega_0$ , grâce aux dessins des *états de déplacement unités* et de l'*état de déplacement dû aux charges* (fig. 1.10).



**Fig. 1.10** Réactions  $K_{ij}$  et  $S_i$  dans  $\Omega_0$  (seules les réactions non nulles sont représentées, avec leur sens réel ; pour  $\Omega_0$  voir fig. 1.9) : (a) état de déplacement unit  $d_2 = 1$  ; (b) état de déplacement dû aux charges.

Une force  $Q_i$ , au contraire, est une *action* nodale : c'est la *composante, associée au blocage  $i$ , d'une charge nodale*, à savoir une charge concentrée s'exerçant directement sur un nœud (fig. 1.11).



**Fig. 1.11** Forces  $Q_i$  : (a) charges concentrées nodales (données) ; (b) composantes  $Q_i$  dans les axes, associées aux inconnues, avec leur sens d'action réel.

On voit qu'il faut diviser les charges en deux catégories :

- les charges purement nodales ;
- toutes les autres charges sollicitant directement les poutres (force répartie, variation de température, poids propre, etc.).

### Remarques

**1.8** Pour distinguer les deux sens du terme *action*, à savoir force dans le principe de l'action-réaction et charge au sens large (TGC vol. 1, sect. 1.3), on utilise désormais le terme *charge* pour le second sens.

**1.9** Tout système d'axes est choisi cartésien direct ; le système global est désigné par des *majuscules* (fig. 1.9a par exemple).

**1.10**  $K_{ij}$  est une *force* (ou *moment*) *par unité de déplacement* et en a donc les dimensions (N/m, N/rad, Nm/m, Nm/rad).

**1.11** On peut regretter d'avoir deux types de force,  $S_i$  et  $Q_i$ , qui plus est avec un changement de signe quand on construit l'effet total

$$Q_i - S_i$$

représentant le second membre du système d'équations (1.5) ; la distinction est toutefois importante : les réactions  $S_i$  dépendent des propriétés des poutres ( $L, E, A, I \dots$ ), au contraire des composantes  $Q_i$ .

### 1.4.3 Relation force-déplacement

Considérons une poutre AB comportant  $n_A$  blocages en A et  $n_B$  en B (fig. 1.12). On désigne par  $d_j^e$  les déplacements nodaux de cet élément (indice  $e$ ) isolé. Soumise à l'action

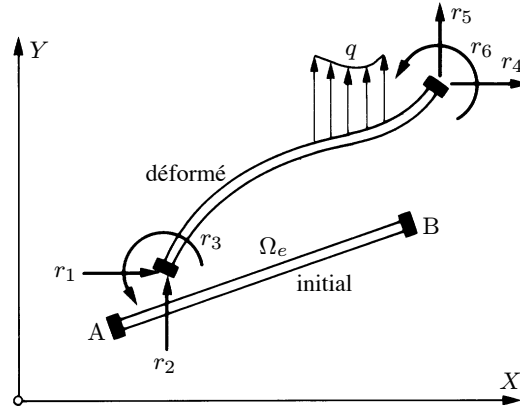
- d'un déplacement  $d_j^e$  en chacun des  $n_A + n_B$  blocages,
- de charges en travée,

cette poutre développe des réactions nodales, dont l'une quelconque d'entre elles,  $r_i$ , vaut (principe de superposition)

$$r_i = \sum_{j=1}^{n_A+n_B} k_{ij} d_j^e + s_i \quad (i = 1, \dots, n_A + n_B) \quad (1.7)$$

où les  $k_{ij}$  et  $s_i$  sont définis, au niveau de l'élément poutre AB, semblablement à  $K_{ij}$  et  $S_i$ .

Les forces  $r_i$  s'appellent **réactions**, ou **forces, internes** et l'équation (1.7) est la **relation force-déplacement**.



**Fig. 1.12** Réactions internes  $r_i$  suite aux déplacements des nœuds A et B et aux charges (ici  $n_A = n_B = 3$ ).

On peut semblablement exprimer les *efforts intérieurs*. Dans le cas plan par exemple, si  $N(d_j^e)$ ,  $V(d_j^e)$ ,  $M(d_j^e)$  sont dus aux déplacements  $d_j^e$  et si  $N_0$ ,  $V_0$ ,  $M_0$  sont dus aux charges, les efforts intérieurs totaux valent, en tout point,

$$N = N(d_j^e) + N_0 \quad V = V(d_j^e) + V_0 \quad M = M(d_j^e) + M_0 \quad (1.8)$$

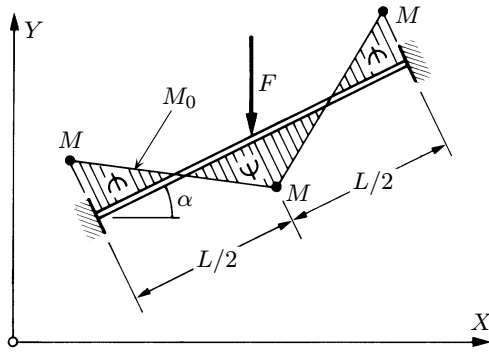
### Remarques

**1.12** La relation (1.7) se déduit directement de (1.5) si l'on observe que les réactions *extériorisées* de la poutre ( $r_i$ ) sont des forces nodales ( $Q_i$ ).

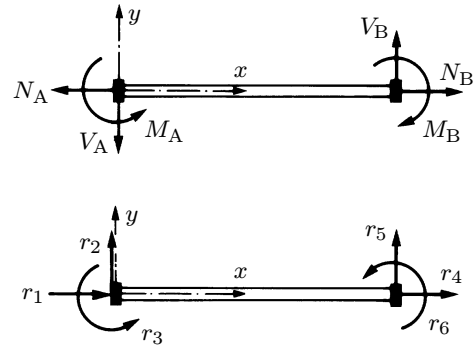
**1.13** Les efforts intérieurs  $N_0$ ,  $V_0$  et  $M_0$  sont ceux dus aux charges en travée dans  $\Omega_0$  (fig. 1.13).

**1.14** Si (1.8) est exprimé dans les axes de la poutre, les  $r_i$  coïncident, au signe près, avec les efforts intérieurs en A et B (fig. 1.14) ; en particulier, les  $s_i$  sont, au signe près et dans  $\Omega_0$ , les efforts intérieurs en A et B dus aux charges en travée.

**1.15** Au niveau d'une poutre (ou barre) isolée, on utilise des minuscules : forces  $r_i$ ,  $k_{ij}$ ,  $s_i$ , axes  $(x, y)$  (fig. 1.14), etc. ; lorsque cette convention n'est pas possible et qu'il faut distinguer l'élément isolé de la structure complète, on utilise l'indice  $e$  (par exemple :  $d_j^e$ ), indifféremment supérieur ou inférieur.



**Fig. 1.13** Diagramme des moments  $M_0$  d'une poutre prismatique bi-encastree ( $M = (1/8)FL \cos \alpha$ ).



**Fig. 1.14** Comparaison des réactions internes avec les efforts intérieurs aux extrémités (axes de la poutre).

### 1.4.4 Calcul d'une structure par la méthode des déplacements

On attache à la structure un système d'axes global  $(X, Y, Z)$  et on choisit les  $n_{\text{dep}}$  inconnues cinématiques  $d_j$ , parallèlement à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , ce qui définit  $\Omega_0$ .

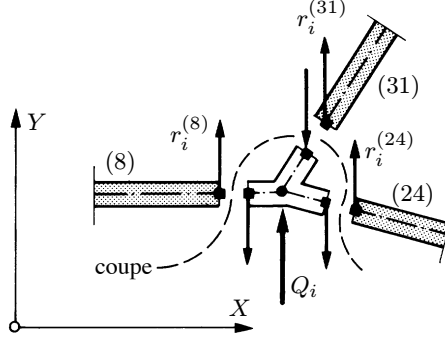
Isolons un nœud. Les forces le sollicitant selon le blocage, ou degré de liberté,  $i$  sont (fig. 1.15) :

- les réactions internes – changées de signe – des éléments (poutres, barres) concourants en ce nœud (dont l'ensemble est noté symboliquement  $\sum_{(e)}$ ) ;
- la composante nodale  $Q_i$  provenant des charges concentrées.

L'équilibre s'exprime par

$$-\sum_{(e)} r_i + Q_i = 0 \quad (1.9)$$

On ne peut pas introduire (1.7) dans (1.9) directement, car les indices n'ont pas la même signification : dans (1.9), l'indice  $i$  peut prendre toute valeur ( $1 \leq i \leq n_{\text{dep}}$ ), alors que dans (1.7),  $i$  et  $j$



**Fig. 1.15** Equilibre d'un nœud selon  $i$  (ici la translation selon  $Y$ ) ; dans cette figure,  $\sum_{(e)}$  touche les trois éléments (8), (24) et (31).

se limitent aux inconnues de l'élément poutre ( $i, j = 1, \dots, n_A + n_B$ ). Or, lorsque ce dernier fait partie d'une structure, ses degrés de liberté prennent des numéros arbitraires. Il suffit donc, pour utiliser (1.7), d'en adapter la notation :  $i$  prendra la même valeur que dans (1.9) (numéro de l'inconnue) et  $j$  variera de 1 à  $n_{\text{dep}}$ , sachant que, dans l'équation  $i$ , seuls  $n_A + n_B$  coefficients  $k_{ij}$  sont en fait non nuls ; on est ainsi en mesure de remplacer  $d_j^e$  par  $d_j$  et (1.7) devient

$$r_i = \sum_j k_{ij} d_j + s_i \quad (j = 1, \dots, n_{\text{dep}} \text{ et } k_{ij} = 0 \text{ sauf pour } n_A + n_B \text{ termes}) \quad (1.10)$$

On peut maintenant introduire (1.10) dans l'équation (1.9), écrite sous la forme  $\sum_{(e)} r_i = Q_i$ , puis appliquer cette dernière à tous les degrés de liberté de la structure ( $i = 1, \dots, n_{\text{dep}}$ ) ; on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{(e)} \left( \sum_j k_{ij} d_j + s_i \right) &= \sum_{(e)} (k_{i1} d_1 + k_{i2} d_2 + \dots + k_{in_{\text{dep}}} d_{n_{\text{dep}}} + s_i) \\ &= \left( \sum_{(e)} k_{i1} \right) d_1 + \left( \sum_{(e)} k_{i2} \right) d_2 + \dots + \left( \sum_{(e)} k_{in_{\text{dep}}} \right) d_{n_{\text{dep}}} + \left( \sum_{(e)} s_i \right) \\ &= \sum_j \left( \sum_{(e)} k_{ij} \right) d_j + \sum_{(e)} s_i \\ &= \sum_j K_{ij} d_j + S_i = Q_i \quad (j = 1, 2, \dots, n_{\text{dep}} ; i = 1, 2, \dots, n_{\text{dep}}) \end{aligned}$$

ce qui établit (1.5) et montre que les forces  $K_{ij}$  et  $S_i$  peuvent se calculer par la somme des contributions des éléments concourant en un nœud

$$K_{ij} = \sum_{(e)} k_{ij} \quad S_i = \sum_{(e)} s_i \quad (1.11)$$

Dans un calcul manuel, il est recommandé de visualiser les forces  $K_{ij}$  et  $S_i$  (fig. 1.10), ce qui règle la question de leur signe (sens d'action). Lorsque les grandeurs  $E$ ,  $A$ ,  $I \dots$  sont constantes dans un élément, on peut dresser des tableaux des coefficients  $k_{ij}$  et  $s_i$  (chaps 2 et 15).

La résolution du système (1.5) fournit les  $n_{\text{dep}}$  déplacements  $d_j$ . Pour calculer les efforts intérieurs dans un élément AB, on sélectionne, dans  $d_j$ , les  $n_A + n_B$  déplacements  $d_j^e$  relatifs à cet élément et on applique les relations du type (1.8).

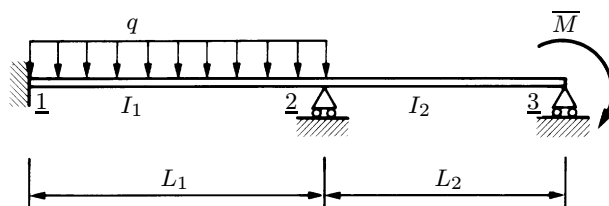
### Remarques

**1.16** Si deux degrés de liberté  $i$  et  $j$  ne sont pas connectés l'un à l'autre (par exemple par un élément),  $K_{ij} = 0$ . Ce résultat trivial est d'une grande importance dans la méthode des éléments finis (chap. 10).

**1.17** On peut vérifier que la transformation de l'équation (1.7) en (1.10) est de même nature que l'opération d'expansion réalisée dans l'exemple 2.1 (sect. 2.7).

### Exemple 1.1

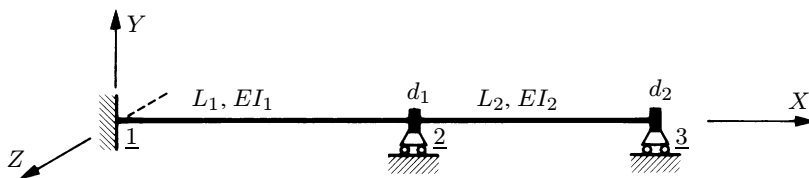
Résoudre la poutre définie par la figure 1.16 avec  $E = 3\,000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\overline{M} = 3,6 \text{ kNm}$ ,  $q = 6 \text{ kN/m}$ ,  $I_1 = 250\,000 \text{ cm}^4$ ,  $I_2 = 128\,000 \text{ cm}^4$ ,  $L_1 = 10 \text{ m}$  et  $L_2 = 8 \text{ m}$ .



**Fig. 1.16** Poutre continue 1-2-3.

### Calcul des déplacements

Les caractéristiques des poutres étant constantes par travée, on choisit avantageusement les rotations sur appui comme inconnues. On a donc  $n_{\text{dep}} = 2$  et la structure  $\Omega_0$  de la figure 1.17.



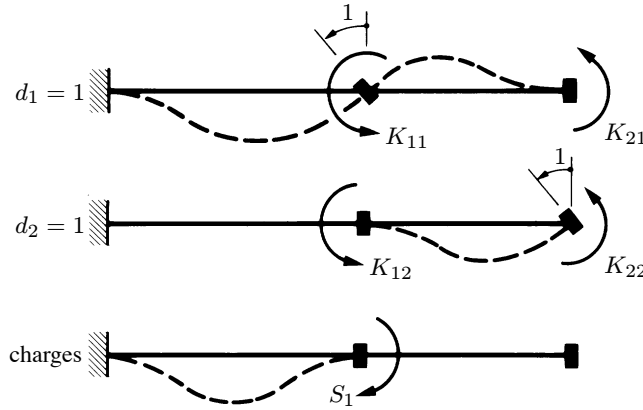
**Fig. 1.17** Structure  $\Omega_0$  ( $n_{\text{dep}} = 2$ ).

Il faut établir le système

$$K_{11} d_1 + K_{12} d_2 + S_1 = Q_1$$

$$K_{21} d_1 + K_{22} d_2 + S_2 = Q_2$$

ce qu'on réalise aisément par le tracé des états de déplacement unités et dû aux charges, et l'extériorisation des forces  $K_{ij}$  et  $S_i$  (dessinées avec leur sens d'action réel sur la figure 1.18) ; on obtient



**Fig. 1.18** Etats de déplacement unités et dû aux charges ; coefficients  $K_{ij}$ ,  $S_i$  et  $Q_i$ .

$$K_{11} = \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} \quad K_{21} = \frac{2EI_2}{L_2} \quad K_{12} = K_{21} \quad K_{22} = \frac{4EI_2}{L_2}$$

$$S_1 = -\frac{qL_1^2}{12} \quad S_2 = 0 \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = -\overline{M}$$

En introduisant les valeurs numériques et en multipliant chaque équation par  $C = L_2/(EI_2) = 1/4\,800$ , on obtient le système ([kN] et [m])

$$10,25 d_1 + 2d_2 = 50 C$$

$$2d_1 + 4d_2 = -3,6 C$$

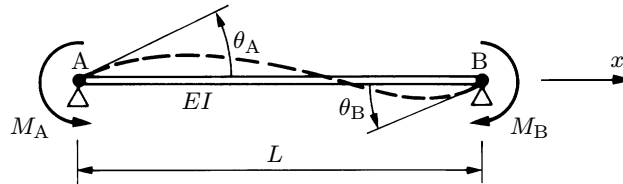
dont la solution est [rad]

$$d_1 = 5,6 C = 0,001\,167 \quad d_2 = -3,7 C = -0,000\,771$$

#### Calcul des efforts intérieurs

Une fois les déplacements obtenus, le calcul des efforts intérieurs se fait selon les règles usuelles de la statique appliquée et de la mécanique des structures. Ici, chaque poutre n'est, sur appui, soumise qu'à rotation ; les relations entre les moments et rotations en A et B d'une telle poutre (fig. 1.19) sont (TGC vol. 2, sect. 23.3, 1<sup>er</sup> cas, en respectant la convention de signe du § 1.3.3)

$$M_A = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B) \quad M_B = -\frac{2EI}{L} (\theta_A + 2\theta_B) \quad (1.12)$$



**Fig. 1.19** Poutre simple sous  $M_A$ ,  $\theta_A$  en A et  $M_B$ ,  $\theta_B$  en B.

Le terme de droite dans ces deux relations représente  $M(d_j^e)$  dans (1.8). Pour la poutre 1-2 de l'exemple (fig. 1.16), on a

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = d_1 \quad M_{01} = \frac{qL_1^2}{12} \quad M_{02} = \frac{qL_1^2}{12}$$

d'où, avec (1.12),

$$M_1 = 17,5 + 50 = 67,5 \text{ kNm} \quad M_2 = -35 + 50 = 15 \text{ kNm}$$

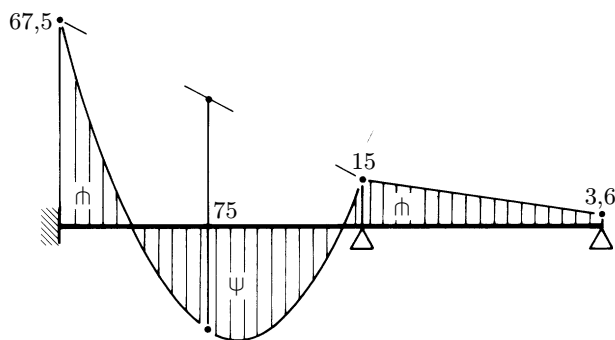
Pour la poutre 2-3, où il n'y a pas de terme  $M_0$ , on a

$$\theta_2 = d_1 \quad \theta_3 = d_2$$

d'où, dans (1.12),

$$M_2 = 15 \text{ kNm} \quad M_3 = 3,6 \text{ kNm}$$

On peut construire le diagramme des moments (fig. 1.20) et obtenir, semblablement, toute autre grandeur.

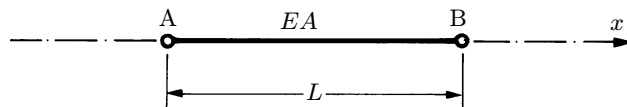


**Fig. 1.20** Diagramme des moments [kNm].

## 1.5 Exercices

**1.5.1** Résoudre la poutre de l'exemple 1.1 en n'adoptant qu'une seule inconnue cinématique.

**1.5.2** Etablir la relation force-déplacement d'une barre de treillis (non chargée entre ses nœuds) considérée comme élément structural unidimensionnel.



**Fig. Ex. 1.5.2**

**1.5.3** Etablir les termes  $s_i$  de la barre de treillis précédente soumise à une élévation uniforme  $T$  de température.

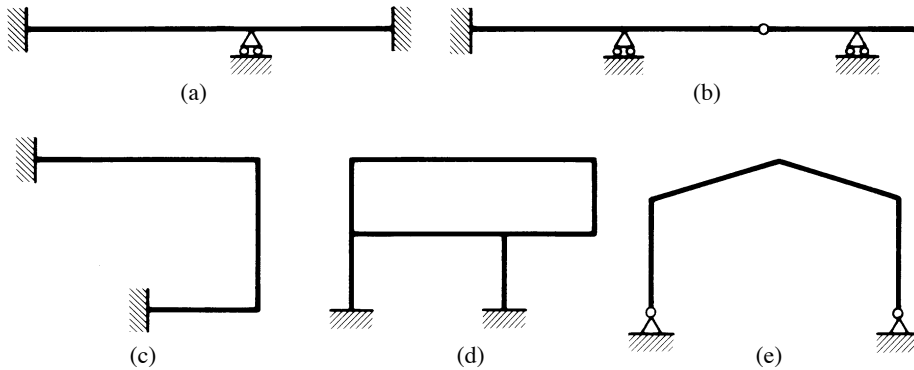
**1.5.4** Il existe six catégories de structures en barres ou poutres couramment utilisées en construction. Identifier :

- 1) chacune de ces catégories ; dessiner une structure type ;
- 2) les inconnues cinématiques (nombre et type par nœud) ;
- 3) les efforts intérieurs (nombre et type dans une section droite).



**1.5.5** Repérer les degrés de liberté  $d_j$ , leur nombre  $n_{\text{dep}}$  et la structure  $\Omega_0$  (la dessiner) de chacune des structures planes,

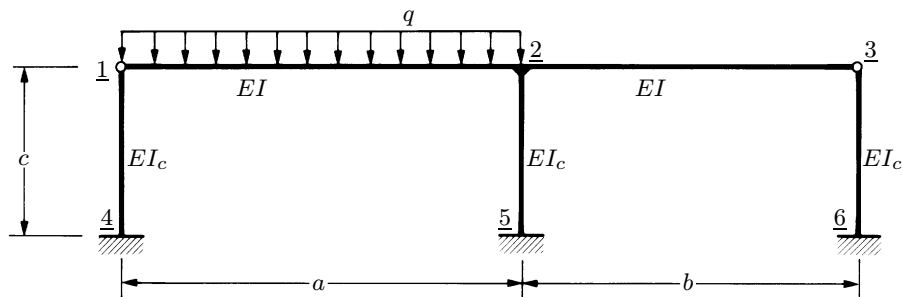
- 1) en prenant en considération, sauf pour (a) et (b),
- 2) en négligeant la déformation par effort normal. Toutes les poutres sont prismatiques.



**Fig. Ex. 1.5.5**

**1.5.6** Résoudre la structure plane 1-2-3-4-5-6 par la méthode des déplacements en négligeant la déformation par effort normal. Dessiner le diagramme  $M$ . Données :

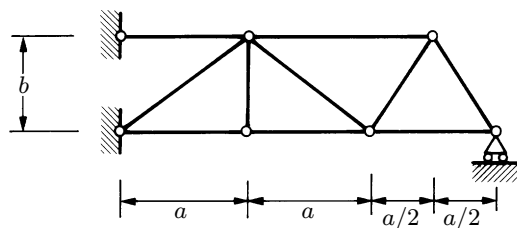
$$\begin{array}{lll}
 E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2 & I = 15\,000 \text{ cm}^4 & I_c = 10\,000 \text{ cm}^4 \\
 a = 12 \text{ m} & b = 10 \text{ m} & c = 5 \text{ m} \\
 & & q = 30 \text{ kN/m}
 \end{array}$$



**Fig. Ex. 1.5.6**

**1.5.7** Résoudre la même structure qu'à l'exercice précédent, pour une élévation uniforme de température  $T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  dans la poutre 1-2-3 ( $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ).

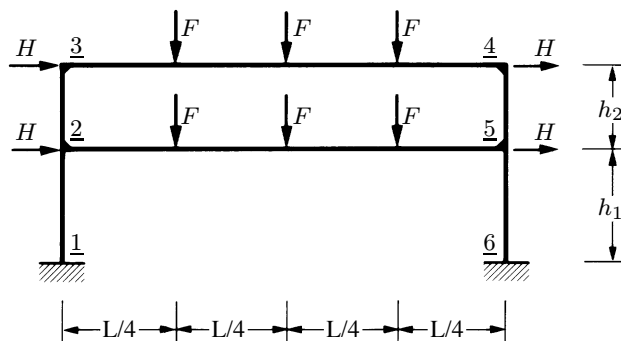
**1.5.8** Identifier les inconnues cinématiques d'un treillis plan ; parmi les coefficients de rigidité  $K_{ij}$ , repérer ceux dont la valeur n'est pas nulle (sans les calculer), sachant que  $EA = \text{cste}$ .



**Fig. Ex. 1.5.8**

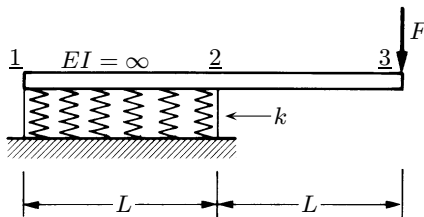
**1.5.9** Un cadre à deux étages, formé de poutres prismatiques, est sollicité par deux cas de charge : le premier est constitué des forces  $F$ , le second des forces  $H$ . Pour chaque cas de charge, en négligeant la déformation d'effort normal et en tenant compte des conditions de symétrie ou antisymétrie,

- 1) trouver les degrés de liberté (minimum strictement nécessaire) ;
- 2) établir les seconds membres  $Q_i - S_i$  correspondants ;
- 3) dessiner la portion de structure ayant un comportement identique à celui de la structure totale, lorsqu'on introduit les conditions de symétrie ou antisymétrie.



**Fig. Ex. 1.5.9**

**1.5.10** Une poutre infiniment rigide est supportée par une fondation élastique (de constante  $k$  [N/m/m]) sur la moitié de sa longueur. Identifier les inconnues cinématiques nécessaires à décrire la configuration déformée, les calculer, puis en déduire la flèche sous la charge  $F$  et le diagramme des efforts dans la fondation.



**Fig. Ex. 1.5.10**

## 1.6 Lexique

Modélisation	Choix du modèle mathématique (théorie) pour un problème physique aux limites.
Simulation	Modélisation et, surtout, résolution (numérique) du problème physique.
Méthode de discrétisation <ul style="list-style-type: none"> <li>• méthode des éléments finis</li> <li>• méthode des différences finies</li> <li>• méthode des éléments de frontière</li> </ul>	Expression d'un problème aux limites en vue d'une résolution numérique.
Maillage, nœud, élément fini...	Divisions géométriques propres à une méthode de discrétisation.
Degré de liberté	Inconnue d'une méthode de discrétisation (par exemple : déplacement d'un nœud).
Méthode des déplacements	Méthode de résolution des solides et structures prenant les déplacements comme inconnues.
Degré d'indétermination cinématique ( $n_{\text{dep}}$ )	Nombre d'inconnues de la méthode des déplacements.
Coefficient de rigidité ( $k_{ij}$ , $K_{ij}$ )	Coefficient du système d'équations de la méthode des déplacements ; réaction nodale produite par un déplacement unité d'un degré de liberté.
Réaction sous charge ( $s_i$ , $S_i$ )	Contribution des charges, sollicitant un élément, au second membre du système d'équations de la méthode des déplacements ; réaction nodale produite par ces charges.
Composante d'une charge nodale ( $Q_i$ )	Contribution d'une charge, concentrée sur un nœud, au second membre du système d'équations de la méthode des déplacements.
Relation force-déplacement	Relation statique liant réactions, déplacements nodaux et charges d'un élément isolé.
Réaction, ou force, interne ( $r_i$ )	Réaction, dans la relation force-déplacement.

## 1.7 Annexe – Convention graphique

Les *nœuds* jouent, dans la méthode des éléments finis, un rôle essentiel. Ils assurent, entre autres, la transmission des déplacements et peuvent, selon les inconnues transmises, être de nature diverse (par exemple, pour les poutres : articulation, nœud rigide, etc.).

Comme symbole graphique du nœud, on utilise un signe géométrique plein, d'abord le cercle et le carré (●, ■), si nécessaire le rectangle et le triangle (▣, ▲). Lorsqu'il s'agit d'une véritable articulation, on laisse un petit cercle blanc au centre (○).

D'autres points caractéristiques des éléments finis nécessitent d'autres symboles graphiques. En particulier, les points d'intégration numérique seront représentés par des étoiles (\*) et les points de contrainte optimaux par des carrés vides (□).



# 2 Méthode matricielle des déplacements (structures en barres et poutres)

## 2.1 Introduction

La méthode matricielle des déplacements est une version rigide et systématique de la version manuelle, en vue de son application sur ordinateur. La plupart des programmes de calcul des structures en barres et poutres sont construits selon cette démarche stricte et bien organisée, qui sied au codage sur machine. Comme les ingénieurs calculent aujourd’hui pratiquement toutes leurs ossatures à l’ordinateur, une bonne connaissance dans ce domaine est indispensable.

De plus, la méthode des éléments finis est basée sur des principes identiques : comprendre l’architecture de la méthode matricielle des déplacements appliquée aux structures en barres et poutres revient à connaître, pratiquement, celle de la méthode des éléments finis. De ce fait, certaines notions exposées dans ce chapitre ne seront pas reprises plus loin ; d’autres pourront servir de support à des généralisations ultérieures, rendues ainsi plus aisément compréhensibles.

La méthode matricielle des déplacements appliquées aux structures en barres et poutres a ouvert la voie à la méthode des éléments finis (cf. encadré fin sect. 2.6). Dans ce chapitre, on illustre la méthode avec deux éléments simples, celui de barre de treillis et celui de poutre (éléments prismatiques ; cas plans ; théorie de Bernoulli-Navier ; prise en compte de la déformation d’effort normal).

## 2.2 Découper et assembler

Les relations (1.11) montrent qu’il faut connaître – une fois la structure de référence  $\Omega_0$  choisie – essentiellement deux informations pour construire le système d’équations (1.5) de la méthode des déplacements :

- les coefficients  $k_{ij}$  et  $s_i$  provenant des éléments composant la structure ;
- l’endroit, c’est-à-dire les nœuds, où ces coefficients agissent (ainsi que les éventuelles forces concentrées en ces nœuds).

On observe que ces deux informations correspondent

- au *découpage* de la structure en éléments, pour la première, et
- à sa reconstitution, dite *assemblage* (des éléments), pour la seconde.

On procède semblablement ci-après.

### Remarques

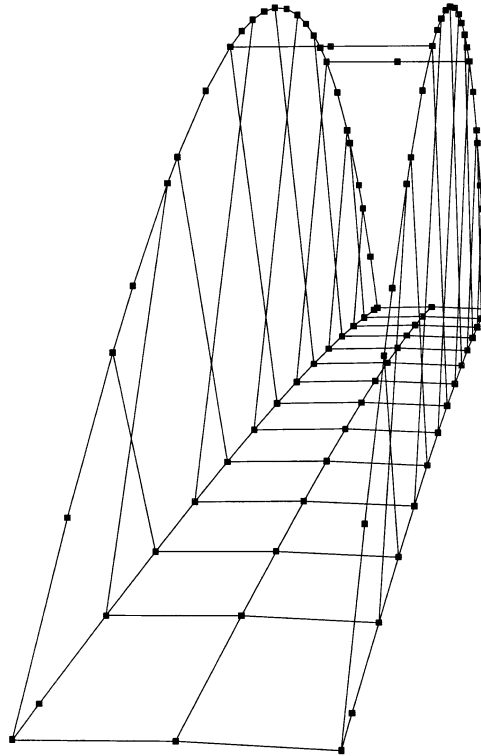
**2.1** Dans la méthode des déplacements, ce sont les *inconnues déplacements* qui dirigent toutes les manœuvres. Leur nombre, leur nature, leur ordre et leur sens dictent les opérations algébriques et matricielles, le type des forces nodales qui leur sont associées, l'importance du problème à résoudre (fig. 2.1), le choix des méthodes de travail, etc. En conséquence, pour établir ou comprendre la structure d'une équation, c'est d'abord du côté des déplacements qu'il faut regarder.

**2.2** On utilise les abréviations 1D-2D-3D pour uni-bi-tridimensionnel.

## 2.3 Matrice de rigidité et vecteur charge de l'élément

Pour un élément comportant  $n_d^e$  inconnues cinématiques, la relation force-déplacement (1.7) peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{r} = \mathbf{k}\mathbf{d} + \mathbf{s} \quad (2.1)$$



**Fig. 2.1** Discretisation 3D ( $n_d = 564$ ) en barres (suspentes) et poutres (arcs, poutres maîtresses et entretoises) pour l'étude du pont bowstring de Hermalle (Belgique, 1985 ; cf. fig. 8.2).

Dans cette relation,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d^e} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_d^e} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

sont le *vecteur des déplacements* et le *vecteur des réactions internes* de l'élément, et

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n_d^e} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n_d^e} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n_d^e 1} & k_{n_d^e 2} & \dots & k_{n_d^e n_d^e} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n_d^e} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

sont la *matrice de rigidité* et le *vecteur charge* de l'élément.

Les déplacements sont généralement ordonnés selon la *convention* suivante :

- un nœud après l'autre,
- les translations, puis les rotations,
- selon  $x$ , puis  $y$ , enfin  $z$ .

L'ordre des réactions internes, qui en découle, est le même.

La matrice  $\mathbf{k}$  est carrée (de dimension  $n_d^e \times n_d^e$ ), symétrique ( $k_{ij} = k_{ji}$ ) et ses coefficients diagonaux sont positifs ( $k_{ii} > 0$ ).

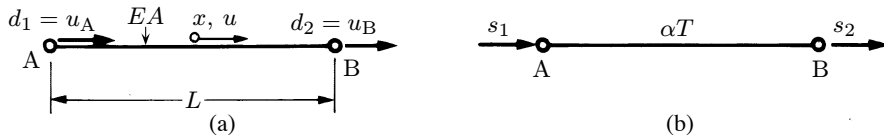
#### Application 2.1 : barre

Pour un élément de barre (fig. 2.2a), on obtient (TGC vol. 2, éq. (4.1); ex. 1.5.2)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Si l'élément est soumis à une variation  $T$  de la température (fig. 2.2b), on trouve (TGC vol. 2, exemple 4.2)

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} EA\alpha T \\ -EA\alpha T \end{Bmatrix} = EA\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$



**Fig. 2.2** Élément de barre de treillis 1D ( $n_d^e = 2$ ) : (a) déplacements ( $\mathbf{d}^T = \{u_A \ u_B\}$ ); (b) réactions sous charge (ici  $s_2 < 0$ ).

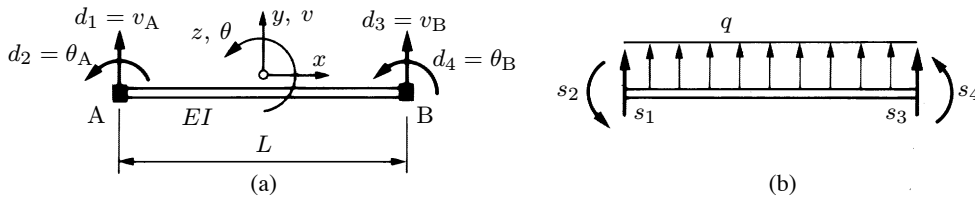
**Application 2.2 : poutre continue**

Pour un élément de poutre continue (fig. 2.3a), la théorie de la flexion mène à (TGC vol. 4)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{sym.} & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Si l'élément supporte une charge transversale uniforme  $q$  (fig. 2.3b), on obtient

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ \text{---} \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$



**Fig. 2.3** Élément de poutre continue 2D ( $n_d^e = 4$ ): (a) déplacements ( $\mathbf{d}^T = \{v_A \ \theta_A \mid v_B \ \theta_B\}$ ); (b) réactions sous charge (ici  $s_1 < 0$ ,  $s_2 < 0$  et  $s_3 < 0$ ).

**Application 2.3 : déplacements nœdaux imposés**

On a vu (§ 1.4.2) qu'une colonne  $k_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_d^e$ , de  $\mathbf{k}$  représente les réactions produites aux nœuds d'un élément par le déplacement unique et unité  $d_j = 1$ . Par suite, si un élément est soumis à un *déplacement nodal imposé*  $\bar{d}_j$  (tassement d'appui), on a

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{n_d^e j} \end{Bmatrix} \bar{d}_j \quad (2.8)$$

Si plusieurs degrés de liberté ont des déplacements imposés  $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots$ , on les groupe dans le vecteur  $\bar{\mathbf{d}}$  et le vecteur des réactions internes vaut

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} \bar{\mathbf{d}} \quad (2.9)$$

Ce vecteur contribue au système d'équations de la méthode des déplacements comme un vecteur charge (charges dues aux tassements des appuis).



### Remarques

**2.3** *Matrices de rigidité et vecteurs charges sont des caractéristiques intrinsèques des éléments, c'est-à-dire indépendantes de leur environnement géométrique (nœuds de la structure, éléments adjacents, axes globaux, etc.).*

**2.4** L'indice  $e$  désigne une grandeur propre à un élément, généralement isolé (rem. 1.15). Si (2.1) est l'image de (1.7),  $n_d^e = n_A + n_B$ .

**2.5** Dans la seconde application, le vecteur déplacement  $\mathbf{d}$  se divise spontanément en deux sous-vecteurs  $\mathbf{d}_A$  et  $\mathbf{d}_B$  associés aux nœuds A et B

$$\mathbf{d}_A = \begin{Bmatrix} v_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}_B = \begin{Bmatrix} v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{Bmatrix}$$

Il en résulte la division naturelle de  $\mathbf{k}$  (2.6) en sous-matrices nodales  $2 \times 2$  et de  $\mathbf{s}$  (2.7) en sous-vecteurs  $2 \times 1$  (traits interrompus). C'est le **partitionnement nodal**. Cette notion est très utile, car beaucoup de raisonnements peuvent être faits au *niveau du nœud* plutôt qu'à celui de l'inconnue nodale.

## 2.4 Rotation

### 2.4.1 Système d'axes local

Il est souvent intéressant, voire naturel, d'étudier les caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  d'un élément dans un système d'axes, dit *local*, bien adapté à la géométrie de l'élément. Ce système ne coïncide pas, sauf cas particulier, avec le système global d'étude de la structure, dans lequel sont définis les déplacements inconnus. Or on peut établir des formules qui transforment  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  des axes locaux aux axes globaux.

Dans cette section, les indices  $l$  et  $g$  signifient respectivement local et global.

### 2.4.2 Matrice de rotation

En un nœud A d'une structure, les composantes locales et globales des degrés de liberté sont reliées par la transformation

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{d}_g \quad (2.10)$$

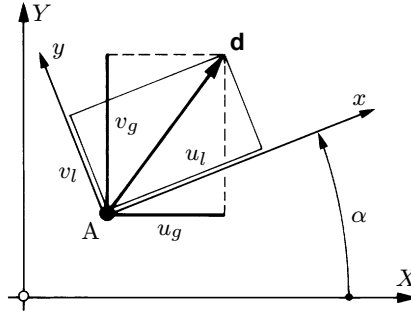
où  $\mathbf{T}_\alpha$  est une *matrice de rotation* qui opère le passage des axes globaux aux axes locaux (convention  $g \rightarrow l$ ).

Dans le cas de la figure 2.4 par exemple, on a simplement

$$\mathbf{d}_l = \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{d}_g \quad (2.11)$$

d'où

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.12)$$



**Fig. 2.4** Composantes locales et globales du déplacement  $\mathbf{d}$  du nœud A (2D).

Pour effectuer la rotation sur un élément comportant  $n_A$  composantes au nœud A et  $n_B$  au nœud B, il faut grouper les relations (2.10) de chaque nœud en une seule expression, soit

$$\mathbf{d}_l = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{Al} \\ \mathbf{d}_{Bl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{B\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{Ag} \\ \mathbf{d}_{Bg} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{d}_g \quad (2.13)$$

où

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{A\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{B\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

est la *matrice de rotation de l'élément*, de dimension  $n_d^e = n_A + n_B$ . Lorsque les degrés de liberté sont de même nombre et de même nature en chaque nœud, on a simplement

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice  $\mathbf{T}$  est carrée, orthogonale (chap. 14), mais non symétrique.

### 2.4.3 Rotation des matrices de rigidité et des vecteurs charges

Lorsqu'on passe des axes globaux aux axes locaux, le vecteur des déplacements d'un élément, ainsi que celui des réactions internes associées, se transforment selon (2.13)

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{T} \mathbf{d}_g \quad \mathbf{r}_l = \mathbf{T} \mathbf{r}_g \quad (2.16)$$

Pour trouver la façon dont la matrice  $\mathbf{k}$  et le vecteur  $\mathbf{s}$  d'un élément se transforment, on écrit d'abord la relation force-déplacement (2.1) en local et en global

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{k}_l \mathbf{d}_l + \mathbf{s}_l \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{k}_g \mathbf{d}_g + \mathbf{s}_g \quad (2.18)$$

On introduit (2.16) dans (2.17)

$$\mathbf{T} \mathbf{r}_g = \mathbf{k}_l \mathbf{T} \mathbf{d}_g + \mathbf{s}_l$$

puis on prémultiplie par  $\mathbf{T}^T$  ( $= \mathbf{T}^{-1}$ ), d'où

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_l \mathbf{T} \mathbf{d}_g + \mathbf{T}^T \mathbf{s}_l$$

Par identification avec (2.18), on obtient les règles de transformation recherchées

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_l \mathbf{T} \quad (2.19)$$

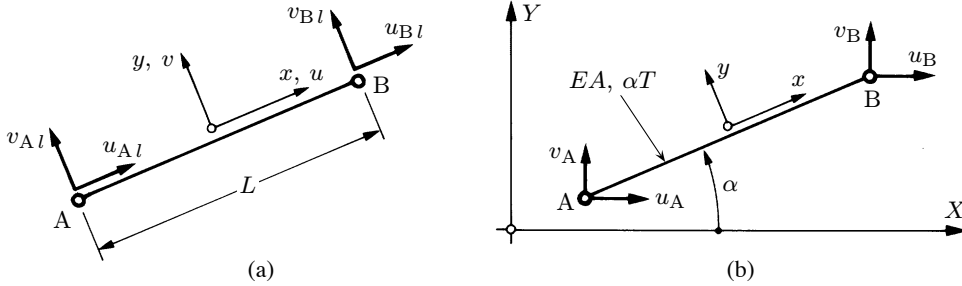
$$\mathbf{s}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{s}_l \quad (2.20)$$

où la structure du triple produit de (2.19) est telle que la symétrie de la matrice de rigidité est conservée (chap. 14).

#### Application 2.4 : barre

Dans un environnement 2D (fig. 2.5), chaque nœud a deux degrés de liberté ( $n_d^e = 4$ ). En axes locaux  $(x, y)$ , la matrice  $\mathbf{k}_{(4 \times 4)}$  de l'élément peut, par exemple, se déduire directement de (2.4) ; sous la charge thermique  $T$ , il en est de même pour  $\mathbf{s}$  via (2.5). On obtient

$$\mathbf{k}_l = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_l = EA\alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$



**Fig. 2.5** Barre de treillis (cas 2D) : (a) axes locaux ; (b) axes globaux (indice  $g$  omis).

En axes globaux  $(X, Y)$ , on est dans la situation de la figure 2.4 et la matrice de rotation est donc (2.15), soit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

avec  $c = \cos \alpha$  et  $s = \sin \alpha$ . En appliquant (2.19) et (2.20) à (2.21), on obtient

$$\mathbf{k}_g = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \text{sym.} & & c^2 & cs \\ & & & s^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_g = EA\alpha T \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

**Application 2.5 : poutre**

Dans un élément de poutre pour structures planes (cadres, etc.), chaque nœud a trois degrés de liberté (fig. 1.7), d'où  $n_d^e = 6$ . En axes locaux (fig. 2.6a), la matrice  $\mathbf{k}$  peut se calculer terme à terme de manière directe ( $d_j = 1$  successivement en chaque degré de liberté). Elle peut aussi s'obtenir en remarquant que la poutre 2D combine deux états indépendants (sect. 2.5) :

- l'état axial ( $N, u$ ) caractérisé par la matrice (2.4),
- l'état flexionnel ( $M, v$ ) caractérisé par la matrice (2.6).

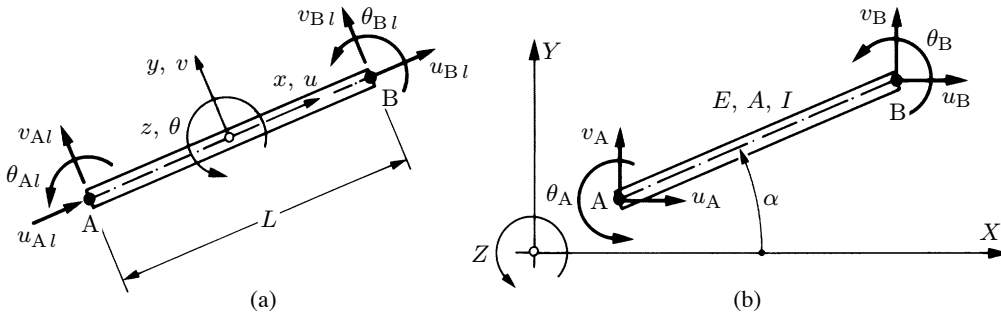
En choisissant les degrés de liberté dans l'ordre convenu (sect. 2.3), soit

$$\mathbf{d}^T = \{ d_1 \quad d_2 \quad d_3 \mid d_4 \quad d_5 \quad d_6 \} = \{ u_A \quad v_A \quad \theta_A \mid u_B \quad v_B \quad \theta_B \}$$

on trouve

$$\mathbf{k} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline & & & EA/L & 0 & 0 \\ & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L \end{array} \right] \quad (2.24)$$

sym.



**Fig. 2.6** Poutre (cas 2D) : (a) en axes locaux ; (b) en axes globaux (indice  $g$  omis).

Les degrés de liberté d'un nœud se transforment du système global au système local selon la relation ( $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$  ; fig. 2.6b)

$$\begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ \theta_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ \theta_g \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

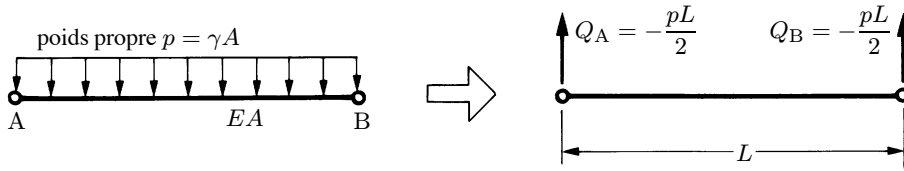
qui, via (2.10), définit  $\mathbf{T}_\alpha$ . Pour les deux nœuds, la matrice de rotation est donnée par (2.15), et la matrice de rigidité en axes globaux est issue du triple produit (2.19). On en trouve l'expression détaillée dans le chapitre 15.

**Remarques**

**2.6** Pour les six types usuels de structures en barres et poutres (poutre continue, treillis plan, cadre plan, grille de poutres, treillis spatial, cadre spatial ; ex. 1.5.4), les matrices de rigidité et vecteurs charges sont donnés au chapitre 15, pour des éléments prismatiques, en axes locaux et, parfois, globaux.

**2.7** Dans le cas simple de l'application 2.4, on peut aussi établir (2.23) par un calcul direct.

**2.8** Pour une barre de treillis, la notion de charge répartie transversale n'est pas cohérente avec la théorie, la modélisation de type *barre* ne représentant pas la raideur flexionnelle. Le poids propre d'une barre (fig. 2.7) doit être modélisé par deux forces concentrées nodales  $Q_A$  et  $Q_B$  (et non par un vecteur  $\mathbf{s}$ ), statiquement équivalentes au poids total de la barre (TGC vol. 1, sect. 7.1, rem.).



**Fig. 2.7** Cas du poids propre d'une barre.

## 2.5 Combinaison d'états indépendants

Si, dans l'application 2.5, on choisit un ordre des déplacements ne mélangeant pas a priori les inconnues de l'état axial (indice  $N$ ) avec celles de l'état flexionnel (indice  $M$ ), soit

$$\mathbf{d}^T = \{ u_A \quad u_B \mid v_A \quad \theta_A \quad v_B \quad \theta_B \}$$

la matrice de rigidité de l'élément est la *combinaison* directe des matrices  $\mathbf{k}_N$  (2.4) et  $\mathbf{k}_M$  (2.6)

$$\mathbf{k} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{k}_N (2 \times 2) & \mathbf{0} (2 \times 4) \\ \hline \mathbf{0} (4 \times 2) & \mathbf{k}_M (4 \times 4) \end{array} \right] \quad (2.26)$$

Hors de la diagonale principale, les sous-matrices nulles expriment le découplage de l'état axial par rapport à l'état flexionnel. Lorsque les inconnues sont choisies dans l'ordre conventionnel, le découplage reste visible au niveau des sous-matrices de  $\mathbf{k}$  (2.24) en axes locaux ; par contre, il est masqué par la rotation en axes globaux (§ 15.3.2).

La technique de *combinaison d'états indépendants*, exprimée ici par (2.26), s'applique aussi aux vecteurs charges et est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis (chap. 9).

## 2.6 Condensation

### 2.6.1 Degrés de liberté internes

Il se peut qu'un élément contienne certains degrés de liberté qui ne peuvent pas être connectés à ceux d'autres éléments. On les appelle *degrés de liberté internes*.

On sait, par exemple, que la déformée d'une poutre avec charge uniforme est un polynôme du quatrième degré (TGC vol. 2, § 10.2.3) ; pour le représenter, on peut ajouter, aux quatre degrés de liberté de l'élément poutre classique (fig. 2.3), un cinquième, la flèche  $v_3$  au centre (fig. 2.8). Cette inconnue ne pourra être connectée à aucune autre : c'est un degré de liberté interne.

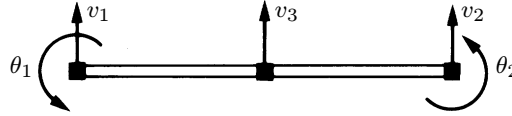


Fig. 2.8 Élément de poutre continue à 3 nœuds et 5 inconnues.

Etant isolés, les degrés de liberté internes peuvent être soustraits à l'assemblage en les éliminant préalablement au niveau de la relation force-déplacement de l'élément. Cette opération – purement algébrique – s'appelle **condensation**.

### 2.6.2 Algorithme de condensation

Supposons que l'on désire *condenser*  $n_b$  inconnues de la relation force-déplacement. On divise le vecteur  $\mathbf{d}$  en deux sous-vecteurs, le second contenant les  $n_b$  inconnues à éliminer

$$\mathbf{d}_{(n_d \times 1)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{a(n_a \times 1)} \\ \mathbf{d}_{b(n_b \times 1)} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Il en résulte le partitionnement naturel de (2.1), où on admet, pour simplifier,  $\mathbf{r}_b = \mathbf{0}$  (ce qui est souvent le cas) et où  $\mathbf{k}_{ba} = \mathbf{k}_{ab}^T$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{ba} & \mathbf{k}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_a \\ \mathbf{s}_b \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

La seconde équation matricielle,  $\mathbf{k}_{ba}\mathbf{d}_a + \mathbf{k}_{bb}\mathbf{d}_b + \mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ , fournit

$$\mathbf{d}_b = -\mathbf{k}_{bb}^{-1}(\mathbf{k}_{ba}\mathbf{d}_a + \mathbf{s}_b) \quad (2.29)$$

Introduite dans la première, il vient

$$\mathbf{r}_a = (\mathbf{k}_{aa} - \mathbf{k}_{ab}\mathbf{k}_{bb}^{-1}\mathbf{k}_{ba})\mathbf{d}_a + \mathbf{s}_a - \mathbf{k}_{ab}\mathbf{k}_{bb}^{-1}\mathbf{s}_b \quad (2.30)$$

Ecrite sous la forme

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{k}_{aa}^* \mathbf{d}_a + \mathbf{s}_a^* \quad (2.31)$$

elle définit, par identification, les nouvelles caractéristiques recherchées

$$\mathbf{k}_{aa}^* = \mathbf{k}_{aa} - \mathbf{k}_{ab}\mathbf{k}_{bb}^{-1}\mathbf{k}_{ba} \quad (\mathbf{k}_{ba} = \mathbf{k}_{ab}^T) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{s}_a^* = \mathbf{s}_a - \mathbf{k}_{ab}\mathbf{k}_{bb}^{-1}\mathbf{s}_b \quad (2.33)$$

La technique de condensation est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis, chaque fois qu'on désire éliminer des degrés de liberté internes. La valeur de ces derniers peut toujours être

évaluée, si nécessaire, après coup, c'est-à-dire une fois les  $n_a$  degrés de liberté restants calculés, par les équations (2.29).

La structure des équations (2.32) et (2.33) est identique à celle d'une élimination de Gauss (chap. 14). En pratique, on ne résout donc pas le problème avec les formules précédentes (on n'inverse pas  $\mathbf{k}_{bb}$ ), mais *on applique directement l'élimination de Gauss* dans (2.28).

### Remarques

**2.9** Il n'est pas obligatoire d'éliminer les degrés de liberté internes par condensation ; en le faisant toutefois, on diminue le nombre d'inconnues  $n_{\text{dep}}$ .

**2.10** Bien qu'éliminés, les degrés de liberté internes laissent leur empreinte sur les caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  de l'élément via (2.32) et (2.33).

**2.11** La condensation s'applique aussi à un groupe d'éléments ; les degrés de liberté internes sont alors ceux situés à l'intérieur du groupe.

### Application 2.6

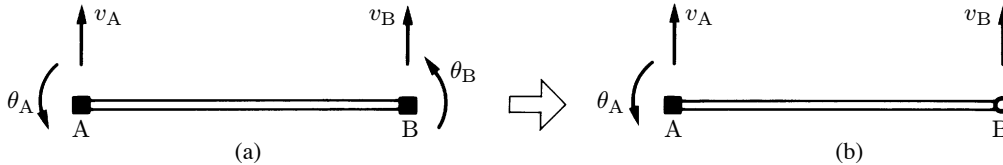
Pour tenir compte des articulations dans les structures en poutres, il est intéressant de définir un élément possédant un nœud de type articulation (rem. 1.6). Or on peut en trouver les caractéristiques  $\mathbf{k}^*$  et  $\mathbf{s}^*$  en *condensant* celles de l'élément de base, à quatre degrés de liberté (fig. 2.9a). En effet, la rotation  $\theta_B$  est, pour l'élément cherché, un degré de liberté interne.

Partant des quatre équations contenues dans la relation force-déplacement (1.7) ou (2.1) appliquée à l'élément poutre à quatre degrés de liberté, on résout la dernière par rapport à  $d_4 = \theta_B$  (en remarquant que, en plus, ici,  $r_4 = 0$ ) et on introduit cette valeur dans les trois premières. Ces trois équations prennent ainsi la nouvelle forme, avec  $\mathbf{d}^{*T} = \{v_A \ \theta_A \ v_B\}$ ,

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{k}^* \mathbf{d}^* + \mathbf{s}^* \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{k}^*$  et  $\mathbf{s}^*$  sont les caractéristiques recherchées de l'élément avec articulation (fig. 2.9b), par exemple (§ 15.5.1)

$$\mathbf{k}^* = \left[ \begin{array}{cc|c} 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & -3EI/L^3 \\ & 3EI/L & -3EI/L^2 \\ \hline \text{sym.} & & 3EI/L^3 \end{array} \right] \quad (2.35)$$



**Fig. 2.9** Élément de poutre continue :

- (a) usuel (4 degrés de liberté :  $n_d^e = 4$  ;  $\mathbf{k}_{(4 \times 4)}$  ;  $\mathbf{s}_{(4 \times 1)}$  ;  $\mathbf{d}^T = \{v_A \ \theta_A \ v_B \ \theta_B\}$  ;  
 (b) avec articulation (3 degrés de liberté :  $n_d^e = 3$  ;  $\mathbf{k}_{(3 \times 3)}$  ;  $\mathbf{s}_{(3 \times 1)}$  ;  $\mathbf{d}^{*T} = \{v_A \ \theta_A \ v_B\}$ ).

### Du calcul à la main au calcul à l'ordinateur

Alors que la méthode des forces était bien établie (Müller-Breslau, 1886) et très utilisée manuellement, celle des déplacements restait dans l'ombre (Ostenfeld, 1926), sauf sous sa forme particulière par relaxation (Cross, 1932). Au milieu des années 40, on reconnaissait l'intérêt d'exprimer ces méthodes sous forme matricielle en vue d'un traitement numérique sur machine (Etats-Unis).

Au début du calcul des structures par ordinateur, on utilisait encore la méthode des forces (1950-1955), mais l'adéquation supérieure de la méthode des déplacements s'imposa rapidement.

Le premier programme électronique de calcul de structure – tel qu'on le conçoit aujourd'hui – est probablement né en Angleterre (Livesley, 1953). Il pouvait résoudre un cadre plan comportant au plus ... 10 nœuds ! Pour 10 nœuds (30 inconnues), quelque 8 à 10 minutes étaient nécessaires, dont le tiers environ était consacré aux entrées-sorties ; résoudre  $\mathbf{Kd} = \mathbf{Q}$  (par Gauss) exigeait bien 5 minutes.

## 2.7 Assemblage

On appelle **assemblage** la construction du système d'équations de la méthode des déplacements à partir

- des matrices de rigidité et vecteurs charges des éléments, exprimés en axes globaux,
- des composantes des charges purement nodales.

Contrairement à la méthode manuelle, *on construit aussi les équations relatives aux degrés de liberté bloqués* (appuis), bien qu'on connaisse d'emblée la valeur (nulle ou imposée) des inconnues correspondantes. Cela présente deux avantages :

- l'assemblage est *systématique* : on n'écarte pas d'office certains degrés de liberté en certains nœuds ;
- à chaque degré de liberté bloqué s'associe une force concentrée nodale, la *réaction d'appui* (inconnue !) ; on pourra donc calculer les réactions d'appui.

Le premier avantage est typique d'une implantation sur ordinateur. Le second montre, si on écrit le système (1.5) matriciellement sous la forme

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (2.36)$$

qu'il existe finalement *trois contributions* au vecteur second membre

$$\mathbf{F} = -\mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} \quad (2.37)$$

Dans ces équations

- $\mathbf{K}$  est la *matrice de rigidité de la structure* ;
- $\mathbf{d}$  est le *vecteur déplacement* (de la structure) ;
- $\mathbf{F}$  est le *vecteur force* (de la structure) ;
- $\mathbf{P}$  est le *vecteur charge* (de la structure), obtenu de  $\mathbf{S}$  (ou  $S_i$ ) via un changement de signe :

$$\mathbf{P} = -\mathbf{S} \quad (P_i = -S_i) \quad (2.38)$$

- $\mathbf{Q}$  est le *vecteur des charges nodales* (de la structure) ;
- $\mathbf{R}$  est le *vecteur des réactions d'appui* (de la structure).



On désigne par  $n_d$  le nombre total des degrés de liberté, par  $n_{\text{dep}}$  le nombre des déplacements inconnus, et par  $n_{\text{rea}}$  celui des degrés de liberté imposés (nombre des réactions d'appui); on a  $n_d = n_{\text{dep}} + n_{\text{rea}}$ .

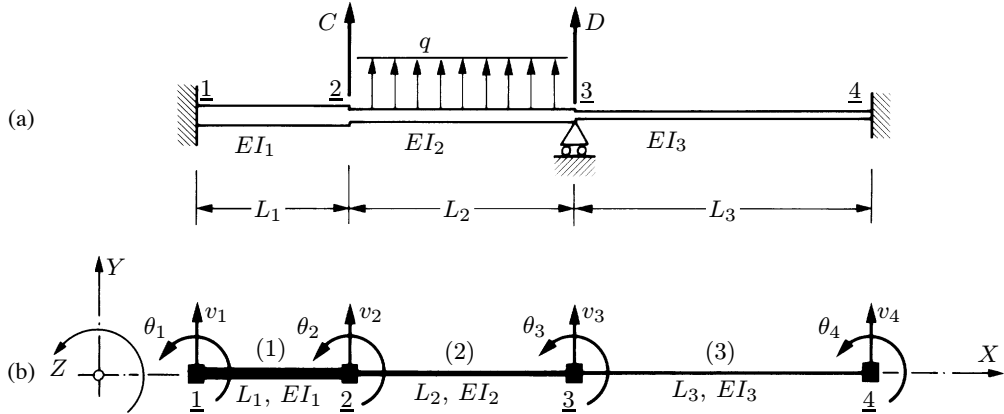
La technique d'assemblage est expliquée ici avec un exemple, ce qui permet de mieux en comprendre la présentation mathématique, quelque peu formelle, donnée au chapitre 10.

### Exemple 2.1

Etablir et résoudre le système d'équations de la méthode matricielle des déplacements, pour la poutre continue de la figure 2.10(a), soumise à une charge répartie  $q$  et deux charges concentrées  $C$  et  $D$ .

*Etablissement du système d'équations (assemblage)*

Chaque tronçon étant prismatique, la poutre se découpe en trois éléments ( $\ell$ ),  $\ell = 1, 2, 3$ , et comporte quatre nœuds 1, 2, 3 et 4. Chaque nœud a deux degrés de liberté ( $v, \theta$ ), d'où un total de  $n_d = 8$  degrés de liberté. Axes locaux des éléments et globaux de la structure coïncident (fig. 2.10b).



**Fig. 2.10** Poutre continue 2D : (a) donnée ; (b) discrétisation.

Avec

$$\mathbf{d}^T = \{d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8\} = \{v_1 \ \theta_1 \ ; \ v_2 \ \theta_2 \ ; \ v_3 \ \theta_3 \ ; \ v_4 \ \theta_4\} \quad (2.39)$$

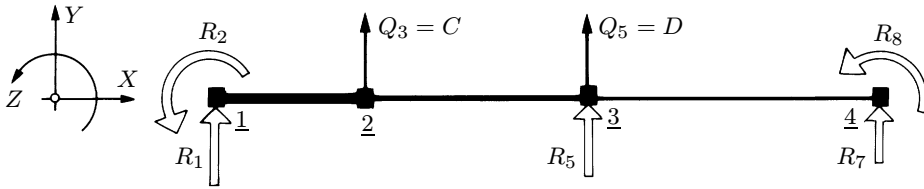
il faut établir le système

$$\begin{aligned} K_{11}d_1 + K_{12}d_2 + \cdots + K_{18}d_8 &= F_1 \\ K_{21}d_1 + K_{22}d_2 + \cdots + K_{28}d_8 &= F_2 \\ &\vdots \\ K_{81}d_1 + K_{82}d_2 + \cdots + K_{88}d_8 &= F_8 \end{aligned} \quad (2.40)$$

à partir des caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  des éléments d'une part, et des forces concentrées d'autre part.

Ces dernières, du type  $Q_i$  (charges) et  $R_i$  (réactions), non nulles et montrées sur la figure 2.11, s'assemblent dans la somme

$$\mathbf{Q} + \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \\ 0 \\ D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$



**Fig. 2.11** Forces concentrées nodales ( $Q_i/R_i$  : force/réaction associée au degré de liberté  $i$ ).

Pour l'élément (1), avec la notation

$$A_3 = EI_1/L_1^3 \quad A_2 = EI_1/L_1^2 \quad A_1 = EI_1/L_1$$

le vecteur déplacement et la matrice de rigidité sont

$$\mathbf{d}_{(1)} = \begin{Bmatrix} v_{A(1)} \\ \theta_{A(1)} \\ v_{B(1)} \\ \theta_{B(1)} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{k}_{(1)} = \begin{bmatrix} 12 A_3 & 6 A_2 & -12 A_3 & 6 A_2 \\ & 4 A_1 & -6 A_2 & 2 A_1 \\ \text{---} & \text{---} & 12 A_3 & -6 A_2 \\ \text{sym.} & & & 4 A_1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

et semblablement pour les éléments (2) et (3) (avec la notation  $B_3, B_2, B_1$  et  $C_3, C_2, C_1$ ).

Pour trouver quelle est la contribution, aux  $K_{ij}$  de (2.40), des  $k_{(\ell)ij}$  précédents ( $\ell = 1, 2, 3$ ), on peut procéder ainsi : on met en correspondance les composantes du vecteur déplacement (2.39) avec celles des éléments ( $\ell$ ), de type (2.42), par une *expansion* fictive de  $\mathbf{d}_{(\ell)}$  en  $\hat{\mathbf{d}}_{(\ell)}$  comme suit :

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \text{---} \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \text{---} \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \text{---} \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{d}}_{(1)} = \begin{Bmatrix} v_{A(1)} \\ \theta_{A(1)} \\ v_{B(1)} \\ \theta_{B(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{d}}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{A(2)} \\ \theta_{A(2)} \\ v_{B(2)} \\ \theta_{B(2)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{d}}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{A(3)} \\ \theta_{A(3)} \\ v_{B(3)} \\ \theta_{B(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

On a bien sûr  $v_1 = v_{A(1)}$ ,  $\theta_1 = \theta_{A(1)}$ ,  $v_2 = v_{B(1)} = v_{A(2)}$ , etc., ce qui exprime la compatibilité des déplacements. A l'aide des trois vecteurs expansés, on peut écrire les matrices de rigidité des éléments (1), (2) et (3) sous la forme expansée

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 12 A_3 & 6A_2 & -12 A_3 & 6A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4A_1 & -6A_2 & 2A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 12 A_3 & -6A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{sym.} & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{k}}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 12 B_3 & 6B_2 & -12 B_3 & 6B_2 & 0 & 0 \\ & & & 4B_1 & -6B_2 & 2B_1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 12 B_3 & -6B_2 & 0 & 0 \\ & & & & & 4B_1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 & 0 \\ \hline \text{sym.} & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{k}}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 12 C_3 & 6C_2 & -12 C_3 & 6C_2 \\ & & & & 4C_1 & -6C_2 & 2C_1 \\ \hline & & & & & 12 C_3 & -6C_2 \\ \hline \text{sym.} & & & & & & & 4C_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où les zéros ajoutés ne jouent aucun rôle dans la relation force-déplacement élargie ( $\ell = 1, 2, 3$ )

$$\hat{\mathbf{r}}_{(\ell)} = \hat{\mathbf{k}}_{(\ell)} \hat{\mathbf{d}}_{(\ell)} + \hat{\mathbf{s}}_{(\ell)} \tag{2.45}$$

avec, pour l'élément ( $\ell$ ) = (1) par exemple,  $\hat{\mathbf{r}}_{(1)} = \{ r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$ .

On traite semblablement les vecteurs charges :

$$\hat{\mathbf{s}}_{(1)} = \hat{\mathbf{s}}_{(3)} = \mathbf{0} \quad \hat{\mathbf{s}}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline -qL_2/2 \\ -qL_2^2/12 \\ \hline -qL_2/2 \\ qL_2^2/12 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Dans l'équilibre nodal (1.9), complété ici des réactions  $R_i$ ,

$$\sum_e \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} + \mathbf{R} \quad (2.47)$$

où  $\sum_e$  concerne tous les éléments, le terme de gauche peut s'écrire

$$\sum_e \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_{(1)} + \hat{\mathbf{r}}_{(2)} + \hat{\mathbf{r}}_{(3)} = \left( \hat{\mathbf{k}}_{(1)} + \hat{\mathbf{k}}_{(2)} + \hat{\mathbf{k}}_{(3)} \right) \mathbf{d} + \left( \hat{\mathbf{s}}_{(1)} + \hat{\mathbf{s}}_{(2)} + \hat{\mathbf{s}}_{(3)} \right) \quad (2.48)$$

parce que  $\hat{\mathbf{k}}_{(\ell)} \hat{\mathbf{d}}_{(\ell)} = \hat{\mathbf{k}}_{(\ell)} \mathbf{d}$  ( $\ell = 1, 2, 3$ ).

La relation (2.48) montre qu'il suffit d'ajouter terme à terme les caractéristiques expansées des éléments pour réaliser l'assemblage

$$\mathbf{K} = \sum_e \hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{P} = - \sum_e \hat{\mathbf{s}} \quad (2.49)$$

(sans omettre le changement de signe pour  $\mathbf{P}$ ). Avec (2.41), on établit donc (2.36) et (2.37).

Ici, le système (2.40) s'écrit, explicitement,

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 12 A_3 & 6 A_2 & -12 A_3 & 6 A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 A_1 & -6 A_2 & 2 A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 12 A_3 + 12 B_3 & -6 A_2 + 6 B_2 & -12 B_3 & 6 B_2 & 0 & 0 \\ & & & 4 A_1 + 4 B_1 & -6 B_2 & 2 B_1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 12 B_3 + 12 C_3 & -6 B_2 + 6 C_2 & -12 C_3 & 6 C_2 \\ & & & & & 4 B_1 + 4 C_1 & -6 C_2 & 2 C_1 \\ \hline \text{sym.} & & & & & & 12 C_3 & -6 C_2 \\ & & & & & & & 4 C_1 \end{array} \right] \mathbf{d} \quad (2.50)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \hline qL_2/2 + C \\ qL_2^2/12 \\ \hline qL_2/2 + D + R_5 \\ -qL_2^2/12 \\ \hline R_7 \\ R_8 \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

#### Résolution du système d'équations

Le système (2.50) ne peut être résolu directement, car la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière. Cela est dû aux conditions d'appui (conditions aux limites), qui n'ont pas encore été appliquées (les modes rigides ne sont pas bloqués). Ces conditions sont (fig. 2.10)

$$v_1 = 0 \quad \theta_1 = 0 \quad v_3 = 0 \quad v_4 = 0 \quad \theta_4 = 0 \quad (2.51)$$

Introduites dans (2.50), il vient

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ qL_2/2 + C \\ qL_2^2/12 \\ qL_2/2 + D \\ -qL_2^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Ce système comporte  $n_d = n_{\text{dep}} + n_{\text{rea}} = 8$  inconnues, de deux natures différentes :

- $n_{\text{dep}} = 3$  inconnues cinématiques  $v_2$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  d'une part,
- $n_{\text{rea}} = 5$  inconnues réactions  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_5$ ,  $R_7$  et  $R_8$  de l'autre.

Il doit être résolu en deux étapes, en commençant par les inconnues cinématiques (elles ne dépendent pas des  $R_i$ , alors que les  $R_i$  dépendent des  $d_i$ ).

Extrayant de (2.52) les troisième, quatrième et sixième équations, on obtient les *équations aux déplacements*

$$\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{36} \\ & K_{44} & K_{46} \\ \text{sym.} & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL_2/2 + C \\ qL_2^2/12 \\ -qL_2^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

C'est le système *réduit*, qui livre les  $n_{\text{dep}}$  inconnues cinématiques  $d_3 = v_2$ ,  $d_4 = \theta_2$  et  $d_6 = \theta_3$ . C'est aussi le système qu'on aurait obtenu à la main, car on ne construit pas les équations associées aux conditions d'appui. On l'obtient encore en biffant froidement dans (2.50) les lignes et colonnes 1, 2, 5, 7 et 8 associées aux blocages d'appui.

Extrayons maintenant les première, deuxième, cinquième, septième et huitième équations ; on obtient les *équations aux réactions*

$$\begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} & K_{16} \\ K_{23} & K_{24} & K_{26} \\ K_{53} & K_{54} & K_{56} \\ K_{73} & K_{74} & K_{76} \\ K_{83} & K_{84} & K_{86} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ qL_2/2 + D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

où  $v_2$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  étant connus par (2.53), on trouve les  $n_{\text{rea}}$  réactions d'appui  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_5$ ,  $R_7$  et  $R_8$ .

### Remarques

**2.12** Les équations (2.49) de la formulation matricielle sont l'image des équations (1.11) de la version manuelle.

**2.13** La matrice de rigidité réduite, dans (2.53), reste *carrée symétrique* ( $n_{\text{dep}} \times n_{\text{dep}}$ ). Au contraire, la matrice dans (2.54) n'est – en général – ni carrée, ni symétrique ( $n_{\text{rea}} \times n_{\text{dep}}$ ).

**2.14** Les éléments barres et poutres sont – dans le cadre ci-défini (sect. 2.1) – exacts : *aucune approximation n'a touché la construction de leurs caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$* .

**2.15** En programmation, on ne code pas les matrices expansées  $\hat{\mathbf{K}}$  (qui contiennent beaucoup trop de zéros). On attribue plutôt aux lignes et colonnes de  $\mathbf{K}_e$  des nombres entiers qui représentent les numéros des lignes et colonnes où les  $k_{ij}$  vont s'additionner dans  $\mathbf{K}$  : ce sont, en quelque sorte, les *coordonnées des coefficients  $k_{ij}$  dans  $\mathbf{K}$* . On procède de même avec les  $\mathbf{s}_e$ . Cette opération s'appelle *localisation* (ex. 2.9.11 et chap. 10).

## 2.8 Conclusions

La méthode des déplacements est actuellement la plus utilisée pour étudier les structures par ordinateur, à cause de son caractère mécanique et strict :

- une fois les  $n_d$  inconnues choisies, la structure de référence est déterminée et unique ;
- les caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  sont codées une fois pour toutes ;
- la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  de la structure est construite mécaniquement à partir des matrices  $\mathbf{k}$  des éléments et de la topologie de la structure ; les seconds membres également ; on trouve donc  $\mathbf{d}$ , voire  $\mathbf{R}$  ;
- les efforts intérieurs se calculent élément par élément, à partir des déplacements exprimés en axes locaux, via des relations du type (1.8), codées en toute généralité.

La méthode des forces a été abandonnée dans le calcul par ordinateur pour la raison suivante : la démarche intellectuelle qui consiste à choisir une structure de référence à partir d'une structure hyperstatique donnée, et surtout une « bonne » structure de référence, c'est-à-dire favorable au calcul numérique, est une opération très compliquée à programmer pour un ordinateur.

Avant l'apparition des ordinateurs (en Europe, avant 1960 environ), beaucoup de méthodes spéciales, toutes cas particuliers de la méthode des déplacements générale, ont été considérablement développées, essentiellement pour le calcul manuel des structures planes. Presque toutes ces méthodes sont simplifiées en supposant que les déformations dues à l'effort normal (et à l'effort tranchant) sont négligeables. Développées entre 1880 et 1950, la plupart d'entre elles entraînent un formalisme analytique complexe. A l'heure actuelle, seules la *méthode des rotations* et la *méthode de Cross* conservent quelque valeur, la seconde n'étant d'ailleurs qu'une application particulière, mais rationnelle (si la structure est à nœuds fixes), de la première.

Aujourd'hui cependant, les ingénieurs ne calculent plus leurs structures à la main, vu l'abondance, la rapidité et la facilité d'emploi des programmes de calcul sur ordinateur.

## 2.9 Exercices

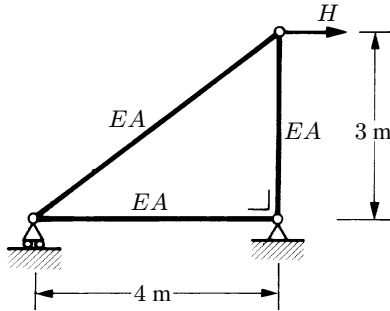
**2.9.1** En suivant la même démarche qu'à l'exemple 2.1, établir les deux systèmes d'équations (aux déplacements et aux réactions) résolvant le treillis plan proposé.

**2.9.2** Les nœuds A et B d'une barre de treillis plan subissent, en axes globaux, les déplacements [mm]

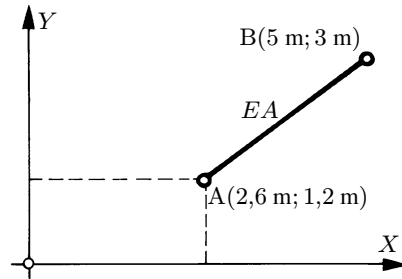
$$\mathbf{d}^T = \{ -1,4 \quad 5,2 \quad -14,0 \quad 27,0 \}$$

Calculer l'effort normal  $N$  dans cette barre. *Indication* : calculer d'abord les déplacements en axes locaux.

*Note* : on aurait aussi pu calculer la longueur  $L'$  de la barre en configuration déformée (Pythagore), puis faire  $\varepsilon = (L' - L)/L$ , pour en déduire ensuite  $N$  ; pourquoi cette démarche conduit-elle à une autre valeur de  $N$  ? Quelle est la valeur correcte ?

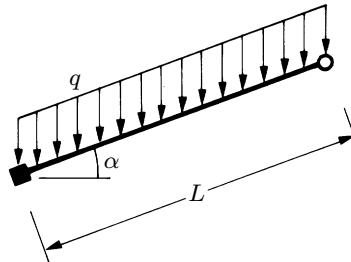


**Fig. Ex. 2.9.1** Treillis plan  
( $H = 200 \text{ kN}$ ;  $EA = 1,8 \cdot 10^6 \text{ kN}$ )



**Fig. Ex. 2.9.2** Barre  
( $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ ;  $A = 2000 \text{ mm}^2$ )

**2.9.3** Pour une poutre prismatique à cinq degrés de liberté, ayant un nœud articulation, inclinée d'un angle  $\alpha$ , soumise à une charge uniforme verticale (agissant vers le bas), calculer les vecteurs  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{s}_g$  (local et global). *Indication* : utiliser le chapitre 15.



**Fig. Ex. 2.9.3**

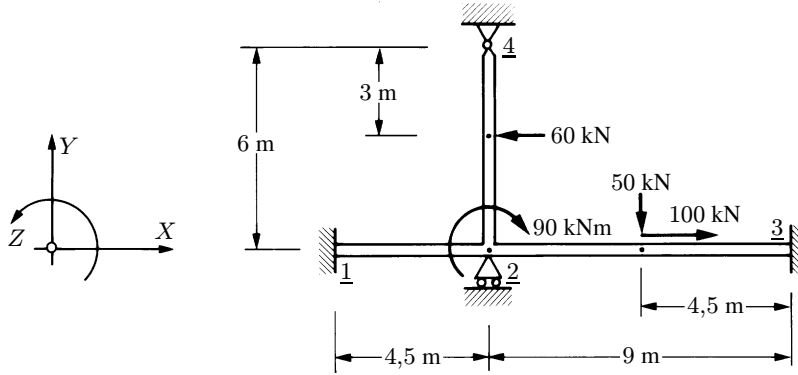
**2.9.4** Donner la matrice de rotation  $\mathbf{T}$  transformant la matrice de l'élément poutre pour grilles de poutres (§ 15.6.1) des axes locaux aux axes globaux.

**2.9.5** Observer la similitude des matrices de rigidité d'un élément de poutre pour cadres plans avec un élément de poutre pour grilles de poutres (§ 15.3.1 et 15.6.1). Peut-on considérer la matrice de l'élément de grille comme issue de la combinaison de deux états indépendants ?

**2.9.6** Appliquer la technique de *condensation* pour établir la matrice (2.35) à partir de (2.6).

**2.9.7** Etablir les *équations aux déplacements* de la structure plane 1-2-3-4 en passant par les étapes suivantes :

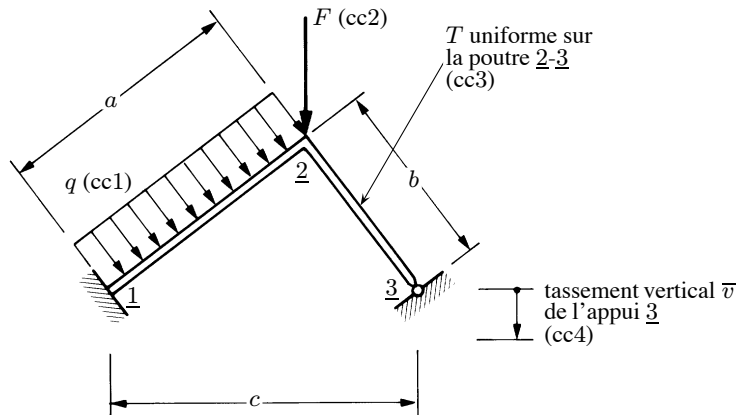
- 1) décider s'il faut tenir compte ou non des déformations dues aux efforts normaux ;
- 2) choisir la structure de référence  $\Omega_0$  de manière à minimiser le nombre nécessaire  $n_{\text{dep}}$  d'équations aux déplacements ;
- 3) dessiner les  $n_{\text{dep}}$  états de déplacement unités, l'état de déplacement dû aux charges, et les forces  $K_{ij}$  et  $S_i$  associées ;
- 4) établir numériquement le système d'équations.



**Fig. Ex. 2.9.7** Pour chaque poutre :  $E = 7\,000 \text{ kN/cm}^2$  ;  $A = 60 \text{ cm}^2$  ;  $I = 20\,000 \text{ cm}^4$ .

**2.9.8** Dans l'exercice précédent, les déplacements du nœud 2 sont  $u_2 = 0,003\,689 \text{ cm}$ ,  $v_2 = 0$  (appui) et  $\theta_2 = -0,003\,067 \text{ rad}$ . Calculer et dessiner les efforts intérieurs de la poutre 2-3.

**2.9.9** Etablir les quatre vecteurs forces **F** de la structure plane 1-2-3, soumise aux quatre cas de charge (cci) décrits sur la figure. *Indication* : bien choisir les axes globaux et ne pas calculer la valeur des réactions d'appui.

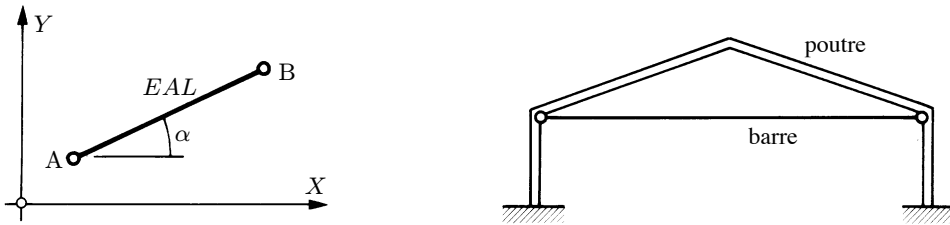


**Fig. Ex. 2.9.9** Pour chaque poutre :  $EA = 900\,000 \text{ kN}$ ,  $EI = 12\,000 \text{ kNm}^2$  et  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$  ;  
 $a = 4 \text{ m}$  ;  $b = 3 \text{ m}$  ;  $c = 5 \text{ m}$  ;  $q = 20 \text{ kN/m}$  ;  $F = 100 \text{ kN}$  ;  $T = 30 \text{ } ^{\circ}\text{C}$  ;  $\bar{v} = 3 \text{ cm}$ .



**2.9.10** La matrice de rigidité de la barre pour treillis plans a la dimension  $4 \times 4$  et est donnée à la section 15.8. Une telle barre peut toutefois intervenir dans les cadres plans (comme tirant, suspente, etc.), pour lesquels la matrice de rigidité des poutres a la dimension  $6 \times 6$  (sect. 15.3).

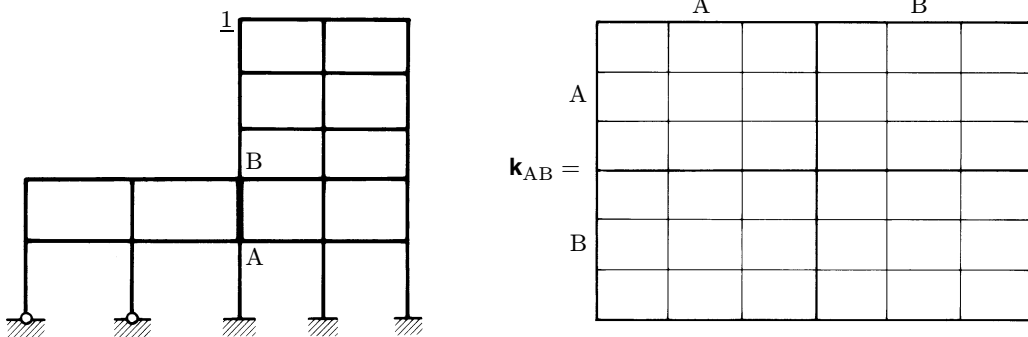
- 1) Comment modifier la matrice de la barre pour qu'elle s'adapte aux cadres plans ?
- 2) Peut-on procéder autrement, en intervenant directement sur la matrice de la poutre ?



**Fig. Ex. 2.9.10**

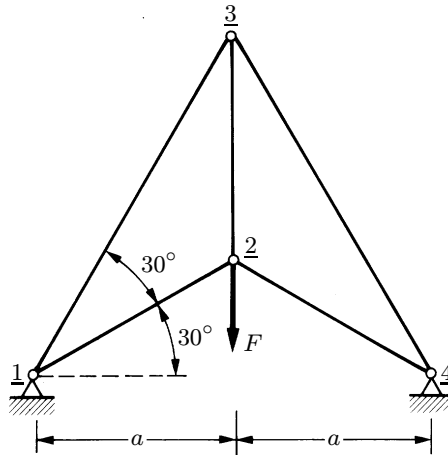
**2.9.11** On considère une ossature 2D étagée. En numéroté les nœuds *horizontalement*, de haut en bas, à partir du nœud 1 indiqué.

- 1) Combien y a-t-il de degrés de liberté au total ( $n_d$ ) ? de degrés de liberté bloqués ( $n_{rea}$ ) ?
- 2) On considère la poutre-colonne AB (A en est le premier nœud, B le second). Trouver à quels coefficients  $K_{ij}$  du système d'équations résolvant cette structure la matrice de rigidité de AB va contribuer, en notant dans chaque case de  $\mathbf{k}_{AB}$  les « coordonnées » (ligne ; colonne) occupées dans  $\mathbf{K}$  (localisation, rem. 2.15).



**Fig. Ex. 2.9.11**

**2.9.12** Calculer les déplacements des nœuds du treillis plan 1-2-3-4 en utilisant les simplifications qui découlent de la symétrie ( $EA = \text{cste}$ ). Calculer ensuite les efforts dans les barres et les réactions d'appui.



**Fig. Ex. 2.9.12**

## 2.10 Lexique

Vecteur déplacement  
(élément, structure)  $\mathbf{d}_e, \mathbf{d}$

Ensemble des déplacements nodaux (d'un élément, de la structure).

Matrice de rigidité  
(élément, structure)  $\mathbf{k}, \mathbf{K}$

Tableau des coefficients de rigidité (d'un élément, de la structure).

Vecteur charge  
(élément, structure)  $\mathbf{s}, \mathbf{S}$

Ensemble des réactions dues aux charges autres que nodales (d'un élément, de la structure).

Vecteur des réactions internes  
(élément)  $\mathbf{r}$

Ensemble des réactions (ou forces) internes.

Vecteur force (structure)

$$\mathbf{F} (= \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R})$$

- vecteur charge  $\mathbf{P} (= -\mathbf{S})$
- vecteur des charges nodales  $\mathbf{Q}$
- vecteur des réactions d'appui  $\mathbf{R}$

Second membre du système d'équations de la méthode des déplacements, avec trois contributions groupant l'action des :  
charges sollicitant les éléments ;  
charges purement nodales ;  
réactions d'appui.

Matrice de rotation  $\mathbf{T}$

Matrice permettant d'exprimer  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$  d'un système d'axes à un autre système d'axes.

Découpage

Division de la structure en composants simples (éléments finis).

Assemblage

Reconstitution de la structure à partir de ses composants ; construction de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{P}$  à partir des  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{s}$ .

Combinaison d'états  
indépendants

Superposition de comportements structuraux différents dans un même élément.

Condensation	Transformation de la relation force-déplacement lors de l'élimination de certains degrés de liberté dans un élément.
Degré de liberté interne	Degré de liberté qui ne se connecte pas aux autres degrés de liberté des éléments voisins.
Partitionnement nodal	Division des matrices de rigidité et vecteurs charges en sous-matrices et sous-vecteurs, selon le nombre des degrés de liberté de chaque nœud.
Localisation	Repérage de la position des coefficients de rigidité, et réactions sous charges, des éléments dans la matrice de rigidité, et dans le vecteur force, de la structure.
Equations aux déplacements	Equations ne contenant que les déplacements inconnus.
Equations aux réactions	Equations ne contenant que les réactions d'appui inconnues (une fois les déplacements calculés).

## 2.11 Annexe – Quelques notations

La méthode des éléments finis est confrontée à un délicat problème de notations. Plusieurs numérotations sont nécessaires (inconnues, nœuds, éléments, paramètres...) et peuvent concerner tant l'élément fini isolé qu'un groupe d'éléments ou la structure entière. Or, en vue de l'application numérique sur ordinateur, il est souhaitable d'utiliser la numérotation en chiffres arabes 1, 2, 3, ...,  $n$  partout.

Dans les chapitres 1 et 2, les nœuds des éléments de barre et poutre isolés sont désignés par des lettres majuscules (élément AB, fig. 1.8 par exemple). Désormais on utilisera les chiffres arabes.

Ainsi, dès le chapitre 3, les numérotations seront toutes en chiffres arabes, le contexte devant permettre d'éviter les confusions. Toutefois, pour plus de clarté,

- les numéros des *nœuds* sont soulignés dans le *texte* et les *figures* seulement, mais non dans les indices (élément 1-2, structure 1-2-3-4, fig. 1.9 par exemple) ;
- les numéros des *éléments finis* sont mis entre parenthèses (fig. 2.10b par exemple) ;
- si une distinction entre élément et structure est nécessaire, on utilise l'indice  $e$  pour *élément* (emplacement libre, rem. 1.15) ;  $\sum_{(e)}$ , en particulier, indique une somme sur quelques éléments, alors que  $\sum_e$  représente une somme sur tous les éléments.

Enfin on note comme suit les *nombres* de diverses grandeurs :

- nombre d'inconnues cinématiques ou degrés de liberté
  - de la structure :  $n_d (= n_{\text{dep}} + n_{\text{rea}})$
  - d'un élément :  $n_d^e$
- nombre de nœuds
  - de la structure :  $n_n$
  - d'un élément :  $n_n^e$
- nombre d'éléments finis :  $n_{\text{elm}}$ .



# 3 Vers la méthode des éléments finis

## 3.1 Introduction

L'étude des structures en barres et poutres par la méthode des déplacements contient une bonne part d'une analyse par éléments finis et conduit au système linéaire

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité,  $\mathbf{d}$  le vecteur des  $n_d$  inconnues cinématiques (déplacements) ou *degrés de liberté* et  $\mathbf{F}$  le vecteur force.

