

Georges Ecoffey
Hans U. Fuchs

PHYSIQUE

Une présentation systémique

PHYSIQUE

Georges Ecoffey
Hans U. Fuchs

PHYSIQUE

Une présentation systématique

EPFL PRESS

Illustration de couverture : Zita, © Shutterstock

EPFL PRESS est un label des Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), qui publient principalement les travaux d'enseignement et de recherche de l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), des universités et des hautes écoles francophones.

PPUR, Rolex Learning Center, Station 10, CH-1015 Lausanne,
info@epflpress.org, tél. : +41 21 693 21 30.

www.epflpress.org

Première édition

ISBN 978-2-88915-535-4

© EPFL PRESS / Presses polytechniques et universitaires romandes, 2023

Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Imprimé en République tchèque

*À Eva et nos enfants et petits-enfants :
Graziella, Aimé et Serge
Elias et Antonin*

*To Robin's children and grandchildren :
Justin, Ben, and Kristin
Samantha, Dario, and Magnus*

PRÉFACE

Physique, une présentation systématique propose, pour les étudiants des universités et des hautes écoles spécialisées, une approche novatrice des théories de la physique macroscopique basée sur la physique des milieux continus et sur celle des systèmes dynamiques uniformes. L'ouvrage propose une vue d'ensemble d'un cours destiné aux personnes qui désirent découvrir la physique en tant que science des systèmes et souhaitent être en mesure de l'appliquer dans leurs propres disciplines telles que science de la terre, biologie, génie chimique et énergétique, médecine, écologie, pour ne nommer que quelques champs possibles où les *sciences physiques*, une *approche systématique*, et la *modélisation*, la *simulation* et l'*analyse de systèmes dynamiques* jouent un rôle.

La conceptualisation généralisée des systèmes et processus que proposent la physique des milieux continus et la science des systèmes d'une part, et leur application à des situations réelles exigée par les sciences naturelles et l'ingénierie de l'autre, ont inspiré la rédaction de cet ouvrage. Lors de la conception d'une usine chimique, les ingénieurs créent préalablement des modèles basés sur des processus physiques, chimiques et biochimiques; les chercheurs qui travaillent dans le domaine médical pourraient avoir besoin de comprendre les aspects dynamiques de l'écoulement de fluide dans le système cardiovasculaire; les écologistes doivent suivre les flux de substances, de chaleur et d'énergie dans l'environnement et prendre en compte l'interaction de nombreux processus physiques et chimiques différents dans des systèmes dynamiques complexes; et les chercheurs et praticiens travaillant dans le génie énergétique adoptent une approche généralisée du rôle de l'énergie dans les systèmes qu'ils conçoivent et réalisent.

Tout cela exige une approche des fondements des systèmes et processus physiques différente de celle qui est traditionnellement adoptée à l'université dans les cours d'introduction à la physique. Plutôt que de prendre les particules et leur mouvement comme éléments fondamentaux de la science physique, nous élaborons une conceptualisation dans laquelle les potentiels – et les différences de potentiel comprises comme des tensions –, les grandeurs semblables à des fluides qui leurs sont associées, ainsi que la puissance et l'énergie, servent à décrire les phénomènes fondamentaux des fluides, de l'électricité et du magnétisme, de la chaleur, des substances, de la gravité et du mouvement linéaire ou rotatoire. À titre d'exemples, les phénomènes thermiques sont conceptualisés par une théorie dans laquelle l'entropie est la grandeur fondamentale qui est transportée dans les processus thermiques et la température le potentiel correspondant; le mouvement de translation est compris comme la science de la vitesse en tant que potentiel lié au mouvement, associé au stockage et au flux de quantité de mouvement; dans les deux phénomènes, la puissance et l'énergie assument des rôles parfaitement analogues. De plus, cette approche des systèmes et des processus permet de construire des théories constitutives importantes de matériaux simples et des champs gravitationnel et électromagnétique.

Adopter cette voie vers une présentation unifiée de la science physique macroscopique implique de repenser à la fois le contenu et la méthodologie. Nous commençons par les systèmes dynamiques traitant de l'écoulement de fluides ou de l'électricité, puis passons aux sujets relatifs à la chaleur et aux processus chimiques pour arriver à une

présentation de la mécanique en tant que théorie du mouvement des corps macroscopiques. Les notions de puissance et d'énergie sont considérées comme liées à ces différents phénomènes de manière fondamentalement analogue. Cela nous permet de développer des théories constitutives de matériaux simples et des champs classiques. Dès le début, nous traitons d'applications telles que le système cardiovasculaire, la thermoélectricité et l'énergie solaire. La plus grande part de la présentation s'appuie sur des modèles de systèmes dynamiques uniformes, mais avant d'aborder l'étude des champs, nous développons une approche simplifiée des matériaux et des processus continus.

En ce qui concerne la méthodologie, chaque sujet est développé à partir d'une présentation narrative et imagée, pour être ensuite formalisé. Des idées de concepts et de relations sont suggérées et introduites sur la base de descriptions et de données de phénomènes dynamiques concrets. De plus, en montrant aux étudiants comment créer des modèles de systèmes dynamiques, on leur permet de développer des compétences formelles et mathématiques nécessaires aux praticiens de la science, de l'ingénierie et de la médecine.

En bref, ce livre est destiné aux lecteurs qui veulent apprendre la science physique à partir de la perspective de la science des systèmes en travaillant à travers des applications réalistes.

Remerciements

Cet ouvrage est le fruit d'une longue maturation. Il n'aurait pas été possible sans l'aide de nombreuses personnes que nous ne pouvons malheureusement pas toutes nommer ici.

Georges Ecoffey a pu compter sur l'accompagnement de son collègue Claude Gugler de l'École d'Ingénieurs et d'Architectes de Fribourg. Son épouse Eva, que la maladie a empêchée de vivre la publication du livre, l'a toujours soutenu et encouragé.

Hans Fuchs adresse ses remerciements à ses collègues Elisabeth Dumont et Werner Maurer de la Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften pour leur collaboration sur le thème de la physique des systèmes dynamiques. Un merci particulier va à son épouse Robin pour la relecture de tous ses textes.

Les deux auteurs ont bénéficié du soutien de la Haute Ecole Spécialisée de Suisse Occidentale pour l'élaboration, la mise en pratique et le test d'une méthode d'enseignement basé sur des études de cas¹.

Finalement, les auteurs remercient les collaborateurs des Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, à Lausanne, et leur directeur, Monsieur Lucas Giossi, qui a rendu possible la publication de cet ouvrage.

1. Consulter *Physics as a Systems Science – A Virtual Learning Environment* sur le site http://www.hansfuchs.org/PSS_VLE/index.html

AVANT-PROPOS

Pour la structuration conceptuelle, la forme de présentation des thèmes de la science physique macroscopique, ainsi que de certains sujets concrets, qui font l'objet de notre ouvrage, nous avons grandement bénéficié du travail effectué par plusieurs collègues au cours des dernières décennies. En particulier, nous tenons à exprimer notre gratitude pour l'utilisation de certains de leurs écrits.

À partir des années 1990, Friedrich Herrmann et collaborateurs ont élaboré un ouvrage qui a fait école, le *Cours de physique de Karlsruhe*, qui a servi d'inspiration précoce aux auteurs pour une manière novatrice et unifiée de conceptualiser les processus physiques de base traités en physique macroscopique. Le travail sur la dynamique des processus chimiques réalisé par Georg Job à l'Université de Hambourg a été tout aussi important car il a permis d'intégrer les processus chimiques dans le cadre général.

En se basant sur le travail en thermodynamique des milieux continus effectué durant la seconde moitié du XXe siècle, une théorie généralisée des processus dynamiques uniformes dans les systèmes thermiques a été développée par Hans Fuchs. Avec l'aimable autorisation de l'éditeur Springer, nous avons utilisé quelques parties de *The Dynamics of Heat* (1996, 2010), principalement dans nos chapitres sur la thermodynamique.

De plus, nous avons grandement profité d'une approche didactique faisant usage de la modélisation explicite des systèmes dynamiques en science physique, développée pour les étudiants en ingénierie à l'École d'Ingénieurs de la Haute École des Sciences Appliquées de Zurich à Winterthur. Cette approche novatrice a débouché sur des notes de cours rédigées par Hans Fuchs et Elisabeth Dumont (2013-2019), textes qui ont servi de source importante pour des parties de notre ouvrage.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	VII
Avant-propos	.IX
Table des matières	.XI
1 Accumulation et écoulement de fluides	1
1.1 Observations préliminaires	1
1.2 Forces d'entraînement, flux et modèles	3
1.3 Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées	8
1.4 Analyse de système I: bilans de volume	15
1.5 Analyse de système II: pression et force d'entraînement hydraulique	19
1.6 Loi de capacité hydraulique	24
1.7 Courants: force d'entraînement et résistance	28
1.8 Modélisation de quelques processus hydrauliques	35
Résumé du chapitre	45
Questions	47
Exercices	47
Problèmes	48
2 Systèmes et processus électriques	49
2.1 Observations préliminaires	49
2.2 Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées	58
2.3 Analyse de système I: bilans de charge	62
2.4 Analyse de système II: potentiels et tensions	64
2.5 Condensateurs et loi de capacité	67
2.6 Loi de résistance et mécanismes de transport	70
2.7 Sources, alimentations, instruments de mesure	76
2.8 Modèles dynamiques de systèmes RC	80
Résumé du chapitre	85
Questions	87
Exercices	87
Problèmes	87
I Système cardiovasculaire en tant que système RC	91
I.1 Système cardiovasculaire d'un mammifère	91

I.2	Ventricule, aorte et circuit systémique en tant que système de type windkessel	94
I.3	Windkessel électrique et modèle	95
I.4	Premier modèle hydraulique	99
I.5	Extension du modèle hydraulique	102
I.6	Ventricule gauche en tant que pompe intermittente	104
I.7	Pour aller plus loin	108
3	Rôle et propriétés de l'énergie	109
3.1	Observations préliminaires	109
3.2	Énergie et couplage dans les chaînes de processus	111
3.3	Puissance des processus	116
3.4	Transfert d'énergie et porteurs d'énergie	123
3.5	Accumulation et bilan d'énergie	127
3.6	Une conséquence de la quantification de l'énergie	135
	Résumé du chapitre	138
	Questions	140
	Exercices	140
	Problèmes	140
4	Phénomènes inductifs et oscillations	143
4.1	Observations préliminaires	143
4.2	Démarrage, arrêt et oscillations de courants	144
4.3	Loi d'induction	147
4.4	Modèles RL de circuits hydrauliques et électriques	152
4.5	Exemples d'éléments inductifs	156
4.6	Puissance et stockage d'énergie lors de processus inductifs	159
4.7	Systèmes oscillants	162
4.8	Traitement mathématique des oscillations	167
	Résumé du chapitre	171
	Questions	173
	Exercices	173
	Problèmes	173
II	Système cardiovasculaire en tant que système RLC ..	175
II.1	Introduction	175
II.2	Modélisation dynamique d'une diode	176
II.3	Modèle de windkessel électrique avec induction	183
II.4	Inclusion de l'inertie du flux sanguin	185
5	Processus et machines thermiques	193
5.1	Phénomènes thermiques	193
5.2	Grandeurs fondamentales: température et chaleur	201
5.3	Bilan d'entropie	208
5.4	Énergie dans les processus thermiques	210

5.5	Entropie et température dans les fluides simples	213
5.6	Entropie et énergie lors de transfert de chaleur	220
5.7	Transfert de chaleur et production d'entropie	224
5.8	Machines thermiques et température absolue	228
	Résumé du chapitre	234
	Questions	236
	Exercices	236
	Problèmes	236
6	Transport de substances et réactions	239
6.1	Observations et modèles préliminaires	239
6.2	Multiplicité des phénomènes chimiques	244
6.3	Quantité de matière et particules	248
6.4	Potentiel chimique et force d'entraînement chimique	255
6.5	Gaz parfait et solutions diluées	264
6.6	Énergie et entropie dans les processus chimiques	271
6.7	Transport de substances: diffusion et osmose	277
6.8	Réactions chimiques	283
6.9	Processus électrochimiques	287
	Résumé du chapitre	292
	Exercices et problèmes	294
III	Pompes à chaleur et générateurs thermoélectriques	295
III.1	Module PELTIER en tant que refroidisseur et générateur	295
III.2	Analyse de quelques expériences	300
III.3	Modèles dynamiques d'un module PELTIER	307
III.4	Rôle de l'énergie dans les processus thermoélectriques	315
III.5	Phénomènes thermoélectriques en tant que processus chimiques	317
7	Moment cinétique et énergie	319
7.1	Observations préliminaires	319
7.2	Étude de cas: collision de deux disques	320
7.3	Grandeurs fondamentales	323
7.4	Analyse de système I: bilans de moment cinétique	327
7.5	Analyse de système II: cinématique de la rotation	329
7.6	Énergie et mouvement de rotation	331
7.7	Loi de capacité: le moment d'inertie	332
7.8	Loi de résistance	341
7.9	Induction lors de flux de moment cinétique	346
	Résumé du chapitre	353
	Questions	354
	Exercices	354
	Problèmes	354

8	Quantité de mouvement et énergie	357
8.1	Observations préliminaires: collisions	357
8.2	Étude de cas: collision entre deux glisseurs	358
8.3	Grandeurs fondamentales	365
8.4	Modes de transfert de la quantité de mouvement	369
8.5	Capacité en quantité de mouvement	374
8.6	Quantité de mouvement et énergie	378
8.7	Loi de résistance	386
8.8	Modèle corpusculaire du gaz parfait monoatomique	387
8.9	Mouvement à très grande vitesse	390
	Résumé du chapitre	393
	Questions	395
	Exercices	395
	Problèmes	395
9	Exemples de lois constitutives mécaniques	397
9.1	Dynamique du mouvement de translation et lois de NEWTON	397
9.2	Lien entre forces, énergie et puissance du processus	402
9.3	Grandeurs cinématiques	406
9.4	Forces de contact	411
9.5	Mouvement du solide rigide	420
9.6	Étude du mouvement de roulement	429
9.7	Élaboration de l'équation d'onde	435
9.8	Statique des fluides	439
9.9	Dynamiques des fluides parfaits incompressibles	442
9.10	Dynamiques des fluides visqueux	446
	Résumé du chapitre	454
10	Thermodynamique des fluides simples	463
10.1	Relations fondamentales	463
10.2	Chauffage d'un fluide parfait	465
10.3	Thermodynamique du gaz parfait	467
10.4	Énergie et enthalpie	480
10.5	Rayonnement du corps noir en tant que fluide simple	484
10.6	Effet magnétocalorique	489
10.7	Changements de phase	494
10.8	Potentiel chimique et changement de phase	501
	Résumé du chapitre	504
	Exercices et problèmes	507
11	Phénomènes de transport et systèmes ouverts	511
11.1	Modes de transport et force motrice thermique	511
11.2	Conduction d'entropie	517
11.3	Transfert d'entropie par rayonnement	524
11.4	Absorption et émission de rayonnement	526

11.5	Phénomènes thermiques dans les systèmes ouverts	538
11.6	Transport par convection	539
11.7	Transport d'énergie dans les systèmes ouverts	543
11.8	Bilans dans les systèmes ouverts	544
11.9	Systèmes ouverts avec effets mécaniques	547
11.10	Irréversibilité dans les systèmes d'écoulement	553
11.11	Évaporation	557
	Résumé du chapitre	562
	Exercices et problèmes	565
IV	Capteurs solaires et stockage de chaleur latente	569
IV.1	Capteur solaire pour la production d'eau chaude	569
IV.2	Analyse d'un capteur solaire aérothermique	572
IV.3	Stockage de chaleur latente	578
12	Extension aux milieux continus	583
12.1	Exemple introductif: migration de sauterelles	583
12.2	Densités et densités de flux	588
12.3	Bilans en notation locale	593
12.4	Lien avec l'énergie	597
12.5	Conduction thermique	601
12.6	Conduction dépendante du temps	612
12.7	Thermoélectricité	615
	Résumé du chapitre	620
	Questions et problèmes	622
13	Champs statiques et potentiel	625
13.1	Observations préliminaires	625
13.2	Caractéristiques et description des champs	631
13.3	Champ électrostatique	633
13.4	Champ électrostatique et potentiel	637
13.5	Densité d'énergie et contraintes dans le champ électrique	644
13.6	Champ électrique en présence de matière	649
13.7	Champ magnétostatique	653
13.8	Courant électrique et champ magnétique	660
13.9	Vue d'ensemble des champs électrique et magnétique statiques	675
13.10	Champ gravitationnel	677
	Résumé du chapitre	682
	Problèmes	686
14	Champ et ondes électromagnétiques	689
14.1	Observations préliminaires	689
14.2	Loi d'induction de FARADAY-HENRY	691
14.3	Phénomène de self-induction	695

14.4	Exemples et applications techniques	696
14.5	Loi d'AMPÈRE-MAXWELL	699
14.6	Équations de MAXWELL	701
14.7	Flux d'énergie et de quantité de mouvement dans le champ électromagnétique	702
14.8	Généralités sur les ondes	711
14.9	Ondes électromagnétiques	717
	Résumé du chapitre	723
	Problèmes	726
15	Forces et mouvements dans les champs statiques	729
15.1	Forces et mouvements dans le champ électrique	729
15.2	Forces et mouvements dans le champ magnétique	732
15.3	Forces et mouvements dans le champ gravitationnel	738
15.4	Mouvement relatif et effets d'inertie	743
15.5	Problème à trois corps restreint	751
15.6	Satellisation autour du point L4 de Jupiter	753
	Résumé du chapitre	758
16	Bilans et processus dynamiques	763
16.1	Accumulation et comptabilisation de grandeurs	763
16.2	Forme généralisée de l'équation de bilan	768
16.3	Structure des modèles de systèmes dynamiques	773
16.4	La face mathématique des modèles	774
16.5	Les étapes du processus de modélisation	781
16.6	Complexité et sensibilité aux conditions initiales	785
	Résumé du chapitre	790
	Questions	792
	Exercices	792
	Problèmes	793
	Appendice	795
	Liste des tableaux	797
	Liste des symboles	799
	Glossaire	811
	Références bibliographiques	815
	Index	819

CHAPITRE 1

ACCUMULATION ET ÉCOULEMENT DE FLUIDES

Les fluides, particulièrement les liquides, nous confrontent avec quelques-uns des processus physiques les plus faciles à observer et à étudier. Ce que nous apprendrons ici pourra être transposé dans d'autres domaines tels que l'électricité, la chaleur, les substances et réactions chimiques, et le mouvement.