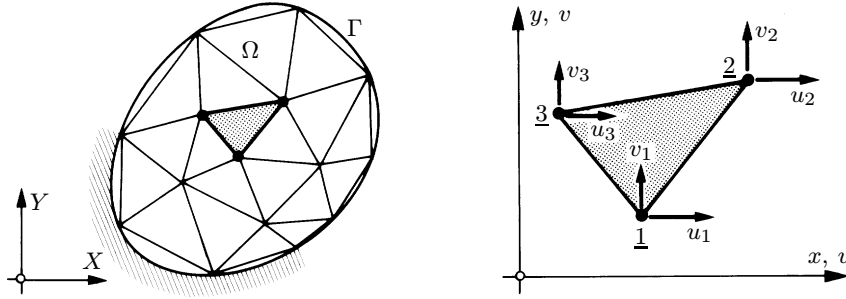
Avant d'en arriver là, le problème physique (réel) a été modélisé (sect. 1.1) en un problème aux limites, qui comporte un nombre infini de degrés de liberté. Dans les problèmes d'ingénieur, une solution analytique est le plus souvent sans espoir. C'est alors qu'entrent en scène les méthodes de discrétisation alliées aux ordinateurs. Elles réduisent le problème réel à un *nombre fini*  $n_d$  d'inconnues et fournissent une *solution approchée* du modèle mathématique. Parmi ces méthodes, la *méthode des éléments finis* domine le calcul des solides et structures.

## 3.2 Interprétation physique

L'interprétation physique de la méthode des éléments finis consiste à considérer le modèle mathématique comme formé d'un ensemble de composants individuels, les *éléments finis*. On opère le *découpage* – artificiel – du modèle en un certain nombre d'éléments finis de forme simple ; cette opération géométrique produit le *maillage*. Chaque élément possède des points privilégiés, les *nœuds*. Le *domaine*  $\Omega_e$  d'un élément est limité par sa *frontière*  $\Gamma_e$ .

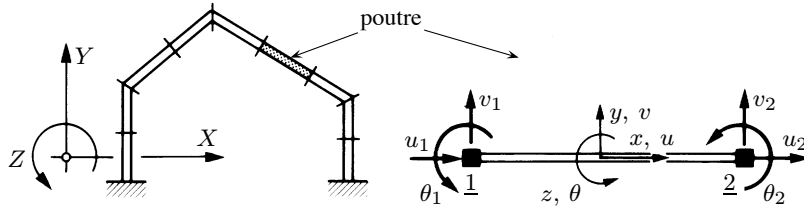
Le champ, a priori inconnu, caractérisant le comportement de l'élément, est exprimé, en général de manière approchée, en fonction des valeurs qu'il prend aux nœuds (fig. 3.1). L'ensemble de ces valeurs nodales constitue les  $n_d$  inconnues (degrés de liberté) du problème. La réponse globale est alors obtenue par l'*assemblage* des éléments, en exprimant les conditions de continuité nécessaires

du champ des déplacements, par l'intermédiaire des degrés de liberté nodaux communs aux éléments adjacents.



**Fig. 3.1** Maillage d'un domaine plan en éléments triangulaires à trois nœuds. Champ des déplacements dans le triangle  $\underline{1-2-3}$ :  $u(x, y) \cong \tilde{u}(x, y, u_1, u_2, u_3)$ ;  $v(x, y) \cong \tilde{v}(x, y, v_1, v_2, v_3)$ .

Ces notions s'appliquent naturellement à une ossature en poutres (fig. 3.2). Les éléments finis en sont des tronçons (prismatiques) de poutre, les nœuds leurs extrémités (découpage). Les réponses axiale, flexionnelle ... d'une poutre sont définies si les déplacements nodaux sont fixés. En un nœud de la structure, commun à plusieurs poutres, on exprime la continuité cinématique et l'équilibre (assemblage).



**Fig. 3.2** Élément fini de poutre à deux nœuds pour cadres plans. Champ des déplacements à l'axe :  $u(x) \cong \tilde{u}(x, u_1, u_2)$ ;  $v(x) \cong \tilde{v}(x, v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$ .

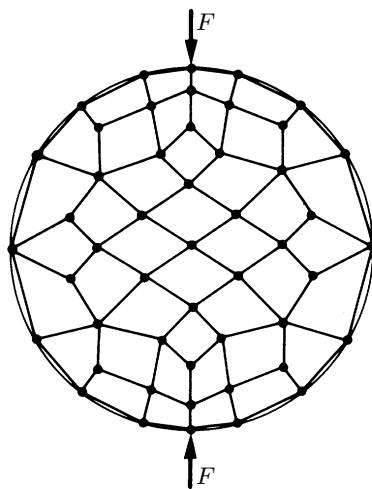
La méthode des éléments finis apporte une importante extension à ces notions classiques par l'introduction d'éléments finis 2D et 3D, destinés à représenter des solides et autres milieux continus, des plaques, des coques, etc. Ainsi, une tranche de l'éprouvette cylindrique de l'essai brésilien, modélisée en état plan de déformation, est par exemple discrétisée en éléments quadrilatéraux reliés par leurs nœuds communs, les sommets des quadrilatères (fig. 3.3). On établit, pour un tel quadrilatère, les caractéristiques **k** et **f** de la relation force-déplacement écrite sous la forme

$$\mathbf{k}\mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (3.2)$$

puis on réalise l'assemblage via l'équilibre nodal habituel

$$\sum_{(e)} r_i = Q_i + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_d) \quad (3.3)$$

Ces deux équations ont la même signification que les équations (1.7) ou (2.1) et (1.9) ou (2.47) des structures en barres et poutres.



**Fig. 3.3** Essai brésilien ; maillage d'éléments finis quadrilatéraux (noter l'approximation polygonale du bord circulaire).

### Remarques

**3.1** Le champ inconnu, évoqué en début de section, est d'habitude celui des déplacements (formulation en déplacements, § 1.3.1), mais peut être celui des contraintes, voire des déformations (sect. 4.2).

**3.2** La dérivation théorique qui conduit à l'équation (3.2) est différente (plus générale ; chap. 6) que celle utilisée pour établir (2.1) ; elle fait apparaître un changement de signe

$$\mathbf{f} = -\mathbf{s} \quad (3.4)$$

qui signale qu'on obtient les *actions*  $\mathbf{f}$ , et non plus les *réactions*  $\mathbf{s}$ , aux nœuds des éléments sous l'effet des charges non nodales. On appelle  $\mathbf{f}$  le *vecteur force* de l'élément. On a donc, désormais,

$$\mathbf{P} = \sum_e \hat{\mathbf{f}} \quad (3.5)$$

à la place de la seconde relation (2.49).

**3.3** Le *point de vue physique* de la méthode des éléments finis permet de faire un parallèle direct avec la traditionnelle méthode des déplacements familière aux ingénieurs (chap. 1 et 2). De plus, ce point de vue est particulièrement précieux en *structures*, où les théories particularisées des barres, poutres, plaques et coques donnent naissance à foule de modèles. Dans ces derniers, le sens physique est – pratiquement – indispensable pour s'y retrouver dans une opération de modélisation-discrétisation adéquate, par exemple dans la jonction d'éléments de types différents (poutres et plaques, intersections de coques, etc.).

Mais l'interprétation physique a aussi ses limites : les considérations théoriques sont restreintes (rem. 1.1), les quantités  $r_i$  peuvent perdre leur sens physique direct de forces (même en solides et structures), etc.

### 3.3 Attributs d'un élément fini

Bien qu'artificiel, le découpage en éléments finis permet, via le *principe de la coupe* (TGC vol. 1, chap. 4), d'*isoler* un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques.

#### 3.3.1 Signalement d'un élément fini

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants.

##### Géométrie

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D. Sa forme est simple (fig. 3.4) :

- segment de droite ou de courbe ;
- triangle ou quadrilatère (plan ou courbe) ;
- tétraèdre, prisme ou hexaèdre (« brique »).

Les *frontières* sont, respectivement.

- des points (extrémités du segment) ;
- des segments de droite ou de courbe ;
- des faces planes ou courbes.

Certains éléments finis peuvent être complétés de propriétés géométriques propres à leur section droite ( $A$ ,  $I$  ...), à leur épaisseur ( $t$ ), etc.

##### Matériau

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés mécaniques  $E$  et  $\nu$ , etc.).

##### Nœuds

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces, etc. (fig. 3.4). On y choisit et définit les degrés de liberté du problème.

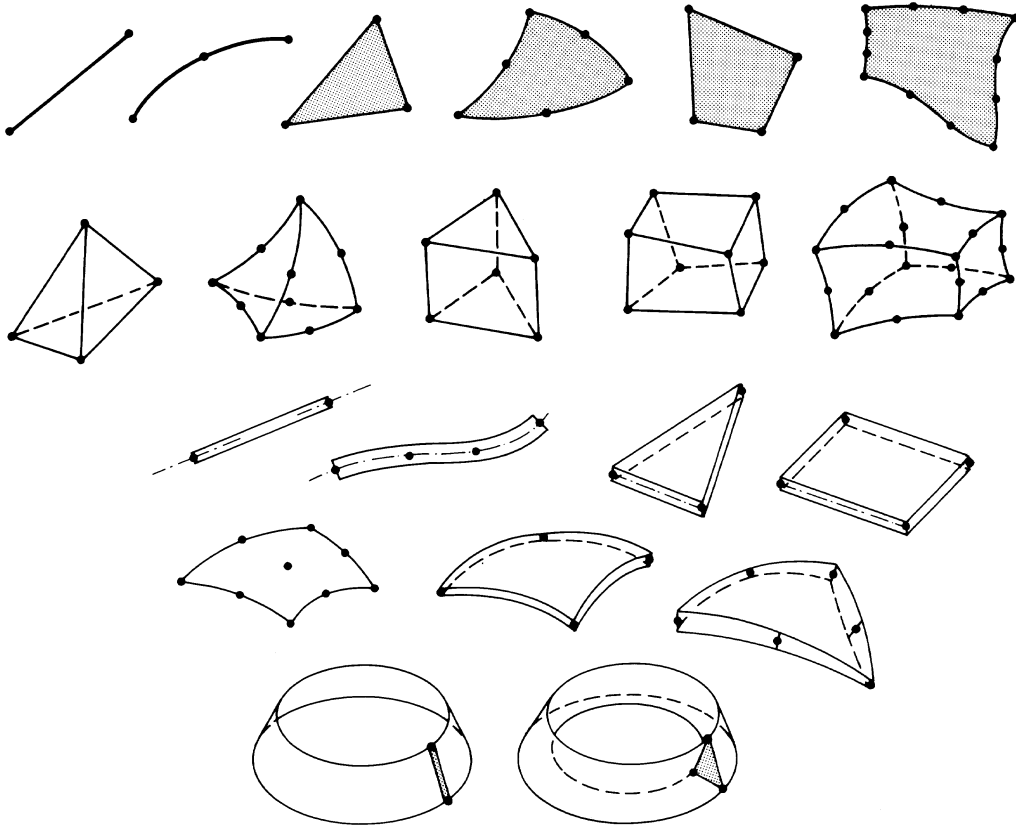
##### Degrés de liberté

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements). Elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs, de deux éléments finis adjacents, puis d'un troisième, et ainsi de suite, permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution complète (assemblage). Pour aboutir à un résultat valable, ces opérations nécessitent le respect de certaines règles, dites *critères de convergence* (chap. 5).

##### Forces nodales

A travers les nœuds transitent des forces *associées* aux degrés de liberté. Les unes sont les réactions internes  $\mathbf{r}$ , les autres les forces  $\mathbf{f}$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, température, charge uniforme...).





**Fig. 3.4** Éléments finis divers (barre ; fil ; triangles et quadrilatères 2D ; tétraèdres, prisme, briques (3D) ; poutres 2D ou 3D ; plaques ; membrane ; coque mince ; coque d'épaisseur modérée variable ; coque de révolution ; solide de révolution).

#### Remarque

**3.4** Les charges purement nodales  $\mathbf{Q}$  sont indépendantes des propriétés des éléments.

#### 3.3.2 Caractéristiques d'un élément fini

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini que sont

- sa *matrice de rigidité*  $\mathbf{k}$ ,
- son *vecteur force*  $\mathbf{f}$ .

Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, ou relation force-déplacement (3.2)

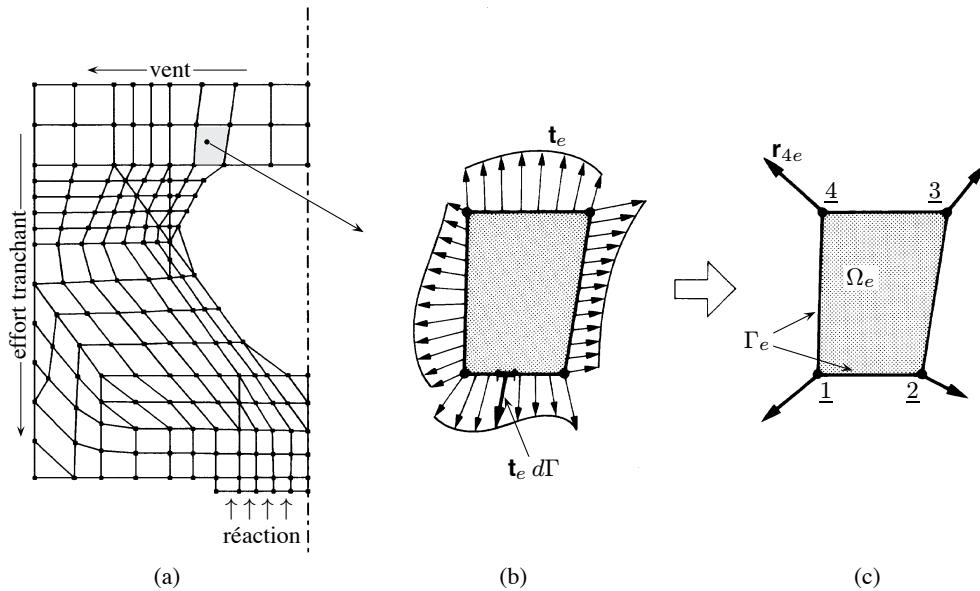
$$\mathbf{k}\mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r}$$

On étudie aux chapitres suivants comment établir cette relation, c'est-à-dire finalement comment établir les formules qui définissent  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{f}$ .

Car en fait les réactions internes  $\mathbf{r}$  n'interviennent jamais (ou presque) dans le calcul. Elles sont en effet éliminées par l'équation (3.3), donc par l'assemblage. De façon générale, elles remplacent les forces extériorisées et complètent les forces extérieures agissant sur l'élément fini, de manière à garantir l'équilibre de ce dernier au sens intégral (sect. 6.2). Issues dans cet esprit du principe de la coupe, elles disparaissent quand on reconstitue le corps.

Le seul endroit où il en subsiste une trace sont les appuis : aux degrés de liberté bloqués, elles s'assemblent en réactions d'appui  $\mathbf{R}$  (encore qu'il soit possible de les ignorer, puisque l'équation aux déplacements ne les contient pas ; cf. exemple 2.1).

Si elles peuvent avoir une signification concrète pour les barres et poutres (fig. 1.14), par contre tel n'est plus le cas dans les éléments 2D et 3D. Isolons par exemple un quadrilatère hors du maillage de la figure 3.5(a) ; admettons qu'il ne soit soumis qu'à des tractions de bord  $\mathbf{t}_e$  réparties sur sa frontière  $\Gamma_e$  (vecteurs contraintes issus du principe de la coupe et de la théorie de l'élasticité 2D ; fig. 3.5b). Dans la méthode des éléments finis, les forces sont transmises par les seuls nœuds. Les tractions  $\mathbf{t}_e$  sont donc représentées fictivement par les réactions internes  $\mathbf{r}_e$ , qui leur sont certes statiquement équivalentes, mais sans signification physique (fig. 3.5c).



**Fig. 3.5** Réactions internes  $\mathbf{r}_e$  d'un élément fini : (a) maillage du demi-diaphragme du viaduc de l'Eau Rouge (source : Cremer J.-M., de Ville de Goyet V., Lothaire A., Radu V., *Viaduc de l'Eau Rouge – Etudes spéciales*, Construction Métallique, n° 1, 1994) ; (b) fragment  $\Omega_e$  et ses tractions de bord ; (c) élément fini et ses réactions internes nodales équivalentes.

### 3.4 Conditions aux limites

En mécanique des solides et structures, les *conditions aux limites* usuelles sont de deux natures (fig. 3.6) :

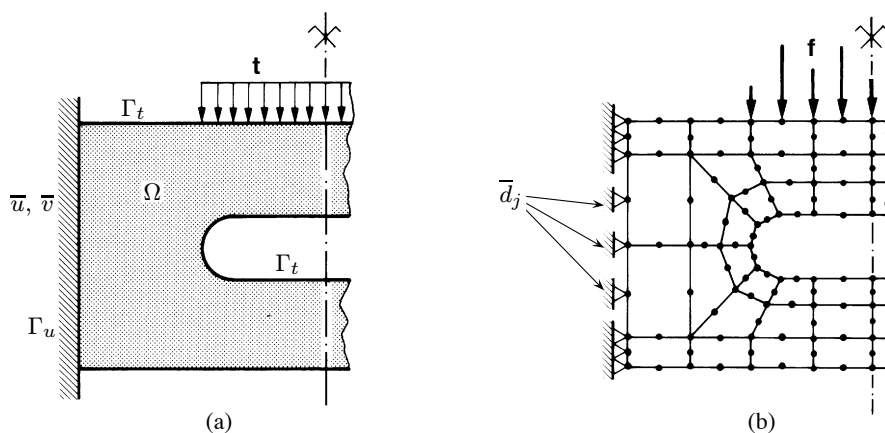
- *cinématiques* sur  $\Gamma_u$ ,
- *statiques* sur  $\Gamma_t$ ,

où, symboliquement,  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega$ . Concrètement,  $\Gamma_u$  correspond aux appuis ; les déplacements y sont imposés (connus, nuls ou non) et, à chaque degré de liberté appuyé, on a

$$d_j = \bar{d}_j \quad (3.6)$$

Sur  $\Gamma_t$  agissent des tractions de bord  $\mathbf{t}$  (connues, nulles ou non) qui, après discrétisation, se traduisent en forces concentrées  $\mathbf{f}$  d'effet équivalent

$$\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{f} \quad (3.7)$$



**Fig. 3.6** Conditions aux limites : (a) de la modélisation ; (b) de la discrétisation.

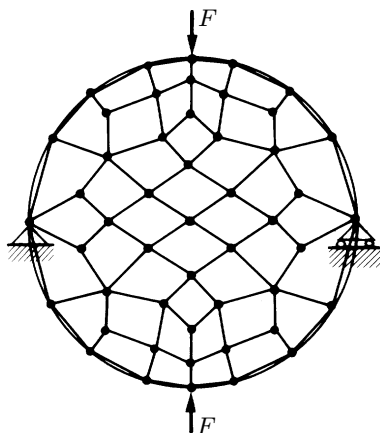
Plus généralement, il y a deux classes de conditions aux limites :

- les unes touchent les degrés de liberté et, donc, le vecteur déplacement  $\mathbf{d}$  dans (3.1) ; elles s'appellent *conditions essentielles* ;
- les autres touchent les forces et, donc, le vecteur second membre  $\mathbf{F}$  ; elles s'appellent *conditions naturelles*.

Cette distinction est importante. En solides et structures, les conditions aux limites essentielles portent sur les déplacements (translations et rotations) et *non sur les déformations* (dilatations et glissements). Elles interviennent le plus souvent

- au niveau des appuis directement liés à la fondation,
- dans les conditions de symétrie et d'antisymétrie,
- pour prévenir les modes rigides, si nécessaire.

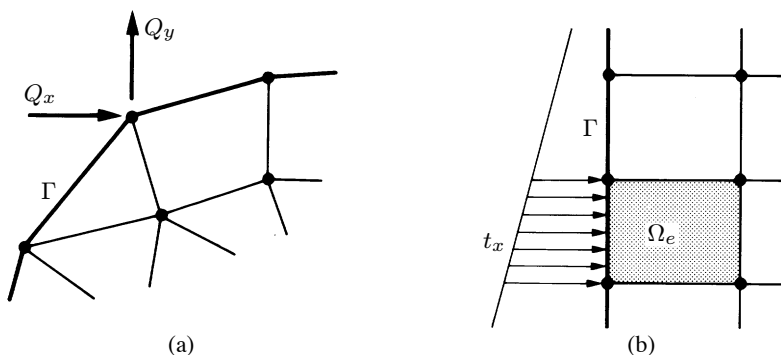
Dans le cas de l'essai brésilien par exemple (fig. 3.3), il n'y a pas d'appuis ; la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  sera singulière, car le disque peut se mouvoir arbitrairement dans son plan : la solution  $\mathbf{d}$  n'est pas définie. Ainsi, dans un calcul par la méthode des déplacements, il faut introduire, au moins, des appuis (fictifs) isostatiques bloquant les modes rigides (fig. 3.7).



**Fig. 3.7** Un minimum de blocages d'appui est nécessaire pour prévenir les modes rigides.

Quant aux conditions aux limites naturelles, c'est comme pour les poutres : les charges agissent (fig. 3.8)

- soit de façon concentrée sur un nœud, et entrent directement dans le vecteur  $\mathbf{Q}$ ,
- soit sur la frontière d'un élément fini, et produisent un vecteur force  $\mathbf{f}_e$  qui est fonction du signalement de l'élément.



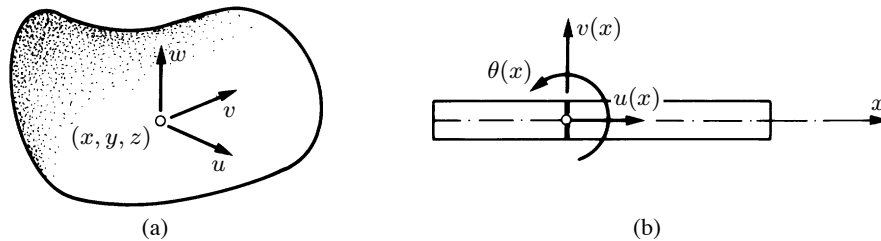
**Fig. 3.8** Conditions aux limites naturelles : (a) indépendantes du signalement de l'élément (charges concentrées nodales) ; (b) dépendantes de ce signalement (tractions de bord réparties).

### 3.5 Nécessité d'une théorie

A toute structure ou tout solide s'attache une théorie (modélisation). En conséquence, toute discrétisation utilise la théorie en question pour construire l'élément fini correspondant.

Les *solides* 2D et 3D utilisent la théorie de la mécanique des solides (ici, théorie de l'élasticité). Les *structures*, elles, recourent à des théories particularisées, essentiellement fonctions des caractéristiques géométriques de l'élément structural (théories des barres, poutres, plaques, coques...). Ces théories sont très performantes, car elles sont une spécialisation de la théorie de l'élasticité à l'élément structural (chap. 8).

Il y a une différence essentielle entre ces deux catégories de théories (fig. 3.9) : les déplacements sont, en élasticité, les *seules translations*  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , alors qu'en structures interviennent toujours, en outre, des *rotations*  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  (sauf pour certains cas particuliers, la barre par exemple). On verra que ces rotations peuvent être à l'origine de bien des difficultés dans la méthode des éléments finis.



**Fig. 3.9** Déplacements : (a) translations d'un point quelconque d'un solide 3D ; (b) déplacements (translations et rotation) d'une section quelconque d'une poutre 2D (repérée par son point d'intersection avec l'axe).

Il convient de toujours bien distinguer ces deux cas. Par simplicité, on va établir la théorie des éléments finis (de type déplacement) sur la base de la théorie de l'élasticité. Les résultats obtenus montrent que la théorie s'étend directement aux structures, sans avoir à refaire un développement mathématique complet pour chaque théorie particulière, moyennant quelques précautions.

#### ZEBRA

Le premier ordinateur de l'EPFL, acquis en 1958, fut la machine ZEBRA. Créée par l'ingénieur néerlandais Van Der Poel, sa conception peut être considérée, pour l'époque, comme géniale. ZEBRA est l'acronyme de *Zeer Eenvoudige Binaire RekenAutomat*.

La capacité de la mémoire centrale était de 10 000 mots de 33 bits sur tambour ; l'accès y était transistorisé. Les circuits utilisaient des tubes électroniques. Le langage, une sorte d'assembleur, donnait un accès direct au calcul. Les entrées et sorties se faisaient sur des bandes perforées en papier. Voici par exemple une suite de huit instructions : ... Z28 U21 H1 V21 A20 D U4 S3 ...

Fabriquée en Angleterre, mais, paraît-il, avec un soin insuffisant, ZEBRA tombait souvent en panne. La machine était néanmoins robuste : livrée avec un jour d'avance, elle passa une nuit à la belle étoile, sur un tas de sable, la salle devant la recevoir n'étant pas prête ! Elle fut utilisée de 1958 à 1964.

### 3.6 Forme différentielle ou forte des équations de la mécanique des solides et des poutres

#### 3.6.1 Solides

La solution d'un problème statique de mécanique des solides est gouvernée par des équations aux dérivées partielles accompagnées de conditions aux limites, dont l'ensemble s'appelle la *forme différentielle* ou *forte* du problème aux limites. Ces relations sont données ci-après sous forme indicielle et, lorsqu'elles sont utiles pour la suite, matricielle (TGC vol. 3, chap. 5 et 9) :

- équilibre statique (avec  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ )

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (3.8)$$

- loi constitutive de Hooke isotrope

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (3.9)$$

- équations cinématiques

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (3.10)$$

- conditions aux limites statiques ou naturelles (tractions imposées)

$$n_i \sigma_{ij} = t_j \quad \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \quad (\text{sur } \Gamma_t) \quad (3.11)$$

- conditions aux limites cinématiques ou essentielles (déplacements imposés)

$$u_i = \bar{u}_i \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{sur } \Gamma_u) \quad (3.12)$$

Dans ces équations, la connaissance du seul champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  entraîne celle des champs des déformations par (3.10), puis des contraintes par (3.9) (fig. 3.10).

Éliminant d'abord les déformations en introduisant (3.10) dans (3.9) (rem. 3.6), puis les contraintes en injectant (3.9) dans (3.8), on obtient les *équations de Navier*, exprimant l'équilibre en fonction des déplacements (inconnus), c'est-à-dire exactement ce qu'on recherche,

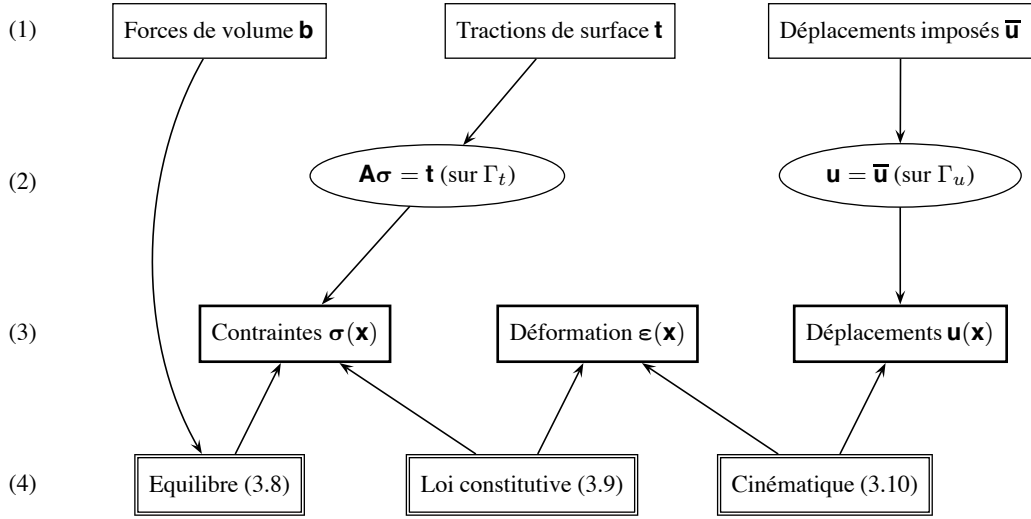
$$D_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + b_j = 0 \quad \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \quad (3.13)$$

Cette relation montre que le problème aux limites est du *second ordre*. On désigne par la notation  $2m$  l'ordre maximal des dérivées intervenant dans la forme différentielle ; ici on a

$$\text{élasticité} \iff 2m = 2 \quad (3.14)$$

#### Remarques

**3.5** Dès l'équation (3.8),  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  désignent les *vecteurs* des contraintes et déformations,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{t}$  ceux des forces de volume et tractions de surface, et  $\mathbf{u}$  celui des composantes du champ des déplacements.



**Fig. 3.10** Organigramme des champs et équations en élasticité : (1) données (imposées) ; (2) conditions aux limites (imposées) ; (3) champs (inconnus) ; (4) équations liant les champs (dans  $\Omega$ ).

**D** est la matrice d'élasticité, **A** celle des cosinus directeurs de la normale (extérieure à  $\Gamma_t$ ) et **L** celle des opérateurs différentiels (TGC vol. 3, chap. 9). La notation indicielle correspondante est  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $t_i$ ,  $u_i$ ,  $D_{ijkl}$  et  $n_i$  (TGC vol. 3 ; **L** n'est pas utilisé en indiciel). Enfin, **x** est le vecteur des coordonnées

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

et on utilise la notation abrégée  $u_i(x_j)$  pour  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ; matriciellement, on écrit **u(x)** ; cette notation est valable, d'ailleurs, quel que soit le champ  $u_i$  ou **u**.

**3.6** Pour établir (3.13), il faut utiliser la relation

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} \quad (3.15)$$

obtenue en introduisant (3.10) dans (3.9) (TGC vol. 3, § 5.2.1).

**3.7** Il est clair qu'à (3.13) s'associent les mêmes conditions aux limites qu'à la forme forte (3.8)-(3.10), soit (3.11) – où il faut aussi éliminer les  $\sigma_{ij}$  au profit des  $u_k$  par (3.15) – et (3.12),

$$n_i D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} = t_j \quad (\text{sur } \Gamma_t) \quad (3.16)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{sur } \Gamma_u) \quad (3.17)$$

**3.8** En 3D,  $\Omega$  est le volume  $V$  et  $\Gamma$  la surface  $A$  ; en 2D,  $\Omega$  est l'aire  $A$  et  $\Gamma$  le bord  $s$  ; en 1D,  $\Omega$  est un segment de longueur  $L$  et  $\Gamma$  ses extrémités A et B.

### 3.6.2 Poutres (cas plan)

L'équation d'équilibre en fonction du déplacement  $v(x)$  est (§ 1.3.3)

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q \quad (\text{dans } \Omega) \quad (3.18)$$

et le problème aux limites est ici du *quatrième ordre*

$$\text{poutres} \iff 2m = 4 \quad (3.19)$$

Les conditions aux limites peuvent être de diverses natures :

- flèche imposée

$$v = \bar{v} \quad (\text{sur } \Gamma_u) \quad (3.20)$$

- pente imposée

$$\frac{dv}{dx} = \bar{\theta} \quad (\text{sur } \Gamma_u) \quad (3.21)$$

- moment imposé

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\bar{M} \quad (\text{sur } \Gamma_t) \quad (3.22)$$

- effort tranchant imposé

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -\bar{V} \quad (\text{sur } \Gamma_t) \quad (3.23)$$

### 3.6.3 Importance de l'ordre $2m$

La modélisation de tout problème physique conduit à des équations différentielles. Cette forme différentielle s'appelle la **forme forte** du problème aux limites.

La méthode des éléments finis ne résout pas la forme forte. Elle s'attaque à une forme mathématiquement équivalente, dite *forme intégrale* ou *forme faible*. Lors du passage de l'une à l'autre, l'ordre  $2m$  joue un rôle essentiel.

#### Application 3.1

Une forme différentielle d'ordre  $2m$  nécessite  $m$  conditions aux limites en chacun des points de  $\Gamma$ . Ces conditions portent sur l'inconnue et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $2m - 1$ .

En élasticité, on a :

- $2m = 2 \Rightarrow m = 1$ , soit *une* condition sur  $\Gamma$  ( $\Gamma_u$  ou  $\Gamma_t$ ) ;
- $2m - 1 = 1 \Rightarrow$  conditions sur  $u_i$  (du type (3.17) le long de  $\Gamma_u$ ) ou sur  $\partial u_k / \partial x_\ell$  (lié à  $t_j$  par (3.16), le long de  $\Gamma_t$ ).

Pour les poutres, il vient :

- $2m = 4 \Rightarrow m = 2$ , soit *deux* conditions à chaque extrémité A et B (du type (3.20) à (3.23)) ;
- $2m - 1 = 3 \Rightarrow$  conditions sur  $v$ ,  $dv/dx$ ,  $d^2v/dx^2$ ,  $d^3v/dx^3$  (ce qui est bien le cas).



### 3.7 Forme intégrale ou faible des équations d'équilibre de la mécanique des solides et des poutres

#### 3.7.1 Solides

Partant de la forme forte (3.13), fonction du champ de déplacement, on forme l'expression

$$\int_{\Omega} \left( D_{ijk\ell} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_\ell} + b_j \right) w_j d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{b}) d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

où la *fonction poids*  $w_j(x_k)$  ou  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  – a priori arbitraire – est ici, comme le contenu de la parenthèse, vectorielle afin que le produit soit *scalaire* (TGC vol. 3, chap. 7).

L'écart entre l'ordre des dérivées de la parenthèse et de la fonction poids est  $2m$ . Grâce à  $m$  intégrations par parties, on *équilibre* ces dérivées à l'ordre  $m$ . Ici une seule intégration suffit. Il en résulte (rem. 3.10), en interprétant la fonction poids comme un champ de déplacements virtuels ( $w_j \equiv \delta u_j$ ), le *principe des déplacements virtuels*

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.25a)$$

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.25b)$$

Les termes de gauche et de droite sont les travaux virtuels intérieur  $\delta W_{\text{int}}$  et extérieur  $\delta W_{\text{ext}}$  ( $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$ ). La forme cinématique associée à (3.24) peut être rétablie, pour le terme de gauche, avec (3.9)

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} D_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \quad \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (3.26)$$

où

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u} \quad (3.27)$$

sont les *déformations virtuelles*.

On doit se souvenir que l'intégration par parties fait naître des termes aux limites qui permettent d'englober une partie des conditions aux limites dans l'intégrale. Ici, (3.11) se trouve maintenant dans (3.25) (dernier terme).

En conclusion, la *forme intégrale* de l'équilibre, ou *forme faible*, est

$$\int_{\Omega} D_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (\text{dans } \Omega \text{ et sur } \Gamma) \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{sur } \Gamma_u) \quad (3.29)$$

où  $\varepsilon_{k\ell}$  et  $\delta \varepsilon_{ij}$  (ou  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ) sont donnés par (3.10) et (3.27).

**Remarques**

**3.9** On peut établir rigoureusement l'équivalence des formes fortes et faibles (ce qui conduit à certaines conditions de régularité sur les fonctions poids).

**3.10** Consulter la section 7.4 du volume 3 du TGC pour le détail des calculs donnant le passage de (3.24) à (3.25a) (avec, dans la parenthèse, (3.8) au lieu de (3.13), ce qui ne change rien quant au principe).

**3.11** Dans la suite, on travaille surtout avec (3.25), vu l'avantage de l'interprétation physique liée au principe des déplacements virtuels, très facile à retenir et s'étendant directement aux structures ; puis on introduit (3.9) et (3.10) pour substituer les déplacements aux contraintes en temps voulu.

**3.12** L'intégration par parties classe elle-même les conditions aux limites en deux catégories : celles qu'elle absorbe s'appellent conditions *naturelles*, les restantes *essentiels*.

**3.13** Il existe des techniques numériques efficaces pour résoudre (3.24), issues de la *méthode des résidus pondérés* : si on ne connaît qu'une valeur approchée de  $u_i(x_j)$  dans (3.24), la parenthèse n'est pas nulle, mais laisse subsister un *résidu*  $R_j$  ; alors

$$\int_{\Omega} R_j w_j d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

signifie simplement qu'on en annule une moyenne pondérée.

**3.14** Vu que la dérivation accentue l'irrégularité des fonctions et, de ce fait, dégrade la précision numérique, on a intérêt, avant de mettre en œuvre ces méthodes numériques, à intégrer  $m$  fois par parties pour égaliser les ordres des dérivées. (Mais ce n'est pas une obligation.)

**3.15** En général, les méthodes en question exigent que la fonction poids respecte la condition

$$w_j = 0 \quad (\text{sur } \Gamma_u)$$

En termes de déplacements virtuels, cette condition est

$$\delta u_j = 0 \quad (\text{sur } \Gamma_u)$$

et signifie que *les déplacements virtuels doivent être compatibles avec les appuis*. Alors le dernier terme de (3.25a) ou (3.28) est simplement

$$\int_{\Gamma_t} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.31)$$

**3.7.2 Poutres (cas plan)**

Après deux intégrations par parties ( $m = 2$ ) de

$$\int_L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q \right) w dx = 0 \quad (3.32)$$

la forme faible de l'équilibre, ou principe des déplacements virtuels pour les poutres (TGC vol. 2, sect. 12.3 et ex. 12.10.1), est

$$\int_L M \delta \psi dx = \int_L q \delta v dx + V_B \delta v_B - M_B \delta \theta_B - V_A \delta v_A + M_A \delta \theta_A \quad (\text{sur } L \text{ et en } A \text{ et } B) \quad (3.33)$$

où  $\psi$  est la courbure et  $\delta\psi \, dx \equiv \delta\theta$  une petite rotation virtuelle. Avec

$$M = EI\psi \quad \psi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad \delta\psi = -\frac{d^2\delta v}{dx^2}$$

le premier terme peut être rendu purement cinématique (à l'image du premier terme de (3.28))

$$\int_L M \delta\psi \, dx = \int_L EI\psi \delta\psi \, dx = \int_L EI \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2\delta v}{dx^2} \, dx \quad (3.34)$$

Les conditions aux limites essentielles touchent

- la flèche

$$v = \bar{v} \quad (\text{en A et B}) \quad (3.35)$$

- la pente

$$\frac{dv}{dx} = \bar{\theta} \quad (\text{en A et B}) \quad (3.36)$$

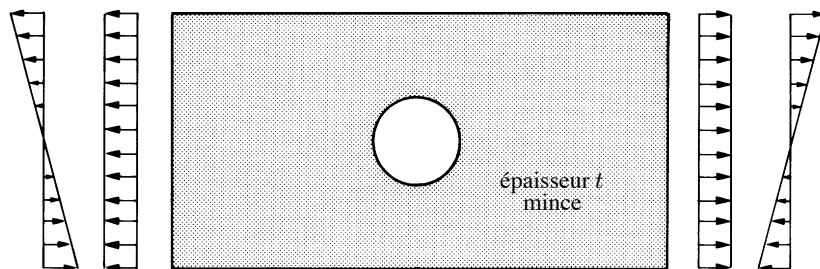
les conditions naturelles (sur  $\bar{M}$  et  $\bar{V}$ ) étant incluses dans (3.33).

### 3.8 Exercices

**3.8.1** L'essai brésilien (fig. 3.3) présente un axe de symétrie vertical. Proposer le maillage d'un demi-disque en une douzaine d'éléments finis quadrilatéraux à quatre nœuds et étudier les conditions aux limites (naturelles et essentielles).

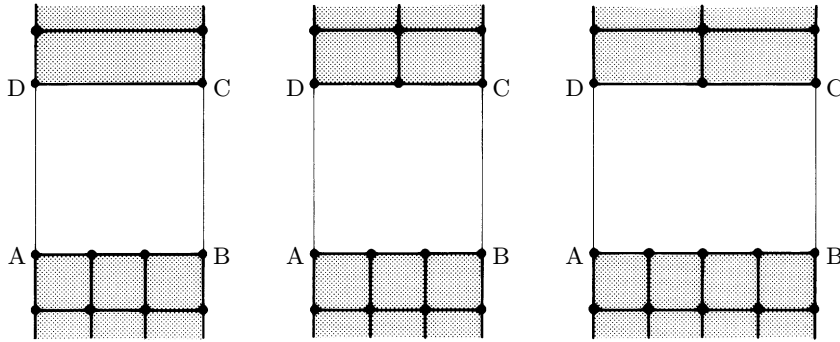
**3.8.2** L'essai brésilien (fig. 3.3) présente deux axes de symétrie. Mailler un quart de disque en une douzaine d'éléments finis triangulaires à trois nœuds et étudier les conditions aux limites (naturelles et essentielles).

**3.8.3** On veut étudier la répartition des contraintes dans une pièce plane percée d'un trou circulaire centré et soumise à deux types de sollicitation (traction ; flexion). A quelle base théorique ce problème se rattache-t-il ? Peut-on ne discrétiser qu'une partie de la pièce pour une analyse par éléments finis ? Expliquer quelle est cette partie et en étudier les conditions aux limites essentielles pour chaque cas de sollicitation séparément.



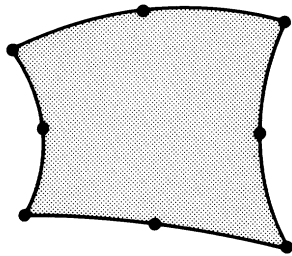
**Fig. Ex. 3.8.3**

**3.8.4** Dans le maillage d'une pièce plane, dessiner, dans la zone ABCD, un réseau qui fait la transition entre le maillage grossier et le maillage fin, en n'utilisant que des quadrilatères à quatre nœuds.

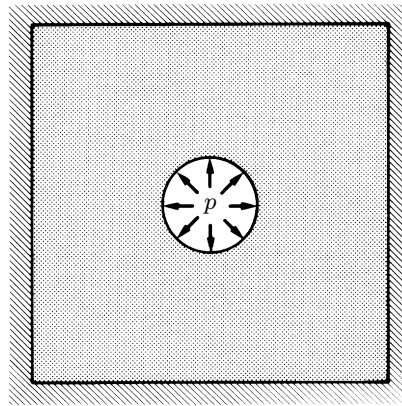


**Fig. Ex. 3.8.4**

**3.8.5** On considère un élément fini quadrilatéral à huit nœuds, défini par la figure, destiné à l'élasticité plane. Identifier ses degrés de liberté (nature et nombre). Combien de termes  $k_{ij}$  différents sa matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  contient-elle ? Si les coordonnées des nœuds sont données, quel peut être le type de courbe le long d'un côté ? Vérifier qu'on peut mailler convenablement un quart de cercle avec trois de ces éléments.



**Fig. Ex. 3.8.5**

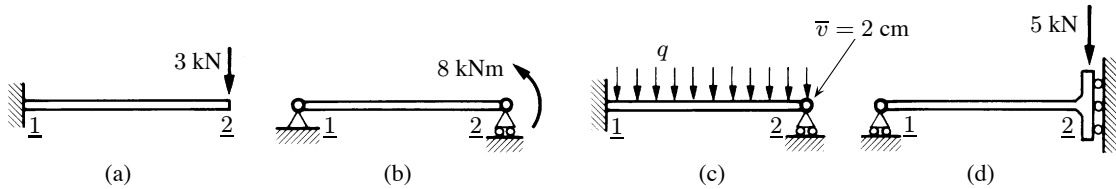


**Fig. Ex. 3.8.6**

**3.8.6** On considère le problème – très simplifié – d'une galerie circulaire sous pression uniforme dans un massif rocheux admis homogène ; étudier

- 1) la modélisation : à quelle théorie ce problème se rattache-t-il ?
- 2) la géométrie : indiquer les axes de symétrie ;
- 3) la discrétisation : tenant compte des symétries, dessiner une partie du domaine et la mailler régulièrement en éléments finis quadrilatéraux à quatre nœuds (3 à 5 nœuds par bord de la partie du domaine retenue) ;
- 4) les conditions aux limites : les dessiner sur tous les nœuds de bord.

**3.8.7** Donner les conditions aux limites naturelles et essentielles des quatre poutres 1-2.



**Fig. Ex. 3.8.7**

**3.8.8** Transformer la forme forte (3.32) en forme faible en effectuant les intégrations par parties nécessaires. Observer les conditions naturelles absorbées par cette transformation. Donner l'interprétation physique conduisant au principe des déplacements virtuels (3.33).

## 3.9 Lexique

Vecteur force (élément) $\mathbf{f}$ ( $= -\mathbf{s}$ )	Ensemble des actions nodales dues aux charges sollicitant un élément.
Maillage	Subdivision en éléments finis.
Conditions (aux limites) naturelles	Conditions statiques ; conditions incluses dans la forme faible.
Conditions (aux limites) essentielles	Conditions cinématiques ; conditions encore à satisfaire (non incluses dans la forme faible).
Forme différentielle ou forte	Ensemble des équations différentielles et conditions aux limites gouvernant un problème aux limites.
Forme intégrale ou faible de l'équilibre	Expression intégrale pondérée des équations de la forme forte, ici d'équilibre, obtenue par intégration par parties ;
• principe des déplacements virtuels	interprétation physique.
Méthode des éléments finis	Point de vue physique : découpage, éléments finis, frontières, nœuds, degrés de liberté, maillage, assemblage.



# 4 Construire un élément fini

## Choix des champs inconnus

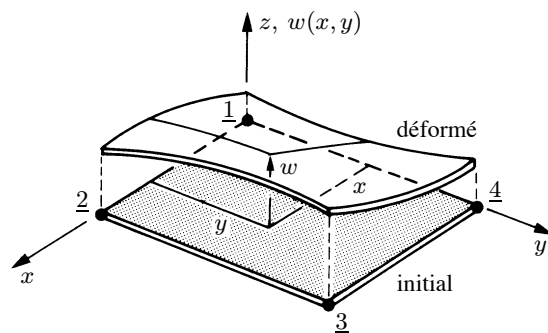
### 4.1 Nouveautés

L'analyse d'une ossature en barres et poutres, par la méthode des déplacements, réalise la compatibilité cinématique et l'équilibre, à l'aide de conditions formulées aux *nœuds*, entre lesquels les barres et poutres constituent les *éléments finis*. Les propriétés de ces derniers s'expriment par une relation matricielle liant forces et déplacements nodaux, où intervient la loi constitutive. Cette relation est *exacte* dans le cadre de la théorie des barres et poutres (chap. 2).

Si l'on peut voir dans la méthode des éléments finis une extension de ces notions classiques, il existe toutefois d'importantes différences par rapport aux poutres.

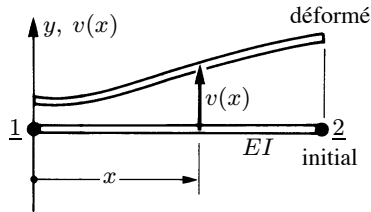
#### 4.1.1 Interpolation

On ne connaît pas l'expression analytique des fonctions décrivant le champ des déplacements dans les éléments finis pour un problème quelconque donné (fig. 4.1). On doit donc *faire des hypothèses*



**Fig. 4.1** Élément rectangulaire de plaque fléchie à quatre nœuds : quelle déformée transversale  $w(x, y)$  ?

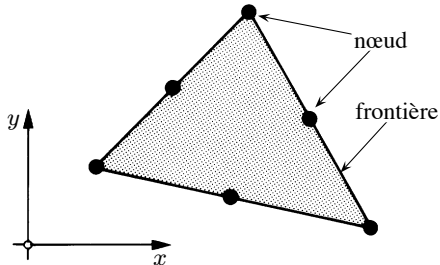
sur ces fonctions : c'est le processus d'*approximation* ou d'*interpolation*, dans lequel *on choisit les fonctions d'interpolation*. Dans les poutres, ces fonctions sont connues de la mécanique des structures (fig. 4.2).



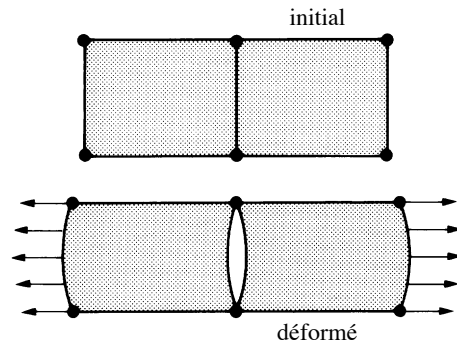
**Fig. 4.2** Élément de poutre de Bernoulli à deux nœuds ; flèche  $v(x, y)$  connue :  $v$  cubique et  $M$  linéaire (sans charge transversale entre les nœuds).

#### 4.1.2 Continuité cinématique

On doit s'efforcer d'*assurer la compatibilité cinématique des déplacements tout le long des frontières* séparant les éléments finis, et non pas aux seuls nœuds (fig. 4.3), sinon il en résulterait des discontinuités des déplacements et des concentrations de contrainte inadmissibles sur ces frontières (fig. 4.4).



**Fig. 4.3** Élément fini d'élasticité plane, triangulaire, à six nœuds.

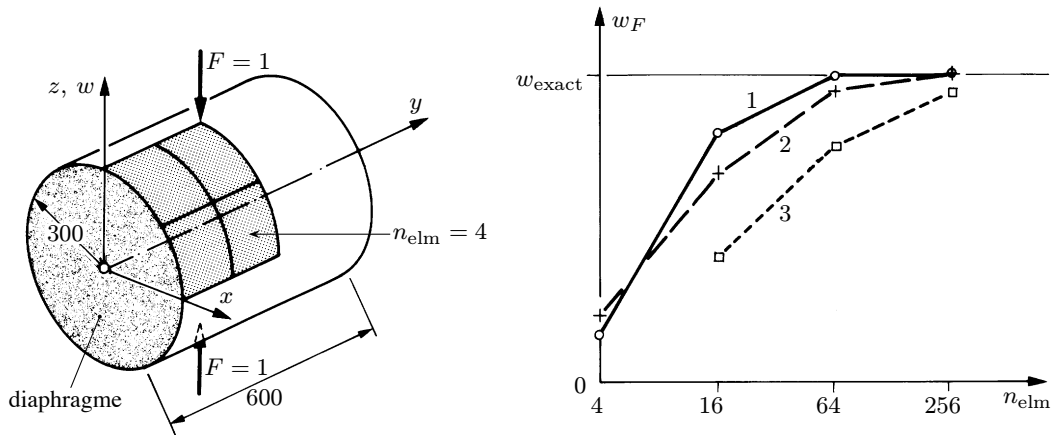


**Fig. 4.4** Essai de traction discrétisé par deux éléments à quatre nœuds, avec discontinuité inadmissible des déplacements.

#### 4.1.3 Précision et convergence

L'interpolation peut-elle se faire librement ? Que vaut la solution approximative trouvée ? L'erreur est-elle chiffrable ? Dans quelles circonstances converge-t-on vers une solution exacte (fig. 4.5) ? Ces importantes questions ont mis quelque temps à trouver des réponses satisfaisantes, et certaines d'entre elles restent encore ouvertes aujourd'hui.





**Fig. 4.5** Coque cylindrique pincée : convergence de la flèche  $w_F$  sous  $F$  en fonction du nombre d'éléments  $n_{elm}$  sur un huitième de la coque, pour trois types différents d'éléments (1, 2, 3).

#### 4.1.4 Conclusion

La construction d'un élément fini implique de nombreux choix :

- forme géométrique ;
- nœuds (nombre, emplacement) ;
- degrés de liberté (nature, nombre et type par nœud) ;
- fonction(s) d'interpolation.

Ces choix sont en outre soumis à certaines contraintes :

- propres à la méthode des éléments finis (critères de convergence, chap. 5) ;
- liées à la modélisation, c'est-à-dire à la théorie choisie pour analyser la structure.

Ils sont essentiellement responsables de la *qualité* des résultats, dont ils soulignent – une fois de plus – le caractère d'approximation, et constituent donc le problème clé de la méthode des éléments finis.

## 4.2 Modèles d'éléments finis

### 4.2.1 Champs interpolés

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, plus rarement ceux des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément, ou une partie de celui-ci, l'intérieur ou la frontière. Selon la combinaison choisie, on peut créer divers types, dits *modèles*, d'éléments finis. Les plus courants sont les suivants.

#### 4.2.2 Modèle déplacement

Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une *interpolation du champ des déplacements*, étendue à tout l'élément. Il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières (sect. 6.3).

Le modèle déplacement est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. *C'est le seul considéré ici.*

#### 4.2.3 Modèle équilibre ou contrainte

A l'inverse du précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements sommaire.

Ce modèle est rarement employé en pratique, car il conduit en général, à qualité égale, à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

#### 4.2.4 Modèle mixte

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément. En général, ce modèle conserve les paramètres inconnus de ces champs comme degrés de liberté. La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité.

Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement : on interpole, par exemple, certaines composantes internes de la déformation pour améliorer la précision au niveau des contraintes ; les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation (sect. 2.6), de sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

#### 4.2.5 Modèle hybride

Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. En cours de formulation, les paramètres indéterminés du champ interne sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ défini sur la frontière en cherchant à minimiser la différence entre les deux champs.

Si le champ de bord est du type déplacement, l'élément hybride a finalement le même aspect extérieur et les mêmes degrés de liberté nodaux qu'un élément du modèle déplacement.

Le modèle hybride le plus ancien, dit hybride-contrainte (Pian, MIT, 1964), combine un champ interne autoéquilibré de contrainte avec un champ de déplacement à la frontière. Le modèle le plus récent, dit hybride-Trefftz (Jirousek, EPFL, 1977), utilise deux champs indépendants de déplacement : un champ interne qui vérifie rigoureusement la forme forte du problème, mais viole la compatibilité sur la frontière, et un champ conforme défini sur la frontière de l'élément.

Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes. Le modèle hybride-Trefftz, en particulier, peut être le plus précis parmi les éléments finis actuellement connus.

#### Remarques

**4.1** La forme faible des équations d'équilibre, développée à la section 3.7, permet de traiter les éléments finis du modèle déplacement. Pour les autres modèles, il faut établir d'autres formes intégrales.

**4.2** On dit couramment que *le modèle déplacement est trop rigide*. C'est, en général, exact, car, en lui prescrivant la forme des déplacements possibles (interpolation), plutôt qu'en le laissant se déplacer librement, on lui impose des contraintes qui diminuent sa capacité de déformation et le rendent plus rigide qu'il ne serait en réalité.

### 4.3 Méthode de Galerkin

La *méthode des résidus pondérés* est une technique de résolution approchée d'une forme intégrale (rem. 3.13). Ici on retient la forme obtenue après intégration par parties ( $m$  fois), à savoir, en mécanique des solides et structures, le *principe des déplacements virtuels* (§ 3.7.1)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma_t \quad (4.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est fonction du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  (inconnu) via (3.9) et (3.10)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (4.2)$$

avec les conditions aux limites essentielles (3.12) sur  $\Gamma_u$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

Ce problème aux limites comporte *deux champs inconnus* :

- le champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,
- le champ des déplacements virtuels  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$  (image des fonctions poids).

A défaut de les connaître, on en propose une *approximation* : c'est l'*interpolation*. Dans ce but, on utilise ici la variante de la méthode des résidus pondérés dite **méthode de Galerkin**. Dans cette méthode, on choisit :

- pour  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , une combinaison *linéaire* de  $n_{\text{Gal}}$  fonctions, par exemple, dans un cas unidimensionnel,

$$u(x) \cong a_1 N_1(x) + a_2 N_2(x) + \cdots + a_{n_{\text{Gal}}} N_{n_{\text{Gal}}}(x) \quad (1D) \quad (4.4)$$

et, en tridimensionnel,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &\cong \sum_{i=1}^{n_{\text{Gal}}} a_i L_i(x, y, z) \\ v(x, y, z) &\cong \sum_{i=1}^{n_{\text{Gal}}} b_i M_i(x, y, z) \\ w(x, y, z) &\cong \sum_{i=1}^{n_{\text{Gal}}} c_i N_i(x, y, z) \end{aligned} \quad (3D) \quad (4.5)$$

où les fonctions  $N_i(x)$ ,  $L_i(x, y, z) \dots$  sont les *fonctions d'interpolation* (connues, choisies) et  $a_i$ ,  $b_i \dots$  les *paramètres* (inconnus) ;

- pour  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , une combinaison linéaire des *mêmes fonctions d'interpolation*, par exemple

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{Gal}}} \delta a_i N_i(x) \quad (1D) \quad (4.6)$$

où les  $\delta a_i$  sont des coefficients arbitraires.

La résolution approchée substitue donc la recherche d'un nombre fini de paramètres à celle de fonctions inconnues.

### Remarques

**4.3** Les fonctions d'interpolation doivent être dérivables (calcul des déformations, chap. 5) et, dans une combinaison, linéairement indépendantes. Elles sont le plus souvent de *forme simple*, presque toujours *polynomiale* ; dans la suite, *seule l'interpolation polynomiale est retenue*.

**4.4** Les paramètres sont, évidemment, de nature cinématique ; ordinairement, on s'arrange pour qu'ils représentent les valeurs du champ aux nœuds ; ce sont alors les degrés de liberté habituels  $d_i$ .

**4.5** Les variantes classiques de la méthode des résidus pondérés sont, outre la méthode de Galerkin, les méthodes par *collocation*, *sous-domaines* et *moindres carrés*. De façon générale, la clé de la méthode de Galerkin est, dans toute forme faible d'un quelconque problème aux limites, d'interpoler *identiquement* l'inconnue du problème et la fonction poids, l'interpolation étant une séquence linéaire de fonctions.

## 4.4 Caractéristiques de la méthode de Galerkin

L'étude mathématique de la méthode de Galerkin livre les résultats suivants :

- dans les problèmes linéaires, la méthode de Galerkin conduit, pour les paramètres inconnus, à un système d'équations algébriques à la fois linéaire et symétrique ;
- la méthode mène aux « meilleures » valeurs des inconnues, c'est-à-dire que, par rapport à d'autres méthodes, elle fournit – dans l'ensemble – le résultat le plus précis ; vu la forme intégrale pondérée, la solution approximative s'adapte, en moyenne, au mieux à la solution exacte ;
- si la solution exacte est contenue dans l'approximation, la méthode de Galerkin la restitue ;
- sous certaines conditions (critères de convergence), la solution approximative tend vers la solution exacte quand  $n_{\text{Gal}} \rightarrow \infty$ .

Vu ces avantages, la méthode de Galerkin est la plus utilisée dans la résolution approchée de la forme faible d'un problème aux limites. En solides et structures, on peut montrer que c'est la méthode la plus efficace.

### Remarques

**4.6** Rappelons deux avantages décisifs de la forme faible sur la forte :

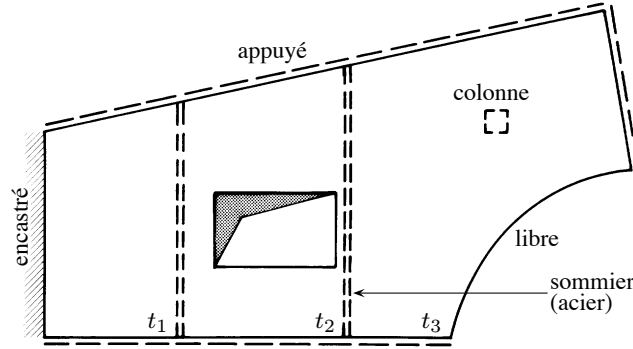
- l'ordre des dérivées est inférieur (après  $m$  intégrations par parties) ;
- il y a moins de conditions aux limites à satisfaire, car les conditions naturelles (statiques) sont incluses dans l'intégrale et, partant, ne doivent être satisfaites qu'en moyenne (alors que, dans la forme forte, il faut y satisfaire exactement en tout point).

Il en résulte que la forme intégrale est moins exigeante quant au choix de l'approximation, donc des fonctions d'interpolation (d'où les qualificatifs *faible* et *forte*).

**4.7** La symétrie est importante car, dans la méthode des éléments finis, le nombre des inconnues peut être énorme (plus de 100 000) ; elle permet de réduire l'encombrement du système d'équations dans l'ordinateur.

**4.8** La qualité de l'approximation dépend d'abord du choix des fonctions d'interpolation : plus elles ressemblent à la solution réelle, meilleure est la solution obtenue.

**4.9** Initialement, la méthode a été proposée par l'ingénieur des constructions navales Bubnov (1913), puis reprise par l'ingénieur et mathématicien Galerkin (1915). A l'époque, il s'agissait d'interpoler d'un coup dans l'*ensemble* du domaine, ce qui est quasiment impossible dans un problème réel. La méthode des éléments finis interpole par sous-domaines juxtaposés : elle réalise une *approximation par morceaux*. D'où sa force : les éléments étant petits, l'interpolation peut y être très simple et, grâce au maillage, on peut s'adapter aux conditions les plus diverses (fig. 4.6). Mais il y a un prix à payer : pour reconstituer la structure, il faut réaliser l'exacte juxtaposition de tous les morceaux.



**Fig. 4.6** Toute la complexité d'une structure d'ingénieur dans une dalle plancher en béton armé (vue en plan) : forme géométrique quelconque (trou, bord courbe...), conditions d'appui diverses (bord libre, colonne...), épaisseur variable ( $t_i$ ), liaison à des sommiers (effet 3D, matériaux différents), charges diverses (poids propre, charge uniforme totale ou partielle, température...), etc.

## 4.5 Choix du champ des déplacements (interpolation)

### 4.5.1 Introduction

La modélisation définit la théorie, qui elle-même fixe la nature des degrés de liberté. Pour un élément fini donné, on groupe ses  $n_d^e$  degrés de liberté dans le vecteur  $\mathbf{d}$  (en respectant l'ordre conventionnel fixé à la section 2.3). Considérons une composante quelconque du champ inconnu, par exemple  $u(x, \dots)$ . On désire en établir une expression de la forme (4.4) ou (4.5), soit

$$u(x, \dots) = d_1 N_1(x, \dots) + d_2 N_2(x, \dots) + \dots + d_{n_d^e} N_{n_d^e}(x, \dots) \quad (4.7)$$

ou encore, matriciellement,  $\mathbf{N}_u$  étant une matrice ligne de fonctions d'interpolation,

$$u(x, \dots) = [N_1(x, \dots) \quad N_2(x, \dots) \quad \dots \quad N_{n_d^e}(x, \dots)] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d^e} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_u(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (4.8)$$

Si tous les  $d_j$  sont nuls, sauf  $d_i = 1$ , on a

$$u(x, \dots) = N_i(x, \dots) \quad (4.9)$$

ce qui signifie que toute fonction d'interpolation  $N_i(x, \dots)$  représente le champ des déplacements induit dans l'élément par un déplacement unique et unité  $d_i = 1$  (comme pour les poutres...). Cette propriété peut s'écrire, en tout nœud de coordonnées  $x_j, \dots$ ,

$$N_i(x_j, \dots) = \delta_{ij} \quad (4.10)$$

Quand le champ inconnu est vectoriel, on groupe ses composantes dans le vecteur  $\mathbf{u}$  et ses matrices lignes de fonctions d'interpolation dans la *matrice des fonctions d'interpolation*  $\mathbf{N}$ , pour écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (4.11)$$

Le champ des déplacements virtuels (fonctions poids) devant s'interpoler semblablement, on a

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{d} \quad (4.12)$$

Pour construire l'interpolation, on peut s'y prendre de deux façons.

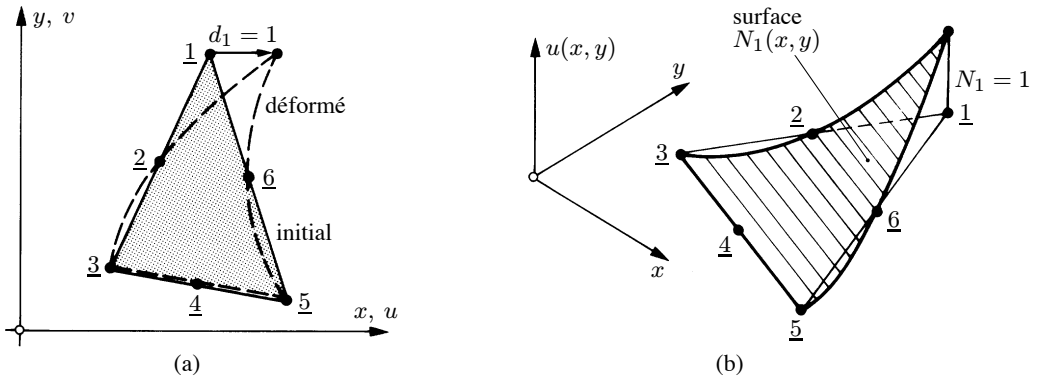
#### Remarque

**4.10** Dans (4.10),  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

### 4.5.2 Recherche directe des fonctions d'interpolation

Il s'agit d'établir l'équation de chacune des  $n_d^e$  fonctions d'interpolation, pour en déduire le champ approché par (4.7) ou (4.8).

La difficulté réside précisément dans la formulation de ces fonctions. On s'aide alors volontiers de la propriété (4.10) pour tenter une visualisation des fonctions. Considérons par exemple un élément fini triangulaire d'élasticité plane à six nœuds (fig. 4.7a).



**Fig. 4.7** Visualisation des fonctions d'interpolation : (a) déplacements  $u(x, y)$  dans le plan sous  $d_1 = 1$  ; (b) diagramme de la fonction d'interpolation  $N_1(x, y)$ .

Imposer  $d_1 \equiv u_1 = 1$  (translation horizontale de nœud 1) permet d'esquisser, dans le plan  $(x, y)$ , une déformée  $u(x, y)$  approximative (trait interrompu), qui n'aide guère au choix de  $N_1(x, y)$ . Par contre, faire le *diagramme* de  $u(x, y)$  en perspective est beaucoup plus parlant (fig. 4.7b). On voit immédiatement que  $N_1(x, y)$  pourrait être un cylindre à directrice parabolique, dont l'équation est aisée à obtenir.

La visualisation des fonctions d'interpolation est facile pour les éléments finis de géométrie 1D et 2D. Elle est évidemment nettement plus délicate pour les éléments de solide (fig. 4.8).

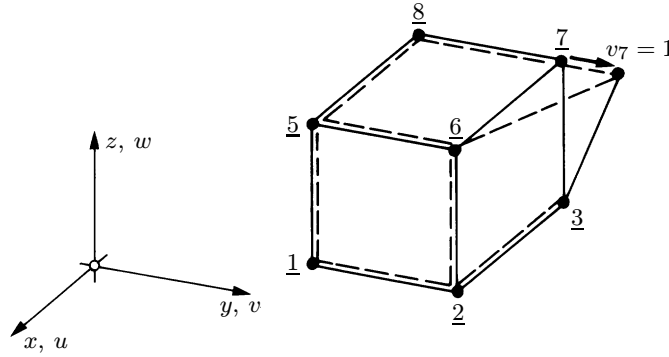


Fig. 4.8 Déformée d'un élément fini cubique sous  $v_7 = 1$ .

#### 4.5.3 Interpolation paramétrique (recherche indirecte)

Puisque l'interpolation est polynomiale, on peut en fait écrire d'emblée le champ inconnu sous forme d'un polynôme ordinaire, par exemple

$$u(x, \dots) = \sum_1^{n_p} a_i m_i(x, \dots) \quad (4.13)$$

où les  $n_p$  monômes connus  $m_i(x, \dots)$ , appelés *modes*, sont multipliés par les  $n_p$  *paramètres* inconnus  $a_i$ . Aucune de ces quantités n'a d'interprétation physique immédiate, mais cela importe peu, car on va se ramener au cas précédent. Au reste, l'interpolation paramétrique (4.13) est bien de la forme exigée (4.4) ou (4.5), et peut s'écrire, matriciellement,

$$u(x, \dots) = [m_1(x, \dots) \quad m_2(x, \dots) \quad \dots \quad m_{n_p}(x, \dots)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_p} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_u(\mathbf{x}) \mathbf{p} \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{P}_u$  est une matrice ligne de modes et  $\mathbf{p}$  le vecteur des paramètres.

Quand le champ inconnu est vectoriel, on groupe ses composantes dans le vecteur  $\mathbf{u}$  et ses matrices lignes de modes dans la *matrice des modes*  $\mathbf{P}$  pour écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{p} \quad (4.15)$$

Si l'on introduit, dans le membre de droite des relations (4.13) ou (4.14), les coordonnées d'un quelconque nœud de l'élément fini, on obtient à gauche le déplacement associé du nœud ; par exemple, au nœud  $j$ , on a

$$u_j = m_1(x_j, \dots) a_1 + m_2(x_j, \dots) a_2 + \dots + m_{n_p}(x_j, \dots) a_{n_p}$$

Pour tous les nœuds, on peut écrire

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\mathbf{p} \quad (4.16)$$

où la matrice (rectangulaire  $n_d^e \times n_p$ )  $\mathbf{C}$  ne contient que des nombres (valeurs des  $m_i$  aux nœuds). Que les inconnues cinématiques soient  $a_i$  ou  $d_j$ , leur nombre doit être le même ; on est donc amené à choisir  $n_p = n_d^e$  et  $\mathbf{C}$  est alors carrée ; si de plus elle n'est pas singulière, on peut résoudre (4.16), d'où

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{d} \quad (4.17)$$

Ainsi, dans (4.15), on a

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d} \quad (4.18)$$

et on est ramené au cas précédent (§ 4.5.2) puisque, par comparaison avec (4.11),

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{C}^{-1} \quad (4.19)$$

Dans cette méthode, il est aisé d'écrire (4.13), mais il peut apparaître diverses difficultés liées à la contrainte  $n_p = n_d^e$  et à l'inversion de  $\mathbf{C}$ .

### Remarques

**4.11** Dans les paragraphes 4.5.2 et 4.5.3, la construction du champ est encore astreinte à satisfaire aux *critères de convergence* (chap. 5).

**4.12** Ecrire (4.16), c'est imposer au champ (4.15) les conditions aux limites cinématiques nodales de l'élément fini.

**4.13** L'équation (4.17) donne l'interprétation physique des  $a_i$  : ce sont de simples combinaisons linéaires des inconnues nodales  $d_j$ .

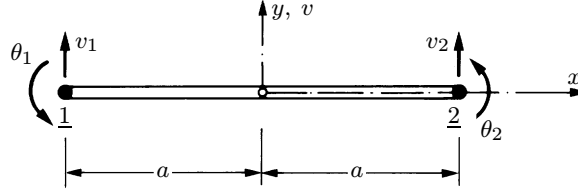
**4.14** Une matrice  $\mathbf{C}$  singulière révèle un défaut de la formulation de l'élément fini.

**4.15** Il semble intuitivement évident que le polynôme (4.13) doive être complet ; par suite le nombre  $n_p$  de ses monômes n'est pas nécessairement égal à  $n_d^e$ ... Cette particularité se manifeste de manière aiguë dans certains problèmes (plaques, chap. 9).

### Application 4.1

On désire construire les fonctions d'interpolation d'un élément fini de poutre continue prismatique. On sait déjà qu'un tel élément a  $n_d^e = 4$  degrés de liberté  $\mathbf{d}^T = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}$  (fig. 4.9).





**Fig. 4.9** Élément de poutre continue ( $L = 2a$ ;  $EI = \text{cste}$ ).

### Recherche directe des fonctions d'interpolation

En imposant successivement  $v_1 = 1$  seul,  $\theta_1 = 1$  seul,  $v_2 = 1$  seul et  $\theta_2 = 1$  seul, on obtient le diagramme des quatre fonctions d'interpolation associées  $M_1(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $M_2(x)$  et  $L_2(x)$  (fig. 4.10).



**Fig. 4.10** Fonctions d'interpolation de l'élément de poutre continue (Bernoulli–Navier).

Comme la mécanique des structures l'enseigne, ce sont, dans les axes de la figure 4.9 et avec  $a = L/2$ , des cubiques d'équation

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{a^3} - 3\frac{x}{a} + 2 \right) & L_1(x) &= \frac{a}{4} \left( \frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1 \right) \\ M_2(x) &= -\frac{1}{4} \left( \frac{x^3}{a^3} - 3\frac{x}{a} - 2 \right) & L_2(x) &= \frac{a}{4} \left( \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le champ du déplacement transversal (flèche)  $v(x)$  de l'élément poutre est donc

$$v(x) = v_1 M_1(x) + \theta_1 L_1(x) + v_2 M_2(x) + \theta_2 L_2(x) = [M_1 \quad L_1 \quad M_2 \quad L_2] \mathbf{d} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (4.21)$$

### Interpolation paramétrique (recherche indirecte)

Sachant qu'il y a quatre degrés de liberté ( $n_d^e = n_p = 4$ ), on écrit, d'emblée, pour  $v(x)$ , le polynôme du troisième degré

$$v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{p} \quad (4.22)$$

dont on sait d'ailleurs que c'est la solution exacte du problème (en l'absence de charges en travée). Exprimons les conditions aux limites (4.16) :

- nœud 1,  $x = -a$  :  $v = v_1$  et  $dv/dx = \theta_1$ ,
- nœud 2,  $x = a$  :  $v = v_2$  et  $dv/dx = \theta_2$ ,

d'où, pour  $v_1$  par exemple,

$$v_1 = c_1 - ac_2 + a^2c_3 - a^3c_4$$

et, sous forme matricielle, pour les quatre conditions

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Cp} \quad (4.23)$$

On résout par rapport à  $\mathbf{p}$ , on introduit dans (4.22) et on retrouve la forme (4.21) qui fait apparaître les fonctions d'interpolation.

#### Remarques

**4.16** On peut voir la différence entre les deux expressions (4.21) et (4.22) du même champ :

- dans (4.21), ce sont les degrés de liberté  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$  qui sont mis en évidence, les  $M_1, L_1, M_2, L_2$  étant fonction de  $1, x, x^2, x^3$  ;
- dans (4.22), ce sont les modes  $1, x, x^2, x^3$  qui ressortent, les  $c_i$  étant fonction de  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ .

**4.17** On a

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{4a^3} \begin{bmatrix} 2a^3 & a^4 & 2a^3 & -a^4 \\ -3a^2 & -a^3 & 3a^2 & -a^3 \\ 0 & -a^2 & 0 & a^2 \\ 1 & a & -1 & a \end{bmatrix}$$

**4.18** Les fonctions d'interpolation (4.20) s'appellent *fonctions cubiques de Ch. Hermite*.

## 4.6 Exercices

**4.6.1** Dessiner, pour l'élément de la figure 4.7, les autres fonctions d'interpolation ; les qualifier géométriquement. Constaté leur caractère répétitif. Ecrire la forme que prend l'équation (4.11) en fonctions des  $N_i$  (sans calculer l'équation des  $N_i$ ). Observer l'apparition naturelle du partitionnement nodal (rem. 2.5).

**4.6.2** On considère un élément fini triangulaire pour l'élasticité plane, à trois nœuds. Trouver, géométriquement, les fonctions d'interpolation. Les appeler  $N_i$  et écrire l'équation (4.11). *Note* : cet élément est le premier élément fini créé (sect 1.3, encadré).

**4.6.3** On considère une barre pour treillis plans, rapportée à ses axes locaux. Identifier ses fonctions d'interpolation, géométriquement d'abord, analytiquement ensuite. Exprimer alors son champ de déplacement. En déduire l'expression de sa dilatation, puis de son effort normal.

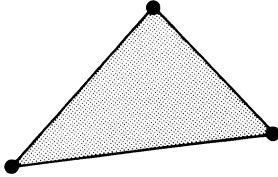


Fig. Ex. 4.6.2

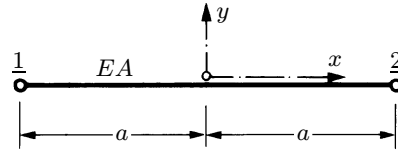


Fig. Ex. 4.6.3

**4.6.4** Résoudre l'exercice précédent, quant au champ de déplacement, par l'interpolation paramétrique.

**4.6.5** Qualifier, géométriquement, les fonctions d'interpolation d'un élément fini d'élasticité plane quadrilatéral à quatre nœuds.

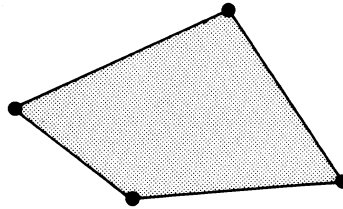


Fig. Ex. 4.6.5

**4.6.6** Les équations (4.2) – ou (3.9) et (3.10) – de l'élasticité montrent que les contraintes dépendent des dérivées des déplacements. En conséquence, comment les contraintes varient-elles dans les éléments des exercices 4.6.1, 4.6.2 et 4.6.5 ?

**4.6.7** Pour l'élément fini d'élasticité plane à six nœuds des figures 4.3 ou 4.7, proposer un champ paramétrique pour les déplacements  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ . Commenter. Cette proposition est-elle cohérente avec l'interprétation géométrique de l'exercice 4.6.1 ?

**4.6.8** Pour l'élément poutre de l'application 4.1, déduire, du champ de déplacement, l'équation du diagramme des moments (en fonction des degrés de liberté). Comparer avec les valeurs (1.12) de  $M_A$  et  $M_B$ .

## 4.7 Lexique

Interpolation

- fonction d'interpolation

Choix de fonctions décrivant un ou plusieurs champs inconnus dans l'élément fini.

Modèle d'élément fini

- modèle :
  - déplacement
  - équilibre ou contrainte
  - hybride
  - mixte

Type d'élément selon le(s) champ(s) interpolé(s).

## Méthode des résidus pondérés

- méthode de Galerkin

Méthode de résolution approximative des équations différentielles, faisant usage d'une forme intégrale pondérée ; variante où champ inconnu et fonction poids sont interpolés de façon identique par une séquence de fonctions exprimée linéairement sur les paramètres et inconnues.

## Interpolation directe

- fonction d'interpolation,  
matrice des fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}$ ,  
degré de liberté

Interpolation exprimée d'emblée avec les fonctions d'interpolation.

## Interpolation paramétrique

- mode, matrice des modes  $\mathbf{P}$ ,  
paramètre, vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$

Interpolation indirecte, via un polynôme ordinaire.

# 5 Critères de convergence

## 5.1 Notion de convergence

### 5.1.1 Introduction

Dans la méthode de Galerkin originale (rem. 4.9), la convergence vers la solution exacte est obtenue en enrichissant toujours davantage l'approximation représentant le champ inconnu sur le domaine entier : on augmente – en principe jusqu'à l'infini – le nombre  $n_{\text{Gal}}$  des termes  $a_i N_i$ .

Dans la méthode des éléments finis, le point de vue est un peu différent et il existe deux types de convergence :

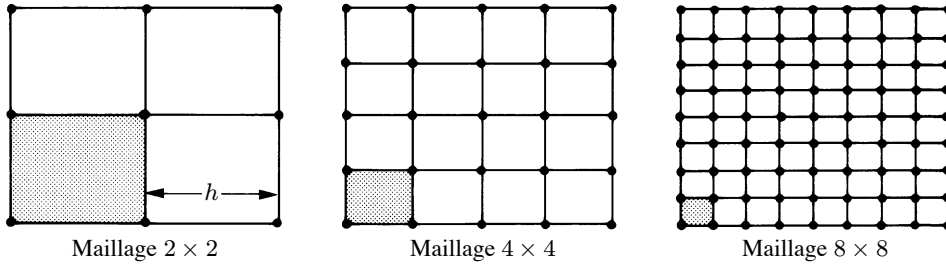
- la *convergence  $h$* , par raffinement du maillage sans modifier l'interpolation (§ 5.1.2) ;
- la *convergence  $p$* , par enrichissement de l'interpolation sans changer le maillage (§ 5.1.3).

Dans l'un et l'autre cas, l'interpolation choisie (sect. 4.5) doit satisfaire à certaines conditions, appelées **critères de convergence**, pour que la solution approchée tende vers la solution exacte. Ces critères sont décrits dès la section 5.2.

### 5.1.2 Convergence $h$

Considérons un maillage d'éléments finis (fig. 5.1) et appelons  $h$  la *dimension caractéristique* d'un élément (longueur, plus grand côté, diamètre du cercle circonscrit). On subdivise toujours davantage le domaine, en éléments toujours plus petits, chaque nouvelle division contenant la précédente, et on conserve, pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ.

Alors, si les critères de convergence sont remplis, la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro ( $h \rightarrow 0$ ). C'est le principe de la **convergence  $h$** .

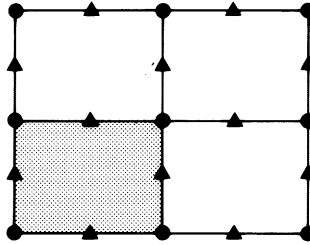


**Fig. 5.1** Subdivision toujours plus poussée pour étudier la convergence  $h$ .

### 5.1.3 Convergence $p$

Partons d'un maillage donné d'éléments finis et appelons  $p$  le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation. On conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré  $p$ .

Alors, si les critères de convergence sont satisfaits, la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini ( $p \rightarrow \infty$ ). C'est la technique de la **convergence  $p$** .



**Fig. 5.2** Augmentation du degré de l'interpolation pour étudier la convergence  $p$ ; ● : nombre fixe d'inconnues ( $p = 1$ ); ▲ : nombre variable  $k$  d'inconnues ( $k = 1, p = 2$ ;  $k = 2, p = 3$ ; ...).

### 5.1.4 Comparaison

Dans la convergence  $h$ , le type de l'élément ne change pas ; par contre, le nombre des éléments et le nombre des degrés de liberté s'accroissent constamment, et il faut continuellement reconstruire le maillage.

Dans la convergence  $p$ , le nombre d'éléments et le maillage restent fixes, mais le nombre d'inconnues par élément augmente sans cesse et les caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{f}$  des éléments changent continuellement. Un élément typique possède des nœuds associés avec un nombre  $k$  croissant de paramètres inconnus (fig. 5.2).

La méthode  $h$  teste les propriétés de convergence d'un élément fini donné. On doit passer par elle lors de la mise au point de tout élément fini. C'est la première qui fut utilisée dans la méthode des éléments finis et la seule retenue dans cet ouvrage.

La méthode  $p$  est plus récente. Elle est beaucoup plus proche, dans sa conception, de la convergence de la méthode de Galerkin originale. Généralement elle est aussi plus précise et plus rapide que la convergence  $h$ . Mais elle nécessite de disposer d'éléments finis dont on peut faire varier le degré  $p$  de l'interpolation ; de telles familles d'éléments sont loin d'être toujours disponibles.

### Remarques

**5.1** Pour les problèmes pratiques de l'ingénieur, c'est finalement une combinaison des méthodes  $h$  et  $p$  qui devrait donner la plus grande efficacité (convergence  $hp$ ) ; toutefois, cette conclusion reste plutôt théorique, car sa mise en œuvre apparaît difficile.

**5.2** Lorsqu'une propriété a lieu à la limite, elle est dite *asymptotique*. Dans la méthode des éléments finis, les propriétés liées à la convergence ont un caractère asymptotique.

## 5.2 Critères de convergence – Point de vue physique

Si le point de vue physique donne une justification essentiellement intuitive des critères de convergence, il en fournit aussi une compréhension concrète très utile dans le cadre de l'application de la méthode des éléments finis au calcul des solides et, surtout, des structures.

### 5.2.1 Critère 1

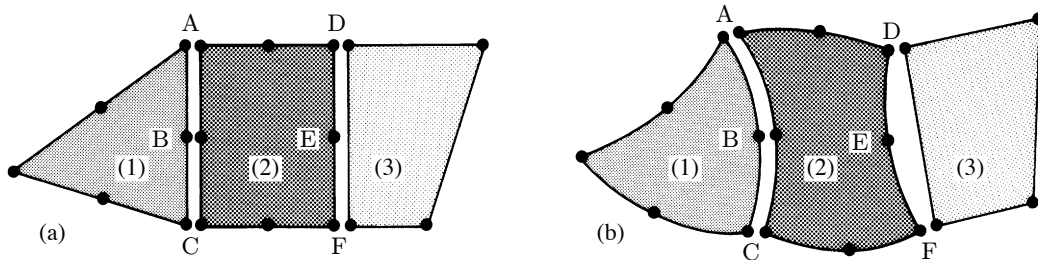
Le premier critère de convergence est le suivant :

**Critère de continuité, conformité ou compatibilité cinématique** : l'interpolation doit être telle que le champ des déplacements soit

- (1) continu et dérivable dans l'élément,
- (2) continu à travers les frontières.

La première condition prévient l'emploi de fonctions présentant des discontinuités (arêtes, sauts...) et garantit de pouvoir calculer les dérivées nécessaires de la forme faible ( $u_i(x_j)$  doit être dérivé une fois dans (3.25), via (3.26) et (3.10) ;  $v(x)$  doit être dérivé deux fois dans (3.33), via (3.34) ; bref, on doit pouvoir dériver  $m$  fois).

Par la seconde condition, les déplacements doivent être continus en tout point des frontières séparant les éléments. Or, à la frontière de deux éléments adjacents, les déplacements ne sont a priori égaux qu'aux seuls nœuds communs ; le critère exige donc de garantir la continuité des déplacements tout le long de la frontière en fonction des seules valeurs nodales (fig. 5.3). Cette condition peut s'avérer délicate à satisfaire.



**Fig. 5.3** Groupe de trois éléments finis plans : (a) configuration initiale ; (b) configuration déformée. Les éléments (1) et (2) sont conformes le long de ABC si les trois nœuds et les deux courbes coïncident exactement dans l'une et l'autre configuration (par exemple : paraboles) ; entre les éléments (2) et (3), la continuité est violée le long de DEF si les deux nœuds D et F de l'élément (3) ne peuvent définir qu'une droite.

La justification physique de ces conditions est triviale.

Les éléments finis qui respectent le critère 1 sont qualifiés d'*éléments conformes*.

Enfin, le critère 1 conduit à un résultat essentiel. Il garantit qu'on peut calculer les intégrales nécessaires dans (4.1), puisqu'elles ne contiennent aucun terme nul (par exemple dans le travail virtuel interne suite à la dérivation) ou infini (surtout sur les frontières, § 5.4.2). Il est alors licite d'affirmer qu'une intégrale sur le domaine  $\Omega$  est la *somme* de celles sur tous les éléments finis  $\Omega_e$  de ce domaine (assemblage)

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} (\dots) d\Omega \quad (5.1)$$

Cette égalité, appelée *condition d'intégrabilité*, est primordiale : elle justifie le choix de l'intégration par morceaux, typique de la méthode des éléments finis.

### Remarques

**5.3** On peut se représenter le découpage en éléments finis comme un ensemble de pièces *s'appuyant* les unes sur les autres. Puisque les conditions cinématiques aux appuis sont de même nature que celles entre éléments, la condition de continuité à travers les frontières impose en fait le respect des conditions aux limites essentielles à la frontière des éléments. Concrètement, la condition (5.1) revient à dire que tous les éléments sont, après assemblage, exactement juxtaposés.

**5.4** La frontière entre deux éléments finis peut être un *nœud*, un *bord* ou une *face*. La continuité est triviale en un nœud (élément 1D) ; elle est plus délicate le long d'un bord ou sur une face.

**5.5** La continuité aux frontières devient particulièrement difficile à satisfaire si non seulement les déplacements (de translation), mais aussi leurs dérivées (pente), doivent être continus (chap. 9, plaques de Kirchhoff).

## 5.2.2 Critère 2

Le second critère de convergence s'énonce comme suit :

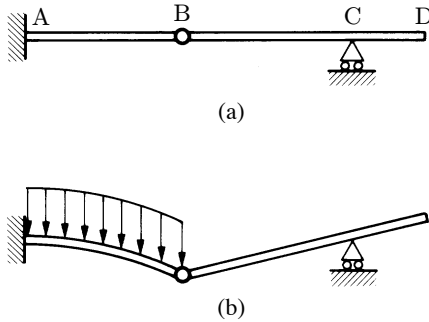
**Critère des déformations constantes ou de complétude** : l'interpolation doit permettre de représenter

- (1) les états de déplacement constant ou modes rigides,
- (2) les états de déformation constante.

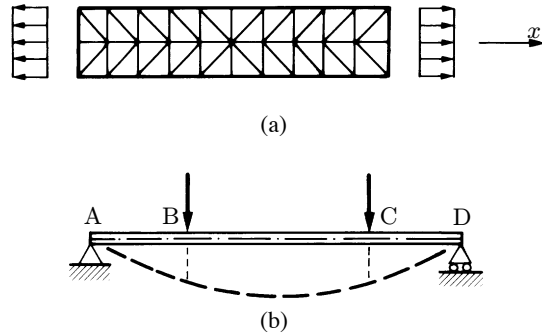
Ce critère semble physiquement évident : l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide, sans qu'aucune contrainte (ou déformation) n'y naisse (fig. 5.4), et il doit être capable de représenter les états de déformation les plus simples, c'est-à-dire constants (fig. 5.5).

En réalité, ce critère doit être compris de manière plus aiguë et se justifie à la limite : quand un élément fini devient de plus en plus petit ( $h \rightarrow 0$ ), ses déplacements et déformations tendent vers des valeurs constantes ; pour assurer la convergence, il est donc indispensable que l'interpolation puisse les représenter.





**Fig. 5.4** Mode rigide : (a) configuration initiale ; (b) configuration déformée : BCD se déplace sans se déformer (rotation rigide).



**Fig. 5.5** Déformations constantes : (a) essai de traction :  $\epsilon_x = \text{cste}$  ; (b) flexion pure entre B et C :  $\psi = \text{cste}$ .

### Remarques

**5.6** Les modes rigides sont de deux natures : *petites rotations* et *petites translations* (TGC vol. 1, § 11.6.2 et vol. 3, § 3.2.3).

**5.7** Qui dit *mode rigide* dit *déformation nulle* ; la première condition est donc un cas particulier de la seconde et le critère 2 peut ne se formuler qu'en déformations (d'où son titre).

**5.8** Les déformations apparaissent dans la forme faible en dérivant  $m$  fois les déplacements.

## 5.3 Assouplissement des critères et patch test

### 5.3.1 Élément non conforme

Les critères de convergence sont nés de l'application de la méthode des éléments finis au calcul des structures (1965). Ils garantissent une convergence monotone de la solution numérique vers la solution exacte (chap. 11). On s'est ensuite aperçu que, sous certaines conditions, ils pouvaient être assouplis (au détriment du caractère monotone de la convergence toutefois). En particulier, *la convergence a encore lieu si les critères sont satisfaits asymptotiquement* (c'est-à-dire quand la taille des éléments finis  $h$  tend vers zéro).

Il en résulte que, dans le premier critère, la condition de continuité entre éléments peut être légèrement relaxée ; les éléments finis qui présentent de légers défauts de continuité aux frontières sont dits **non conformes**.