Dans ce chapitre, nous allons découvrir que les phénomènes liés à la dynamique des fluides sont la conséquence, en premier lieu, de l'accumulation et de l'écoulement de quantités de fluides et, en second lieu, de la présence de différences de pression qui agissent en tant que force d'entraînement de ces processus.

Ce chapitre a également pour but d'élaborer les outils qui nous permettront de modéliser l'évolution dynamique des systèmes physiques. Ces outils auront à la fois une forme mathématique, dans l'énoncé des lois, et une forme graphique empruntée aux logiciels de modélisation des systèmes dynamiques.

Lors de cette mise en place des bases sur lesquelles reposeront les développements ultérieurs, les mathématiques utilisées dans les premières sections seront de niveau élémentaire. Dans les sections suivantes, nous utiliserons les techniques de l'analyse standard, renonçant quelquefois à expliciter les étapes mathématiques conduisant au résultat final, nous appuyant abondamment sur les résultats fournis par les outils de modélisation.

1.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Cette section va nous permettre de découvrir quels sont les processus fondamentaux qui se déroulent lors de l'accumulation et de l'écoulement de fluides et d'en dégager les grandeurs dynamiques qui serviront à leur description et à leur modélisation.

1.1.1 Équilibrage des niveaux de fluides

Si nous remplissons deux cuves d'eau ou d'huile à des niveaux initiaux différents et que nous relierons leur base au moyen d'un tuyau (fig. 1.1), nous observons une

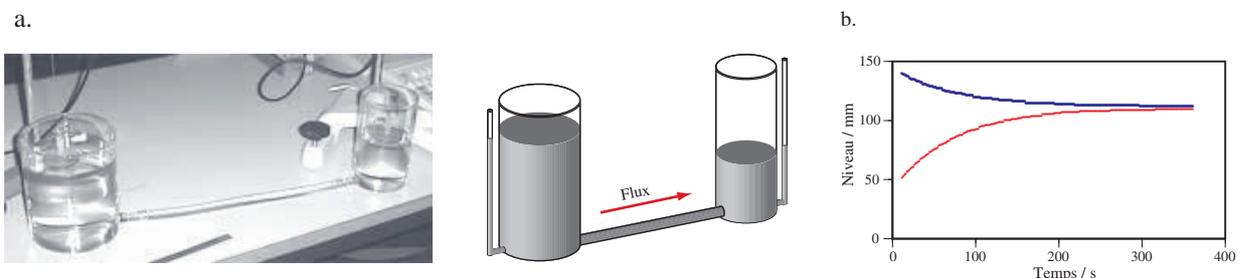


FIGURE 1.1 Écoulement entre deux cuves: (a) les fonds de deux cuves contenant de l'huile de colza sont reliés entre eux par un tuyau; le fluide s'écoule de la cuve qui a le plus haut niveau vers celle dont le niveau est plus bas, indépendamment de la grandeur des cuves; ce sont les niveaux qui s'équilibrent, pas les quantités de liquide; (b) évolution des niveaux d'huile dans chacune des cuves.

diminution du niveau le plus élevé et une augmentation de celui le plus bas, tant que les niveaux sont inégaux. La vitesse d'écoulement diminue au fur et à mesure que les niveaux se rapprochent.

Interprétation. Une différence de niveau est indispensable pour que les liquides puissent s'écouler d'une cuve vers l'autre. Cette différence de niveau entraîne l'écoulement du liquide, et la vitesse d'écoulement est d'autant plus grande que la différence de niveau est importante. D'autre part, l'écoulement entraîne une variation de la quantité de liquide accumulée dans chacune des cuves.

1.1.2 Équilibrage des pressions

Si l'une des cuves est remplie d'huile et l'autre d'eau, les niveaux seront différents à la fin du processus d'équilibrage (fig. 1.2a). Dans une autre expérience, deux ballons sont reliés par un tuyau muni d'une valve (fig. 1.2b). Ils sont remplis d'air, l'un à pression élevée, l'autre à une pression moindre. Lors de l'ouverture de la valve, l'air s'écoule du ballon à pression élevée vers l'autre ballon.

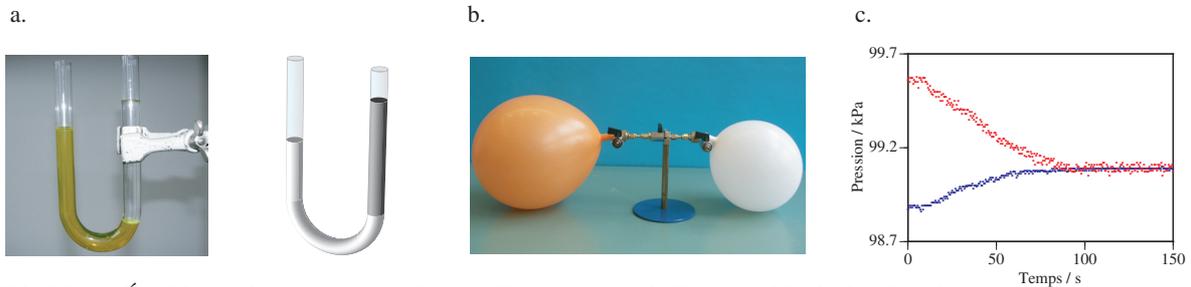


FIGURE 1.2 Équilibrage des pressions: (a) lorsque l'on superpose de l'eau à de l'huile dans la colonne droite du tube en U, les niveaux ne sont plus égaux à l'équilibre. L'effet est également observable si les deux colonnes ont des sections différentes et/ou des formes différentes; (b) lorsque de l'air peut circuler librement entre deux ballons communicants, ni les volumes, ni les niveaux ne sont les mêmes à l'équilibre; (c) évolution des pressions; la courbe supérieure indique l'évolution de la pression du plus petit des deux ballons (notons que, de manière un peu surprenante, la pression est plus élevée dans ce dernier).

Interprétation. Ce qui s'équilibre lors de ces expériences, ce ne sont ni les niveaux, ni les volumes, mais la pression des fluides, ce qui est confirmé si l'on introduit des capteurs de pression dans les cuves de la figure 1.1. On obtient le même résultat si on remplit les deux branches d'un tube en U de liquides différents (fig. 1.2a), ou si on mesure la pression de l'air dans les ballons (fig. 1.2c). En conséquence, nous pouvons conclure que c'est la différence de pression qui est la force d'entraînement des écoulements.

1. Pourquoi le phénomène illustré par la figure 1.1 montre-t-il que ce sont les niveaux plutôt que les quantités de liquide qui s'équilibrent dans des vases communicants?
2. Pourquoi la photo de la figure 1.2a montrant un tube en U contenant de l'eau dans une branche et de l'huile dans l'autre montre-t-elle que ce sont les pressions plutôt que les niveaux de liquide qui s'équilibrent dans les vases communicants?
3. Que nous révèle le phénomène d'équilibrage des pressions dans les ballons de la figure 1.2b au sujet de l'agent moteur de l'écoulement de l'air?



1. Si c'étaient les quantités qui s'équilibrent, le niveau final dans la cuve de droite devrait être plus élevé que dans la cuve de gauche, vu que sa section est plus faible.
2. Le niveau de la branche contenant de l'huile est plus élevé parce que l'huile est moins dense que l'eau et que, de ce fait, il faut une plus grande quantité d'huile pour équilibrer la pression au point le plus bas du tube.
3. Il démontre que c'est également la différence de pression qui est responsable de l'écoulement de l'air.



1.2 FORCES D'ENTRAÎNEMENT, FLUX ET MODÈLES

Dans la section précédente, nous avons formulé un certain nombre d'explications qualitatives au sujet de la manière dont se déroulent les processus hydrauliques. Fondamentalement, nous pensons que

Les différences de niveau ou de pression engendrent les flux qui entraînent les variations des quantités de fluides accumulées dans un système. Réciproquement, des variations des quantités accumulées produisent des variations de pression.

1.2.1 Systèmes, systémique et dynamique des systèmes

La notion de système a déjà été utilisée plusieurs fois dans les lignes qui précèdent, raison pour laquelle il est nécessaire de la préciser.

On entend par système un ensemble d'éléments (qui eux-mêmes peuvent être des systèmes) qui interagissent entre eux selon certaines règles. Un système est déterminé par :

- *sa frontière, limite matérielle ou imaginaire qui le sépare de son environnement ;*
- *les interactions avec son environnement ;*
- *les règles qui définissent le comportement des parties du système, leur organisation et leurs interactions. Ces règles déterminent la manière dont évolue le système, elles sont à l'origine de sa dynamique.*

Une manière d'aborder les systèmes dynamiques, la systémique, s'est développée au cours des dernières décennies. Elle consiste à étudier ou expliquer tout type de phénomène comme un ensemble complexe d'interactions entre les parties, voire les sous-systèmes d'un système plus grand.

Il existe une méthodologie, la dynamique des systèmes, qui permet de traiter de manière générale les systèmes dynamiques. Elle est issue de la cybernétique et du contrôle de processus et a été appliquée tout d'abord à des phénomènes sociaux et d'organisation. Des outils graphiques simples ont été créés pour permettre à des personnes sans formation particulière en mathématique, en physique et en ingénierie, de participer à l'effort de modélisation. Ils permettent d'exprimer graphiquement les

idées concernant les systèmes et les processus, pour ensuite simuler les modèles résultants. Si l'on fait abstraction de certaines exigences particulières liées à la physique, ces outils sont parfaitement adaptés à notre objectif. Il existe plusieurs logiciels de ce type sur le marché: Dynamo (1970), Stella (1987), Berkeley Madonna (1990), Powersim (1993), Vensim (1992,); Simulink (1993), un outil pour ingénieurs, peut également être utilisé dans ce but.

Nous allons, avec l'aide d'un logiciel de dynamique des systèmes¹ faisant usage de graphiques, convertir nos idées en modèles qui serviront à calculer les conséquences des hypothèses. Puis, nous comparerons les résultats de la simulation et les données expérimentales. Nous allons montrer que nous pouvons élaborer des modèles quantitatifs à partir d'un raisonnement qualitatif.

1.2.2 Premier modèle de l'équilibrage des niveaux d'huile

Nous allons commencer par le processus d'équilibrage des niveaux de deux réservoirs communicants de la figure 1.1. Pour commencer, nous admettons que les récipients sont identiques et remplis d'une certaine sorte d'huile. Le relevé de l'évolution des niveaux est donné dans la figure 1.3b.

FIGURE 1.3 Écoulement entre deux réservoirs: (a) dispositif expérimental; (b) relevé des niveaux. Dans cet exemple, les deux récipients sont identiques. Le niveau commun final est la moyenne arithmétique des niveaux initiaux.

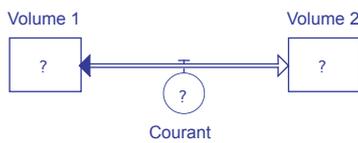
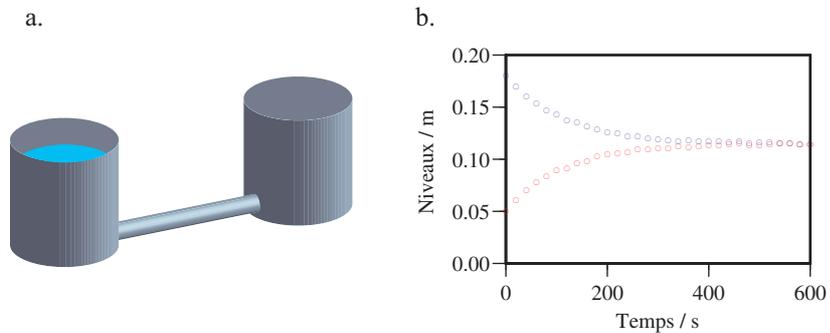


FIGURE 1.4 Représentation de l'idée qu'un fluide peut être accumulé dans deux récipients (symbole de stockage aux extrémités de la figure) et peut s'écouler d'un réservoir vers l'autre (double flèche). La flèche claire représente un courant entrant dans le récipient, la flèche foncée un courant émergeant du récipient. L'idée exprimée est appelée un bilan de volume.

Le contenu du récipient de gauche est plus important que celui de droite. Si la conduite est ouverte, l'huile s'écoule de la gauche vers la droite. Cette affirmation évidente peut être exprimée graphiquement dans le logiciel de modélisation de dynamique des systèmes en plaçant deux symboles de stockage connectés par un symbole de flux (fig. 1.4). Les symboles de stockage ont été étiquetés *Volume 1* et *Volume 2*, et non *Réservoir 1* et *Réservoir 2*. Les symboles représentent les quantités de liquide accumulées, et pas les réservoirs. Nous avons décidé d'utiliser le volume d'huile pour représenter sa quantité. Le symbole appelé *Courant* représente le courant de volume de liquide.

Lorsque l'on compose un diagramme tel que celui-ci, le logiciel de dynamique des systèmes crée des équations dont le rôle est de comptabiliser les quantités de liquide accumulées dans chacun des réservoirs. Ce que nous avons exprimé graphiquement est un *bilan*, dans un cas particulier, celui de deux volumes de liquide accumulés dans des récipients reliés par une conduite. Ce bilan exprime l'évolution des volumes respectifs au moyen des relations suivantes:

$$\text{Taux de variation du Volume 1} = - \text{Intensité du courant}$$

$$\text{Taux de variation du Volume 2} = + \text{Intensité du courant}$$

1. Dans cet ouvrage, nous utiliserons essentiellement Stella (www.iseesystems.com) pour créer les modèles de dynamique des systèmes.

Si nous désignons par V_1 et V_2 les volumes 1 et 2, par I_V l'intensité du courant de volume qui s'écoule entre les deux récipients (le symbole I est emprunté au domaine de l'électricité que nous traiterons au chapitre 2), et par \dot{V}_1 et \dot{V}_2 les taux de variation respectifs, les relations ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -I_V \\ \dot{V}_2 &= I_V\end{aligned}\quad (1.1)$$

Ces deux équations sont des *équations de bilan*. La manière de noter le taux de variation sera expliquée à la section 1.3.3.

Chacun des symboles de la figure 1.4 comporte un point d'interrogation, ce qui signifie que nous devons spécifier certaines quantités ou relations afin de transformer ce diagramme en un modèle complet qui peut être simulé. Les points d'interrogation des symboles de stockage demandent l'introduction des *valeurs initiales* des volumes respectifs. À partir des sections identiques des réservoirs et des niveaux initiaux, on peut déterminer les volumes initiaux, à savoir $2.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ d'huile dans le réservoir de gauche et $5.66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ dans celui de droite.

Le point d'interrogation dans le symbole de la conduite n'est pas aussi simple à éliminer. Procédons pas à pas. Dans un premier temps, nous pouvons admettre que le débit entre les deux réservoirs est constant. Si nous introduisons par exemple la valeur de $0.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ pour l'intensité du courant, le modèle est complet et peut être simulé, c'est-à-dire que le logiciel effectuera, sur la base des équations, les calculs nécessaires à la comptabilisation des quantités de fluide. Le résultat de cette opération apparaît dans la figure 1.5. Nous n'aurions pas eu besoin d'un ordinateur pour effectuer ces calculs, un courant constant ne pouvant aboutir qu'à des taux de variation constants.

Nous savons par expérience que le courant n'est pas constant, mais qu'il décroît dans le temps. Une autre idée serait d'admettre que l'intensité du courant dépend de la différence des quantités de fluide, ce qui se révélera incorrect, mais nous testons cette hypothèse. Cette méthode d'essais et d'erreurs n'est pas inutile, elle permet d'affiner nos idées sur le fonctionnement du processus étudié. Pour introduire cette idée dans le modèle, nous devons créer une nouvelle «variable» qui calcule la différence des volumes (fig. 1.6). La manière la plus simple d'exprimer cette nouvelle hypothèse est d'admettre que l'intensité du courant est proportionnelle à la différence des volumes :

$$I_V = k \cdot \Delta V \quad (1.2)$$

$\Delta V = V_1 - V_2$ représente la différence des deux volumes. Le symbole Δ est le delta majuscule grec. La grandeur k est une constante de proportionnalité, le facteur de flux. Cette constante indique avec quelle facilité s'écoule le fluide. Sa valeur dépend de particularités du système telles que les propriétés du fluide et les dimensions de la conduite. L'équation (1.2) complète le modèle.

1.2.3 Simulation et comparaison avec les observations

L'objectif d'un modèle est de pouvoir effectuer une simulation, c'est-à-dire en résoudre les équations. Le résultat est un jeu de fonctions du temps qui représentent les conséquences des hypothèses introduites dans le modèle. On peut alors tester la qualité de nos idées en comparant ces fonctions avec les données recueillies lors d'observations ou d'expériences. Si les calculs ne correspondent pas aux données recueillies, on essaie d'obtenir un meilleur ajustement en changeant les paramètres du modèle. Dans notre exemple, le premier paramètre est le facteur de flux k .

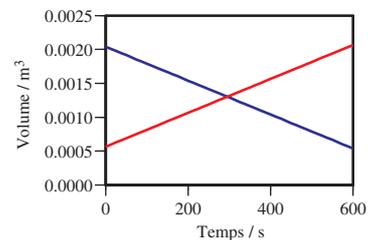


FIGURE 1.5 Résultat de la simulation du modèle utilisant une valeur constante du courant d'huile.