Ces nouvelles données apportent un peu de liberté supplémentaire pour construire des éléments finis. Elles ont permis d'en sauver quelques-uns, qui paraissaient douteux. Elles sont aussi employées pour améliorer les performances de certains éléments, au comportement trop raide.

### 5.3.2 Convergence des éléments finis non conformes et patch test

Pour converger, un élément fini non conforme doit, à la limite, restaurer la parfaite continuité aux frontières. Cette propriété est acquise si (sans démonstration) *la continuité aux frontières est rigoureusement satisfaite pour tous les états de déformation constante* (nulle ou non).

Cette condition est difficile à vérifier analytiquement, lors de la construction d'un élément. Elle peut être remplacée par un test numérique appelé *patch test*.

Considérons diverses subdivisions irrégulières d'un domaine de forme simple (fig. 5.6). On impose aux limites (nœuds du bord  $\Gamma$ ) des charges (forces ou déplacements imposés) produisant tour à tour les divers états de déformation constante possibles (par exemple, en élasticité plane,  $u = \text{cste}$ ,  $\dots$ ,  $\varepsilon_x = \text{cste}$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_{xy} = \text{cste}$ ; en poutre continue,  $v = \text{cste}$  et  $\psi = \text{cste}$ ). *Le patch test est satisfait si la solution numérique restituée partout, en particulier aux nœuds intérieurs, la solution théorique exacte.*

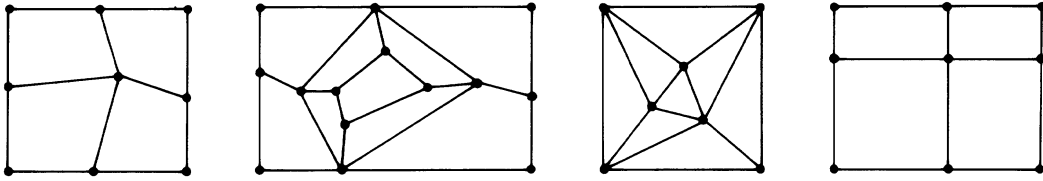


Fig. 5.6 Maillages en quadrilatères, triangles ou rectangles en vue d'un *patch test*.

### Remarques

**5.9** Il n'y a pas de paradoxe : la présence des états de déformation constante dans un élément isolé ne garantit pas cette même présence dans un groupe d'éléments (*patch*), si ces éléments sont non conformes.

**5.10** On constate une interaction des critères 1 et 2, le second se montrant finalement plus exigeant que le premier. Au fond, le *patch test* est une vérification du critère 2 (via un groupe d'éléments).

**5.11** Plus généralement, le *patch test* s'adresse aux modèles déplacements non standard : non conformes, avec modes incompatibles (§ 5.5.2), avec intégration réduite (chap. 7), etc.

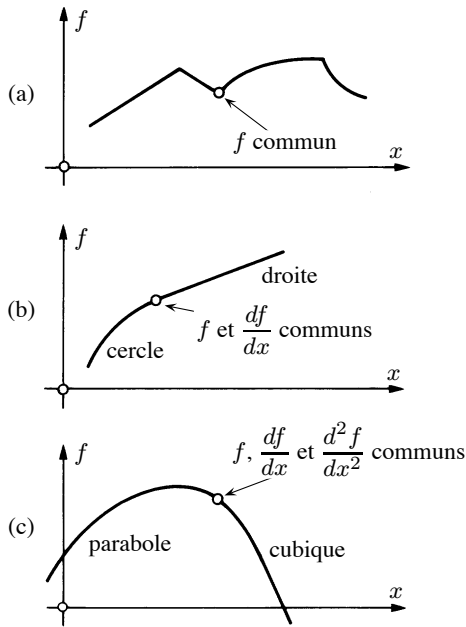
**5.12** Le *patch test* ne décèle pas la présence éventuelle de mécanismes, présence qui se contrôle par le *single element test* ou par une recherche de valeurs propres sur  $\mathbf{k}$ . Le *single element test* est parfois considéré comme un complément indispensable au *patch test*. (Pour ces notions, voir la section 7.6.)

## 5.4 Critères de convergence – Un rien plus mathématique

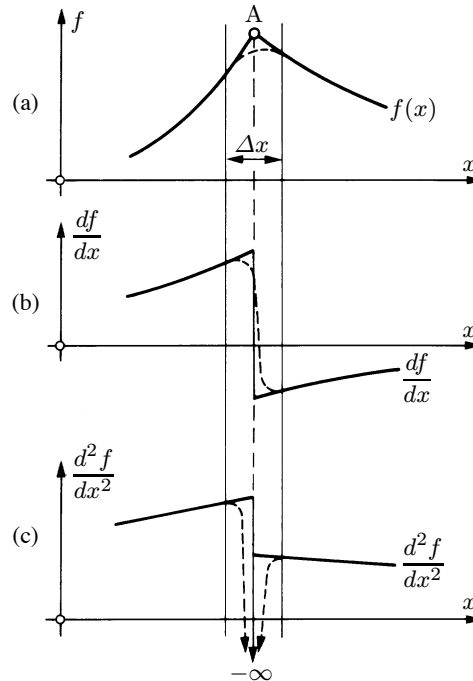
### 5.4.1 Quelques rappels et définitions

On dit qu'une fonction a la *continuité*  $C^r$ , ou est de *classe*  $C^r$ , si elle est continue, ainsi que ses dérivées, jusqu'à l'ordre  $r$  (fig. 5.7). Une fonction  $C^0$  est simplement une fonction continue.

Examinons le cas du point A correspondant à la jonction de deux fonctions avec discontinuité de la pente (fig. 5.8a). La première dérivée y présente un saut (fig. 5.8b). Pour savoir avec plus de précision ce qui se passe en A, imaginons une petite bande de largeur  $\Delta x$  dans laquelle on réalise une transition régulière entre les valeurs à gauche et celles à droite (en trait pointillé). On constate que les valeurs de la fonction et de sa première dérivée restent finies en A lorsque  $\Delta x$  tend vers zéro, alors que les dérivées d'ordre supérieur tendent vers l'infini (fig. 5.8c).



**Fig. 5.7** Fonctions : (a)  $C^0$  ; (b)  $C^1$  ; (c)  $C^2$ .



**Fig. 5.8** Dérivées au voisinage du point de rencontre A de deux fonctions avec pente discontinue.

Un polynôme est dit *complet au degré  $p$*  si toutes les puissances  $q$ , avec  $0 \leq q \leq p$ , y sont représentées ; par exemple,

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3$$

est complet (en  $x$  et  $y$ ) au degré  $p = 3$ .

L'ordre des dérivées de la forme forte,  $2m$ , a été réduit à  $m$  dans la forme faible ; les dérivées de la fonction inconnue et de la fonction poids  $y$  ont le même ordre  $m$  ; la fonction poids est interpolée semblablement à la fonction inconnue (Galerkin).

### 5.4.2 Critère 1

Il s'énonce maintenant comme suit :

**Critère de continuité** : l'interpolation du champ des déplacements doit être au moins

- (1) de classe  $C^m$  dans l'élément,
- (2) de classe  $C^{m-1}$  au droit des frontières.

La première condition garantit :

- l'emploi de fonctions d'interpolation suffisamment régulières (sans sauts...) et dérivables dans l'élément fini ;
- la valeur non nulle des intégrales de la forme faible (qui contient des dérivées d'ordre  $m$ ).

La seconde assure que, tout le long des frontières,

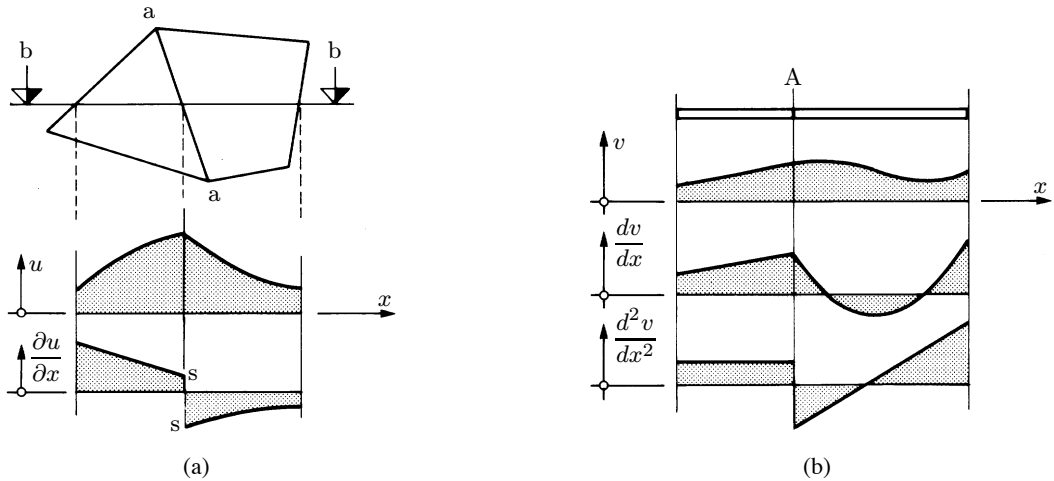
- les déplacements sont continus ;
- les dérivées du plus haut ordre ( $m$ ) présentent, au pire, un saut fini (fig. 5.9) et ne prennent pas, en particulier, des valeurs infinies (fig. 5.8).

Alors, essentiellement, l'équation d'assemblage (5.1) est licite.

### Remarques

**5.13** Les dérivées d'ordre  $m$  sont, concrètement, les déformations (rem. 5.8).

**5.14** D'un élément fini à l'autre, les déplacements seuls sont continus, pas leurs dérivées d'ordre  $m$  et plus (fig. 5.9) ; par suite, *ni les déformations, ni les contraintes ne sont continues entre les éléments* (sect. 6.3).



Cas  $m = 1$ , élasticité plane :

- dans chaque élément, classe  $C^1$  :  $u$  est continu et dérivable une fois (coupe b-b) ;
- à travers la frontière a-a, continuité  $C^0$  : le champ inconnu  $u$  est continu, mais pas sa dérivée  $\partial u / \partial x$  (saut fini s-s).

Cas  $m = 2$ , poutre continue :

- dans chaque élément, classe  $C^2$  :  $v$  est continu et deux fois dérivable ;
- à travers la frontière A, continuité  $C^1$  :  $v$  et  $dv/dx$  sont continus, mais pas nécessairement  $d^2v/dx^2$  ( $M$  peut être discontinu).

**Fig. 5.9** Illustration du critère 1 de continuité : (a) deux éléments d'élasticité plane ayant une frontière a-a en commun ; (b) deux éléments de poutre ayant un nœud A en commun.

### 5.4.3 Critère 2

Il peut prendre plusieurs formes, par exemple :

**Critère de complétude** : le champ approché et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  doivent pouvoir prendre des valeurs constantes arbitraires dans l'élément.

Ce critère se justifie, comme au paragraphe 5.2.2, asymptotiquement. Quand l'interpolation utilise des expressions polynomiales, il s'énonce ainsi :

*L'interpolation doit contenir tout terme polynomial de degré inférieur ou égal à  $m$ .*

Ou encore, plus directement :

*Le polynôme doit être complet au degré  $m$  au moins ( $p \geq m$ ).*

Un tel polynôme est aussi de classe  $C^m$ .

#### Remarque

**5.15** Ainsi, les termes polynomiaux du plus bas niveau (constants et linéaires si  $m = 1$ , voire quadratiques si  $m = 2$ ) sont en fait les plus importants de l'interpolation.

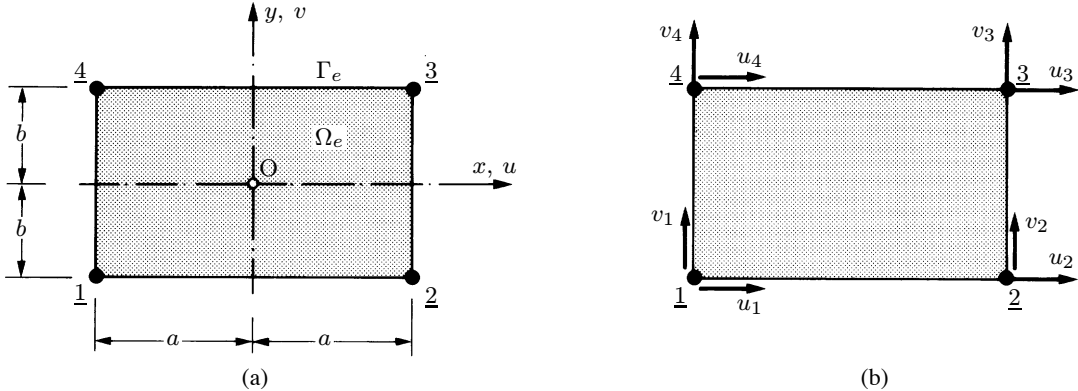
## 5.5 Applications

### 5.5.1 Rectangle bilinéaire

On considère, en élasticité plane ( $m = 1$ ), un élément fini rectangulaire de dimensions  $2a \times 2b$ , placé dans le système d'axes  $(x, y)$  indiqué (fig. 5.10a). La théorie enseigne que le champ de déplacement comporte les deux composantes  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  tant dans  $\Omega$  que sur  $\Gamma$ . Il faut donc choisir comme degrés de liberté les valeurs de  $u$  et  $v$  en certains nœuds.

Si on sélectionne les quatre sommets du rectangle comme nœuds, l'élément comporte huit inconnues cinématiques (fig. 5.10b) :

$$\mathbf{d}^T = \{ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \} \quad (5.2)$$



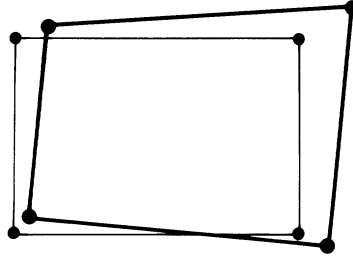
**Fig. 5.10** Élément fini rectangulaire d'élasticité plane : (a) géométrie et axes ; (b) nœuds et degrés de liberté.

#### Choix du champ – interpolation paramétrique

Puisqu'il y a 8 inconnues, l'interpolation doit contenir 8 paramètres, qu'il faut répartir équitablement entre  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ . Essayons l'approximation polynomiale quadratique

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\ v(x, y) &= c_5 + c_6x + c_7y + c_8xy \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ces champs sont continus et dérivables  $m$  fois dans  $\Omega_e$ . Ils varient *linéairement* sur les frontières  $x = \pm a$  et  $y = \pm b$ , de sorte que la configuration déformée d'un bord est un segment de droite, entièrement déterminé par la connaissance des déplacements de ses deux nœuds d'extrémité. Dans un maillage de tels éléments, il y a donc continuité parfaite aux frontières. Le critère 1 est rempli. La déformée de l'élément fini est un quadrilatère (fig. 5.11).



**Fig. 5.11** Configurations initiale et déformée de l'élément rectangulaire à quatre nœuds.

La présence, dans (5.3), des termes constants et linéaires assure de reproduire exactement les modes rigides et les états de déformation constante (fig. 5.12), puisque chaque composante peut être représentée par une constante :

- translation selon  $x$

$$u = c_1 \quad (5.4a)$$

- translation selon  $y$

$$v = c_5 \quad (5.4b)$$

- rotation autour de O

$$u = -\theta y = c_3 y \quad v = \theta x = c_6 x \quad (\theta = -c_3 = c_6) \quad (5.4c)$$

- dilatation selon  $x$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \quad (5.5a)$$

- dilatation selon  $y$

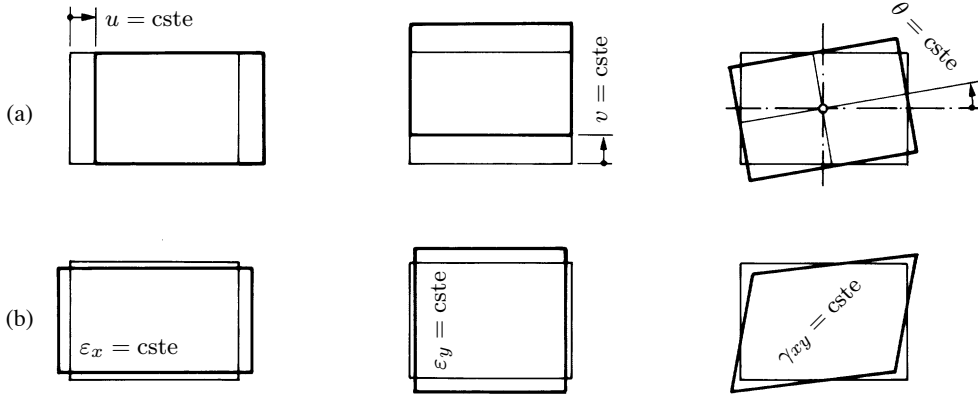
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c_7 \quad (5.5b)$$

- glissement

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_3 + c_6 \quad (5.5c)$$

D'ailleurs les polynômes sont *complets* au degré  $m = 1$ . Le critère 2 est donc aussi satisfait.

En conclusion, l'élément est un *modèle déplacement conforme convergent*.



**Fig. 5.12** Élément fini rectangulaire : (a) modes rigides ; (b) états de déformation constante.

Le champ paramétrique (5.3) s'écrit, sous forme matricielle,

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{p} \quad (5.6)$$

En exprimant ce champ aux quatre nœuds successivement, on obtient la matrice **C**

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{p} \quad (5.7)$$

On résout ( $\mathbf{p} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}$ ) et, dans (5.6), il vient

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} \quad (5.8)$$

ce qui définit les fonctions d'interpolation  $N_i$ . Mais il est plus simple de les trouver directement.

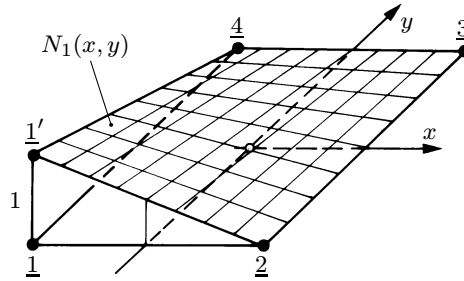
### Fonctions d'interpolation

Partons de la propriété (4.10) de ces fonctions et tentons d'en dessiner le diagramme (§ 4.5.2). Pour  $N_1(x, y)$  par exemple, on porte  $u_1 = 1$  normalement au rectangle et on cherche une surface simple, nulle aux nœuds 2, 3 et 4 et comportant des droites le long des bords, puisque chaque bord n'est défini que par deux nœuds. Ce dessin (fig. 5.13) fait apparaître un paraboloïde hyperbolique (ou quadrilatère gauche) 1'-2-3-4. On sait que cette surface correspond à une fonction régulière et dérivable, et que ses

frontières sont rectilignes entre deux nœuds (génératrices). Le critère 1 est rempli. On établit aisément l'équation  $N_1(x, y)$  de la fonction d'interpolation et, procédant de même aux nœuds 2, 3 et 4, il vient

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right) & N_2(x, y) &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right) & N_4(x, y) &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ces polynômes sont complets au degré  $m = 1$ . Le critère 2 est aussi satisfait.



**Fig. 5.13** Diagramme de la fonction d'interpolation  $N_1(x, y)$ .

Comme on interpole semblablement  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$ , le champ est

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 + N_4(x, y)u_4 \\ v(x, y) &= N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 + N_4(x, y)v_4 \end{aligned} \quad (5.10)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

ou encore

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{d} \quad (5.12)$$

### Remarques

**5.16** Il est clair qu'on doit interpoler  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  identiquement, sinon on introduit une dissymétrie dans le comportement de l'élément ; de plus,  $u$  et  $v$  ne sont pas couplés, de sorte qu'on peut simplifier les calculs précédents en n'étudiant qu'une composante.



**5.17** Le polynôme d'interpolation (5.3) est complet au degré  $m = 1$ , mais incomplet au degré  $p = 2$  ; des trois monômes quadratiques possibles,  $x^2$ ,  $xy$  et  $y^2$ , on a retenu celui qui assurait, outre la symétrie, un champ de déplacement *linéaire sur les frontières*.

**5.18** L'élément est dit *bilinéaire*, bien que son champ soit quadratique, parce que les déplacements varient de façon linéaire parallèlement aux axes  $x$  et  $y$ .

**5.19** Il est bien sûr avantageux de faire coïncider les axes locaux  $(x, y)$  avec les axes de symétrie géométrique de l'élément.

**5.20** La petite rotation autour de O peut aussi s'exprimer par la *rotation matérielle* (TGC vol. 3, sect. 3.5)

$$\omega_z = -\Omega_{xy} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} (c_3 - c_6) = \text{cste}$$

et on a  $\omega_z \equiv \theta$  dans (5.4c).

**5.21** L'aspect physique des critères de convergence s'étudie plus facilement avec la forme paramétrique du champ des déplacements.

**5.22** On observe que

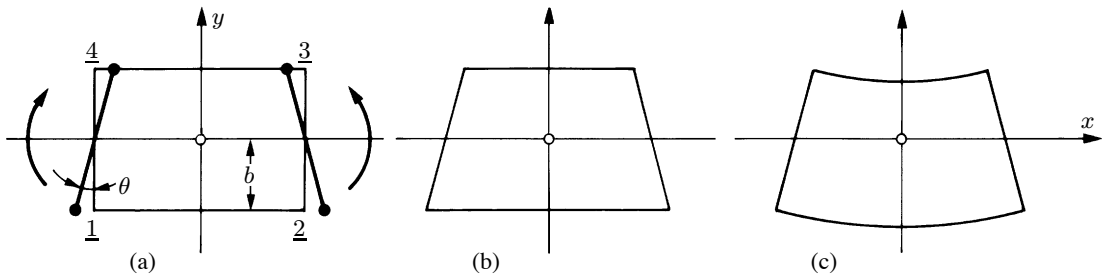
$$\sum_1^4 N_i(x, y) = 1 \quad (5.13)$$

ce qui correspond d'ailleurs aux modes rigides de translation.

**5.23** Ni l'épaisseur  $t$  de l'élément, ni les propriétés  $E$ ,  $\nu$  de son matériau (Hooke) n'interviennent à ce niveau (sect. 6.4).

### 5.5.2 Rectangle non conforme

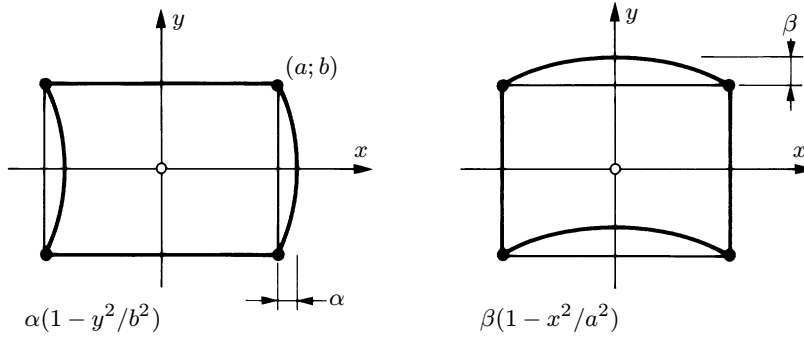
Si on soumet les deux bords  $x = \pm a$  de l'élément fini précédent à deux petites rotations opposées, représentant une sollicitation de flexion pure (fig. 5.14a), on obtient une configuration déformée en trapèze (fig. 5.14b, car  $v = 0$  partout) et non en flexion (fig. 5.14c), comme cela serait souhaitable.



**Fig. 5.14** Élément rectangulaire sollicité en flexion pure : (a)  $-u_1 = u_2 = -u_3 = u_4$  ;  
 (b) déformée obtenue ; (c) déformée souhaitée.

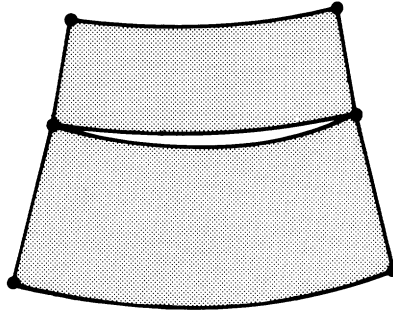
Pour pallier ce défaut, on peut enrichir le champ des déplacements (5.3) ou (5.10) des deux modes de déplacement représentés à la figure 5.15, d'où

$$u(x, y) = \sum_1^4 u_i N_i + \alpha \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad v(x, y) = \sum_1^4 v_i N_i + \beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (5.14)$$



**Fig. 5.15** Modes de déplacement paraboliques pour l'élément rectangulaire.

Les modes paraboliques d'intensité  $\alpha$  et  $\beta$  d'un élément ne sauraient être connectés à ceux d'un élément adjacent, car ces deux éléments auront probablement des déformées paraboliques d'intensité différente. Ainsi, la *compatibilité cinématique le long des frontières n'est plus assurée* (fig. 5.16, sauf aux quatre nœuds) et l'élément fini est du type *non conforme*. On peut vérifier cependant qu'il satisfait au *patch test*. Il est donc encore convergent.



**Fig. 5.16** Non-conformité de deux rectangles.

Dans (5.14), on a plus de paramètres que de degrés de liberté nodaux ( $n_p = 10$ ,  $n_d^e = 8$ ). Mais les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont propres à un élément (degrés de liberté internes); donc, après avoir construit la matrice de rigidité ( $10 \times 10$ ), on se ramène à la dimension standard ( $8 \times 8$ ) par *condensation* (sect. 2.6) des équations relatives à  $\alpha$  et  $\beta$ .

On appelle **modes incompatibles** les modes de déplacement ajoutés à un élément pour en améliorer la qualité, au détriment de sa conformité.

## 5.6 Exercices

**5.6.1** Etudier – comme pour le rectangle du paragraphe 5.5.1 – le champ des déplacements et les critères de convergence d'un élément fini triangulaire d'élasticité plane, en choisissant une interpolation aussi simple que possible.

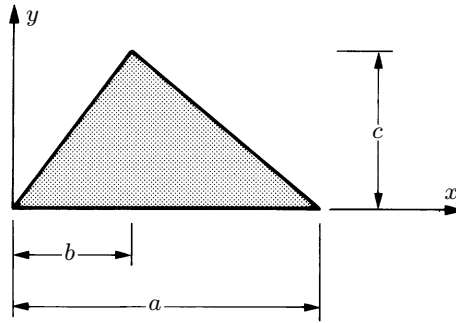


Fig. Ex. 5.6.1

**5.6.2** Le triangle de l'exercice précédent est-il cinématiquement compatible avec les rectangles des paragraphes 5.5.1 et 5.5.2 ?

**5.6.3** Pour améliorer les performances de l'élément triangulaire de l'exercice 5.6.1, étudier un élément plus évolué comportant des nœuds aux sommets et au milieu des côtés :

- 1) Dessiner l'élément et trouver le nombre  $n_d^e$  de ses degrés de liberté.
- 2) Proposer un champ polynomial paramétrique.
- 3) Quelle est la déformée des côtés ? Y a-t-il conformité aux frontières ? Les critères de convergence sont-ils satisfaits ?
- 4) Dessiner les deux fonctions d'interpolation typiques de cet élément (ex. 4.6.1).

**5.6.4** Que penser du maillage, formé des éléments triangulaires des exercices précédents, destiné à étudier une barre à section rectangulaire mince de hauteur variable ?

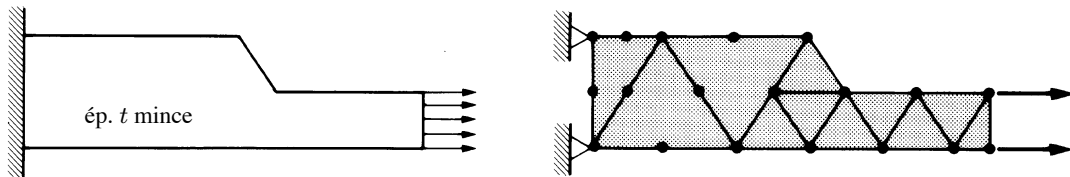


Fig. Ex. 5.6.4

**5.6.5** Etudier la modélisation et la discrétisation de la zone d'appui d'une poutre âme-semelles-raideuseur, considérée comme un problème plan (plan moyen de l'âme), par des éléments finis rectangulaires (§ 5.5.1) dans l'âme et, pour les semelles et le raidisseur,

- 1) des barres de treillis ;
- 2) des poutres.

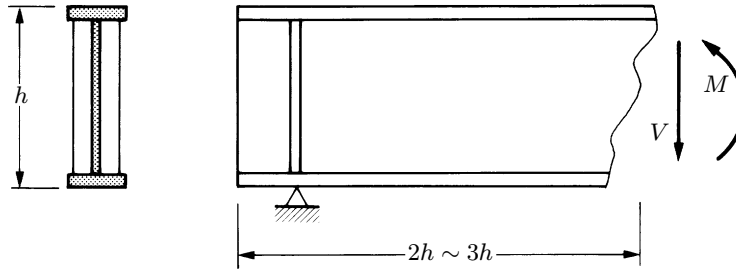


Fig. Ex. 5.6.5

Discuter ces deux discrétisations (continuité aux frontières ? que néglige 1) ? quel problème 2) introduit-il ? etc. ). Dans l'âme, où faut-il densifier le maillage (dessin) ? Etudier aussi les conditions aux limites (naturelles et essentielles).

**5.6.6** Donner une troisième possibilité de modélisation-discrétisation des semelles et du raidisseur de l'exercice précédent.

**5.6.7** Etudier un élément fini triangulaire d'élasticité plane à trois nœuds disposés au milieu des côtés :

- 1) Proposer une interpolation paramétrique.
- 2) Dessiner les fonctions d'interpolation.
- 3) Etudier les critères de convergence.

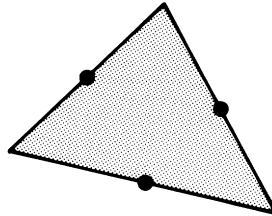


Fig. Ex. 5.6.7

**5.6.8** Ecrire le champ de déplacement relatif à la déformation en trapèze de l'élément rectangulaire de la figure 5.14(b). Vérifier que, dans le tenseur déformation qui en résulte, le glissement n'est pas nul. *Note* : ce glissement, dit *parasite*, est à l'origine du mauvais comportement flexionnel du rectangle bilinéaire.

## 5.7 Lexique

Critère de convergence

Condition à laquelle l'interpolation doit satisfaire pour garantir la convergence vers la solution exacte.

- critère de continuité, ou compatibilité cinématique
- critère des déformations constantes ou de complétude

Convergence  $h$

Convergence par raffinement du maillage.

Convergence  $p$

Convergence par augmentation du degré de l'interpolation polynomiale.

Elément conforme

- élément non conforme

*Patch test*

*Single element test*

Rectangle bilinéaire

Mode incompatible

Elément assurant la parfaite continuité des déplacements sur ses frontières.

Test de convergence des éléments non conformes.

Test destiné à révéler certains défauts d'un élément fini (mécanisme).

Elément 2D à quatre nœuds, à interpolation linéaire parallèlement à ses côtés.

Mode de déplacement enrichissant un élément, mais créant une non-conformité.



# 6 Construire un élément fini

## Caractéristiques de l'élément

### 6.1 Introduction

Les caractéristiques de l'élément fini consistent essentiellement en la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  et le vecteur force  $\mathbf{f}$  (§ 3.3.2). On les tire de la relation force-déplacement, que l'on établit en introduisant dans l'équilibre intégral de l'élément fini, exprimé sous forme de principe des déplacements virtuels (sect. 3.7), les approximations choisies pour les champs inconnus. Ces champs, des déplacements cherchés d'une part et virtuels (fonctions poids) de l'autre, ont la même forme analytique (méthode de Galerkin, sect. 4.3).

### 6.2 Formulation de l'élément fini

#### 6.2.1 Position du problème

Découpé hors d'un solide, un élément fini isolé est soumis aux forces extériorisées suivantes (fig. 6.1) :

- les forces de volume  $\mathbf{b}$  (charges) ;
- les tractions de surface  $\mathbf{t}$  (charges) ;
- les réactions internes nodales  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  remplace les vecteurs contraintes (§ 3.3.2) et complète  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{t}$  de manière à réaliser la forme faible exprimant l'équilibre de l'élément).

Pour l'élément isolé, le principe des déplacements virtuels  $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$  (3.25b) s'écrit

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (6.1)$$

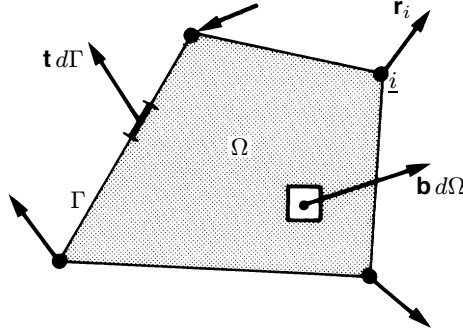
avec ((3.9), (3.10) et (3.27))

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u} \quad (6.3)$$

Les champs des déplacements cherchés et virtuels sont ((4.11) et (4.12))

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad \delta\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{d} \quad (6.4)$$



**Fig. 6.1** Élément fini isolé et ses forces.

### 6.2.2 Matrice de rigidité

On parcourt les équations précédentes en sens inverse, en partant des déplacements (6.4).

#### Déformations

On effectue les dérivées dictées par les équations cinématiques (6.3) (par exemple  $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ , etc.); elles touchent la matrice  $\mathbf{B}$ , d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{d} \quad (6.5)$$

#### Loi constitutive

On introduit la première relation (6.5) dans (6.2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (6.6)$$

#### Travail virtuel intérieur

On introduit (6.6) et la seconde relation (6.5) dans le terme de gauche de (6.1)

$$\delta W_{\text{int}} = \delta\mathbf{d}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} \quad (6.7)$$

L'intégrale du triple produit matriciel définit la **matrice de rigidité**  $\mathbf{k}$  de l'élément, carrée ( $n_d^e \times n_d^e$ ) et symétrique,

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.8)$$



### 6.2.3 Vecteur force

On introduit (6.4) dans le travail virtuel extérieur, second membre de (6.1),

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (6.9)$$

Les deux intégrales définissent le **vecteur force** de l'élément

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (6.10)$$

Ces forces sont dites **consistantes** : elles représentent les forces nodales dues aux charges agissant sur l'élément.

### 6.2.4 Equilibre de l'élément fini

Avec les notations ci-dessus, le principe des déplacements virtuels (6.1) s'écrit

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (6.11)$$

Cette égalité, écrite sous la forme  $\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{f} - \mathbf{r}) = 0$  (image matricielle de la forme intégrale), est valable quels que soient les déplacements virtuels. La parenthèse doit donc s'annuler et l'égalité

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (6.12)$$

représente l'équation d'équilibre de l'élément fini, ou encore la relation force-déplacement.

#### Remarques

**6.1** Dans ce chapitre, tout se rapporte à l'élément fini : on omet donc l'indice  $e$ .

**6.2** L'intégrale sur  $\Gamma$  dans (6.1) ne touche, en principe, que les frontières de l'élément qui coïncident avec le bord  $\Gamma_t$  du domaine.

**6.3** Dans (6.3), on n'utilise pas la matrice  $\mathbf{L}$  : on effectue directement les dérivées données par la théorie, puis on regroupe les résultats dans l'écriture matricielle (6.5).

**6.4** Dans la seconde intégrale de (6.10),  $\mathbf{N}$  est la valeur que prend l'interpolation le long de la frontière  $\Gamma$  chargée de l'élément.

**6.5** Le qualificatif *consistant* (traduction libre de l'anglais *consistent*) signifie *dérivé de la formulation théorique* ; il s'oppose à *statiquement équivalent*, qui correspond plutôt à un jugement intuitif (sect. 7.8).

**6.6** Le vecteur  $\mathbf{f}$  (6.10) correspond au vecteur  $\mathbf{s}$  des poutres, avec, vu l'emploi du principe des déplacements virtuels, un changement de signe (rem. 3.2).

**6.7** Le vecteur  $\mathbf{r}$  dû à des déplacements imposés des nœuds  $\bar{\mathbf{d}}$  vaut

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} \bar{\mathbf{d}} \quad (6.13)$$

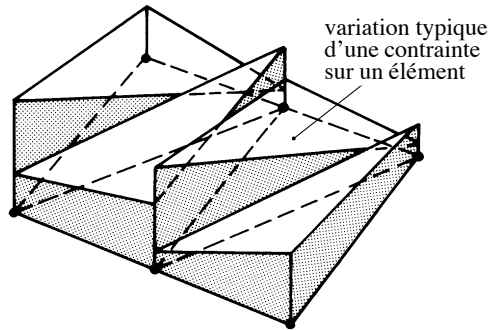
et est assimilable à un vecteur charge (appl. 2.3).

## 6.3 Contraintes

### 6.3.1 Calcul des contraintes

Les contraintes se calculent par (6.6)  $\sigma = \mathbf{DB}(\mathbf{x})\mathbf{d}$ . Or, pour le modèle déplacement, les contraintes ne satisfont à l'équilibre qu'*en moyenne*, au sens de la forme faible. L'équilibre différentiel local n'est généralement pas vérifié. En conséquence, les contraintes (6.6) peuvent présenter, en tout point, des *défauts d'équilibre* considérés, le plus souvent, comme gênants. On peut les classer en trois groupes.

Tout d'abord, ces contraintes sont, a priori, *discontinues* d'un élément à son voisin (fig. 6.2). Elles se déduisent en effet directement des déformations (via la loi constitutive), lesquelles sont obtenues en dérivant les déplacements. Or, aux frontières, on prescrit seulement la continuité des déplacements, pas celle des dérivées conduisant aux déformations (rem. 5.14).



**Fig. 6.2** Champ discontinu des contraintes sur une partie d'un maillage d'éléments finis triangulaires.

Ensuite, les contraintes (6.6) violent ponctuellement les conditions aux limites naturelles, la formulation théorique n'exigeant de les satisfaire qu'en moyenne (discontinuité avec les tractions de surface).

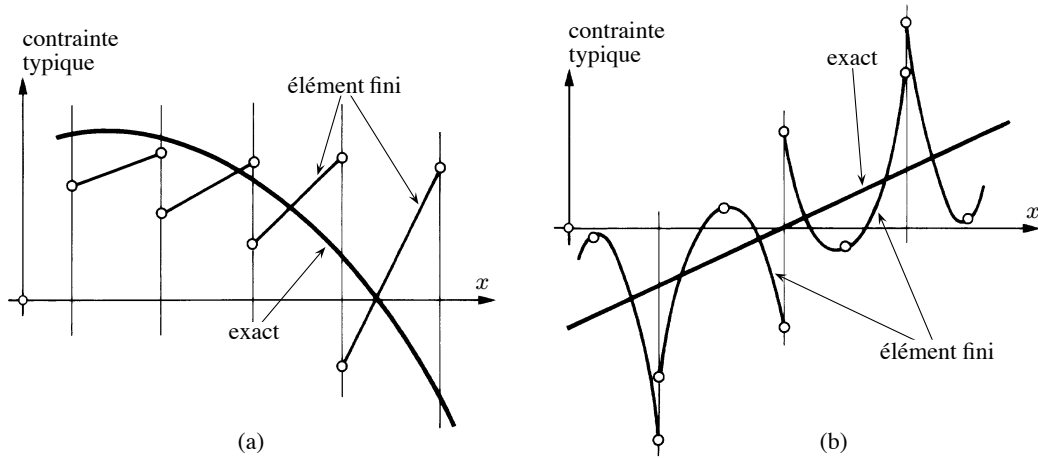
Enfin, les contraintes calculées ont souvent, dans un élément, des *variations* ou *oscillations* trop brutales pour être réalistes (fig. 6.3). Cela provient tant de l'interpolation, choisie pour représenter les déplacements et non les contraintes, que de la dérivation, qui dégrade cette interpolation (rem. 3.14). En fait, l'équilibre intérieur est localement violé.

Pour assurer la continuité des contraintes, la compatibilité cinématique aux frontières devrait être *surcompatible*, c'est-à-dire de classe  $C^m$ . Cette condition est non seulement très difficile – voire impossible – à réaliser, mais en plus indésirable, car *les contraintes sont parfois réellement discontinues* : action d'un moment concentré sur une poutre, jonction d'éléments structuraux, variation d'épaisseur, présence de plusieurs matériaux, etc.

On est donc amené à tirer le meilleur parti possible des distributions irrégulières obtenues, qui sont parfois déroutantes (fig. 6.3).

#### Remarque

**6.8** Il peut se produire que les contraintes aient effectivement à varier fortement dans un élément (force concentrée, singularité, etc.) ; ce cas n'est pas envisagé ici.



**Fig. 6.3** Variations possibles des contraintes dans les éléments finis, par rapport à la valeur exacte.

### 6.3.2 Lissage et restitution des contraintes

Dans le modèle déplacement, les contraintes sont moins précises que les déplacements. Si ces derniers ont une précision de quelques pour cent, l'imprécision sur les contraintes peut être de 10 ou 20 %, et même plus. Or les contraintes intéressent l'ingénieur autant, voire davantage, que les déplacements. Le problème d'une bonne *restitution des contraintes* est donc réellement important.

Sur l'étendue d'un élément fini, on observe que :

- c'est souvent aux nœuds que les contraintes, dites *contraintes nodales*, sont les plus imprécises ;
- on peut trouver d'autres points, dont la position dépend du type d'élément, où les contraintes sont de précision supérieure ;
- il peut exister des points particuliers, dits *points de contrainte optimaux*, où les contraintes, dites *contraintes optimales*, ont une précision voisine de celle des déplacements (sect. 11.8).

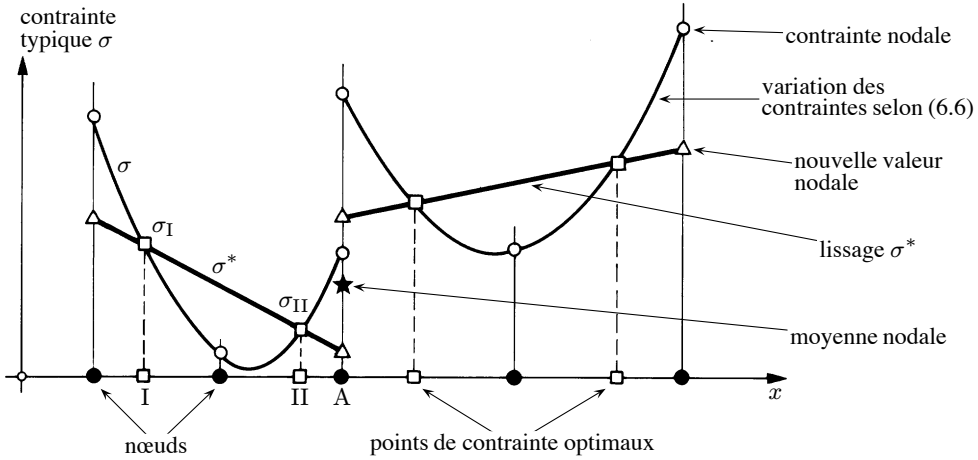
Pour aboutir à une approximation fiable de la variation réelle des contraintes, il faut donc calculer ces dernières aux points où leur précision est supposée la meilleure, puis appliquer une technique de *lissage* permettant d'atténuer les irrégularités indésirables.

#### Lissage sur l'élément fini ou lissage local

Désignons par  $\sigma$  une composante quelconque des contraintes et par  $K = \text{I, II, } \dots, L$  les points où les contraintes sont reconnues les plus précises, par exemple les points de contrainte optimaux (fig. 6.4). On admet simplement que la contrainte lissée  $\sigma^*$  est répartie sur l'élément selon un polynôme d'interpolation défini par les  $L$  contraintes  $\sigma_K$  de l'élément, à savoir

$$\sigma^*(x, \dots) = \sum_{K=1}^L \sigma_K N_K(x, \dots) \quad (6.14)$$

où  $N_K(x, \dots)$  sont les fonctions d'interpolation relatives aux points  $K = \text{I, II, } \dots, L$ .



**Fig. 6.4** Restitution des contraintes : lissage local et moyenne nodale. (Schéma 1D sur deux éléments ayant le nœud A en commun.)

### Lissage en un nœud ou lissage nodal

Considérons un nœud A et les éléments finis qui y concourent. Si l'on sait que les contraintes sont continues en ce nœud, deux techniques de lissage donnent de bons résultats.

Dans la première, on opère simplement la *moyenne* des valeurs nodales issues du lissage local (fig. 6.4).

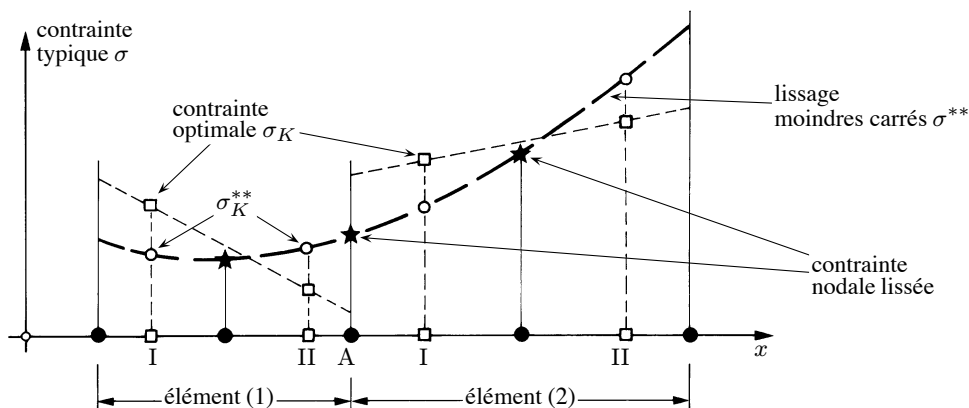
Dans la seconde, plus compliquée mais plus précise, on calcule, dans le groupe des éléments entourant le nœud, une *moyenne pondérée* des  $M$  valeurs  $\sigma_K$  ; à nouveau,  $\sigma_K$  sont les contraintes les plus précises, de préférence optimales, des éléments. On obtient alors les résultats les plus fiables en ajustant sur les  $\sigma_K$ , au sens des moindres carrés, un polynôme d'interpolation *identique* à celui utilisé pour décrire le champ de déplacement des éléments (sect. 11.8). Cette approximation  $\sigma^{**}$  s'écrit, en utilisant l'interpolation paramétrique (4.14),

$$\sigma^{**}(x, \dots) = \mathbf{P}(x, \dots) \mathbf{a} \quad (6.15)$$

et est définie par la condition

$$\text{minimiser } \sum_{K=1}^M (\sigma_K - \sigma_K^{**})^2 \quad (6.16)$$

qui conduit à un système d'équations linéaires pour les paramètres  $\mathbf{a}$  ; on en déduit les contraintes nodales lissées (fig. 6.5).



**Fig. 6.5** Restitution des contraintes : lissage pondéré.

### Remarques

**6.9** Il existe d'autres techniques de restitution et lissage des contraintes que celles décrites sommairement ici, mais elles ne sont pas nécessairement meilleures. Toutes ces techniques sont utilisées pour l'évaluation réaliste de l'erreur numérique commise dans le calcul des contraintes des éléments finis. Il s'agit là d'un problème très actuel de la méthode des éléments finis, repris au chapitre 11.

**6.10** La situation des points optimaux de contrainte pour quelques éléments usuels est discutée au chapitre 11.

**6.11** Pour appliquer (6.15) et (6.16), il faut que le nombre  $M$  des contraintes  $\sigma_K$  dans le groupe d'éléments soit supérieur ou égal au nombre des paramètres  $\mathbf{a}$  dans (6.15), ce qui est pratiquement toujours le cas, sauf parfois sur les frontières du domaine (on extrapole alors à partir d'un groupe d'éléments voisins de la frontière).

**6.12** Les lissages local et nodal atténuent deux défauts d'équilibre des contraintes ; a priori, ils ne corrigent pas le défaut d'équilibre au bord du domaine.

**6.13** Le champ des contraintes étant *en moyenne* correct sur l'ensemble du domaine, il existe certains points où les contraintes sont exactes ; mais la position de ces points est inconnue à l'avance... Cette propriété n'est pas nécessairement vraie au niveau de l'élément fini, même si c'est très souvent le cas (fig. 6.3a).

**6.14** La comparaison des relations (1.8) des poutres et (6.6) des éléments finis montre que (1.8) contient un terme correctif ( $N_0$ ,  $V_0$ ,  $M_0$ ) pour le calcul des efforts intérieurs, terme qui peut restituer la continuité de ces derniers.

## 6.4 Application

On reprend l'élément rectangulaire d'élasticité plane du paragraphe 5.5.1 (figs 5.10 et 6.6). On choisit son épaisseur  $t$  constante et son matériau de type Hooke isotrope.

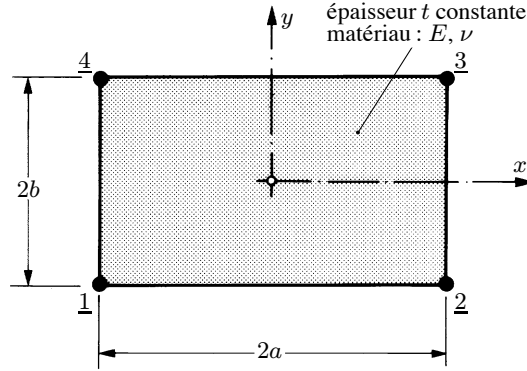


Fig. 6.6 Élément rectangulaire.

#### 6.4.1 Matrice de rigidité

Les déformations résultent des relations classiques (TGC vol. 3, chap. 5)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

qui, appliquées au champ (5.10) et mises en forme matricielle, fournissent la matrice  $\mathbf{B}(x, y)$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (6.17)$$

Pour l'état plan de contrainte, la loi constitutive est

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.18)$$

La matrice de rigidité s'obtient, via (6.8) et avec  $d\Omega = dV = t \, dx \, dy$ , par

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy$$

En effectuant le triple produit matriciel et l'intégration de chacun des termes, on obtient

$$\mathbf{k} = \frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} c_1 & c_7 & c_3 & -c_8 & c_9 & -c_7 & c_5 & c_8 \\ & c_2 & c_8 & c_4 & -c_7 & c_{10} & -c_8 & c_6 \\ \hline & & c_1 & -c_7 & c_5 & -c_8 & c_9 & c_7 \\ & & & c_2 & c_8 & c_6 & c_7 & c_{10} \\ \hline & & & & c_1 & c_7 & c_3 & -c_8 \\ & & & & & c_2 & c_8 & c_4 \\ \hline \text{sym.} & & & & & & c_1 & -c_7 \\ & & & & & & & c_2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

avec

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad \mu = \frac{1 - \nu}{2} \quad \beta = \frac{b}{a}$$

$$c_1 = \frac{\mu\alpha + \beta}{3} \quad c_3 = \frac{c_1 - \beta}{2} \quad c_5 = \frac{c_1 - \mu\alpha}{2} \quad c_7 = \frac{\mu + \nu}{4} \quad c_9 = -\frac{c_1}{2}$$

$$c_2 = \frac{\alpha + \mu\beta}{3} \quad c_4 = \frac{c_2 - \mu\beta}{2} \quad c_6 = \frac{c_2 - \alpha}{2} \quad c_8 = \frac{\mu - \nu}{4} \quad c_{10} = -\frac{c_2}{2}$$

#### 6.4.2 Vecteurs forces

##### Force de volume

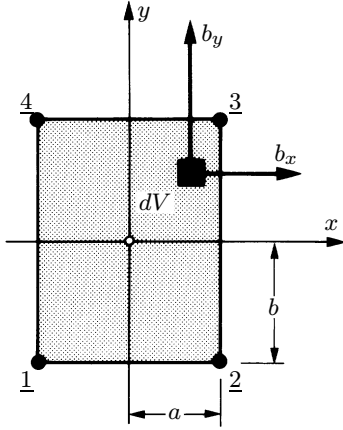
Soit  $b_x$  et  $b_y$  les composantes constantes de la force de volume (fig. 6.7) ; avec le premier terme de (6.10) et (5.11) pour  $\mathbf{N}(x, y)$ , on trouve

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \hline N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ \hline N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ \hline N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dx dy = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a \begin{Bmatrix} \frac{N_1 b_x}{N_1 b_y} \\ \frac{N_2 b_x}{N_2 b_y} \\ \hline \frac{N_3 b_x}{N_3 b_y} \\ \frac{N_4 b_x}{N_4 b_y} \end{Bmatrix} dx dy$$

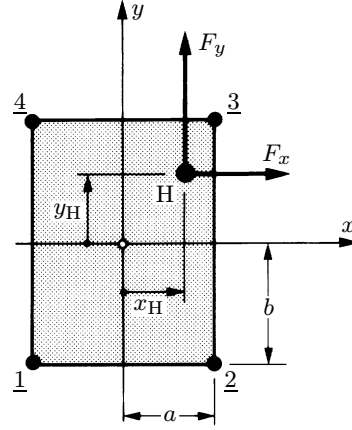
d'où, après intégration,

$$\mathbf{f} = tab \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ \hline b_x \\ b_y \\ \hline b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

c'est-à-dire une répartition égale à chaque nœud.



**Fig. 6.7** Force de volume.



**Fig. 6.8** Charge concentrée au point H.

### Charge concentrée

Pour une charge concentrée de composantes  $F_x$  et  $F_y$ , agissant au point H de coordonnées (fig. 6.8)

$$x_H = \xi a \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad y_H = \eta b \quad (-1 \leq \eta \leq 1)$$

il suffit d'évaluer la valeur des fonctions d'interpolation en H pour obtenir, via (6.10) et (5.11),

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}^T(x = \xi a, y = \eta b) \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta)F_x \\ (1 - \xi)(1 - \eta)F_y \\ (1 + \xi)(1 - \eta)F_x \\ (1 + \xi)(1 - \eta)F_y \\ (1 + \xi)(1 + \eta)F_x \\ (1 + \xi)(1 + \eta)F_y \\ (1 - \xi)(1 + \eta)F_x \\ (1 - \xi)(1 + \eta)F_y \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

Si le point H coïncide avec un nœud de l'élément, on vérifie aisément que seul ce nœud est chargé : on aboutit à une charge purement nodale.

### 6.4.3 Contraintes

Les contraintes  $\sigma(x, y)$  s'obtiennent en effectuant le produit  $\mathbf{DB}$  de (6.6)

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{4ab(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} q & \nu s & -q & -\nu r & p & \nu r & -p & -\nu s \\ \nu q & s & -\nu q & -r & \nu p & r & -\nu p & -s \\ \mu s & \mu q & -\mu r & -\mu q & \mu r & \mu p & -\mu s & -\mu p \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (6.22)$$



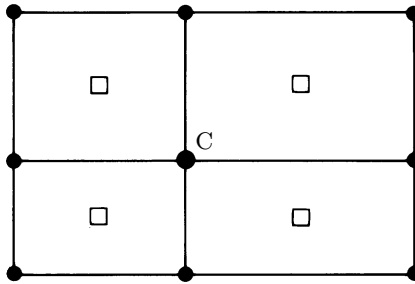
avec

$$\mu = \frac{1 - \nu}{2} \quad r = x + a \quad s = x - a \quad p = y + b \quad q = y - b$$

Les contraintes varient de manière linéaire sur l'élément. On montre que les valeurs au centre ( $x = 0, y = 0$ ) sont optimales. Le lissage local se réduit alors à une constante. Dans un maillage de  $2 \times 2$  éléments (fig. 6.9), les contraintes au nœud central commun C s'obtiennent (§ 6.3.2)

- en moyennant les quatre valeurs optimales, ou
- en interpolant par un paraboloïde hyperbolique sur les quatre contraintes optimales,

ce qui donne le même résultat.



**Fig. 6.9** Lissage nodal sur quatre éléments (□ : points de contrainte optimaux).

### Remarques

**6.15** Les forces concentrées n'ont, en principe, aucun sens physique précis en mécanique des solides. Leur usage peut, par contre, être parfaitement licite dans certaines théories de mécanique des structures (structures minces). Les ingénieurs ont, à leur égard, une attitude très tolérante... Au paragraphe 6.4.2, la charge concentrée peut être assimilée à la limite d'une force de volume agissant sur un petit élément de volume  $\Delta V$

$$F_x = b_x \Delta V \quad F_y = b_y \Delta V$$

justifiant l'emploi de la première intégrale de (6.10) pour calculer (6.21).

**6.16** Les matrices et vecteurs donnés dans cette section représentent le type des relations qu'il faut établir, dans le développement d'un élément fini, pour passer à l'implantation numérique sur ordinateur. On peut coder les formules explicites, mais il est tout aussi rationnel de laisser à la machine le soin de faire les opérations matricielles (produit, inversion...), surtout lorsque les éléments deviennent quelque peu compliqués. Enfin, quand les intégrales sont lourdes ou ne peuvent être calculées explicitement, elles sont aussi évaluées numériquement dans la programmation (sect. 7.6).

**6.17** Bien qu'il s'agisse d'élasticité plane, il est préférable d'introduire l'épaisseur  $t$  réelle de la pièce, même si l'on peut, dans le cas d'un domaine à épaisseur constante, prendre  $t = 1$ .

**6.18** Prendre une épaisseur variable  $t(x, y)$  n'offre aucune difficulté de principe, mais a pour seul effet de compliquer les intégrations. Pour l'éviter, on peut aussi prendre, sur chaque élément, l'épaisseur moyenne constante.

## 6.5 Exercices

**6.5.1** Comme pour l'élément fini rectangulaire de la section 6.4, développer, pour le triangle d'élasticité plane de l'exercice 5.6.1, les relations nécessaires à l'établissement de la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ , des vecteurs forces  $\mathbf{f}$  (force de volume et charge concentrée au centre géométrique) et de l'état de contrainte  $\sigma$ . Où se situe, très probablement, le point de contrainte optimal ?

**6.5.2** Calculer le vecteur force de l'élément fini rectangulaire de la section 6.4, dû à une traction de surface  $(t_x, t_y)$  constante agissant sur le bord  $x = a$ .

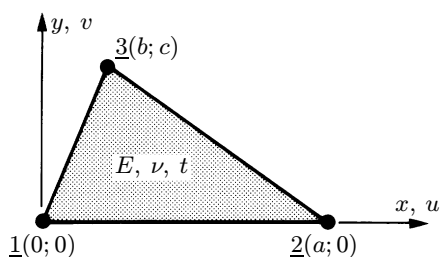


Fig. Ex. 6.5.1

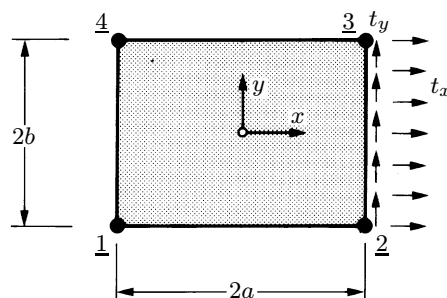


Fig. Ex. 6.5.2

**6.5.3** On considère un élément fini 1D à trois nœuds (raidisseur).

- 1) Identifier ses inconnues.
- 2) Dessiner et calculer les fonctions d'interpolation.
- 3) Exprimer le champ des déplacements.
- 4) Tester les critères de convergence.
- 5) Exprimer son état de déformation (matrice  $\mathbf{B}$ ).
- 6) Calculer sa matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ .
- 7) Pour une charge axiale uniforme  $q_x$ , calculer le vecteur force  $\mathbf{f}$ .
- 8) Trouver le diagramme  $N$  et, en particulier, la valeur de l'effort normal aux nœuds.

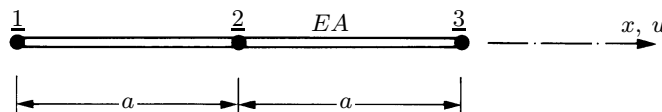


Fig. Ex. 6.5.3

**6.5.4** Dans l'élément fini précédent, calculer le vecteur force pour une charge concentrée  $F$  agissant au quart de la longueur (milieu de  $\underline{1-2}$ ). Vérifier la solution obtenue par l'équilibre.

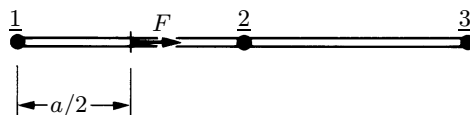


Fig. Ex. 6.5.4

**6.5.5** Une barre de treillis a une section droite d'aire linéairement variable. Considérant cet élément fini comme 1D,

- 1) proposer un champ de déplacement  $u(x)$  ;
- 2) en déduire la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  ;
- 3) établir le vecteur force  $\mathbf{f}$  pour une charge de volume axiale  $b_x$  ;
- 4) calculer l'état de contrainte et le diagramme  $N$ .

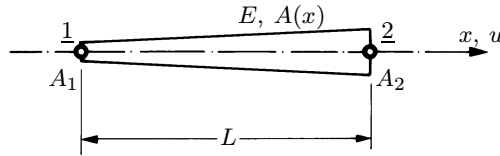


Fig. Ex. 6.5.5

**6.5.6** On choisit, pour un élément barre prismatique à deux nœuds, le champ paramétrique de déplacement

$$u(x) = a_1x + a_2x^2$$

où l'origine O de l'axe  $x$  est au centre de l'élément.

- 1) Commenter ce choix et conclure.
- 2) Ecrire le champ sous forme matricielle ( $\mathbf{u} = \mathbf{Pp}$ ).
- 3) Trouver la matrice  $\mathbf{C}$  et l'inverser.
- 4) En déduire les fonctions d'interpolation  $N_1$  et  $N_2$ , puis les dessiner.
- 5) Calculer  $\mathbf{B}$ .
- 6) Calculer  $\mathbf{k}$ .

*Application* : une barre AB, prismatique, de longueur  $L$ , est appuyée en A et chargée en B d'une force  $F$ . On la divise en 1, 2, 4, ... éléments précédents. Vers quelle valeur son allongement  $u_B$  converge-t-il ?

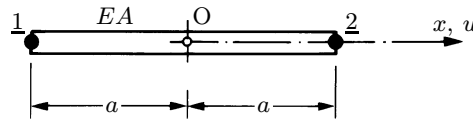


Fig. Ex. 6.5.6

**6.5.7** Reprendre l'exercice précédent en plaçant l'origine O de l'axe  $x$  à l'endroit du nœud 1.

**6.5.8** En présence d'un champ de température  $T(x, y, z)$ , la loi de Hooke 3D s'écrit (TGC vol. 3, chap. 4 et 9)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_{th}$$

où  $\mathbf{D}_{(6 \times 6)}$  est la matrice d'élasticité et où la transposée de  $\boldsymbol{\sigma}_{th}$  vaut

$$\boldsymbol{\sigma}_{th}^T = -\frac{E\alpha T}{1-2\nu} \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}$$

Introduire cette loi dans la dérivation des caractéristiques de l'élément fini des paragraphes 6.2.2 et 6.2.3. Que devient le terme thermique  $\boldsymbol{\sigma}_{th}$  ?

**6.5.9** Calculer le vecteur des forces thermiques du rectangle d'élasticité plane de la section 6.4 soumis à une augmentation uniforme de température  $T$ . *Indication* : utiliser le résultat de l'exercice 6.5.8.

## 6.6 Lexique

Relation force-déplacement de l'élément fini ou équation d'équilibre de l'élément fini

- matrice de rigidité de l'élément fini
- vecteur force consistant de l'élément fini
- $\mathbf{N}$  est l'image de l'interpolation,  $\mathbf{B}$  de la déformation et  $\mathbf{D}$  de la loi de Hooke

$$\mathbf{kd} = \mathbf{f} + \mathbf{r}.$$

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

Cinématique surcompatible

Continuité aux frontières dépassant celle des déplacements, en débordant sur les déformations.

Restitution des contraintes

Évaluation aussi précise que possible des contraintes.

Contrainte nodale

Contrainte calculée au droit d'un nœud.

Point de contrainte optimal

Point particulier d'un élément fini où les contraintes ont le meilleur degré de précision.

- contrainte optimale

Défaut d'équilibre des contraintes

Non-respect des conditions d'équilibre locales par les contraintes issues de  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d}$ .

Lissage (local, nodal) des contraintes

Technique d'évaluation des contraintes tendant à en atténuer les défauts et irrégularités (au niveau de l'élément, d'un élément à l'autre).

# 7 Elasticité et interpolation $C^0$

## 7.1 Introduction

La mécanique linéaire des solides obéit à une forme forte dont l'ordre des dérivées vaut 2 ( $2m = 2$ , § 3.6.1), ordre qui est réduit à 1 dans la forme faible (principe des déplacements virtuels). Dans un tel cas, la convergence demande une interpolation  $C^1$  dans l'élément, *une continuité  $C^0$  aux frontières* et un polynôme complet au degré 1 au moins (donc linéaire).

Construire des fonctions d'interpolation remplissant ces conditions est généralement aisé. Les plus classiques d'entre elles sont données dans ce chapitre.

En fait, outre l'élasticité, beaucoup de problèmes physiques ont une forme différentielle d'ordre deux : conduction thermique, écoulement souterrain, torsion de Saint-Venant, potentiel électrique, fluide parfait, certaines théories de structures, etc.

Il en résulte que les éléments finis à continuité  $C^0$  aux frontières ont été (et sont encore) les plus étudiés et les plus employés. D'où l'appellation simplifiée d'*élément  $C^0$* , d'*interpolation  $C^0$* , de *continuité  $C^0$* , etc.

## 7.2 Interpolation 1D

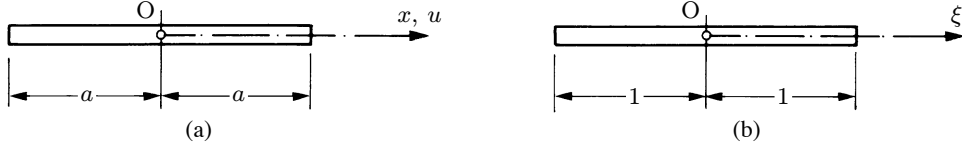
L'élément fini est un segment de droite de longueur  $2a$  au centre duquel on choisit l'origine des abscisses  $x$  (fig. 7.1a). Il est souvent avantageux d'utiliser la *coordonnée naturelle* (fig. 7.1b)

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (7.1)$$

Dans l'interpolation paramétrique, l'approximation polynomiale est

$$u(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_{p+1}x^p = \sum_{i=1}^{p+1} b_i x^{i-1} = \mathbf{P}(x)\mathbf{p} \quad (7.2)$$

Pour un élément fini à  $n_n^e$  ( $\equiv n_d^e$ ) nœuds, on retient les  $n_n^e$  premiers termes ( $n_n^e \geq 2$ ;  $n_n^e = n_p = p+1$ ). Les nœuds sont choisis équidistants.



**Fig. 7.1** Élément 1D : (a) coordonnée cartésienne  $x$  ( $-a \leq x \leq a$ ) ; (b) coordonnée naturelle  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). (La position des nœuds dépend de l'interpolation choisie ; cf. fig. 7.2.)

Les fonctions d'interpolation sont très simples à construire : ce sont les polynômes de degré  $p = n_n^e - 1$ , successivement unités en un nœud et nuls aux  $n_n^e - 1$  autres nœuds. La figure 7.2 montre ces fonctions pour des éléments à 2, 3 et 4 nœuds, conduisant à des interpolations linéaire, quadratique et cubique.

On recourt rarement à une interpolation supérieure au degré  $p = 3$ , car la matrice de rigidité croît en complexité ; de plus, elle est pleine et augmente la largeur de bande lors de l'assemblage (chap. 10).

### Remarque

**7.1** Les fonctions de la figure 7.2 sont des *polynômes d'interpolation de Lagrange*, dont l'expression générale est

$$L_i^p(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_p)(x - x_{p+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_p)(x_i - x_{p+1})} \quad (7.3)$$

$L_i^p(x)$  est un polynôme de degré  $p$ , qui passe par  $p$  points  $x_j$  ( $j \neq i$ ) et vaut 1 au point restant  $x_i$ , soit, avec (4.10),

$$L_i^p(x_j) = \delta_{ij}$$

Avec (7.1)  $\xi = x/a$ , il est clair que  $L_i^p(x) = L_i^p(\xi)$ . Enfin, la somme des fonctions d'interpolation doit être égale à l'unité

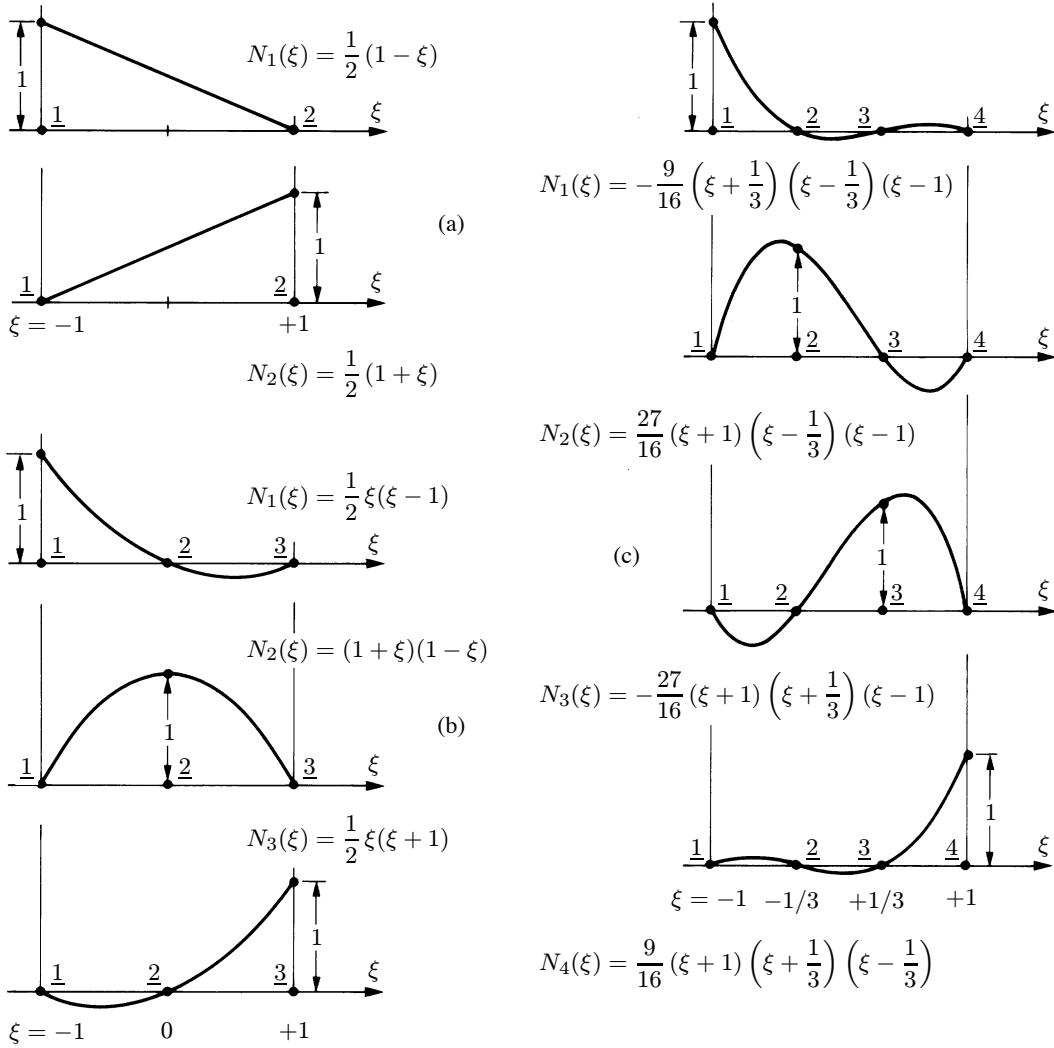
$$\sum_{i=1}^{p+1} L_i^p = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1 \quad (7.4)$$

afin de représenter le mode rigide ( $u = \text{cste}$ ).

## 7.3 Interpolation 2D

### 7.3.1 Continuité aux frontières

On doit, rappelons-le, assurer la continuité tout le long d'une frontière séparant deux éléments, à l'aide des seules valeurs nodales communes (sect. 4.1, § 5.2.1).

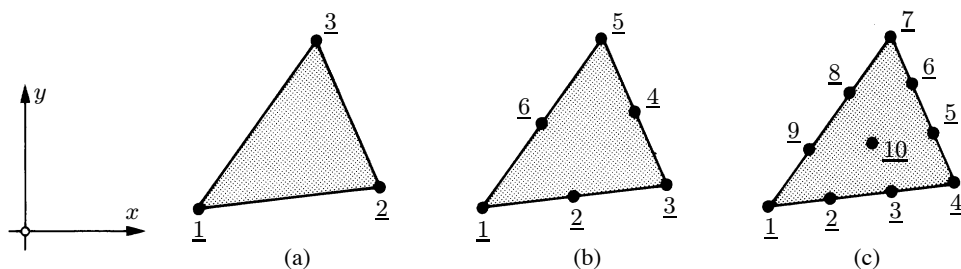


**Fig. 7.2** Fonctions d'interpolation lagrangiennes : (a) linéaires ; (b) paraboliques ; (c) cubiques.

Pour une interpolation polynomiale, le champ inconnu est aussi un polynôme le long d'une frontière. Par conséquent, avec des polynômes complets, *on assure la continuité  $C^0$  si, pour un polynôme de degré  $p$  sur une frontière, on place  $p + 1$  nœuds le long de cette frontière.*

### 7.3.2 Éléments finis triangulaires

On construit quasi spontanément des éléments triangulaires à  $n_n^e = (p + 1)(p + 2)/2$  nœuds (fig. 7.3), correspondant à un polynôme complet de degré  $p$  en les variables indépendantes  $x$  et  $y$ , avec continuité  $C^0$  du même degré sur chacune des trois frontières.



**Fig. 7.3** Éléments finis triangulaires avec continuité  $C^0$  : (a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composante  $u$  par exemple)

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= b_1 \\
 &+ b_2x + b_3y \\
 &+ b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 \\
 &+ b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 \\
 &+ b_{11}x^4 + \dots \\
 &\dots + b_{(p+1)(p+2)/2}y^p \\
 &= \mathbf{P}(x, y)\mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de Pascal (fig. 7.4).

Triangle	Degré	$p$	Nombre de termes
1	constant	0	1
$x \quad y$	linéaire	1	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	quadratique	2	6
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	cubique	3	10
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	quartique	4	15
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	quintique	5	21
...	...	...	...

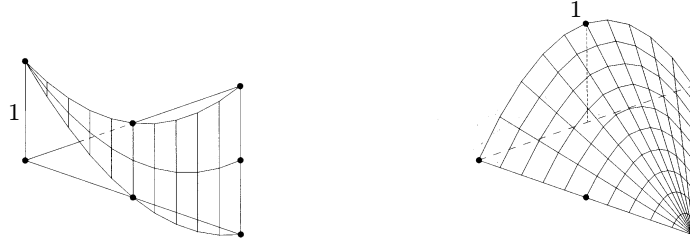
**Fig. 7.4** Triangle de Pascal.

Dans les éléments finis destinés aux calculs basés sur la convergence  $h$  (§ 5.1.2), on ne dépasse pratiquement jamais le degré 3. La matrice  $\mathbf{C}$  peut toujours être inversée sans difficulté.

On peut aussi dessiner aisément les fonctions d'interpolation (fig. 7.5) et par suite en chercher les équations. On vérifie que leur somme vaut 1

$$\sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1$$





**Fig. 7.5** Fonctions d'interpolation du triangle quadratique.

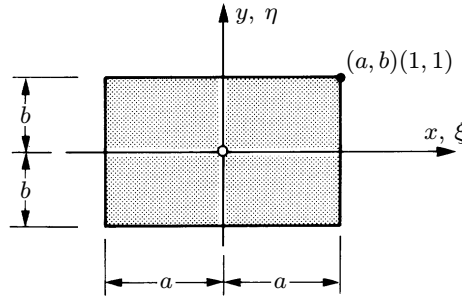
### 7.3.3 Éléments finis rectangulaires

Plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'élément rectangulaire, de dimension  $2a \times 2b$ , on définit avantageusement les *coordonnées naturelles*

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (7.6)$$

qui valent  $\pm 1$  sur les frontières du rectangle (fig. 7.6).

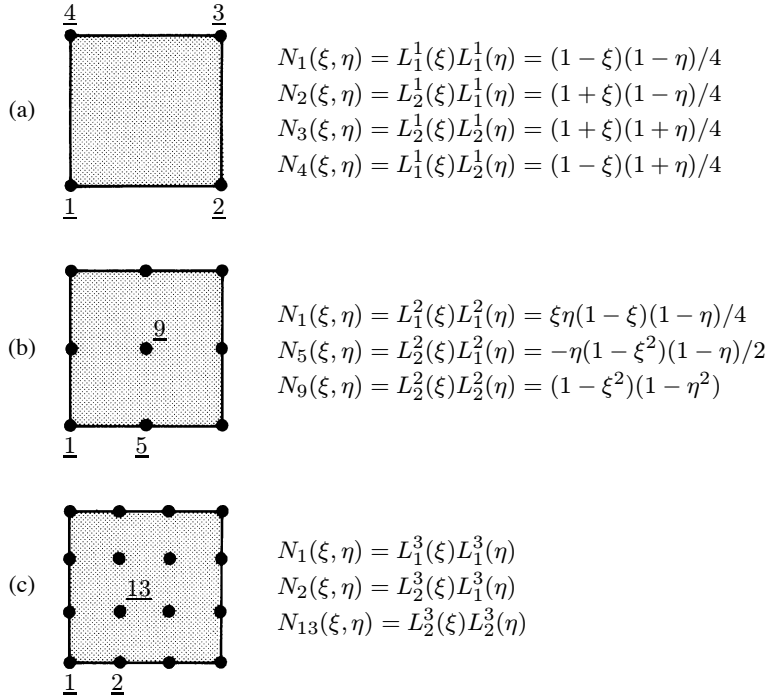
En partant de l'interpolation de Lagrange à une variable indépendante, on peut, pour les domaines rectangulaires, construire deux familles de fonctions d'interpolation.



**Fig. 7.6** Élément rectangulaire et ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  et naturelles  $(\xi, \eta)$ .

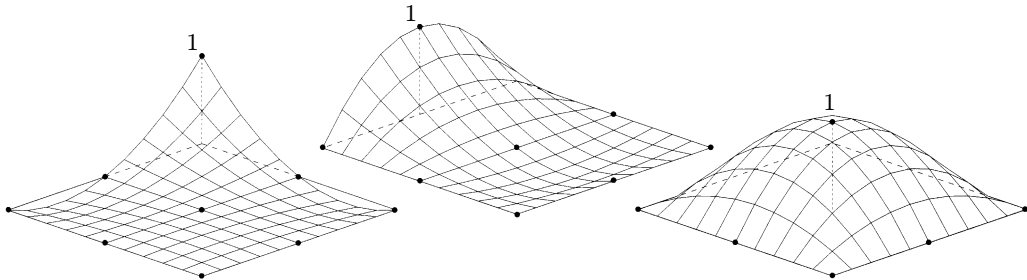
#### Famille de Lagrange

Les nœuds sont placés aux intersections des lignes d'un quadrillage régulier (fig. 7.7) et les fonctions d'interpolation peuvent s'obtenir par le produit des polynômes de Lagrange (7.3) de chacune des coordonnées  $x$  et  $y$ , ou  $\xi$  et  $\eta$ . L'élément cubique est, déjà, rarement utilisé.



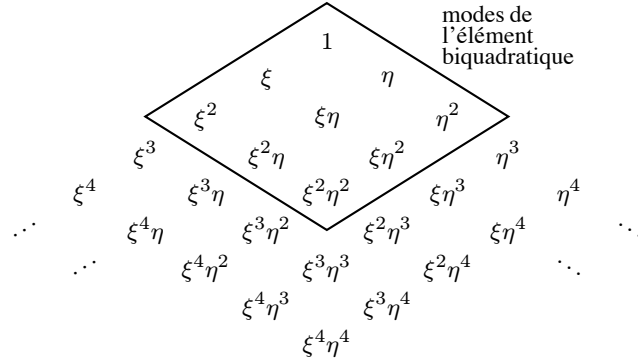
**Fig. 7.7** Famille des rectangles de Lagrange et quelques fonctions d'interpolation : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique.

La figure 7.8 montre les fonctions d'interpolation typiques de l'élément quadratique. La fonction du nœud central s'appelle une *fonction bulle*, pour des raisons évidentes ; elle s'associe à des degrés de liberté internes qui peuvent être condensés (sect. 2.6). En tout point, la somme des fonctions vaut 1.



**Fig. 7.8** Fonctions d'interpolation typiques de l'élément biquadratique.

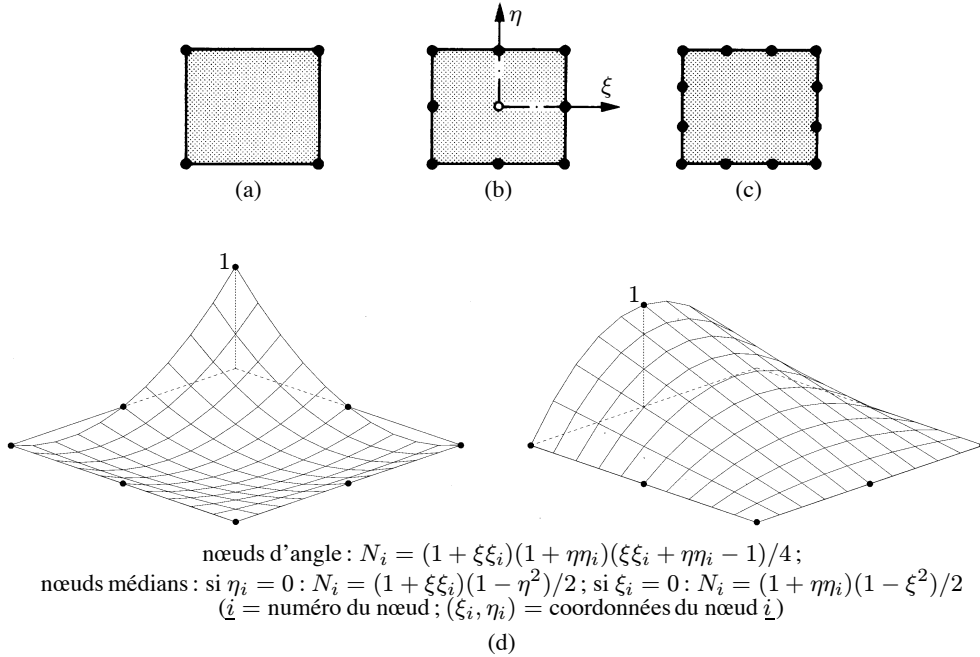
L'interpolation paramétrique  $\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{p}$  comprend les termes contenus dans un losange issu du triangle de Pascal, comme l'indique la figure 7.9. Le polynôme est complet jusqu'au degré  $p$ , puis incomplet jusqu'au degré  $2p$ . Sur des lignes  $x$  (ou  $\xi$ ) = cste, ou  $y$  (ou  $\eta$ ) = cste, l'interpolation est complète au degré  $p$ .



**Fig. 7.9** Termes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Lagrange.

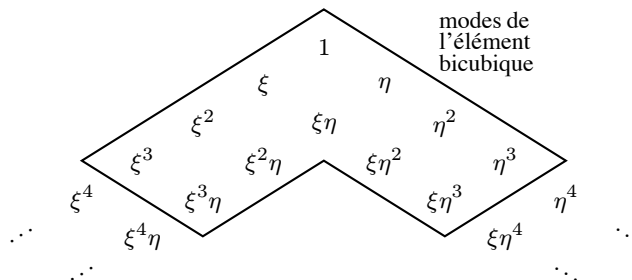
### Famille de Serendip

Ces éléments sont construits sans nœuds internes (fig. 7.10). Ils sont donc plus simples que les précédents et, souvent, préférés. Les fonctions d'interpolation sont faciles à visualiser. En tout point d'un élément, leur somme est encore unité. L'élément bilinéaire est identique à celui de la famille de Lagrange.



**Fig. 7.10** Famille des rectangles de Serendip : (a) élément bilinéaire ; (b) élément biquadratique ; (c) élément bicubique ; (d) fonctions d'interpolation de l'élément biquadratique.

L'interpolation paramétrique est encore issue d'un triangle de Pascal (fig. 7.11). Tant que  $p \leq 3$ , le polynôme, de degré  $p + 1$ , est complet au degré  $p$ . Quel que soit  $p$ , il demeure complet au degré  $p$  sur les lignes  $x$  (ou  $\xi$ ) = cste, ou  $y$  (ou  $\eta$ ) = cste. En pratique, on ne dépasse guère  $p = 3$ .



**Fig. 7.11** Modes de l'interpolation polynomiale des rectangles de Serendip.

### Remarques

**7.2** Les coordonnées  $(x, y)$  ou  $(\xi, \eta)$  d'un domaine rectangulaire ont un caractère *local*.

**7.3** Les polynômes devant être au moins complets au degré  $p = m$ , il est permis d'omettre des termes dans les degrés supérieurs.

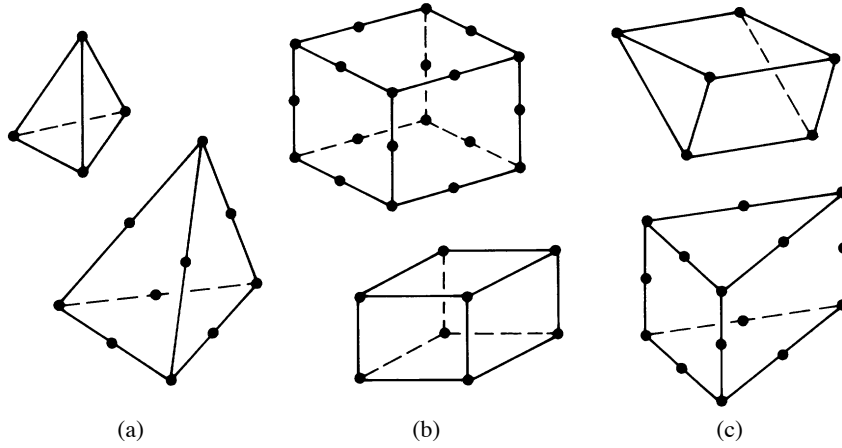
**7.4** D'ordinaire, il faut éviter les dissymétries vis-à-vis des coordonnées  $(x, \dots)$  ou  $(\xi, \dots)$ , sinon on favorise l'une d'entre elles au détriment d'une autre et l'élément a un comportement déséquilibré. Plus généralement, la structure des polynômes doit être conservée lors d'une transformation des coordonnées (translation et rotation); cette propriété, appelée *isotropie géométrique*, est garantie pour les polynômes complets, ou incomplets mais de structure symétrique.

**7.5** Lorsque le champ est vectoriel, les polynômes doivent être tels que les composantes de la *déformation* soient du même degré quand elles sont de même nature, sinon on favorise une composante par rapport à l'autre et, comme précédemment, on déséquilibre la réponse de l'élément. Par exemple, en élasticité plane, les composantes  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  doivent être de même degré (donc  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  aussi).

**7.6** Poussant plus avant la même idée, si, dans une composante du tenseur déformation, interviennent plusieurs composantes du déplacement (couplage), alors chaque terme devrait être du même degré. En élasticité plane,  $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$  couple  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  qui, dérivés une fois, doivent donc être interpolés au même degré (même exigence que ci-dessus). Par contre, dans une poutre de Timoshenko (§ 8.7.1), où  $\beta = dv/dx - \alpha$ , le champ  $v(x)$  devrait être d'un degré supérieur au champ  $\alpha(x)$  (problème du *verrouillage*, sect. 9.3).

## 7.4 Interpolation 3D

On élabore, de la même manière, des éléments tridimensionnels, en forme de tétraèdre, parallélépipède rectangle (hexaèdre), prisme à base triangulaire, etc. (fig. 7.12). La continuité aux frontières a maintenant lieu sur les *faces* : les déplacements nodaux doivent définir le champ inconnu univoquement en tous les points d'une face.



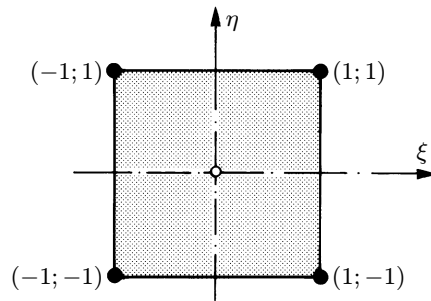
**Fig. 7.12** Éléments tridimensionnels : (a) tétraèdres à 4 et 10 nœuds ; (b) briques à 8 et 20 nœuds ; (c) prismes à 6 et 15 nœuds.

## 7.5 Transformation isoparamétrique

### 7.5.1 Coordonnées naturelles

Ces coordonnées ( $\xi = x/a$  en 1D (7.1) ;  $\xi = x/a$  et  $\eta = y/b$  en 2D (7.6) ;  $\xi, \eta, \zeta$  en 3D) permettent d'écrire les fonctions d'interpolation (5.9) du rectangle à quatre nœuds par exemple (figs 7.7a, 7.10a et 7.13), sous la forme

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi - \eta + \xi\eta) \quad N_2(\xi, \eta) = \dots \quad \text{etc.}$$



**Fig. 7.13** Élément quadrilatéral en coordonnées naturelles.

et par suite l'interpolation du champ des déplacements également

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) u_i \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) v_i \quad (7.7)$$

De façon générale, en 1D, 2D ou 3D, et quel que soit le nombre de nœuds, l'interpolation peut s'écrire

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{d} \quad (7.8)$$

On généralise donc l'interpolation en se rendant indépendant des dimensions réelles de l'élément fini ; mais il y a un avantage encore supérieur que l'on explicite ci-après (§ 7.5.2 et 7.5.5).

### Remarque

**7.7** Bien que les notions de cette section soient expliquées sur la base des éléments rectangulaires, elles se généralisent sans difficulté aux autres formes géométriques.

## 7.5.2 Transformation de coordonnées

Considérons l'application

$$x = f(\xi, \eta) \quad y = f(\xi, \eta) \quad (7.9)$$

du plan  $(\xi, \eta)$  sur le plan  $(x, y)$ . Puisque, d'une façon générale, les coordonnées  $(\xi, \eta)$  peuvent être *curvilignes*, l'idée est d'examiner si l'application (7.9) permet de générer un élément fini à *frontière courbe*.

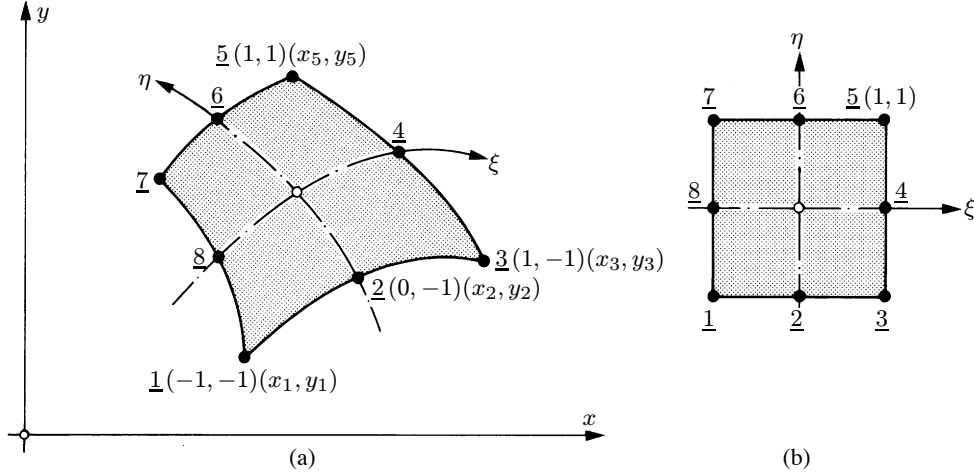
La manière la plus habile de définir cette géométrie curviligne est d'écrire (7.9) à l'aide de *fonctions d'interpolation* (du champ de déplacement) sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (7.10)$$

c'est-à-dire de *définir la géométrie courbe à l'image de la configuration déformée* (fig. 7.14a) : en un point  $(\xi, \eta)$  quelconque, on décrit la géométrie  $(x, y)$ , via les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des nœuds, de la même manière que le champ inconnu  $(u, v)$  (7.7), à partir des degrés de liberté  $(u_i, v_i)$ . Une conséquence directe est que, si l'interpolation des déplacements assure la conformité, deux éléments curvilignes adjacents sont exactement

- *contigus* en configuration initiale (le maillage curviligne est sans discontinuité) ;
- *conformes* en configuration déformée (le critère 1 de convergence est satisfait).

On appelle *élément origine* l'élément à bords rectilignes (fig. 7.14b) qui a fourni les fonctions d'interpolation  $N_i$  permettant de générer l'élément à frontières courbes.



**Fig. 7.14** Application du plan  $(\xi, \eta)$  sur le plan  $(x, y)$  : (a) élément à frontières courbes ; (b) élément origine.

### 7.5.3 Élément fini isoparamétrique

Si, pour définir

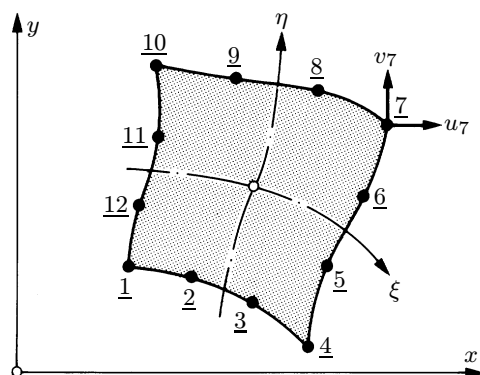
- la géométrie,
- le champ des déplacements,

on utilise les *mêmes fonctions* et les *mêmes nœuds*, l'élément obtenu est dit **isoparamétrique**. En coordonnées naturelles, on a donc (fig. 7.15)

$$x = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (7.11)$$

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) u_i \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_n^e} N_i(\xi, \eta) v_i \quad (7.12)$$

Ce choix naturel, mais non obligatoire, est le plus fréquent et le plus efficace (au niveau de la programmation, il fait intervenir le moins d'opérations arithmétiques pour définir les divers champs). Il caractérise la *transformation isoparamétrique*.



**Fig. 7.15** Élément isoparamétrique plan bicubique.

### Remarques

**7.8** La formulation des éléments isoparamétriques est donnée à la section 7.12.

**7.9** Lorsque l'interpolation est *linéaire* sur une frontière (2 nœuds), la transformation isoparamétrique rend les coordonnées  $(\xi, \eta)$  *obliques* seulement (fig. 7.16a), mais non courbes.

### 7.5.4 Convergence

On démontre sans peine que les critères de convergence sont satisfaits pour les éléments isoparamétriques si la condition

$$\sum_{i=1}^{n_n^e} N_i = 1 \quad (7.13)$$

est vérifiée (la somme des fonctions d'interpolation en tout point de l'élément doit être unité). En fait, si les critères sont remplis pour les éléments origines, ils le sont aussi pour les éléments isoparamétriques. On observe que la condition (7.13) est vérifiée par les familles de fonctions de Lagrange et Serendip.

### Remarque

**7.10** La condition (7.13) est attachée au critère 2 (ex. 7.10.2).

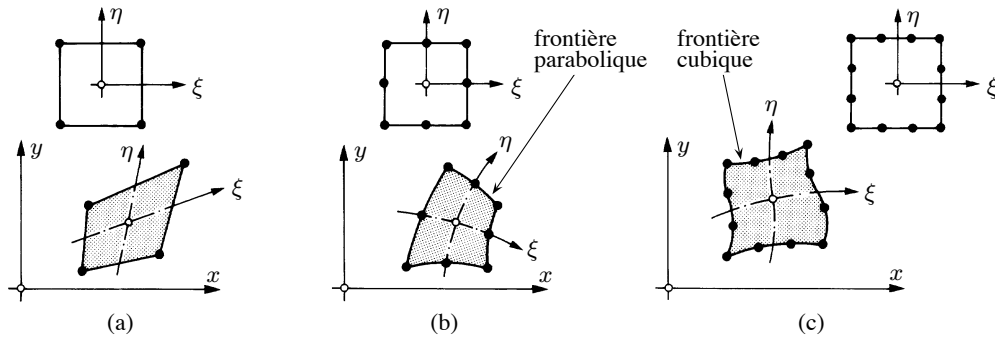
### 7.5.5 Emploi des éléments isoparamétriques

La transformation isoparamétrique offre l'avantage essentiel de définir des *éléments à frontières courbes*.

Les éléments origines se transforment en éléments curvilignes 1D, 2D ou 3D. Les éléments plans peuvent avoir des bords courbes (2D) ou devenir des éléments de surface (3D). Les éléments de volume acquièrent des arêtes et faces courbes. La transformation isoparamétrique s'applique aux formes triangulaires, pyramidales, prismatiques ... ainsi qu'à d'autres grandeurs importantes, par exemple l'épaisseur (élément à épaisseur variable), la charge répartie (charge variable), la température, etc. L'extension est même possible aux éléments structuraux (poutres, plaques et coques ; chap. 9). Les éléments obtenus peuvent aisément être combinés entre eux pour discrétiser des problèmes complexes.

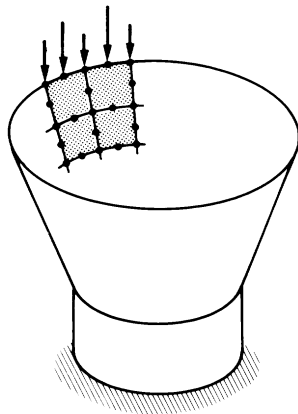


Les éléments isoparamétriques sont devenus très populaires. Leur emploi tend à se généraliser au détriment des autres éléments. Ils constituent, dans bien des cas, la classe d'élément la plus utile pour la pratique.

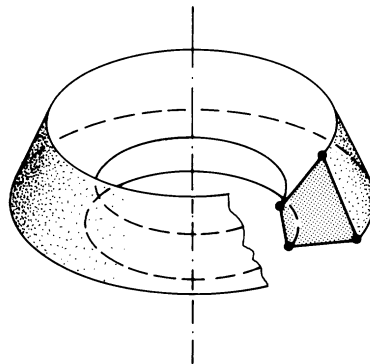


**Fig. 7.16** Éléments isoparamétriques plans (Serendip) : (a) linéaire ; (b) quadratique ; (c) cubique.

Dans les problèmes plans, on utilise couramment la *famille* des quadrilatères de Serendip linéaires, quadratiques et cubiques (fig. 7.16). Transformés en 3D, ces éléments permettent d'analyser des *états membranaires* (fig. 7.17). En faisant tourner l'élément autour d'un axe contenu dans son plan, on engendre un élément fini de volume qui permet d'analyser les *corps de révolution* (fig. 7.18).

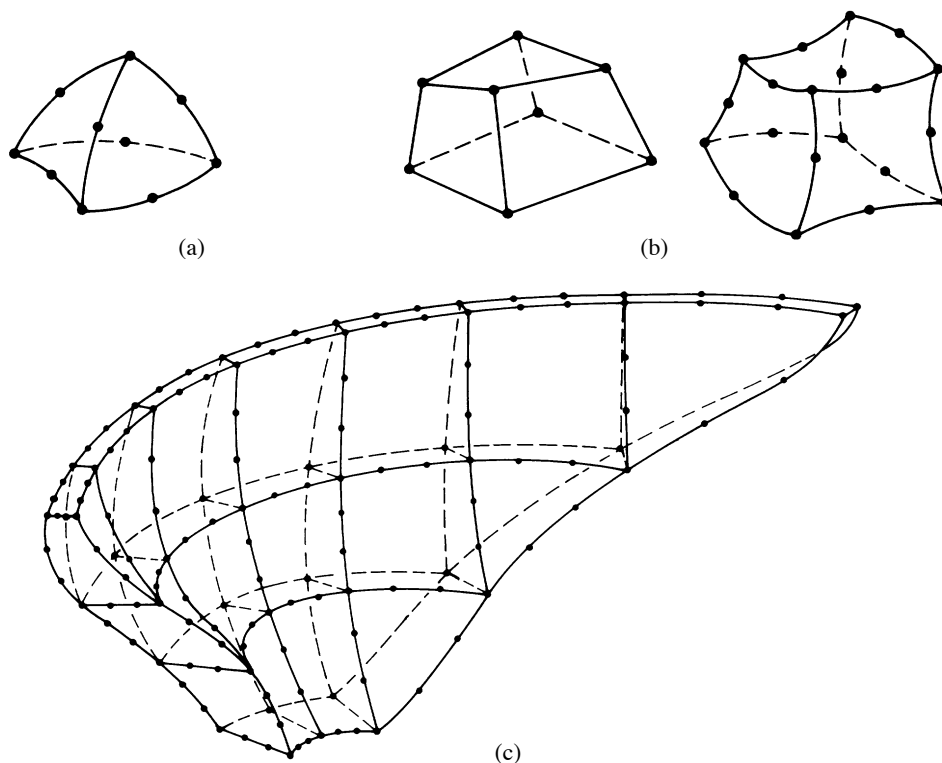


**Fig. 7.17** Analyse membranaire d'une coque.



**Fig. 7.18** Élément annulaire pour solide de révolution.

Enfin, la transformation isoparamétrique livre des éléments de volume courbes bien adaptés à l'analyse des *problèmes tridimensionnels*, un barrage par exemple (fig. 7.19).



**Fig. 7.19** Éléments isoparamétriques volumiques : (a) tétraèdre quadratique ; (b) briques linéaire et quadratique ; (c) maillage du barrage voûte de Deriner, Turquie, par des éléments cubiques (maillage grossier ; document et étude numérique : STUCKY S. A.).

## 7.6 Intégration numérique

### 7.6.1 Schéma d'intégration numérique

Pour les éléments de degré élevé, pour les éléments courbes, ou encore à cause de la transformation isoparamétrique, les expressions conduisant au calcul des caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{f}$  des éléments peuvent se compliquer considérablement. Si l'évaluation de ces caractéristiques par une intégration analytique devient difficile, lourde ou impossible, on procède par une *intégration numérique* (chap. 16).

Il s'agit de choisir, en fonction de la forme et du degré de l'interpolation de l'élément fini, une *formule d'intégration* et de définir, dans l'élément, un réseau de *points d'intégration*, à l'image de la figure 7.20 par exemple ; l'ensemble s'appelle le *schéma d'intégration*.

Dans les domaines en forme de ligne, de quadrilatère et d'hexaèdre, l'*intégration numérique de Gauss* est la plus pratiquée, car elle minimise le volume des calculs. Rappelons qu'une intégration de Gauss d'ordre  $n_G$  ( $n_G$  points dans une direction) intègre exactement un polynôme de degré  $2n_G - 1$  (chap. 16).

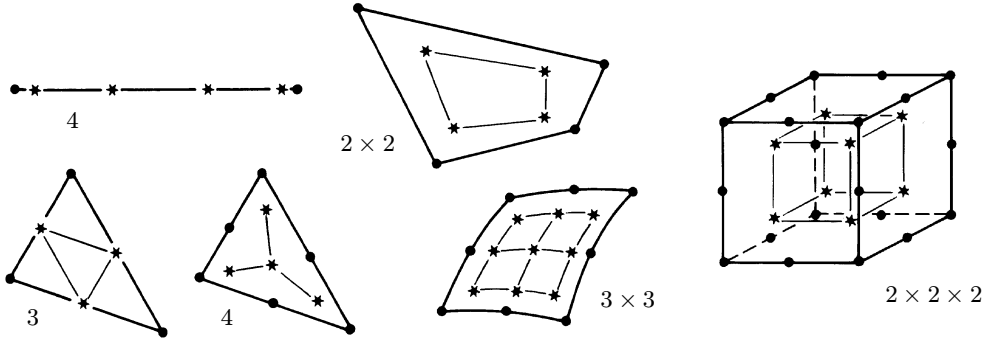


Fig. 7.20 Divers réseaux de points d'intégration pour divers éléments finis.

### Remarque

**7.11** Les considérations exposées dans cette section supposent qu'on travaille avec la quadrature de Gauss dans un domaine linéaire, quadrilatéral ou hexaédrique.

### 7.6.2 Ordre de l'intégration numérique dans les éléments finis

Les éléments, dans la formulation desquels n'apparaissent que des expressions polynomiales, peuvent être intégrés exactement. Tels sont par exemple les éléments exprimés en coordonnées cartésiennes. Il suffit de rechercher le degré des monômes dans le produit  $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$  de la matrice de rigidité (et éventuellement dans les produits  $\mathbf{N}^T \mathbf{f}$  ou  $\mathbf{N}^T \mathbf{t}$  du vecteur force) pour trouver l'ordre d'intégration nécessaire. Pour  $n_G$  points de Gauss, tous les termes du type

$$x^{2n_G-1} \quad (1D) \quad x^{2n_G-1} y^{2n_G-1} \quad (2D) \quad x^{2n_G-1} y^{2n_G-1} z^{2n_G-1} \quad (3D)$$

sont intégrés exactement.

D'autres éléments ne peuvent pas être intégrés exactement. C'est le cas des éléments isoparamétriques par exemple : tant qu'ils restent peu distordus (sect. 7.7), les ordres d'intégration des éléments origines leur sont applicables, car, à la limite ( $h \rightarrow 0$ ), la distorsion tend à s'atténuer. Dans les autres cas, il faut procéder par expérimentation numérique.

### Remarques

**7.12** L'intégration numérique des caractéristiques des éléments n'est, le plus souvent, qu'approximative et tend à introduire une erreur qui se superpose à celle propre à la méthode des éléments finis. A première vue, cette erreur devrait être rendue aussi faible que possible pour ne pas compromettre, ni modifier, la convergence. On devrait donc chercher à intégrer quasi exactement. Ce n'est toutefois ni nécessaire (rem. 7.13) ni souhaitable : un ordre d'intégration trop élevé n'améliore plus la précision et alourdit fortement le calcul en ordinateur (occupation de la mémoire et temps d'exécution). A l'opposé, on pourrait chercher à diminuer l'ordre d'intégration en satisfaisant aux exigences minimales des critères de convergence ; en particulier, pour le critère des déformations constantes, le produit  $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$  dans (6.8) serait constant et pourrait sortir de l'intégrale, en sorte que l'intégration numérique se réduirait à pouvoir calculer le volume (l'aire, la longueur) exactement, ce

qui est trop élémentaire (on ne tient plus compte, par exemple, du degré de l'interpolation dans un élément origine). En conclusion, aucune de ces conditions extrêmes ne donne satisfaction.

**7.13** Pour garantir la même qualité de convergence que celle résultant de l'intégration exacte, on a proposé la règle suivante : *si l'interpolation est complète au degré  $p$ , alors l'intégration numérique doit intégrer exactement tous les monômes jusqu'au degré  $2(p - m)$  au moins*. L'application de cette règle peut conduire à l'intégration réduite (§ 7.6.3) ; elle n'exclut donc nullement la présence éventuelle de mécanismes (§ 7.6.4)...

### 7.6.3 Intégration réduite

L'expérimentation numérique, appuyée de considérations théoriques, montre que l'ordre d'intégration d'une unité inférieur à celui nécessaire à l'intégration exacte, peut être utilisé avec profit : c'est l'**intégration réduite**. Elle présente deux avantages : elle tend à assouplir la réponse de l'élément, en réduisant l'excès de rigidité inhérent au modèle déplacement (rem. 4.2), et elle diminue le volume des calculs. Mais elle peut aussi présenter un danger, celui d'abaisser le rang de la matrice de rigidité (apparition de *mécanismes*, § 7.6.4).

L'effet numérique de l'intégration réduite est le suivant : les monômes des degrés les plus élevés sont intégrés approximativement.

#### Remarque

**7.14** Le rang  $r$  d'une matrice de rigidité est égal à sa dimension ( $n_d^e$ ) diminuée du nombre de modes rigides possibles ( $n_{\text{rig}}$ ) :  $r = n_d^e - n_{\text{rig}}$ .

### 7.6.4 Mécanismes

La principale difficulté liée à l'intégration réduite est le risque de diminution du rang de la matrice de rigidité. Ce risque est difficile à prévoir, pouvant dépendre du schéma d'intégration, de la forme de l'élément fini, du maillage et des conditions aux limites essentielles.

Pour comprendre l'apparition de ces singularités indésirables de  $\mathbf{k}$ , on peut se baser sur l'énergie de déformation emmagasinée dans un élément fini ; cette énergie s'écrit (théorème de Clapeyron intérieur, TGC vol. 3, § 4.6.4)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (7.14)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}$  (6.5) et  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d}$  (6.6). Or il peut arriver que, pour certaines valeurs des déplacements nodaux  $\mathbf{d}$ , qui engendrent normalement un état de déformation non nul, les déformations (et contraintes) soient nulles aux points de l'intégration réduite, entraînant l'annulation de  $U$ . Il en résulte la singularité de  $\mathbf{k}$  (§ 14.3.3) : l'élément semble avoir perdu toute résistance et posséder des modes rigides supplémentaires, appelés *mécanismes* (ou *modes à énergie nulle*).

A chaque mécanisme s'associe une diminution d'une unité du rang de la matrice de rigidité.

En dépit du risque, l'intégration réduite est très couramment utilisée en pratique... Il est en effet fréquent qu'un mécanisme soit propre à l'élément fini isolé et ne puisse se propager à travers un maillage d'éléments (mécanisme *non transmissible*). Néanmoins ce problème reste délicat et doit être étudié avec le plus grand soin (test des valeurs propres, *single element test*, § 7.6.5).

### 7.6.5 Recherche des mécanismes

#### Test des valeurs propres

L'étude des valeurs propres de la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  d'un élément fini, définie par

$$(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (7.15)$$

où  $\mathbf{d}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , permet de trouver les mécanismes éventuels. En normant le vecteur propre ( $\mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1$ ) et en prémultipliant par  $\mathbf{d}^T$ , on peut écrire

$$\mathbf{d}^T (\mathbf{k} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \lambda \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} - \lambda = 0$$

d'où, avec (7.14),

$$\lambda = 2U \quad (7.16)$$

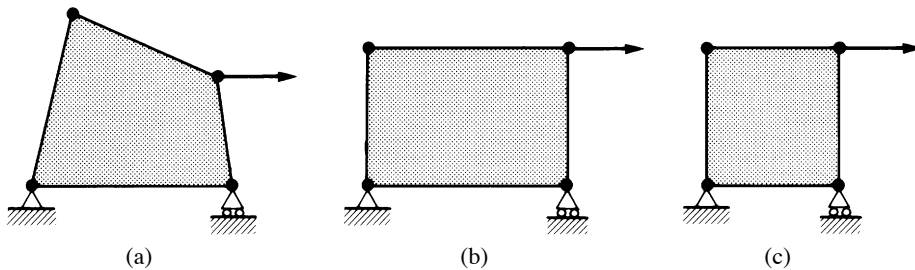
et toute valeur propre vaut le double de l'énergie de déformation associée aux déplacements du vecteur propre normé.

Cette interprétation permet de tirer les conclusions suivantes :

- pour tout mode rigide, on a  $U = 0$  et par suite, aussi,  $\lambda = 0$  ;
- il y a donc autant de valeurs propres nulles dans (7.15) que de modes rigides (par exemple trois dans le cas plan) ;
- à toute valeur propre nulle supplémentaire s'associe un mode de déplacement non rigide, dont l'élément n'enregistre pas les déformations, c'est-à-dire un mécanisme traduisant l'insuffisance du rang de  $\mathbf{k}$  ;
- s'il y a trop peu de valeurs propres nulles, certains modes rigides font défaut et le critère de convergence 2 (§ 5.2.2) n'est pas satisfait ;
- si les valeurs propres changent avec l'orientation de l'élément par rapport aux axes, l'isotropie géométrique n'est pas satisfaite (rem. 7.4).

#### Single element test

On peut aussi savoir si un élément possède des mécanismes indésirables par le *single element test*. Il consiste à résoudre une structure formée d'un seul élément fini appuyé de manière isostatique (fig. 7.21). On doit donner à l'élément plusieurs formes géométriques possibles. En présence de mécanismes, la matrice  $\mathbf{k}$  est *singulière* et la résolution impossible.



**Fig. 7.21** *Single element test* de l'élément fini d'élasticité plane à quatre nœuds : (a) quadrilatère quelconque ; (b) rectangle ; (c) carré.

Le *single element test*, plus simple mais moins complet que le test des valeurs propres, est un test numérique, au même titre que le *patch test* (§ 5.3.2 ; rem. 5.12).

### Application 7.1

Rechercher le nombre de points d'intégration de Gauss intégrant exactement les éléments finis rectangulaires des familles de Lagrange et Serendip.

L'interpolation, complète au degré  $p$ , est telle qu'en dérivant une fois ( $m = 1$ , calcul de  $\mathbf{B}$ ), le degré  $p$  subsiste pour chaque variable indépendante. Le produit  $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$  contient donc des monômes de degré  $2p$  en sorte que l'ordre d'intégration exacte est  $n_G = p + 1$ .

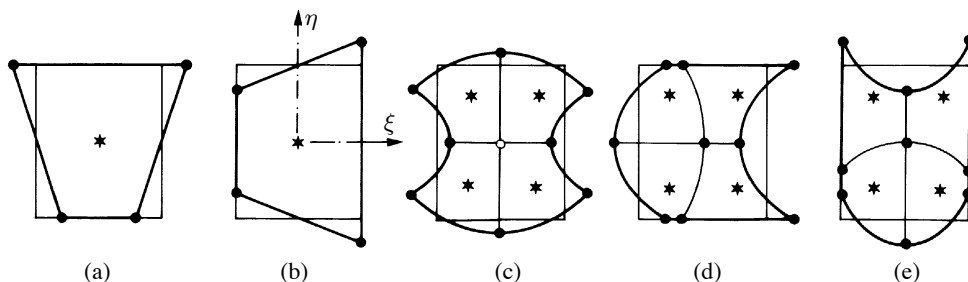
*Cet ordre coïncide avec le nombre de nœuds sur un côté de l'élément.*

### Application 7.2

Etudier l'intégration réduite des éléments finis rectangulaires de degré 1 à 3 des familles de Lagrange et Serendip.

Le résultat de cette étude est donné à la figure 7.22.

Degré	Intégration		Mécanismes	
	exacte	réduite	Lagrange	Serendip
1	$2 \times 2$	1	deux (fig.7.22a et b)	deux (fig. 7.22a et b)
2	$3 \times 3$	$2 \times 2$	trois (fig.7.22c, d et e)	un (fig. 7.22c)
3	$4 \times 4$	$3 \times 3$	deux	aucun

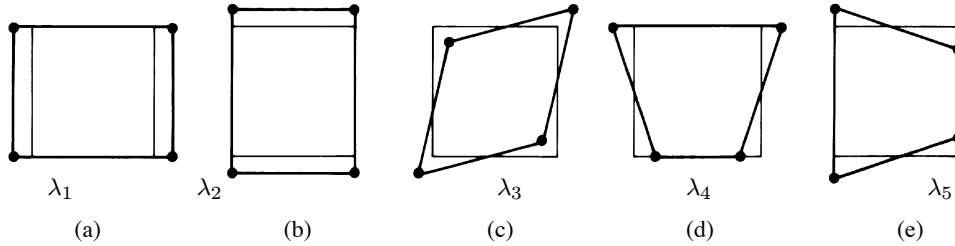


**Fig. 7.22** Intégration réduite (\* = point d'intégration) et mécanismes des rectangles de Lagrange et Serendip (les mécanismes (a) et (b) sont dits *mécanismes en sablier* ; le mécanisme (c) est commun aux éléments de Lagrange et Serendip).

**Application 7.3**

Rechercher les valeurs et modes propres de l'élément rectangulaire à quatre nœuds.

Puisque la dimension de  $\mathbf{k}$  est  $8 \times 8$  et qu'il y a trois valeurs propres nulles (modes rigides), il subsiste cinq modes propres associés à des valeurs propres non nulles ; ils sont représentés à la figure 7.23.



**Fig. 7.23** Modes propres de l'élément carré bilinéaire d'élasticité plane ( $2a = 2b = 1$  ;  $t = 1$  ;  $E = 1$  ;  $\nu = 0$ ) : (a) et (b) dilatations ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ) ; (c) glissement ( $\lambda_3 = 1$ ) ; (d) et (e) modes dits de flexion ( $\lambda_4 = \lambda_5 = 0,5$ ).

**Remarque**

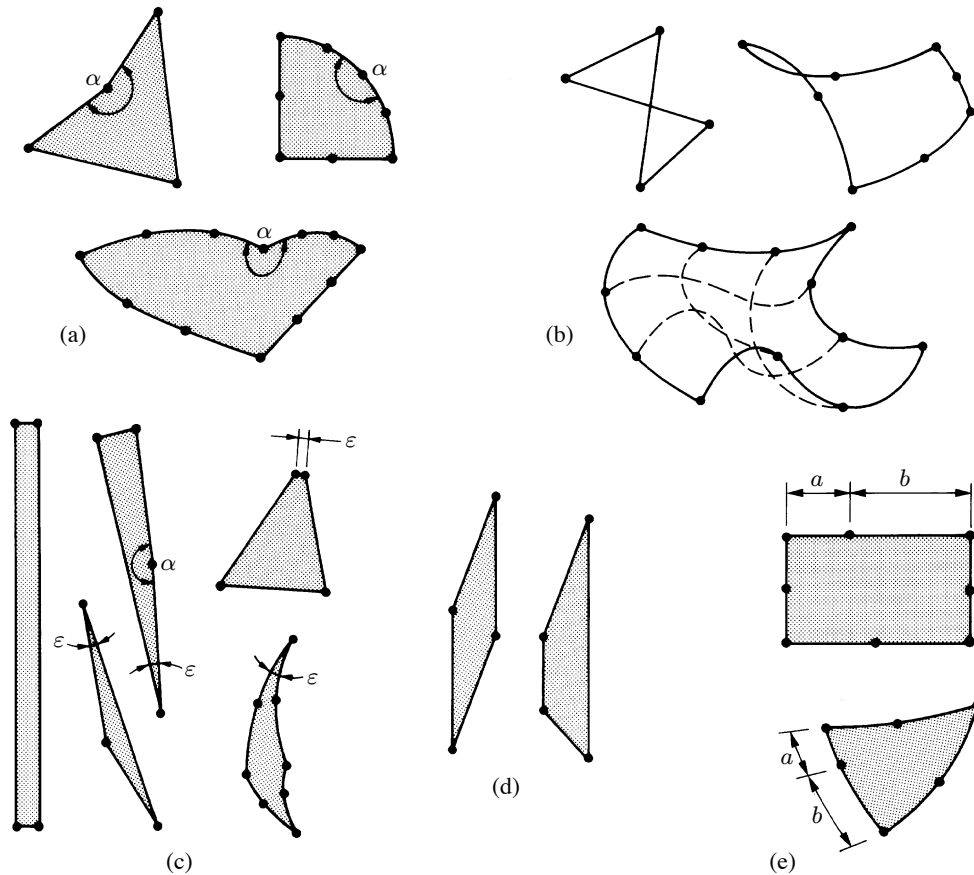
**7.15** Pour terminer cette section, remarquons que le choix d'un schéma d'intégration numérique reste un problème délicat pour certains éléments finis et primordial pour l'utilisateur, puisque toute la valeur de la solution numérique peut en dépendre.

**7.7 Distorsion des éléments finis**

Dans un maillage, il faut veiller à ce que la forme géométrique des éléments ne soit pas distordue exagérément ; les *distorsions* suivantes (fig. 7.24) :

- angles rentrants, plats, presque plats ou très petits,
- croisements et superpositions,
- étirements et autres disproportions géométriques,
- formes en trapèze et parallélogramme,
- nœuds intermédiaires (non sommets) déplacés de leur position normale,

peuvent conduire à des imprécisions ou erreurs numériques importantes, non nécessairement décelées par les programmes (gare !). Les éléments isoparamétriques, avec leurs bords et faces courbes, doivent être surveillés de près.



**Fig. 7.24** Distorsions géométriques excessives de divers éléments finis plans : (a) angle exagéré ( $\alpha \geq \pi$ ) ; (b) croisement et superposition de matière (éléments plans !) ; (c) aplatissement et autres disproportions ; (d) forme en trapèze et parallélogramme exagérément prononcée ; (e) nœuds excentrés (rechercher  $a \cong b$ ).

## 7.8 Vecteur force constant

Considérons le cas pratique fréquent d'une charge uniforme agissant sur le bord d'un élément fini quadratique (fig. 7.25a). L'ingénieur, entraîné à la statique, remplacera volontiers cette charge par trois forces nodales *statiquement équivalentes*, à l'image de la figure 7.25(b). *Cette manière de faire est incorrecte et peut conduire à des résultats erronés.*



Les forces nodales doivent se calculer en se basant sur la formulation théorique, via le travail virtuel extérieur (§ 6.2.3). Elles sont alors dites *consistantes*, ce qui signifie simplement qu'elles proviennent de la même formulation théorique que la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ .

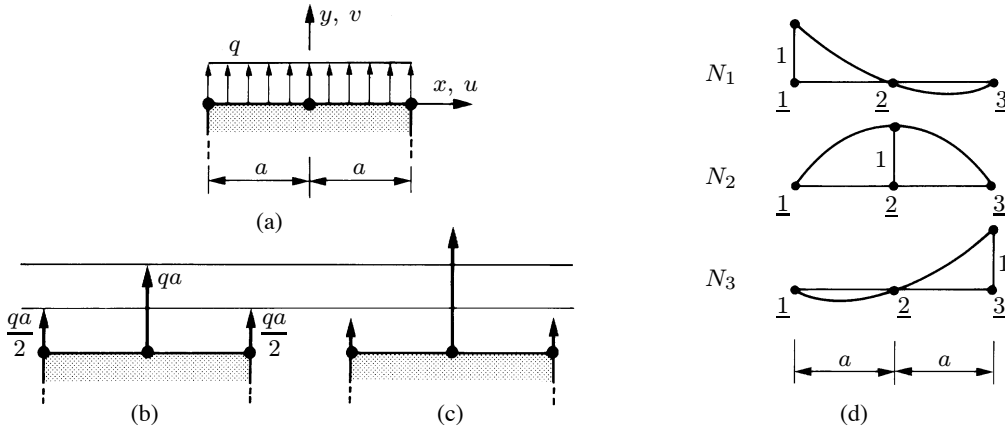
Ici, avec  $q = \text{cste}$  et (6.10), le vecteur force  $\mathbf{f}$  vaut

$$\mathbf{f} = q \int_{-a}^a \mathbf{N}^T dx$$

Puisque les fonctions d'interpolation sont paraboliques le long du bord (fig. 7.25d), il suffit de calculer l'aire des trois paraboles et l'on trouve

$$\mathbf{f} = \frac{qa}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

qui est la répartition nodale correcte (fig. 7.25c).

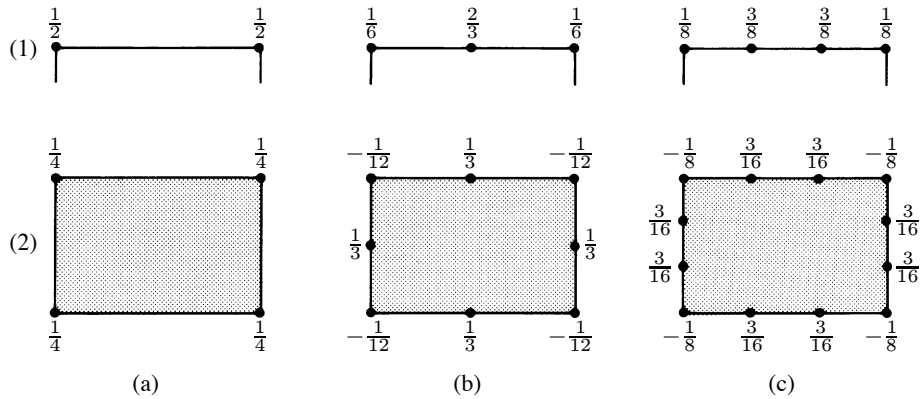


**Fig. 7.25** Charge répartie sur un bord d'un élément quadratique: (a) donnée; (b) répartition nodale statiquement équivalente; (c) répartition nodale consistante; (d) fonctions d'interpolation sur le bord.

### Remarques

**7.16** La même interprétation s'applique aux réactions nodales  $\mathbf{R}$ : elles ont un caractère consistant.

**7.17** Les répartitions nodales consistantes les plus usuelles sont données à la figure 7.26.



**Fig. 7.26** Répartitions nodales constantes d'une charge uniforme de résultante unité, agissant (1) sur un segment ou sur un bord, et (2) sur la surface d'un élément rectangulaire de Serendip; élément : (a) linéaire; (b) quadratique; (c) cubique. Noter les valeurs négatives en certains nœuds !

## 7.9 Qualités d'un élément fini

Un bon élément fini devrait réunir les propriétés suivantes :

- aucun défaut de base (mécanisme...);
- convergence rapide;
- bonne précision, déjà dans un maillage grossier;
- qualités de convergence et précision conservées pour une distorsion raisonnable;
- vecteurs forces constants;
- souplesse d'emploi;
- connexion (conforme) possible avec d'autres modèles;
- dérivation théorique simple et claire;
- programmation efficace et limpide.

Peu d'éléments réunissent toutes ces qualités...

Sans en faire une règle absolue, les éléments finis quadrilatéraux (et hexaédriques) sont préférables aux éléments triangulaires (et tétraédriques). Toutes choses étant égales par ailleurs, ils sont, en particulier, plus précis. Au delà du degré trois, et même au degré trois pour certains, l'interpolation et les éléments peuvent devenir trop lourds et compliqués pour certaines applications.

Pour les éléments intégrés numériquement, on surveillera le rang de la matrice de rigidité et la précision numérique.

## 7.10 Exercices

**7.10.1** On considère un élément fini  $C^0$  à six nœuds, en coordonnées naturelles.

- 1) Dessiner ses deux fonctions d'interpolation typiques.
- 2) En trouver l'expression analytique (avec un minimum de calculs).

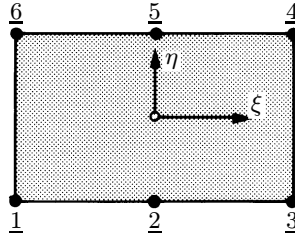


Fig. Ex. 7.10.1

**7.10.2** Démontrer que les éléments isoparamétriques  $C^0$  satisfont au critère de convergence 2 (complétude).

**7.10.3** Dans le rectangle lagrangien à neuf nœuds, on essaie, pour  $N_1$ , la fonction d'interpolation représentée par son diagramme dans la figure.

- 1) Obtenir l'équation  $N_1(\xi, \eta)$  par le produit des équations des quatre droites 3-5, 5-7, 3-7 et 2-8 où  $N_1 = 0$  (sans oublier d'imposer  $N_1 = 1$  au nœud 1).
- 2) Discuter la conformité le long d'un bord.

**7.10.4** Donner la fonction d'interpolation  $N_1$  de la brique hexaédrique à huit nœuds en coordonnées naturelles.

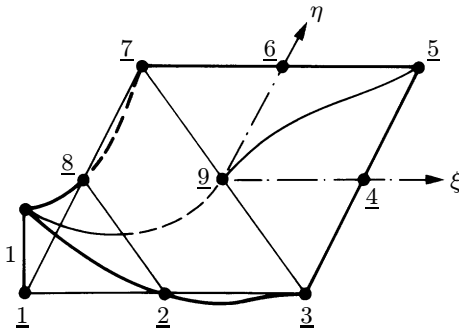


Fig. Ex. 7.10.3

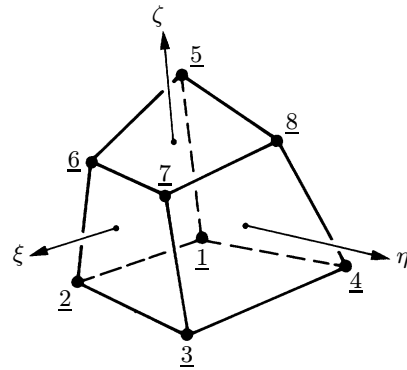


Fig. Ex. 7.10.4

**7.10.5** Etablir les valeurs numériques des six cas présentés à la figure 7.26. *Note* : certaines d'entre elles sont déjà connues.

**7.10.6** On appelle *élément de transition* un élément fini comportant, le long d'un ou plusieurs bords, un nombre de nœuds différent des autres bords, de manière à permettre la transition, dans un maillage régulier, entre des éléments de degré différent. Etudier par exemple, en coordonnées naturelles, un élément carré à cinq nœuds pour l'élasticité plane :

- 1) dessiner ses fonctions d'interpolation typiques ;
- 2) écrire l'équation de chacune de ces fonctions ;

- 3) vérifier (7.13) ;
- 4) au vu du champ  $u = \sum N_i u_i$ , écrire la forme paramétrique du champ de déplacement ; que constate-t-on de particulier ? comment l'expliquer ?
- 5) on peut appliquer la transformation isoparamétrique à cet élément : dessiner quelques formes géométriques possibles correctes et incorrectes.

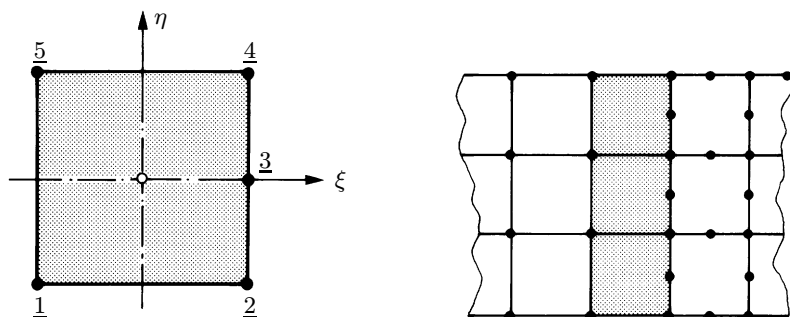


Fig. Ex. 7.10.6

**7.10.7** On considère un élément fini de type brique à huit nœuds. Utilisant ces huit nœuds, en combien de tétraèdres à quatre nœuds peut-on le découper ? Rechercher, en particulier, le nombre minimal de tétraèdres.

**7.10.8** L'élément de la figure 7.10(b) est admis carré et soumis au champ de déplacement

$$u(\xi, \eta) = C\xi(3\eta^2 - 1) \quad v(\xi, \eta) = -C\eta(3\xi^2 - 1)$$

où  $C$  est une constante. Dessiner la déformée de l'élément, en calculer le vecteur déformation et vérifier qu'on est conduit à un mécanisme pour une intégration réduite à  $2 \times 2$  points de Gauss (fig. 7.22c).

**7.10.9** Rechercher le nombre de points d'intégration de Gauss nécessaire à intégrer exactement tout élément  $C^0$  1D dont l'interpolation est de Lagrange (sect. 7.2).

**7.10.10** Vérifier que les déformations (ou contraintes) sont nulles au centre de l'élément fini rectangulaire à quatre nœuds déformé comme l'indique la figure 7.22(a).

**7.10.11** Pour les éléments lignes, quadrilatères et briques de la figure 7.20, en admettant qu'il s'agisse d'intégration de Gauss, dire si le schéma d'intégration numérique proposé est de type réduit ou non.

**7.10.12** La recherche des modes et valeurs propres de l'élément de l'application 7.3 conduit, pour un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , aux figures et valeurs suivantes (valeurs propres non nulles). Vérifier que chaque mode est une combinaison des modes de base donnés à la figure 7.23.

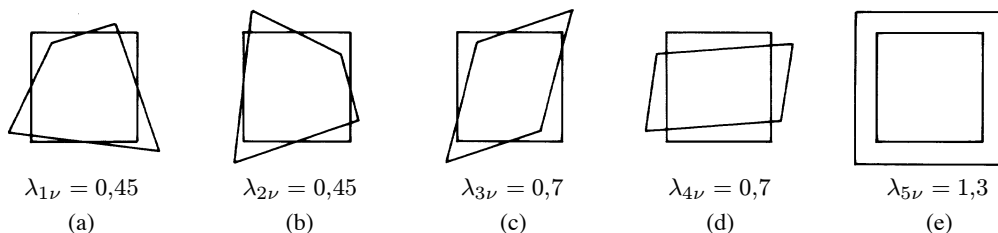


Fig. Ex. 7.10.12

## 7.11 Lexique

Interpolation $C^0$	Interpolation garantissant la continuité du champ inconnu aux frontières ( $m = 1$ ; champ de déplacement, en solide et structure).
• élément fini $C^0$	
Polynôme de Lagrange	Pour $p + 1$ points équidistants alignés, polynôme de degré $p$ , nul en $p$ points et unité au point restant.
Eléments de Lagrange ou de Serendip	Eléments construits sur des interpolations de Lagrange ou Serendip.
Coordonnées naturelles ( $\xi, \eta, \zeta$ )	Coordonnées locales rendues adimensionnelles par rapport aux dimensions de l'élément fini.
Fonction bulle	Fonction d'interpolation nulle sur la frontière d'un élément fini (elle correspond à un degré de liberté interne).
Isotropie géométrique	Invariance des polynômes d'interpolation par rapport aux coordonnées (locales ou globales).
Transformation isoparamétrique	Application permettant de construire un élément fini à configuration courbe sur la base de ses fonctions d'interpolation.
• élément fini isoparamétrique	
Intégration numérique	Intégration purement numérique, utilisant une sommation pondérée en un certain nombre de points d'intégration disposés selon un schéma propre à la formule d'intégration ; généralement approchée, elle peut intégrer exactement certaines fonctions, par exemple polynomiales.
• formule d'intégration	
• points d'intégration	
• schéma d'intégration	
• intégration de Gauss	
Intégration réduite	Intégration numérique d'un ordre inférieure à celle réalisant une intégration polynomiale exacte.
Mécanisme (mode à énergie nulle)	Mode de déformation d'un élément fini se produisant apparemment sans résistance (défaut numérique).
Rang (de $\mathbf{k}$ )	$r = n_d^e - n_{\text{rig}}$ .
Test des valeurs propres	Recherche de certains défauts d'un élément fini (mécanisme) par l'étude des valeurs propres de sa matrice de rigidité.
<i>Single element test</i>	Test, à but identique au précédent, effectué sur un seul élément fini appuyé de manière isostatique.
Distorsion (géométrique)	Forme et proportion géométrique d'un élément fini s'écartant par trop de la forme régulière de base (par exemple dans une transformation isoparamétrique).

## 7.12 Annexe – Formulation d'un élément fini isoparamétrique

Les éléments isoparamétriques s'expriment et se construisent dans les coordonnées naturelles ( $\xi, \eta, \zeta$ ) à partir des relations

$$x = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad y = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \quad z = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (7.18)$$

$$u = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \quad v = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \quad w = \sum N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \quad (7.19)$$

qui généralisent (7.11) et (7.12) au cas 3D, et où la somme  $\sum$  s'étend de  $i = 1$  à  $i = n_n^e$ .

Pour établir les caractéristiques **k** et **f**, il faut exprimer la transformation des axes  $(x, y, z)$  aux axes  $(\xi, \eta, \zeta)$  pour

- les dérivées des fonctions d'interpolation intervenant dans la matrice **B** (6.5),
- la matrice de rigidité (6.8) et le vecteur force (6.10).

La première transformation est obtenue par la règle de dérivation des fonctions composées. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

En écrivant ces trois relations sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

on fait apparaître la matrice *jacobienne* **J** (plus précisément, sa transposée) de l'application (7.18). Les termes de cette matrice sont

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{n_n^e}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{n_n^e}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{n_n^e}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n_n^e} & y_{n_n^e} & z_{n_n^e} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

On obtient finalement les dérivées des  $N_i$  par rapport à  $(x, y, z)$  en inversant (7.20)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

ce qui fournit les termes de la matrice  $\mathbf{B}$  (6.5) (ou, plus explicitement, (6.17) pour un cas 2D) en fonction de  $(\xi, \eta, \zeta)$ , ce qu'on écrira  $\mathbf{B}_{\xi\eta\zeta}$ .

Inverser la matrice  $\mathbf{J}$  dans (7.22) nécessite de calculer son déterminant

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{dV_{xyz}}{dV_{\xi\eta\zeta}} \quad (7.23)$$

appelé *jacobien*, égal au rapport de deux éléments de volume correspondants  $dV_{xyz}$  dans  $(x, y, z)$  et  $dV_{\xi\eta\zeta}$  dans  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Cette interprétation permet de dire que le jacobien de la transformation isoparamétrique doit être *positif*

$$J > 0 \quad (7.24)$$

sinon la distorsion produite est inadmissible (contrôle numérique).

La seconde transformation est obtenue en opérant le changement de variables  $(x, y, z)$  à  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Avec (7.23)

$$dV_{xyz} = J dV_{\xi\eta\zeta}$$

on a immédiatement, pour la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\xi\eta\zeta}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\xi\eta\zeta} J d\xi d\eta d\zeta \quad (7.25)$$

et, pour le vecteur force de volume,

$$\mathbf{f} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{\xi\eta\zeta}^T \mathbf{b} J d\xi d\eta d\zeta \quad (7.26)$$

Pour les forces agissant sur les frontières, il faut exprimer les éléments d'aire et de ligne dans les coordonnées naturelles (voir par exemple l'ouvrage de Zienkiewicz et Taylor). Enfin, le calcul de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{f}$  doit se faire par intégration numérique.





# 8 Structures

## 8.1 Structures et éléments finis

La mécanique des structures (barres, poutres, plaques, coques) est l'un des domaines de recherche, développement et application parmi les plus fertiles de la méthode des éléments finis. La diversité et les particularités des théories, l'ordre parfois élevé de la forme forte ( $2m = 4$ ), les exigences de continuité ( $C^1$  souvent), le nombre et la nature variables des inconnues nodales, les jonctions couramment spatiales d'éléments de type différent, sont l'essentiel des caractéristiques qui créent tant la richesse que la difficulté du calcul numérique des structures (fig. 8.1).

### Remarque

**8.1** La maturité de la méthode des éléments finis s'est forgée dans l'étude des structures (1955-1965).

## 8.2 Déformations et contraintes en structures

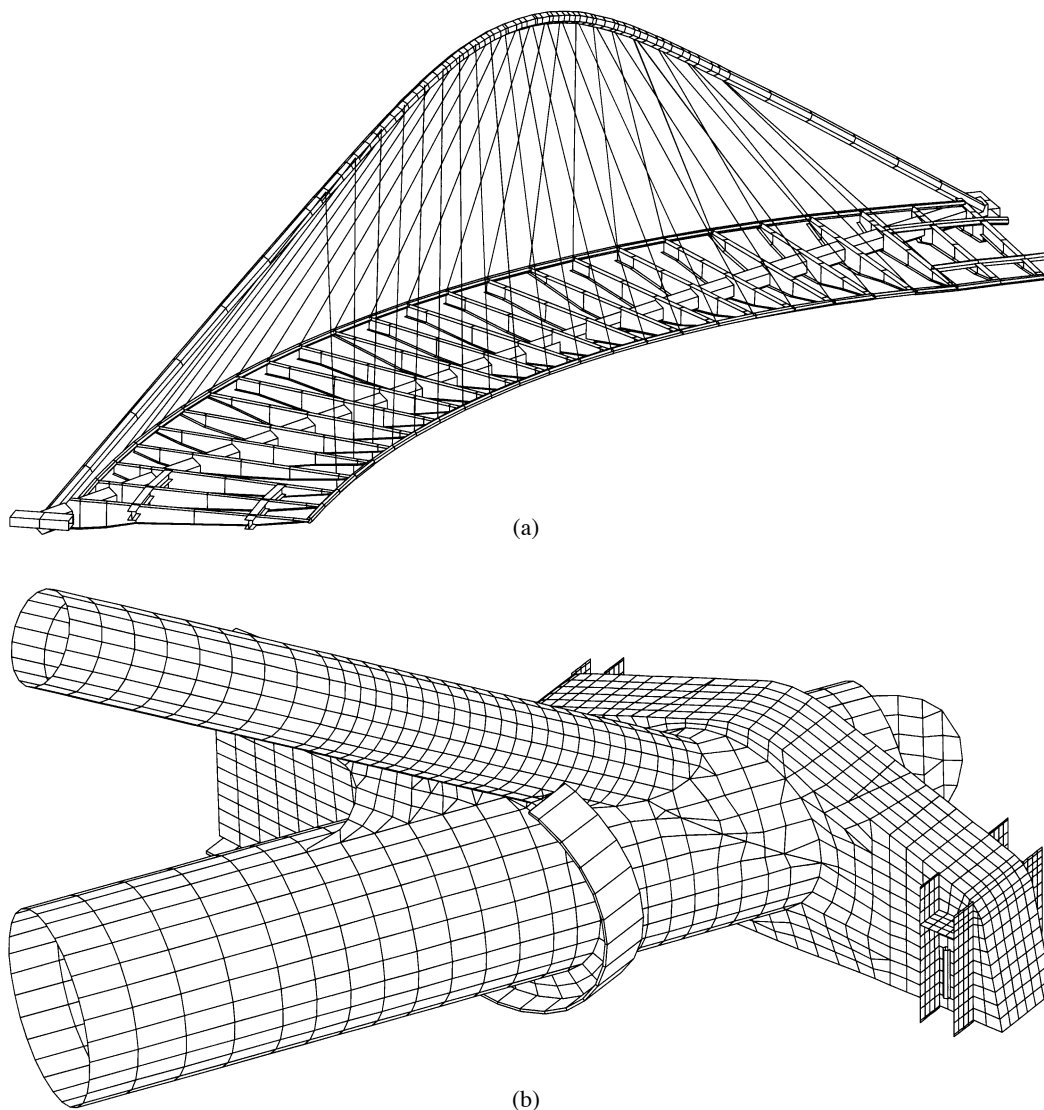
La théorie d'un élément de structure fait appel à des hypothèses simples touchant les grandeurs statiques ou cinématiques agissant selon la section droite ou l'épaisseur, de manière à rapporter la formulation théorique à une *référence géométrique* du type ligne moyenne (axes des barres et poutres) ou surface moyenne (plaques et coques). De ce fait, on réduit la formulation tridimensionnelle à une formulation localement unidimensionnelle ou bidimensionnelle. Les hypothèses simplificatrices touchent essentiellement la cinématique de la *normale* à la référence géométrique (par exemple : hypothèse de Bernoulli).

En conséquence, des degrés de liberté de type *rotation* apparaissent dans la cinématique (sect. 3.5), et les déformations et contraintes peuvent être remplacées par des grandeurs équivalentes, dites parfois *généralisées*, situées au niveau de la référence géométrique :

- les *déformations de structure* (ou déformations généralisées) – dilatation  $\varepsilon$ , glissement (moyen)  $\beta$ , courbure  $\psi$  (ou  $\kappa$ ) et (angle de) torsion  $\chi$  – qu'on peut grouper dans le vecteur  $\mathbf{e}_{\text{str}}$  ;

- les *efforts intérieurs* (ou contraintes généralisées) – effort normal  $N$ , effort tranchant  $V$ , moment de flexion  $M$  et moment de torsion  $T$  – qu'on réunit dans le vecteur  $\sigma_{\text{str.}}$ .

Chaque effort intérieur est *associé* à une déformation, de manière à pouvoir en utiliser le produit dans une expression de travail (TGC vol. 2, sect. 12.1).



**Fig. 8.1** Pont de l'Observatoire à Liège (Belgique, 2000) : (a) ossature en barres et poutres (portée 82 m) ; (b) maillage du nœud d'extrémité (intersection arc – poutre maîtresse – entretoise d'appui ; éléments de coque ;  $n_d = 25\,416$ ). (Documents et étude numérique : BEG S.A.)

Ces grandeurs cinématiques et statiques permettent, bien entendu, de retrouver l'état de déformation et l'état de contrainte en tout point de l'élément structural. Elles sont reliées par une loi constitutive

$$\sigma_{\text{str}} = \mathbf{D}_{\text{str}} \epsilon_{\text{str}} \quad (8.1)$$

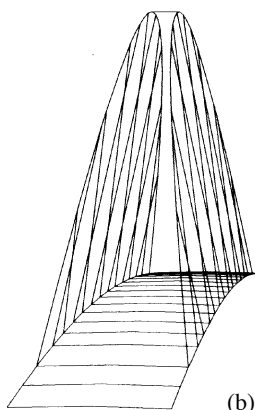
où  $\mathbf{D}_{\text{str}}$  est une matrice d'élasticité (généralisée). Cette matrice est fonction du matériau et des dimensions transversales de l'élément structural, ces dernières provenant du calcul des efforts intérieurs, résultantes des contraintes, suite à l'intégration sur la section droite (barre, poutre) ou à travers l'épaisseur (plaque, coque).

### Remarque

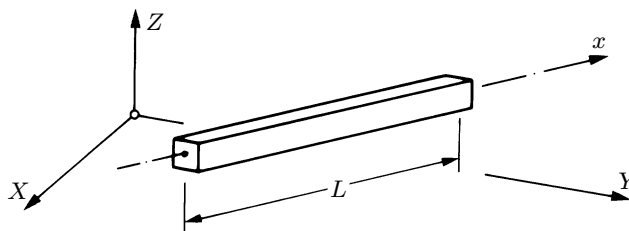
**8.2** L'espace des variables indépendantes liées à la référence géométrique (axe ou surface moyenne), servant à l'étude de l'élément structural, n'a pas nécessairement la même dimension que celui dans lequel évolue cet élément. C'est ainsi qu'une poutre de Bernoulli s'étudie intrinsèquement en fonction de la seule variable  $x$  (axe), alors que la poutre peut faire partie d'une ossature 3D (fig. 8.2).



(a)



(b)



(c)

**Fig. 8.2** Pont de Hermalle (Belgique, 1985) : (a) vue (photo DAYLIGHT, Liège) ; (b) maillage 3D de barres et poutres ; (c) la poutre, élément structural à caractère essentiellement 1D.

### 8.3 Caractéristiques des éléments finis de structure

La théorie retenue donne, au niveau de la référence géométrique  $\Omega_{\text{str}}$  de l'élément, les composantes du champ de déplacement, qu'on regroupe dans le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{str}}$ . On choisit le champ inconnu des déplacements cherchés et virtuels

$$\mathbf{u}_{\text{str}} = \mathbf{N}_{\text{str}} \mathbf{d}_{\text{str}} \quad \delta \mathbf{u}_{\text{str}} = \mathbf{N}_{\text{str}} \delta \mathbf{d}_{\text{str}} \quad (8.2)$$

dont on déduit, par des dérivations appropriées, les déformations

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{str}} = \mathbf{B}_{\text{str}} \mathbf{d}_{\text{str}} \quad \delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{str}} = \mathbf{B}_{\text{str}} \delta \mathbf{d}_{\text{str}} \quad (8.3)$$

On écrit les expressions des travaux virtuels intérieur et extérieur de l'élément fini, où  $\mathbf{q}_{\Omega}$  et  $\mathbf{q}_{\Gamma}$  sont les vecteurs des charges appliquées,

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_{\text{str}}} \delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{str}}^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{str}} d\Omega = \delta \mathbf{d}_{\text{str}}^T \left( \int_{\Omega_{\text{str}}} \mathbf{B}_{\text{str}}^T \mathbf{D}_{\text{str}} \mathbf{B}_{\text{str}} d\Omega \right) \mathbf{d}_{\text{str}} = \delta \mathbf{d}_{\text{str}}^T \mathbf{k}_{\text{str}} \mathbf{d}_{\text{str}} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \int_{\Omega_{\text{str}}} \delta \mathbf{u}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{str}}} \delta \mathbf{u}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Gamma} d\Gamma + \delta \mathbf{d}_{\text{str}}^T \mathbf{r}_{\text{str}} \\ &= \delta \mathbf{d}_{\text{str}}^T \left( \int_{\Omega_{\text{str}}} \mathbf{N}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{str}}} \mathbf{N}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Gamma} d\Gamma + \mathbf{r}_{\text{str}} \right) = \delta \mathbf{d}_{\text{str}}^T (\mathbf{f}_{\text{str}} + \mathbf{r}_{\text{str}}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

et l'équation de l'élément fini (relation force-déplacement), obtenue en égalant les deux travaux, est toujours et encore de la forme

$$\mathbf{k}_{\text{str}} \mathbf{d}_{\text{str}} = \mathbf{f}_{\text{str}} + \mathbf{r}_{\text{str}} \quad (8.6)$$

avec

$$\mathbf{k}_{\text{str}} = \int_{\Omega_{\text{str}}} \mathbf{B}_{\text{str}}^T \mathbf{D}_{\text{str}} \mathbf{B}_{\text{str}} d\Omega \quad (8.7)$$

et

$$\mathbf{f}_{\text{str}} = \int_{\Omega_{\text{str}}} \mathbf{N}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{str}}} \mathbf{N}_{\text{str}}^T \mathbf{q}_{\Gamma} d\Gamma \quad (8.8)$$

Les efforts intérieurs résultent, une fois  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{str}}$  calculé, de

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{str}} = \mathbf{D}_{\text{str}} \mathbf{B}_{\text{str}} \mathbf{d}_{\text{str}} \quad (8.9)$$

#### Remarques

**8.3** Les caractéristiques des éléments structuraux s'obtiennent directement – comme en élasticité (sect. 6.2) et via le principe des déplacements virtuels – par

- le choix du champ  $\mathbf{u}_{\text{str}} (\Rightarrow \mathbf{N}_{\text{str}})$ ,
- la connaissance des équations cinématiques (8.3) ( $\Rightarrow \mathbf{B}_{\text{str}}$ ),
- la connaissance de la loi constitutive (8.1) ( $\Rightarrow \mathbf{D}_{\text{str}}$ ),

sans entrer dans le détail d'une dérivation complète (forme forte, forme faible...).

**8.4** On omet l'indice «str» dans la suite (chap. 8 et 9) : il est entendu que les diverses grandeurs proviennent d'une théorie de structure et se rapportent à la référence géométrique choisie (grandeurs généralisées).

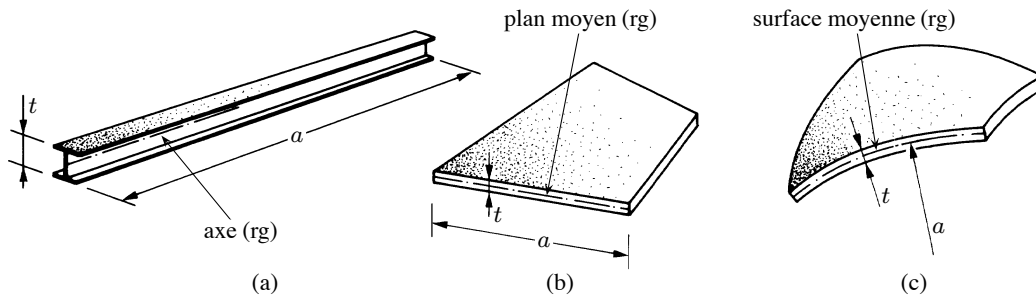
## 8.4 Structures minces (continuité $C^1$ )

Les *structures minces* sont celles dont la normale reste rectiligne et perpendiculaire à la référence géométrique en configuration déformée du comportement flexionnel. Ici, on considère avant tout

- les *poutres de Bernoulli* (la normale est alors la section droite) ;
- les *plaques de Kirchhoff*.

En conséquence, les déformations d'effort tranchant sont négligées et le glissement (moyen) associé est nul (il n'apparaît pas dans l'expression de la déformation). Les efforts tranchants dérivent des moments par l'équilibre.

Le qualificatif *mince* est correct : plus l'élément est élancé (rapport  $a/t$  grand), meilleure est la modélisation (fig. 8.3).



**Fig. 8.3** Structures minces (rg = référence géométrique) : (a) poutre ; (b) plaque ; (c) coque.

Les déplacements (de translation)  $u, v \dots$  de la référence géométrique sont donnés par l'équation de la déformée ; les rotations  $\theta_x, \theta_y \dots$  de la normale en sont les dérivées (pentes de la déformée). Les conditions aux limites essentielles portent sur les déplacements de translation et de rotation. En termes d'éléments finis, cela signifie que *le champ des déplacements et ses dérivées* doivent être continus à travers les frontières pour satisfaire au critère 1 de conformité : *on doit assurer une continuité  $C^1$* .

A l'exception des éléments 1D (barre, poutre), cette exigence est très difficile à obtenir et reste, aujourd'hui, un défi aux amateurs d'éléments finis structuraux minces.

### Remarques

**8.5** Qui dit continuité  $C^1$  aux frontières dit continuité  $C^2$  dans l'élément fini, et donc  $m = 2$  (§ 5.4.2) : on sait en effet que la forme forte d'une théorie flexionnelle de poutre ou plaque mince est du quatrième ordre ( $2m = 4$ ).

**8.6** Pour les éléments structuraux minces exigeant la continuité  $C^1$ , on parle d'élément  $C^1$ , interpolation  $C^1$ , etc. Leur particularité est que *la rotation de la normale est liée au déplacement transversal par la dérivée* (poutre par exemple :  $\theta = dv/dx$ ).

**8.7** Les rotations doivent apparaître dans (8.2), bien qu'elles ne soient pas interpolées de manière indépendante, mais simplement dérivées (sinon  $\mathbf{N}$  dans (8.8) est incomplet).

**8.8** Les *coques en théorie de Love* font partie des structures minces (fig. 8.3c). Les exigences de continuité sur la rotation de la normale peuvent toutefois être plus complexes que celles des poutres et plaques. La construction d'éléments finis de coque mince est un problème difficile, qui n'est pas traité ici (TGC vol. 5).

**8.9** Les théories propres aux structures minces acceptent la notion de force concentrée.

## 8.5 Théories des structures minces

On rappelle brièvement les relations principales de la théorie des poutres de Bernoulli (cas plan) et de la théorie des plaques de Kirchhoff.

### 8.5.1 Poutres de Bernoulli

On examine le problème plan d'une poutre prismatique ( $EA = \text{cste}$ ,  $EI = \text{cste}$ ) combinant le comportement axial à celui flexionnel. La référence géométrique est l'axe de la poutre.

**Comportement axial** (fig. 8.4)

Il est décrit par les équations (TGC vol. 1, § 9.2.1 et vol. 2, sect. 4.2) :

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad N = EA\varepsilon \quad (8.10)$$

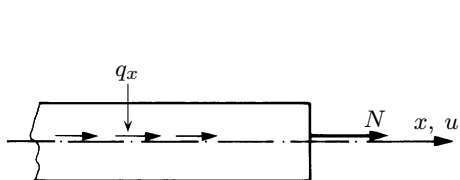
exprimant, respectivement, la statique (équilibre), la cinématique (déformation) et la loi de comportement (loi de Hooke). On élimine l'effort normal  $N$  et la dilatation à l'axe  $\varepsilon$  au profit du déplacement axial  $u(x)$  dans la première, ce qui livre l'équation différentielle d'équilibre du second ordre ( $2m = 2$ )

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \quad (8.11)$$

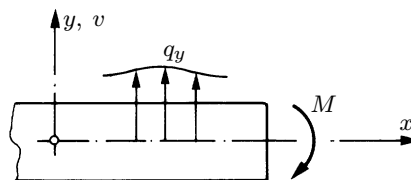
imposant la continuité  $C^0$  ; cette dernière est garantie si, en tout nœud frontière, le déplacement axial est continu.

Les conditions aux limites, l'une essentielle et l'autre naturelle, sont

$$u = \bar{u} \quad N = \bar{N} \quad (8.12)$$



**Fig. 8.4** Comportement axial (barre et poutre).



**Fig. 8.5** Comportement flexionnel (poutre).

**Remarque**

**8.10** Les équations du comportement axial sont identiques tant pour les barres que pour les poutres (de Bernoulli et Timoshenko).

**Comportement flexionnel** (ou transversal ; fig. 8.5)

Il est décrit par les équations (§ 1.3.3) :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q_y = 0 \quad \psi = -\frac{d^2 v}{dx^2} \quad M = EI \psi \quad (8.13)$$

exprimant, comme précédemment, statique (équilibre), cinématique (déformation) et loi constitutive (Hooke). Éliminant le moment de flexion  $M$  et la courbure de l'axe  $\psi$  au profit du déplacement transversal  $v(x)$  de l'axe dans la première, on obtient l'équation différentielle d'équilibre du quatrième ordre ( $2m = 4$ )

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q_y = 0 \quad (8.14)$$

imposant une continuité  $C^1$  ; cette dernière est réalisée si, en tout nœud frontière, le déplacement transversal *et la rotation* sont continus. Dans le cadre de la linéarisation géométrique, la rotation de la section  $\theta$  coïncide avec la pente

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (8.15)$$

Les conditions aux limites portent sur  $v$ ,  $\theta$ ,  $M$  et  $V$  (§ 3.6.2).

**Combinaison et forme faible**

Les deux comportements précédents peuvent être réunis dans l'unique loi de Hooke matricielle

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.16)$$

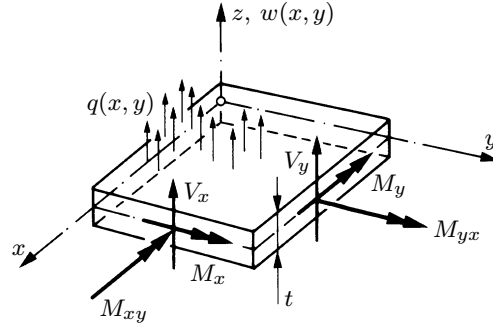
réalisant la combinaison de l'état axial et de l'état flexionnel (sect. 2.5).

L'équilibre sous forme faible résulte directement du principe des déplacements virtuels. Pour un élément fini de longueur  $L_e$ , on a (sect. 8.3)

$$\int_{L_e} (N \delta \varepsilon + M \delta \psi) dx = \int_{L_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_{L_e} (q_x \delta u + q_y \delta v) dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} = \int_{L_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (8.17)$$

**8.5.2 Plaques de Kirchhoff**

La théorie de Kirchhoff est une extension de celle de Bernoulli aux plaques fléchies. La figure 8.6 montre un élément rectangulaire de plaque. Les axes  $(x, y)$  sont placés dans le plan moyen, référence géométrique à laquelle tout est ramené. Les efforts intérieurs positifs sont dessinés sur les faces positives des coupes perpendiculaires au plan moyen. L'intensité par unité d'aire de la charge transversale répartie est désignée par  $q(x, y)$ .



**Fig. 8.6** Etat flexionnel d'une plaque ; plan moyen  $(x, y)$ , épaisseur  $t$ , flèche  $w(x, y)$ , charge répartie  $q(x, y)$ , moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$ , moments de torsion  $M_{xy} = M_{yx}$ , efforts tranchants  $V_x$  et  $V_y$ .

### Cinématique et loi constitutive

Dans la théorie des plaques de Kirchhoff (ou des plaques minces ; TGC vol. 5), les *courbures* prises par le plan moyen (déformations généralisées) sont liées à la flèche  $w(x, y)$  par

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.18)$$

Les *moments* (contraintes généralisées) sont liés aux courbures par

$$\sigma = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\epsilon = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

### Remarque

**8.11** La *torsion* de la surface moyenne est définie par  $\psi_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y$  ; on a donc  $\chi = 2\psi_{xy}$ .

### Equilibre et forme forte

Après élimination des efforts tranchants  $V_x$  et  $V_y$  des trois équations (8.20) exprimant l'équilibre de l'élément de plaque de la figure 8.6

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x = 0 \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad (8.20)$$

l'équilibre s'exprime par l'unique équation

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (8.21)$$



En y introduisant moments et courbures, on obtient l'équation différentielle de la plaque, du quatrième ordre ( $2m = 4$ ), biharmonique, dite équation de Lagrange et Sophie Germain, fonction du déplacement transversal  $w(x, y)$  qui définit à lui seul l'état de la plaque

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0 \quad (8.22)$$

### Forme faible

Pour exprimer l'équilibre sous forme faible, point n'est besoin de dériver la forme forte (8.22) et d'effectuer de laborieuses transformations (deux intégrations par parties). Il suffit d'écrire le principe des déplacements virtuels (sect. 8.3). Pour un élément fini, on obtient la forme usuelle ( $dA = dx dy$ )

$$\int_{A_e} (M_x \delta \psi_x + M_y \delta \psi_y + M_{xy} \delta \chi) dA = \int_{A_e} \delta \epsilon^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_{A_e} q \delta w dA + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (8.23)$$

### Conditions aux limites

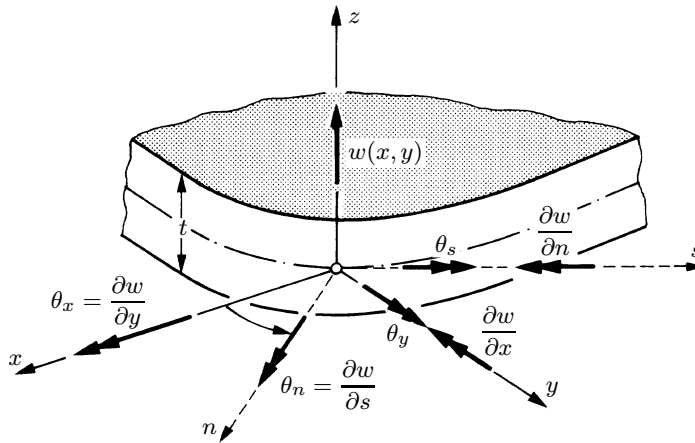
Soient  $(n, s)$  les coordonnées normale et tangente au bord de la plaque (fig. 8.7) et  $V^*$  l'effort tranchant de Kirchhoff. Les conditions aux limites sont

- les conditions naturelles

$$M_n = \overline{M}_n \quad V_n^* = V_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \overline{V}_n^* \quad (8.24)$$

- les conditions essentielles

$$w = \overline{w} \quad \theta_s = -\frac{\partial w}{\partial n} = \overline{\theta}_s \quad (8.25)$$



**Fig. 8.7** Axes  $(x, y)$  et  $(n, s)$  d'une plaque et grandeurs cinématiques (flèche, rotations et pentes).

**Remarque**

**8.12** Si  $\theta_x$  et  $\theta_y$  représentent la rotation de la normale autour des axes  $x$  et  $y$ , on a

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_y \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x \quad (8.26)$$

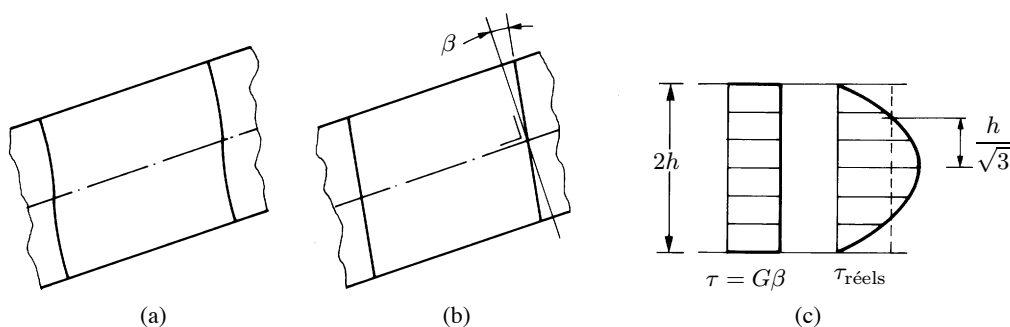
Les axes locaux  $(n, s)$  sont déduits des axes  $(x, y)$  par une rotation autour de l'axe commun  $z$ ; semblablement

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\theta_s \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \theta_n \quad (8.27)$$

où la première grandeur est fréquemment appelée *pente normale* et la seconde *pente tangentielle*. Dans la section 9.4, on utilisera les dérivées partielles de  $w$  comme inconnues cinématiques de type rotation (ou pente). Les relations (8.26) et (8.27) montrent que l'utilisateur d'un programme d'éléments finis de plaque doit être particulièrement attentif à la convention choisie.

## 8.6 Structures d'épaisseur modérée (continuité $C^0$ )

Les structures sont dites d'*épaisseur modérée* quand, en comportement flexionnel, l'hypothèse de Bernoulli-Kirchhoff-Love ne s'applique plus: en configuration déformée, les normales de la configuration initiale ne sont plus perpendiculaires à la référence géométrique et peuvent même gauchir (ou s'incurver; fig. 8.8a). Il en résulte, entre les fibres (ou plans) parallèles à la référence géométrique et la normale, une variation de l'angle droit, qui provoque des glissements, ainsi que des contraintes tangentielles, par ailleurs associées aux efforts tranchants. C'est pourquoi on dit aussi que les structures d'épaisseur modérée sont celles où la déformation par effort tranchant est prise en compte. Les poutres « courtes », les poutres âme-semelles à âme mince, les plaques « épaisses », les plaques sandwichs, etc., sont des structures de cette nature.



**Fig. 8.8** Glissements et contraintes d'effort tranchant : (a) gauchissement de la normale ; (b) glissement moyen  $\beta$  de la normale ; (c) contraintes tangentielles  $\tau$  (moyennes et réelles).

Les théories les plus simples ignorent la courbure en S de la normale ; cette dernière tourne en bloc d'un angle différent de celui d'une perpendiculaire à la référence géométrique (fig. 8.8b). Il en résulte que, sur la hauteur de la normale, le glissement (angle entre la normale et la perpendiculaire à la référence géométrique) est *constant* ; par suite, les contraintes tangentielles sont également constantes.

Cette hypothèse est correcte pour un élément sandwich ou âme-semelle ( $\tau_w \cong \text{cste}$ ); elle ne saurait représenter qu'une *moyenne* pour une plaque épaisse ou une poutre à section rectangulaire (où les  $\tau$  sont nuls aux fibres extrêmes (fig. 8.8c) suite au gauchissement de la normale). Le glissement est alors le *glissement moyen*  $\beta$  (TGC vol. 2, sect. 10.3). Les

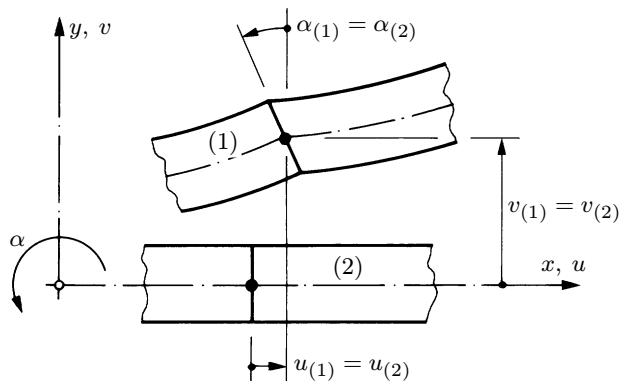
- poutres de Timoshenko,
- plaques de Mindlin,

obéissent à cette hypothèse, adoptée ici.

En termes d'éléments finis, l'intérêt de ces théories est que la rotation de la normale n'est plus liée à la pente par dérivation : c'est une grandeur *autonome*. Elle doit être interpolée pour elle-même, indépendamment des déplacements de translations.

Translations ( $u, v \dots$ ) et rotations ( $\alpha_x, \alpha_y \dots$ ) sont maintenant sur un pied d'égalité et doivent être chacune continues à travers la frontière séparant deux éléments (fig. 8.9) : il s'agit d'une classique continuité  $C^0$ .

Les théories des structures d'épaisseur modérée offrent ainsi l'avantage de n'exiger qu'une continuité  $C^0$ . Devant les difficultés rencontrées par la continuité  $C^1$  des structures minces, elles ont eu – et ont toujours – un grand succès, offrant en prime la prise en compte de la déformation par effort tranchant.



**Fig. 8.9** Continuité  $C^0$  à la jonction de deux éléments poutres d'épaisseur modérée (1) et (2).  
(Observer la discontinuité de la pente de l'axe).

### Remarques

**8.13** A la limite, lorsque la dimension transversale devient très faible, on doit retrouver les résultats des structures minces (Timoshenko  $\rightarrow$  Bernoulli ; Mindlin  $\rightarrow$  Kirchhoff).

**8.14** Qui dit  $C^0$  aux frontières dit  $C^1$  dans l'élément et donc  $m = 1$  (§ 5.4.2) : les équations différentielles des poutres et plaques d'épaisseur modérée sont, en effet, du second ordre ( $2m = 2$ ; sect. 8.7).

**8.15** Tout l'arsenal lié à l'interpolation  $C^0$  peut être utilisé, y compris la transformation isoparamétrique (chap. 7).

**8.16** Il existe aussi des théories pour les *coques d'épaisseur modérée* ; elles ne sont pas abordées ici. (On trouvera quelques renseignements sur les éléments finis correspondants dans le TGC vol. 5.)

**8.17** Les structures d'épaisseur modérée n'acceptent pas, en principe, les forces concentrées.

## 8.7 Théories des structures d'épaisseur modérée

On se limite aux théories admettant que la normale tourne en bloc d'un angle indépendant de la pente (théorie des poutres de Timoshenko et théorie des plaques de Mindlin).

### 8.7.1 Poutres de Timoshenko

En flexion simple plane d'une poutre prismatique, une normale a-b (ou section droite a-b) tourne d'un angle  $\alpha(x)$  pour occuper la position déformée a'-b' (fig. 8.10). L'angle  $\alpha(x)$  n'est pas lié à la pente  $dv/dx$ , où  $v(x)$  est le déplacement transversal (ou flèche).

En configuration déformée, l'angle entre la perpendiculaire à l'axe et a'-b' est le glissement moyen  $\beta$  caractérisant la déformation par effort tranchant  $V$  (TGC vol. 2, sect. 10.3)

$$\beta = \frac{V}{GB} \quad (8.28)$$

où  $G$  est le module de glissement et  $B$  l'aire réduite.

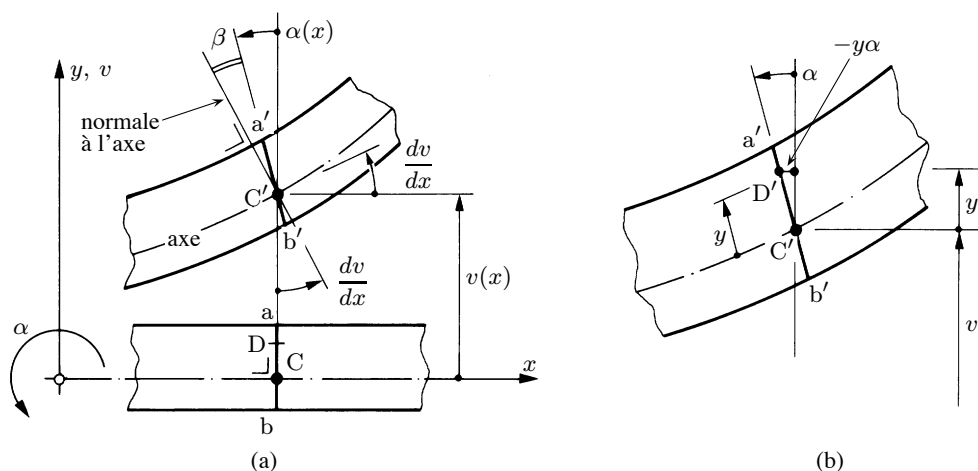
#### Cinématique et loi de Hooke en flexion

Soit, à l'axe de la poutre (fig. 8.10a),  $v(x)$  et  $\alpha(x)$  le *champ des déplacements*, comportant

- une composante de *translation* (flèche) d'un point C,
- une composante de *rotation de la section* contenant C.

Les composantes du déplacement d'un point quelconque D valent (fig. 8.10b)

$$u_D = -y\alpha \quad v_D = v \quad (8.29)$$



**Fig. 8.10** Déplacements flexionnels d'une section a-b d'une poutre de Timoshenko ; dans a-b, le point C est sur l'axe  $x$  et le point D est à la distance  $y$  de l'axe  $x$ .

En D, l'état de déformation est

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_D}{\partial x} = -y \frac{d\alpha}{dx} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_D}{\partial y} + \frac{\partial v_D}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \alpha \quad (8.30)$$

et l'état de contrainte vaut (Hooke)

$$\sigma = E\varepsilon_x \quad \tau = G\gamma_{xy} \quad (8.31)$$

Dans une section droite, le glissement  $\gamma_{xy}$  est constant et correspond au glissement moyen  $\beta$  ; la contrainte tangentielle  $\tau$  dans (8.31) est alors une moyenne qui, agissant sur l'aire réduite  $B$ , garantit l'équilibre.

Le principe d'équivalence (déjà exprimé par (8.28) pour  $V$ ),

$$V = \int_B \tau dA = GB \left( \frac{dv}{dx} - \alpha \right) \quad M = \int_A \sigma y dA = -EI \frac{d\alpha}{dx} \quad (8.32)$$

fait apparaître les déformations de poutre suivantes :

- le *glissement* (moyen)

$$\beta = \frac{dv}{dx} - \alpha \quad (8.33)$$

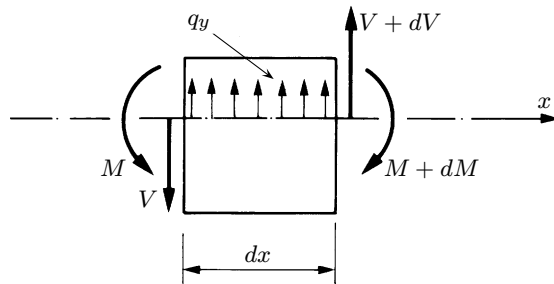
- la *courbure* (pour épaisseur modérée)

$$\kappa = -\frac{d\alpha}{dx} \quad (8.34)$$

### Equilibre et forme forte

L'équilibre d'un tronçon  $dx$  de poutre (fig. 8.11) fournit (comme pour les poutres minces)

$$\frac{dV}{dx} + q_y = 0 \quad -\frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (8.35)$$



**Fig. 8.11** Tronçon de poutre et ses forces (efforts intérieurs  $V$  et  $M$  ; charge répartie transversale  $q_y$ ).

Avec (8.32), on obtient la forme forte de la poutre de Timoshenko

$$GB \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\alpha}{dx} \right) + q_y = 0 \quad EI \frac{d^2 \alpha}{dx^2} + GB \left( \frac{dv}{dx} - \alpha \right) = 0 \quad (8.36)$$

On aboutit à deux équations différentielles couplées où l'ordre des dérivées est 2 ( $2m = 2$ ) pour les deux inconnues indépendantes  $v(x)$  et  $\alpha(x)$ . Par conséquent, la continuité  $C^0$  assure la conformité aux nœuds frontières via les inconnues nodales de même nature (fig. 8.9).

Les conditions aux limites essentielles portent sur  $v$  et  $\alpha$ , et celles naturelles sur  $V$  et  $M$ .

### Forme faible

Pour la méthode des éléments finis, on recourt à la forme faible : on exprime simultanément l'équilibre et les conditions naturelles aux limites par le principe des déplacements virtuels. En combinant le comportement axial (rem. 8.10) avec celui flexionnel, la loi de comportement s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GB & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \kappa \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (8.37)$$

et l'équilibre de l'élément fini s'exprime par

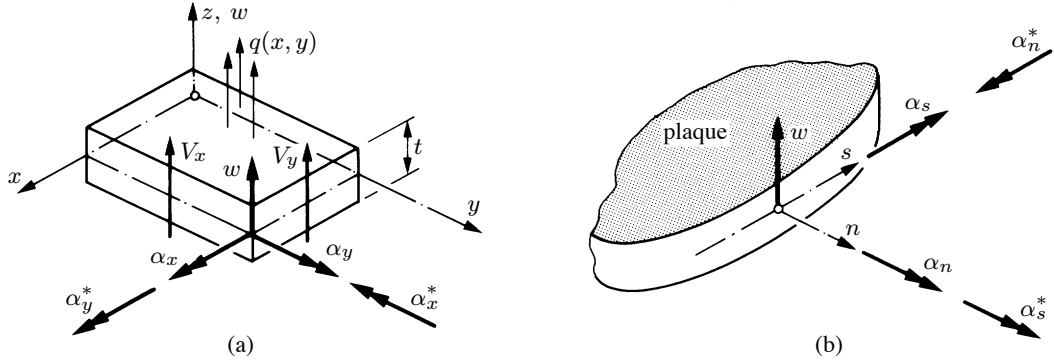
$$\begin{aligned} \int_{L_e} (N \delta u + V \delta \beta + M \delta \kappa) dx &= \int_{L_e} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_{L_e} (q_x \delta u + q_y \delta v) dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \\ &= \int_{L_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (8.38)$$

### Remarque

**8.18** Dans (8.34),  $\kappa$  s'appelle courbure par analogie avec la poutre de Bernoulli (comparer (8.32) et (8.34) avec les deux dernières équations (8.13) :  $M$  est proportionnel à la courbure) ; en fait, (8.34) ne définit pas la courbure de l'axe.

## 8.7.2 Plaques de Mindlin

La théorie de Mindlin est une généralisation de la théorie de Timoshenko aux plaques fléchies, avec prise en compte des déformations dues aux efforts tranchants  $V_x$  et  $V_y$ . Dans la cinématique, les deux rotations  $\alpha_x(x, y)$  et  $\alpha_y(x, y)$  (ou  $\alpha_x^*(x, y)$  et  $\alpha_y^*(x, y)$  selon la convention choisie) des normales restent indépendantes de la flèche  $w(x, y)$  (fig. 8.12a).



**Fig. 8.12** Plaque d'épaisseur modérée : (a) déplacements, efforts tranchants et charge transversale (pour les moments de flexion, voir la figure 8.6) ; (b) bord et axes locaux ( $n, s$ ).

### Cinématique et loi constitutive

Pour exprimer les courbures et glissements, il est avantageux d'utiliser les rotations « directes »  $\alpha_x^* = -\alpha_y$  et  $\alpha_y^* = \alpha_x$ . En suivant les mêmes lignes que pour la poutre de Timoshenko, on déduit aisément la cinématique

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial \alpha_x^*}{\partial x} & \kappa_y &= -\frac{\partial \alpha_y^*}{\partial y} & \kappa_{xy} &= -\left(\frac{\partial \alpha_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y^*}{\partial x}\right) \\ \beta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x^* & \beta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y^* \end{aligned} \quad (8.39)$$

et la loi constitutive

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gt \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (8.40)$$

où  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$  est la raideur flexionnelle de la plaque.

### Equilibre

Les trois équations différentielles (8.20) exprimant l'équilibre d'un élément de plaque (identiques en théorie de Kirchhoff ou de Mindlin) montrent que la forme forte est d'ordre 2 ( $2m = 2$ ). En effet, si on introduit les efforts intérieurs exprimés en fonction des déplacements dans (8.20), on obtient trois équations différentielles couplées du second ordre pour les trois champs inconnus  $w$ ,  $\alpha_x$  (ou  $\alpha_x^*$ ) et  $\alpha_y$  (ou  $\alpha_y^*$ ).

### Conditions aux limites

Le long d'un bord d'axes locaux  $(n, s)$  (fig. 8.12b), les conditions aux limites essentielles sont

$$w = \overline{w} \quad \alpha_n = \overline{\alpha}_n \quad \alpha_s = \overline{\alpha}_s \quad (8.41)$$

et celles naturelles sont

$$M_n = \overline{M}_n \quad V_n = \overline{V}_n \quad (8.42)$$

### Forme faible

Avec le principe des déplacements virtuels et pour un élément fini, l'équilibre sous forme faible s'exprime par

$$\int_{A_e} (M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + V_x \delta \beta_x + V_y \delta \beta_y) dA = \int_{A_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_{A_e} q \delta w dA + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{r} \quad (8.43)$$

### Remarque

**8.19** Avant d'utiliser un élément de plaque de Mindlin, il convient, comme pour les plaques de Kirchhoff (rem. 8.12), d'examiner soigneusement la convention choisie pour les rotations ( $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  ou  $\alpha_x^*$  et  $\alpha_y^*$ ).

## 8.8 Lexique

Structure	Barre, poutre, plaque, coque ; référence géométrique ; normale (ou section droite) ; degrés de liberté de translation et rotation ; déformations de structure et efforts intérieurs (déformations et contraintes généralisées).
Structure mince	La normale reste perpendiculaire à la référence géométrique (on peut alors assimiler la rotation à la pente) : <ul style="list-style-type: none"> <li>• barre ;</li> <li>• poutre de Bernoulli ;</li> <li>• plaque de Kirchhoff.</li> </ul>
Structure d'épaisseur modérée	La normale tourne sans gauchir (glissement moyen) : <ul style="list-style-type: none"> <li>• poutre de Timoshenko ;</li> <li>• plaque de Mindlin.</li> </ul>



# 9 Éléments finis des structures

## 9.1 Introduction

Les éléments finis développés dans le cadre d'une théorie de mécanique des structures sont, en principe, plus difficiles à formuler et à mettre au point que ceux rattachés à la mécanique des solides. La raison tient à ce que, dans la théorie de l'élasticité, les degrés de liberté sont de type translation seulement, et la continuité  $C^0$ , alors qu'en structures interviennent, en plus, des rotations et, parfois, des continuités de type  $C^1$ , voire davantage. De plus, les équations de l'élasticité (à savoir, pour les modèles déplacements, les équations cinématiques) ont une structure systématique et homogène, ce qui n'est pas le cas en théorie des structures. Une poutre de Bernoulli, par exemple, combine un comportement axial de type  $C^0$  avec un comportement flexionnel de type  $C^1$ ; le glissement d'une poutre de Timoshenko contient deux termes, dont l'un est une dérivée, et pas l'autre.