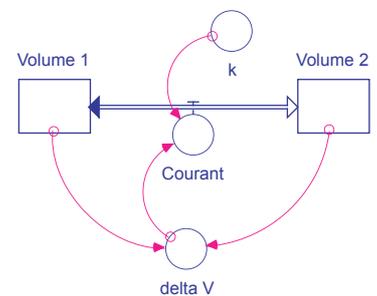


FIGURE 1.6 Modèle dans lequel le flux dépend de la différence des quantités de fluide accumulées dans les cuves. Comme cette différence diminue, l'intensité du courant le fait aussi.

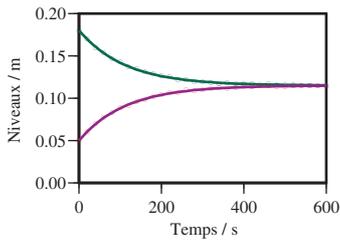


FIGURE 1.7 Simulation (ligne continue) et données expérimentales (cercles) pour l'expérience et le modèle de la figure 1.6.

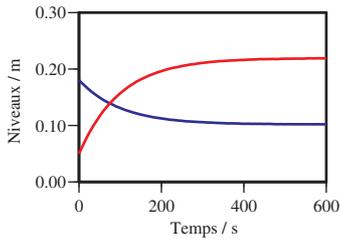


FIGURE 1.8 Prédiction des niveaux au moyen du modèle de la figure 1.6, lorsque les sections des récipients sont différentes.

Nous calculons les niveaux à partir de la section des réservoirs et des volumes instantanés. Nous pouvons alors comparer les résultats de la simulation et les données expérimentales de la figure 1.3. Le paramètre k a été varié jusqu'à obtenir un accord quasi parfait pour la valeur $k = 0.0050 \text{ s}^{-1}$, comme le montre la figure 1.7.

Cet exemple démontre l'utilité de la modélisation. Elle sert à tester la qualité de nos idées, mais ne démontre pas leur justesse², et elle permet de déterminer la valeur des paramètres qui apparaissent dans les hypothèses, tel le paramètre k de l'équation (1.2).

Notre modèle s'adapte bien aux données de la figure 1.3, mais nous devons vérifier s'il permet de prédire le comportement de systèmes semblables. Nous l'utilisons pour simuler l'évolution du système de deux réservoirs avec des sections différentes (fig. 1.1), pour lesquels nous disposons des données expérimentales. Le résultat est clairement incorrect (fig. 1.8). Même si notre modèle s'adapte parfaitement dans le cas des récipients de même section, cela ne signifie pas qu'il est complètement juste; une des idées proposées est incorrecte. C'est un exemple d'une hypothèse en sursis, qu'une première expérience n'a pas infirmée, mais qui a été contredite par une seconde expérience. Elle doit donc être rejetée et remplacée par une autre hypothèse.

1.2.4 Second modèle d'équilibrage des niveaux d'huile

Nous avons observé que le courant entre les récipients communicants s'interrompt lorsque les niveaux sont égaux. Nous pouvons en déduire que le courant entre des vases communicants dépend de différences de niveaux (les observations de la fig. 1.2a révèlent que ce n'est pas toujours vrai; mais pour l'instant, nous allons poursuivre avec les différences de niveau). Cela signifie que nous devons modifier la relation pour l'intensité du courant de la manière suivante:

$$I_v = k \cdot \Delta h \tag{1.3}$$

où $\Delta h = h_1 - h_2$ est la différence des niveaux respectifs. Le paramètre k a la même signification que dans le modèle précédent, mais pas la même valeur, vu que le courant est exprimé au moyen de nouvelles variables. Le modèle de la figure 1.6 doit être légèrement modifié pour tenir compte du changement de variables.

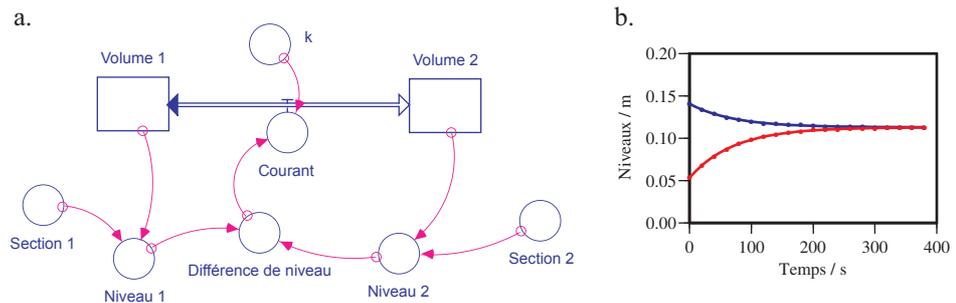


FIGURE 1.9 Modèle révisité qui utilise les différences de niveau en tant qu'entraînement des courants: (a) nouveau modèle; (b) comparaison de la simulation (ligne continue) et des données expérimentales (cercles).

2. Les sciences, en particulier la physique, ne permettent jamais de démontrer qu'une hypothèse est juste, mais seulement qu'éventuellement elle n'est pas fausse. Si une hypothèse n'est pas contredite par l'expérience, cela signifie qu'elle n'est peut-être pas fausse, mais en aucun cas qu'elle est définitivement juste; elle est en sursis. L'affirmation que l'on entend souvent, que tel fait a été «scientifiquement prouvé», n'a pas de sens.

Le nouveau modèle et les résultats de la simulation sont présentés dans la figure 1.9. L'ajustement est excellent et nous pouvons en conclure que l'idée exprimée par l'équation (1.3) a porté ses fruits. Dans cet exemple, la valeur du facteur de flux est $0.50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

1.2.5 Qu'est-ce qui change si c'est de l'eau?

Nous allons modifier le système une nouvelle fois en remplaçant l'huile par de l'eau. Les données sont recueillies et le modèle de la figure 1.9 est utilisé pour la simulation. Nous ajustons le facteur k pour obtenir le meilleur ajustement possible entre les données et la simulation. Nous nous attendons à ce que sa valeur soit plus importante que pour de l'huile si les autres éléments du système sont restés les mêmes. Le meilleur ajustement possible apparaît dans la figure 1.10. L'ajustement n'est pas satisfaisant, et ce n'est pas la valeur du facteur k qui en est la cause.

Qu'est-ce qui a changé? Notre modèle contient trois relations: l'équation de bilan, le calcul des niveaux et celle qui détermine l'intensité du courant. Les deux premières relations ne sont pas affectées par le changement de fluide, ce qui veut dire que nous devons reconsidérer l'équation (1.3).

Pour avoir de nouvelles idées, nous devons nous poser les questions suivantes:

- De quelles grandeurs l'intensité du courant dépend-elle?
- Comment dépend-elle de ces grandeurs?

La réponse à la première question est la même que précédemment. Le courant dépend des différences de niveau et de certaines grandeurs qui déterminent les propriétés du système telles que les propriétés du fluide et les dimensions de la conduite. La différence de niveau est le seul facteur qui varie dans le temps. Tous les autres sont constants, tout au moins pour une situation donnée. En conséquence, ces derniers peuvent être combinés en un seul facteur qui influence le courant pour une configuration expérimentale donnée.

La seule différence dans notre modèle ne peut venir que d'une réponse différente à la seconde question. Celle que nous avons donnée pour l'écoulement d'huile était la plus simple possible: nous avons admis une proportionnalité, c'est-à-dire une relation linéaire, entre l'intensité du courant et la différence de niveau.

Ce qui est certain, c'est qu'une plus grande différence de niveau doit entraîner un courant plus important, ce qui, mathématiquement, peut être réalisé de différentes manières. Si l'intensité du courant doit croître plus rapidement que selon une relation linéaire, une fonction du deuxième degré fait l'affaire:

$$I_V = k(h_1 - h_2)^2 \quad (1.4)$$

ou si au contraire elle doit croître moins rapidement, alors la racine carrée des différences de niveau peut convenir:

$$I_V = k\sqrt{h_1 - h_2} \quad (1.5)$$

L'intégration de chacune de ces deux alternatives dans le modèle et la comparaison avec les données révèle que seule la relation (1.5) donne un bon ajustement (fig. 1.11).

Dans les sections suivantes de ce chapitre, nous formaliserons ce que nous avons imaginé et énoncé dans les paragraphes précédents et étudierons plus en détail les mécanismes que nous avons englobés dans le facteur de flux k et, notamment, les raisons des différences de comportement des deux fluides.

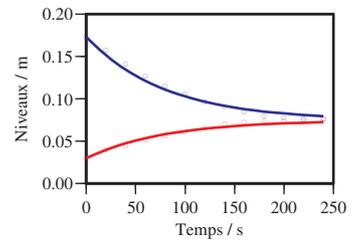


FIGURE 1.10 Résultats de la simulation (ligne continue) et données expérimentales (cercles) pour l'écoulement d'eau entre deux réservoirs communicants, pour le modèle utilisant la relation (1.3).