Or les éléments finis de structure (barre, poutre, plaque et coque) sont indispensables aux ingénieurs, car ils sont d'une efficacité imbattable quand la formulation est sans faille. À part la barre de treillis (non traitée ici) et la poutre prismatique de Bernoulli, on peut affirmer que ces éléments posent, sur le plan numérique, de difficiles problèmes qui sont encore loin d'être tous résolus aujourd'hui, surtout dans le domaine des coques (TGC vol. 5).

Lorsqu'on utilise un élément fini de structure, il convient donc de bien s'assurer de ses qualités réelles.

## 9.2 Poutre de Bernoulli (cas plan)

Dans le champ des déplacements (combinant le comportement axial à celui flexionnel)

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x)\mathbf{d} \quad (9.1)$$

on interpole  $u(x)$  et  $v(x)$  seuls, puisque  $\theta = dv/dx$ . Les déformations (§ 8.5.1)

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/dx \\ -d^2v/dx^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}(x)\mathbf{d} \quad (9.2)$$

permettent de calculer la matrice  $\mathbf{B}$ , et la loi de comportement (8.16)

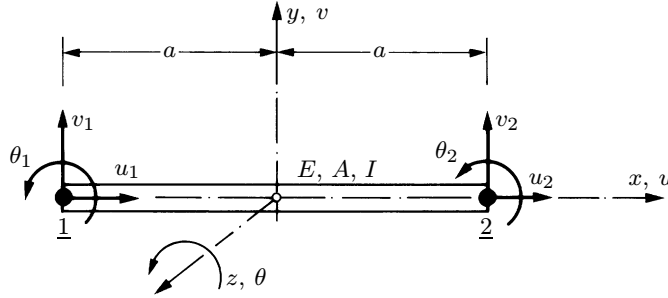
$$\sigma = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\epsilon \quad (9.3)$$

définit la matrice d'élasticité  $\mathbf{D}$ .

### Interpolation

Pour créer un élément fini de poutre prismatique, on prend pour nœuds les deux extrémités 1 et 2 où l'on choisit, comme inconnues nodales,  $u_1$  et  $u_2$  pour le comportement axial d'une part, et  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $\theta_2$  pour celui flexionnel d'autre part (fig. 9.1). Les degrés de liberté de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  assurent la continuité  $C^1$ . On a un total de  $n_d^e = 6$  inconnues

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$



**Fig. 9.1** Élément de poutre de Bernoulli (cas plan).

On obtient six paramètres en choisissant

- un champ axial linéaire

$$u(x) = b_1 + b_2x \quad (9.5)$$

- un champ transversal cubique

$$v(x) = b_3 + b_4x + b_5x^2 + b_6x^3 \quad (9.6)$$

au moins complets respectivement au degré 1 pour  $u(x)$  et 2 pour  $v(x)$ . On peut vérifier que l'interprétation physique de cette condition est satisfaite, à savoir que ces champs peuvent représenter

- les modes rigides ( $u = \text{cste}$  via  $b_1$  ;  $v = \text{cste}$  par  $b_3$  ;  $\theta = \text{cste}$  avec  $b_4 \Rightarrow v = \theta x$ ) ;
- les déformations constantes ( $\varepsilon = \text{cste}$  via  $b_2$  ;  $\psi = \text{cste}$  par  $b_5$ ).

Les critères de convergence sont donc vérifiés.

Il est aisé de trouver les six fonctions d'interpolation de cet élément en donnant à chaque inconnue successivement une valeur unité (fig. 9.2). Deux sont des droites et quatre sont des cubiques : on retrouve des résultats connus (fig. 7.2a et sect. 4.5, appl. 4.1). Le champ s'écrit

$$\begin{aligned} u &= u_1 N_1 + u_2 N_2 \\ v &= v_1 M_1 + \theta_1 L_1 + v_2 M_2 + \theta_2 L_2 \\ \theta &= v_1 \frac{dM_1}{dx} + \theta_1 \frac{dL_1}{dx} + v_2 \frac{dM_2}{dx} + \theta_2 \frac{dL_2}{dx} \end{aligned} \quad (9.7)$$

avec

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{x/a - 1}{2} & N_2 &= \frac{x/a + 1}{2} \\ M_1 &= \frac{x^3/a^3 - 3x/a + 2}{4} & M_2 &= -\frac{x^3/a^3 - 3x/a - 2}{4} \\ L_1 &= a \frac{x^3/a^3 - x^2/a^2 - x/a + 1}{4} & L_2 &= a \frac{x^3/a^3 + x^2/a^2 - x/a - 1}{4} \end{aligned} \quad (9.8)$$

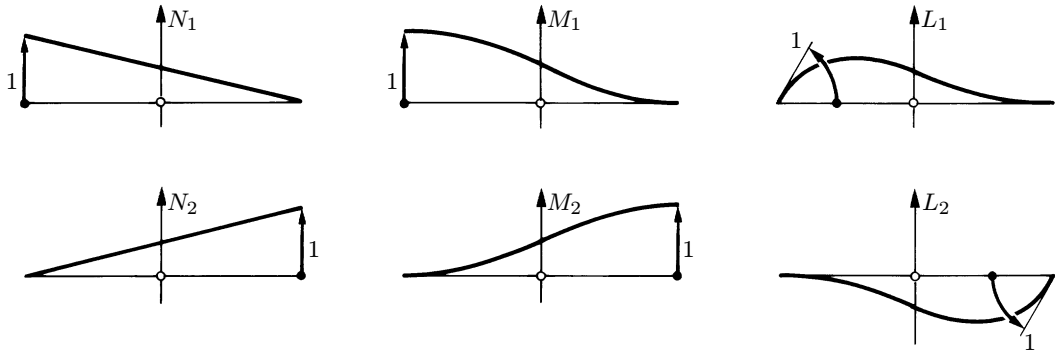


Fig. 9.2 Fonctions d'interpolation de l'élément poutre de Bernoulli.

On dispose de toutes les informations nécessaires pour calculer les caractéristiques de l'élément (ex. 9.8.1). La matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  et les vecteurs forces  $\mathbf{f}$  sont donnés dans le chapitre 15.

**Remarque**

**9.1** Dans le cas spatial, l'élément doit combiner quatre comportements : axial ( $u$ ), flexionnel dans les deux plans principaux d'inertie ( $v$  dans  $(x, y)$  et  $w$  dans  $(x, z)$ ) et torsionnel ( $\theta_x$ ). La matrice de Hooke peut s'écrire (section droite admise doublement symétrique)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

où  $G$  est le module de glissement et  $J$  la constante de torsion (liés par la relation  $T = GJ\chi$  avec  $\chi = d\theta_x/dx$ ; TGC vol. 2, sect. 8.1). Il y a six inconnues à chaque nœud, soit douze degrés de liberté au total,

$$\mathbf{d}^T = \{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \mid u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \} \quad (9.10)$$

et la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  est de dimension  $12 \times 12$  (chap. 15).

**9.3 Poutre de Timoshenko (cas plan)**

Dans le champ des déplacements

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \alpha(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x)\mathbf{d} \quad (9.11)$$

on interpole indépendamment les trois composantes  $u$  (axial),  $v$  (transversal) et  $\alpha$  (rotation). Les déformations (§ 8.7.1)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/dx \\ dv/dx - \alpha \\ -d\alpha/dx \end{Bmatrix} = \mathbf{B}(x)\mathbf{d} \quad (9.12)$$

et la loi de comportement (8.37)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GB & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \kappa \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (9.13)$$

fournissent les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ .

**Application 9.1**

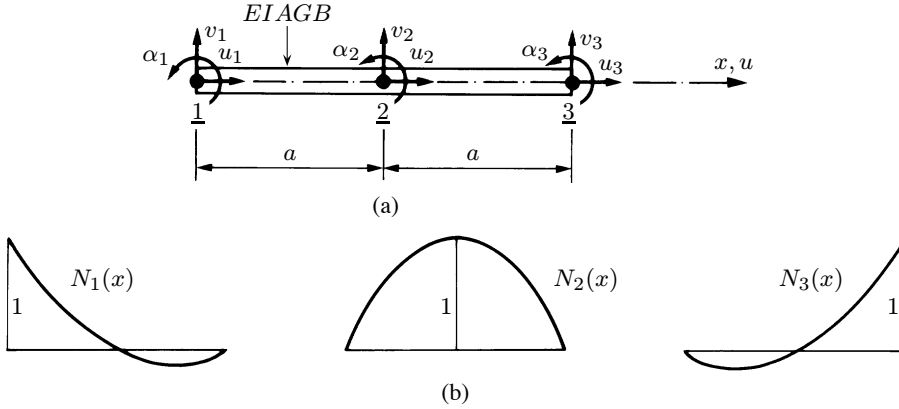
Pour un élément à trois nœuds (fig. 9.3a), comportant neuf inconnues,

$$\mathbf{d}^T = \{ u_1 \quad v_1 \quad \alpha_1 \mid u_2 \quad v_2 \quad \alpha_2 \mid u_3 \quad v_3 \quad \alpha_3 \} \quad (9.14)$$

on essaie un polynôme quadratique, le même pour les trois composantes  $u$ ,  $v$  et  $\alpha$

$$\begin{aligned} u(x) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 = u_1N_1(x) + u_2N_2(x) + u_3N_3(x) \\ v(x) &= b_1 + b_2x + b_3x^2 = v_1N_1(x) + v_2N_2(x) + v_3N_3(x) \\ \alpha(x) &= c_1 + c_2x + c_3x^2 = \alpha_1N_1(x) + \alpha_2N_2(x) + \alpha_3N_3(x) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Les trois fonctions d'interpolation sont des paraboles (fig. 9.3b) et on vérifie sans peine que les critères de convergence sont remplis.



**Fig. 9.3** Poutre quadratique avec effet de l'effort tranchant (Timoshenko): (a) élément fini et ses neuf degrés de liberté; (b) diagrammes des fonctions d'interpolation.

A partir de (8.32), on voit que le moment de flexion  $M$  varie linéairement, tandis que l'effort tranchant  $V$  est ... quadratique ! Ce fait souligne une anomalie de cet élément : interpoler  $\alpha$  avec le même degré que  $v$  fait prendre, artificiellement, une *importance disproportionnée* à la *déformation d'effort tranchant*.

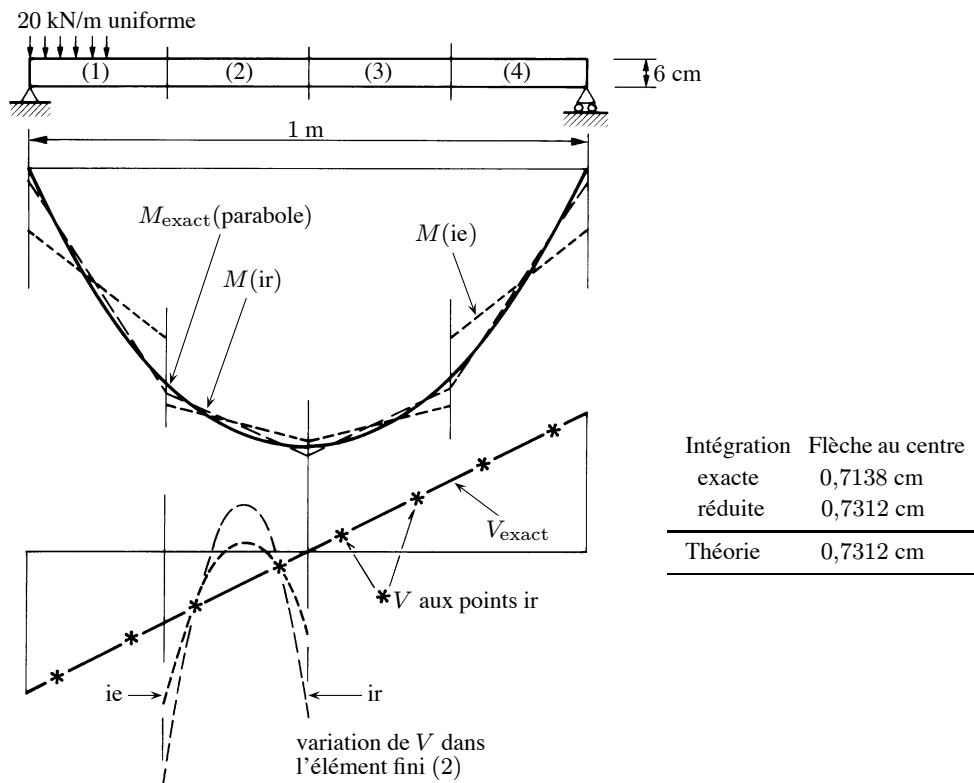
Cette anomalie est due au choix inadéquat du champ des déplacements, ce qui conduit à divers problèmes numériques. Son effet est le suivant : lorsqu'on applique l'élément de la figure 9.3 aux poutres minces (fig. 9.4), où l'effet de  $V$  devient négligeable ( $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow dv/dx$ ), on observe qu'un maillage usuel est de loin trop rigide ; on ne converge convenablement qu'avec de petits éléments. Dans la matrice de rigidité, l'apport de l'effort tranchant est trop important par rapport à celui du moment de flexion, et crée une *surrigidité* de l'élément fini.

### Verrouillage

Le phénomène de surrigidité s'appelle **verrouillage** (anglais : *locking*). Il ne compromet pas la convergence vers la solution exacte, mais peut la rendre intolérablement lente. Il provient de ce que les divers termes de certaines composantes de la *déformation* n'ont pas, pour l'interpolation choisie, tous le même degré (sect. 7.3, rem. 7.6).

Pour l'application 9.1, le glissement moyen  $\beta$  dans (9.12) comporte un terme linéaire ( $dv/dx$ ) et l'autre quadratique ( $\alpha$ ) ; avec (9.15),

$$\beta = b_2 + 2b_3x - c_1 - c_2x - c_3x^2$$



**Fig. 9.4** Poutre simple uniformément chargée (ie = intégration exacte ; ir = intégration réduite) ; section rectangulaire  $6 \times 1$  ;  $A = 6 \text{ cm}^2$ ,  $B = 5 \text{ cm}^2$ ,  $I = 18 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0,3$  ; quatre éléments quadratiques ; comparaison de l'intégration exacte avec l'intégration réduite (2 points de Gauss).

Dans une poutre mince,  $\beta \rightarrow 0$  pour tout  $x$  ; les termes constants et linéaires peuvent se détruire (il suffit que  $b_2 = c_1$  et  $2b_3 = c_2$ ) ; pour annuler le terme quadratique, il faut poser  $c_3 = 0$ . Or la courbure dans (9.12) vaut

$$\kappa = -\frac{d\alpha}{dx} = -c_2 - 2c_3x$$

et l'annulation de  $c_3$  la réduit à une constante : *le comportement flexionnel est donc artificiellement raidi lorsque le glissement cherche à disparaître.*

On peut combattre le verrouillage de diverses manières, par exemple en interpolant  $v$  avec un polynôme dont le degré est d'une unité supérieur à  $\alpha$ , ou en employant l'intégration réduite (fig. 9.4).

### Remarques

**9.2** On peut développer une poutre de Timoshenko dans l'espace en suivant les mêmes lignes que pour la poutre de Bernoulli (rem. 9.1).

**9.3** Les éléments finis de poutre de Timoshenko n'exigeant qu'une continuité  $C^0$ , on peut leur appliquer la transformation isoparamétrique (sect. 7.5) pour créer des poutres courbes (§ 9.5.4).

## 9.4 Plaque de Kirchhoff

### 9.4.1 Introduction

La forme et les conditions d'appui des plaques rencontrées dans la majorité des problèmes pratiques rendent souvent difficile, voire impossible, l'utilisation des méthodes classiques de résolution, analytiques (par exemple les séries doubles de Navier ou simples de Lévy, pratiquement limitées aux plaques rectangulaires ; TGC vol. 5) ou numériques (différences finies, avec, comme difficulté majeure, la représentation des conditions aux limites). Seule la méthode des éléments finis est susceptible de résoudre sans grande difficulté les problèmes de plaque de forme, d'appui et de mise en charge quelconques.

Le calcul des plaques est du plus haut intérêt pour l'ingénieur, puisque les *dalles* constituent l'essentiel de la structure des bâtiments (radier, plancher, toiture ; fig. 9.5) et des ponts (tablier). Or la mise au point d'éléments finis conformes de plaque de Kirchhoff a été, pendant longtemps, un défi lancé aux chercheurs et continue encore aujourd'hui à susciter beaucoup d'intérêt.

Tout le problème réside dans la continuité  $C^1 \dots$

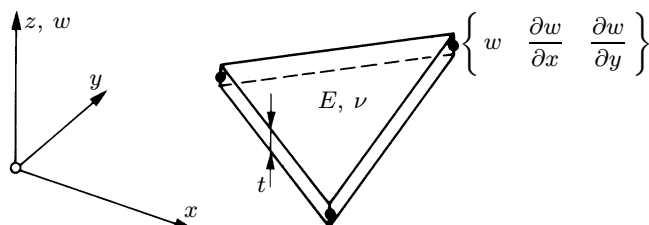


**Fig. 9.5** Bâtiment administratif : les planchers sont des dalles en béton armé solidaires des sommiers métalliques. (Source : *Construire en acier 2*, Centre Suisse de la Construction Métallique, Zürich, 1962.)

Les inconnues nodales d'un élément fini de plaque mince (fig. 9.6) sont la flèche  $w$  et les pentes  $\partial w / \partial x$  et  $\partial w / \partial y$  (ou  $\partial w / \partial n$  et  $\partial w / \partial s$  en axes locaux) (§ 8.5.2). L'approximation, polynomiale ou par fonctions d'interpolation, porte sur le seul déplacement transversal

$$w(x, y) = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{p} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} \quad (9.16)$$

(où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{N}$  sont des matrices lignes). La matrice  $\mathbf{B}$  s'en déduit par (8.18) et la matrice  $\mathbf{D}$  est donnée par (8.19).

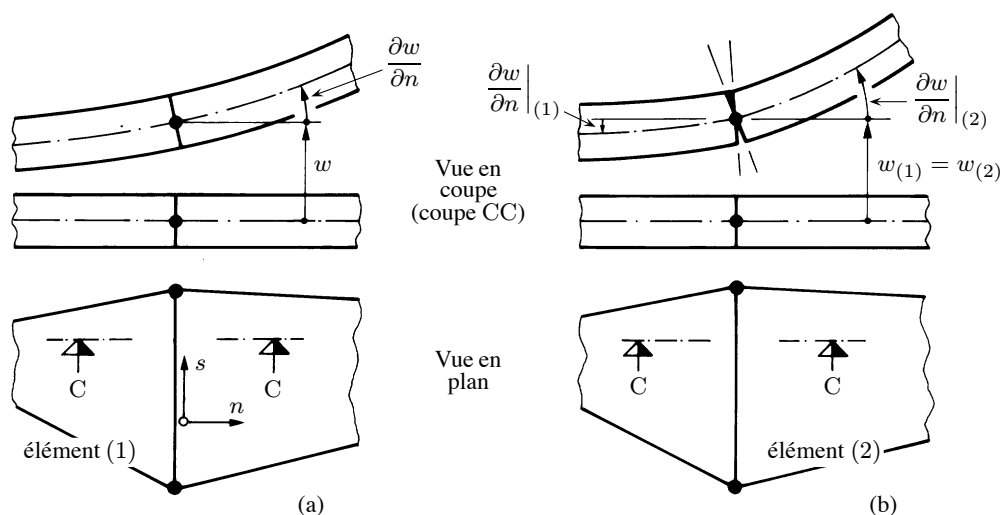


**Fig. 9.6** Élément fini de plaque de Kirchhoff.

### 9.4.2 Critères de convergence

L'ordre  $m = 2$  des dérivées de la forme faible (8.23) réclame

- une continuité  $C^1$  touchant la flèche  $w$  et la pente normale  $\partial w / \partial n$  aux frontières,
- un polynôme au moins complet au degré 2.



**Fig. 9.7** Pente normale : (a) continue ; (b) discontinue.

Un développement polynomial débutant par

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (9.17)$$

satisfait au critère de complétude et à son interprétation physique, puisqu'il peut représenter

- les modes rigides de translation selon  $z$  et de rotation autour de  $x$  et  $y$

$$w = a_1 \quad w = a_3y \quad w = a_2x \quad (9.18)$$

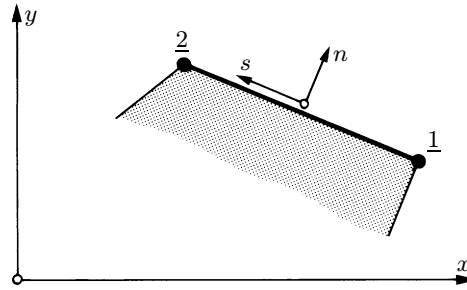


- les courbures constantes

$$\psi_x = -2a_4 \quad \psi_y = -2a_6 \quad \chi = -2a_5 \quad (9.19)$$

La continuité de la flèche  $w$ , assurant simultanément celle de la pente tangentielle  $\partial w / \partial s$ , est ordinairement aisée à réaliser. Par contre, *la continuité de la pente normale  $\partial w / \partial n$  (fig. 9.7) pose de très difficiles problèmes.*

Examinons la continuité le long du bord 1-2 d'un élément de plaque (fig. 9.8). Si le polynôme d'interpolation de  $w$  est complet et de degré  $p$ , la flèche du bord sera de degré  $p$  également, tandis que les pentes seront de degré  $p - 1$ . La conformité de la flèche (incluant celle de la pente tangentielle) exige  $p + 1$  degrés de liberté, celle de la pente normale  $p$ .



**Fig. 9.8** Bord d'un élément de plaque.

On peut alors vérifier que le nombre de degrés de liberté nécessaire pour assurer la conformité  $C^1$  aux frontières dans les éléments finis de forme simple (triangle, rectangle, quadrilatère), *ne concorde pas* avec le nombre de paramètres  $a_i$  d'une interpolation polynomiale de degré raisonnablement élevé. Il est donc impossible de créer un élément conforme à partir d'un polynôme simple.

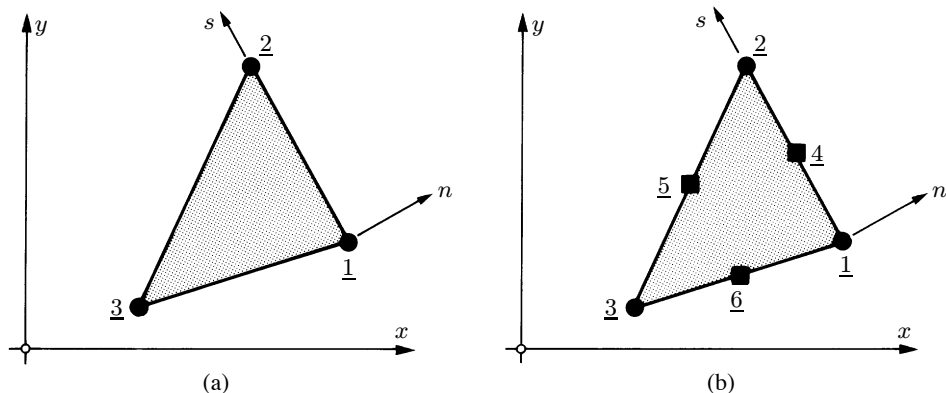
### Application 9.2 : élément triangulaire cubique

Pour un élément fini triangulaire, on choisit, comme nœuds à trois degrés de liberté, les trois sommets 1, 2 et 3 (fig. 9.9). Avec une interpolation du troisième degré ( $p = 3$ )

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 \quad (9.20)$$

la flèche et les deux pentes, le long d'une quelconque frontière, varient respectivement de manière cubique et quadratique.

La conformité le long du bord 1-2 est assurée pour la flèche et la pente tangentielle grâce aux quatre  $(p + 1)$  degrés de liberté  $w$  et  $\partial w / \partial s$  des nœuds 1 et 2, qui définissent une cubique comme pour une poutre de Bernoulli. Il ne reste alors que deux degrés de liberté,  $\partial w / \partial n$  en 1 et 2, pour définir la pente normale qui, quadratique, nécessite en réalité trois  $(p)$  paramètres... *La conformité de la pente normale n'est donc pas réalisée.*



**Fig. 9.9** Élément de plaque mince (● nœuds sommets : trois inconnues  $\{w \quad \partial w/\partial x \quad \partial w/\partial y\}$  ; ■ nœuds médians : une seule inconnue  $\{\partial w/\partial n\}$ ) : (a) élément à neuf degrés de liberté (non conforme) ; (b) élément à douze degrés de liberté (pas de polynôme d'interpolation complet disponible).

Pour la garantir, il faut ajouter, à mi-frontière, un nœud à une inconnue  $\partial w/\partial n$  (nœuds 4, 5 et 6 ; fig. 9.9b). L'élément a alors six nœuds et  $n_d^e = 12$  degrés de liberté, *mais le champ cubique (9.20) ne compte que 10 termes ( $n_p = 10$ )...*

### Conclusion

On rencontre une difficulté majeure : le nombre de paramètres de l'interpolation ne peut être le même que le nombre de degrés de liberté assurant la conformité ( $n_p \neq n_d^e$ ). Cette difficulté est due au fait que *la pente n'est pas indépendante de la flèche* (mais lui est liée par dérivation) ; ainsi, le nombre de paramètres nécessaire à assurer la continuité de cette pente est-il imposé, une fois choisi celui de la flèche.

Pour échapper à ce problème, on peut :

- créer un macroélément ;
- admettre une certaine surcompatibilité ;
- admettre une certaine non-conformité (convergente) ;
- employer un autre modèle (mixte, hybride, équilibre).

### 9.4.3 Macroélément

Un *macroélément* est un élément fini obtenu par composition de plusieurs autres.

Par exemple, on peut, à l'aide de quatre triangles, construire un quadrilatère dont les quatre régions sont délimitées par les diagonales (fig. 9.10). Dans le système d'axes obliques de ces deux diagonales, on interpole par un champ cubique complet (10 paramètres) dans chaque triangle successivement.

On peut montrer que, des quarante paramètres (quatre triangles à dix paramètres), il n'en reste que seize indépendants, après avoir exprimé la continuité le long des diagonales : c'est exactement le nombre des inconnues nodales nécessaires pour assurer la conformité sur les quatre bords du quadrilatère.

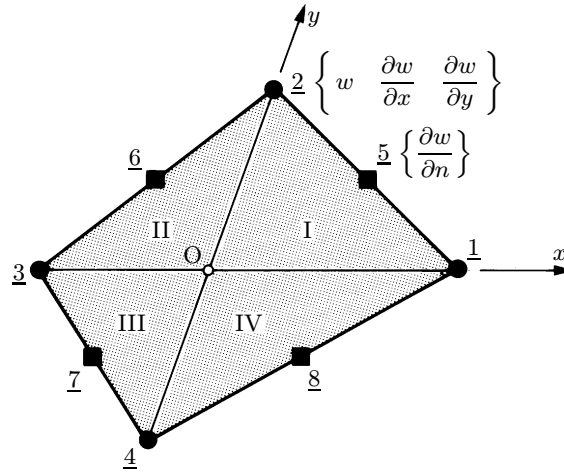


Fig. 9.10 Macroélément quadrilatéral conforme.

#### 9.4.4 Élément surcompatible

En choisissant des degrés de liberté *d'ordre supérieur* (dérivées des degrés de liberté usuels), introduisant une certaine surcompatibilité (§ 6.3.1), on accroît le nombre des degrés de liberté nœuds : on peut alors avoir concordance entre  $n_p$  et  $n_d^e$ .

Pour les plaques, ces degrés de liberté surcompatibles sont les deux courbures  $\psi_x, \psi_y$  et la torsion  $\psi_{xy}$ . Ajoutés aux inconnues standard du triangle de la figure 9.9(b), aux trois sommets, on obtient un triangle à vingt et un degrés de liberté (fig. 9.11), ce qui est précisément le nombre de termes d'un polynôme complet du cinquième degré en  $x$  et  $y$  (fig. 7.4).

Cet élément est conforme (ex. 9.8.3) et, vu sa surcompatibilité, les moments aux sommets du triangle sont continus.

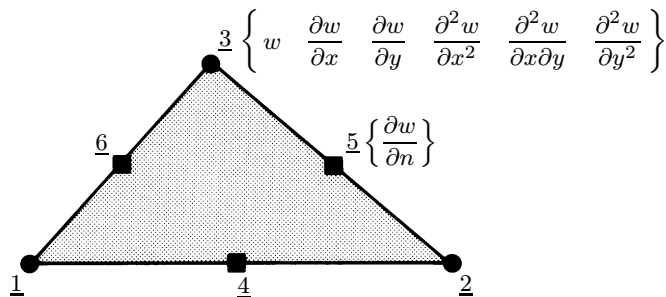


Fig. 9.11 Élément triangulaire conforme surcompatible.

### 9.4.5 Élément non conforme

Un élément non conforme doit satisfaire au *patch test* pour être convergent (sect. 5.3). La difficulté à réaliser la continuité  $C^1$  a poussé les chercheurs vers la non-conformité, d'autant plus que beaucoup d'éléments non conformes convergents donnent de bons résultats déjà pour des maillages assez grossiers. Physiquement, cela provient de l'assouplissement de l'assemblage dû aux discontinuités naissant aux frontières ; si cet assouplissement reste modéré, il peut compenser de manière heureuse l'excès de rigidité du modèle déplacement.

#### Application 9.3 : élément triangulaire

Pour contourner la difficulté liée à l'élément triangulaire de l'application 9.2, plusieurs tentatives ont été entreprises (1962-1965). On a, par exemple, sacrifié la continuité de la pente normale, pour essayer de créer un élément non conforme, en abandonnant les nœuds médians ; il reste, aux trois sommets, neuf inconnues (fig. 9.9a) et comme ce nombre ne concorde pas avec celui des paramètres de (9.20), on a contracté l'interpolation en écrivant

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3 \quad (9.21)$$

Mais le terme contracté  $a_8(x^2y + xy^2)$  détruit la symétrie ou, plus généralement, l'isotropie géométrique (par exemple, il s'annule pour  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -y$ , mais non pour  $x = y$ , ce qui peut conduire à une matrice  $\mathbf{C}$  singulière) : l'élément obtenu échoue face au *patch test* et ne garantit pas la convergence vers la solution exacte.

C'est en 1988 qu'on a trouvé les trois bons modes (quartiques) attachés aux paramètres  $a_7$  à  $a_9$  de (9.21), conduisant à un élément non conforme convergent (*patch test* réussi) à trois nœuds et neuf degrés de liberté.

#### Application 9.4 : élément rectangulaire

En chacun des quatre nœuds d'un élément rectangulaire (fig. 9.12), on introduit trois inconnues, la flèche et les deux pentes. L'élément a douze degrés de liberté et on essaie une interpolation polynomiale incomplète, mais localement symétrique, du quatrième degré

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (9.22)$$

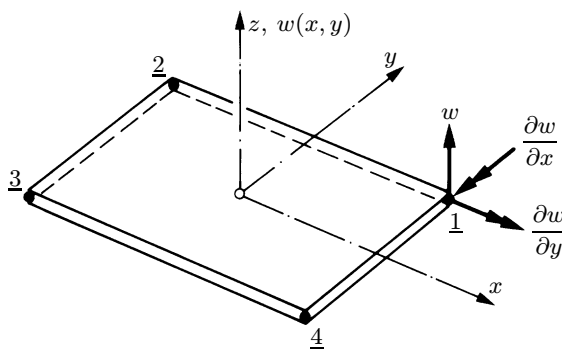


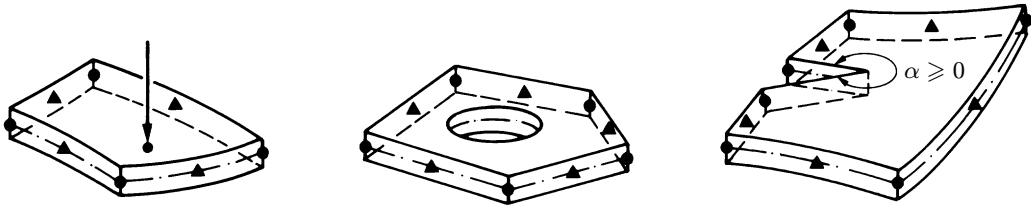
Fig. 9.12 Élément rectangulaire non conforme à quatre nœuds.

Les termes quartiques sont tels que, le long des frontières de l'élément ( $x = \text{cste}$ ,  $y = \text{cste}$ ), la flèche varie cubiquement (et la pente associée quadratiquement). Sur un bord, cette flèche, définie par quatre degrés de liberté (flèche et pente tangentielle aux deux nœuds), garantit la conformité. Il ne reste alors que deux degrés de liberté (pente normale aux deux nœuds), insuffisants à assurer la conformité de la pente normale qui, elle, varie cubiquement.

L'élément est non conforme, mais passe avec succès le *patch test*. Il est donc convergent.

#### 9.4.6 Modèles mixtes, hybrides ou équilibres

On peut construire des éléments finis de plaque mince convergents du modèle mixte, hybride ou équilibre (sect. 4.2). Les plus performants sont les éléments hybrides-Trefftz (fig. 9.13) qui peuvent fournir, au niveau des moments, des résultats de la même qualité (précision) qu'au niveau des déplacements et reproduire fidèlement, sans raffinement du maillage, diverses singularités ou concentrations des efforts intérieurs, dues aux charges ou à la géométrie.

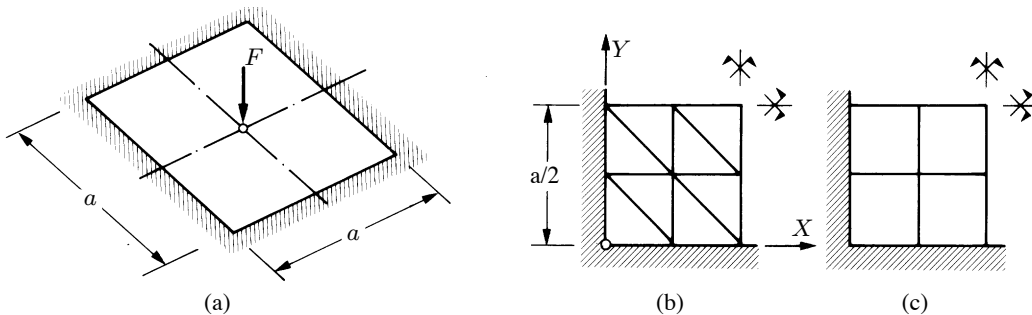


**Fig. 9.13** Éléments hybrides-Trefftz de plaque, du type  $p$  (sect. 5.1.3) : aux angles, degrés de liberté usuels ( $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) et, au milieu des côtés, nombre variable de paramètres ; grâce au champ interne, on peut tenir compte des forces concentrées, trous ou entailles (avec concentration ou singularité des moments).

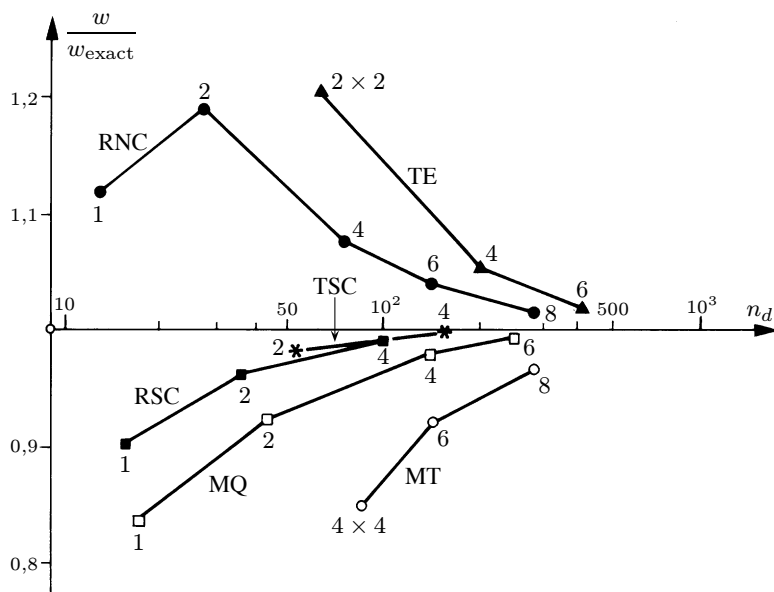
#### 9.4.7 Comparaison

Un test classique de plaque mince fléchie est l'étude d'une plaque carrée, encastree, sous charge concentrée centrée ; par symétrie, on peut n'étudier qu'un quart de plaque, avec divers maillages et éléments (fig. 9.14).

La figure 9.15 montre la convergence de la flèche au centre, en fonction du nombre de degrés de liberté. La figure 9.16 donne le diagramme du moment d'encastrement pour les maillages les plus fins.



**Fig. 9.14** Test de la plaque carrée encastree : (a) géométrie et charge ; (b) maillage  $2 \times 2$  d'éléments triangulaires ; (c) maillage  $2 \times 2$  d'éléments carrés (sur un quart de la plaque).



### La MEF et les plaques

Le premier élément de plaque de Kirchhoff, de forme rectangulaire (fig. 9.12), a été développé dès 1960 (Clough et Adini, Berkeley). Divers éléments triangulaires non conformes (fig. 9.9) furent ensuite proposés (1961-65) ; certains ne convergeaient pas, ou pour certaines formes seulement, et d'autres, pires, convergeaient vers des solutions fausses... Ces errements conduisirent à l'étude, puis à l'énoncé des critères de convergence et à la mise au point du *patch test* (Irons, Swansea, 1965). Le premier élément conforme fut un macroélément quadrilatéral (fig. 9.10), créé en 1964 (Fraeijs de Veubeke et Sander, Liège) ; la NASA l'utilisa dans le calcul du LEM des missions APOLLO.

La course à la mise au point d'un élément triangulaire conforme issu d'une seule interpolation polynomiale complète s'acheva en 1968 par la publication d'un triangle surcompatible (fig. 9.11), simultanément dans au moins cinq sources indépendantes (Bell, Norvège ; Visser, Pays-Bas ; Argyris, Fried et Scharpf, Allemagne et Angleterre ; Bosshard, Suisse ; Cowper, Kosko, Lindberg et Olson, Canada).

Le premier élément de type Mindlin fut un triangle présenté en 1965 (Melosh, USA).

## 9.5 Plaque de Mindlin

### 9.5.1 Introduction

La continuité  $C^0$  est de loin plus simple à réaliser que la continuité  $C^1$  ; elle offre un grand choix pour interpoler et accepte la transformation isoparamétrique (chap. 7). Devant de tels arguments, il n'est pas étonnant que la recherche relative aux éléments finis de plaque de Mindlin ait connu un grand développement (1970-95). Utilisant des degrés de liberté de même nature que dans la théorie de Kirchhoff, et offrant l'effort tranchant en sus, ces éléments sont devenus très populaires chez les ingénieurs.

Mais ils ont leurs difficultés numériques propres. En particulier, le phénomène de verrouillage est si virulent qu'il a fallu près de vingt ans pour le maîtriser.

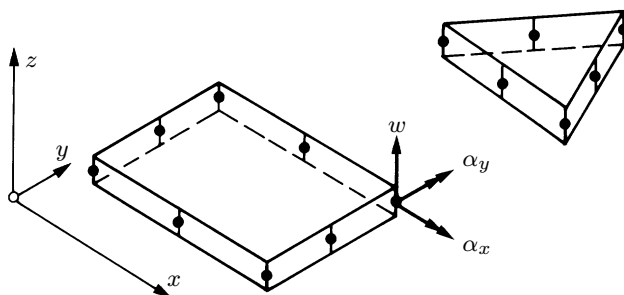
Aujourd'hui, un équilibre s'est établi entre les éléments de type Mindlin et ceux de type Kirchhoff.

### 9.5.2 Interpolation et conditions aux limites essentielles

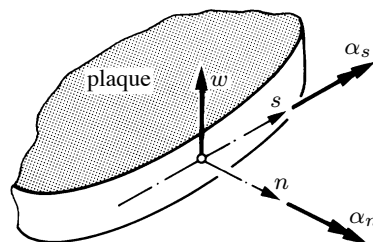
Pour développer un élément de plaque de Mindlin, on interpole indépendamment chacun des trois champs  $w$ ,  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \alpha_x(x, y) \\ \alpha_y(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} \quad (9.23)$$

Les inconnues nodales sont la flèche et les deux rotations de la normale (fig. 9.17). Elles permettent d'assurer aisément la continuité  $C^0$  de chacun des champs aux frontières, ce qui garantit la conformité de l'élément. La matrice  $\mathbf{B}$  s'obtient par (8.39) et la matrice  $\mathbf{D}$  est donnée par (8.40).



**Fig. 9.17** Éléments rectangulaire et triangulaire quadratiques de plaque d'épaisseur modérée.



**Fig. 9.18** Bord et axes locaux.

Les conditions aux limites essentielles les plus courantes sont, le long d'un bord d'axes locaux  $(n, s)$  (fig. 9.18),

- encastrement

$$w = \bar{w} \quad \alpha_n = \bar{\alpha}_n \quad \alpha_s = \bar{\alpha}_s \quad (9.24)$$

- appui *doux*

$$w = \bar{w} \quad (9.25)$$

- appui *dur*

$$w = \bar{w} \quad \alpha_n = \bar{\alpha}_n \quad (9.26)$$

où les quantités imposées (surlignées) sont, le plus souvent, nulles.

Les deux dernières conditions, relatives à un bord simplement appuyé, sont voisines. La condition (9.25) est généralement satisfaisante pour tous les cas pratiques. La condition plus restrictive (9.26) correspond, à la limite, à un bord appuyé d'une plaque mince de Kirchhoff ; elle est donc plus rigide.

### 9.5.3 Verrouillage

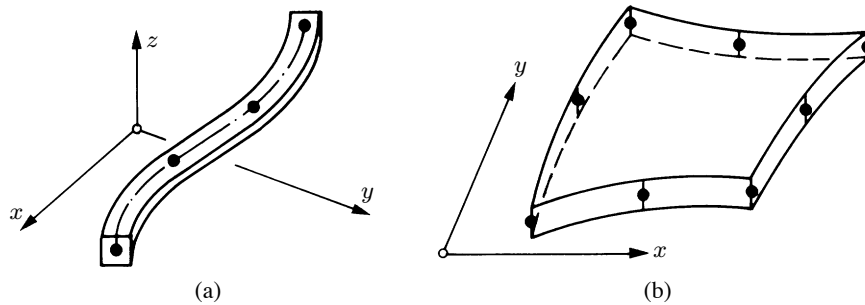
A nouveau, de sérieuses difficultés peuvent apparaître lorsqu'on tente de résoudre une plaque mince. Le verrouillage lié aux efforts tranchants de plaque et provenant des ordres de dérivation inégaux dans l'expression des glissements moyens  $\beta_x$  et  $\beta_y$  de (8.39), est beaucoup plus difficile à combattre que dans les poutres, au point que l'intégration numérique réduite ne suffit pas pour l'atténuer (sauf exception). On doit donc s'assurer, en pratique, des dispositions prises pour assouplir l'élément, qui, en particulier, ne doivent pas compromettre la convergence (attention aux mécanismes ; § 7.6.4).

Le problème est réellement délicat et on peut affirmer que *la plupart des éléments de plaque de Mindlin développés avant 1990 peuvent présenter des défauts qui rendent leur utilisation pratique hasardeuse.*



### 9.5.4 Versions isoparamétriques

Un *avantage* incontestable des éléments  $C^0$ , tant de Timoshenko d'ailleurs que de Mindlin, est que la *transformation isoparamétrique leur est directement applicable*. On crée ainsi sans difficulté des poutres courbes, planes et spatiales, et des éléments de plaque à bords courbes (fig. 9.19).



**Fig. 9.19** Éléments structuraux courbes : (a) élément de poutre cubique (plan ou spatial) ; (b) élément de plaque à bords paraboliques.

#### Remarque

**9.4** Pour les éléments de coque, voir le paragraphe 9.7.2.

## 9.6 Éléments de plaque fiables

Aujourd'hui, il existe trois groupes d'éléments de plaque de confiance, décrits brièvement ci-après. Etablir les caractéristiques  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{f}$  de ces éléments nécessite des développements le plus souvent longs et astucieux, qui sortent du cadre de cet ouvrage (cf. bibliographie).

#### Éléments de Kirchhoff et Mindlin discrets

Sur la base d'un élément de type Mindlin ordinaire (sect. 9.5), on impose des conditions en certains points, appelées pour cette raison conditions *discrètes*, de façon à obtenir une solution de Kirchhoff ou une solution de Mindlin sans verrouillage.

Les premiers éléments de ce type (vers 1980) furent un triangle (baptisé DKT : *discrete Kirchhoff triangle*) et un quadrilatère (DKQ) convergeant vers la solution des plaques minces. Par la suite apparurent des éléments semblables pour les plaques d'épaisseur modérée.

#### Éléments de Mindlin à cisaillement maîtrisé

Ces éléments évitent tout verrouillage par une interpolation adéquate des déformations tangentielles associées aux efforts tranchants de plaque. Ils sont de ce fait souvent du type mixte (§ 4.2.4) ; après condensation des paramètres internes, ils ont l'aspect d'un modèle déplacement.

#### Éléments hybrides-Trefftz

Ils sont construits comme ceux décrits précédemment (§ 4.2.5 et 9.4.6) et présentent les mêmes qualités (en particulier, excellente précision des moments et efforts tranchants). Ils sont du type Kirchhoff ou Mindlin.

## Bilan

Ces divers éléments ont les qualités générales suivantes :

- construits sur la théorie de Kirchhoff, ils convergent vers la solution de Kirchhoff ; basés sur la théorie de Mindlin, ils convergent vers la solution des plaques d'épaisseur modérée et tendent vers la solution des plaques minces si l'épaisseur tend vers zéro ; DKT et DKQ convergent vers la solution de Kirchhoff ;
- ils évitent tous les pièges ou défauts éventuels liés à l'intégration numérique réduite (mécanismes) et ne comportent pas d'astuces numériques destinées à court-circuiter le verrouillage ;
- ils n'ont, pour la plupart, que des nœuds aux sommets et trois inconnues par nœud, la flèche et les deux rotations ; la flèche varie donc cubiquement, la pente ou rotation tangentielle quadratiquement et la pente ou rotation normale *linéairement* (fig. 9.20).

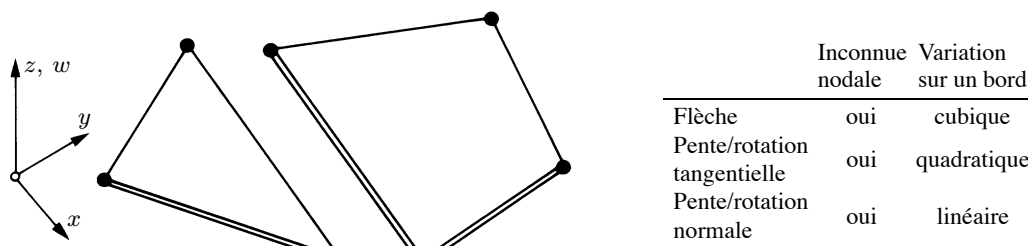


Fig. 9.20 Éléments de plaque courants aujourd'hui.

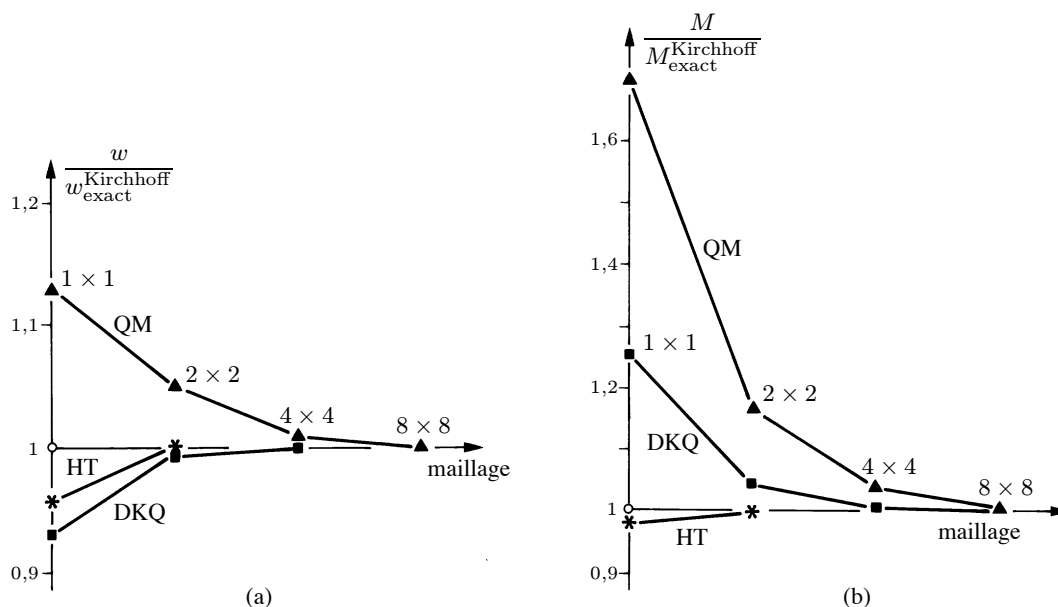


Fig. 9.21 Plaque carrée mince ( $t/a = 1/100$ ), appuyée selon (9.26) (appui dur), uniformément chargée ; maillage sur un quart de plaque par des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds et douze degrés de liberté (DKQ : Kirchhoff discret ; QM : Mindlin mixte ; HT : hybride-Trefftz) : (a) convergence de la flèche au centre ; (b) convergence du moment au centre.

La figure 9.21 montre la convergence de trois d'entre eux dans le problème d'une plaque carrée appuyée uniformément chargée (même notation qu'à la figure 9.14).

#### Application 9.5 : principe de l'élément DKT

On part d'un triangle de Mindlin à six nœuds, tout quadratique (fig. 9.22a), d'inconnues nodales  $\mathbf{d}_i^T = \{w \quad \alpha_x \quad \alpha_y\}_i$ ,  $i = \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{6}$ ; l'élément comporte 18 degrés de liberté. On lui impose alors 9 conditions de Kirchhoff discrètes

- aux sommets

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- au milieu des côtés

$$\gamma_{sz} = 0$$

ce qui réduit à 9 le nombre d'inconnues disponibles. En conséquence, on choisit, le long de chaque bord,

- la flèche  $w$  cubique,
- la rotation normale  $\alpha_s$  linéaire,

car il faut 9 paramètres pour garantir la conformité aux frontières au sens de la théorie de Kirchhoff, en prenant comme inconnues nodales, en chaque sommet (fig. 9.22b),

$$\mathbf{d}_i^T = \{w \quad \alpha_x \quad \alpha_y\}_i, \quad i = \underline{\text{I}}, \underline{\text{II}}, \underline{\text{III}}$$

Il est alors possible d'exprimer explicitement le champ des rotations, ce qui permet de calculer la matrice de rigidité. Dans ce calcul, on ignore la contribution d'effort tranchant et, avec l'hypothèse de Kirchhoff satisfaite tout le long de la frontière, on montre que l'élément converge vers la solution des plaques minces ( $\alpha_x \rightarrow \theta_x = \partial w / \partial y$  et  $\alpha_y \rightarrow \theta_y = -\partial w / \partial x$  quand  $t \rightarrow 0$ ).

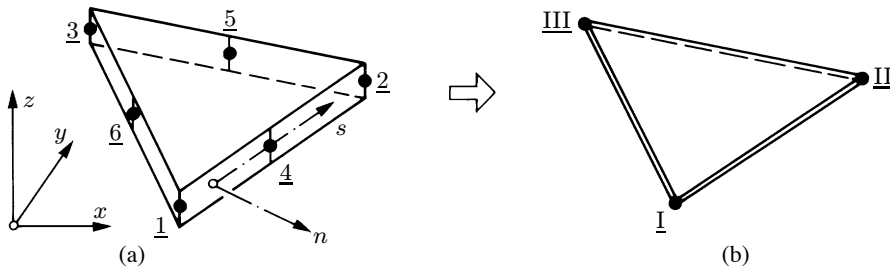


Fig. 9.22 Passage du Mindlin quadratique au DKT cubique.

## 9.7 Élément de plaque-membrane et élément de coque

### 9.7.1 Élément plan de coque

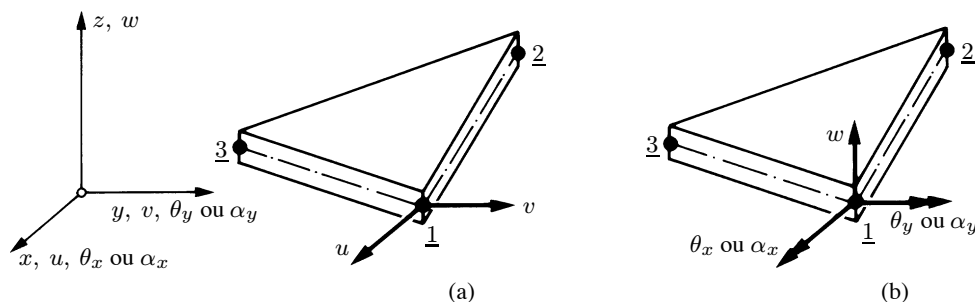
Considérons, pour fixer les idées, un élément fini plan triangulaire, situé dans le plan  $(x, y)$  de ses axes locaux  $(x, y, z)$  (fig. 9.23). On peut définir, pour cet élément, à partir des notions qui précèdent,

- un état plan de contrainte, d'inconnues cinématiques  $u, v$  en chaque nœud ; cet état est dit *membranaire*, car tout se passe dans le seul plan  $(x, y)$  de l'élément ;
- un état *flexionnel* de plaque, de degrés de liberté  $w, \alpha_x$  ou  $\theta_x, \alpha_y$  ou  $\theta_y$  en chaque nœud, où tout dépend du comportement transversal (hors plan) de l'élément.

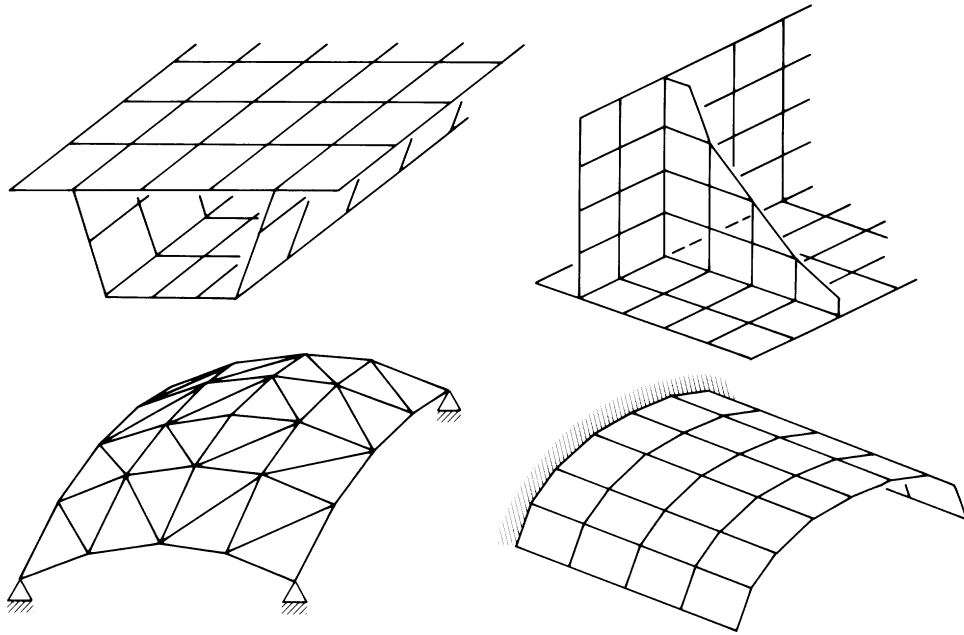
L'état membranaire étant indépendant de l'état flexionnel (les degrés de liberté de membrane n'affectent pas ceux de flexion, et réciproquement), on peut *combiner* ces deux états (sect. 2.5) afin de créer un élément fini spatial, simultanément plaque et membrane, appelé *élément plaque-membrane* ou *élément plan de coque*. Il permet de résoudre les structures tridimensionnelles telles que (fig. 9.24)

- les *structures* plissées, assemblage de panneaux plans, comme les ponts en caisson, toitures plissées, murs de soutènement, culées de ponts, etc. ;
- les *coques*, surfaces courbes approchées par un assemblage de facettes planes.

Cette démarche illustre la force des éléments finis : à l'aide de deux cas très simples (état plan de contrainte et flexion de plaque) combinés, on crée un outil capable de calculer des structures d'une étonnante complexité. Il est clair cependant que quelques nouveaux problèmes apparaissent ; par exemple, pour les coques, on introduit une *approximation géométrique* (facettes planes).



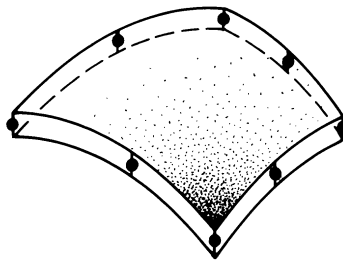
**Fig. 9.23** Construction d'un élément fini plaque-membrane par combinaison (a) d'un état plan de contrainte, ou état membranaire, avec (b) un état flexionnel de plaque (de Kirchhoff ou Mindlin).



**Fig. 9.24** Structures plissées et coques discrétisées par des éléments plans de coque.

### 9.7.2 Élément courbe de coque

En procédant toujours par combinaison, mais en adoptant Mindlin pour l'état flexionnel, l'élément reste du type  $C^0$ . Considéré comme élément origine, on peut lui appliquer la transformation isoparamétrique pour le courber en 3D. On crée ainsi un élément fini de coque (fig. 9.25), sans même invoquer une théorie de coque.



**Fig. 9.25** Élément quadratique de coque, combinaison des éléments des figures 7.10 et 9.17, avec application de la transformation isoparamétrique.

Les éléments de même degré sur une frontière étant exactement conformes, on traite sans difficulté des structures compliquées comme des coques nervurées, des intersections de coques, des ponts courbes, etc. (fig. 9.26).

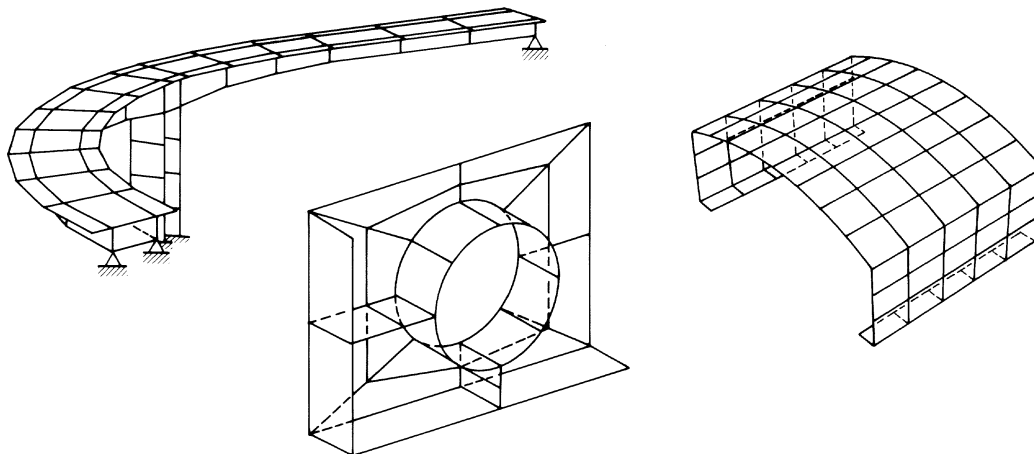


Fig. 9.26 Structures diverses du type coque.

### Remarque

**9.5** La courbure due à la transformation isoparamétrique provoque une interaction entre les efforts normaux et les moments de flexion, qui est responsable d'un nouveau verrouillage, difficile à combattre.

### 9.7.3 Le sixième degré de liberté

Dans les axes locaux de l'élément (fig. 9.23), il y a, en accord avec la théorie des coques (TGC vol. 5), cinq inconnues par nœud : un degré de liberté n'est pas utilisé, la rotation de la normale au plan de l'élément autour d'elle-même ( $\theta_z$  ou  $\alpha_z$ ). Dans la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  d'un tel élément, le bloc matriciel du nœud  $\underline{1}$  est à l'image de la figure 9.27(a).

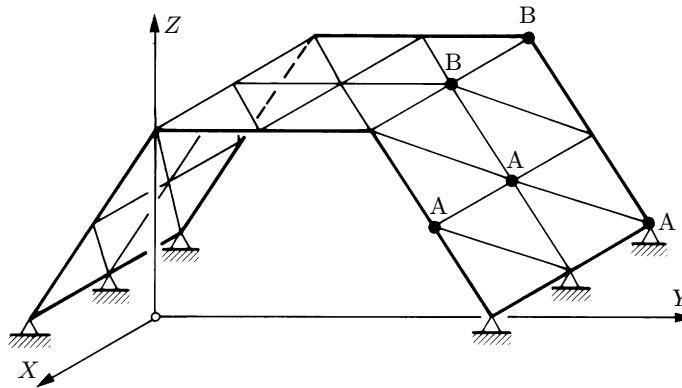
	$u$		état membranaire
	$v$		
	$w$		état flexionnel
	$\theta_x$ ou $\alpha_x$		
	$\theta_y$ ou $\alpha_y$		
(a)	$\theta_z$ ou $\alpha_z$	0	sixième degré de liberté

Fig. 9.27 Aspect d'un bloc matriciel d'un élément fini plaque-membrane : (a) après combinaison ;  
(b) en axes locaux 3D ( $x, y, z$ ).

Pour pouvoir travailler en 3D, où il y a six degrés de liberté nodaux dans le cas général, il faut faire une expansion de chaque bloc matriciel par l'adjonction d'une sixième ligne et d'une sixième colonne de zéros (fig. 9.27b). Après rotation des axes locaux aux axes globaux, les zéros disparaissent et chaque bloc matriciel semble plein, mais il est évident qu'une des composantes de rotation reste linéairement dépendante des deux autres. C'est le *problème du sixième degré de liberté* qui se présente, en pratique, comme suit.

Examinons le maillage d'une structure plissée (fig. 9.28). Deux cas peuvent se produire :

- tous les éléments entourant un nœud sont *dans le même plan* (nœuds A par exemple) ou ont un plan tangent commun (cas des coques) : alors, en ce nœud, *il n'y a pas de rigidité autour de la normale à ce plan* et il n'y a que cinq inconnues ;
- les éléments joignant un nœud ne sont pas tous dans un même plan (nœuds B) ; dans ce cas, il y a *trois rotations indépendantes* en un tel nœud, et six degrés de liberté.



**Fig. 9.28** Nœuds situés ou non dans un même plan ; A : nœuds à cinq degrés de liberté ;  
B : nœuds à six degrés de liberté

Dans le premier cas, le vecteur rotation se situe dans le plan du nœud et deux composantes suffisent à le définir ; dans le second cas, le vecteur rotation est quelconque (il est la résultante d'au moins deux vecteurs provenant de deux plans) et nécessite trois composantes pour être défini.

*Il est primordial de bien distinguer ces deux types de nœud et de savoir comment les programmes font cette distinction.*

### 9.7.4 Conclusion

Pour analyser les coques et structures plissées, il existe une troisième catégorie d'éléments, ceux directement issus d'une théorie de coque. Ils sont parmi les éléments finis les plus compliqués à formuler.

De plus, l'opération de modélisation et discrétisation des structures 3D à parois minces ou d'épaisseur modérée, formées de panneaux plans ou courbes, éventuellement couplées à des raidisseurs et des poutres, reste un exercice délicat. Une connaissance approfondie de la théorie, de la méthode des éléments finis et de certains problèmes (pièges) liés à la discrétisation tridimensionnelle est nécessaire.

L'ensemble de ces questions est abordé dans le volume 5 du TGC.

## 9.8 Exercices

**9.8.1** Pour l'élément de poutre de Bernoulli dans le plan (sect. 9.2) :

- 1) écrire le champ des déplacements sous forme matricielle (matrice **N** ; ne pas effectuer les dérivées des  $N_i$ ) ;
- 2) établir les deux composantes de la déformation, puis la relation matricielle correspondante (matrice **B** ; ne pas effectuer les dérivées des  $N_i$ ) ;
- 3) calculer deux termes de la matrice de rigidité **k** ( $k_{11}$  et  $k_{22}$  ou  $k_{11}$  et  $k_{33}$ ) ;
- 4) établir les formules donnant les efforts intérieurs  $N(x)$  et  $M(x)$ , puis  $N$ ,  $M_1$  et  $M_2$  (la formule (8.9) en est l'équivalent matriciel) ;
- 5) calculer le vecteur force **f** pour une charge uniforme de composantes  $\{q_x \quad q_y \quad m_z\}$ .

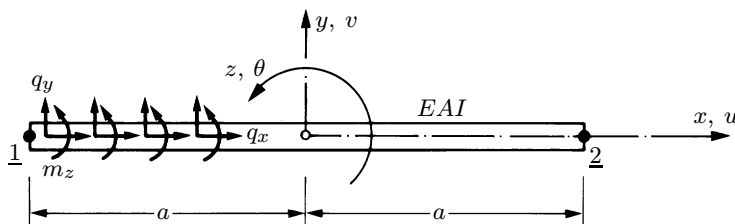


Fig. Ex. 9.8.1

**9.8.2** Pourquoi les ingénieurs ont-ils une préférence marquée pour les éléments de plaque suivants : nœuds situés aux seuls sommets (du triangle, du quadrilatère...), trois inconnues nodales – la flèche et les deux rotations – et flèche  $w$  cubique (fig. 9.20) ?

**9.8.3** On reprend le triangle de plaque mince du paragraphe 9.4.4 :

- 1) montrer qu'il est conforme ;
- 2) discuter les avantages et inconvénients de sa surcompatibilité.

**9.8.4** On envisage un élément rectangulaire de plaque mince et l'alternative suivante pour les degrés de liberté :

- 1) flèche et pentes en chaque sommet, pente normale au milieu des côtés ;
- 2) flèche, pentes et torsion ( $\psi_{xy}$ ) en chaque sommet.

Combien y a-t-il de degrés de liberté ? Essayer, pour  $w$ , les termes d'une interpolation bicubique de Lagrange (les modes en sont donnés dans la figure 7.9) et examiner le problème de la conformité aux frontières ; qu'a-t-on en plus de particulier dans le second cas ?

**9.8.5** On reprend l'élément de poutre quadratique de Timoshenko de l'application 9.1 (fig. Ex. 9.8.5 et fig. 9.3) :

- 1) donner la dimension et faire le partitionnement nodal de la matrice de rigidité **k** ;
- 2) donner l'équation des fonctions d'interpolation et écrire le champ des déplacements (matrice **N**) ;
- 3) donner la matrice **D** de la loi de Hooke et calculer les déformations (matrice **B**) ; observer le caractère répétitif de **N** et **B** (en liaison avec le partitionnement nodal) ;
- 4) calculer le premier bloc matriciel  $\mathbf{k}_{11}$  de **k**, attaché au nœud 1 (ne pas effectuer les intégrales, données ci-dessous) ; trouver le nombre de points d'intégration de Gauss nécessaire pour calculer les intégrales ; appliquer l'intégration numérique réduite et conclure sur son effet ;
- 5) trouver quelle est la variation des efforts intérieurs le long de l'élément ; calculer la valeur de l'effort normal au nœud central et l'interpréter.

Indication :

$$\int_{-a}^a N_1^2 dx = \frac{4a}{15} \quad \int_{-a}^a N_1 \frac{dN_1}{dx} dx = -\frac{1}{2} \quad \int_{-a}^a \left( \frac{dN_1}{dx} \right)^2 dx = \frac{7}{6a}$$



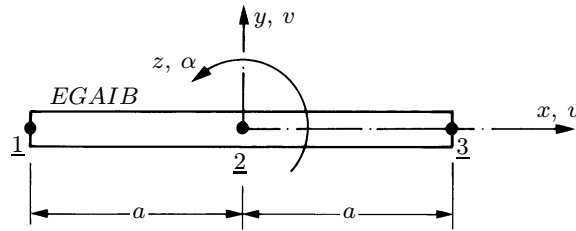


Fig. Ex. 9.8.5

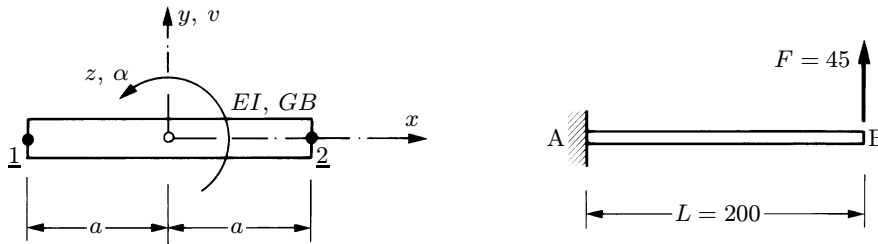
**9.8.6** On considère un élément de poutre de Timoshenko prismatique, pour poutre continue, à deux nœuds :

- 1) identifier et dessiner ses inconnues cinématiques ( $\Rightarrow \mathbf{d}$ ) ;
- 2) dessiner ses fonctions d'interpolation, trouver leur expression et écrire le champ des déplacements ( $\Rightarrow \mathbf{N}$ ) ;
- 3) donner  $\mathbf{D}$  ;
- 4) calculer les déformations ( $\Rightarrow \mathbf{B}$ ) ;
- 5) calculer la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  exacte ;
- 6) calculer la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  par intégration numérique réduite ;
- 7) déterminer les forces nodales pour une charge uniforme ( $\Rightarrow \mathbf{f}$ ) ;

*Application :* trouver, avec cet élément, la flèche en B de la poutre console AB, en utilisant

- 8)  $\mathbf{k}$  exacte,
- 9)  $\mathbf{k}$  issue de l'intégration numérique réduite,

et des maillages réguliers de 1, 2, 4 et 8 éléments (utiliser ou écrire un programme) ; tracer la courbe de convergence.



**Fig. Ex. 9.8.6** Pour la poutre AB :  $EI = 64 \cdot 10^6$  et  $GB = 72 \cdot 10^3$  (unités cohérentes).

**9.8.7** Montrer, dans l'élément fini de l'exercice 9.8.6, que la condition de Bernoulli  $\beta = 0$  annule la courbure (verrouillage).

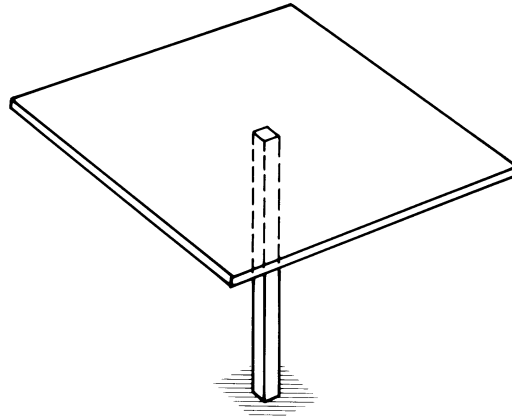
**9.8.8** Pour lutter contre le verrouillage de l'élément de l'exercice 9.8.6, il faut interpoler  $v(x)$  quadratiquement (un degré de plus que  $\alpha$ ). On propose d'ajouter simplement un mode bulle parabolique  $N_3$  d'intensité  $P$  à l'interpolation linéaire :

$$v(x) = v_1 N_1 + v_2 N_2 + P N_3$$

Trouver la valeur de  $P$  telle que toute tendance au verrouillage soit annulée. *Indication :* imposer une déformation tangentielle constante.

*Remarque :* la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  de cet élément est identique à celle sous-intégrée de l'élément de l'exercice 9.8.6.

**9.8.9** On veut calculer la structure couvrant une station-service à l'aide d'éléments de type plaque-membrane pour le toit et poutre spatiale pour la colonne. Il y a un problème : lequel ?



**Fig. Ex. 9.8.9**

## 9.9 Lexique

Macroélément	Elément fini obtenu par assemblage de plusieurs autres.
Elément surcompatible	Elément fini dont la compatibilité aux frontières dépasse $C^{m-1}$ .
Verrouillage	Défaut numérique conduisant à des éléments finis trop rigides (ralentissement de la convergence).
Elément de plaque-membrane ou plan de coque	Elément fini plan à comportement spatial obtenu en combinant l'état plan de contrainte au comportement flexionnel de plaque.

# 10 Méthode des déplacements et assemblage

## 10.1 Introduction

La méthode utilisée pour résoudre l'ensemble d'un problème d'éléments finis est la *méthode des déplacements*. Elle peut se déduire directement de l'équilibre nodal (§ 10.4.3) ou, mieux, du principe des déplacements virtuels (§ 10.4.1). Le système d'équations obtenu exprime, en chacun des nœuds, l'égalité des composantes de deux types de forces nodales, résultantes *consistantes*

- des forces internes produites dans la structure par sa déformation,
- des forces dues aux charges extérieures.

Ce système traduit l'*équilibre des nœuds*. Il est *linéaire* et la matrice *symétrique* des coefficients de ses inconnues est la *matrice de rigidité de la structure*. Sa résolution fournit les *déplacements nodaux* ou *degrés de liberté*.

Ces déplacements s'expriment dans un système d'axes commun, dit *global*, choisi arbitrairement et attaché à la structure. Chacun des systèmes d'axes, dit *local*, dans lequel on a étudié les éléments finis, ne coïncide ordinairement pas avec le système global, parce qu'il peut être plus commode d'établir les caractéristiques d'un élément dans un repère lié à cet élément et orienté de la manière la plus avantageuse pour la formulation. Pour faire passer certaines grandeurs d'un système dans l'autre, il faut exécuter des *transformations de coordonnées*. De même, pour trouver, dans l'ensemble des déplacements nodaux de la structure, ceux qui n'appartiennent qu'à un élément donné, il faut opérer une *localisation* de ces inconnues.

Ces opérations sont décrites ci-après.

## 10.2 Transformation de coordonnées

### 10.2.1 Rotation des caractéristiques des éléments

On désigne par les indices  $l$  et  $g$  les grandeurs attachées aux systèmes d'axes *local* d'étude d'un élément fini et *global* d'étude de la structure. De manière générale, on peut toujours écrire une relation du genre

$$\mathbf{d}_l = \mathbf{T} \mathbf{d}_g \quad (10.1)$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice dite de transformation de coordonnées ou, plus simplement, de *rotation*, puisqu'elle opère la rotation des degrés de liberté  $\mathbf{d}_g$  d'un élément fini, exprimés en axes globaux, à ceux  $\mathbf{d}_l$  définis en axes locaux.

Le travail virtuel étant un scalaire, on a, pour un élément fini,

$$\delta W_{\text{int},l} = \delta W_{\text{int},g} \quad \delta W_{\text{ext},l} = \delta W_{\text{ext},g}$$

d'où, avec (6.11),

$$\delta \mathbf{d}_l^T \mathbf{k}_l \mathbf{d}_l = \delta \mathbf{d}_g^T \mathbf{k}_g \mathbf{d}_g \quad \delta \mathbf{d}_l^T (\mathbf{f}_l + \mathbf{r}_l) = \delta \mathbf{d}_g^T (\mathbf{f}_g + \mathbf{r}_g)$$

et, avec (10.1), aussi valable pour les déplacements virtuels,

$$\delta W_{\text{int},l} = \delta \mathbf{d}_g^T \mathbf{T}^T \mathbf{k}_l \mathbf{T} \mathbf{d}_g \quad \delta W_{\text{ext},l} = \delta \mathbf{d}_g^T \mathbf{T}^T (\mathbf{f}_l + \mathbf{r}_l)$$

Par identification,

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_l \mathbf{T} \quad (10.2)$$

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_l \quad (10.3)$$

Ces relations traduisent la transformation de la matrice de rigidité et du vecteur force de l'élément fini, du système local dans le système global. On a de même

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_l$$

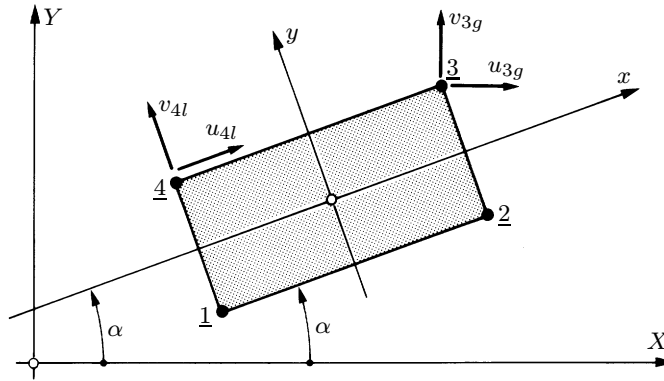
#### Remarque

**10.1** Cette transformation, et les relations (10.2) et (10.3) qui en découlent, sont identiques à celles des poutres (sect. 2.4, (2.19) et (2.20)).

#### Application 10.1

Considérons un élément fini rectangulaire d'élasticité plane (fig. 10.1). La connaissance des coordonnées des nœuds permet de calculer l'angle  $\alpha$  orientant les axes locaux  $(x, y)$  par rapport aux axes globaux  $(X, Y)$ . En chaque nœud, les déplacements sont  $u_i$  et  $v_i$  ( $i = \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}$ ). On a donc simplement (fig. 2.4)

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_g = \mathbf{T}_\alpha \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_g$$



**Fig. 10.1** Rectangle à champ de déplacement bilinéaire en axes locaux et globaux.

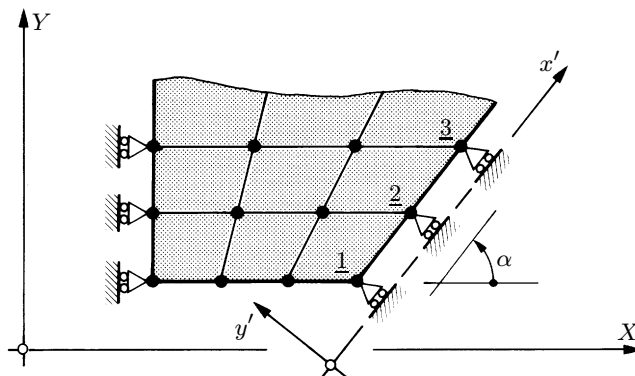
et, pour tous les nœuds, la relation (10.1) s'écrit

$$\mathbf{d}_l = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_g = \mathbf{T} \mathbf{d}_g$$

### 10.2.2 Rotation en un nœud quelconque

De manière générale, on peut effectuer le calcul en adoptant autant de systèmes d'axes différents qu'il y a de nœuds. Ce choix ne présente évidemment aucun avantage pratique. Cependant, il est souvent intéressant de pouvoir définir, en certains nœuds de la structure, des systèmes d'axes différents du système global, dans le but d'exprimer les déplacements, ou les conditions aux limites, suivant certaines directions privilégiées.

Par exemple, pour exprimer les conditions d'appui de la structure plane de la figure 10.2, il faut adopter un système d'axes particulier pour certains nœuds.



**Fig. 10.2** Systèmes d'axes :  $(X, Y)$  système global d'étude de la structure ;  $(x', y')$  système particulier permettant d'exprimer les conditions aux limites des nœuds 1, 2, 3... ( $v' = 0$ ).

### 10.3 Localisation

Si on désigne par  $\mathbf{d}$  le vecteur contenant les déplacements de tous les nœuds de la structure et par  $\mathbf{d}_e$  celui contenant ceux d'un certain élément fini, exprimés dans le même système d'axes (généralement global), comment retrouver, dans  $\mathbf{d}$ , les composantes de  $\mathbf{d}_e$  ? Ce repérage, appelé *localisation*, s'exprime par l'opération formelle

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{d} \quad (10.4)$$

dans laquelle  $\mathbf{L}_e$  est appelée *matrice de localisation*. Cette matrice ne contient que des coefficients nuls à l'exception, dans chaque ligne, d'un coefficient unité.

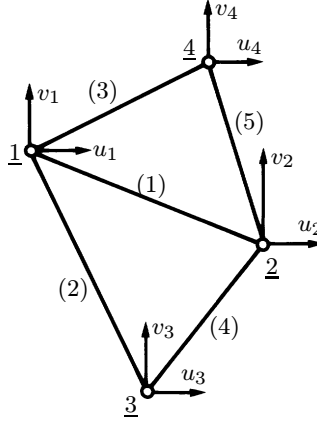
Par exemple, la matrice  $\mathbf{L}_e$ , repérant les déplacements de la barre (2) de la structure plane en treillis de la figure 10.3, est donnée ci-dessous :

$$\mathbf{d}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_e \mathbf{d}$$

#### Remarque

**10.2** La localisation (10.4) exprime

- l'adaptation de notation (1.10) nécessaire pour introduire (1.7) dans (1.9) (§ 1.4.4) ;
- l'expansion (2.43) permettant de réaliser l'assemblage (2.49) (exemple 2.1).



**Fig. 10.3** Localisation de l'élément (2) dans un treillis de cinq barres ( $\mathbf{L}_e \equiv \mathbf{L}_{(2)}$ ).

## 10.4 Assemblage et résolution

### 10.4.1 Equilibre global

En vertu de la condition d'intégrabilité (5.1), les travaux virtuels totaux de la structure discrétisée sont

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_e \delta W_{\text{int},e} \quad \delta W_{\text{ext}} = \sum_e \delta W_{\text{ext},e} \quad (10.5)$$

Si  $\mathbf{d}_l$  désigne les déplacements en axes locaux, la contribution d'un élément fini isolé est

$$\delta W_{\text{int},e} = \delta \mathbf{d}_{l,e}^T \mathbf{k}_{l,e} \mathbf{d}_{l,e} \quad \delta W_{\text{ext},e} = \delta \mathbf{d}_{l,e}^T (\mathbf{f}_{l,e} + \mathbf{r}_{l,e})$$

On fait apparaître les déplacements en axes globaux à l'aide de (10.1)  $\mathbf{d}_{l,e} = \mathbf{T}_e \mathbf{d}_{g,e}$ , puis on les relie à l'ensemble des déplacements nodaux de la structure, également exprimés en axes globaux et contenus dans  $\mathbf{d}$ , par (10.4)  $\mathbf{d}_{g,e} = \mathbf{L}_e \mathbf{d}$ ; on trouve

$$\mathbf{d}_{l,e} = \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \mathbf{d} \quad (10.6)$$

La contribution d'un élément fini devient

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int},e} &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{l,e} \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \mathbf{d} \\ \delta W_{\text{ext},e} &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T (\mathbf{f}_{l,e} + \mathbf{r}_{l,e}) \end{aligned}$$

et, introduite dans (10.5), les travaux totaux prennent la forme classique

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_e \delta W_{\text{int},e} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (10.7)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_e \delta W_{\text{ext},e} = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{P} + \mathbf{R}) \quad (10.8)$$

où

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{l,e} \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_{g,e} \mathbf{L}_e \quad (10.9)$$

$$\mathbf{P} = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{f}_{l,e} = \sum_e \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_{g,e} \quad (10.10)$$

et où  $\mathbf{R}$  sont les réactions aux appuis ; elles y remplacent les sommes nodales (assemblage) des forces  $\mathbf{r}$  (sommes qui, par ailleurs, sont nulles aux degrés de liberté non bloqués).

Si nécessaire, il faut encore ajouter au travail extérieur (10.8) celui d'éventuelles forces concentrées nodales  $\mathbf{Q}$  (charges)

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{P} + \mathbf{R}) + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{Q}$$

de sorte qu'au total, en groupant  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{F}$ , l'égalité des travaux fournit

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{F}$$

Les déplacements virtuels étant arbitraires (fonctions poids), les extrémités de cette relation, écrites  $\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{F}) = 0$ , fournissent l'équation matricielle

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (10.11)$$

qui définit

- la **matrice de rigidité de la structure**  $\mathbf{K}$  (de dimension  $n_d \times n_d$ ),
- le **vecteur force de la structure**  $\mathbf{F}$ , composé des vecteurs forces  $\mathbf{P}$  provenant des vecteurs forces  $\mathbf{f}_e$  des éléments,  $\mathbf{Q}$  dû aux charges concentrées purement nodales,  $\mathbf{R}$  représentant les réactions d'appui.

#### Remarques

**10.3** On fera le parallèle entre les développements précédents et ceux de la section 2.7.

**10.4** Les matrices  $\mathbf{L}_e$  réalisent simultanément la localisation et l'expansion des matrices de rigidité des éléments ; comme dans l'exemple 2.1, on peut écrire

$$\mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_{g,e} \mathbf{L}_e = \hat{\mathbf{k}}_e$$

et (10.9) est alors identique à (2.49). Dans un programme, on ne construit jamais les matrices  $\mathbf{L}_e$  ; on procède en assemblant directement les coefficients de rigidité  $k_{ij}$  des matrices  $\mathbf{k}_{g,e}$  dans  $\mathbf{K}$  (rem. 2.15).

#### 10.4.2 Assemblage

Les relations (10.9) et (10.10) expriment la formulation mathématique de la matrice  $\mathbf{K}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$ . On dit qu'elles opèrent l'**assemblage** de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$ , car elles en réalisent la construction à partir des coefficients de rigidité et des forces consistantes de chaque élément fini. Cette opération est directement programmable, indépendamment du type d'élément fini utilisé. Elle s'écrit, symboliquement,

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{k}_e \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e \quad (10.12)$$

où  $\mathbf{A}$  est l'**opérateur d'assemblage**.



### 10.4.3 Equilibre direct nœud par nœud

En raisonnant sur l'équilibre des nœuds comme aux chapitres 1 et 2, à l'aide des forces  $\mathbf{r}$ , on aboutit, semblablement, au système linéaire

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}$$

Dans la méthode des éléments finis, la notion locale d'équilibre nodal est un peu rudimentaire ; on lui préfère la démarche du paragraphe 10.4.1.

### 10.4.4 Résolution, déplacements et réactions d'appui

Le système (10.11) ne peut être résolu sans en exprimer explicitement les conditions aux limites essentielles. La structure, n'étant pas fixée dans l'espace, peut se déplacer comme un corps rigide et les inconnues déplacements prendre des valeurs quelconques. Les équations ne sont donc pas linéairement indépendantes et la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière (sect. 2.7, exemple 2.1).

Si on appelle  $\mathbf{d}_x$  le vecteur des déplacements inconnus et  $\bar{\mathbf{d}}$  celui des déplacements imposés (connus, nuls ou non), on peut écrire le système (10.11) sous la forme partitionnée

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xR} \\ \mathbf{K}_{Rx} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \bar{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_x + \mathbf{Q}_x + \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_R + \mathbf{Q}_R + \mathbf{R}_R \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

forme qui sépare les deux types de déplacements, isole les réactions inconnues  $\mathbf{R}_R$  et produit deux équations matricielles.

La première est l'*équation aux déplacements* (en nombre  $n_{\text{dep}}$ )

$$\mathbf{K}_{xx}\mathbf{d}_x + \mathbf{K}_{xR}\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{P}_x + \mathbf{Q}_x$$

où  $\mathbf{d}_x$  est la seule inconnue ; on la tire donc de

$$\mathbf{K}_{xx}\mathbf{d}_x = \mathbf{P}_x + \mathbf{Q}_x - \mathbf{K}_{xR}\bar{\mathbf{d}} \quad (10.14)$$

La matrice  $\mathbf{K}_{xx}$  est dite *matrice de rigidité réduite*. Le vecteur  $-\mathbf{K}_{xR}\bar{\mathbf{d}}$  représente les forces nodales produites par les déplacements imposés (associées aux inconnues  $\mathbf{d}_x$  ; cf. (6.13)).

La seconde équation est l'*équation aux réactions* (en nombre  $n_{\text{rea}}$ )

$$\mathbf{K}_{Rx}\mathbf{d}_x + \mathbf{K}_{RR}\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{P}_R + \mathbf{Q}_R + \mathbf{R}_R$$

$\mathbf{R}_R$  en est la seule inconnue,  $\mathbf{d}_x$  ayant été calculé par (10.14). Les réactions nodales sont donc données par

$$\mathbf{R}_R = \mathbf{K}_{Rx}\mathbf{d}_x + \mathbf{K}_{RR}\bar{\mathbf{d}} - (\mathbf{P}_R + \mathbf{Q}_R) \quad (10.15)$$

A nouveau, le vecteur  $\mathbf{K}_{RR}\bar{\mathbf{d}}$  représente les forces nodales dues aux déplacements imposés et associées aux degrés de liberté d'appui.

Connaissant les déplacements nodaux  $\mathbf{d}$ , on repère, par (10.6), les déplacements des nœuds de chacun des éléments finis dans son système d'axes propre (local), grâce auxquels on peut calculer les contraintes dans l'élément par (6.6)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \mathbf{d}_{l,e}$$

### 10.4.5 Propriétés de la matrice de rigidité

Les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}_{xx}$  jouissent des propriétés suivantes :

- elles sont *symétriques* ;
- $\mathbf{K}$  est semi-définie positive et  $\mathbf{K}_{xx}$  est *définie positive* ;
- les coefficients  $K_{ii}$  de la diagonale principale sont *positifs* ;
- elles sont *peu peuplées* (matrices *creuses*) ;
- elles peuvent être rendues *bandes* (fig. 10.4).

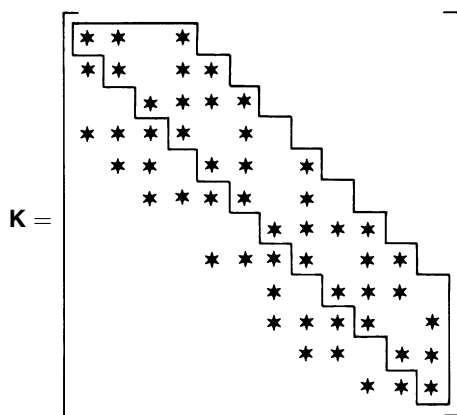
Cette dernière propriété est particulièrement intéressante pour minimiser tant l'encombrement dans la mémoire de l'ordinateur que le nombre d'opérations pour résoudre (algorithme de Gauss). Considérons le coefficient  $K_{ij}$  : il produit une *demi-largeur de bande*  $L_b$  égale à (fig.10.5)

$$L_b = |j - i| + 1 \quad (10.16)$$

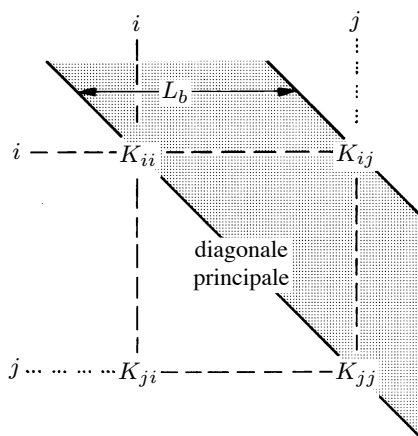
et donc, pour minimiser  $L_b$ , il faut minimiser l'écart  $|j - i|$  entre les numéros des degrés de liberté extrêmes dans chacun des éléments finis.

On aboutit pratiquement à la même conclusion en travaillant avec les numéros des nœuds : *il faut maintenir, entre les numéros extrêmes des nœuds d'un même élément, un écart aussi petit que possible.*

Cette condition peut être atteinte en jouant sur la numérotation des nœuds ; elle peut aussi être codée et la plupart des programmes d'éléments finis disposent aujourd'hui d'un *optimiseur de bande*.



**Fig. 10.4** Matrice bande (\* =  $K_{ij}$  non nul ; largeur de bande 7 ; demi-largeur  $L_b = 4$  ; zone utile encadrée).



**Fig. 10.5** Demi-largeur de bande  $L_b$  via les coefficients de rigidité.

### 10.4.6 Energie de déformation

L'énergie de déformation est une grandeur importante pour tester la convergence (chap. 11). On la calcule par le théorème de Clapeyron extérieur (TGC vol. 2, § 13.2.2, ou vol. 3, sect. 7.9), soit

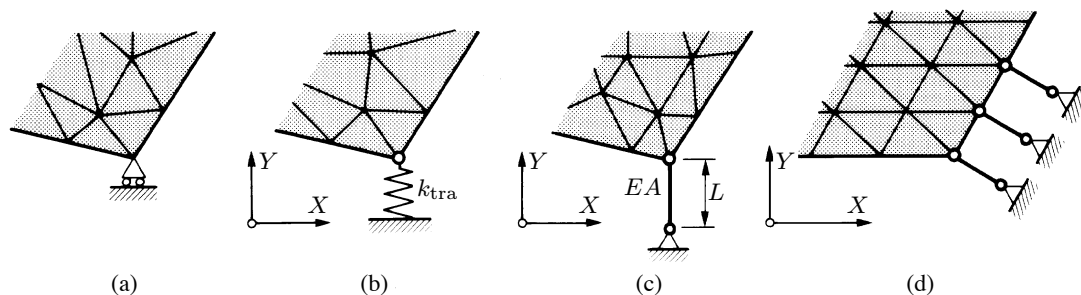
$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{d}_x^T \quad \bar{\mathbf{d}}^T \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

## 10.5 Bielles et ressorts d'appui

Beaucoup de codes d'analyse des structures et solides par ordinateur renoncent au calcul direct (et correct) des réactions d'appui via l'équation (10.15), vu la relative complexité de la construction de cette dernière. Il s'agit bien sûr d'un défaut, mais on peut le pallier, parfois, par une des astuces suivantes.

Considérons par exemple un appui à rouleau (fig. 10.6a). On réalise la même liaison avec un *ressort de rigidité*  $k_{\text{tra}}$  très grande (fig. 10.6b). D'un point de vue numérique, il suffit de prendre, pour le coefficient de rigidité  $k_{\text{tra}}$ , une valeur de l'ordre de  $10^{20}$  ou  $10^{30}$ , ou plus encore. Tant que cet unique grand nombre ne se place que sur la diagonale principale de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$ , c'est-à-dire tant que la liaison est parallèle à l'un des axes globaux, la résolution numérique du système (10.11) n'est pas affectée. La réaction cherchée est alors l'effort normal dans le ressort. Cette technique est une *méthode de pénalité*.

On peut aussi simuler l'appui à rouleau par une *bielle très rigide* (fig. 10.6c). Il suffit de choisir  $EA/L$  très grand ; la réaction d'appui est l'effort normal dans la bielle. De plus, la bielle permet de représenter des liaisons sans recourir à des axes particuliers obliques (fig. 10.6d). La situation est toutefois très différente de la précédente. Alors que la matrice de rigidité du ressort est de dimension  $1 \times 1$ , celle de la bielle est de dimension  $4 \times 4$  (2D) ou  $6 \times 6$  (3D), et peut introduire des grands nombres *en dehors de la diagonale principale de  $\mathbf{K}$* . Ces derniers peuvent détruire la bonne résolution du système (10.11), qui est dit *mal conditionné*. Le danger est réel, même si la bielle est parallèle à un axe global (fig. 10.6c), car il suffit d'une toute petite imprécision sur les coordonnées des nœuds pour détruire ce parallélisme. Il faut être extrêmement prudent dans un tel cas et examiner avec le plus grand soin la valeur des résultats obtenus (ex. 10.6.4).



**Fig. 10.6** Calcul des réactions par de petits éléments très rigides : (a) appui à rouleau ; (b) ressort ; (c) bielle ; (d) bielles obliques.

## 10.6 Exercices

**10.6.1** Une barre est soumise à une charge axiale uniforme, à une charge concentrée et à un tassement d'appui. On utilise un élément fini quadratique à trois nœuds (ex. 6.5.3), dont la matrice de rigidité  $\mathbf{k}$  et les efforts normaux aux nœuds sont donnés par

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Discretiser la barre par un seul élément et, en suivant la démarche du paragraphe 10.4.4,

- 1) écrire le système d'équations  $\mathbf{Kd} = \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}$  exprimant l'équilibre ;
- 2) le partitionner, puis résoudre pour trouver les déplacements et réactions ;
- 3) calculer les efforts normaux  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ .

Comparer avec la solution exacte et conclure.

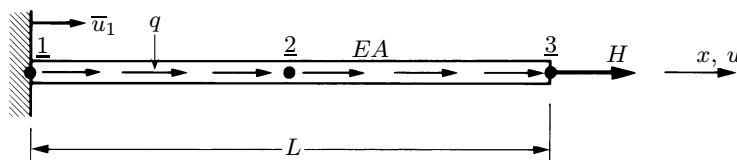


Fig. Ex. 10.6.1

**10.6.2** Pour l'une des deux structures planes triangulées,

- 1) trouver  $n_d$ ,  $n_{\text{dep}}$  et  $n_{\text{rea}}$  (nombre d'inconnues dans (10.11), (10.14) et (10.15)) ;
- 2) rechercher une numérotation optimale des nœuds ; en déduire la demi-largeur de bande  $L_b$  (10.16) ;
- 3) représenter, comme à la figure (10.4), l'image de  $\mathbf{k}$ , chaque case s'associant à un nœud, c'est-à-dire à un bloc matriciel  $2 \times 2$  ; négliger toute symétrie éventuelle dans la structure.

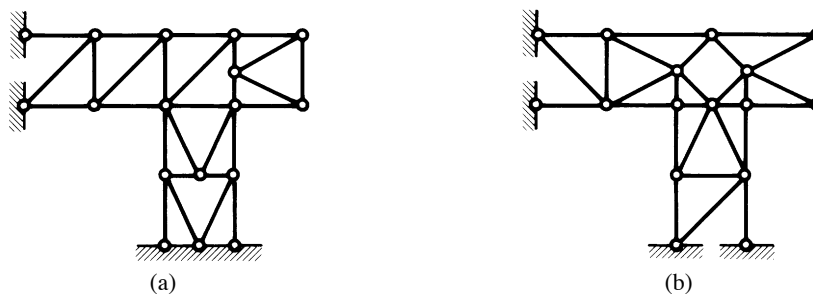


Fig. Ex. 10.6.2

**10.6.3** Une plaque de Kirchhoff, rectangulaire, d'épaisseur constante, uniformément chargée, est maillée en éléments finis rectangulaires à quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud. Par symétrie, le maillage ne couvre qu'un quart de plaque.

- 1) A partir du coin A, numérotter les nœuds de manière à minimiser la largeur de bande ; trouver  $L_b$  (10.16).
- 2) Exprimer toutes les conditions aux limites essentielles.
- 3) Trouver  $n_d$ ,  $n_{\text{dep}}$  et  $n_{\text{rea}}$ .

- 4) La numérotation locale des nœuds de l'élément (1) débutant en A ( $\equiv \underline{1}$ ) et tournant dans le sens trigonométrique, donner la matrice de localisation de cet élément. *Note* : l'écrire à l'aide de matrices identités  $\mathbf{I}_{(3 \times 3)}$  et nulles  $\mathbf{0}_{(3 \times 3)}$ .

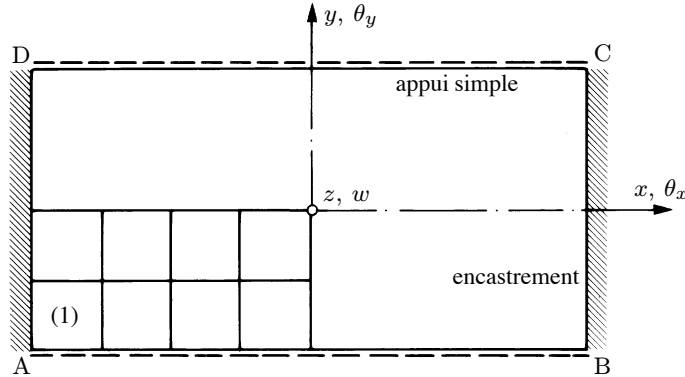
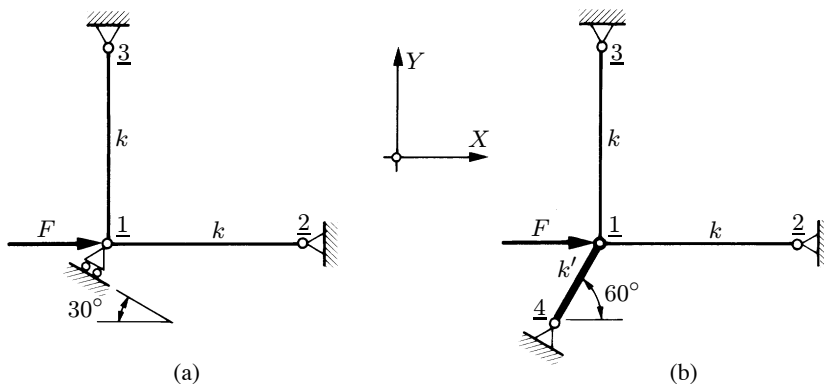


Fig. Ex. 10.6.3

**10.6.4** Pour étudier le treillis plan de la figure Ex. 10.6.4(a), on propose celui de la figure Ex. 10.6.4(b) où l'appui à rouleur à  $30^\circ$  est simulé par une bielle rigide. On appelle  $k = EA/L$  la rigidité des barres  $\underline{1-2}$  et  $\underline{1-3}$ , et  $k' = 10^p k$  celle de la bielle  $\underline{4-1}$ .

- 1) Etablir les deux équations (littérales) d'équilibre du nœud  $\underline{1}$  et vérifier que  $k'$  apparaît effectivement hors de la diagonale principale.
- 2) Résoudre numériquement ces équations pour  $p = 3, 6, 9, 12, 15 \dots$  (utiliser ou écrire un programme) ; observer la dégradation des résultats numériques dès que  $p$  dépasse une certaine valeur (système mal conditionné) ; conclure.

Fig. Ex. 10.6.4  $F = 100$  ;  $k = 375$ .

## 10.7 Lexique

$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} (= \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R})$

- vecteur des  $n_d$  déplacements de la structure
- matrice de rigidité de la structure
- vecteur force de la structure
- équation aux déplacements
- matrice de rigidité réduite
- équation aux réactions
- division du système  $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$

Equilibre de tous les nœuds (méthode des déplacements):

$\mathbf{d}$

$\mathbf{K}$

$\mathbf{F}$

équation (matricielle) livrant les  $n_{\text{dep}}$  degrés de liberté inconnus ( $\mathbf{d}_x$ );  
matrice de l'équation précédente;

équation (matricielle) livrant les  $n_{\text{rea}}$  réactions inconnues ( $\mathbf{R}_R$ );

$$n_d \begin{Bmatrix} n_{\text{dep}} \\ n_{\text{rea}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_R \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{Q}_R \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_R \end{Bmatrix}$$

Rotation

Transformation des caractéristiques d'un élément fini d'un système d'axes à un autre.

Localisation,  
matrice de localisation  $\mathbf{L}_e$

Repérage des degrés de liberté d'un élément fini dans le vecteur  $\mathbf{d}$  de toutes les inconnues nodales.

Opérateur d'assemblage  $\mathbf{A}$

Symbole résumant les opérations de l'assemblage des éléments finis.

Optimiseur de bande

Algorithme et programme réalisant une numérotation nodale telle que la matrice  $\mathbf{K}$  soit aussi bande que possible.

Demi-largeur de bande  $L_b$

Pour toute équation de  $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$ , nombre de coefficients dans la demi-bande de  $\mathbf{K}$ .

Energie de déformation  $U$

Grandeur clé pour mesurer la convergence vers la solution exacte.

# 11 Convergence et erreur

## 11.1 Introduction

Les mesures de la convergence et de l'erreur de la méthode des éléments finis sont des notions importantes, trop longtemps ignorées et, souvent, éludées des programmes commerciaux. Dans ce chapitre, on expose quelques propriétés élémentaires de convergence et d'erreur, en mettant particulièrement l'accent sur le modèle déplacement.

## 11.2 Energie de déformation et convergence du modèle déplacement conforme

### 11.2.1 Propriété générale

L'énergie de déformation  $U$  d'un corps  $\Omega$  (structure ou solide) discrétisé est donnée par (§ 10.4.6)

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{F} \quad (11.1)$$

On peut démontrer la propriété générale suivante :

*Si le champ des déplacements obéit à tous les critères de convergence, l'énergie de déformation  $U$  tend vers l'énergie de déformation exacte lorsqu'on augmente toujours plus la finesse du maillage (convergence  $h$ , § 5.1.2).*

### 11.2.2 Forces imposées seules

*Si le corps n'est sollicité que par des forces imposées (de volume, de surface, concentrées ;  $\bar{\mathbf{d}}$  nul), l'énergie de déformation correspondante*

$$U_F = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{d}_x^T & \mathbf{0} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_R \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_x^T \mathbf{F}_x \quad (11.2)$$

*est monotone croissante* : elle est toujours *inférieure* à l'énergie exacte et on dit qu'elle en est une *borne inférieure*

$$U_F \leq U_{F \text{ exact}} \quad (11.3)$$

En particulier, s'il n'y a qu'une seule force concentrée  $F$  sollicitant le corps, (11.3) s'écrit

$$\frac{1}{2} u F \leq \frac{1}{2} u_{\text{exact}} F$$

et le déplacement  $u$ , associé à cette force, est *inférieur*, ou égal, au déplacement réel

$$u \leq u_{\text{exact}} \quad (11.4)$$

De manière générale, pour des forces imposées quelconques, les déplacements sont inférieurs, en moyenne (donc pas nécessairement en tous les points du corps), aux déplacements exacts. On dit pour cette raison que le corps discrétisé est trop rigide, ou encore que les éléments finis du modèle déplacement sont trop rigides (rem. 4.2).

#### Démonstration

Pour démontrer (11.3), on écrit d'abord l'énergie potentielle des forces extérieures (TGC vol. 2, § 13.2.3 ; TGC vol. 3, § 8.4.1) sous forme discrétisée

$$P = -\mathbf{d}_x^T \mathbf{F}_x \quad (11.5)$$

ce qui, avec (11.2), permet d'exprimer l'énergie potentielle totale  $\Pi$  (TGC vol. 3, sect. 8.3) par

$$\Pi = U + P = -U \quad (11.6)$$

En vertu du théorème du minimum de l'énergie potentielle totale (TGC, vol. 3, § 8.4.2), on a

$$\Pi \geq \Pi_{\text{exact}}$$

de sorte que, avec (11.6),

$$U \leq U_{\text{exact}}$$

ce qui est (11.3).

### 11.2.3 Déplacements imposés seuls

Réciproquement, si un corps n'est soumis qu'à des déplacements imposés  $\bar{\mathbf{d}}$  ( $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  nuls), l'énergie de déformation correspondante

$$U_d = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{d}_x^T \quad \bar{\mathbf{d}}^T \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_R \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{R}_R \quad (11.7)$$

où  $\mathbf{R}_R$  sont les réactions d'appui associées, *décroît de manière monotone* quand on découpe toujours plus finement : elle est une *borne supérieure* de l'énergie de déformation exacte

$$U_d \geq U_{d \text{ exact}} \quad (11.8)$$



En particulier, s'il n'y a qu'un seul déplacement imposé  $\bar{u}$  sollicitant le corps, (11.8) s'écrit

$$\frac{1}{2} \bar{u} R \geq \frac{1}{2} \bar{u} R_{\text{exact}}$$

et l'intensité de la réaction  $R$  associée est *supérieure*, ou égale, à la valeur exacte

$$R \geq R_{\text{exact}} \quad (11.9)$$

De façon générale, pour des déplacements imposés quelconques, les réactions ont des valeurs supérieures, en moyenne (donc pas forcément partout), aux valeurs exactes ; à nouveau, on dit pour cette raison que le corps discrétisé est plus rigide qu'il n'est en réalité.

#### Démonstration

Pour démontrer (11.8), on constate que, dans ce cas, l'énergie potentielle des forces extérieures est nulle,  $P = 0$ , et, en conséquence, l'énergie potentielle totale du corps discrétisé s'écrit

$$\Pi = U$$

En vertu du théorème du minimum de cette quantité, on a

$$U \geq U_{\text{exact}}$$

ce qui est (11.8).

#### 11.2.4 Effet thermique seul

Enfin, dans le cas d'un corps soumis exclusivement à l'action de la température, l'énergie de déformation est aussi une *borne supérieure* de l'énergie de déformation exacte (sans démonstration)

$$U_{th} \geq U_{th \text{ exact}} \quad (11.10)$$

#### Remarques

**11.1** Vu les inégalités (11.3), (11.8) et (11.10), l'énergie de déformation n'est pas bornée lorsque forces et déplacements imposés, ou forces et effets thermiques, agissent simultanément.

**11.2** On prendra garde de croire, comme on le dit trop souvent, que les déplacements d'un corps discrétisé en éléments finis du modèle déplacement sont toujours inférieurs aux déplacements exacts ; cela n'est vrai que dans le cas du déplacement associé à une seule force concentrée. C'est ainsi, par exemple, qu'une structure soumise à son poids propre peut avoir, pour deux découpages différents mais comportant le même nombre d'éléments et nœuds, dans l'un des cas certains déplacements supérieurs et, dans l'autre, inférieurs aux déplacements vrais.

**11.3** Les propriétés de borne et convergence de l'énergie de déformation confèrent une grande importance à cette quantité : en la calculant pour plusieurs maillages toujours plus fins d'un corps, il est possible de se rendre compte de la précision des solutions obtenues ; c'est une *mesure de la qualité* des éléments finis employés ou testés et, par conséquent, de la solution d'un calcul par éléments finis.

**11.4** Toutefois, étant une mesure *globale*, l'énergie de déformation ne renseigne pas sur la *précision locale* des résultats. Une solution peut paraître précise alors qu'il subsiste localement une forte erreur noyée dans  $U$ . Par exemple, une grande prudence est de mise lorsque le problème présente

des singularités (concentrations de contrainte sous force concentrée, aux angles rentrants ou, pour certaines conditions aux limites, aux angles obtus des plaques et des parois, etc.) ; la convergence peut être si lente qu'elle crée l'illusion qu'on a déjà atteint la précision souhaitée, alors qu'en réalité on en est encore très loin. Pour lutter contre ce défaut, il faut utiliser des mesures *locales* de l'erreur de manière à connaître une bonne estimation de la précision réelle de la solution.

### Exemple 11.1

La géométrie, le matériau, les charges, les conditions aux limites et le maillage d'une paroi trapézoïdale sont définis sur la figure 11.1(a). Ce solide plan a l'aspect d'une poutre console de hauteur variable, mais sa portée est trop faible par rapport à sa hauteur pour pouvoir la résoudre par la mécanique des structures. (On dispose, au niveau des contraintes, d'une solution approximative en élasticité plane : pièce en forme de coin, TGC vol. 3, sect. 10.9.)

Épaisseur  $t = 0,3$  cm

Matériau  $E = 7500$  kN/cm<sup>2</sup>

$\nu = 0,3$

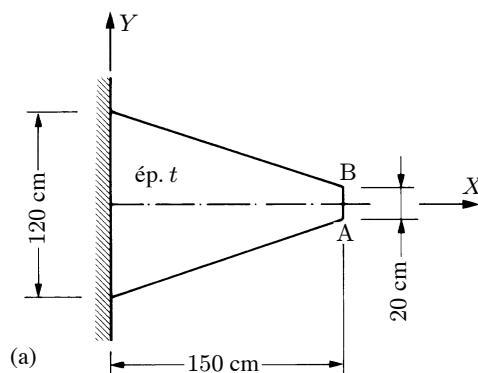
Charges 1) traction de surface uniforme  
tangente au bord AB

$t_y = 500$  N/cm

2) force de volume

$b_y = 50$  N/cm<sup>3</sup>

Élément Quadrilatère du second degré  
à huit nœuds



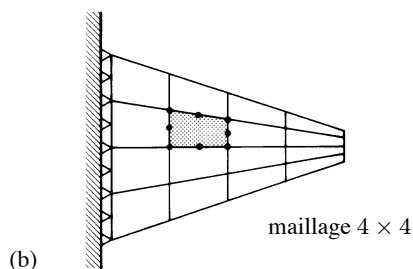
Maillage  $1 \times 1$   $2 \times 2$   $4 \times 4$   $8 \times 8$   $16 \times 16$

Nombre de

nœuds 8 21 65 225 833

nœuds bloqués 3 5 9 17 33

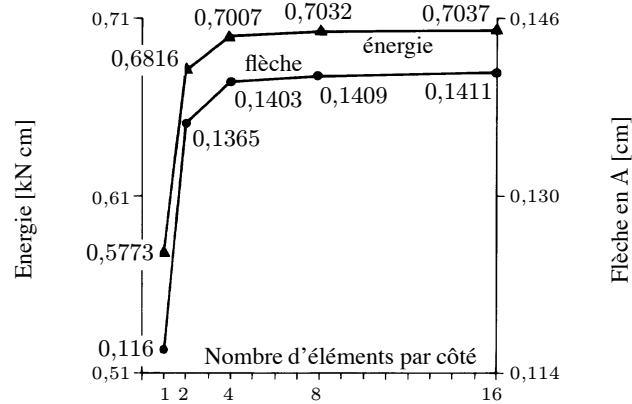
inconnues  $n_{\text{dep}}$  10 32 112 416 1600



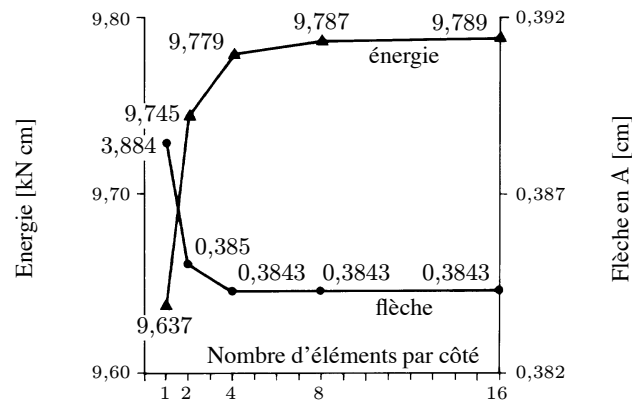
**Fig. 11.1** Paroi trapézoïdale encastree : (a) donnée ; (b) maillage.

Pour montrer les résultats fournis par la méthode des éléments finis et, en particulier, la convergence de quelques grandeurs lorsque la finesse de la discrétisation augmente, on adopte cinq découpages, toujours plus poussés, définis à la figure 11.1(b).

Le déplacement du point A parallèlement à l'axe Y (flèche) est donné aux figures 11.2 et 11.3. Sous l'effet de la force  $t_y$ , relativement concentrée (fig. 11.2), la flèche tend vers la solution exacte par bornes inférieures, puisqu'elle est, à peu près, une mesure de l'énergie de déformation. Sous l'effet de la force de volume  $b_y$  (fig. 11.3), on observe que la flèche est une borne supérieure de la solution exacte, mais l'énergie de déformation  $U$  converge bien par valeurs inférieures.



**Fig. 11.2** Convergence de l'énergie de déformation et de la flèche en A sous  $t_y$ .



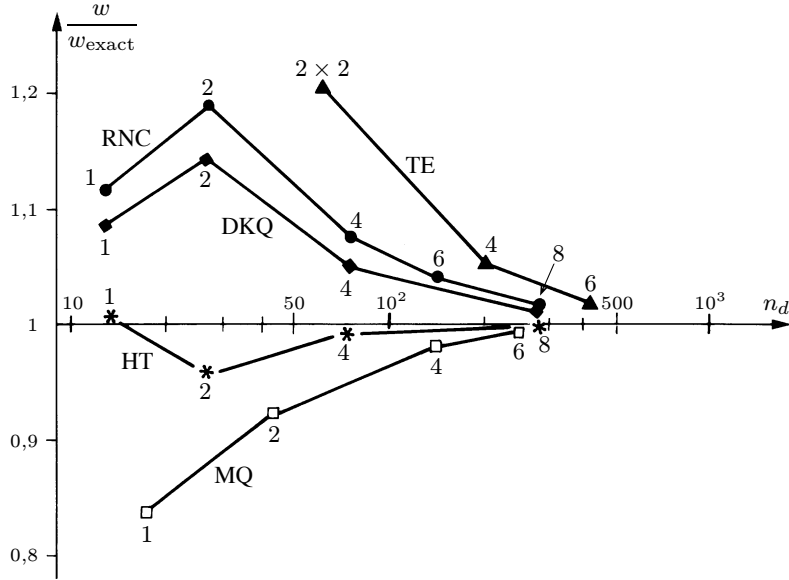
**Fig. 11.3** Convergence de l'énergie de déformation et de la flèche en A sous  $b_y$ .

### 11.3 Convergence énergétique des autres modèles

On peut démontrer, pour le modèle équilibre, la même propriété de convergence de l'énergie de déformation  $U$  et les propriétés inverses de borne. Par suite, en analysant un problème une fois avec des modèles déplacements et une fois avec des modèles équilibres, on peut encadrer la solution exacte entre deux limites (*analyse duale*).

Pour les modèles non conformes, mixtes et hybrides, ainsi que pour ceux issus d'une intégration numérique approximative, l'énergie de déformation converge vers la valeur exacte, mais les caractères de borne et convergence monotone sont généralement perdus.

La figure 11.4, reprise du paragraphe 9.4.7, illustre clairement ces propriétés (la flèche est ici une mesure directe de l'énergie de déformation de la plaque).



**Fig. 11.4** Convergence de la flèche  $w$  au centre d'une plaque carrée, encastée, sous charge concentrée centrée (modèle : MQ déplacement, TE équilibre, HT hybride-Trefftz, DKQ mixte, RNC non conforme).

## 11.4 Erreur de discrétisation et taux de convergence

### 11.4.1 Introduction

Considérons un maillage d'éléments finis tous identiques. La dimension caractéristique de chaque élément est  $h$  (§ 5.1.2), l'interpolation du champ des déplacements est complète au degré  $p$  (et éventuellement incomplète au-delà ; chap. 7) et l'ordre le plus élevé des dérivées de la forme forte associée est  $2m$  (§ 3.6.3).

Puisque l'élément peut représenter exactement tout champ de déplacement polynomial de degré  $p$ , son *erreur* dans la représentation d'un polynôme de degré plus élevé est d'ordre  $O(h^{p+1})$ . On peut établir ce résultat de manière rigoureuse et le pressentir par la formule de Taylor ; pour un cas 1D, l'expression de la composante de déplacement  $u(x)$  autour de  $x_i$  est

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{du(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2} + \dots + \frac{h^p}{p!} \frac{d^p u(x_i)}{dx^p} + O(h^{p+1})$$

où  $h = x - x_i$ . Si  $u_{\text{exact}}$  désigne le champ exact et  $u$  celui approché au degré  $p$ , l'*erreur*  $e_d$  (reste de la formule de Taylor) est

$$e_d = |u_{\text{exact}} - u| = O(h^{p+1}) \quad (11.11)$$

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$e_d = |u_{\text{exact}} - u| \leq Ch^{p+1} \quad (11.12)$$

où  $C$  est une constante. En fait, ce résultat n'est vrai qu'*asymptotiquement* : l'erreur ne tend vers la valeur (11.11) que quand  $h$  tend vers zéro.

### 11.4.2 Propriétés générales

Dans une étude de convergence  $h$ , on montre que l'**erreur de discrétisation**  $e$  d'une grandeur quelconque (déplacement, déformation, contrainte ou énergie) est de la forme

$$e = O(h^k) \quad (11.13)$$

ou

$$e \leq Ch^k \quad (11.14)$$

L'exposant  $k$  s'appelle le **taux de convergence** ; il dépend de la nature de la grandeur étudiée, du degré de l'interpolation et de la régularité de la solution exacte. Pour converger, il faut que  $k$  soit positif ; si  $k = 1$ , la convergence est dite linéaire ; si  $k = 2$ , elle est dite quadratique.

L'expression (11.14) montre que l'erreur est réduite d'un facteur

- $2^k$  quand on subdivise deux fois plus finement ;
- $10^k$  quand  $h$  devient  $h/10$  ;
- $\eta^k$  quand  $h$  devient  $h/\eta$ .

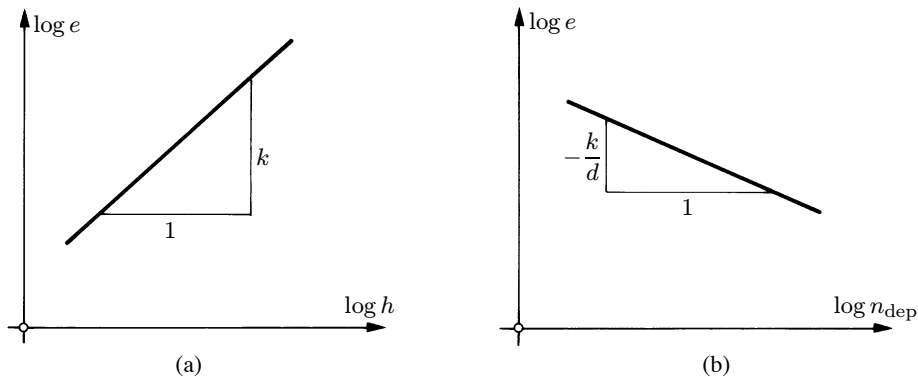
On représente le taux de convergence dans un graphique doublement logarithmique, car, en écrivant (11.14) sous la forme  $\log e = k \log h + \log C$ , on obtient l'équation d'une droite dont la pente vaut  $k$  (fig. 11.5a).

#### Remarque

**11.5** En abscisse, on peut aussi porter le nombre de degrés de liberté  $n_{\text{dep}}$ , plutôt que  $h$  ; dans ce cas, on a la relation approximative

$$O(h^k) \cong O[(n_{\text{dep}})^{-k/d}]$$

où  $d$  est la dimension spatiale du problème (1, 2 ou 3 pour 1D, 2D ou 3D). On obtient alors la représentation graphique de la figure 11.5(b).



**Fig. 11.5** Taux de convergence  $k$  avec, en abscisse: (a) la dimension typique  $h$  de l'élément ;  
(b) le nombre d'inconnues  $n_{\text{dep}}$  du problème.

## 11.5 Mesure de l'erreur

### 11.5.1 Norme de l'erreur

La méthode des éléments finis ne donne qu'une *solution approximative* d'un problème aux limites. Les différences entre la solution exacte et la solution approchée, c'est-à-dire les *erreurs*, par exemple sur les déplacements ou les contraintes, exprimées sous forme de *vecteurs erreurs*  $\mathbf{e}_d$  ou  $\mathbf{e}_\sigma$ ,

$$\mathbf{e}_d = \mathbf{d}_{\text{exact}} - \mathbf{d} \quad \mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}} - \boldsymbol{\sigma} \quad (11.15)$$

décroissent lorsque le maillage s'affine (convergence  $h$ ) ou quand l'interpolation s'enrichit (convergence  $p$ ). Dans tout calcul d'ingénieur cependant, la maille n'est jamais infiniment petite ( $h \gg 0$ ) ni l'interpolation infiniment riche ( $p \ll \infty$ ), de sorte qu'il subsiste des erreurs. *L'appréciation et le contrôle de ces erreurs constituent un point essentiel de l'analyse numérique.*

L'étude de l'erreur peut porter sur diverses grandeurs : les inconnues (déplacements), leurs dérivées (déformations et contraintes), l'énergie, etc. Elle peut être locale ou globale. A un contrôle purement ponctuel, trop sensible aux particularités d'un problème (singularité par exemple), on préfère un contrôle de l'erreur par une moyenne scalaire, à savoir une *norme*, intégrale sur un certain domaine (un élément, tous les éléments...) d'une quantité à caractère énergétique.

L'expression de cette norme, dite *norme énergétique*, en fonction de l'erreur sur les contraintes est, sur un élément fini,

$$\|e_\sigma\|_e^2 = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}} - \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}} - \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_\sigma d\Omega \quad (11.16)$$

et, pour tous les éléments, soit l'ensemble du domaine,

$$\|e_\sigma\|^2 = \sum_e \|e_\sigma\|_e^2 \quad (11.17)$$

L'erreur évaluée au niveau de l'élément est dite *locale*, et celle calculée sur tout le domaine est qualifiée de *globale*.

On sait que le champ des contraintes issu des modèles déplacements ne satisfait pas à l'équilibre (sect. 6.3). Ce défaut est alors naturellement choisi comme une mesure directe de la qualité d'un calcul par éléments finis. De plus, une bonne représentation des contraintes est essentielle pour l'ingénieur. Enfin, l'emploi de la norme (11.17) est entièrement justifié par l'interprétation suivante.

### 11.5.2 Interprétation

On peut montrer l'existence d'un lien direct de la norme globale (11.17) avec l'énergie potentielle totale  $\Pi$ . En effet, chercher le minimum de  $\|e_\sigma\|$ , c'est-à-dire *minimiser le carré pondéré* (par l'inverse de la matrice d'élasticité  $\mathbf{D}$ ) de l'erreur sur les contraintes est identique au principe du minimum de l'énergie totale, lui-même identique à la forme intégrale de l'équilibre (6.1).

*La méthode des éléments finis peut donc s'interpréter comme une procédure de minimisation d'une forme quadratique de l'erreur sur les contraintes.*

Cette interprétation donne toute sa valeur aux normes énergétiques d'erreur en contrainte (11.16) et (11.17).

### 11.5.3 Estimation d'erreur

La solution exacte d'un problème étant inconnue, on ne peut jamais calculer la valeur exacte de l'erreur. On doit alors se contenter d'une valeur approchée de l'erreur dite *estimation d'erreur*.

Si l'on désire apprécier à l'avance l'erreur probable d'un calcul, on parle d'estimation d'erreur *a priori*.

Si l'on souhaite juger de la valeur des résultats obtenus, on parle d'estimation d'erreur *a posteriori*. Une telle estimation utilise les résultats du calcul par éléments finis et ne peut donc être mise en œuvre qu'une fois le calcul terminé.

### 11.6 Estimation d'erreur a priori

L'estimation d'erreur a priori se base sur l'*erreur de discrétisation* et le *taux de convergence*. La constante  $C$  dans (11.14) ne pouvant être calculée, cette estimation reste essentiellement qualitative.

On sait (éq. (11.11)) que l'erreur de discrétisation des déplacements est d'ordre

$$e_d = O(h^{p+1})$$

Celle des contraintes ou déformations (obtenues par  $m$  dérivations) est alors

$$e_\sigma = e_\varepsilon = O(h^{p+1-m}) \quad (11.18)$$

Celle de l'énergie de déformation (produit des contraintes par les déformations) vaut

$$e_U = O(h^{2(p+1-m)}) \quad (11.19)$$

Celle d'une norme énergétique (racine carrée de la précédente) se monte à

$$e_{||e||} = O(h^{p+1-m}) \quad (11.20)$$

Il s'agit là de valeurs théoriques ; si les éléments finis d'un maillage sont de taille ou type différents, s'ils sont distordus par la transformation isoparamétrique, si le corps est de forme irrégulière, s'il y a des concentrations de contrainte (singularités ; voir rem. 11.6), ces valeurs se dégradent considérablement. De plus, la mesure de l'erreur conserve un caractère asymptotique : elle ne se réalise qu'à la limite ( $h \rightarrow 0$ ).

En conclusion, l'erreur de discrétisation est fonction

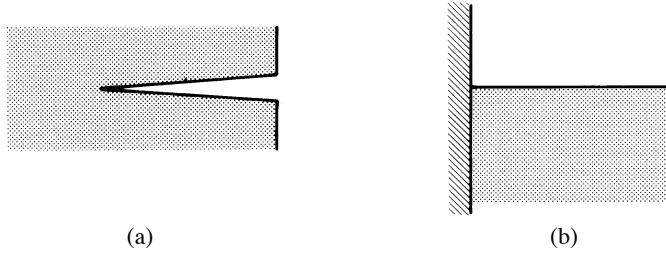
- de la taille des éléments finis (si  $h$  diminue, l'erreur diminue) ;
- du degré de l'interpolation (si  $p$  augmente, le taux de convergence augmente) ;
- des dérivées intervenant dans la solution (si  $m$  croît, l'erreur sur les dérivées s'accroît) ;
- de la régularité de la solution (présence ou absence de singularités).

En particulier, on note que *les dérivées (contraintes) convergent moins vite que les inconnues (déplacements)*.

**Remarque**

**11.6** Si le problème présente une singularité, c'est d'ordinaire l'intensité  $\lambda$  de cette dernière qui détermine le taux de convergence. L'intensité  $\lambda$  est la plus petite racine de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle représentant la solution dans le voisinage immédiat de la singularité (fig. 11.6). La règle est alors la suivante : si  $\lambda < p$ , il faut remplacer  $p$  par  $\lambda$  dans le calcul du taux de convergence. Par exemple, pour l'erreur de discrétisation en déplacement, on a

$$e_d = O(h^{\min(p,\lambda)+1}) \quad (11.21)$$



**Fig. 11.6** Singularité de l'état plan de contrainte : (a) entaille,  $\lambda = 0,5$  ;  
(b) encastrement à angle droit,  $\lambda = 0,711$ .

## 11.7 Estimation d'erreur a posteriori

L'estimation d'erreur a posteriori a pour but de juger avec soin de la valeur des résultats numériques obtenus ; elle utilise donc ces derniers, contrairement à l'estimation d'erreur a priori. De plus, elle permet de construire un processus de *corrections successives du maillage* (raffinement) permettant de ramener l'erreur à un seuil acceptable fixé d'avance (sect. 11.9).

On peut apprécier l'erreur *globalement*, en utilisant les propriétés de convergence de l'énergie de déformation  $U$  et l'analyse duale (sect. 11.2 et 11.3).

Toutefois, on obtient plus d'information par une analyse *locale*, c'est-à-dire au niveau de l'élément fini. Pour porter un jugement sur les contraintes, deux grandes classes d'estimation d'erreur se sont développées :

- estimation basée sur les *défauts d'équilibre* de la solution fournie par les éléments finis ; ces défauts sont au nombre de trois : résidus d'équilibre dans l'élément fini (équation (3.8) non vérifiée) ; déséquilibre aux limites naturelles (équation (3.11) violée) ; discontinuité des contraintes aux frontières (§ 6.3.1) ;
- estimation basée sur une *interprétation adéquate des contraintes*, obtenue à partir de certaines valeurs particulières de la solution fournie par les éléments finis ; il s'agit en fait de construire un champ de contrainte *amélioré*, c'est-à-dire *plus précis*, en particulier continu entre éléments et régulier dans les éléments.

On n'aborde ici que cette seconde classe, la plus simple à mettre en œuvre pour l'ingénieur (sect. 6.3).

Quoi qu'il en soit, la solution exacte  $\sigma_{\text{exact}}$  est inconnue. Pour qu'une estimation fonctionne, il faut trouver une valeur approchée  $\tilde{\sigma}$  qui soit plus précise que la solution  $\sigma$  fournie par le calcul par



éléments finis, puis, dans (11.16) par exemple, il faut remplacer  $\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}} - \boldsymbol{\sigma}$  par l'estimation d'erreur

$$\tilde{\mathbf{e}}_\sigma = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \quad (11.22)$$

qui fournit l'estimation d'erreur (sur les contraintes) en norme énergétique

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_\sigma\|_e^2 = \int_{\Omega_e} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{D}^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{e}}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_\sigma d\Omega \quad (11.23)$$

Or la détermination du champ  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  ne peut se faire qu'à partir de la solution brute  $\boldsymbol{\sigma} \dots$

## 11.8 Superconvergence

### 11.8.1 Propriété de superconvergence

Le taux de convergence des contraintes,  $k_\sigma = p + 1 - m$  (11.18), est inférieur,  $m$  fois, à celui des déplacements,  $k_d = p + 1$  (11.11). Or il peut exister, dans certains éléments finis, des points particuliers, les *points de contrainte optimaux*, où le taux de convergence des contraintes est d'une unité plus élevé que le taux usuel. Pour les éléments  $C^0$  ( $m = 1$ ), ce taux est identique à celui des déplacements.

Lorsqu'un taux de convergence est supérieur à la normale, on dit qu'il y a **superconvergence**. Les points de contrainte optimaux sont des *points de superconvergence des contraintes*. Les contraintes issues du calcul par éléments finis y sont plus précises qu'ailleurs ; c'est donc celles-ci qu'il faut utiliser pour calculer le champ amélioré dont dépendra l'estimation de la norme d'erreur  $\|\tilde{\mathbf{e}}_\sigma\|$ .

Ce champ peut s'obtenir par une technique de lissage faisant usage des moindres carrés, telle celle décrite au paragraphe 6.3.2 ( $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{**}$ ). En particulier, pour le lissage nodal, on doit, logiquement, prendre le degré du champ  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  d'une unité supérieur à la normale. Dans une interpolation  $C^0$  par exemple, il sera du même degré que le champ de déplacement.

Si ces conditions sont remplies, on a, en liaison avec le processus correctif évoqué au début de la section précédente, le résultat suivant (sans démonstration) :

**Propriété de superconvergence** : les corrections déduites d'une estimation d'erreur utilisant une approximation superconvergente font converger la solution vers la solution exacte.

En d'autres termes, l'erreur tend vers zéro quand la taille des éléments finis tend vers zéro : l'estimation d'erreur est asymptotiquement convergente.

### 11.8.2 Points de superconvergence des contraintes

Les coordonnées naturelles des points de superconvergence des contraintes pour les interpolations de Lagrange et Serendip sont données au tableau 11.7.

Tableau 11.7

Degré	Lagrange	Serendip
1	0	0
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	$\pm 1/\sqrt{3}$
3	0 et $\pm\sqrt{5}/3$	0

Jusqu'au degré 2, ces points, identiques pour Lagrange et Serendip, sont les mêmes que les points d'intégration de Gauss de l'intégration exacte (Lagrange 1D) ou réduite (Lagrange et Serendip 2D et 3D). Au degré 3, il n'y a plus coïncidence avec les points de l'intégration numérique de Gauss pour Lagrange (sauf le centre), et Serendip n'a plus qu'un point de contrainte optimal. La différence entre  $\sqrt{5}/3 \cong 0,7454$  et  $\sqrt{3}/5 \cong 0,7746$  n'étant toutefois pas très grande, les points de l'intégration de Gauss d'ordre 3 sont très souvent considérés comme points de contrainte optimaux.

### Remarques

**11.7** Les points de superconvergence des déplacements sont les nœuds.

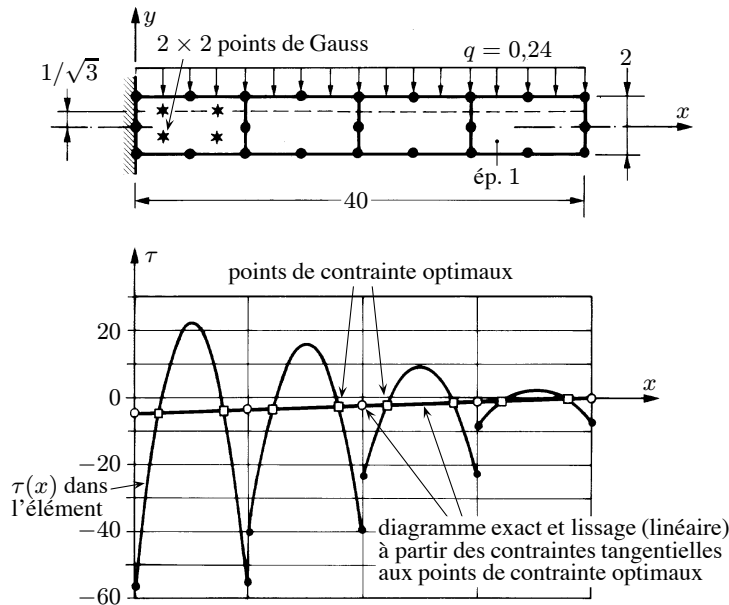
**11.8** La transformation isoparamétrique modifie la position des points de superconvergence des contraintes. Il est donc recommandé de ne distordre que peu les éléments finis.

**11.9** La technique exposée ci-dessus est connue sous l'abréviation SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) ou méthode ZZ (du nom des auteurs Zienkiewicz et Zhu).

### Exemple 11.2

On peut traiter la poutre console à section rectangulaire de la figure 11.8 comme un problème d'état plan de contrainte. Sous l'effet d'une charge uniformément répartie, l'effort tranchant et les contraintes tangentielles longitudinales varient linéairement.

On discrétise ce solide plan par quatre éléments rectangulaires à huit nœuds (type Serendip, fig. 7.10b). L'interpolation des déplacements, incomplète au degré trois, conduit à une variation quadratique des contraintes tangentielles. Que l'intégration soit exacte ( $3 \times 3$  points de Gauss) ou réduite ( $2 \times 2$  points de Gauss, cas de la figure), les contraintes tangentielles sont *exactes* aux points de contrainte optimaux ( $2 \times 2$  points de Gauss), alors qu'elles varient très brutalement dans l'élément et sont discontinues d'un élément à l'autre. Le lissage local (linéaire) conduit donc directement à la solution exacte.



**Fig. 11.8** Poutre console discrétisée par quatre éléments quadratiques et contrainte tangentielle longitudinale le long de la ligne  $y = 1/\sqrt{3}$  (passant par les points de contrainte optimaux supérieurs).

## 11.9 Utilisation de l'erreur et adaptation du maillage

### 11.9.1 Erreur relative globale

A partir des contraintes calculées aux points de superconvergence, on peut construire un champ de contrainte  $\tilde{\sigma}$  permettant de calculer, élément par élément, l'estimation de l'erreur (11.23), dont on déduit, par (11.17), l'estimation de l'erreur sur tout le domaine.

En pratique, on utilise des estimations relatives (exprimées en pour cent) en normant ces valeurs par une norme énergétique, ordinairement celle des contraintes  $\|\sigma\|$ . Avec (11.16), la loi de Hooke (3.9) et le théorème de Clapeyron intérieur, on a, sur tout le domaine,

$$\|\sigma\|^2 = \int_{\Omega} \sigma^T \mathbf{D}^{-1} \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon^T \sigma \, d\Omega = 2U \quad (11.24)$$

On devrait utiliser  $\|\sigma_{\text{exact}}\|$ , qui est inconnu ; pour les éléments finis du modèle déplacement et des conditions aux limites essentielles homogènes (pas de déplacements aux appuis), on a (sans démonstration)

$$\|\sigma_{\text{exact}}\|^2 = \|\tilde{\sigma}\|^2 + \|\tilde{e}_{\sigma}\|^2 \quad (11.25)$$

L'estimation relative globale d'erreur est ainsi

$$\tilde{\eta} = \frac{\|\tilde{e}_{\sigma}\|}{\sqrt{2\tilde{U} + \|\tilde{e}_{\sigma}\|^2}} \quad (11.26)$$

L'estimation  $\tilde{\eta}$  donne l'erreur relative moyenne des contraintes sur tout le domaine et doit être inférieure à une valeur prescrite (par l'utilisateur) ou *précision*  $\bar{\eta}$

$$\tilde{\eta} \leq \bar{\eta} \quad (11.27)$$

#### Remarque

**11.10** La valeur locale  $\tilde{\eta}_e$  ne peut pas être utilisée pour des raisons de sensibilité numérique. Semblablement, la représentation graphique de l'erreur locale absolue  $\|\tilde{e}_{\sigma}\|_e$  est difficile, car sa répartition est très irrégulière.

### 11.9.2 Adaptation de maillage

Si l'inégalité (11.27) n'est pas satisfaite, il faut chercher à corriger le maillage en fonction de l'erreur locale (11.23).

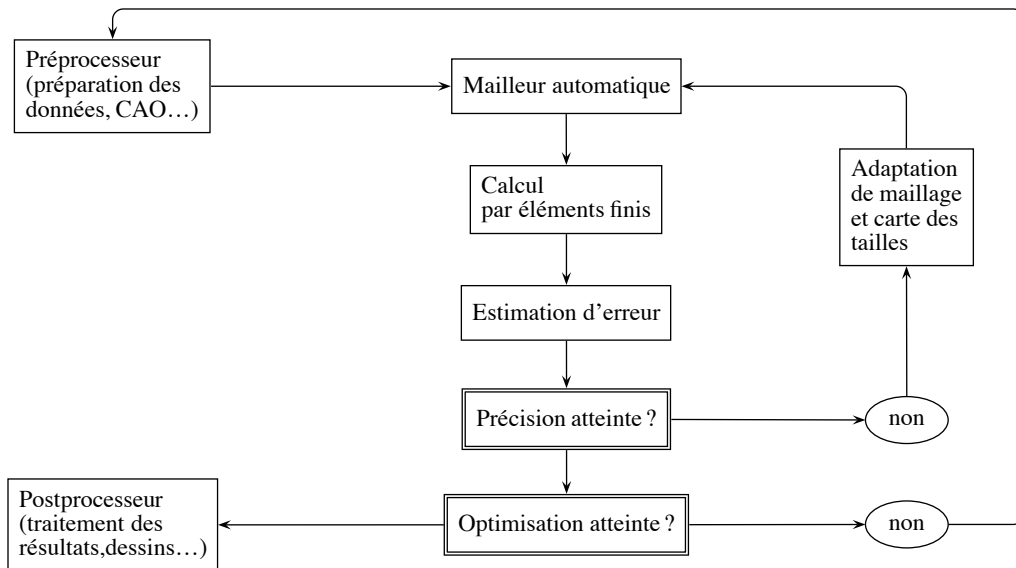
On peut essayer d'enrichir le maillage là où la précision est insuffisante, mais cette technique est peu performante.

Il s'avère nettement plus judicieux de remailler entièrement le domaine en cherchant à adapter la nouvelle taille des éléments finis – en fonction de l'erreur locale – à la précision souhaitée  $\bar{\eta}$ . De plus, il convient de minimiser le coût du calcul en minimisant le nombre d'éléments ou, éventuellement, en répartissant uniformément l'erreur sur le maillage. Quel que soit le critère retenu, on peut établir une *carte des tailles* qui guidera le mailleur automatique lors du remaillage.

Cette procédure, qui peut être automatisée en machine, s'appelle **méthode d'adaptation** ou **d'adaptativité du maillage**. Partant d'un maillage grossier, le premier calcul viole la condition (11.27) ; on maille à nouveau, on recalcule, on teste la précision (11.27) et on itère de la sorte jusqu'à la satisfaire.

Les méthodes d'adaptation de maillage permettent d'envisager la mise au point de procédures d'*automatisation des calculs* (fig. 11.9), allant des données (éventuellement fournies par un système de CAO) aux résultats finaux, incluant éventuellement un processus d'optimisation (poids, forme...). Cependant, les obstacles auxquels on se heurte aujourd'hui sont encore nombreux :

- il faut absolument disposer d'estimations d'erreur très fiables, quel que soit le problème traité ;
- les mailleurs automatiques, surtout en 3D, peuvent avoir de la peine à respecter la carte des tailles, dès qu'il y a d'importantes variations de tailles (zones à forts gradients des contraintes par exemple) ;
- tenir compte des conditions aux limites naturelles (rem. 6.12) améliore sensiblement les performances, mais n'est pas aisé à réaliser ;
- l'adaptativité ne traite qu'un cas de charge à la fois, alors qu'en pratique l'ingénieur a d'ordinaire affaire à de multiples cas de charge ;
- le choix d'éléments finis permettant l'adaptativité est encore très limité.



**Fig. 11.9** Automatisation des calculs.

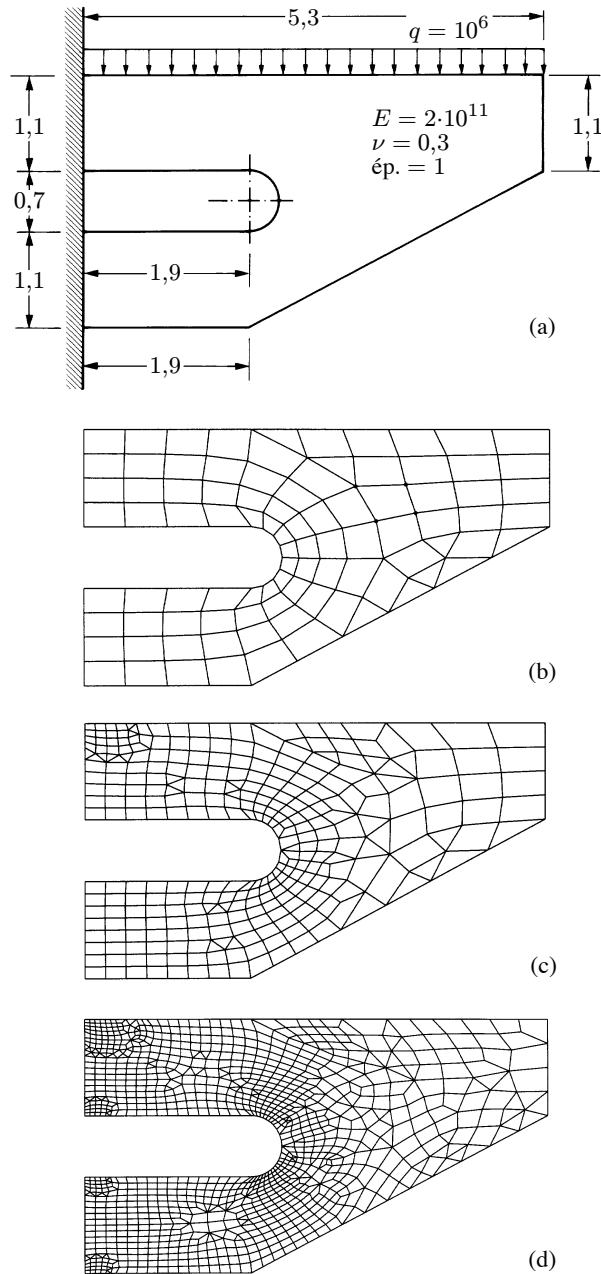
### Remarques

**11.11** Le critère de minimisation du nombre d'éléments est particulièrement important pour abaisser le coût des calculs en 3D.

**11.12** Pour une précision de l'ordre de 5 %, il faut trois à cinq itérations.

### Exemple 11.3

La console de la figure 11.10, uniformément chargée, est modélisée en état plan de contrainte et discrétisée par des éléments finis quadrilatéraux essentiellement (quatre nœuds) et triangulaires (trois nœuds). On impose une précision relative de 7 %, atteinte par trois calculs.



**Fig. 11.10** Raffinement adaptatif : (a) donnée ; (b) maillage initial (113 nœuds, 92 éléments,  $\tilde{\eta} = 22\%$ ) ; (c) maillage intermédiaire (326 nœuds, 301 éléments,  $\tilde{\eta} = 12,8\%$ ) ; (d) maillage final (1 105 nœuds, 1 083 éléments,  $\tilde{\eta} = 7,2\%$ ). (Source : Beckers P., Zhong H. G., *Revue des estimateurs d'erreur a posteriori et expériences numériques sur l'adaptation des maillages éléments finis*, Rapport SF 179, LTAS, Université de Liège, 1992.)

## 11.10 Lexique

Convergence	Etude des propriétés, conditions et mesures de la convergence de la méthode des éléments finis vers la solution exacte.
<ul style="list-style-type: none"> <li>• mesure énergétique</li> <li>• mesure globale par l'énergie de déformation <math>U</math> (<math>U</math> converge vers la solution exacte)</li> </ul>	
Erreur de discrétisation	Erreur de troncature liée à l'interpolation.
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>e = O(h^k)</math> ou <math>e \leq Ch^k</math></li> </ul>	
Taux de convergence	Exposant $k$ dans l'expression de l'erreur de discrétisation.
Superconvergence	Taux de convergence supérieur au taux normal (d'un ordre en général) ; dans un élément fini, point de superconvergence des contraintes ; un processus correctif basé sur la superconvergence conduit à la solution exacte.
<ul style="list-style-type: none"> <li>• point de contrainte optimal</li> <li>• propriété de superconvergence</li> </ul>	
Norme énergétique de l'erreur sur les contraintes	Norme quadratique intégrale, pondérée par la matrice d'élasticité, relative
<ul style="list-style-type: none"> <li>• locale</li> <li>• globale</li> </ul>	à un élément, au domaine entier.
Estimation d'erreur	Evaluation approchée de l'erreur
<ul style="list-style-type: none"> <li>• a priori</li> <li>• a posteriori</li> </ul>	avant calcul, après calcul.
Erreur relative	Erreur rapportée à une référence (%).
Adaptation ou adaptativité du maillage	Reconstruction du maillage de manière à garantir, après quelques itérations, une certaine précision (par exemple sur l'estimation de l'erreur relative en contrainte).

# 12 Modélisation et discrétisation

## 12.1 Introduction

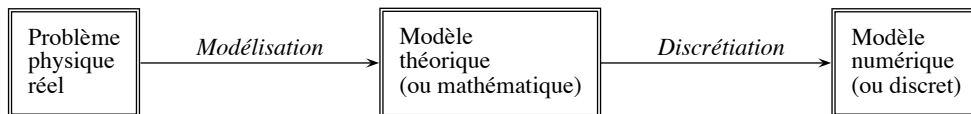
Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la *modélisation* et la *discrétisation* (chap. 1 et fig. 12.1). Ces opérations se font en deux temps,

- modélisation d'abord,
- discrétisation ensuite,

et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique,

- représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu,
- choix des éléments finis et du maillage.

Ici, on explique ces opérations en considérant le problème pratique de l'étude d'une *structure*, au sens large.



**Fig. 12.1** Etapes de l'analyse d'un problème aux limites.

### Remarques

**12.1** Certains n'utilisent que le terme *modélisation*. La modélisation comprend alors deux étapes (modélisation théorique et modélisation numérique).

**12.2** Certaines sections des chapitres 12 et 13 s'inspirent directement de G. Sander, *La méthode des éléments finis – Outil moderne de calcul des structures*, Rapport SF 15 du Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales (LTAS) de l'Université de Liège. Ecrites en 1972, ces considérations gardent aujourd'hui toute leur valeur.

## 12.2 Modélisation du comportement de la structure

### 12.2.1 Importance de la modélisation

La modélisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux, capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. C'est à ce stade que s'opèrent deux options fondamentales :

- choix cohérent du *schéma statique* et de la *théorie* décrivant la structure ;
- choix pertinent des *lois constitutives* décrivant chaque matériau.

*L'ingénieur prend ici ses responsabilités quant à la validité des hypothèses qu'il adopte pour analyser son ouvrage.*

Pratiquement, cette modélisation consiste

- quant à la *structure*, à ramener cette dernière à une géométrie simple en choisissant des axes (barres, poutres, câbles), des plans (parois, plaques), des surfaces (coques), des volumes (solides), après avoir éliminé certains détails (goussets, petites excentricités...), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges, à tenir compte d'éventuelles symétries ;
- au point de vue de la *rhéologie*, à choisir de façon réaliste les lois constitutives des matériaux, décrivant tant les réponses mécaniques classiques (linéarité, anisotropie, plasticité...) que les phénomènes physiques particuliers (teneur en eau, discontinuités, perméabilité...), à déterminer les propriétés (paramètres) qui définissent ces lois et phénomènes, et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales...).

*La modélisation est l'étape clé de toute analyse.* Cette observation est d'ailleurs valable quelle que soit la méthode de calcul employée. Elle revêt cependant un caractère plus important dans le cas de la méthode des éléments finis du fait que

- le choix des comportements susceptibles d'être envisagés est beaucoup plus large,
- les structures abordées sont en général plus complexes.

En génie civil surtout, avant de modéliser une structure en vue de son calcul, il convient de la situer correctement par rapport à son contexte, l'*ouvrage* au sens large. L'ouvrage de génie civil se place toujours dans un cadre très vaste (implantation, exécution, montage, destination, prix, environnement, planification, gestion, devenir, maintenance, sécurité...). La structure à modéliser peut aller d'un détail de l'ouvrage à sa quasi-totalité. Elle représente déjà une étape de structuration et de simplification plus ou moins poussée de la partie d'ouvrage à analyser.

Plusieurs questions importantes se posent toujours lors de la modélisation.

### 12.2.2 Quelle est la fonction structurale des différents composants ?

#### Quelles sont les fonctions essentielles et secondaires ?

Les choix sont très nombreux dans ce domaine. Il est possible de modéliser tout ou partie de la structure en solide, en coque ou en plaque (d'épaisseur modérée ou mince), en membrane, en poutre (courbe ou droite, à section variable ou constante, avec ou sans effet dû à l'effort tranchant...), en barre, ou encore en certaines de ces catégories en supposant une symétrie de révolution, un état plan de



déformation, etc. Dans cette énumération, on décroît en complexité, mais aussi en coût. Si aujourd'hui le coût du calcul importe assez peu, il est néanmoins illusoire de modéliser une structure par une théorie plus complexe qu'il n'est nécessaire sous prétexte d'assurer une meilleure précision. En effet, la puissance des ordinateurs est très loin d'être illimitée et, de plus, un choix malheureux conduit inmanquablement à des imprécisions théoriques et numériques. Il est par exemple clair qu'une modélisation d'une plaque mince par la mécanique 3D des solides est le plus souvent largement inférieure à celle réalisée avec une théorie spécialisée de plaque mince.

La méthode des éléments finis étant souvent utilisée pour représenter des comportements structuraux complexes et variés, *la modélisation exige de l'ingénieur une vue très claire de la mécanique des structures et solides, et des limitations liées à chaque hypothèse. L'expérience montre que c'est dans ce domaine que l'ingénieur abordant la méthode des éléments finis rencontre le plus de difficultés et commet le plus d'erreurs.*

### 12.2.3 Avec quelle minutie faut-il représenter la structure et les matériaux ?

Chaque détail (renfort, découpe, gousset, raidisseur, moyen d'assemblage, appareil d'appui, pièce d'ancrage...) d'une structure peut être représenté dans une analyse par éléments finis. Certains détails ont une influence essentielle sur le comportement structural, d'autres non. D'un autre côté, il peut s'avérer plus pratique de répartir certains détails ou d'uniformiser certaines propriétés. Par exemple, si une plaque est raidie par un seul raidisseur, la représentation précise de ce dernier est primordiale ; si une plaque est raidie de nombreux raidisseurs, elle peut être remplacée par une plaque orthotrope.

*C'est encore le jugement de l'ingénieur qui dicte la solution à adopter.* Celle-ci peut être différente selon le type d'analyse à effectuer (rôle du détail).

De même, le comportement des matériaux peut être représenté avec plus ou moins de fidélité. Très souvent, on se contente d'une réponse élastique linéaire (même pour le béton) et de propriétés mécaniques constantes, alors que certains paramètres ont de fortes variations (bois, sols) ou évoluent avec le temps.

La représentation de la structure et des matériaux peut aussi devoir s'adapter à des circonstances particulières : mesures en cours de construction ou sur l'ouvrage construit et confrontation avec le calcul ; mesure des propriétés des matériaux utilisés dans l'ouvrage ; etc.

### 12.2.4 Quels sont les buts de l'analyse ?

La modélisation peut dépendre fortement des buts poursuivis, de circonstances particulières ou d'un objectif spécifique à atteindre (enjeu, conjoncture, connaissances scientifiques, objectifs techniques, expérience acquise, étapes du projet, événement inattendu...). L'analyse peut devoir être

- statique ou dynamique ;
- globale ou détaillée ;
- linéaire ou non linéaire ;
- dépendante ou indépendante du temps.

Par exemple, en statique, où les contraintes sont les résultats essentiels, il faut le plus souvent suivre avec davantage de détail la structure que pour une analyse dynamique, où ce qui importe le plus est une représentation globale correcte des rigidités et des masses. Le coût de la résolution peut également

varier fortement selon le type d'analyse, et on peut éventuellement devoir en tenir compte ; mais, de façon générale, le coût est un mauvais guide.

En génie civil, les décisions relatives au calcul d'un ouvrage constituent un aspect important du projet. Il convient de réfléchir soigneusement aux étapes du calcul (en avant-projet, des modélisations très simples sont suffisantes), au type d'analyse à effectuer et au degré de complexité et précision souhaité. Tout calcul par éléments finis doit être un apport valorisant et justifiant les divers aspects du projet (sécurité, précision, choix techniques, compréhension du fonctionnement, optimisation...). Il est inutile de calculer pour le plaisir...

### 12.2.5 Conclusion

En résumé, la modélisation fournit un modèle mathématique

- de la géométrie,
- des charges,
- des conditions aux limites essentielles,
- des comportements et phénomènes physiques des matériaux.

*C'est une étape essentielle d'une analyse par éléments finis, qui reste un art et qui, en génie civil surtout, doit être planifiée de manière judicieuse.*

## 12.3 Discrétisation de la structure modélisée

### 12.3.1 Importance de la discrétisation

L'opération de discrétisation est aussi importante que celle de modélisation. Elle implique essentiellement deux choix :

- l'un porte sur le type de grandeur à discrétiser, soit, plus explicitement, sur le *type d'élément fini* à utiliser ;
- l'autre sur la  *finesse* de cette discrétisation, en liaison avec le *maillage*.

On pourrait penser, aujourd'hui, que ces choix ont perdu en importance : vu les progrès réalisés par la méthode des éléments finis, certains estiment que les éléments finis sont maintenant performants et que les méthodes d'analyse de l'erreur garantissent la précision et couvrent le calculateur. Rien n'est plus faux. Certains éléments restent médiocres, ou sont médiocres s'ils sont mal utilisés, et l'analyse d'erreur est restreinte à certains types d'éléments, voire toujours absente de bien des programmes.

Ainsi l'ingénieur reste confronté à d'importantes questions.

### 12.3.2 Quels éléments finis choisir ?

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix

très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- modèle (déplacement, équilibre, mixte, hybride, autre) ;
- convergence (critères et taux) ;
- degré (des divers champs) ;
- nœuds, et inconnues aux divers nœuds ;
- compatibilité des éléments les uns avec les autres ;
- performances et limitations.

*Une bonne connaissance des divers éléments finis est le guide le plus précieux de ce choix, qui engage aussi fortement la responsabilité de l'ingénieur.*

### 12.3.3 Comment choisir le maillage et quelle doit en être la finesse ?

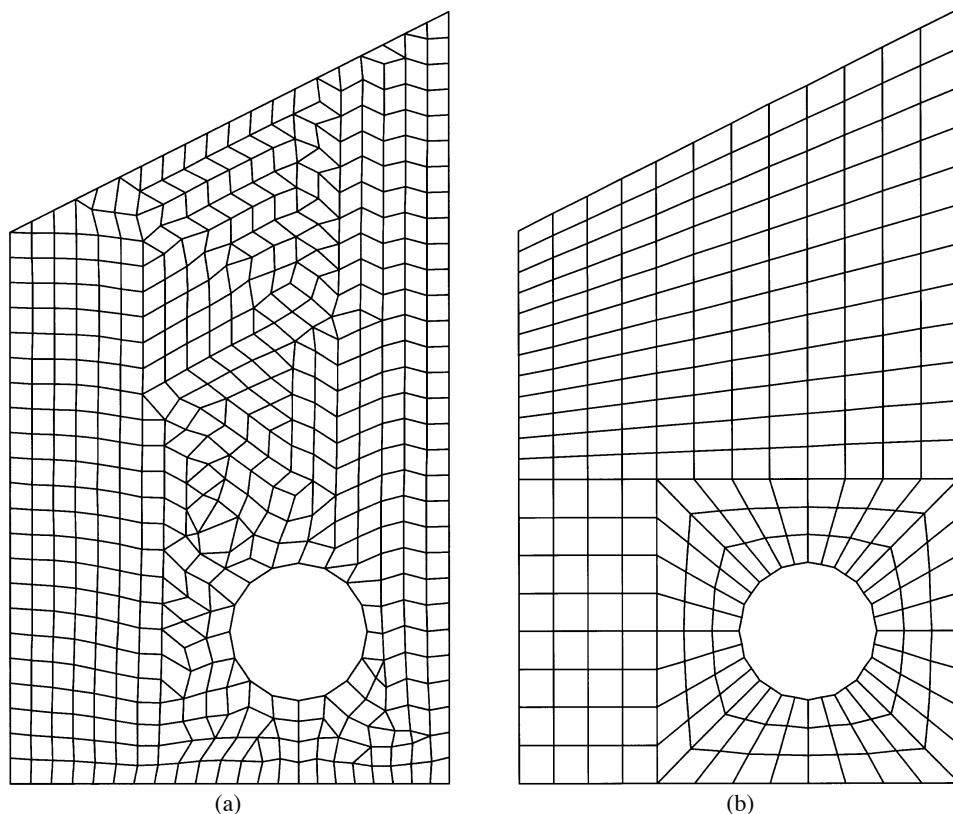
L'expérience du calculateur est ici primordiale ; elle permet d'adopter rapidement un maillage correct, anticipant la solution et évitant de devoir s'y reprendre à plusieurs fois avant d'obtenir une solution satisfaisante.

Pratiquement, la subdivision en éléments finis est guidée essentiellement par la géométrie, à savoir par les discontinuités (trous, variations d'épaisseur, d'inertie ou de matériau...), les conditions d'appui et éventuellement de chargement, les étapes de construction, les zones à forte variation des contraintes ou déplacements (découpage plus fin), certains aspects de la rhéologie (orthotropie, lignes de faille, précision des lois...), etc.

Quelques règles pour réaliser un bon maillage sont : mailler régulièrement, éviter les distorsions ou disproportions géométriques des éléments (sect. 7.7), s'adapter aux caractéristiques des éléments, assurer la conformité, surveiller les approximations géométriques (bord courbe maillé par des segments de droite), profiter de la ressemblance des éléments, passer progressivement d'un maillage grossier à un maillage fin.

Il est indispensable de contrôler et retoucher le maillage produit par un mailleur automatique (fig. 12.2).

Enfin, on doit pouvoir transformer un maillage sans devoir tout recommencer. Ce cas se présente si l'on doit raffiner localement une région, ou lors du calcul tenant compte des étapes de construction. De même, il faut pouvoir changer les propriétés de certains éléments (épaisseur, module d'élasticité...), faire apparaître ou disparaître des éléments, faire évoluer les conditions d'appui, etc.

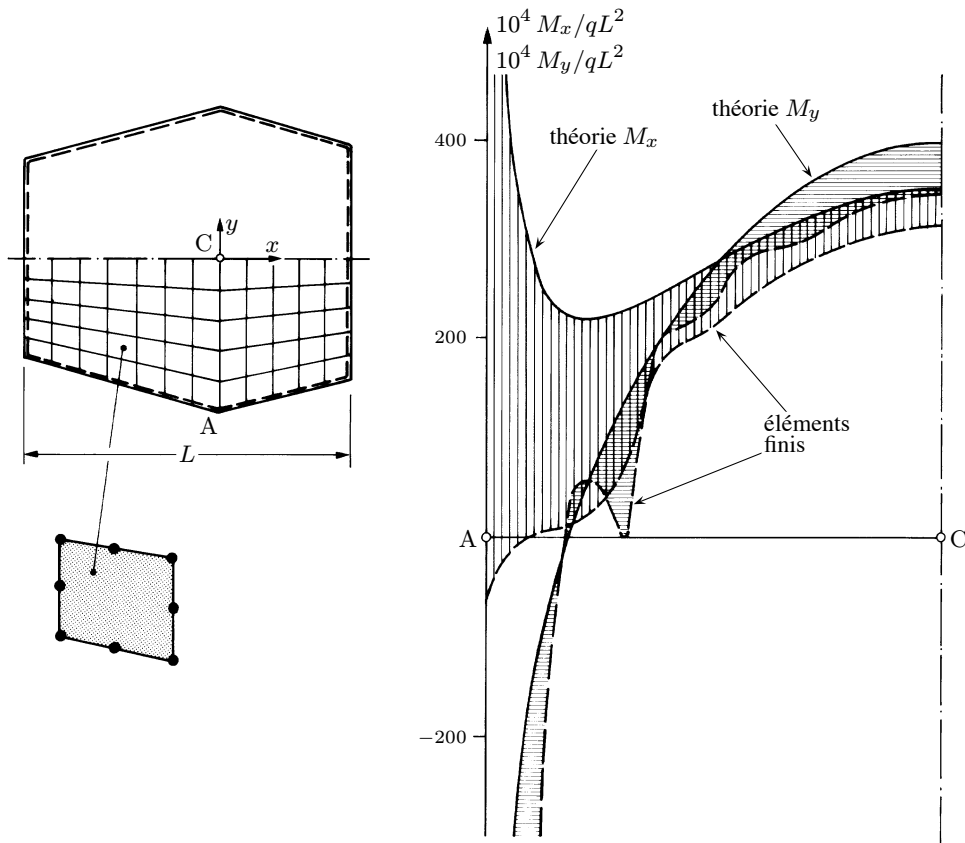


**Fig. 12.2** Maillages produits par le mailleur plan de la chaîne de programmes CANDIDE (EIT S.A.) :  
 (a) maillage libre ; le mailleur produit autant de quadrilatères que possible, et comble avec des triangles ;  
 quelques retouches sont souhaitables (par exemple à gauche au-dessus du trou) ;  
 (b) maillage imposé, dit *structuré*, par panneaux prédéfinis.

### Remarques

**12.3** On prendra garde aux *points singuliers* qu'il faut entourer de plusieurs couches de petits éléments de taille décroissante ; ce raffinement est indispensable, non seulement à la bonne représentation de la solution dans le voisinage du point singulier, mais surtout pour réduire l'erreur, dite de *pollution*, qui, dans le cas d'une forte singularité, tend à envahir tout le domaine (fig. 12.3).

**12.4** Plus on modélise de façon complexe et plus on maille finement, plus précis seront – en principe – les résultats ; mais leur exploitation sera aussi, pour l'ingénieur, d'autant plus lourde et laborieuse...



**Fig. 12.3** Erreur de pollution due à une singularité dans une plaque fléchie simplement appuyée et uniformément chargée ( $q$ ) : à l'angle obtus A, les moments tendent vers l'infini. Diagrammes de  $M_x$  et  $M_y$  le long de AC ; calcul numérique avec l'élément biquadratique de type Mindlin (intégration numérique  $2 \times 2$  ;  $n_d = 645$  ; appuis durs). Erreur sur la flèche en C : 20,6 %. (Source : Jirousek J., Venkatesh A., *A new FE approach for adaptive reliability assurance*, Comp. Struct., Vol. 37, 1990, pp. 217-230.)

### 12.3.4 Quel degré d'interpolation choisir ?

On peut hésiter, parfois, entre l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis de degré faible ou, au contraire, d'un plus petit nombre utilisant des formulations plus compliquées. La réponse est évidente : à nombre égal de degrés de liberté, les éléments de degré élevé fournissent de meilleurs résultats. De plus, la quantité des données est aussi plus faible. Il existe cependant certaines limitations pratiques importantes à l'emploi des éléments de degré trop élevé :

- si l'état de contrainte est relativement simple, ils n'apportent qu'un gain de précision dérisoire ; si seules certaines zones nécessitent une subdivision très fine (contour compliqué, trou...), l'utilisation de tels éléments pour l'ensemble de la structure est un luxe inutile ; dans des cas de ce genre, il peut être avantageux de disposer d'un programme permettant l'emploi simultané d'éléments simples et compliqués ;

- les éléments de degré élevé accroissent la largeur de bande du système global d'équations ; cette augmentation devient rapidement inacceptable dans les problèmes non linéaires résolus itérativement, car le temps de calcul devient excessif ; dans de tels problèmes, le temps même de construction des matrices de rigidité des éléments peut devenir un facteur déterminant du choix entre éléments simples et compliqués.

### 12.3.5 Conclusion

La discrétisation fournit un modèle numérique du modèle mathématique de la structure. Cette étape importante, précédant le calcul proprement dit, fait appel aux connaissances et à l'expérience de l'ingénieur dans le domaine très vaste du calcul par éléments finis et de l'informatique.

*La maîtrise de la méthode des éléments finis et de son implantation numérique, ainsi que de bonnes notions sur les divers modèles d'éléments, leurs propriétés typiques et leurs qualités respectives, sont une exigence essentielle.*

## 12.4 Responsabilité de l'ingénieur

Dans les sections précédentes, on a évoqué la responsabilité de l'ingénieur. Le problème est réel, car on peut affirmer aujourd'hui, où de multiples programmes commerciaux sont librement disponibles, que *la méconnaissance de la méthode des éléments finis représente le plus grand danger dans l'utilisation et l'interprétation des résultats obtenus.*

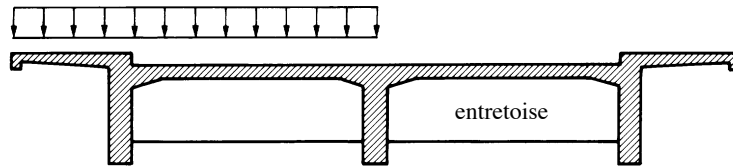
En modélisation numérique, repérer quels sont les paramètres importants nécessite un jugement réfléchi et prudent (sect. 12.2 et 12.3). Or un programme n'aidera en rien à formuler ce jugement : l'ingénieur est seul responsable tant de l'obtention de solutions correctes que de la maîtrise et compréhension des méthodes, des algorithmes, de la logique, des potentialités et des limitations des programmes qu'il utilise.

L'ingénieur, projeteur professionnel, reste seul responsable de la conception sûre et correcte d'une structure. *Cette responsabilité inclut celle de l'usage des programmes de calcul.* En effet, les producteurs de programmes ne peuvent contrôler l'usage qui sera fait de leurs produits. De ce fait, ils n'ont pratiquement aucune responsabilité légale, même s'ils ont la responsabilité morale de délivrer des produits de qualité.

L'ordinateur n'est qu'un *outil* ; il ne peut remplacer le jugement sain de l'ingénieur et ne dégagera jamais l'ingénieur de ses responsabilités.

## 12.5 Application

Pour un pont en béton précontraint à trois poutres, dont la section transversale est représentée schématiquement à la figure 12.4, il s'agit de proposer, brièvement, quelques modélisations et la discrétisation associée.



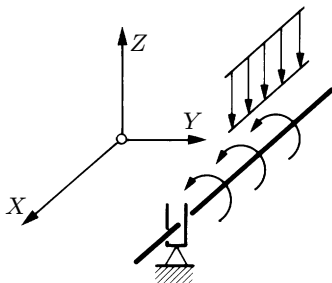
**Fig. 12.4** Coupe schématique d'un pont droit.

### Modélisation

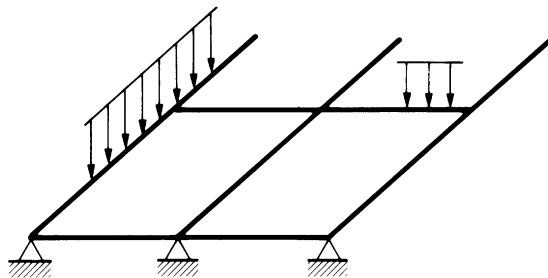
On admet que le béton est élastique, linéaire, isotrope et homogène, caractérisé par un module de Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$  moyens.

Pour la structure, diverses théories sont possibles.

- 1) *Poutre à section transversale ouverte indéformable* (fig. 12.5) : on ramène tout le pont à son seul axe longitudinal, supposant les entretoises suffisamment rigides et nombreuses ; on n'obtient aucun renseignement sur la flexion des entretoises et de la dalle ; il n'y a ni répartition transversale, ni traînage de cisaillement.
- 2) *Grille de poutres* (fig. 12.6) : on découpe fictivement la dalle entre les poutres et les entretoises ; la largeur collaborante peut être difficile à choisir ; la flexion de la dalle est ignorée ; les charges doivent être ramenées sur les poutres.



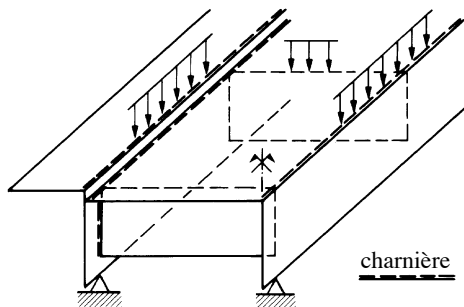
**Fig. 12.5** Poutre spatiale.



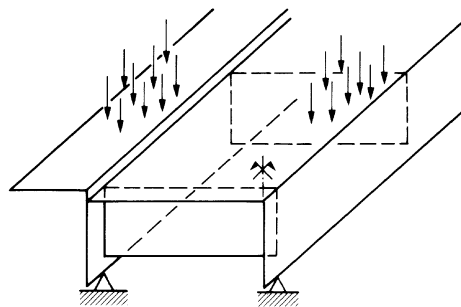
**Fig. 12.6** Grille de poutres.

- 3) *Théorie membranaire des structures plissées* (fig. 12.7) : le pont se ramène à un assemblage articulé de parois travaillant en état plan de contrainte, dont on néglige la rigidité flexionnelle ; les charges (verticales) doivent agir dans le plan des parois, donc sur les âmes des poutres et entretoises ; la flexion du tablier reste inconnue.

- 4) *Théorie des coques* (fig. 12.8) : la structure travaille comme un ensemble de plaques-membranes minces encastrées les unes dans les autres ; les charges peuvent être réparties.



**Fig. 12.7** Modélisation 3D en membranes (demi-pont seul représenté).



**Fig. 12.8** Modélisation en plaques-membranes (demi-pont).

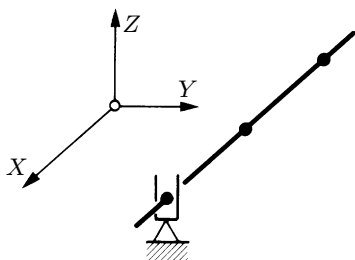
Les modélisations proposées sont toutes imparfaites ; par suite, les résultats du calcul ne peuvent être considérés comme corrects que dans le cadre de ces modélisations.

### Discrétisation

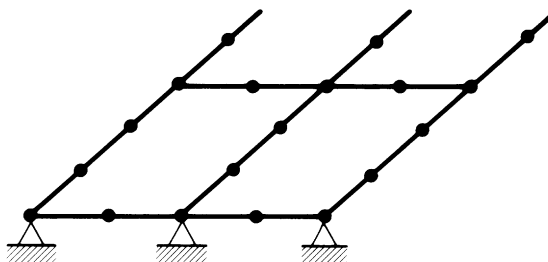
Il y a une légère excentricité entre les plans moyens des dalles des trottoirs et de la chaussée. Les deux premières modélisations peuvent en tenir compte sans difficulté. Par contre, pour les deux dernières, il est délicat d'introduire une étroite bande d'éléments finis verticaux (distorsion des éléments et disproportion des rigidités). Pour simplifier, on réduit l'ensemble du tablier à une seule plaque mince d'épaisseur équivalente constante, négligeant l'excentricité des trottoirs. Ce petit problème montre qu'il peut y avoir interaction entre la modélisation et la discrétisation.

Pour discrétiser, on subdivise la structure en éléments dont les caractéristiques et la forme dépendent de la modélisation choisie.

- 1) *Eléments de poutre spatiale* : six inconnues par nœud (fig. 12.9).
- 2) *Eléments de poutre pour grille de poutres* : trois inconnues par nœud (fig. 12.10).



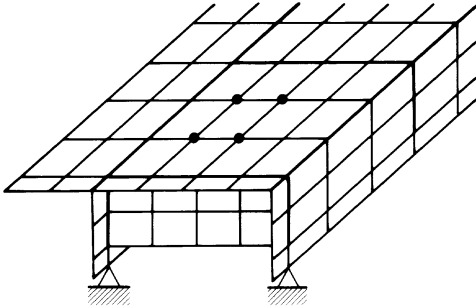
**Fig. 12.9** Discrétisation en éléments de poutre spatiale.



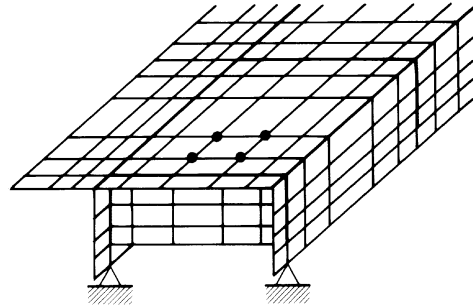
**Fig. 12.10** Discrétisation en éléments de poutre pour grille de poutres.



- 3) *Eléments rectangulaires de membrane* : deux inconnues par nœud pour l'élément 2D, deux ou trois pour l'assemblage 3D, avec un problème de même nature que celui relatif au sixième degré de liberté (§ 9.7.3), mais au niveau des seuls degrés de liberté de translation (problème du déplacement normal au plan dans un groupe d'éléments coplanaires) (fig. 12.11).
- 4) *Eléments plans rectangulaires de coque* : cinq ou six inconnues par nœud (fig. 12.12).



**Fig. 12.11** Maillage d'éléments rectangulaires de membrane spatiale (demi-pont).



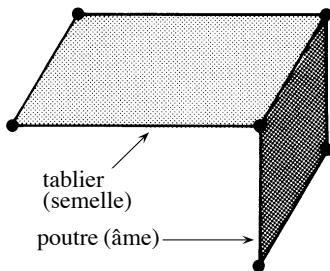
**Fig. 12.12** Maillage d'éléments rectangulaires plans de coque (demi-pont).

## 12.6 Exercices

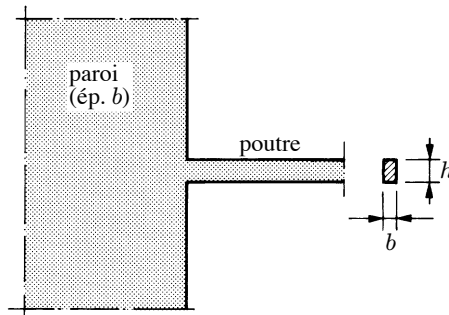
**12.6.1** On a proposé quatre modélisations et discrétisations pour le pont de la figure 12.4 (sect. 12.5). Discuter chacune d'elles plus en détail. Observer qu'il y a encore plusieurs choix importants à opérer et qu'on a passé sous silence divers problèmes de géométrie et matériau. Discuter les contraintes et simplifications liées à ces choix et problèmes.

**12.6.2** Dans la discrétisation en éléments rectangulaires plaques-membranes de la structure de la section 12.5 (fig. 12.4), on adopte, pour l'état membranaire, le rectangle bilinéaire de la figure 7.7 et, pour l'état flexionnel, le rectangle bicubique de la figure 9.12. Etudier la conformité à la jonction âme-semelle (à angle droit) de deux éléments.

**12.6.3** Une poutre à section rectangulaire  $h \times b$  s'encastre dans une paroi d'épaisseur  $b$ . Discuter la modélisation et la discrétisation de ce problème plan.



**Fig. Ex. 12.6.2**

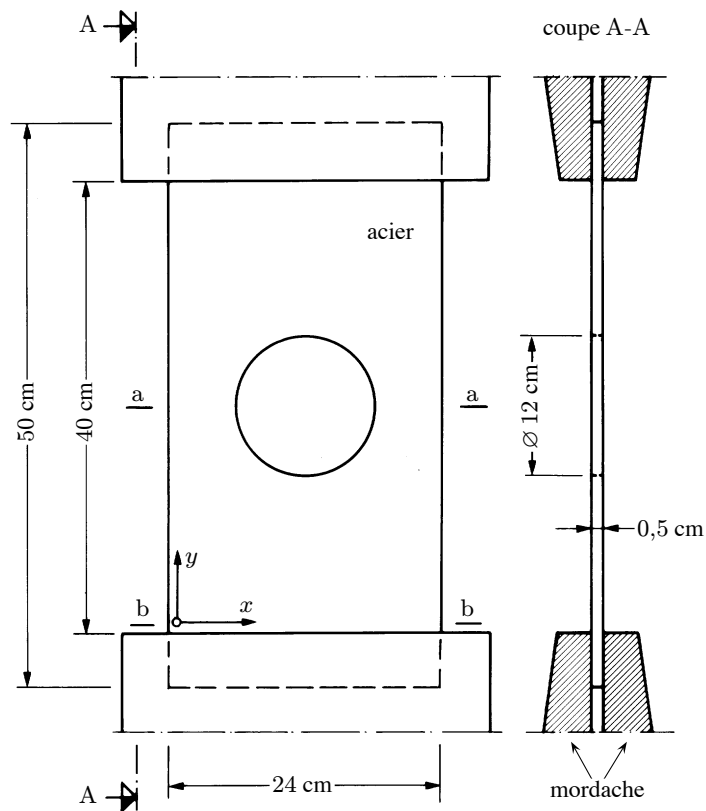


**Fig. Ex. 12.6.3**

**12.6.4** Dans la discrétisation en éléments rectangulaires de membrane de la structure de la section 12.5 (fig. 12.4), on évoque un problème similaire à celui traité au paragraphe 9.7.3. Expliquer ce problème. Observer aussi que la discrétisation 3D en membrane produit des mécanismes sur certaines zones de la structure.