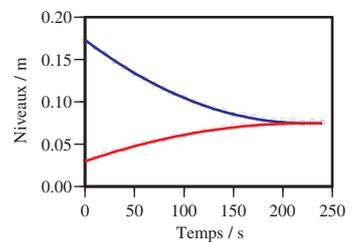


FIGURE 1.11 Résultats de la simulation (ligne continue) et données expérimentales (cercles) pour l'écoulement d'eau entre deux réservoirs communicants, pour le modèle utilisant la relation (1.5).

1.3 GRANDEURS FONDAMENTALES ET GRANDEURS DÉRIVÉES

Les exemples de la section précédente montrent que trois grandeurs sont nécessaires pour décrire le comportement dynamique des phénomènes hydrauliques. La première pour quantifier la quantité de fluide accumulée dans les systèmes, la deuxième pour les écoulements, la troisième pour mesurer la pression en différents points. On les utilise pour modéliser la dynamique des systèmes et pour définir des grandeurs dérivées au moyen de relations mathématiques. Les particularités des systèmes étudiés, telles que la capacité et la résistance, sont exprimées au moyen de lois dites *lois constitutives*.

1.3.1 Grandeurs primitives

Les *grandeurs fondamentales* ou *primitives* sont des grandeurs que l'on introduit sans les définir au moyen d'autres grandeurs, mais que l'on considère comme caractéristiques du domaine considéré. Elles reposent sur les images et les représentations que l'on s'en fait à partir de son expérience quotidienne. En revanche, leurs unités dépendent des conventions établies par le Système international (SI) qui a fixé une fois pour toutes quelles sont les grandeurs fondamentales utilisées en physique.

Parmi les grandeurs qui peuvent être utilisées pour mesurer une quantité de fluide, nous choisissons le volume V qui se mesure en m^3 .

Les écoulements de fluide sont mesurés au moyen du courant de volume ou plus simplement du flux, qui décrit l'écoulement du fluide au travers de conduites ou de canaux. Cette grandeur, représentée par le symbole I_V se mesure en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

La pression mesure l'état du fluide; elle est directement responsable des processus hydrauliques. Elle est représentée par le symbole P et se mesure en pascal (Pa).

À part le volume, il existe deux autres possibilités de mesurer la quantité de fluide contenue dans un système, à savoir la *quantité de matière* qui est utilisée par les chimistes et la *masse* qui est plutôt utilisée par les ingénieurs mécaniciens. Dans les cas les plus simples, ces trois grandeurs sont liées entre elles par des facteurs constants, ce qui les rend pratiquement équivalentes. C'est le cas s'il n'y a pas de réaction chimique, et si le fluide est incompressible. Les relations entre ces grandeurs sont données par:

$$m = \rho V \quad , \quad n = \frac{1}{M} m \quad (1.6)$$

m est la *masse*, mesurée en kg, ρ la *masse volumique* du fluide, mesurée en kg m^{-3} , et n représente la *quantité de matière* dont l'unité est la mole (mol). M est la *masse molaire* de la substance.

À côté du pascal, qui est l'unité SI de mesure de la pression³, mentionnons une unité dérivée, le bar, qui correspond à 10^5 Pa et représente approximativement la pression engendrée à la base d'une colonne d'eau de 10 m de hauteur, ou celle d'une colonne

3. Contrairement à ce qui se fait usuellement, nous représenterons la pression par la lettre majuscule P pour éviter, lorsqu'elles apparaissent simultanément, toute confusion avec la quantité de mouvement représentée par la même lettre minuscule.

de mercure de 76 cm de hauteur, ainsi que la pression moyenne de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. Nous verrons au chapitre 2 que la pression joue en hydraulique le même rôle que le potentiel en électricité. Pour cette raison, il est usuel de dire que la pression représente le *potentiel hydraulique*.

1.3.2 Grandeurs extensives et grandeurs intensives

Une grandeur physique qui dépend de la taille du système, telle que le volume ou la masse, est dite *extensive*. C'est le cas des grandeurs qui peuvent être accumulées dans un système. La somme des valeurs de cette grandeur pour deux systèmes disjoints est égale à la valeur de la grandeur pour la réunion des systèmes, raison pour laquelle, quelquefois, les grandeurs extensives sont dites *additives*.

Une grandeur physique qui ne dépend pas de la taille du système (de la quantité de matière), telle que la pression, est dite *intensive*. Une telle grandeur qualifie généralement l'état d'un système.

1.3.3 Volume et variation de volume

Comme nous considérons des processus dynamiques, le contenu du système évolue en fonction du temps. La quantité de fluide contenue dans le système est exprimée au moyen d'une fonction $V(t)$, le *volume en fonction du temps*. De telles fonctions peuvent être présentées de diverses façons, à savoir par des équations, des tables ou des représentations graphiques. Ces dernières donnent l'image la plus parlante de l'évolution du contenu en fonction du temps (fig. 1.12).

Variation et taux de variation. Le graphe de $V(t)$ contient également toutes les informations importantes sur l'évolution de la quantité de fluide accumulée dans un système. Tout d'abord, nous pouvons lire le volume $V(t)$ à n'importe quel instant. D'autre part, nous pouvons également déterminer la variation du volume entre deux instants t_1 et t_2 (fig. 1.13). La *variation du volume* entre ces deux instants est définie par :

$$\Delta V(t_1, t_2) = V(t_2) - V(t_1) = V_2 - V_1 \quad (1.7)$$

Notons qu'une variation s'obtient toujours en retranchant la valeur initiale de la valeur finale; elle ne révèle pas ce qui est survenu dans l'intervalle entre les deux instants t_1 et t_2 . Mais l'information la plus importante que nous donne le graphe de $V(t)$ est de nous indiquer à *quelle vitesse le volume change* à chaque instant. Cette information nous est fournie par la pente de la courbe qui représente le volume en fonction du temps. Plus la pente de la courbe est importante, plus la variation est rapide. Nous utilisons la représentation graphique de V pour définir ce que nous entendons par la *vitesse de variation* à un instant donné. Pour ce faire, nous traçons une tangente à la courbe au point qui correspond à cet instant (fig. 1.14) et déterminons la pente de cette droite. La *pente de la tangente* mesure le *taux de variation* de la grandeur V à cet instant. Pour déterminer cette pente, il suffit de considérer n'importe quel triangle rectangle ayant la tangente comme hypoténuse et ses deux côtés, respectivement horizontal et vertical. Sa valeur est simplement $\Delta V^*/\Delta t^*$, comme le montre la figure 1.14, et ses unités sont des m^3/s . Les figures 1.14 et 1.15 montrent que la pente de la tangente, et donc le taux de variation, est la limite vers laquelle tend la pente de la sécante lorsque l'intervalle Δt tend vers zéro :

$$\text{Taux de variation} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \dot{V} \quad (1.8)$$

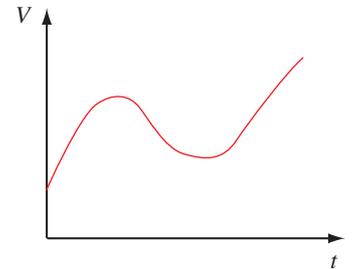


FIGURE 1.12 Le volume d'un fluide accumulé dans un système évolue dans le temps à la suite de processus dynamiques. Le graphique de la fonction $V(t)$ permet de visualiser simplement ce qu'il advient de la grandeur V .

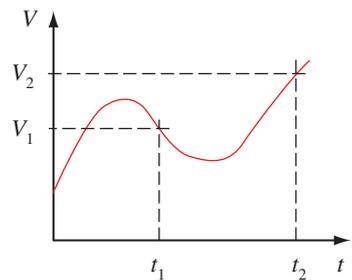


FIGURE 1.13 Il est possible de lire la valeur de V pour des instants particuliers directement sur le graphe. D'autre part, la variation de V , dénotée ΔV , peut être lue sur l'axe des ordonnées.

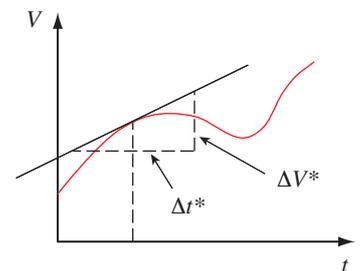


FIGURE 1.14 La grandeur qui mesure à quelle vitesse le volume change à un instant donné, le *taux de variation du volume*, est visualisée par la pente de la courbe qui, elle-même, correspond à la pente de la tangente à la courbe à cet instant.

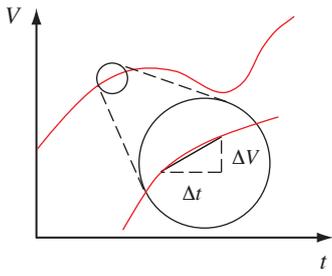


FIGURE 1.15 La pente d'une courbe peut être approximée par celle d'une droite reliant deux points voisins. Plus l'intervalle Δt est petit, meilleure est l'approximation.