**12.6.5** On veut simuler par éléments finis l'essai de traction (limité au domaine élastique) d'une paroi rectangulaire percée d'un trou circulaire central. On dispose pour cela d'éléments triangulaires et rectangulaires linéaires et quadratiques, pouvant être isoparamétriques.

- 1) Choisir une modélisation ; tenir compte des symétries et préciser toutes les conditions aux limites.
- 2) Proposer une discrétisation ; discuter et justifier ce choix .
- 3) En déduire le nombre total de degrés de liberté ( $n_d$ ), le nombre des inconnues déplacements ( $n_{dep}$ ) et celui des blocages ( $n_{rea}$ ).
- 4) L'étude des résultats numériques montre que, dans les sections a-a et b-b, apparaissent des contraintes normales dans le sens non seulement longitudinal ( $\sigma_y$ ), mais aussi transversal ( $\sigma_x$ ) ; est-ce correct ?



**Fig. Ex. 12.6.5**

# 13 Valeur de la méthode des éléments finis

## 13.1 Puissance de la méthode des éléments finis

### 13.1.1 Possibilités et limitations

L'avantage essentiel de la méthode des éléments finis réside dans sa souplesse d'adaptation aux problèmes pratiques. Alors que ces derniers échappent aux solutions mathématiques exactes à cause de la complexité

- du domaine (forme géométrique compliquée, irrégulière ou changeante ; bords courbes ; trous ; assemblages spatiaux...),
- des conditions aux limites (naturelles et essentielles ; symétries ; bords libres ; appuis ponctuels ou élastiques...),
- des charges (forces concentrées ; effets thermiques ; contraintes initiales...),
- des matériaux (orthotropie ; matériaux multiples ; propriétés particulières...),

la méthode des éléments finis permet de surmonter tout ou partie de ces difficultés, car elle est capable de les exprimer ou de s'y adapter.

Aujourd'hui la méthode des éléments finis permet de résoudre pratiquement tous les problèmes de l'ingénieur contenus dans le cadre suivant :

- lois de comportement linéaires,
- linéarité géométrique,
- problèmes 1D, 2D ou 3D,
- problèmes statiques, dynamiques ou de valeurs propres (§ 13.1.3).

Dans des domaines plus complexes, tels que

- non-linéarité matérielle (élasticité non linéaire ; plasticité ; viscosité...),
- non-linéarité géométrique (grands déplacements ; grandes déformations...),
- problèmes spéciaux (hétérogénéité ; fissuration et fracture ; frottement ; contact ; fatigue...),

les travaux sont en progrès constant et beaucoup de problèmes peuvent être traités avec sûreté. Dans ces domaines difficiles, il apparaît qu'ingénieurs et chercheurs sont en possession d'une méthode de calcul, mais que les théories, les algorithmes numériques et, souvent, les *recherches expérimentales relatives au comportement des matériaux* ne sont pas suffisamment développés. Ainsi par exemple, les équations constitutives des matériaux géotechniques et des massifs rocheux sont souvent mal connues, et la méthode des éléments finis ne peut, de ce simple fait, fournir de solutions précises à certains problèmes de mécanique des sols et des roches.

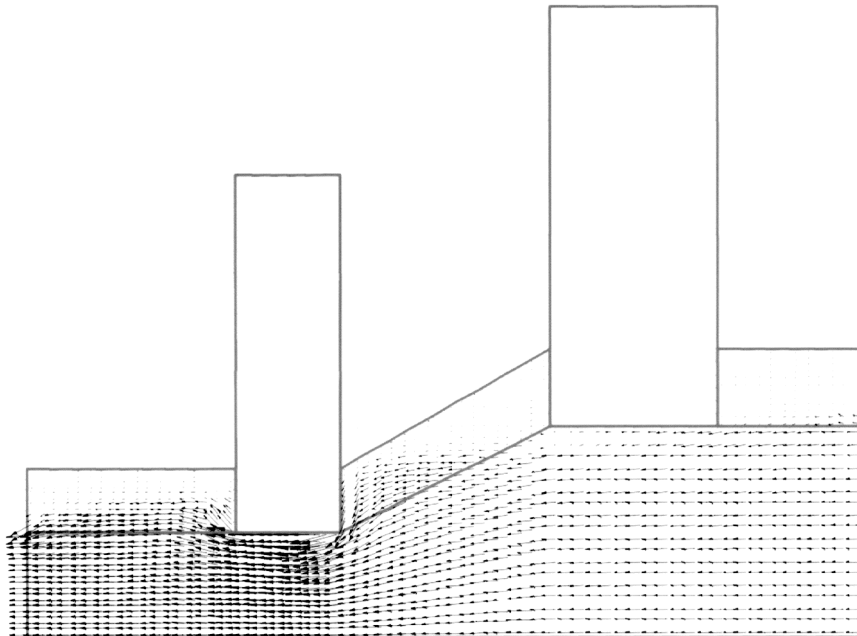
*L'absence de définitions correctes de certains matériaux est une des plus sévères limitations à l'emploi efficace de la méthode des éléments finis.*

### 13.1.2 Extensions

La méthode des éléments finis est employée pour résoudre bien d'autres problèmes que ceux relatifs aux structures et solides. Puisqu'elle peut être considérée comme une méthode de résolution numérique des équations différentielles avec conditions aux limites, elle est d'usage dans tout problème physique qui peut s'exprimer comme problème aux limites.

C'est ainsi que les ingénieurs l'utilisent pour résoudre les problèmes de

- conduction thermique,
- transport de matière, sédiments, polluants,
- écoulement potentiel, par exemple souterrain (fig. 13.1),



**Fig. 13.1** Ecoulement souterrain sous deux immeubles étanches (écoulement de Darcy ; programme Z\_SOIL, LSC-EPFL et ZACE S.A.).

- magnétisme et électrostatique,
- torsion de Saint-Venant,
- fluide, gaz et acoustique,
- propagation d'ondes, houle, marée, seiche,
- lubrification des paliers,
- combustion, énergie, solidification.

Dans ces diverses applications, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil des mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles. Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes :

- découper le domaine en un maillage d'éléments finis ;
- interpoler en respectant les critères de convergence ;
- calculer les caractéristiques de chaque élément ;
- assembler ;
- imposer les conditions aux limites essentielles et résoudre ;
- évaluer, dans chaque élément, les grandeurs utiles (contraintes, flux...) ;
- juger de manière critique les résultats obtenus (sect. 13.3).

Cette régularité permet de construire un programme très général, traitant plusieurs des problèmes physiques précédents, car l'essentiel du programme en est en fait indépendant.

### 13.1.3 Les trois problèmes types

Les problèmes aux limites se présentent sous trois formes.

Dans le *problème statique, d'équilibre* ou *stationnaire*, il faut déterminer la valeur des inconnues indépendamment du paramètre *temps*. L'équation matricielle typique obtenue après discrétisation s'écrit

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (13.1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité,  $\mathbf{d}$  le vecteur des inconnues nodales, ou degrés de liberté, et  $\mathbf{F}$  le vecteur des forces consistantes, ou seconds membres.

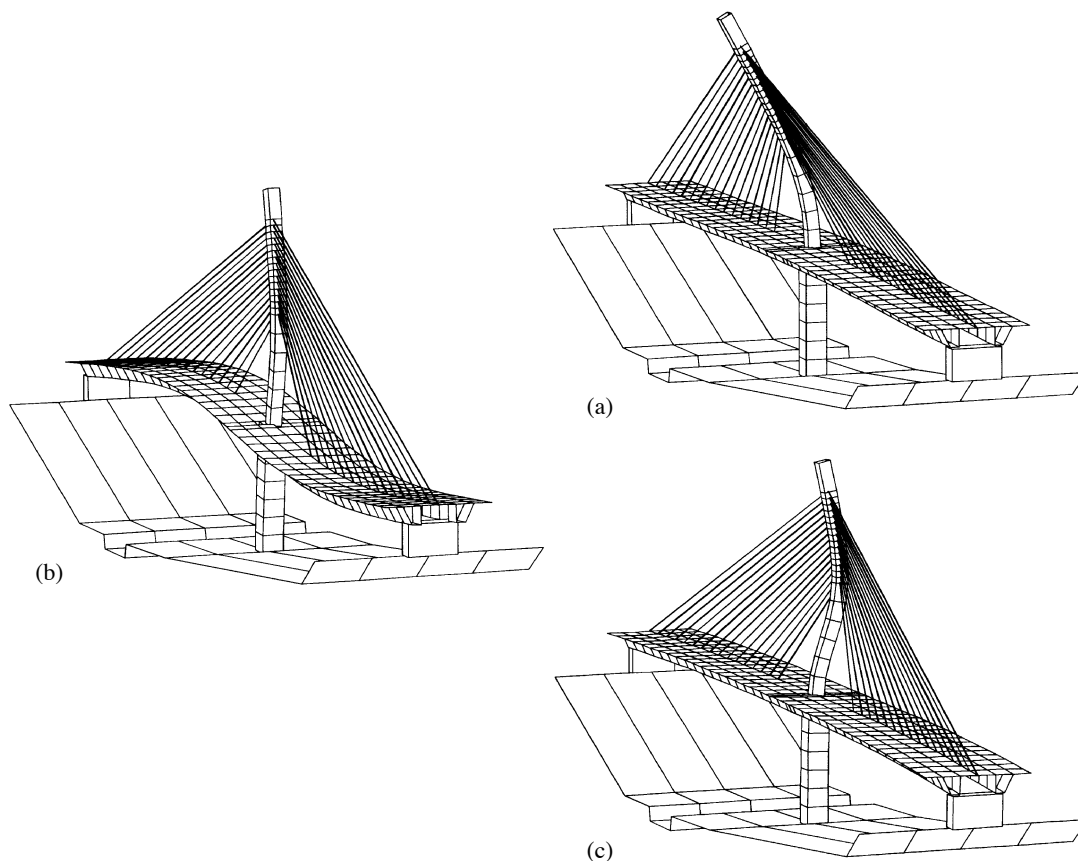
Le *problème aux valeurs propres* ou *de bifurcation* détermine la valeur critique de certains paramètres et la valeur correspondante des inconnues (vecteurs propres). Les exemples classiques sont l'instabilité linéaire des structures (charge critique d'Euler ; fig. 13.2), les modes propres de

vibrations des structures (fig.13.3), la résonance des circuits électriques, l'instabilité des écoulements, etc. L'équation typique est du genre

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (13.2)$$

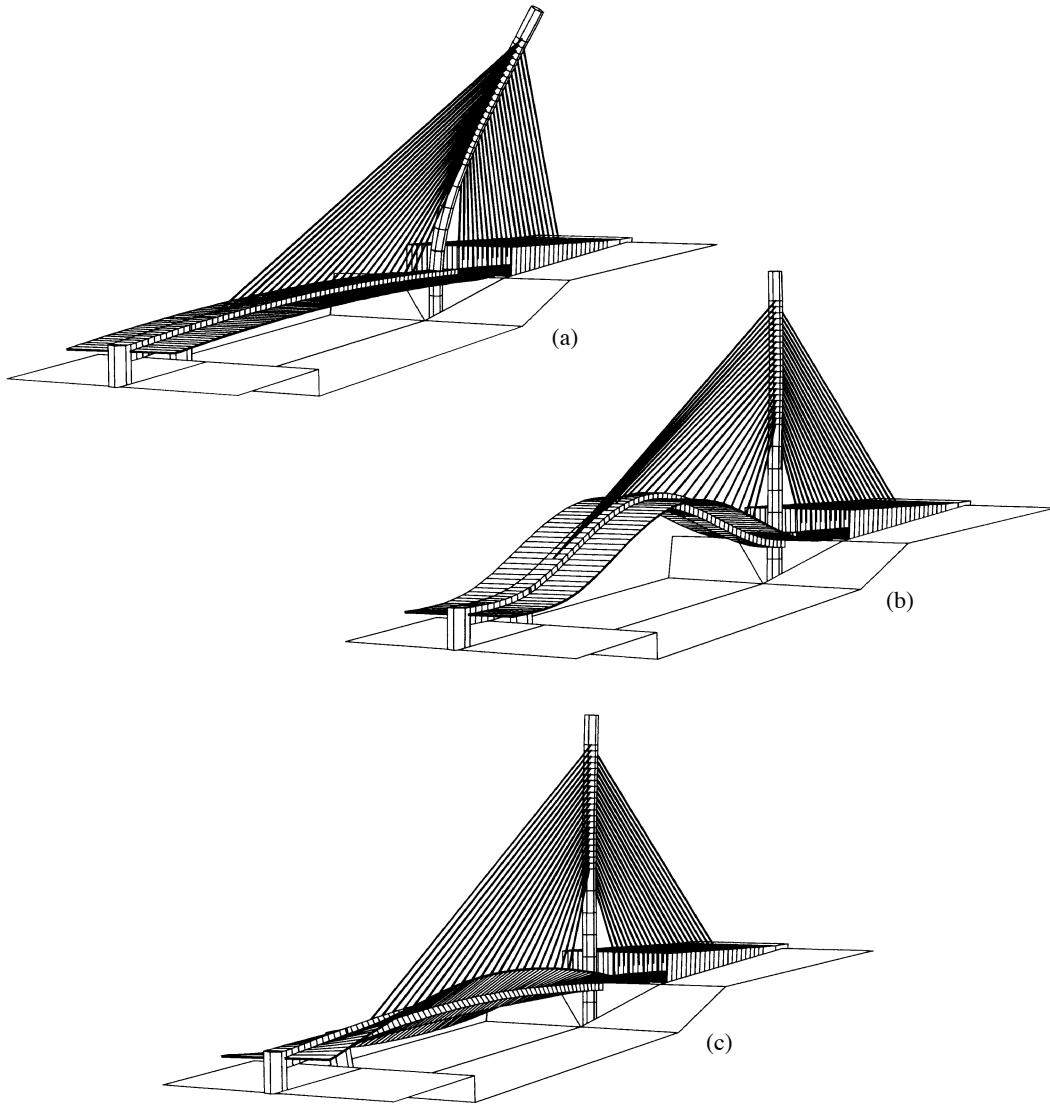
où  $\mathbf{G}$  est la matrice des contraintes initiales (instabilité structurale), de masse (vibrations), etc.,  $\lambda$  la valeur propre et  $\mathbf{d}$  le vecteur propre associé.

Enfin, dans le *problème transitoire, à réponse forcée* ou *de propagation*, les inconnues *varient en fonction du temps*. Une structure mise en mouvement par une charge mobile ou variable dans



**Fig. 13.2** Modes d'instabilité linéaire du pont sur l'Alzette à Luxembourg (1994) :  
 (a) flambement du pylône ( $\lambda_1 = 2,66$ ) ; (b) flambement du tablier et du pylône ( $\lambda_2 = 6,91$ ) ;  
 (c) second mode du pylône ( $\lambda_3 = 10,57$ ).

(Source : Cremer J.-M., de Ville de Goyet V., Lothaire A., Ney L., Radu V.,  
*Pont sur l'Alzette – Etudes spéciales*, Construction Métallique, n° 1, 1994.)

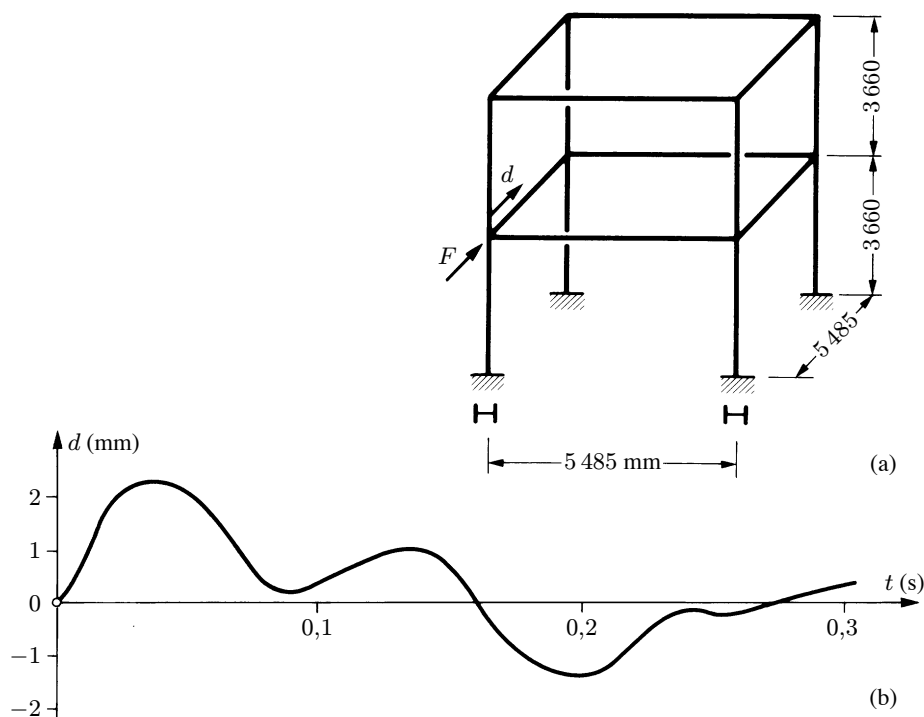


**Fig. 13.3** Trois premiers modes propres de vibration du pont-route du Val-Benoît sur la Meuse à Liège (2000) : (a) flexion du pylône ( $\lambda_1 = 0,364$  Hz) ; (b) flexion du tablier ( $\lambda_2 = 0,618$  Hz) ; (c) torsion du tablier ( $\lambda_3 = 1,300$  Hz). (Documents et étude numérique : BEG S.A.)

le temps (par exemple un choc, fig. 13.4), les phénomènes thermiques transitoires (essentiels en génie nucléaire et aéronautique), les propagations d'ondes ... sont des exemples de ce genre. L'équation typique s'écrit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}(t) \quad (13.3)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  celle d'amortissement,  $\ddot{\mathbf{d}}$  et  $\dot{\mathbf{d}}$  les vecteurs accélération et vitesse, et  $\mathbf{F}$  le vecteur second membre (vecteur force) dépendant du temps  $t$ .



**Fig. 13.4** Réponse forcée sans amortissement d'un cadre spatial en acier sous l'effet d'un choc ( $F = 10$  kN appliqué pendant 0,002 s) : (a) structure (colonnes : 12WF27 ; poutres : 14WF30) ; (b) déplacement  $d$  en fonction du temps  $t$ .

## 13.2 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

De toutes les méthodes permettant de résoudre de manière approximative un problème aux limites (séries, différences finies, voire essais de laboratoire), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers (mécanique des fluides par exemple).

Ces *avantages* sont essentiellement les suivants :

- au niveau des éléments finis, leur taille relative petite et leur forme géométrique simple permettent aussi de choisir simplement et rationnellement les fonctions d'interpolation décrivant leur comportement ;
- au niveau de la structure ou du solide à analyser, la complexité des formes géométriques, des propriétés mécaniques et physiques, des charges et des conditions aux limites ne présente plus guère de problème ;



- la possibilité de résoudre effectivement cette complexité à partir d'un petit nombre d'éléments finis de type différent justifie l'investissement nécessaire au développement de programmes de calcul sur ordinateur très évolués et très généraux ;
- la méthode a en soi un caractère physique attrayant ;
- on peut estimer l'erreur commise en tout point, voire la maintenir inférieure à un certain seuil de façon automatique.

Ces avantages, dont le deuxième et le troisième expriment toute la puissance et la généralité de la méthode, ne vont pas sans les *inconvenients* suivants, qu'il ne faut pas sous-estimer :

- des difficultés de modélisation et discrétisation peuvent apparaître ;
- le volume et la vérification des données et des résultats peuvent devenir difficiles à maîtriser ;
- les programmes sont, pour les non-initiés, des boîtes noires ; leur utilisation inconsiderée peut être très dangereuse ;
- la méthode peut être source d'erreurs multiples et, parfois, graves, qu'il est souvent difficile de détecter ; en effet, on a l'impression de pouvoir tout calculer ; en particulier, on a accès à la résolution de problèmes complexes, moins bien maîtrisés, moins connus, pour lesquels une formation théorique de base peut faire défaut ; or cette dernière initie aux difficultés, donne une certaine intuition du comportement attendu, une vue d'ensemble, qui sont autant d'auxiliaires précieux pour interpréter sainement les résultats d'un calcul aux éléments finis ;
- une informatique puissante est nécessaire ;
- le développement et, surtout, la maintenance d'un programme performant requièrent énormément de travail.

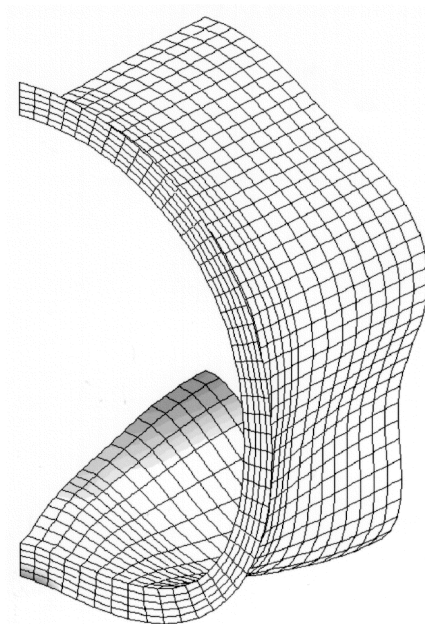
### 13.3 Examen critique de la méthode des éléments finis

#### 13.3.1 Préprocesseur et postprocesseur

La *préparation des données* d'un problème important présente en soi une tâche lourde, fastidieuse et délicate. La vérification de ces données est indispensable. Les tests de vraisemblance sont nécessaires. Des supports graphiques (si possible en couleur), constructions géométriques automatisées (générateurs de données), mailleurs automatiques, etc., sont essentiels à une préparation rapide et sûre des données. L'ensemble de ces outils est contenu dans un programme précédant celui du calcul, appelé *préprocesseur*.

Il en va de même de l'*exploitation des résultats*. Des programmes d'exploitation, de tri et de dessin automatique des résultats (déformées, diagrammes, courbes d'isocontraintes, coupes à travers les solides et structures 3D, combinaisons de cas de charge, courbes enveloppes, recherche des valeurs extrêmes, etc. ; fig. 13.5) doivent faire partie de tout *postprocesseur* évolué. Si possible, ce dernier contiendra encore un programme d'estimation d'erreur (erreur probable de la solution approchée), voire d'adaptativité (chap. 11).

Actuellement, quantité de recherches et développements sont consacrés à ces domaines, qui permettent d'accroître considérablement la fiabilité d'une analyse par éléments finis. Néanmoins, en dépit de tous ces moyens et de toutes les précautions prises, il est *impossible* de détecter toutes les erreurs par programme. *L'analyse des résultats reste donc une étape essentielle.*



**Fig. 13.5** Visualisation de la déformée d'instabilité et de la contrainte de comparaison de von Mises dans l'étude du comportement jusqu'à ruine du blindage en acier de la galerie d'amenée d'eau de l'aménagement hydroélectrique de Cleuson-Dixence, Suisse (programmes FELINA et Z\_SOIL / Z\_TUNNEL, LSC-EPFL).

### 13.3.2 Valeur de la solution approchée

Même si les données ne contiennent aucune erreur, la méthode des éléments finis ne livre qu'une solution approximative : l'importante question « Que vaut cette solution approchée ? » doit toujours être posée.

L'analyse critique des résultats fournis par la méthode des éléments finis est souvent difficile, parce qu'on ne dispose pas de critères détaillés de jugement. On se borne ici à quelques considérations générales.

#### Eléments finis et convergence

On peut affirmer que le type des éléments finis employés est le facteur qui a le plus d'influence sur la précision des résultats (les erreurs d'arrondi dues au calcul numérique interviennent beaucoup plus rarement). On doit donc établir des *critères de qualité* des éléments finis, critères qui assurent que la solution approchée d'un problème tend *rapidement* vers la solution exacte quand on applique la convergence ( $h$  ou  $p$ ). Les critères de convergence doivent évidemment être satisfaits, mais ils ne renseignent pas sur la rapidité de cette convergence.

On sait d'autre part que l'*énergie de déformation* du problème discrétisé converge vers l'énergie exacte, ce qui permet, en général, de se faire une idée assez précise, mais seulement *globale*, de la valeur d'une solution par répétition d'un calcul en affinant le maillage. Mais cette technique est peu rationnelle et n'est quasiment jamais utilisée dans les applications pratiques.

Aujourd'hui, les recherches s'orientent vers le *calcul de l'erreur* résultant d'une discrétisation donnée et vers le développement de procédures automatiques (nécessaires surtout pour la CAO)

susceptibles d'*ajuster la discrétisation initialement choisie de manière à garantir une précision souhaitée*. Lorsque ces estimations d'erreur et ces techniques adaptatives (chap. 11) seront à la disposition des praticiens dans tout programme, la méthode des éléments finis aura fait un progrès considérable. Certains programmes commerciaux commencent à être munis de tels outils.

Au reste, on ne peut rien dire de sûr. En particulier, lorsqu'on crée un élément fini, on peut souvent anticiper ses qualités de convergence, mais, s'il y a quelque doute, ce sont finalement les tests qui sont décisifs et qui permettent, en plus, une comparaison avec d'autres éléments. On sait ainsi, par expérimentation numérique, que certains éléments sont meilleurs que d'autres et on acquiert dans ce domaine une expérience pratique très utile, voire nécessaire, pour préparer rationnellement les données et estimer correctement la valeur des résultats obtenus.

### **Examen critique des résultats**

Lorsqu'on reçoit les résultats d'un calcul aux éléments finis, *il faut toujours effectuer des vérifications de plausibilité des calculs et résultats et, en plus, faire un examen critique, soigné et détaillé des résultats*.

Il est en effet indispensable de s'assurer que les résultats obtenus sont corrects (l'ordinateur ne peut avoir raison sans le consentement de l'ingénieur...). Voici quelques recommandations :

- vérifier à nouveau les données...
- *lire les messages*, comprendre leur origine et leurs répercussions ;
- examiner la précision numérique ;
- *anticiper* les résultats ; se faire une bonne idée de la solution *avant* le calcul ;
- *comparer* les résultats avec *autre chose* (calcul manuel par exemple) ;
- vérifier l'équilibre global ;
- faire des tests généraux, physiques ; *comprendre* les résultats ;
- étudier de manière critique les résultats graphiques ;
- tester si le problème se comporte comme prévu, mais aussi *comme prévu selon sa modélisation* (et non forcément la réalité) ; sinon, que se passe-t-il ?
- *ne pas recommencer trop vite en cas d'erreur* ; examiner tous les résultats, même s'il y a des erreurs au départ ;
- demander l'avis d'un collègue qui n'utilise pas le calcul par ordinateur ; essayer de lui expliquer le pourquoi des résultats obtenus.

Lorsqu'on utilise un programme inconnu, lorsqu'on s'en méfie, lorsqu'on met en doute ses résultats, on peut procéder comme suit :

- bien apprendre à utiliser et connaître le programme, le tester, chercher ses limites ;
- contrôler les dires du manuel d'utilisation ;
- utiliser un autre programme pour résoudre le même problème ;
- tester la sensibilité de la solution à certaines variations des données (maillage grossier et maillage fin ; appui fixe et appui élastique ; charge répartie et charge concentrée...).

Enfin, on n'oubliera jamais que tout programme, quel qu'il soit, d'où qu'il vienne, contient toujours et encore des erreurs. Parfois, mais c'est beaucoup plus rare, l'ordinateur a un défaut de fonctionnement face au programme qu'il traite.

Si finalement un programme crée plus de problèmes qu'il n'en résout, oubliez-le !



# 14 Annexe

## Calcul matriciel

### 14.1 Introduction

Le calcul matriciel est appliqué à l'analyse des solides et des structures depuis 1955 environ, date approximative de naissance des ordinateurs puissants. Il permet en effet d'écrire les relations liant des grandeurs telles que les contraintes, les déformations et les déplacements sous une forme condensée et simple, qui s'adapte de manière directe à la programmation du calcul par ordinateur. Il est clair que cette écriture matricielle ne convient pas, en général, au calcul manuel.

Les lignes suivantes ont pour objectif de résumer les notions utiles au calcul matriciel des solides et structures, et de montrer comment les diverses opérations matricielles peuvent être utilisées dans le calcul par ordinateur.

### 14.2 Définitions, notations et conventions

On définit une *matrice*  $\mathbf{A}$  de dimension  $m \times n$  comme l'ensemble de  $m \times n$  nombres  $A_{ij}$  appelés *éléments* ou *coefficients* et placés dans un tableau rectangulaire de  $m$  lignes et de  $n$  colonnes

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

Une matrice  $\mathbf{v}$  constituée par une seule colonne de  $m$  nombres  $v_i$  est appelée matrice colonne ou, plus couramment, *vecteur*

$$\mathbf{v} = \{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (14.2)$$

On appelle *matrice carrée* de dimension  $n$  une matrice de  $n$  lignes et  $n$  colonnes. Elle est dite *symétrique* si ses éléments  $A_{ij}$  et  $A_{ji}$ , disposés symétriquement par rapport à ceux de sa diagonale principale  $A_{kk}$ , ont la même valeur

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Elle est dite *antisymétrique* si les éléments  $A_{ij}$  et  $A_{ji}$ , disposés symétriquement par rapport à ceux de sa diagonale principale, sont égaux mais de signe opposé et si les éléments de la diagonale principale sont nuls

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad A_{kk} = 0$$

On appelle *matrice diagonale* une matrice carrée dont tous les éléments, sauf ceux de la diagonale principale, sont nuls.

La *matrice identité* (ou *unité*)  $\mathbf{I}$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité

$$\mathbf{I} = [I_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (14.3)$$

Le symbole  $\mathbf{0}$  est utilisé pour désigner une matrice et un vecteur constitués uniquement par des éléments nuls

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (14.4)$$

La *transposée*  $\mathbf{A}^T$  d'une matrice  $\mathbf{A}$ , ou la transposée  $\mathbf{v}^T$  d'un vecteur  $\mathbf{v}$  (dite matrice ligne), s'obtiennent en échangeant les lignes avec les colonnes de la matrice ou du vecteur origine, par exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \quad \mathbf{v}^T = \{ 1 \quad 2 \quad 3 \}$$

Les relations  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$  caractérisent respectivement les matrices symétriques et antisymétriques.

Dans certaines applications, il peut être utile d'indiquer les nombres de lignes et de colonnes d'une matrice ou le nombre d'éléments d'un vecteur. On écrit alors, par exemple,

$$\mathbf{A}_{(2 \times 3)} \quad \mathbf{A}_{(3 \times 2)}^T \quad \mathbf{v}_{(3)} \quad \mathbf{v}_{(3)}^T$$

## 14.3 Opérations sur les matrices

### 14.3.1 Addition, soustraction et multiplication par un scalaire

Lorsque deux matrices **A** et **B** ont le même nombre de lignes et de colonnes, on peut les additionner l'une à l'autre ou les soustraire l'une de l'autre ; il suffit d'additionner ou de soustraire les éléments correspondants

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \implies C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (14.5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \implies D_{ij} = A_{ij} - B_{ij} \quad (14.6)$$

L'addition des matrices obéit aux règles de commutativité et d'associativité

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (14.7)$$

Multiplier une matrice ou un vecteur par un scalaire  $s$  revient à multiplier chaque coefficient par  $s$

$$s\mathbf{A} = [sA_{ij}] \quad s\mathbf{v} = \{sv_i\} \quad (14.8)$$

En appliquant l'addition et la soustraction, une matrice carrée **C** peut être décomposée en une matrice symétrique **S** et une matrice antisymétrique **A**

$$\mathbf{C} = \mathbf{S} + \mathbf{A} \quad (14.9)$$

Avec, par définition,  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ , on obtient  $\mathbf{C} = \mathbf{S}^T - \mathbf{A}^T$ , qu'on transpose en  $\mathbf{C}^T = \mathbf{S} - \mathbf{A}$  ; combinant cette dernière relation avec (14.9), on trouve aisément

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}^T) \quad (14.10)$$

### 14.3.2 Multiplication

On ne peut multiplier une matrice **A** par une matrice **B** que lorsque le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. La matrice résultante **C** a alors le même nombre de lignes que **A** et le même nombre de colonnes que **B**

$$\mathbf{C}_{(m \times n)} = \mathbf{A}_{(m \times \ell)} \mathbf{B}_{(\ell \times n)} \quad (14.11)$$

Un élément  $C_{ij}$  de la matrice **C** est égal à la somme des produits de chaque élément de la ligne  $i$  de **A** par l'élément correspondant de la colonne  $j$  de **B**

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} A_{ik} B_{kj} \quad (14.12)$$

Ainsi par exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \\ 6 \cdot 3 + 7 \cdot 8 & 6 \cdot 4 + 7 \cdot 9 & 6 \cdot 5 + 7 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 & 5 \\ 74 & 87 & 30 \end{bmatrix}$$

Si l'on place les matrices **A**, **B**, **C** dans trois tableaux bidimensionnels  $A(M, L)$ ,  $B(L, N)$ ,  $C(M, N)$ , le produit  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  est représenté, en langage FORTRAN, par la séquence suivante, où les deux instructions centrales traduisent (14.12),

```
DO I = 1,M
  DO J = 1,N
    C(I,J) = 0.D0
    DO K = 1,L
      C(I,J) = C(I,J) + A(I,K) * B(K,J)
    END DO
  END DO
END DO
```

La multiplication matricielle est distributive et associative

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (14.13)$$

mais n'est pas commutative ; prémultiplier **A** par **B** n'est pas, en règle générale, égal à postmultiplier **A** par **B**

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (14.14)$$

La transposée du produit **AB** est égale au produit de la transposée de **B** par la transposée de **A**

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (14.15)$$

Le produit d'une matrice quelconque **B** par sa transposée résulte en une matrice carrée symétrique

$$\mathbf{BB}^T = \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (14.16)$$

Prémultiplier ou postmultiplier une matrice **A** par la matrice identité **I** restitue la matrice **A**

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad (14.17)$$

Les produits d'une matrice carrée **C** par elle-même définissent les puissances de **C**

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{CC} \quad \mathbf{C}^3 = \mathbf{CCC} \quad \text{etc.} \quad (14.18)$$

Si **A** est une matrice carrée symétrique de dimension  $m$  et **B** une matrice quelconque de dimension  $m \times n$ , le triple produit

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^T \mathbf{AB} \quad (14.19)$$

fournit une matrice carrée **S** symétrique de dimension  $n$ .



### 14.3.3 Formes bilinéaires et quadratiques

Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont deux vecteurs de dimension  $n$  et  $\mathbf{C}$  une matrice carrée de dimension  $n$ , l'expression

$$s = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (14.20)$$

s'appelle *forme bilinéaire* ; son résultat étant scalaire, il est égal à sa transposée

$$s = \mathbf{v}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u} \quad (14.21)$$

Si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  et si  $\mathbf{C}$  est symétrique, la forme bilinéaire devient une *forme quadratique*

$$q = \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \quad (14.22)$$

Elle est dite définie positive si  $q > 0 \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , et semi-définie positive si  $q \geq 0 \forall \mathbf{v}$  et s'il existe un  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{C} \mathbf{v}_0 = 0$ . Si elle est définie positive, toutes les valeurs propres (sect. 14.11) de  $\mathbf{C}$  sont réelles positives. Si elle est semi-définie positive, une valeur propre de  $\mathbf{C}$  au moins est nulle.

## 14.4 Déterminant, rang et trace d'une matrice carrée

Pour une matrice carrée  $\mathbf{C}$  de dimension  $n$ , on désigne par  $\det \mathbf{C}$  et on appelle déterminant de  $\mathbf{C}$  le *déterminant* formé avec les éléments de la matrice  $\mathbf{C}$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} \quad (14.23)$$

Une matrice carrée  $\mathbf{C}$  est dite *singulière* si son déterminant est nul ; sinon, elle est dite *régulière*. Il est évident que

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}^T \quad (14.24)$$

On peut également démontrer que

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \quad (14.25)$$

Une matrice carrée est *triangulaire supérieure*, ou *inférieure*, si les éléments situés *au-dessous*, ou *au-dessus*, de la diagonale principale sont nuls. Le déterminant d'une telle matrice est simplement égal au produit des éléments diagonaux

$$\det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 \\ T_{21} & T_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{vmatrix} = T_{11} T_{22} \dots T_{nn} = \prod_{i=1}^n T_{ii} \quad (14.26)$$

Cette propriété permet de développer, pour évaluer la valeur numérique d'un déterminant, une technique de calcul simple basée sur l'élimination de Gauss (§ 14.9.2).

Dans une matrice  $\mathbf{C}$  de dimension  $n$ , singulière, supprimons une à une les lignes et colonnes qui dépendent linéairement des autres, jusqu'à obtenir une matrice de dimension  $r \leq n$  non singulière ; la dimension  $r$  s'appelle le *rang* de  $\mathbf{C}$

$$r = \text{rang } \mathbf{C} \quad (14.27)$$

Le rang du produit de deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne peut excéder celui de  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$

$$\text{rang } \mathbf{AB} \leq \min(\text{rang } \mathbf{A}, \text{rang } \mathbf{B}) \quad (14.28)$$

La *trace* de la matrice  $\mathbf{C}$  est la somme des éléments  $C_{ii}$  de sa diagonale principale et s'écrit

$$\text{tr } \mathbf{C} = \sum_{i=1}^n C_{ii} \quad (14.29)$$

## 14.5 Inverse d'une matrice carrée

### 14.5.1 Définition et propriétés

L'*inverse* d'une matrice carrée  $\mathbf{A}$  est désigné par  $\mathbf{A}^{-1}$  et défini par

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad (14.30)$$

Si l'on pose

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

on peut alors écrire, après prémultiplication des deux membres par  $\mathbf{A}^{-1}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

Multiplier par la matrice inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  revient alors à « diviser » par la matrice  $\mathbf{A}$ , bien que l'opération de division directe d'une matrice par une autre matrice ne soit pas définie dans le calcul matriciel. Pour que l'inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  de la matrice  $\mathbf{A}$  existe, il est nécessaire que  $\mathbf{A}$  soit régulière, c'est-à-dire que son déterminant ne soit pas nul ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ).

L'inverse du produit de deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  obéit à la règle

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (14.31)$$

qui est analogue à celle qui s'applique à la transposée du produit (14.15).

Il est encore utile d'observer que

- l'inverse d'une matrice transposée est égal à la transposée de son inverse

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (14.32)$$

- les puissances négatives d'une matrice régulière sont obtenues en élevant l'inverse de la matrice aux puissances positives

$$\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^{-1})^k \quad (14.33)$$

- l'inverse d'une matrice symétrique est à nouveau une matrice symétrique ;
- l'inverse d'une matrice triangulaire est également une matrice triangulaire de même type.

Il existe une multitude de méthodes pour inverser une matrice. Certaines s'appliquent uniquement aux matrices symétriques car des simplifications s'introduisent qui rendent le calcul plus aisé, donc plus efficace. Or il est facile de montrer que l'inversion d'une matrice carrée  $\mathbf{C}$  quelconque peut être ramenée à l'inversion d'une matrice symétrique. On pose, avec (14.16),

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (14.34)$$

Inversons les deux membres ; il vient, en tenant compte de (14.31),

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^T)^{-1}$$

d'où l'on tire  $\mathbf{C}^{-1}$ , en postmultipliant les deux membres par  $\mathbf{C}^T$ ,

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^T \quad (14.35)$$

#### 14.5.2 Inversion d'une matrice triangulaire

Soit  $\mathbf{T}$  une matrice triangulaire supérieure

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{nn} \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-1}$  son inverse. Sachant que l'inverse d'une matrice triangulaire est également une matrice triangulaire du même type

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}$$

et que

$$\mathbf{R}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}$$

il est aisé de vérifier, en appliquant la règle générale de multiplication des matrices (14.12), que les éléments  $R_{ij}$  ont pour valeur

$$R_{11} = \frac{1}{T_{11}} \quad R_{12} = -\frac{1}{T_{22}} R_{11}T_{12} \quad \dots \quad R_{1j} = -\frac{1}{T_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} R_{1k}T_{kj}$$

soit, en général,

$$R_{ii} = \frac{1}{T_{ii}} \quad R_{ij} = -\frac{1}{T_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} R_{ik}T_{kj} \quad (14.36)$$

### 14.5.3 Inversion d'une matrice à l'aide des matrices triangulaires

Si l'on prémultiplie une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{T}$  par sa transposée  $\mathbf{T}^T$ , la matrice résultante  $\mathbf{S}$  est, avec (14.16),

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (14.37)$$

Inversement, si l'on connaît la matrice  $\mathbf{S}$ , il est possible de trouver une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{T}$  qui satisfait la relation (14.37) : il suffit d'effectuer le produit  $\mathbf{T}^T \mathbf{T}$ , puis d'en identifier les éléments (inconnus) avec les coefficients  $S_{ij}$  (connus) de la matrice  $\mathbf{S}$ . On obtient

$$T_{11} = \sqrt{S_{11}} \quad T_{1j} = \frac{S_{1j}}{T_{11}} \quad (14.38)$$

et, en général ( $i > 1$ ),

$$T_{ii}^2 = S_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} T_{ki}^2 \quad T_{ij} = \frac{S_{ij}}{T_{ii}} - \frac{1}{T_{ii}} \sum_{k=1}^{i-1} T_{ki} T_{kj} \quad (14.39)$$

Quand l'inverse  $\mathbf{T}^{-1}$  est obtenu grâce à (14.36), alors l'inverse de la matrice symétrique  $\mathbf{S}$  est calculé par (14.31), soit

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^{-1})^T \quad (14.40)$$

Quant à l'inverse d'une matrice carrée quelconque  $\mathbf{C}$ , il peut être obtenu moyennant une transformation supplémentaire, selon les relations (14.34) et (14.35).

#### Exemple 14.1

Pour inverser la matrice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

on se ramène à l'inversion d'une matrice symétrique  $\mathbf{S}$ , que l'on calcule en appliquant (14.34)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{T}$  découlent de (14.38) et (14.39)

$$T_{11} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad T_{12} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad T_{22} = \sqrt{10 - (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{T} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour trouver l'inverse  $\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-1}$  de la matrice  $\mathbf{T}$ , on emploie (14.36)

$$R_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{2} \quad R_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{4} \sqrt{2} (-\sqrt{2}) = \frac{1}{8} \sqrt{2} \quad R_{22} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

et, par suite,

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R} = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dès lors, selon (14.40), l'inverse de  $\mathbf{S}$  a pour valeur

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

et l'inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  est égal, selon (14.35), à

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour contrôle, on vérifie que le produit  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$  donne une matrice identité

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

## 14.6 Décomposition des matrices en sous-matrices

Une matrice  $\mathbf{A}$  peut être partagée par divisions horizontales et verticales en matrices plus petites, appelées *sous-matrices*. Par exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = [A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}] \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{A}_{11} = [A_{11}] \quad \mathbf{A}_{12} = [A_{12} \quad A_{13}] \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \\ A_{42} & A_{43} \end{bmatrix}$$

Il est aisé de vérifier que si

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2$$

on a également

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices peuvent alors être manipulées comme des éléments ordinaires, avec quelques restrictions évidentes. Si par exemple les sous-matrices  $\mathbf{B}_i$  ( $i = 1, 2$ ) possèdent  $n_i$  colonnes, les sous-matrices  $\mathbf{C}_i$  doivent avoir  $n_i$  lignes pour que les produits  $\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i$  existent.

## 14.7 Dérivation et intégration d'une matrice

Si les éléments d'une matrice  $\mathbf{A}$  sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes, la matrice  $\mathbf{A}$  peut être dérivée et intégrée : il suffit de dériver ou d'intégrer chacun de ses éléments.

On peut montrer que la dérivation des matrices obéit aux mêmes règles que celles connues pour les fonctions ; par exemple, pour les matrices  $\mathbf{A}(s)$  et  $\mathbf{B}(s)$ ,

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \left( \frac{d}{ds} \mathbf{A} \right) \mathbf{B} + \mathbf{A} \left( \frac{d}{ds} \mathbf{B} \right) \quad (14.41)$$

En analyse des structures, on est amené à dériver la forme quadratique

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (14.42)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée symétrique, indépendante de  $\mathbf{x}$ , par rapport à toutes les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$ . On écrit cette opération sous la forme contractée

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \right)$$

où la dérivée  $\partial/\partial \mathbf{x}$  est définie par

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{array} \right\} \quad (14.43)$$

Si l'on effectue successivement les dérivées partielles de  $U$  par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on obtient, en tenant compte de (14.41),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \{ 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = [A_{11} \quad A_{12} \quad \dots \quad A_{1n}] \mathbf{x} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \dots \quad \dots = [A_{21} \quad A_{22} \quad \dots \quad A_{2n}] \mathbf{x} \\ &\vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} &= \dots \quad \dots = [A_{n1} \quad A_{n2} \quad \dots \quad A_{nn}] \mathbf{x} \end{aligned}$$

La dérivée de  $U$  par rapport à  $\mathbf{x}$  est par conséquent égale à

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (14.44)$$

De la même manière, on a, pour le scalaire

$$s = \mathbf{x}^T \mathbf{Ay} \quad (14.45)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Ay} \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (14.46)$$

où la seconde dérivée découle de  $s = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{A}$  est la matrice identité  $\mathbf{I}$ , alors

$$s = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y} \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{x} \quad (14.47)$$

## 14.8 Norme d'un vecteur

La *norme*  $\|\mathbf{v}\|$  d'un vecteur  $\mathbf{v}$  est un nombre qui obéit aux règles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \|\mathbf{v}\| \geq 0 & \text{et } \|\mathbf{v}\| = 0 \text{ si et seulement si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \|s\mathbf{v}\| = s\|\mathbf{v}\| & \text{pour tout scalaire } s \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| & \text{inégalité du triangle.} \end{array}$$

On utilise couramment les trois normes

$$\|\mathbf{v}\| = \max |v_i| \quad (14.48)$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (14.49)$$

$$\|\mathbf{v}\| = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (14.50)$$

où la dernière, dite *norme euclidienne*, représente la longueur du vecteur  $\mathbf{v}$  (dans un espace à  $n$  dimensions) et est la plus employée.

## 14.9 Résolution d'un système d'équations linéaires

### 14.9.1 Généralités

Un système d'équations linéaires

$$\begin{array}{l} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

ou encore plus simplement

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (14.51)$$

De même, si au lieu d'un seul second membre on a un système de  $n$  équations linéaires avec  $m$  seconds membres, il suffit de remplacer les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{x}$  par les matrices rectangulaires  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{X}$  de  $n$  lignes et  $m$  colonnes et d'écrire le système sous la forme

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (14.52)$$

Dans les deux cas, les inconnues peuvent être explicitées en prémultipliant les deux membres par l'inverse de la matrice  $\mathbf{A}$ , ce qui conduit à

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (14.53)$$

Il est évident que ces solutions n'existent qu'à la condition que la matrice  $\mathbf{A}$  ne soit pas singulière et admette un inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ . Cela revient à dire que les  $n$  équations doivent être linéairement indépendantes.

On ne calcule pas les inconnues par l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}$  car cela requiert un nombre trop élevé d'opérations numériques. Les méthodes développées spécialement pour la résolution des systèmes d'équations linéaires permettent d'effectuer ce travail plus efficacement. Parmi la multitude de ces méthodes, on se limite à la méthode d'élimination de Gauss qui a le mérite d'être simple, efficace et de bien se prêter à la programmation (§ 14.9.2).

Remarquons encore que si, dans (14.52), la matrice  $\mathbf{B}$  des seconds membres est une matrice diagonale identité, la matrice solution correspondante est égale à l'inverse de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

Ainsi l'élimination de Gauss s'adapte aussi au calcul de l'inversion directe des matrices et est, occasionnellement, utilisée dans ce but.

### 14.9.2 Elimination de Gauss

La résolution d'un système d'équations linéaires se déroule en deux étapes. La première est l'élimination de Gauss proprement dite, qui transforme le système d'équations original

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (14.54)$$

en un système équivalent

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad (14.55)$$

où la matrice  $\mathbf{T}$  est triangulaire supérieure. Cette étape est aussi appelée *élimination en avant*. Elle permet du même coup d'évaluer la valeur numérique du déterminant de  $\mathbf{A}$  (sect. 14.4). La seconde



étape est la *substitution en arrière* qui consiste en l'évaluation successive des inconnues du système d'équations  $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}$  en commençant par la dernière. Ces deux étapes sont exposées en détail ci-après.

### Elimination en avant

On désigne par  ${}^0A_{ij} = A_{ij}$  les coefficients originaux de la matrice  $\mathbf{A}$  et on annule les coefficients  $A_{i1}$  ( $i > 1$ ) situés sous le terme diagonal de la première colonne en utilisant la première équation : on élimine le coefficient  $A_{i1}$  d'une équation  $i > 1$  quelconque en retranchant de cette équation la première équation multipliée par le quotient  $A_{i1}/A_{11}$  (on admet  $A_{11} \neq 0$ ) ; la nouvelle équation  $i$  a alors les coefficients  ${}^1A_{ij}$  et le second membre  ${}^1b_i$ , définis par

$$\begin{aligned} {}^1A_{i1} &= 0 & {}^1A_{ij} &= {}^0A_{ij} - {}^0A_{1j} \frac{{}^0A_{i1}}{{}^0A_{11}} \quad (j > 1) \\ {}^1b_i &= {}^0b_i - {}^0b_1 \frac{{}^0A_{i1}}{{}^0A_{11}} \end{aligned} \quad (14.56)$$

On procède de la même manière pour éliminer les coefficients situés sous le terme diagonal de la deuxième colonne : on a ( $i > 2$ )

$$\begin{aligned} {}^2A_{i1} = {}^2A_{i2} &= 0 & {}^2A_{ij} &= {}^1A_{ij} - {}^1A_{2j} \frac{{}^1A_{i2}}{{}^1A_{22}} \quad (j > 2) \\ {}^2b_i &= {}^1b_i - {}^1b_2 \frac{{}^1A_{i2}}{{}^1A_{22}} \end{aligned} \quad (14.57)$$

De manière générale, l'élimination des coefficients sous le terme diagonal de la colonne  $k$  ( $i > k$ ) conduit à

$$\begin{aligned} {}^kA_{ij} &= 0 \quad (j \leq k) & {}^kA_{ij} &= {}^{k-1}A_{ij} - {}^{k-1}A_{kj} \frac{{}^{k-1}A_{ik}}{{}^{k-1}A_{kk}} \quad (j > k) \\ {}^kb_i &= {}^{k-1}b_i - {}^{k-1}b_k \frac{{}^{k-1}A_{ik}}{{}^{k-1}A_{kk}} \end{aligned} \quad (14.58)$$

Si  ${}^kA_{kk} = 0$ , on permute l'équation  $k$  avec l'une des équations suivantes ayant en colonne  $k$  un coefficient non nul. Après  $n - 1$  éliminations, on obtient finalement la matrice  $\mathbf{T}$  et le vecteur  $\mathbf{c}$ , définis par

$$T_{ij} = {}^{n-1}A_{ij} \quad c_i = {}^{n-1}b_i \quad (14.59)$$

### Substitution en arrière

La substitution en arrière commence par l'évaluation de l'inconnue  $x_n$  que l'on peut tirer de la dernière équation du système d'équations modifié (14.55)

$$x_n = \frac{c_n}{T_{nn}} \quad (14.60)$$

En la substituant dans l'avant-dernière équation, on trouve pour  $x_{n-1}$  la valeur

$$x_{n-1} = \frac{c_n - T_{n-1,n} x_n}{T_{n-1,n-1}} \quad (14.61)$$

Les autres inconnues peuvent être calculées de manière analogue ; l'inconnue  $i$  est simplement

$$x_i = \frac{1}{T_{ii}} \left( c_i - \sum_{k=i+1}^n T_{ik} x_k \right) \quad (14.62)$$

### Exemple 14.2

Le calcul manuel, par élimination de Gauss, du système linéaire

$$\begin{bmatrix} 7,00 & 2,00 & -6,75 \\ 2,00 & 6,00 & -3,00 \\ -6,75 & -3,00 & 26,25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,00 \\ -2,00 \\ 18,00 \end{Bmatrix}$$

peut être effectué sous forme de tableau (tableau 14.1). Les inconnues ont pour valeur

$$x_1 = 2,124 \quad x_2 = -0,451 \quad x_3 = 1,180$$

**Tableau 14.1** Élimination de Gauss en tableau.

	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	second membre	contrôle	
Élimination en avant	1 $\equiv$ I	7,000	2,000	-6,750	6,000	8,250	
	2	2,000	6,000	-3,000	-2,000	3,000	
		-2,000	-0,571	1,929	-1,714	-2,356	$= -(2/7)I$
	II		5,429	-1,071	-3,714	0,644	
	3	-6,750	-3,000	26,250	18,000	34,500	
Substitution en arrière		6,750	1,929	-6,509	5,786	7,956	$= (6,75/7)I$
			1,071	-0,211	-0,733	0,127	$= (1,071/5,429)II$
	III			19,530	23,053	42,583	
				1	1,180	2,180	
			5,429	-1,071	-3,714	0,644	
Substitution en arrière				1,071	1,264	2,335	
			5,429	0	-2,450	2,979	
			1		-0,451	0,549	
		7,000	2,000	-6,750	6,000	8,250	
			-2,000	0	0,902	-1,098	
Substitution en arrière			6,750		7,965	14,715	
		7,000	0	0	14,876	21,876	
		1			2,124	3,124	

Pour contrôler les calculs, la somme des coefficients des équations 1, 2 et 3 (y compris les seconds membres) est inscrite dans la colonne de contrôle. Les opérations effectuées avec les lignes portent aussi sur les nombres de la colonne de contrôle. On obtient ainsi avec chaque nouvelle ligne le terme de contrôle correspondant. On vérifie alors que ce dernier est égal à la somme des coefficients de la ligne.

### Programmation

Il est encore intéressant de montrer comment traduire l'algorithme de Gauss en un sous-programme FORTRAN simple. Si l'on place la matrice **A** et les vecteurs **b** et **x** dans les tableaux A(N,N), B(N) et X(N), on a le sous-programme suivant :

```

      SUBROUTINE SIMULT (A, B, X, N, DET, EPS)
C
      REAL*8 A(N,N), B(N), X(N), DET, EPS, AUX
C
      DET = 1. DO
C
C****    ELIMINATION EN AVANT – BOUCLE SUR LES TERMES DIAGONAUX
C
      DO I = 1, N-1
        K = I
C
C        PERMUTER LES LIGNES SI NECESSAIRE
C
        IF (DABS(A(I,I)) .LE. EPS) THEN
10          K = K + 1
            DET = -DET
            IF (K .GT. N) STOP 'MATRICE SINGULIERE'
            IF (DABS(A(K,I)) .LE. EPS) GO TO 10
            AUX = B(I)
            B(I) = B(K)
            B(K) = AUX
            DO J = 1, N
              AUX = A(I,J)
              A(I,J) = A(K,J)
              A(K,J) = AUX
            END DO
          END IF
C
          ELIMINER LES TERMES SITUES SOUS LE TERME DIAGONAL A(I,I)
C
          DO L = I + 1, N
            AUX = A(L,I)/A(I,I)
            B(L) = B(L) - AUX * B(I)
            DO J = I + 1, N
              A(L,J) = A(L,J) - AUX * A(I,J)
            END DO
          END DO
        END DO
C
C****    CALCUL DU DETERMINANT ET SUBSTITUTION EN ARRIERE
C
      DO I = 1, N
        DET = DET * A(I,I)
      END DO
C

```

```

X(N) = B(N)/A(N,N)
DO L = 1, N - 1
  I = N - L
  X(I) = B(I)
  DO J = I + 1, N
    X(I) = X(I) - X(J) * A(I,J)
  END DO
  X(I) = X(I)/A(I,I)
END DO
C
END

```

### Remarques

**14.1** L'instruction  $DET = -DET$  traduit le fait que le signe du déterminant change chaque fois qu'on permute deux lignes.

**14.2** Le paramètre d'entrée EPS est initialisé à une valeur suffisamment faible (par exemple  $10^{-30}$ ), choisie en fonction du nombre de chiffres significatifs utilisés par l'ordinateur et de l'ordre de grandeur relatif des éléments diagonaux de **A**; pour tenir compte des erreurs d'arrondi, tout terme diagonal inférieur ou égal (en valeur absolue) à EPS est assimilé à un zéro.

**14.3** Ce sous-programme est impraticable au-delà de 100 équations à peu près, puisque la place nécessaire pour stocker sous sa forme complète la matrice **A** contenant  $n^2$  coefficients devient trop importante. Les programmes spécialement développés pour le calcul de grands systèmes d'équations simultanées, que l'on rencontre par exemple dans la méthode des éléments finis, tiennent compte notamment du fait qu'à partir d'une certaine distance de la diagonale principale tous les coefficients sont nuls (*matrice bande*). Puisque de plus la matrice **A** est, d'habitude, symétrique, il est alors possible de développer des algorithmes plus efficaces qui ne nécessitent que le stockage et le traitement des termes contenus dans la demi-bande supérieure de la matrice.

## 14.10 Transformations

### 14.10.1 Transformation linéaire

Considérons un ensemble de variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , telles les composantes d'un vecteur appartenant à un espace à  $n$  dimensions, transformé en un nouvel ensemble  $y_1, y_2, \dots, y_n$  par les opérations linéaires

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (14.63)$$

Cette transformation, définissant les composantes du vecteur **y** en fonction de celles, connues, du vecteur **x**, s'appelle *transformation linéaire*.

Si le vecteur  $\mathbf{y}$  est, à son tour, transformé en vecteur  $\mathbf{z}$  par l'application de la matrice de transformation  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

la transformation résultante de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{z}$  est donnée par

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (14.64)$$

D'autre part, si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont liés à  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$  par la même matrice de transformation  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{T}\mathbf{y}$$

et si

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

alors la transformation de  $\mathbf{x}'$  en  $\mathbf{y}'$  s'exprime par

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}' \quad (14.65)$$

La transformation résultante de  $\mathbf{x}'$  à  $\mathbf{y}'$  est donc représentée par la matrice  $\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ .

### 14.10.2 Transformation orthogonale

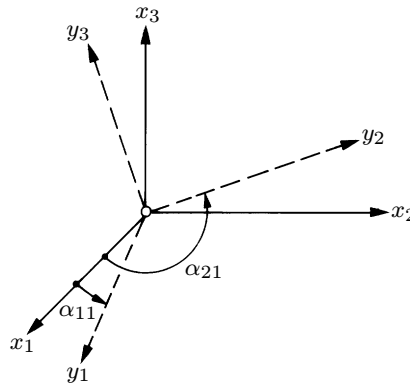
Un cas particulier de transformation linéaire est la *transformation orthogonale*. Cette transformation, par laquelle un vecteur  $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}$  est transformé en  $\{y_1 \ y_2 \ y_3\}$  par la relation

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (14.66)$$

ou

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (14.67)$$

correspond soit à une rotation d'un corps rigide autour de l'origine, soit à une rotation du système d'axes autour de l'origine. Dans les deux cas, les éléments  $R_{ij}$  de la matrice  $\mathbf{R}$  sont les cosinus directeurs définis dans la figure 14.2.



**Fig. 14.2** Cosinus directeurs intervenant dans la transformation orthogonale:  $R_{ij} = \cos \alpha_{ij}$ .

Puisque, dans une rotation, la longueur du rayon vecteur reste inchangée, on a

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$$

ou encore, avec (14.67),

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{R}\mathbf{x})^T \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{x}$$

On en tire

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (14.68)$$

Mais pour une matrice carrée  $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}$  et la matrice  $\mathbf{R}$  intervenant dans la transformation orthogonale est caractérisée par la propriété

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (14.69)$$

De plus, avec (14.68), (14.24) et (14.25),

$$\det(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \det \mathbf{R}^T \det \mathbf{R} = \det \mathbf{R} \det \mathbf{R} = \det \mathbf{I} = 1$$

de sorte que le déterminant de la matrice de transformation orthogonale est égal à 1

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad (14.70)$$

Soit  $\mathbf{T}$  une matrice  $3 \times 3$  définie par

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont des vecteurs définis dans un système d'axes cartésiens  $(x_1, x_2, x_3)$ . Si les axes des coordonnées subissent une rotation autour de l'origine, on a les transformations

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{R}\mathbf{u} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

et la matrice  $\mathbf{T}$  se transforme en

$$\mathbf{T}' = \mathbf{u}'\mathbf{v}'^T = \mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{R}\mathbf{v})^T = \mathbf{R}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{R}^T$$

Ainsi la transformation qui permet de passer de  $\mathbf{T}$  à  $\mathbf{T}'$  est réalisée par la relation

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{R}^T \quad (14.71)$$

Cette relation est caractéristique de la transformation d'une matrice dans le changement d'axes (14.66). Elle caractérise aussi la transformation d'un tenseur du second ordre (TGC vol. 3, chap. 1).

## 14.11 Valeurs propres et vecteurs propres

### 14.11.1 Définitions et propriétés

Le système d'équations linéaires particulier

$$A_{ij}x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n) \quad (14.72)$$

où le second membre est un multiple  $\lambda$  de la solution  $\{x_i\}$ , peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14.73)$$

Cette relation représente un système homogène qui n'a de solution que si le déterminant de la matrice  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  s'annule

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (14.74)$$

Puisque le facteur  $\lambda$  est indéterminé, ce déterminant est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n$ . En l'égalant à zéro, on obtient l'équation caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0 \quad (14.75)$$

dont les racines  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont les *valeurs propres* de la matrice  $\mathbf{A}$ .

Il est possible de montrer que les valeurs propres satisfont les deux conditions suivantes :

- la trace d'une matrice  $\mathbf{A}$  est égale à la somme de ses valeurs propres

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (14.76)$$

- le déterminant d'une matrice  $\mathbf{A}$  est égal au produit de toutes ses valeurs propres

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (14.77)$$

Lorsqu'on remplace dans (14.73)  $\lambda$  par l'une des valeurs propres, par exemple  $\lambda_j$ , on obtient un système d'équations linéaires compatible, mais indéterminé (le rang de  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  est  $n - 1$ ). On peut, par conséquent, supprimer une équation, choisir arbitrairement une inconnue, par exemple  $x_{1j}$ , et résoudre le système pour les autres valeurs  $x_{ij}, i \neq 1$ . Le vecteur  $\mathbf{x}_j$  ainsi obtenu

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad (14.78)$$

où l'indice  $j$  indique que cette solution est associée avec  $\lambda_j$ , est le *vecteur propre*. Puisque le vecteur propre n'est défini qu'à une constante près, il est habituel de le présenter sous une forme normée, telle que

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 = 1 \quad (14.79)$$

La matrice carrée formée des vecteurs propres normés  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n] \quad (14.80)$$

se nomme *matrice des modes*. La matrice diagonale formée des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  correspondantes, avec  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ ,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (14.81)$$

est la *matrice spectrale*. L'équation matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \quad (14.82)$$

représente alors le système d'équations relatif à toutes les valeurs de  $\lambda$ .

Dans ce qui précède, on a supposé que chaque valeur  $\lambda_j$  était une racine simple de l'équation caractéristique (14.75). Quand l'équation possède une racine  $p$  fois multiple, il lui correspond  $p$  vecteurs propres identiques qu'on obtient en attribuant une valeur égale aux  $p$  éléments du vecteur  $\mathbf{x}_j$  et en supprimant  $p$  équations linéaires.

Si  $\mathbf{A}$  est une matrice symétrique dont tous les éléments sont réels, tous ses  $\lambda_j$  et  $\mathbf{x}_j$  sont réels et, pour tout  $i \neq j$ , les vecteurs propres  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  sont orthogonaux entre eux

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad (14.83)$$

On en déduit que la *matrice des modes*  $\mathbf{X}$  est une *matrice de transformation orthogonale*.

De plus, si une matrice carrée  $\mathbf{A}$  a les valeurs propres  $\lambda_j$  et les vecteurs propres  $\mathbf{x}_j$ , alors la matrice  $\mathbf{A}^T$  a les mêmes valeurs propres, mais ses vecteurs propres  $\mathbf{y}_j$  sont orthogonaux aux vecteurs  $\mathbf{x}_j$

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad (14.84)$$

En prémultipliant par  $\mathbf{X}^T$  l'équation (14.82)

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}$$

on en déduit, puisque la matrice des modes est une matrice de transformation orthogonale,

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} \quad (14.85)$$

Finalement, si  $\lambda_j$  et  $\mathbf{x}_j$  sont les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice  $\mathbf{A}$ , alors la matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1}$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice carrée non singulière, a les mêmes valeurs propres  $\lambda_j$ , tandis que ses vecteurs propres  $\mathbf{y}_j$  sont égaux à

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{C} \mathbf{x}_j \quad (14.86)$$



Dans les applications relatives à l'instabilité ou aux vibrations des solides et structures, le problème des valeurs propres se présente sous la forme plus générale

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14.87)$$

où  $\mathbf{B}$  est une matrice carrée de même dimension que  $\mathbf{A}$ . En prémultipliant cette équation par  $\mathbf{B}^{-1}$  (ce qui nécessite la non-singularité de  $\mathbf{B}$ ), on se ramène à la forme standard

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14.88)$$

avec  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ . Si la matrice  $\mathbf{B}$  est singulière et la matrice  $\mathbf{A}$  régulière, il est possible de retrouver la forme standard en prémultipliant par  $-(1/\lambda)\mathbf{A}^{-1}$ , ce qui conduit à

$$(\mathbf{C} - \kappa \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14.89)$$

avec  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  et  $\kappa = 1/\lambda$ . Ces deux transformations ne sont toutefois guère utilisées car elles conduisent à une matrice  $\mathbf{C}$  non symétrique.

Mis à part des problèmes conduisant à un maximum de trois équations simultanées homogènes, la méthode de calcul consistant à chercher les valeurs propres comme racines de l'équation caractéristique (14.75) est impraticable. D'autres méthodes plus efficaces ont été proposées dont deux sont exposées brièvement ci-après.

### 14.11.2 Itération sur le déterminant

Dans la pratique, on connaît parfois une valeur approchée  ${}^0\lambda$  d'une valeur propre ; on peut alors calculer le déterminant (14.74) ou (14.75)

$$P({}^0\lambda) = {}^0P = \det(\mathbf{A} - {}^0\lambda \mathbf{I}) \quad (14.90)$$

qui prend une valeur non nulle, puisque  ${}^0\lambda$  n'est pas une valeur propre exacte.

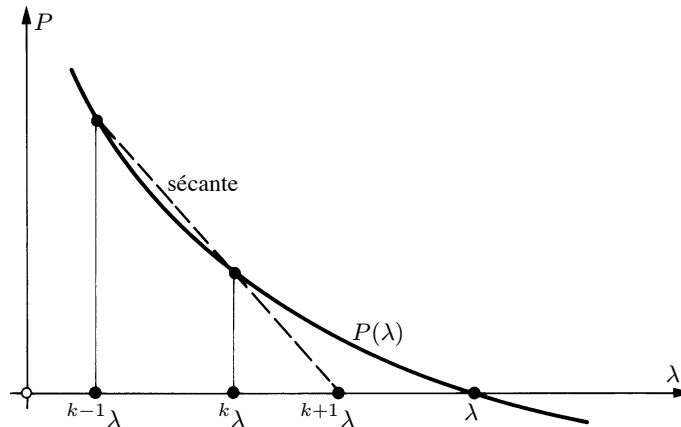


Fig. 14.3 Calcul pas à pas d'une valeur propre : approximation par la sécante.

Supposons connues deux approximations,  $^{k-1}\lambda$  et  $^k\lambda$ , pour lesquelles le déterminant prend les valeurs  $^{k-1}P$  et  $^kP$  (fig. 14.3) ; par une droite sécante à la courbe  $P(\lambda)$ , on trouve une approximation plus précise  $^{k+1}\lambda$

$$^{k+1}\lambda = ^k\lambda + \frac{^kP}{^{k-1}P - ^kP} (^k\lambda - ^{k-1}\lambda) \quad (14.91)$$

Une fois la valeurs propre obtenue, on calcule le vecteur propre correspondant en résolvant (14.73).

### 14.11.3 Itération sur le vecteur propre

On écrit le problème standard aux valeurs propres (14.73) sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (14.92)$$

Connaissant une approximation  $^{k-1}\mathbf{x}$  d'un vecteur propre, on en calcule une valeur améliorée  $^k\mathbf{x}^*$  par (14.92)

$$^k\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1} {}^{k-1}\mathbf{x} \quad (14.93)$$

(où l'on a pris  $\lambda = 1$  puisqu'un vecteur propre n'est défini qu'à une constante près). Il est conseillé de normer  $^k\mathbf{x}^*$ . Si  $^k\mathbf{x}$  est le vecteur normé, on démontre que  $^k\mathbf{x}$  tend vers la solution exacte  $\mathbf{x}$  – associée à la première valeur propre  $\lambda_1$  – quand  $k$  augmente. Faute de mieux, l'approximation de départ  $^0\mathbf{x}$  peut être un vecteur du genre  $^0\mathbf{x}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1\}$  ou  $\{1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}$ . Après convergence, on trouve la valeur propre par (14.85)

$$\lambda_1 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (14.94)$$

ou encore par le rapport  $^{k-1}x_i / ^kx_i^*$  de deux composantes quelconques  $i$ . On obtient toutefois une meilleure approximation de la valeur propre par le *quotient de Rayleigh*

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (14.95)$$

(qu'on peut tirer de (14.92) après prémultiplication de deux membres par  $\mathbf{x}^T$ ). A chaque itération, on calcule

$$^k\lambda_1 = \frac{{}^k\mathbf{x}^{*T} \mathbf{A} {}^k\mathbf{x}^*}{{}^k\mathbf{x}^{*T} {}^k\mathbf{x}^*} = \frac{{}^k\mathbf{x}^{*T} {}^{k-1}\mathbf{x}}{{}^k\mathbf{x}^{*T} {}^k\mathbf{x}^*} \quad (14.96)$$

et  $^k\lambda_1$  converge vers  $\lambda_1$  très rapidement.

#### Exemple 14.3

On donne une matrice  $\mathbf{A}$  et son inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  ; calculer la première valeur propre de  $\mathbf{A}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On part du vecteur propre approché  ${}^0\mathbf{x}^T = \{1 \ 1 \ 1\}$  et on norme par  $\max |x_i|$ . On obtient les vecteurs et valeurs propres successifs suivants, où  $\lambda'_1$  est calculé par  ${}^{k-1}x_1/{}^kx_1^*$  et  $\lambda''_1$  par (14.95) :

${}^0\mathbf{x}$	${}^1\mathbf{x}^* \quad {}^1\mathbf{x}$	${}^2\mathbf{x}^* \quad {}^2\mathbf{x}$	${}^3\mathbf{x}^* \quad {}^3\mathbf{x}$	${}^4\mathbf{x}^* \quad {}^4\mathbf{x}$	${}^5\mathbf{x}^* \quad \dots \quad \mathbf{x}$
1	6            1	5,1667            1	5,0645            1	5,0510            1	5,0492 ...            1
1	5   0,8333	4,1667   0,8065	4,0645   0,8025	4,0510   0,8020	4,0492 ...   0,8019
1	3   0,5000	2,3333   0,4516	2,2581   0,4459	2,2484   0,4451	2,2472 ...   0,4450
$\lambda'_1$	0,16667	0,19355	0,19747	0,19798	...            0,19806
$\lambda''_1$	0,2	0,19809	0,19806	0,19806	...            0,19806



# 15 Annexe

## Matrices de rigidité et vecteurs charges des barres et poutres prismatiques

### 15.1 Introduction

Dans le cadre de la résolution (essentiellement) numérique des structures en barres et poutres par la méthode des déplacements, les tableaux suivants donnent

- les matrices de rigidité **k** des barres et poutres prismatiques les plus usuelles ;
- les vecteurs charges **s** des poutres planes usuelles, en axes locaux.

Les axes locaux sont désignés par  $(x, y, z)$  où  $x$  est l'axe de la poutre. Les axes globaux éventuels sont notés  $(X, Y, Z)$ . La longueur de la poutre est  $L$  et les caractéristiques géométriques de sa section droite sont désignées par  $A$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  (ou  $I$ ) et  $J$ . Les propriétés mécaniques du matériau sont représentées par  $E$  et  $G$ .

Les poutres sont de type Bernoulli et ont deux nœuds. Les degrés de liberté sont numérotés selon l'ordre conventionnel donné à la section 2.3. Une flèche simple désigne un degré de liberté de translation, une flèche double un degré de liberté de rotation.

## 15.2 Structure spatiale – Poutre à 12 degrés de liberté

Axes locaux ( $x, y, z$ ) (fig. 15.1)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} & k_{i7} & k_{i8} & k_{i9} & k_{i10} & k_{i11} & k_{i12} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

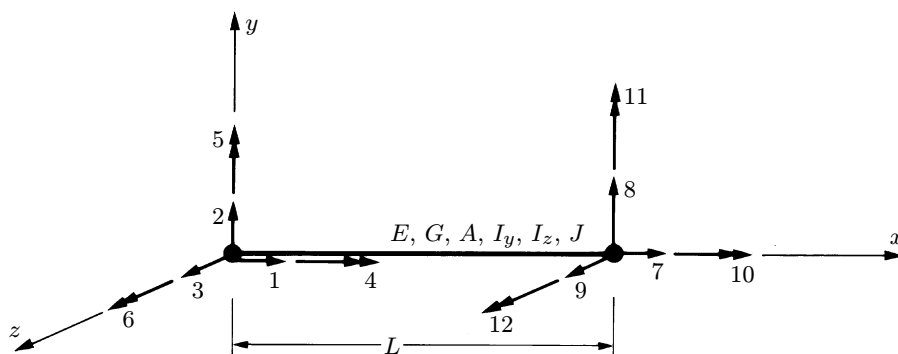


Fig. 15.1

### 15.3 Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 6 degrés de liberté

#### 15.3.1 Axes locaux ( $x, y$ ) (fig. 15.2)

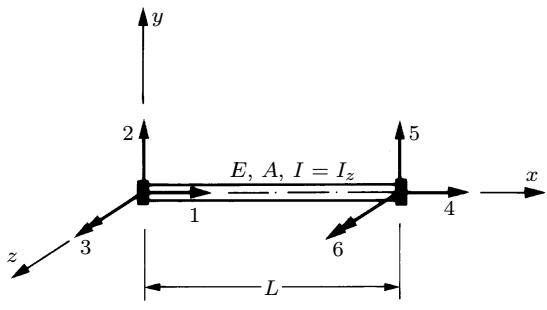
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$


Fig. 15.2

#### 15.3.2 Axes globaux ( $X, Y$ ) (fig. 15.3 ; $c = \cos \alpha$ , $s = \sin \alpha$ )

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & -\frac{6EI}{L^2} s & -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{12EI}{L^3} s^2 & -\frac{EA}{L} cs + \frac{12EI}{L^3} cs & -\frac{6EI}{L^2} s \\ \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c & -\frac{EA}{L} cs + \frac{12EI}{L^3} cs & -\frac{EA}{L} s^2 - \frac{12EI}{L^3} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{2EI}{L} \\ \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} s & \frac{6EI}{L^2} s & \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2 & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{6EI}{L^2} s \\ \text{sym.} & \frac{EA}{L} cs - \frac{12EI}{L^3} cs & \frac{6EI}{L^2} s & \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2 & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{6EI}{L^2} c \\ & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{6EI}{L^2} s & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} s \end{bmatrix}$$

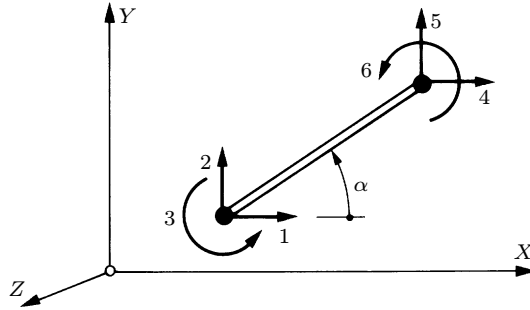


Fig. 15.3

## 15.4 Structure plane chargée dans son plan – Poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulation)

### 15.4.1 Axes locaux ( $x, y$ ) (fig. 15.4)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

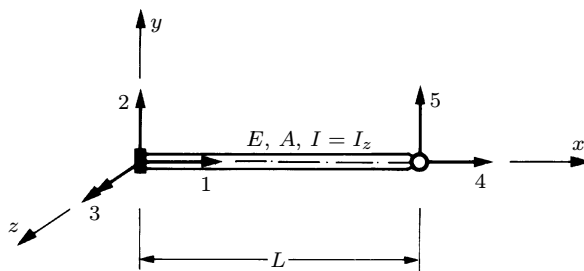


Fig. 15.4

### 15.4.2 Axes globaux ( $X, Y$ ) (fig. 15.5; $c = \cos \alpha$ , $s = \sin \alpha$ )

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} \\ \frac{EA}{L} c^2 + \frac{3EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{3EI}{L^3} cs & -\frac{3EI}{L^2} s & -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{3EI}{L^3} s^2 & -\frac{EA}{L} cs + \frac{3EI}{L^3} cs \\ \frac{EA}{L} s^2 + \frac{3EI}{L^3} c^2 & \frac{3EI}{L^2} c & -\frac{EA}{L} cs + \frac{3EI}{L^3} cs & -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{3EI}{L^3} s^2 & -\frac{EA}{L} cs + \frac{3EI}{L^3} cs \\ \frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L^2} s & -\frac{3EI}{L^2} c & \frac{EA}{L} c^2 + \frac{3EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{3EI}{L^3} cs \\ \text{sym.} & & & \frac{EA}{L} c^2 + \frac{3EI}{L^3} s^2 & \frac{EA}{L} cs - \frac{3EI}{L^3} cs \\ & & & & \frac{EA}{L} s^2 + \frac{3EI}{L^3} c^2 \end{bmatrix}$$

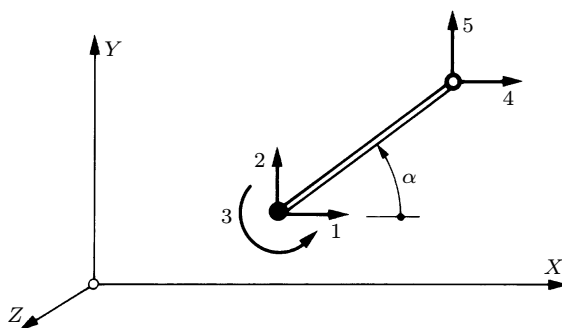


Fig. 15.5



## 15.5 Poutre continue (cas plan ; sans déplacement axial)

### 15.5.1 Cas général : flèche et rotation

Poutre à 4 degrés de liberté (fig. 15.6)

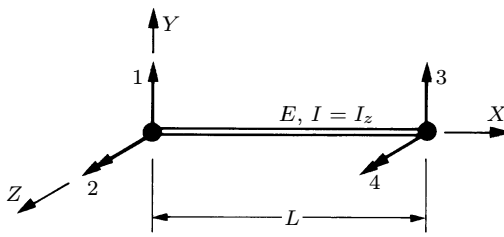
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$


Fig. 15.6

Poutre à 3 degrés de liberté (avec nœud articulation ; fig. 15.7)

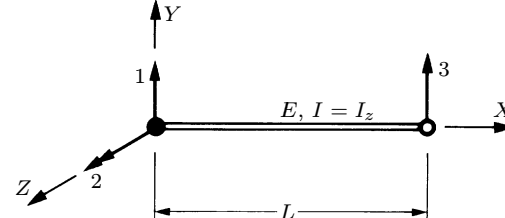
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} \\ \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$


Fig. 15.7

15.5.2 Cas où les rotations sur appui seules sont prises comme inconnues ( $EI = \text{cste par travée}$ )

Poutre à 2 degrés de liberté (fig. 15.8)

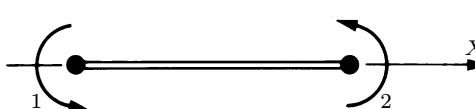
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$


Fig. 15.8

Poutre à un degré de liberté (avec nœud articulation ; fig. 15.9)

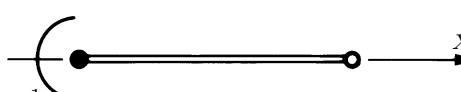
$$\mathbf{k} = [k_{i1}] = \left[ \frac{3EI}{L} \right]$$


Fig. 15.9

## 15.6 Structure plane chargée perpendiculairement à son plan (grille de poutres)

### Poutre à 6 degrés de liberté

#### 15.6.1 Axes locaux ( $x, y, z$ ) (fig. 15.10)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

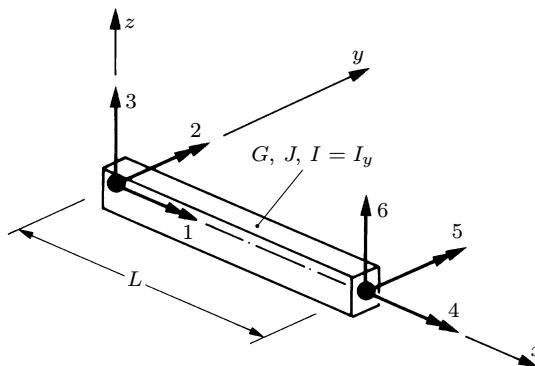


Fig. 15.10

#### 15.6.2 Axes globaux ( $X, Y, Z$ ) (fig. 15.11 ; $c = \cos \alpha$ , $s = \sin \alpha$ )

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ \frac{GJ}{L} c^2 + \frac{4EI}{L} s^2 & \frac{GJ}{L} cs - \frac{4EI}{L} cs & \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{GJ}{L} c^2 + \frac{2EI}{L} s^2 & -\frac{GJ}{L} cs - \frac{2EI}{L} cs & -\frac{6EI}{L^2} s \\ \frac{GJ}{L} s^2 + \frac{4EI}{L} c^2 & -\frac{6EI}{L^2} c & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{GJ}{L} cs - \frac{2EI}{L} cs & -\frac{GJ}{L} s^2 + \frac{2EI}{L} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c \\ \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{6EI}{L^2} c & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{GJ}{L} c^2 + \frac{4EI}{L} s^2 & \frac{GJ}{L} cs - \frac{4EI}{L} cs & -\frac{6EI}{L^2} s \\ \frac{GJ}{L} cs - \frac{2EI}{L} cs & -\frac{GJ}{L} s^2 + \frac{2EI}{L} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{GJ}{L} cs - \frac{4EI}{L} cs & \frac{GJ}{L} s^2 + \frac{4EI}{L} c^2 & \frac{6EI}{L^2} c \\ \frac{6EI}{L^2} s & -\frac{6EI}{L^2} c & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} s & \frac{6EI}{L^2} c & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

sym.

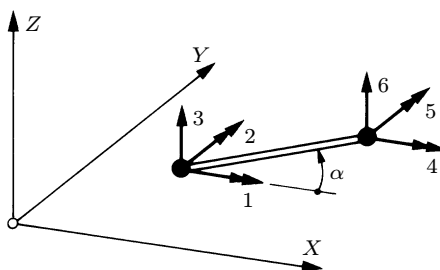


Fig. 15.11

## 15.7 Barre d'un treillis spatial

### 15.7.1 Axes locaux $(x, y, z)$ (fig. 15.12)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

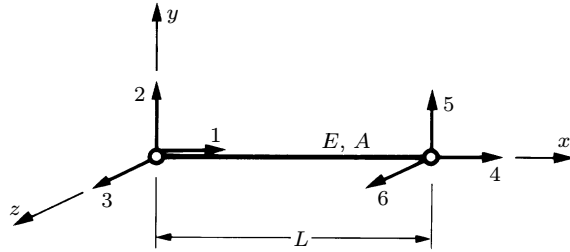


Fig. 15.12

### 15.7.2 Axes globaux $(X, Y, Z)$ (fig. 15.13)

Cosinus directeurs :

$$n_x = \cos \alpha_1 = \frac{X_B - X_A}{L}$$

$$n_y = \cos \alpha_2 = \frac{Y_B - Y_A}{L}$$

$$n_z = \cos \alpha_3 = \frac{Z_B - Z_A}{L}$$

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\ n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z & -n_x^2 & -n_x n_y & -n_x n_z \\ & n_y^2 & n_y n_z & -n_x n_y & -n_y^2 & -n_y n_z \\ & & n_z^2 & -n_x n_z & -n_y n_z & -n_z^2 \\ & & & n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ \text{sym.} & & & & n_y^2 & n_y n_z \\ & & & & & n_z^2 \end{bmatrix}$$

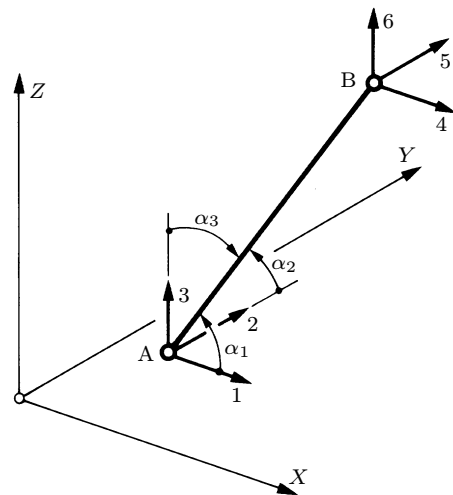


Fig. 15.13

## 15.8 Barre d'un treillis plan

### 15.8.1 Axes locaux ( $x, y$ ) (fig. 15.14)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \\ \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

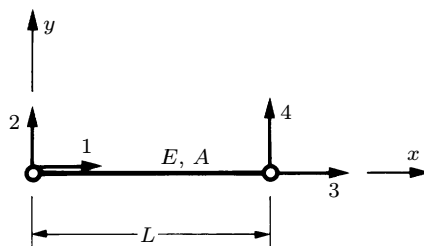


Fig. 15.14

### 15.8.2 Axes globaux ( $X, Y$ ) (fig. 15.15; $c = \cos \alpha$ , $s = \sin \alpha$ )

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \\ c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \text{sym.} & & c^2 & cs \\ & & & s^2 \end{bmatrix}$$

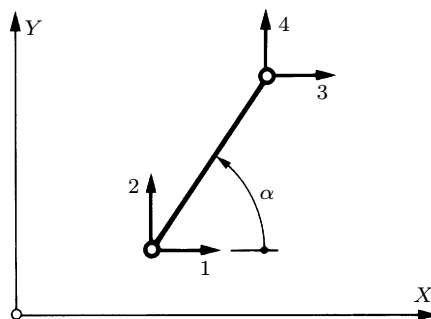


Fig. 15.15

## 15.9 Structure plane chargée dans son plan

### Vecteurs charges pour une poutre à 6 degrés de liberté

#### Axes locaux ( $x, y$ ) (fig. 15.16)

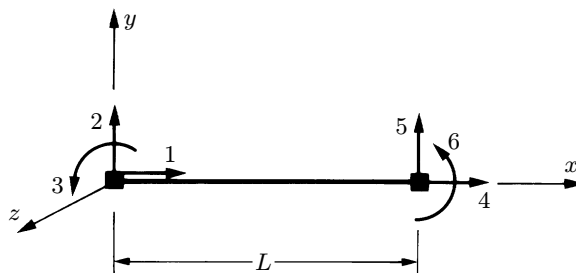
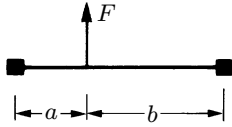
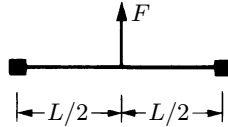


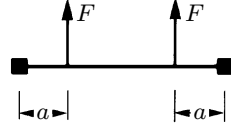
Fig. 15.16



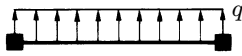
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Fb^2(L+2a)/L^3 \\ -Fab^2/L^2 \\ 0 \\ -Fa^2(L+2b)/L^3 \\ Fa^2b/L^2 \end{Bmatrix}$$



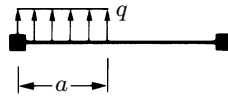
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F/2 \\ -FL/8 \\ 0 \\ -F/2 \\ FL/8 \end{Bmatrix}$$



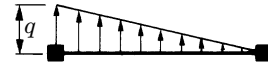
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ -Fa(L-a)/L \\ 0 \\ -F \\ Fa(L-a)/L \end{Bmatrix}$$



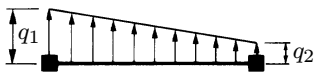
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ 0 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$



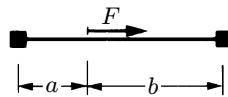
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qa(2L^3 - 2a^2L + a^3)/2L^3 \\ -qa^2(6L^2 - 8aL + 3a^2)/12L^2 \\ 0 \\ -qa^3(2L - a)/2L^3 \\ qa^3(4L - 3a)/12L^2 \end{Bmatrix}$$



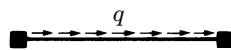
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -7qL/20 \\ -qL^2/20 \\ 0 \\ -3qL/20 \\ qL^2/30 \end{Bmatrix}$$



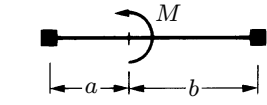
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(7q_1 + 3q_2)L/20 \\ -(3q_1 + 2q_2)L^2/60 \\ 0 \\ -(3q_1 + 7q_2)L/20 \\ (2q_1 + 3q_2)L^2/60 \end{Bmatrix}$$



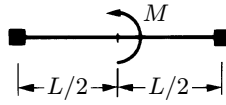
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -Fb/L \\ 0 \\ 0 \\ -Fa/L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



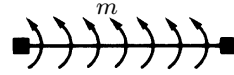
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ 0 \\ 0 \\ -qL/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



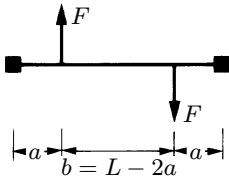
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Mab/L^3 \\ Mb(2a-b)/L^2 \\ 0 \\ -6Mab/L^3 \\ Ma(2b-a)/L^2 \end{Bmatrix}$$



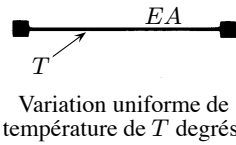
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3M/2L \\ M/4 \\ 0 \\ -3M/2L \\ M/4 \end{Bmatrix}$$



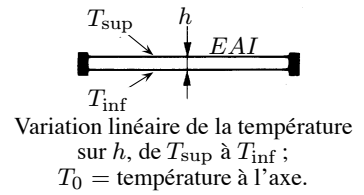
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -m \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Fb(L^2 + 2aL - 2a^2)/L^3 \\ -Fab(L-a)/L^2 \\ 0 \\ Fb(L^2 + 2aL - 2a^2)/L^3 \\ -Fab(L-a)/L^2 \end{Bmatrix}$$

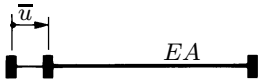


$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \alpha TEA \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha TEA \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

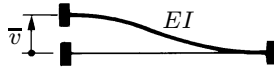


$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \alpha T_0 EA \\ 0 \\ -\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})EI/h \\ -\alpha T_0 EA \\ 0 \\ \alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})EI/h \end{Bmatrix}$$

Tassements d'appui :  $\bar{u}$  selon  $x$  ;  $\bar{v}$  selon  $y$  ;  $\bar{\theta}$  selon  $z$ .