Cette limite est la *dérivée par rapport au temps* de la fonction $V(t)$. Cette dérivée peut être notée de deux manières différentes, par dV/dt (lire: «dV sur dt») ou par \dot{V} (lire: «V point»)⁴. Les règles formelles et les techniques de dérivation sont enseignées dans le cours d'analyse mathématique. Mais il est important de maîtriser les techniques de dérivation graphique ou numérique, car très souvent les informations sur l'évolution d'un processus sont données sous forme graphique ou tabulaire. Dorénavant, nous utiliserons les deux notations, \dot{V} ou dV/dt pour représenter le taux de variation du volume, mais de préférence \dot{V} .

Si cette fonction est donnée par un tableau de valeurs de V finement espacées dans le temps, le taux de variation peut être approximé par le *taux de variation moyen* durant l'intervalle Δt , ce qui correspond à la pente de la sécante (fig. 1.15):

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \tag{1.9}$$

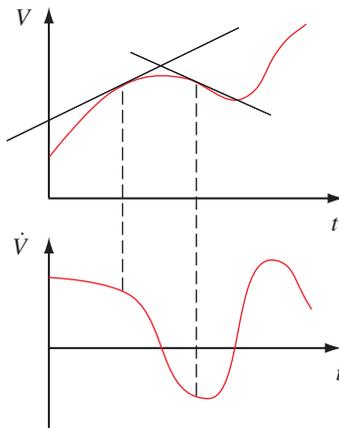


FIGURE 1.16 Le taux de variation du volume est lui-même une fonction du temps. Il peut être déterminé graphiquement à partir de la courbe $V(t)$ en traçant plusieurs tangentes et en déterminant leurs pentes. Notez que le taux de variation est négatif pour les segments de $V(t)$ où V est décroissant, c'est-à-dire où la tangente est descendante.

Quelle que soit la méthode utilisée pour le calculer, le taux de variation définit une nouvelle fonction $\dot{V}(t)$, que l'on peut représenter graphiquement (fig. 1.16).

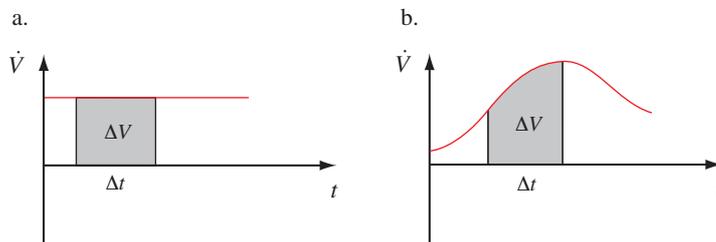
Calcul du volume à partir de son taux de variation. Nous avons découvert comment calculer les variations du volume et son taux de variation \dot{V} à partir des informations contenues dans la fonction $V(t)$. Il est également possible d'effectuer l'opération inverse: si nous connaissons le taux de variation, nous pouvons calculer les variations du volume et, à partir de là, la valeur du volume en fonction du temps. Nous reconstruisons donc la fonction $V(t)$ à partir de la fonction $\dot{V}(t)$ qui décrit son taux de variation.

Un graphique montre de quelle manière on réalise l'opération. Considérons tout d'abord le cas d'un taux de variation constant. Alors, la variation du volume est égale au produit du taux de variation et de l'intervalle Δt :

$$\Delta V = \dot{V} \Delta t \tag{1.10}$$

Graphiquement, ΔV correspond à l'aire du rectangle compris entre la droite $V(t)$ et l'axe du temps t , de largeur Δt (fig. 1.17a). En général, pour une fonction arbitraire $V(t)$, il s'agit de déterminer l'aire entre la courbe $V(t)$ et l'axe du temps pour l'intervalle choisi (fig. 1.17b). Une méthode d'approximation pour l'évaluation de l'aire délimitée par la courbe est discutée ci-dessous. Nous verrons ensuite comment passer de cette approximation à la méthode exacte (pour autant que l'on connaisse la forme analytique de $\dot{V}(t)$).

FIGURE 1.17 Évaluation de la variation du volume à partir du graphique de \dot{V} en fonction du temps: (a) pour un taux de variation constant; (b) pour un taux de variation quelconque.



4. Les deux notations datent de l'invention du calcul différentiel et intégral, développé simultanément par Isaac NEWTON en Angleterre et Gottfried Wilhelm LEIBNIZ en Allemagne. La première notation (réservée exclusivement à la dérivée par rapport au temps) a été introduite par NEWTON dans son «calcul des fluxions», la seconde, plus souple, utilisée de manière générale en analyse mathématique, est due à LEIBNIZ.

Nous supposons qu'un processus fournit le taux de variation du volume d'un fluide en fonction du temps. À partir de là, nous allons déterminer l'évolution du volume en fonction du temps, pour autant que nous connaissions le volume initial V_0 . La démarche est la suivante (fig. 1.18). Dans le graphique représentant \dot{V} , on choisit un (petit)

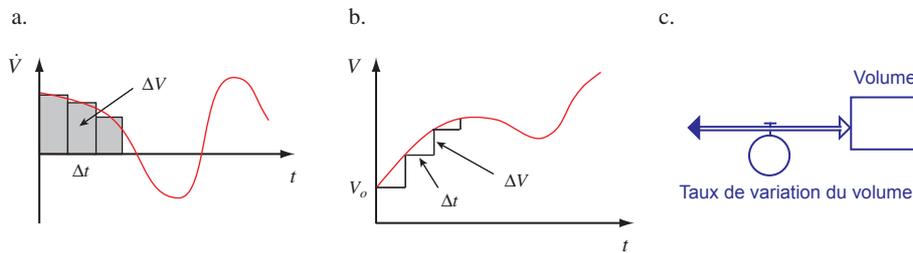


FIGURE 1.18 Évaluation du volume en fonction du temps par intégration graphique: (a) division de l'axe t en petits intervalles Δt et évaluation des variations ΔV durant cet intervalle; (b) construction de $V(t)$ à partir de V_0 et des accroissements ΔV ; (c) les deux éléments de Stella (un «stock» et un «flow») qui permettent d'effectuer l'opération d'intégration.

intervalle de temps Δt et on évalue l'aire du rectangle de hauteur égale à la valeur moyenne du taux de variation pour ce premier intervalle (fig. 1.18a). Cela représente approximativement la variation du volume V durant l'intervalle Δt :

$$\Delta V \approx \dot{V} \Delta t \quad (1.11)$$

Remarquons que cette équation ne donne la valeur correcte de ΔV que si le volume est une fonction linéaire du temps. Dans le graphique de $V(t)$ nous reportons V_0 sur l'axe vertical, puis nous nous déplaçons respectivement horizontalement et verticalement de Δt et ΔV . En répétant l'opération pour des rectangles successifs dans le graphique de \dot{V} , nous obtenons une représentation graphique approximative de $V(t)$ (fig. 1.18b).

Dans tous les logiciels de dynamique des systèmes, en particulier dans Stella⁵, cette opération est représentée au moyen de deux éléments: un rectangle (appelé «stock») qui représente le volume, et une flèche (appelée «flow») uni- ou bidirectionnelle, qui représente ici le taux de variation du volume (fig. 1.18c). Le logiciel exécute à notre place les opérations décrites ci-dessus, pour autant qu'on lui fournisse les informations sur le taux de variation et sur le volume initial.

Pour obtenir la valeur exacte de la variation du volume, on procède de manière analogue à la méthode utilisée pour obtenir la valeur exacte du taux de variation. Pour obtenir la variation du volume entre deux instants t_1 et t_2 , on décompose cette durée en un nombre n suffisamment grand d'intervalles de temps Δt_i sur chacun desquels on évalue la variation du volume ΔV_i . La variation totale entre t_1 et t_2 est alors approximativement égale a:

$$\Delta V(t_1, t_2) \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n (\dot{V} \Delta t)_i = \sum_{i=1}^n (\dot{V} \Delta t)_i \quad (1.12)$$

La valeur exacte est celle que nous obtenons lorsque nous calculons la limite vers laquelle tend cette somme lorsque les intervalles Δt_i tendent vers zéro:

$$\Delta V(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\dot{V} \Delta t)_i = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \dot{V} dt \quad (1.13)$$

5. Produit par isee systems, Lebanon, New Hampshire (www.iseesystems.com). Un autre logiciel de dynamique des systèmes, qui est présenté comme un outil d'intégration d'équations différentielles, est Berkeley Madonna (www.berkeleymadonna.com).

La limite que nous venons d'introduire est l'*intégrale de la fonction sur l'intervalle allant de t_1 à t_2* . Le signe d'intégration « \int » est un S stylisé pour «somme» d'éléments infinitésimaux⁶. Comme dans le cas de la dérivation, les règles formelles et les techniques d'intégration sont enseignées dans le cours d'analyse mathématique. Mais ici aussi, il est important de maîtriser les techniques d'approximation exposées en premier lieu, vu que dans les cas concrets, le taux de variation est rarement donné sous forme analytique, mais souvent sous forme graphique ou tabulaire. Les logiciels tels que Stella ou Berkeley Madonna procèdent à l'intégration numérique en utilisant la procédure décrite dans la figure 1.18.