$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \bar{u}EA/L \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{u}EA/L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12\bar{v}EI/L^3 \\ 6\bar{v}EI/L^2 \\ 0 \\ -12\bar{v}EI/L^3 \\ 6\bar{v}EI/L^2 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6\bar{\theta}EI/L^2 \\ 4\bar{\theta}EI/L \\ 0 \\ -6\bar{\theta}EI/L^2 \\ 2\bar{\theta}EI/L \end{Bmatrix}$$

Ces vecteurs sont les colonnes successives de la matrice du paragraphe 15.3.1, multipliées par l'intensité du déplacement de l'appui (appl. 2.3).

### 15.10 Structure plane chargée dans son plan

**Vecteurs charges pour une poutre à 5 degrés de liberté (avec nœud articulé)**

**Axes locaux  $(x, y)$**  (fig. 15.17)

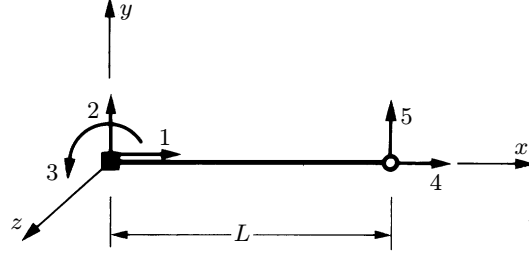
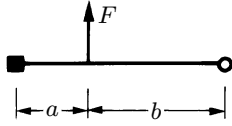
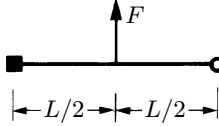


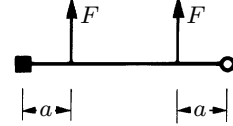
Fig. 15.17



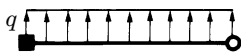
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Fb(3L^2 - b^2)/2L^3 \\ -Fab(L + b)/2L^2 \\ 0 \\ -Fa^2(3L - a)/2L^3 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11F/16 \\ -3FL/16 \\ 0 \\ -5F/16 \end{Bmatrix}$$



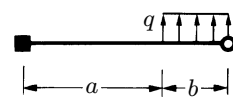
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F(2L^2 + 3aL - 3a^2)/2L^2 \\ -3Fa(L - a)/2L \\ 0 \\ -F(2L^2 - 3aL + 3a^2)/2L^2 \end{Bmatrix}$$



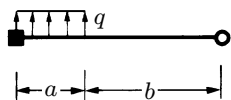
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5qL/8 \\ -qL^2/8 \\ 0 \\ -3qL/8 \end{Bmatrix}$$



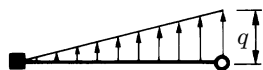
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(16q_1 + 9q_2)L/40 \\ -(8q_1 + 7q_2)L^2/120 \\ 0 \\ -(4q_1 + 11q_2)L/40 \end{Bmatrix}$$



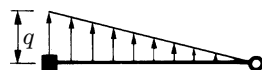
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qb^2(6L^2 - b^2)/8L^3 \\ -qb^2(2L^2 - b^2)/8L^2 \\ 0 \\ -qb(8L^3 - 6bL^2 + b^3)/8L^3 \end{Bmatrix}$$



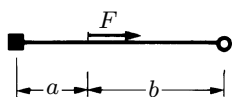
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qa(L+b)(5L^2 - b^2)/8L^3 \\ -qa^2(L+b)^2/8L^2 \\ 0 \\ -qa^3(3L+b)/8L^3 \end{Bmatrix}$$



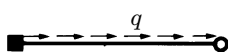
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9qL/40 \\ -7qL^2/120 \\ 0 \\ -11qL/40 \end{Bmatrix}$$



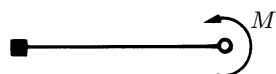
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2qL/5 \\ -qL^2/15 \\ 0 \\ -qL/10 \end{Bmatrix}$$



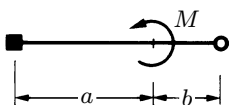
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -Fb/L \\ 0 \\ 0 \\ -Fa/L \\ 0 \end{Bmatrix}$$



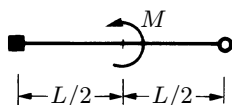
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ 0 \\ 0 \\ -qL/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



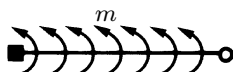
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3M/2L \\ M/2 \\ 0 \\ -3M/2L \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3Ma(L+b)/2L^3 \\ M(L^2 - 3b^2)/2L^2 \\ 0 \\ -3Ma(L+b)/2L^3 \end{Bmatrix}$$

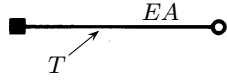


$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 9M/8L \\ M/8 \\ 0 \\ -9M/8L \end{Bmatrix}$$



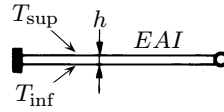
$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -m \end{Bmatrix}$$





Variation uniforme de température de  $T$  degrés.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \alpha T E A \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha T E A \\ 0 \end{pmatrix}$$



Variation linéaire de la température sur  $h$ , de  $T_{\text{sup}}$  à  $T_{\text{inf}}$  ;  
 $T_0$  = température à l'axe.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \alpha T_0 E A \\ -3\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})EI/2hL \\ -3\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})EI/2h \\ -\alpha T_0 E A \\ 3\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})EI/2hL \end{pmatrix}$$

Tassements d'appui : prendre les colonnes de la matrice du paragraphe 15.4.1, multipliées par l'intensité du déplacement de l'appui  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  ou  $\bar{\theta}$  (appl. 2.3).



# 16 Annexe

## Intégration numérique

### 16.1 Introduction

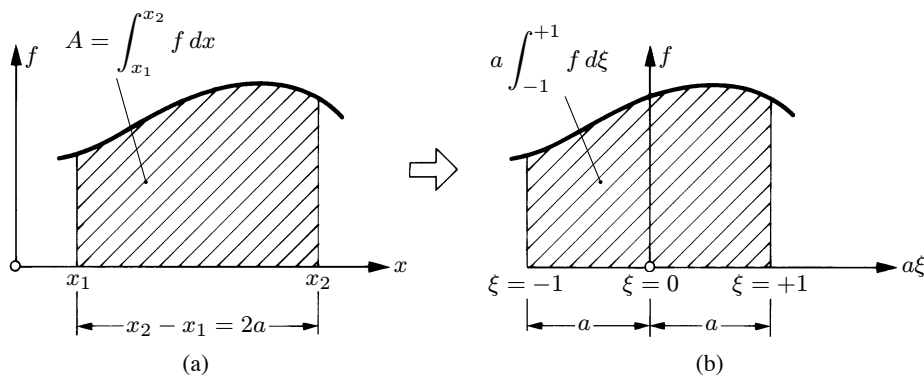
Dans la solution numérique des problèmes de la mécanique des solides et structures, on est fréquemment amené à devoir évaluer des intégrales telles que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy \quad \text{etc.}$$

Souvent il est difficile ou impossible de trouver les expressions exactes de ces intégrales. On peut alors les évaluer de manière approchée par une intégration numérique.

### 16.2 Principe de l'intégration numérique

Considérons l'intégrale définie  $A$  d'une fonction  $f(x)$  entre les limites  $x_1$  et  $x_2$  (fig. 16.1a)



**Fig. 16.1** Transformation des coordonnées pour l'intégration numérique : (a) coordonnée usuelle  $x$  ; (b) coordonnée non dimensionnelle  $\xi$ .

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

Le calcul numérique de  $A$  est d'ordinaire plus commode si l'on déplace l'origine des coordonnées au milieu de l'intervalle  $[x_1, x_2]$  et si l'on introduit une variable non dimensionnelle  $\xi$  variant entre  $-1$  (pour  $x = x_1$ ) et  $+1$  (pour  $x = x_2$ ) afin d'être indépendant de la demi-longueur

$$a = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

de l'intervalle (fig. 16.1b). De la relation entre  $x$  et la nouvelle variable  $\xi$ , à savoir

$$x = x_1 + a + a\xi$$

on tire  $dx = a d\xi$  et

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = a \int_{-1}^{+1} f(x(\xi)) d\xi = aI$$

L'intégration numérique de l'intégrale définie

$$I = \int_{-1}^{+1} f d\xi \quad (16.1)$$

consiste à sélectionner dans l'intervalle  $[-1, +1]$  un certain nombre de points  $i = 1, 2, \dots, n$  d'abscisse  $\xi_i$ , dits *points d'intégration*, à calculer en ces points (c'est-à-dire aux points d'abscisse  $x_i = x_1 + a + a\xi_i$ ) les valeurs  $f_i$  de la fonction, à pondérer ces valeurs par des coefficients  $w_i$  et à remplacer finalement l'intégrale  $I$  par la somme finie

$$I = \int_{-1}^{+1} f d\xi \cong \sum_{i=1}^n w_i f_i \quad (16.2)$$

Le choix des abscisses  $\xi_i$  et des *coefficients* ou *poids d'intégration*  $w_i$  dépend de la méthode appliquée. Les formules d'intégration numérique les plus utilisées sont décrites brièvement ci-après.

#### Remarque

**16.1** D'un point de vue pratique, on a intérêt à choisir, d'emblée, l'origine des coordonnées  $(x, y)$  au milieu de l'intervalle  $2a$ . Alors  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = a$  et, simplement,

$$x = a\xi$$

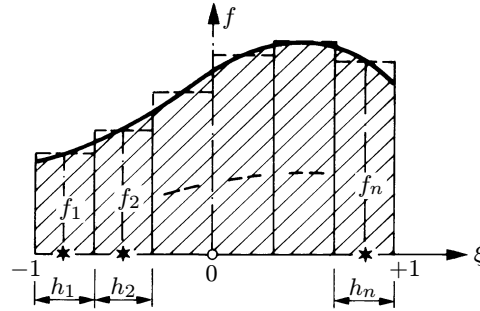
## 16.3 Formules d'intégration numérique

### 16.3.1 Formule des rectangles

On divise l'intervalle  $[-1, +1]$  en  $n$  parties de longueur  $h_i$  (fig. 16.2), on calcule la valeur  $f_i$  de la fonction au milieu de chaque partie et l'on pose

$$I \cong \sum_{i=1}^n h_i f_i \quad (16.3)$$

Les points d'intégration sont les milieux des segments. Si tous les segments sont égaux,  $h_i = 2/n$ . Cette formule de quadrature est la plus rudimentaire.



**Fig. 16.2** Formule des rectangles.

### 16.3.2 Formule des trapèzes

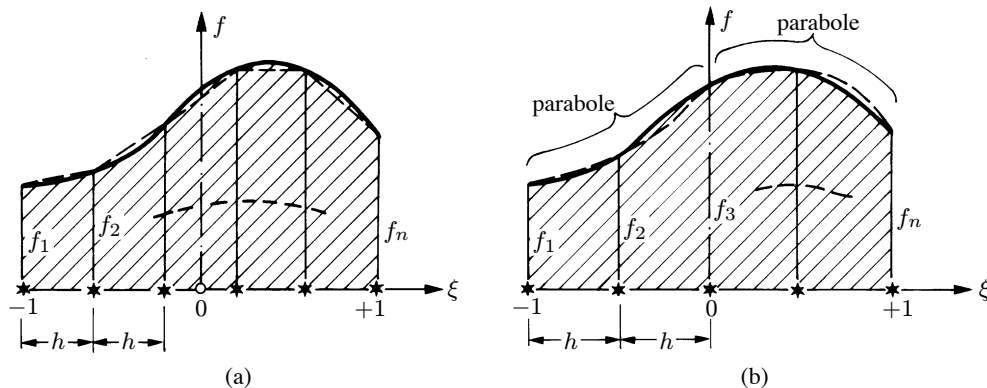
On divise l'intervalle  $[-1, +1]$  par  $n$  points d'intégration équidistants comprenant les points extrêmes (fig. 16.3a), on approche la fonction  $f$  entre deux points consécutifs par un segment de droite et on obtient

$$I = \frac{1}{n-1} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \quad (16.4)$$

### 16.3.3 Formule des paraboles ou de Simpson

On divise l'intervalle  $[-1, +1]$  par un nombre  $n$  *impair* de points d'intégration équidistants comprenant les points extrêmes (fig. 16.3b) et on suppose la fonction  $f$  approchée, tous les trois points, par des segments de parabole ; il en résulte la formule

$$I = \frac{2}{3(n-1)} (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \quad (16.5)$$



**Fig. 16.3** Formules (a) des trapèzes et (b) des paraboles ou de Simpson.

### 16.3.4 Formule de Newton-Cotes

On considère à nouveau  $n$  points d'intégration équidistants comprenant les points extrêmes et on fait passer un polynôme par les valeurs que prend la fonction  $f$  en ces points (fig. 16.4a). Ce polynôme est alors intégré exactement. Le résultat se présente sous la forme (16.2) où les coefficients d'intégration  $w_i$ , pour  $n$  allant jusqu'à 11, sont donnés dans le tableau 16.8. Les  $n$  valeurs de la fonction définissent, avec  $h = 2/(n - 1)$ ,

- un polynôme de degré  $p = n - 1$  et une erreur d'ordre  $O(h^{n+1})$ , si  $n$  est pair,
- un polynôme de degré  $p = n$  et une erreur d'ordre  $O(h^{n+2})$ , si  $n$  est impair.

Il est donc préférable d'utiliser un nombre *impair* de points d'intégration ( $n \geq 3$ ; pour  $n = 3$ , on retrouve la formule de Simpson).

La détermination des poids  $w_i$  est relativement aisée puisque le polynôme, approchant dans l'intervalle considéré la fonction  $f$  donnée, peut s'écrire sous la forme

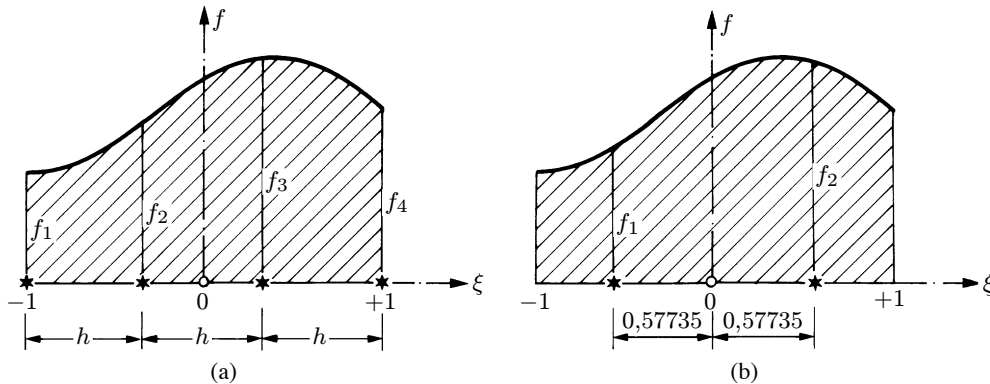
$$f \cong \sum_{i=1}^n f_i L_i^p(\xi)$$

où  $L_i^p(\xi)$  sont les *polynômes de Lagrange* (7.3) (sect. 7.2).

### 16.3.5 Formule de Gauss

Comme dans le cas précédent, la quadrature de Gauss est basée sur l'intégration exacte d'une fonction polynomiale remplaçant dans l'intervalle  $[-1, +1]$  la fonction  $f$ . Ici toutefois, la position des points d'intégration est considérée comme variable, de sorte qu'à chacun des  $n$  points s'associent deux paramètres,  $f_i$  et  $\xi_i$  (fig. 16.4b). Les  $2n$  paramètres définissent un polynôme de degré  $p = 2n - 1$  et l'erreur est d'ordre  $O(h^{2n})$  avec  $h = 2/(2n - 1)$ .

L'intégration de Gauss conduit de nouveau à la relation (16.2), où les abscisses  $\xi_i$  des points d'intégration (ou *points de Gauss*) et les coefficients  $w_i$  sont donnés dans le tableau 16.9 pour  $2 \leq n \leq 10$  et  $n = 12$ . On renonce à donner les relations permettant le calcul des  $\xi_i$  et  $w_i$  dont le développement est assez complexe.



**Fig. 16.4** Intégration numérique par les formules (a) de Newton-Cotes pour  $n = 4$  et (b) de Gauss pour  $n = 2$ . Chacune d'elle intègre exactement un polynôme du troisième degré.

### 16.3.6 Formule de Lobatto (ou Gauss-Lobatto)

Cette formule de quadrature est construite comme la précédente, à la différence près suivante : on impose aux points d'intégration extrêmes de coïncider avec les extrémités de l'intervalle (fig. 16.5). Il en résulte que la formule intègre exactement un polynôme de degré  $p = 2n - 3$ .

Les abscisses des points d'intégration et les poids sont définis au tableau 16.10 pour  $2 \leq n \leq 10$ .

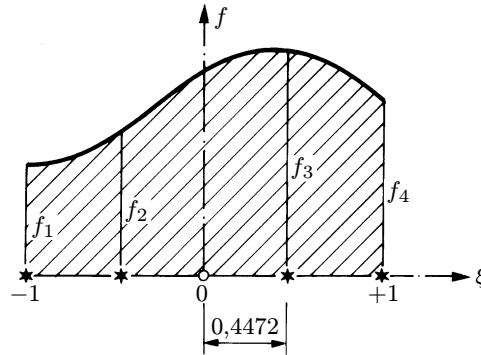


Fig. 16.5 Intégration numérique de Lobatto à  $n = 4$  points.

#### Exemple 16.1

Pour calculer l'aire située entre le demi-cercle de rayon 4 et l'axe  $x$ , on place l'origine au centre du cercle, de sorte que son équation est  $y = \sqrt{16 - x^2}$  avec  $a = 4$ . L'aire exacte est  $A = 8\pi = 25,13$  et on obtient les résultats suivants :

Simpson	$n =$	3	5	7	9	11	17
	$A =$	21,3	23,8	24,4	24,7	24,8	25,0
Newton-Cotes	$n =$	3	4	5	6	9	11
	$A =$	21,3	22,6	24,0	24,2	24,8	24,9
Gauss	$n =$	2	3	4	6	8	12
	$A =$	26,1	25,5	25,3	25,18	25,15	25,14

La supériorité de la quadrature de Gauss est flagrante ; si l'on recherche, par exemple, une précision de l'ordre de 1 %, Gauss l'atteint avec 3 points, alors que les autres demandent plus de 10 points.

#### Exemple 16.2

Examinons, dans l'intervalle  $[-1, +1]$ , le calcul de l'aire comprise entre les droites  $y = x + 1$  et  $y = 1$  d'une part, et l'axe  $x$  d'autre part (fig. 16.6). L'aire exacte est  $A = 1,5$ . On obtient les résultats suivants :

Trapèzes	$n =$	3	4	5	6	7	8		
	$A =$	1,5	1,444	1,5	1,480	1,5	1,490		
Simpson	$n =$	3	5	7	9	11	13		
	$A =$	1,667	1,5	1,518	1,5	1,507	1,5		
Newton-Cotes	$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10
	$A =$	1,667	1,5	1,489	1,486	1,538	1,393	1,466	1,491
Gauss	$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9
	$A =$	1,423	1,570	1,479	1,527	1,490	1,515	1,494	1,509

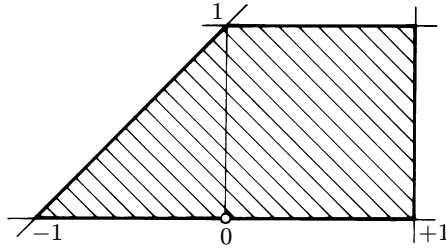


Fig. 16.6

## 16.4 Quelques règles d'utilisation

De façon générale, les formules d'intégration précédentes sont d'autant plus précises que le nombre de points d'intégration  $n$  est grand. Pour des valeurs identiques de  $n$ , la précision va en augmentant des formules simples (rectangles, trapèzes...) aux formules plus élaborées (Gauss). L'intégration de Gauss est finalement la meilleure, puisqu'elle demande, pour le même degré d'approximation, le nombre d'opérations le moins élevé; c'est de ce fait la plus utilisée dans la méthode des éléments finis.

La formule de Gauss intègre exactement un polynôme de degré  $p = 2n - 1$ . Si la fonction n'est pas polynomiale, on peut s'aider de son développement en série de Taylor: si ce dernier, limité au degré  $p = 2n - 1$ , constitue une bonne approximation de la fonction, on intégrera cette dernière avec  $n$  points de Gauss.

La formule de Newton-Cotes peut donner des résultats divergents et on l'utilisera avec prudence (exemple 16.2). Si l'on doit inclure les extrémités de l'intervalle dans le calcul, on lui préférera celle de Lobatto.

Lorsque la fonction à intégrer présente des discontinuités (sauts, points anguleux), les formules simples peuvent s'avérer d'un emploi plus rationnel que les autres (exemple 16.2). Il est même possible d'intégrer par tronçons, voire de faire varier le pas  $h$  dans chaque tronçon, pour s'adapter à la forme de la fonction à intégrer. Inversement, plus une fonction est régulière, plus la formule de Gauss est rationnelle.

Un avantage des formules simples, y compris celle de Newton-Cotes, est que les points d'intégration sont disposés régulièrement (contrairement aux formules de Gauss); cet avantage se manifeste lorsque la fonction à intégrer est donnée sous forme discrète, ou lors d'une étude de convergence où l'on double le nombre de points d'intégration à chaque essai (on peut réutiliser les valeurs de l'essai précédent).

Enfin, il faut éviter d'utiliser des formules de quadrature à poids négatifs.

## 16.5 Intégration numérique sur les domaines bidimensionnels et tridimensionnels

Pour calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$



on évalue d'abord la première intégrale en admettant que  $\eta$  est constant

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi \cong \sum_{i=1}^{\ell} w_i f(\xi_i, \eta) = g(\eta)$$

Dès lors

$$I = \int_{-1}^{+1} g(\eta) d\eta \cong \sum_{j=1}^m w_j g(\eta_j)$$

et finalement

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (16.6)$$

où  $\ell$  et  $m$  sont les nombres de points d'intégration selon les variables  $\xi$  et  $\eta$ . De manière analogue, on trouve

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \cong \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (16.7)$$

Moyennant la transformation (fig. 16.7)

$$x = a\xi \quad y = b\eta$$

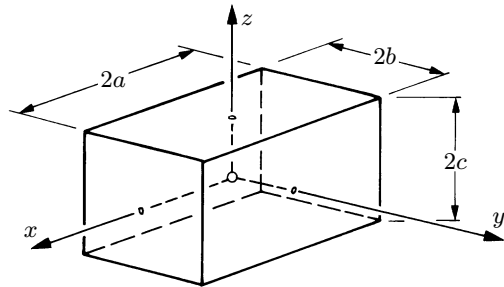
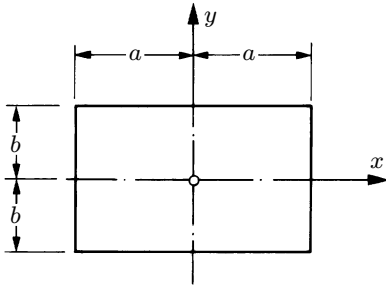
éventuellement complétée de

$$z = c\zeta$$

les intégrales sur un domaine rectangulaire de côtés  $2a$  et  $2b$ , ou prismatique de côtés  $2a$ ,  $2b$  et  $2c$ , conduisent à

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} f(x, y) dx dy = ab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f d\xi d\eta = abI \quad (16.8)$$

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-c}^{+c} f(x, y, z) dx dy dz = abc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f d\xi d\eta d\zeta = abcI \quad (16.9)$$



**Fig. 16.7** Domaines rectangulaire et parallélépipédique rectangle.

## Bibliographie

ABRAMOVITZ M., STEGUN I. A. (ed.), *Handbook of mathematical functions* ; Dover Publ. Inc., New York, 1965.

**Tableau 16.8** Intégration de Newton-Cotes.

$\pm \xi_i$	$w_i$	$\pm \xi_i$	$w_i$	$\pm \xi_i$	$w_i$
$n = 2$		$n = 7$		$n = 10$	
1	1	1	41/420	1	2857/44800
$n = 3$		2/3	216/420	7/9	15741/44800
1	1/3	1/3	27/420	5/9	1080/44800
0	4/3	0	272/420	3/9	19344/44800
$n = 4$		$n = 8$		1/9	5772/44800
1	1/4	1	751/8640	$n = 11$	
1/3	3/4	5/7	3577/8640	1	16067/299376
$n = 5$		3/7	1323/8640	4/5	106300/299376
1	7/45	1/7	2989/8640	3/5	-48525/299376
1/2	32/45	$n = 9$		2/5	272400/299376
0	12/45	1	989/14175	1/5	-260550/299376
$n = 6$		3/4	5888/14175	0	427368/299376
1	19/144	1/2	-928/14175		
3/5	75/144	1/4	10496/14175		
1/5	50/144	0	-4540/14175		

**Tableau 16.9** Intégration de Gauss.

$\pm\xi_i$	$w_i$	$\pm\xi_i$	$w_i$
$n = 2$		$n = 8$	
0,57735 02691 89626	1,00000 00000 00000	0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
$n = 3$		0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
0,00000 00000 00000	0,88888 88888 88889	0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556	0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376
$n = 4$		$n = 9$	
0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546	0,00000 00000 00000	0,33023 93550 01260
0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454	0,32425 34234 03809	0,31234 70770 40003
$n = 5$		0,61337 14327 00590	0,26061 06964 02935
0,00000 00000 00000	0,56888 88888 88889	0,83603 11073 26636	0,18064 81606 94857
0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366	0,96816 02395 07626	0,08127 43883 61574
0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189	$n = 10$	
$n = 6$		0,14887 43389 81631	0,29552 42247 14753
0,23861 91680 83197	0,46791 39345 72691	0,43339 53941 29247	0,26926 67193 09996
0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139	0,67940 95682 99024	0,21908 63625 15982
0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170	0,86506 33666 88985	0,14945 13491 50581
$n = 7$		0,97390 65285 17172	0,06667 13443 08688
0,00000 00000 00000	0,41795 91836 73469	$n = 12$	
0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119	0,12523 34085 11469	0,24914 70458 13403
0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277	0,36783 14989 98180	0,23349 25365 38355
0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870	0,58731 79542 86617	0,20316 74267 23066
		0,76990 26741 94305	0,16007 83285 43346
		0,90411 72563 70475	0,10693 93259 95318
		0,98156 06342 46719	0,04717 53363 86512

**Tableau 16.10** Intégration de Lobatto.

$\pm\xi_i$	$w_i$	$\pm\xi_i$	$w_i$
$n = 2$		$n = 7$	
1,000000 000000	1,000000 000000	1,000000 000000	0,047619 047619
$n = 3$		0,830223 896279	0,276826 047362
1,000000 000000	0,333333 333333	0,468848 793471	0,431745 381210
0,000000 000000	1,333333 333333	0,000000 000000	0,487619 047619
$n = 4$		$n = 8$	
1,000000 000000	0,166666 666667	1,000000 000000	0,035714 285714
0,447213 595500	0,833333 333333	0,871740 148510	0,210704 227144
$n = 5$		0,591700 181433	0,341122 692484
1,000000 000000	0,100000 000000	0,209299 217902	0,412458 794659
0,654653 670708	0,544444 444444	$n = 9$	
0,000000 000000	0,711111 111111	1,000000 000000	0,027777 777778
$n = 6$		0,899757 995411	0,165495 361561
1,000000 000000	0,066666 666667	0,677186 279511	0,274538 712500
0,765055 323929	0,378474 956298	0,363117 463826	0,346428 510973
0,285231 516481	0,554858 377035	0,000000 000000	0,371519 274376
		$n = 10$	
		1,000000 000000	0,022222 222222
		0,919533 908166	0,133305 990851
		0,738773 865106	0,224889 342063
		0,477924 949810	0,292042 683680
		0,165278 957666	0,327539 761184

# Solution des exercices

## Chapitre 1

**1.5.1** Inconnue  $d_1$  = rotation en 2; dans  $K_{11}d_1 + S_1 = Q_1$ , on a  $K_{11} = 4EI_1/L_1 + 3EI_2/L_2$ ,  $S_1 = -qL_1^2/12 - \overline{M}/2$ ,  $Q_1 = 0$ ; d'où  $d_1 = 0,001\,167$  rad.

**1.5.2**  $r_A = (EA/L)d_A - (EA/L)d_B$ ;  $r_B = -(EA/L)d_A + (EA/L)d_B$ .

**1.5.3**  $s_A = EA\alpha T$ ;  $s_B = -EA\alpha T$ .

**1.5.4** Poutre continue ( $v, \theta$ ;  $V, M$ ); treillis plan ( $u, v$ ;  $N$ ); cadre plan ( $u, v, \theta$ ;  $N, V, M$ ); grille de poutres ( $w, \theta_x, \theta_y$ ;  $V_z, T, M_y$ ); treillis spatial ( $u, v, w$ ;  $N$ ); cadre spatial ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ;  $N, V_y, V_z, T, M_y, M_z$ ).

**1.5.5** (a)  $n_{\text{dep}} = 1$ ; (b)  $n_{\text{dep}} = 1$  ou 2; (c)  $n_{\text{dep}} = 6$  et 3; (d)  $n_{\text{dep}} = 15$  et 8; (e)  $n_{\text{dep}} = 9$  et 5.

**1.5.6** Inconnues  $d_1 = u_1$  ( $= u_2 = u_3$ ) et  $d_2 = \theta_2$ ;  $d_1 = -3,4985$  cm et  $d_2 = 0,02099$  rad; intensité des moments [kNm]:  $M_2 = 374,7$  dans 1-2, 198,4 dans 2-3 et 176,3 dans 2-5;  $M_4 = 88,2$ ;  $M_5 = 0$ ;  $M_6 = 88,2$ .

**1.5.7** Avec les mêmes notations qu'en 1.5.6:  $d_1 = -0,1387$  cm et  $d_2 = -7,873 \cdot 10^{-6}$  rad; moments [kNm]:  $M_2 = 0,062$ , 0,136 et 0,074;  $M_4 = 3,495$ ;  $M_5 = 0,202$ ;  $M_6 = 3,158$ .

Remarque:  $u_2 = 0,0053$  et  $u_3 = 0,125$  cm.

**1.5.8**  $n_{\text{dep}} = 9$ ; il y a 39  $K_{ij}$  non nuls.

**1.5.9** Cas de charge  $F$ : symétrie d'axe vertical,  $n_{\text{dep}} = 2$  ( $\theta_2, \theta_3$ ),  $S_1 = S_2 = 5FL/16$ ; cas de charge  $H$ : antisymétrie d'axe vertical,  $n_{\text{dep}} = 4$  ( $\theta_2, \theta_3, u_2, u_3$ ),  $Q_1 = Q_2 = 0$ ,  $Q_3 = Q_4 = H$ .

**1.5.10** Flèche sous  $F$  (vers le bas):  $28F/(kL)$ .

## Chapitre 2

**2.9.1**  $u_H = 0,15$  cm;  $v_H = -0,025$  cm.

**2.9.2**  $N = 420$  kN; avec  $\varepsilon = (L' - L)/L$ ,  $N = 434,6$  kN (calcul en configuration déformée!).

**2.9.3**  $\mathbf{s}_l^T = \{ qLs/2 \quad 5qLc/8 \quad qL^2c/8 \quad qLs/2 \quad 3qLc/8 \}$  avec  $c = \cos \alpha$  et  $s = \sin \alpha$ ;  $\mathbf{s}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{s}_l$  avec

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

**2.9.4**  $\mathbf{T}$  selon (2.15) et  $\mathbf{T}_\alpha$  selon (2.25) (même matrice de rotation que pour la poutre de cadre plan).

**2.9.5** Similitudes  $N \leftrightarrow T$  et flexion; combinaison torsion + flexion.

**2.9.6** Eliminer, par Gauss, la quatrième inconnue, des lignes 3, 2 et 1.

**2.9.7** 1) Oui; 2)  $n_{\text{dep}} = 2$  ( $d_1 = u_2$ ,  $d_2 = \theta_2$ ); 4) [kN] et [cm]:  $K_{11} = 1\,401,94$ ;  $K_{12} = -1\,166,7$ ;  $K_{22} = 2\,566\,666,7$ ;  $Q_1 - S_1 = 8,75$ ;  $Q_2 - S_2 = -7\,875$ ; d'où  $d_1 = 0,003\,689$  cm et  $d_2 = -0,003\,067$  rad.

**2.9.8**  $N_2 = 48,28$  kN,  $V_2 = -21,82$  kN,  $M_2 = 37,17$  kNm;  $N_3 = -51,72$  kN,  $V_3 = 28,18$  kN,  $M_3 = 65,79$  kNm.

**2.9.9** Si axe  $X = \underline{2-1}$  et axe  $Y = \underline{2-3}$ , et en groupant les vecteurs forces des quatre cas de charge en une matrice de quatre colonnes, on obtient

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ -26,67 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 60 & 0 & 24 \\ 40 & 80 & -324 & 7\,200 \\ 26,67 & 0 & 0 & -72 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 324 & -7\,200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nœud } \underline{1} \\ \hline \text{nœud } \underline{2} \\ \hline \text{nœud } \underline{3} \end{matrix}$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice  $(9 \times 4)$  des réactions d'appui ; la transposée d'une colonne de  $\mathbf{R}$  vaut

$$\{ R_{1x} \quad R_{1y} \quad M_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad R_{3x} \quad R_{3y} \quad 0 \}$$

**2.9.10** 1) Il faut faire une expansion de la matrice de rigidité  $(4 \times 4)$  de la barre pour l'adapter aux six degrés de liberté de la poutre, d'où

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & c^2 & cs & 0 \\ & & & & s^2 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_A \\ \dots v_A \\ \dots \theta_A \leftrightarrow \text{inactif} \\ \hline \dots u_B \\ \dots v_B \\ \dots \theta_B \leftrightarrow \text{inactif} \end{matrix}$$

2) il suffit de poser  $I = 0$  (il n'y a pas de division par l'inertie  $I$ ) et on obtient la matrice ci-dessus.

**2.9.11** 1)  $n_d = 72$ ;  $n_{rea} = 13$ ; 2)  $A \equiv \underline{17}$ ,  $B \equiv \underline{12}$ ;  $k_{11} (49; 49)$ ,  $k_{12} (49; 50)$ ,  $k_{13} (49; 51)$ ,  $k_{14} (49; 34)$ ,  $k_{15} (49; 35)$ ,  $k_{16} (49; 36)$ ,  $k_{21} (50; 49)$ ,  $\dots$ ,  $k_{41} (34; 49)$ ,  $\dots$ ,  $k_{44} (34; 34)$ ,  $\dots$ ,  $k_{66} (36; 36)$ .

**2.9.12** Symétrie d'axe vertical;  $n_{dep} = 2$  ( $v_2$  et  $v_3$ );  $v_2 = -1,1977 Fa/EA$ ,  $v_3 = -0,6419 Fa/EA$ ;  $R_{1x} = 0,5881 F$ ,  $R_{1y} = 0,5 F$ ;  $N_{12} = -0,5186 F$ ,  $N_{13} = -0,2780 F$ ,  $N_{23} = 0,4814 F$ .

### Chapitre 3

**3.8.3** Etat plan de contrainte ; deux axes de symétrie en traction  $\Rightarrow$  étude d'un quart avec  $v = 0$  sur l'axe horizontal et  $u = 0$  sur l'axe vertical ; en flexion, un axe d'antisymétrie (horizontal) et un axe de symétrie (vertical)  $\Rightarrow$  étude d'un quart avec  $u = 0$  sur les deux axes et  $v = 0$  en un nœud quelconque contre le mode rigide.

**3.8.5**  $u$  et  $v$  aux huit nœuds, soit  $n_d^e = 16$  degrés de liberté ;  $\mathbf{k}$  contient  $16 \cdot 16 = 256$  termes, mais, vu sa symétrie, seuls  $16 \cdot 17 / 2 = 136$  termes sont différents ( $16 + 15 + 14 + \dots + 3 + 2 + 1$ ) ; parabole.

**3.8.6** Etat plan de déformation ; quatre axes de symétrie  $\Rightarrow$  étude d'un huitième ; dans le premier octant :  $v = 0$  sur l'axe horizontal,  $u = v = 0$  sur le bord vertical et, sur la bissectrice, déplacement normal à la bissectrice nul ; forces concentrées sur les nœuds de l'arc de cercle.

**3.8.7** (a)  $v_1 = \theta_1 = 0$ ;  $V_2 = -3 \text{ kN}$ ,  $M_2 = 0$ ; (b)  $v_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$ ;  $v_2 = 0$ ,  $M_2 = -8 \text{ kNm}$ ; (c)  $v_1 = \theta_1 = 0$ ;  $v_2 = -2 \text{ cm}$ ,  $M_2 = 0$ ; (d)  $v_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$ ;  $\theta_2 = 0$ ,  $V_2 = -5 \text{ kN}$ . *Note* : voir l'application 3.1 et la remarque 3.8 : quatre conditions pour chaque poutre, dont le  $\Gamma$  est constitué des extrémités  $\underline{1}$  et  $\underline{2}$ .

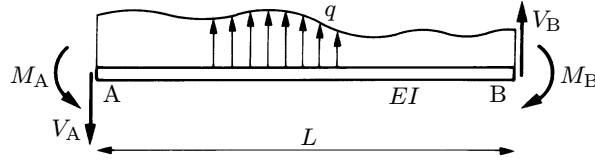
**3.8.8** Soit AB un tronçon prismatique de poutre fléchie plane (fig. Sol. Ex. 3.8.8). Puisque  $2m = 4$  ( $m = 2$ ), c'est deux fois qu'il faut intégrer par parties le premier terme de (3.32), d'où, avec  $(\bullet)' = d(\bullet)/dx$ ,

$$\begin{aligned} EI \int_L v'''' w \, dx &= EI v''' w \Big|_0^L - EI \int_L v''' w' \, dx = -V w \Big|_0^L - EI v'' w' \Big|_0^L + EI \int_L v'' w'' \, dx \\ &= -V w \Big|_0^L + M w' \Big|_0^L - \int_L M w'' \, dx \end{aligned}$$

On a introduit  $V$  et  $M$  grâce à (1.4). Avec (interprétation physique)  $w \equiv \delta v$ ,  $w' \equiv \delta \theta$  et  $-w'' \equiv \delta \psi$  (flèche, rotation et courbure virtuelles), il vient, en réarrangeant,

$$\int_L M \delta \psi \, dx = \int_L q \delta v \, dx + V \delta v \Big|_A^B - M \delta \theta \Big|_A^B$$

et on retrouve (3.33).



**Fig. Sol. Ex. 3.8.8**

## Chapitre 4

**4.6.1** Voir figure 7.5 ; cylindres et cônes paraboliques. Avec  $\mathbf{d}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_6 \quad v_6\}$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

**4.6.2** Plans. Comme à l'exercice précédent, avec six degrés de liberté,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

**4.6.3** Fonctions d'interpolation : figure 7.2(a) ;  $u(x) = u_1(1 - x/a)/2 + u_2(1 + x/a)/2$  ;  $\varepsilon_x = du/dx = (u_2 - u_1)/(2a)$  ;  $N = EA\varepsilon_x$ .

**4.6.4** On a

$$u(x) = b_1 + b_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Pp}$$

puis

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - b_2 a & \text{et} & & u_2 &= b_1 + b_2 a \\ \Rightarrow \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{bmatrix} & \text{et} & & \mathbf{C}^{-1} &= \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où  $\mathbf{N}$ .

**4.6.5** Paraboloïdes hyperboliques.

**4.6.6** Contraintes linéaires (ex. 4.6.1 et ex. 4.6.5) et constantes (ex. 4.6.2).

**4.6.7** Six nœuds, douze degrés de liberté et douze paramètres  $a_i$  et  $b_i$  (cf. § 7.3.2), d'où

$$\begin{aligned}u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2\end{aligned}$$

Interpolation quadratique  $\Rightarrow$  OK avec ex. 4.6.1.

**4.6.8** Avec (1.4) et  $(\bullet)' = d(\bullet)/dx$ ,

$$\begin{aligned}M(x) &= -EIv'' = -EI(v_1M_1'' + \theta_1L_1'' + v_2M_2'' + \theta_2L_2'') \\&= -EI \left( \frac{3x(v_1 - v_2)}{2a^3} + \frac{3x(\theta_1 + \theta_2)}{2a^2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2a} \right)\end{aligned}$$

si  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $x = \pm a$  et  $L = 2a$ , on retrouve (1.12).

## Chapitre 5

**5.6.1** Nœuds 1, 2, 3 = sommets du triangle  $\Rightarrow n_d^e = 6$  et  $\mathbf{d}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}$ . Interpolation paramétrique, avec  $\mathbf{p}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{Pp}$$

Les fonctions d'interpolation sont des plans (ex. 4.6.2); l'interpolation est linéaire et la déformée est un triangle à bords rectilignes;  $N_1(x, y) = 1 - x/a - (1 - b/a)(y/c)$ ;  $N_2(x, y) = x/a - (b/a)(y/c)$ ;  $N_3(x, y) = y/c$ .

Critères de convergence: interpolation continue et une fois dérivable (polynômes de classe  $C^1$ ); sur un côté quelconque du triangle: déplacements linéaires et deux nœuds  $\Rightarrow$  conformité garantie; polynômes complets au degré  $m = 1$ . L'élément est conforme convergent.

**5.6.2** Oui; non.

**5.6.3** 1) Figure 4.3 ou 7.3(b);  $n_d^e = 12$ ; 2) voir solution exercice 4.6.7 et paragraphe 7.3.2; 3) parabole; oui; oui; 4) voir la figure 7.5.

**5.6.4** Non-conformité à la jonction des triangles linéaires et quadratiques; maillage trop grossier au changement de section; un appui manque.

**5.6.5** La rigidité flexionnelle des semelles et du raidisseur est négligée dans 1), prise en compte dans 2); conformité assurée dans 1), violée dans 2), où, en plus, se pose le problème des trois degrés de liberté nœaux des poutres face aux deux degrés de liberté nœaux des éléments rectangulaires (la rotation  $\theta$  de poutre ne peut être connectée aux éléments finis rectangulaires). Découpage plus fin dans la zone d'appui. Dans la section droite d'action de  $V$  et  $M$ , appliquer des forces nœales consistantes avec les contraintes dues à  $V$  et  $M$ .

**5.6.6** Par des éléments finis rectangulaires, dont l'épaisseur vaut la largeur des semelles et du raidisseur.

**5.6.7** 1) Identique à celle de l'exercice 5.6.1; 2) plans; 3) la conformité aux frontières n'est pas réalisée (un seul nœud par bord rectiligne).

**5.6.8**  $u = -\theta xy/a$ ,  $v = 0$ ;  $\varepsilon_x = -\theta y/a$ ,  $\varepsilon_y = 0$ ,  $\gamma_{xy} = -\theta x/a (\neq 0)$ .



## Chapitre 6

**6.5.1** Déformations (voir les équations des fonctions d'interpolation sous sol. ex. 5.6.1)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/a & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/c)(b/a - 1) & 0 & -(1/c)(b/a) & 0 & 1/c \\ (1/c)(b/a - 1) & -1/a & -(1/c)(b/a) & 1/a & 1/c & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

Pour calculer  $\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA$ , la matrice d'élasticité  $\mathbf{D}$  est donnée par (6.18). Force de volume, où  $A = ac/2$  est l'aire du triangle,

$$\mathbf{f}^T = \frac{At}{3} \{ b_x \quad b_y \quad b_x \quad b_y \quad b_x \quad b_y \}$$

Charge concentrée au centre géométrique  $G$

$$\mathbf{f}^T = \frac{1}{3} \{ F_x \quad F_y \quad F_x \quad F_y \quad F_x \quad F_y \}$$

Les contraintes sont constantes. Le point de contrainte optimal est  $G$ .

**6.5.2**  $\mathbf{f}^T = bt \{ 0 \quad 0 \quad t_x \quad t_y \quad t_x \quad t_y \quad 0 \quad 0 \}$  ( $t_x$  et  $t_y$  en  $\text{N/m}^2$ ).

**6.5.3** 1)  $\mathbf{d}^T = \{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \}$ ; 2) figure 7.2(b); 3)  $u(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \mathbf{d}$ ;

4) critères respectés; 5)  $\mathbf{B} = (1/2a^2)[2x - a \quad -4x \quad 2x + a]$ ; 6)

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{6a} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

7)  $\mathbf{f}^T = (q_x a/3) \{ 1 \quad 4 \quad 1 \}$  (sect. 7.8); 8)  $N(x) = EA\varepsilon(x) = EAB\mathbf{d}$  (ex. 10.6.1).

**6.5.4**  $\mathbf{f}^T = (F/8) \{ 3 \quad 6 \quad -1 \}$ .

**6.5.5** 1)  $u(x) = u_1 N_1 + u_2 N_2$  avec  $N_1$  et  $N_2$  selon la figure 7.2(a); 2)  $\mathbf{B} = (1/2a)[-1 \quad 1]$  et

$$\mathbf{k} = \frac{E(A_1 + A_2)}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3)  $\mathbf{f}^T = b_x(a/3) \{ 2A_1 + A_2 \quad A_1 + 2A_2 \}$ ; 4)  $\sigma = E(u_2 - u_1)/(2a)$ ;  $N_1 = A_1\sigma$  et  $N_2 = A_2\sigma$  ( $\sigma$  est constant, mais  $N$  varie linéairement).

**6.5.6** 1) Polynôme incomplet au degré  $m = 1 \Rightarrow$  critère 2 violé; 2)  $\mathbf{P} = [x \quad x^2]$ ; 3)

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2a^2} \begin{bmatrix} -a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) avec  $\xi = x/a$ ,  $N_1 = \xi(\xi - 1)/2$  et  $N_2 = \xi(\xi + 1)/2$ ; 5)  $\mathbf{B} = (1/2a^2)[2x - a \quad 2x + a]$ ; 6)

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{6a} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

*Application*: si  $u_B = C_i(FL/EA)$ , où  $i$  est le nombre d'éléments,  $C_1 = 0,43$ ;  $C_2 = 0,22$ ;  $C_3 = 0,14$ ; etc. et  $u_B \rightarrow 0$  (!).

**6.5.7** La matrice  $\mathbf{C}$  est singulière.

**6.5.8** Il en résulte un vecteur force thermique  $\mathbf{f}_{th} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{th} d\Omega$ .

**6.5.9** En état plan de contrainte (TGC vol. 3, chap. 5)

$$\boldsymbol{\sigma}_{th}^T = - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \{1 \quad 1 \quad 0\}$$

d'où

$$\mathbf{f}_{th}^T = \frac{E\alpha T t}{1-\nu} \{-b \quad -a \quad b \quad -a \quad b \quad a \quad -b \quad a\}$$

## Chapitre 7

**7.10.1** 2)  $N_1(\xi, \eta) = L_1^2(\xi)L_1^1(\eta) = (1/4)\xi(\xi-1)(1-\eta)$ ;  $N_2(\xi, \eta) = L_2^2(\xi)L_1^1(\eta) = (1/2)(1+\xi)(1-\xi)(1-\eta)$ .

**7.10.2** On doit avoir (cas 2D ; composante  $u(x, y)$  seule ; polynôme complet au degré  $m = 1$ ) :

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (1)$$

Sous quelles conditions la transformation isoparamétrique peut-elle reproduire (1) ? On a

$$u(x, y) = \sum N_i u_i \quad (2)$$

Par (1),  $u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i$ , d'où, dans (2),

$$u(x, y) = a_1 \sum N_i + a_2 \sum N_i x_i + a_3 \sum N_i y_i$$

Mais  $x = \sum N_i x_i$  et  $y = \sum N_i y_i$  (7.11)  $\Rightarrow u(x, y) = a_1 \sum N_i + a_2x + a_3y$ . Donc (1) est satisfait si  $\sum N_i = 1$ .

**7.10.3** 1)  $N_1(\xi, \eta) = (1/8)(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta)(\xi+\eta+1)$ ; 2) cette fonction est cubique le long du bord 1-2-3 ( $N_1(\xi, -1) = -(1/4)\xi(\xi-1)^2$ ), alors que seuls trois nœuds sont disponibles.

**7.10.4**  $N_1(\xi, \eta, \zeta) = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ .

**7.10.6** 2)  $N_1 = (1/4)(\xi-1)(\eta-1)$ ;  $N_2 = (1/4)\eta(\xi+1)(\eta-1)$ ;  $N_3 = -(1/2)(\xi+1)(\eta^2-1)$ ;  $N_4 = (1/4)\eta(\xi+1)(\eta+1)$ ;  $N_5 = -(1/4)(\xi-1)(\eta+1)$ ;

4) le champ  $u = \sum N_i u_i$  contient un terme constant et des termes en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi\eta$ ,  $\eta^2$  et  $\xi\eta^2 \Rightarrow$  le champ paramétrique est de la forme

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2$$

et il y a six paramètres pour cinq nœuds ! Un paramètre dépend donc des autres ; on trouve  $a_6 = a_5$ , d'où

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5(1+\xi)\eta^2$$

**7.10.7** Au minimum cinq (avec deux possibilités ; cf. bibliographie, 4<sup>e</sup> référence, vol. 1, sect. 5.2).

**7.10.8** La déformée est celle de la figure 7.22(c) ;  $\varepsilon_x = C(3\eta^2-1)$ ,  $\varepsilon_y = -C(3\xi^2-1)$ ,  $\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon}$  est nul aux quatre points de Gauss.

**7.10.9**  $n_G = p = n_n^e - 1$ .

**7.10.10** Introduire les déplacements des nœuds associés au mécanisme dans (6.22) et vérifier que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  en  $x = y = 0$ .

**7.10.11** Oui pour la brique.

**7.10.12** Le premier mode  $\lambda_{1\nu}$  combine les modes  $-\lambda_4$  et  $-\lambda_5$  de la figure 7.23, ce qu'on écrit  $\lambda_{1\nu} = f(-\lambda_4, -\lambda_5)$ ; puis  $\lambda_{2\nu} = f(-\lambda_4, \lambda_5)$ ,  $\lambda_{3\nu} = f(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\lambda_{4\nu} = f(\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\lambda_{5\nu} = f(\lambda_1, \lambda_2)$ .

## Chapitre 9

**9.8.1** Voir section 9.2 ; 1) avec  $\mathbf{d}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\}$  et  $(\bullet)' = d(\bullet)/dx$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & L_1 & 0 & M_2 & L_2 \\ 0 & M_1' & L_1' & 0 & M_2' & L_2' \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

2)  $\varepsilon = u'$  et  $\psi = -v''$ , d'où

$$\mathbf{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \\ 0 & -M_1'' & -L_1'' & 0 & -M_2'' & -L_2'' \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

3)  $k_{11} = EA/2a$ ;  $k_{22} = 3EI/2a^3$ ;  $k_{33} = 2EI/a$ ; 4)  $N(x) = EA(u_2 - u_1)/2a$  : constant;  $M(x)$  : linéaire (ex. 4.6.8); 5)  $\mathbf{f}^T = \{q_x a \quad q_y a - m_z \quad q_y a^2/3 \quad q_x a \quad q_y a + m_z \quad -q_y a^2/3\}$ .

*Remarque* : les dérivées dans  $\varepsilon$  et  $\psi$  sont d'ordre différent, mais,  $\varepsilon$  et  $\psi$  n'étant pas couplés, il n'y a pas de danger de verrouillage (cf. rem. 7.5 et 7.6).

**9.8.2** De tels éléments sont compatibles avec les éléments poutres de grille de poutres (de type Bernoulli ; sect. 15.6) dans la résolution des dalles raidies (sommiers...).

**9.8.3** 1) Sur un bord, six conditions pour décrire  $w$  qui est du cinquième degré :  $w, \partial w/\partial s, \partial^2 w/\partial s^2$  à chaque sommet ; cinq conditions pour définir  $\partial w/\partial n$  qui est du quatrième degré :  $\partial w/\partial n, \partial^2 w/\partial n^2$  en chaque sommet et  $\partial w/\partial n$  au milieu du côté ; 2) élément très précis, sauf en présence d'une discontinuité des courbures (saut de l'épaisseur, changement de matériau, moment (charge) réparti sur une ligne...) ; les degrés de liberté du type dérivée seconde peuvent compliquer l'expression de certaines conditions aux limites, ou être avantageux pour d'autres ; les moments nodaux sont continus ; connexion délicate avec une poutre (sommier...).

**9.8.4** Champ  $w$  à seize paramètres ; 1) seize degrés de liberté, mais seulement trois pour la pente normale cubique, d'où élément non conforme ; 2) seize degrés de liberté, conformité, mais surcompatibilité : moment de torsion nodal continu.

**9.8.5** 1)  $\mathbf{k}$ , de dimension  $9 \times 9$ , se partitionne en sous-matrices  $3 \times 3$  associées aux trois nœuds ; 2) figure 7.2(b) ;  $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3]$  ; 3)  $\mathbf{D}$  selon (8.37) ;  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3]$  ;

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_i' \\ 0 & N_i' & -N_i' \end{bmatrix} \quad \left( N_i' = \frac{dN_i}{dx} \right)$$

4)

$$\mathbf{k}_{11} = \int_{-a}^a \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dx = \int_{-a}^a \begin{bmatrix} EAN_1' N_1' & 0 & 0 \\ \text{sym.} & GBN_1' N_1' & -GBN_1 N_1' \\ & EIN_1' N_1' + GBN_1 N_1 & \end{bmatrix} dx$$

seul le terme  $GBN_1 N_1$ , du quatrième degré, exige trois points d'intégration de Gauss pour être évalué exactement ;

$$\mathbf{k}_{11} = \begin{bmatrix} 7EA/6a & 0 & 0 \\ & 7GB/6a & GB/2 \\ \text{sym.} & & 7EI/6a + 4aGB/C \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Intégration :} \\ \text{exacte : } C = 15 \\ \text{réduite : } C = 18 \end{array}$$

donc  $k_{33,\text{exact}} > k_{33,\text{réduit}}$  : l'intégration réduite diminue la rigidité associée à la déformation d'effort tranchant ;

5)  $N$  et  $M$  linéaires,  $V$  quadratique ; au nœud  $\underline{2}$ ,  $N = EA(u_3 - u_1)/2a$  correspond à la valeur classique issue de  $u = NL/EA$  (TGC vol. 2, sect. 4.1).

**9.8.6** 1)  $\mathbf{d}^T = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}$  ; 5) avec  $C = 1$  (intégration exacte à deux points de Gauss) et 6)  $C = 0$  (intégration réduite à un point)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} GB/2a & GB/2 & -GB/2a & GB/2 \\ EI/2a + (GB/2 + CGB/6)a & -GB/2 & -EI/2a + (GB/2 - CGB/6)a & -GB/2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{sym.} & & GB/2a & -GB/2 \\ & & & EI/2a + (GB/2 + CGB/6)a \end{bmatrix}$$

7)  $\mathbf{f}^T = a\{q \quad m \quad q \quad m\}$  ; 8) 0,421 ; 1,032 ; 1,620 ; 1,889 (valeur exacte : 2,000) ; 9) 1,531 ; 1,883 ; 1,971 ; 1,993.

**9.8.7** On trouve  $\beta = (v_2 - v_1)/2a - (\alpha_1 + \alpha_2)/2 + (x/a)(\alpha_1 - \alpha_2)/2$  ; pour avoir  $\beta \rightarrow 0$  pour tout  $x$ , il faut poser  $\alpha_1 = \alpha_2$  ; or  $\kappa = (\alpha_1 - \alpha_2)/2a$  ; donc si  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow 0$  !

**9.8.8**  $N_3(x) = (1 - x/a)(1 + x/a)$  ;  $\beta = (v_2 - v_1)/2a - (\alpha_1 + \alpha_2)/2 + (x/a)[(\alpha_1 - \alpha_2)/2 - 2P/a]$  ; pour que  $\beta$  soit constant, il faut annuler le crochet, d'où  $P = (a/4)(\alpha_1 - \alpha_2)$  et

$$v(x) = v_1 N_1 + v_2 N_2 + \frac{a}{4} (\alpha_1 - \alpha_2) N_3$$

**9.8.9** La rigidité torsionnelle de la poutre ne peut être connectée à la plaque, qui peut donc tourner librement dans son plan autour de son centre ;  $\mathbf{K}$  sera singulière.

## Chapitre 10

**10.6.1** 1) Le système s'écrit

$$\frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ H \end{Bmatrix}$$

2)  $u_2 = (L/EA)(3qL/8 + H/2) + \bar{u}_1$  ;  $u_3 = (L/EA)(qL/2 + H) + \bar{u}_1$  ;  $R_1 = -qL - H$  ;

3)  $N_1 = qL + H$  ;  $N_2 = qL/2 + H$  ;  $N_3 = H$ . Solution exacte.

**10.6.2** 1) (a)  $n_d = 34$  ;  $n_{\text{rea}} = 10$  ; (b)  $n_d = 32$  ;  $n_{\text{rea}} = 8$  ; 2) (a) et (b)  $L_b = 12$ .

**10.6.3** 1)  $L_b = 15$  ; 2) 23 conditions aux limites essentielles ; 3)  $n_d = 45$ ,  $n_{\text{dep}} = 22$ ,  $n_{\text{rea}} = 23$  ; 4)  $\mathbf{L}_{(1)(12 \times 45)}$  :

$$\mathbf{L}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

**10.6.4** 1) Avec  $\alpha = 60^\circ$ ,  $c^2 = \cos^2 \alpha = 0,25$ ,  $s^2 = \sin^2 \alpha = 0,75$  et  $cs = \cos \alpha \sin \alpha \cong 0,433$ ,

$$\begin{bmatrix} k + c^2 k' & csk' \\ csk' & k + s^2 k' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2) solution exacte (fig. Ex 10.6.4a) :  $u = 1/5 = 0,2$  et  $v = -\sqrt{3}/15 = -0,115\,470$  ;  $R_1 = 50$  ; solution approchée (fig. Ex 10.6.4b) : en double précision (32 bits ou 15 chiffres décimaux) et en admettant que, si les six premiers chiffres sont identiques à la solution exacte, on a pratiquement la solution exacte, on observe ceci :

- $p \leq 5$  solution inexacte (rigidité  $k'$  insuffisante)
- $6 \leq p \leq 11$  solution exacte

- $12 \leq p \leq 15$  solution légèrement dégradée (équations mal conditionnées)
- $p \geq 16$  solution dégradée ou incorrecte (équations très mal conditionnées)

*Conclusion* : pour simuler un élément très rigide, il faut lui donner une rigidité de l'ordre de  $10^8$  fois supérieure à la rigidité moyenne des autres éléments.

## Chapitre 12

**12.6.2** La déformée cubique de plaque n'est pas conforme avec le déplacement linéaire de membrane.

**12.6.3** Le degré de liberté de rotation de la poutre ne peut être connecté aux degrés de liberté de translation (de type  $u_i$  et  $v_i$ ) de la paroi.

**12.6.4** En 3D, un élément de membrane n'offre pas de rigidité perpendiculairement à son plan.

**12.6.5** 1) Deux axes de symétrie  $\Rightarrow$  modélisation d'un quart de paroi en état plan de contrainte ;

2) discrétisation plus fine au voisinage du trou et le long de a-a ; 4) oui ; ovalisation du trou dans a-a, effet du coefficient de Poisson dans b-b.



# Bibliographie

Les ouvrages traitant la méthode des éléments finis et, plus généralement, les méthodes numériques, sont innombrables. La plupart sont écrits en langue anglaise et débordent largement des bases traitées ici. Les livres renseignés ci-après sont des classiques de bonne facture.

HINTON E., OWEN D. R. J., *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1979.

OWEN D. R. J., HINTON E., *A Simple Guide to Finite Elements*, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1980.

SAMUELSSON A., WIBERG N.-E., *Finite Element Method – Basics*, Studentlitteratur, Lund, Sweden, 1998.

ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The Finite Element Method*, 4th ed., McGraw-Hill, U. K., 1989-1991 :

vol. 1 : Basic Formulation and Linear Problems (1989) ;

vol. 2 : Solid and Fluid Mechanics – Dynamics and Non-Linearity (1991).

ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The Finite Element Method*, 5th ed., Butterworth-Heinemann, R.E.E.D., Oxford, 2000 :

vol. 1 : The Basis ;

vol. 2 : Solid Mechanics ;

vol. 3 : Fluid Dynamics.

BATOZ J.-L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Paris, 1990-1992 :

vol. 1 : Solides élastiques (1990) ;

vol. 2 : Poutres et plaques (1990) ;

vol. 3 : Coques (1992).

ONATE E., *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*, 2ª edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona, 1995.

COOK R. D., MALKUS D. S., PLESHA M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, 1989.

BATHE K.-J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.

CRISFIELD M. A., *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, Pineridge Press, Swansea, U. K., 1986.

BURNETT D. S., *Finite Element Analysis – From Concepts to Applications*, Addison Wesley, 1987.

HUEBNER K. H., THORNTON E. A., BYROM T. G., *The Finite Element Method for Engineers*, 3rd ed., Wiley, 1995.

HUGHES T. J. R., *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.

GMÜR TH., *Méthode des éléments finis en mécanique des structures*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2000.

CURNIER A., *Méthodes numériques en mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2000.

AFPC – Emploi des éléments finis en génie civil, *La modélisation des ouvrages*, réalisé sous la direction de M. Pratt ; Hermès, Paris, 1995.



# Index

Les numéros renvoient aux chapitres (un chiffre), aux sections (deux chiffres) ou aux paragraphes (trois chiffres).

- Adaptation ou adaptivité de maillage, 11.9.2
- Analyse duale, 11.3
- Appui doux, dur (Mindlin), 9.5.2
- Assemblage, 2.7, 10.4.2
- Asymptotique, 5.1
  
- Bande, 10.4.5
- Bielle d'appui, 10.5
- Blocage, 1.4.1
- Bubnov*, 4.4
  
- Calcul matriciel, 14
- Charge nodale, 1.4.2
- Coefficient de rigidité, 1.4.2
- Combinaison d'états indépendants, 2.5, 9.7.1
- Condensation, 2.6
- Condition aux limites essentielle, naturelle, 3.4, 3.7.1
- Condition d'intégrabilité, 5.2.1
- Contrainte, 6.3
  - calcul, lissage, restitution des —, 6.3
  - généralisée, 8.2
  - optimale, nodale, 6.3.2
- Convergence, 5.1, 11
  - $h$ , 5.1.2
  - $p$ , 5.1.3
- Coordonnée naturelle, 7.2, 7.3.3, 7.5.1
- Coque de Love, 8.4
- Critère de convergence, 5
- Critère 1, de continuité, de conformité, de compatibilité cinématique, 5.2.1, 5.4.2
- Critère 2, des déformations constantes, de complétude, 5.2.2, 5.4.3
  
- Découpage-assemblage, 1.2, 2.2, 3.2
- Défaut d'équilibre, 6.3.1, 11.7
- Déformation de structure, généralisée, 8.2
- Degré de liberté, 1.4.1, 3.3
  - interne, 2.6.1
- Degré d'indétermination cinématique, 1.4.1
- Demi-largeur de bande, 10.4.5
- Déplacement nodal imposé, 2.3, 6.2.4
- Déterminant, 14.4
- Dimension caractéristique  $h$ , 5.1.2
- Discretisation, 12.3
- Distorsion, 7.7
  
- Effort intérieur (structure), 8.2
- Élément fini, 1.1, 1.2, 3
  - $C^0$ , 7.1
  - $C^1$ , 8.4
  - conforme, 5.2.1
  - de coque, 9.7
  - de frontière, 1.1
  - de plaque-membrane, 9.7
  - de structure, 8.3, 9
  - de transition, 7.10.6
  - discret, 9.6
  - isoparamétrique, 7.5.3, 7.12, 9.5.4
  - non conforme, 5.3.1, 9.4.5
  - origine, 7.5.2
  - surcompatible, 9.4.4
- Élimination de Gauss, 14.9
- Energie de déformation, 10.4.6, 11.2
- Equation
  - aux déplacements, aux réactions, 2.7, 10.4.4
  - d'équilibre de l'élément fini, 3.3.2, 6.2.4
  - de Navier, 3.6
- Équilibre des nœuds, 1.4.2, 10.4.3
- Erreur, 11
  - de discrétisation, 11.4.2
  - de pollution, 12.3.3
- Estimation d'erreur, 11.5.3
  - a posteriori, 11.7
  - a priori, 11.6
  - relative, 11.9.1
- Etat de déplacement dû aux charges, unité, 1.4.2
- Expansion, 2.7
  
- Fonction
  - bulle, 7.3.3
  - d'interpolation, 4.3, 4.5, 7
  - poids, 3.7.1
- Force
  - consistante, 6.2.3, 7.8
  - interne, 1.4.3
- Forme
  - bilinéaire, quadratique, 14.3.3
  - différentielle, 1.1, 3.6
  - faible, 3.7
  - forte, 3.6
  - intégrale, 3.7

## Formulation

- de l'élément fini, 6.2
- en déplacements, 1.3.1

Formule d'intégration (numérique), 7.6.1, 16.3

*Galerkin*, 4.3, 4.4*Gauss*, 7.6.1, 11.8.2, 14.9, 16.3.5

Glissement moyen, 8.6, 8.7.1

*Hermite*, 4.5

Inconnue cinématique, 1.4.1

Intégration (numérique), 7.6, 16

- de Gauss, 7.6.1, 16.3.5
- réduite, 7.6.3

Interpolation, 4.3, 4.5, 7

- $C^0$ , 7
- de Lagrange, 7.2
- paramétrique, 4.5.3

Inverse (matrice), 14.5

Isotropie géométrique, 7.3.3

Jacobien, 7.12

*Jirousek*, 4.2.5*Lagrange*, 7.2, 7.3.3, 11.8.2

Lissage des contraintes, 6.3.2

*Lobatto*, 16.3.6

Localisation, 2.7, 10.3

Macroélément, 9.4.3

Maillage, 1.1, 1.2, 3.2, 12.3.3

Matrice, 14

- de localisation, 10.3
- de rotation, 2.4.2, 10.2.1
- jacobienne, 7.12

Matrice de rigidité

- de l'élément, 2.3, 6.2.2
- de la structure, 2.7, 10.4.1
- des barres et poutres prismatiques, 15
- réduite, 10.4.4

Mécanisme, 7.6.4

- en sablier, 7.6.5

Méthode

- de Cross, 1.4.1, 2.8
- de discrétisation, 1.1
- de Galerkin, 4.3, 4.4
- des déplacements, 1.4, 10
- des différences finies, 1.1
- des éléments de frontière, 1.1
- des éléments finis, 1.1, 1.2, 3, 13
- des résidus pondérés, 3.7.1, 4.3
- des rotations, 1.4.1, 2.8
- matricielle des déplacements, 2

Mode

- à énergie nulle (mécanisme), 7.6.4
- de l'interpolation paramétrique, 4.5.3
- incompatible, 5.5.2
- rigide, 5.2.2

Modèle d'élément fini, 4.2

- déplacement, 4.2.2
- équilibre, 4.2.3, 9.4.6
- hybride, 4.2.5, 9.4.6
- mixte, 4.2.4, 9.4.6

Modélisation, 1.1, 12.2

*Newton-Cotes*, 16.3.4

Nœud, 1.1, 1.2, 3.2, 3.3

Norme

- d'un vecteur, 14.8
- de l'erreur, 11.5.1
- énergétique (de l'erreur), 11.5.1, 11.7
- euclidienne, 14.8

Opérateur d'assemblage, 10.4.2

Optimiseur de bande, 10.4.5

Paramètre (interpolation), 4.3, 4.5.3

Partitionnement nodal, 2.3

*Pascal*, 7.3.2*Patch test*, 5.3

Pente

- normale, 8.5.2, 9.4.2
- tangentielle, 8.5.2

*Pian*, 4.2.5

Plaque

- de Kirchhoff, 8.4, 8.5.2, 9.4
- de Mindlin, 8.6, 8.7.2, 9.5

Point

- d'intégration (numérique), 7.6.1, 16.2
- de contrainte optimal, 6.3.2, 11.8.1
- de superconvergence des contraintes, 11.8

Polynôme

- complet, 5.4.1
- d'interpolation de Lagrange, 7.2

Poutre

- de Bernoulli, 1.3.2, 1.3.3, 1.4.2, 3.6.2, 3.7.2, 4.5, 8.4, 8.5.1, 9.2
- de Timoshenko, 8.6, 8.7.1, 9.3

Pré- et postprocesseur, 13.3.1

Principe des déplacements virtuels, 3.7.1

Problème

- aux limites, 1.1
- aux valeurs propres ou de bifurcation, 13.1.3
- statique, d'équilibre ou stationnaire, 13.1.3
- transitoire, à réponse forcée ou de propagation, 13.1.3

Propriété de superconvergence, 11.8.1

- Quotient de Rayleigh, 14.11.3
- Rang, 7.6.3, 14.4
- Rayleigh*, 14.11.3
- Réaction
  - interne, 1.4.3, 3.3.2
  - sous charge, 1.4.2
- Rectangle
  - bilinéaire, 5.5.1
  - non conforme, 5.5.2
- Référence géométrique, 8.2
- Relation force-déplacement, 1.4.3, 3.3.2, 6.2.4
- Ressort d'appui, 10.5
- Restitution des contraintes, 6.3.2
- Rotation, 2.4, 10.2.1
- Sander*, 12.1
- Schéma d'intégration (numérique), 7.6.1
- Serendip*, 7.3.3, 11.8.2
- Simpson*, 16.3.3
- Simulation, 1.1
- Single element test*, 5.3.2, 7.6.5
- Sixième degré de liberté, 9.7.3
- Structure
  - d'épaisseur modérée, 8.6, 8.7
  - de référence, 1.4.1
  - mince, 8.4, 8.5
- Superconvergence, 11.8
- Superconvergent Patch Recovery*, 11.8.2
- Surcompatible, 6.3.1, 9.4.4
- Système (d'axes)
  - global, 1.4.2, 10.1
  - local, 2.4.1, 10.1
- Taux de convergence, 11.4.2
- Trace, 14.4
- Transformation
  - de coordonnées, 10.2
  - isoparamétrique, 7.5, 7.5.3
  - linéaire, 14.10.1
  - orthogonale, 14.10.2
- Trefftz*, 4.2.5
- Triangle de Pascal, 7.3.2
- Valeur propre, 7.6.5, 14.11
- Vecteur charge
  - de l'élément, 2.3
  - de la structure, 2.7
  - des poutres prismatiques, 15
- Vecteur déplacement
  - de l'élément, 2.3
  - de la structure, 2.7
- Vecteur des charges nodales, 2.7
- Vecteur des réactions
  - d'appui, 2.7
  - internes, 2.3
- Vecteur force
  - de l'élément, 3.2, 6.2.3, 7.8
  - de la structure, 2.7, 10.4.1
- Vecteur propre, 14.11
- Verrouillage, 7.3, 9.3, 9.5.3
- Zienkiewicz et Zhu*, 11.8.2



# Notations

$a, b, c \dots h \dots$	dimension : longueur, portée ... hauteur ...
$a_1 \dots b_2 \dots c_3 \dots$	paramètre de l'interpolation
$b_x \dots b_i \dots$	force de volume
$d, d_1 \dots$	degré de liberté, déplacement
$e$	erreur
$h$	dimension caractéristique d'un élément fini ; hauteur
$k, k_{11} \dots$	coefficient de rigidité
$k$	taux de convergence
$2m$	ordre maximal des dérivées de la forme forte
$m$	moment réparti
$m_1 \dots$	mode (interpolation paramétrique)
$n$	nombre de...
$n_d$	... degrés de liberté ( $n_d = n_{\text{dep}} + n_{\text{rea}}$ )
$n_{\text{dep}}$	... degrés de liberté inconnus, ou d'inconnues
$n_{\text{elm}}$	... éléments finis
$n_G$	... points d'intégration de Gauss
$n_{\text{Gal}}$	... termes dans une approximation de Galerkin
$n_n$	... nœuds
$n_p$	... termes, modes ou paramètres d'une approximation polynomiale
$n_{\text{rea}}$	... degrés de liberté imposés ou réactions inconnues
$n_{\text{rig}}$	... modes rigides
$n, n_x \dots n_i \dots$	normale (extérieure unité)
$n, s$	coordonnées locales (normale et tangente à un bord)
$p$	degré du polynôme d'interpolation
$q, q_x \dots$	charge répartie
$r$	rayon ; rang (matrice)
$1/r$	courbure
$r, r_1 \dots$	réaction ou force interne (élément)
$s, s_1 \dots$	réaction sous charge (élément poutre)
$t$	épaisseur ; temps
$t_x \dots t_i \dots$	traction de surface
$u, v, w \dots u_i \dots$	composante du champ des déplacements
$w, w_i \dots$	fonction poids
$x, y, z \dots x_i \dots$	coordonnées (cartésiennes)
$A, B, C \dots F \dots H \dots$	force concentrée
$A$	aire
$B$	aire réduite (poutre de Timoshenko)
$C$	constante
$C^r$	de classe $C^r$ (fonction)

$D$	raideur flexionnelle d'une plaque
$D_{ijkl}$	loi de Hooke
$E$	module d'élasticité (ou de Young)
$F, F_1 \dots$	force
$G$	module de glissement (ou de Coulomb)
$I$	moment d'inertie (section droite d'une poutre)
$J$	constante de torsion (poutre) ; jacobien
$K, K_{11} \dots$	coefficient de rigidité (structure)
$L$	longueur, portée
$L(x, \dots), M(x, \dots), N(x, \dots)$	fonction d'interpolation
$L_b$	demi-largeur de bande (de $\mathbf{K}$ )
$L_i^p(x)$	polynôme d'interpolation de Lagrange
$M$	moment de flexion
$N$	effort normal
$P$	énergie potentielle des forces extérieures
$Q, Q_1 \dots$	composante d'une charge nodale
$R, R_1 \dots$	réaction d'appui
$S, S_1 \dots$	réaction sous charge (structures en barres et poutres)
$S$	coupe
$T$	variation de température ; moment de torsion
$U$	énergie de déformation
$V$	volume ; effort tranchant
$V^*$	effort tranchant de Kirchhoff (plaque)
$W, \delta W$	travail, travail virtuel
$X, Y, Z$	coordonnées (globales)
$\alpha$	coefficient de dilatation thermique linéaire ; angle ; paramètre
$\alpha, \alpha_x \dots$	rotation de la normale (épaisseur modérée)
$\beta$	paramètre
$\beta, \beta_x \dots$	glissement moyen (épaisseur modérée)
$\gamma$	glissement
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\varepsilon, \varepsilon_x \dots \varepsilon_{ij}$	dilatation ; déformation normale ... tenseur déformation
$\eta$	erreur relative ; précision
$\theta, \theta_x \dots$	rotation de la normale (épaisseur mince)
$\kappa, \kappa_x \dots$	courbure (épaisseur modérée)
$\lambda$	valeur propre ; mesure de l'intensité d'une singularité
$\nu$	coefficient de Poisson
$\xi, \eta, \zeta$	coordonnées naturelles
$\sigma, \sigma_x \dots \sigma_{ij}$	contrainte normale ... tenseur contrainte
$\tau$	contrainte tangentielle
$\chi$	courbure (de torsion des plaques de Kirchhoff) ; angle de torsion (par unité de longueur)
$\psi, \psi_x \dots$	courbure (épaisseur mince)

$\Gamma$	frontière
$\Gamma_t$	frontière avec conditions aux limites naturelles, à forces imposées
$\Gamma_u$	frontière avec conditions aux limites essentielles, à déplacements imposés
$\Pi$	énergie potentielle totale
$\Phi$	fonction de contrainte (torsion)
$\Omega$	domaine, solide, structure
$\Omega_0$	domaine ou structure de référence
$\Omega, \omega$	rotation matérielle
<b>A</b>	matrice des cosinus directeurs de la normale (extérieure unité)
<b>b</b>	vecteur des forces de volume
<b>B</b>	matrice des relations déplacements-déformations
<b>C</b>	matrice de l'interpolation paramétrique ( <b>d</b> = <b>Cp</b> )
<b>d</b>	vecteur des degrés de liberté ou déplacements nodaux
<b>D</b>	matrice d'élasticité (ou de Hooke)
<b>e</b>	vecteur erreur
<b>f, F</b>	vecteur force (élément, structure)
<b>I</b>	matrice identité
<b>J</b>	matrice jacobienne
<b>k, K</b>	matrice de rigidité (élément, structure)
<b>L</b>	matrice d'opérateurs différentiels ( <b><math>\epsilon</math></b> = <b>Lu</b> )
<b>L<sub>e</sub></b>	matrice de localisation (d'un élément fini)
<b>N</b>	matrice des fonctions d'interpolation
<b>0</b>	matrice nulle ; vecteur nul
<b>p</b>	vecteur des paramètres de l'interpolation paramétrique
<b>P</b>	vecteur charge (structure) ; matrice des modes (interpolation paramétrique)
<b>Q</b>	vecteur des charges nodales (structure)
<b>r</b>	vecteur des réactions internes
<b>R</b>	vecteur des réactions d'appui (structure)
<b>s, S</b>	vecteur charge (élément, structure ; structures en barres et poutres)
<b>t</b>	vecteur des tractions de bord
<b>T</b>	matrice de rotation
<b>u</b>	vecteur des composantes du champ de déplacement
<b>x</b>	vecteur des coordonnées
$\epsilon$	vecteur déformation
$\sigma$	vecteur contrainte

## Indices

<i>d</i>	déplacement
<i>e, (e)</i>	élément fini
<i>g</i>	global
<i>l</i>	local
<i>s, n</i>	coordonnées locales

$t$	condition aux limites naturelle, bord chargé
$th$	thermique, température
$u$	condition aux limites essentielle, bord appuyé
$w$	âme
$x, y, z$	coordonnées (cartésiennes)
$F$	force
$G$	Gauss
$R$	réaction d'appui
$\varepsilon$	déformation
$\sigma$	contrainte
dep	déplacement (inconnu)
elm	élément
ext, int	extérieur, intérieur
Gal	Galerkin
rea	réaction
rig	rigide
str	structure
tra	translation



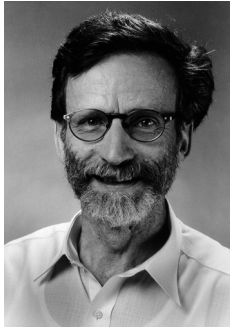
# Abréviations et symboles

## Abréviations

°C	degré centigrade ou Celsius
m	mètre
N	newton
rad	radian
s	seconde
Hz	hertz
1D, 2D, 3D	unidimensionnel, bidimensionnel, tridimensionnel
appl.	application
cf.	confer
chap.	chapitre
cste	constante
ép.	épaisseur
éq.	équation
ex.	exercice
fig.	figure
p.	page
rem.	remarque
sect.	section
sol.	solution
sym.	symétrique
vol.	volume
ASCE	American Society of Civil Engineers
BEG	Bureau d'études Greisch, B-4031 Liège-Angleur
DKQ	Discrete Kirchhoff Quadrilateral
DKT	Discrete Kirchhoff Triangle
EIT	Eperon Informatique Technique, CH-1052 Le Mont-sur-Lausanne
LSC	Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus, EPFL
LTAS	Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales, Université de Liège
MIT	Massachusetts Institute of Technology
SPR	Superconvergent Patch Recovery
STUCKY	STUCKY Ingénieurs-Conseils, CH-1020 Lausanne-Renens
TGC	Traité de génie civil
ZACE	ZACE Services, Software Engineering, CH-1015 Lausanne
ZZ	Zienkiewicz et Zhu

## Symboles

<b>A</b>	opérateur d'assemblage
$\delta$	virtuel
$\pi$	3,14159 . . .
$\Psi, \cap$	papillon de courbure (TGC vol. 1)
$\sum_e, \sum_{(e)}$	somme sur tous les, ou une partie des, éléments
$\bar{a}$	valeur imposée
$\tilde{a}$	valeur approchée
$a^+$	valeur positive
<b>A</b> <sup>T</sup>	transposée
<b>A</b> <sup>-1</sup>	inverse
$\hat{\mathbf{A}}$	expansion (chap. 2)



**François Frey**, de nationalité suisse, né en 1941, obtient le diplôme d'ingénieur civil en 1965 à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). En 1967, il entre au Département MSM de l'Université de Liège. Il participe à l'enseignement, à la recherche, à l'activité des laboratoires, à diverses expertises, aux travaux de commissions nationales et internationales, etc. En 1978, il obtient le titre de docteur en sciences appliquées, sa thèse portant sur l'analyse numérique non linéaire des structures et solides. Nommé professeur à l'EPFL en 1979, il y enseigne le calcul des structures et solides, et les techniques de modélisation numérique, aux sections de Génie civil et d'Architecture. A la tête du Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus (LSC), il dirige un groupe de recherche essentiellement orienté vers le développement et l'application des méthodes numériques de l'ingénieur, dans les domaines suivants : non-linéarités des structures et milieux continus (grands déplacements, instabilité, plasticité, fracture...), théorie des éléments finis (éléments hybrides-Trefftz, singularités, estimations d'erreur), informatique avancée (programmation par objets, codage symbolique automatique, systèmes experts), EAO, CAO et graphisme. Suite à un séjour d'un an à l'Université de Californie de San Diego, le calcul et l'utilisation des matériaux composites avancés font également partie des sujets de recherche du LSC.

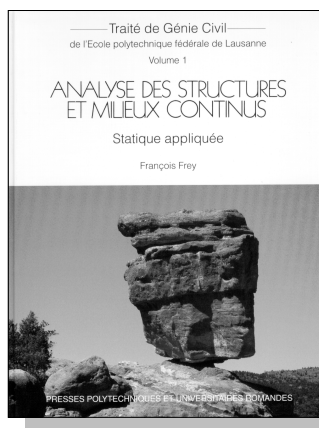


**Jaroslav Jirousek** est né en 1931 en Tchécoslovaquie et obtient son diplôme d'ingénieur civil de l'Ecole polytechnique de Brno en 1954. Il soutient sa thèse de doctorat en sciences techniques en 1957, puis d'habilitation en 1961.

Il travaille tour à tour comme assistant, maître assistant et professeur assistant à la chaire de statique et de résistance des matériaux (Brno, 1954-1964). Professeur invité à l'Ecole polytechnique royale de Stockholm (1965), il entre ensuite au service de l'UNESCO (1966). Il est nommé professeur expert de l'UNESCO aux universités d'Alger et de Damas. En 1970, il est engagé par l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). Il y est nommé professeur titulaire en 1974. Un de ses mérites est d'avoir réussi à introduire un cours d'éléments finis dans le plan d'études du Département de génie civil (1979). En 1994, le titre de Dr h.c. lui est conféré par l'Ecole polytechnique de Brno.

Les méthodes numériques constituent son principal domaine d'intérêt. Il présente, dès 1978, de nouveaux modèles d'éléments finis, dits T et hybride-Trefftz, publie une centaine d'articles originaux dans les revues scientifiques internationales et met au point un large programme de calcul par la méthode des éléments finis.

Il prend sa retraite en 1997 mais poursuit néanmoins activement ses recherches. Il est membre de l'IACM (*International Association for Computational Mechanics*), de l'AIPC, de la SIA et de la SVIA.



## Volume 1

### Analyse des structures et milieux continus

Statique appliquée

*François Frey*

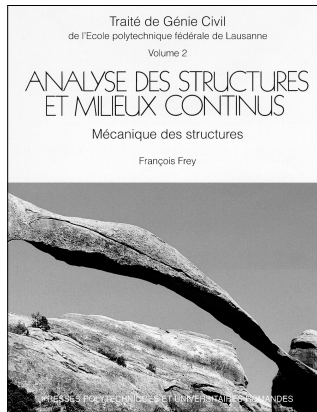
**Sujet :** Premier d'une série de 6 volumes consacrés à l'analyse des structures et milieux continus, ce livre présente la statique appliquée avec un esprit d'ingénieur : la description et la modélisation d'une structure isostatique en barres, poutres et câbles accompagnent et justifient l'étude du jeu des forces qui cheminent dans cette structure et dérivent de la notion d'équilibre. Cette matière classique est présentée de manière synthétique et concrète.

**Originalité :** L'auteur obtient un bon équilibre entre la rigueur mathématique, nécessaire au développement cohérent de la théorie, la compréhension des phénomènes, indispensable en analyse des structures, et l'application aux cas concrets de la pratique. De nombreux exercices avec les solutions sont donnés en fin d'ouvrage, ainsi qu'un didacticiel de statique sur CD ROM.

**Contenu :** Concept de force et actions – Forces, moments et principes – Réduction et équilibre – Déplacement, coupe et barre – Appuis et modélisation – Organes de liaison et structures composées – Treillis – Poutres – Poutres à plan moyen – Câbles – Coupure simple, hyperstaticité et théorème des déplacements virtuels – Lignes d'influence – Propriétés des figures planes.

1998, 288 pages, 20x24 cm  
206 figures et tableaux, relié  
CD ROM, EAOSTAT 3.0  
ISBN 2-88074-385-0  
CHF 100.30 ttc, FF 449.- ttc, € 65.- ht





## Volume 2

### Analyse des structures et milieux continus

Mécanique des structures

*François Frey*

finaliste, prix Roberval 1995

**Sujet :** La mécanique des structures conduit au dimensionnement des éléments structuraux. Les propriétés mécaniques des matériaux, le jeu des contraintes internes, la déformation de la matière, la sécurité et les dangers attachés à certaines sollicitations sont présentées dans ce livre sur la base des structures en barres, poutres et câbles.

**Originalité :** Assorti de nombreux exemples numériques, chaque chapitre se termine par une série d'exercices, accompagnés de leur solution, et par un lexique détaillé.

**Contenu :** Connaissances de base et analyse élastique. Contrainte et principe d'équivalence – De l'essai de traction à quelques principes fondamentaux – Notion de sécurité – Traction et compression – Flexion plane – Flexion oblique et flexion composée – Propriétés mécaniques des matériaux – Torsion uniforme – Contraintes dues à l'effort tranchant – Déformée des poutres soumises à flexion simple – Sollicitation composée/Cisaillement direct/Assemblages – Principes des travaux virtuels et calcul des déplacements – Energie. Plasticité et analyse limite. Traction plastique – Flexion plastique plane – Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples – Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite – Flexion plastique composée et simple – Torsion plastique uniforme. Instabilité par flambement. Flambement des poutres – Flambement plan des pièces industrielles – Instabilité énergétique.

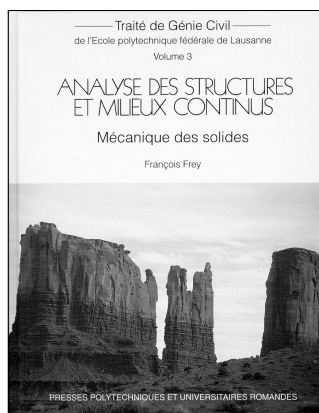
1994, 472 pages, 20x24 cm

173 figures et tableaux, relié

208 exercices avec solutions

ISBN 2-88074-277-3

CHF 100.30 ttc, FF 449.- ttc, € 65.- ht



## Volume 3

### Analyse des structures et milieux continus

Mécanique des solides

*François Frey*

**Sujet :** La mécanique des solides a pris une importance considérable depuis que ses équations peuvent être résolues par les méthodes numériques. Abordant les problèmes spécifiquement bidimensionnels et tridimensionnels de l'ingénieur, ce volume complète les volumes 1 et 2 consacrés à l'analyse des structures et milieux continus. La théorie se limite au cadre linéaire. L'étude de l'état de contrainte, de l'état de déformation et de la loi constitutive forment l'ossature de l'apport théorique. On en déduit la théorie de la torsion de Saint-Venant, les principes des travaux virtuels, ainsi que la solution de diverses applications utiles. Des notions énergétiques complètent ces connaissances

**Originalité :** Synthétique, limitant le formalisme mathématique au nécessaire, ce livre permet à partir de bases solides de progresser avec sûreté vers des notions plus ardues.

**Contenu :** Lois de conservation et préliminaires mathématiques – Contraintes – Cinématique – Lois constitutives (solides élastiques linéaires) – Elasticité – Torsion uniforme des poutres prismatiques – Forme intégrale de l'équilibre et de la cinématique. Travaux virtuels – Energie – Ecriture matricielle – Solution de quelques problèmes classiques d'élasticité – Annexes: solution des exercices, bibliographie, index.

1998, 208 pages, 20x24 cm  
120 figures et tableaux, relié  
ISBN 2-88074-358-3  
CHF 92.10 ttc, FF 414.- ttc, € 59.80 ht