Puisque nous sommes en mesure de calculer la variation de volume entre deux instants arbitraires, nous pouvons également déterminer l'évolution du volume en fonction du temps, pour autant que nous connaissions le volume initial. En effet :

$$V(t) = V_0 + \Delta V(0, t) = V_0 + \int_0^t \dot{V} d\tilde{t} \tag{1.14}$$

1. Quelles sont les significations des termes volume, variation du volume et taux de variation du volume ? Comment peut-on déterminer le taux de variation à partir de $V(t)$?
2. Comment peut-on calculer la variation du volume pour un intervalle de temps si le taux de variation est connu ? Quelle autre valeur doit-on connaître si l'on veut déterminer le volume en fonction du temps ?
3. Quel signe devrait avoir l'aire comprise entre la courbe de dV/dt et l'axe du temps si le taux de variation du volume a une valeur négative ?
4. Y a-t-il des points pour lesquels le taux de variation du volume est égal à zéro dans la figure 1.16 ? Dans l'affirmative, quelle est la signification de ces points ?



1. Le volume mesure la quantité de fluide à l'intérieur d'un système ; la variation du volume est la différence entre la valeur du volume à un instant t_2 et à un instant précédent t_1 ; le taux de variation mesure à quelle vitesse le volume évolue durant un processus. Ce dernier est égal à la pente de la tangente à la courbe de $V(t)$.
2. La variation du volume est égale à l'aire de la surface entre la courbe dV/dt et l'axe du temps pour un intervalle Δt . En plus du taux de variation en fonction du temps, il faut connaître la valeur initiale du volume.
3. Pour des valeurs négatives du taux de variation, la courbe se trouve en dessous de l'axe du temps et la variation est négative, ce qui signifie que le volume décroît en fonction du temps.
4. Oui, il y en a deux. Le premier correspond à un maximum momentané du volume, lorsque le taux de variation passe de valeurs positives à des valeurs négatives. Le second point correspond à un minimum momentané, pour la raison inverse.



6. Cette notation universellement utilisée aujourd'hui est également due à Gottfried Wilhelm LEIBNIZ.

EXEMPLE 1.1. Détermination graphique du taux de variation du volume.

L'évolution du volume d'eau contenu dans un lac est donnée sous forme graphique (fig. 1.19). (a) Déterminez la masse d'eau à l'instant $t = 6.0 \cdot 10^4$ s. (b) Déterminez graphiquement le taux de variation du volume pour un certain nombre de points et reportez-les dans un graphique dV/dt en fonction de t . Peut-on ajuster une fonction simple à ces points? (c) Expliquez la signification des différents signes de dV/dt , et du minimum de la courbe $V(t)$.

SOLUTION: (a) La masse pour un volume donné est calculée à partir de l'équation (1.6). La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 . Pour un volume de 1750 m^3 nous obtenons:

$$m(t = 6.0 \cdot 10^4 \text{ s}) = \rho V(t = 6.0 \cdot 10^4 \text{ s}) = 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1750 \text{ m}^3 = 1.75 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

(b) Tracez aussi soigneusement que possible des tangentes à la courbe (fig. 1.20a). Pour celle à l'instant $t = 0$ s, la pente est déterminée de la manière suivante: pour une base $\Delta t = 9.0 \cdot 10^4$ s, la variation de V est $\Delta V = -500 \text{ m}^3$, ce qui donne une valeur de $-5.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Une droite semble s'ajuster fort bien aux points de la seconde courbe (fig. 1.20b).

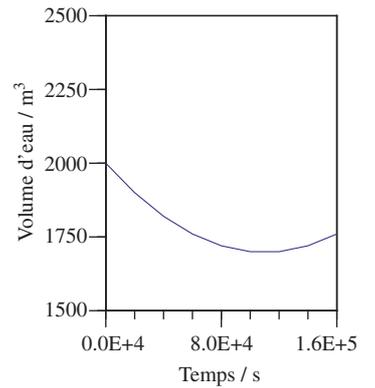


FIGURE 1.19 Évolution du volume d'eau dans un lac.

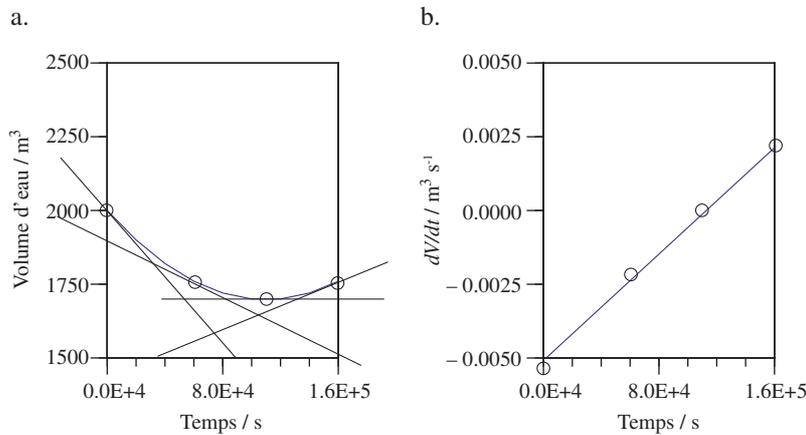


FIGURE 1.20 Détermination graphique du taux de variation du volume. (a) Évaluation graphique du taux de variation. (b) Évolution temporelle du taux de variation.

(c) Le volume décroît durant les premières $1.1 \cdot 10^5$ s, ce qui correspond à des valeurs négatives du taux de variation. Ensuite, le volume augmente, ce qui signifie que le taux de variation est positif. À l'endroit où $V(t)$ a un minimum, le taux de variation est nul.



EXEMPLE 1.2. Détermination du volume à partir du taux de variation.

La figure 1.21 montre le taux de variation du contenu d'un lac; il croît linéairement de $0.0025 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à $0.0075 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ en $1.60 \cdot 10^5$ s. Déterminez l'expression analytique du volume en fonction du temps, sachant que la valeur initiale est $V_0 = 1000 \text{ m}^3$.

SOLUTION: La solution est simple à trouver, vu que le taux de variation est une fonction linéaire. Nous exprimons par une équation l'aire entre la courbe dV/dt et l'axe du temps. Cette aire représente la variation du volume entre 0 s et t . Le taux de variation en fonction du temps et donné par:

$$\dot{V}(t) = a + bt \quad , \quad a = 0.0025 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad , \quad b = 3.125 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

L'aire à évaluer est celle du trapèze de base allant de 0 s à t . Le volume correspond à cette valeur augmentée du volume initial V_0 :

$$\Delta V(t) = \frac{1}{2} (\dot{V}(0) + \dot{V}(t)) \Delta t = \frac{1}{2} (a + a + bt) t = at + \frac{1}{2} bt^2 \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_0 + at + \frac{1}{2} bt^2$$

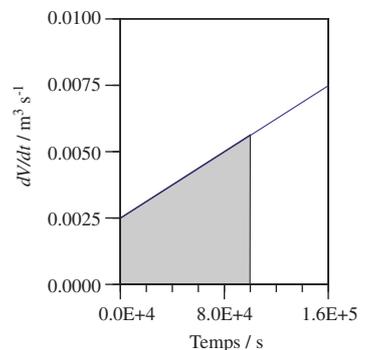


FIGURE 1.21 Taux de variation du contenu d'un lac.

Le calcul intégral permet de trouver ce résultat de manière directe :

$$V(t) = \int \dot{V} dt = \int (a + bt) dt = V_0 + at + \frac{1}{2} bt^2$$



1.3.4 Écoulements: courants et quantités échangées

Le volume et le taux de variation du volume sont des grandeurs qui n'ont à voir qu'avec le contenu du système. Pour une description complète de processus dynamiques, nous devons être en mesure de décrire les interactions du système avec son environnement, ce qui peut être réalisé au moyen des écoulements de fluides.

Écoulements, courants, flux. Il est facile de visualiser des écoulements de fluides. Pour savoir comment déterminer l'intensité d'un courant, il suffit de s'imaginer au bord d'un fleuve ou d'une rivière, ou à côté d'un tuyau débouchant dans une fontaine (fig. 1.22). La grandeur qui mesure l'intensité d'un courant de fluide est le *flux volumique*. Elle est représentée par le symbole I_V , et ses unités sont des $m^3 s^{-1}$. On mesure

FIGURE 1.22 Exemples d'évolution de flux en fonction du temps.

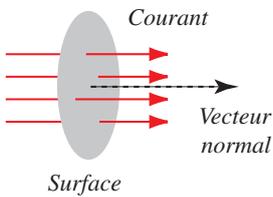
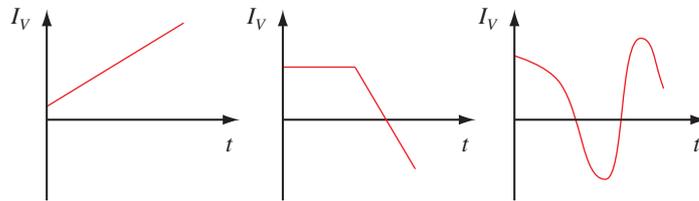


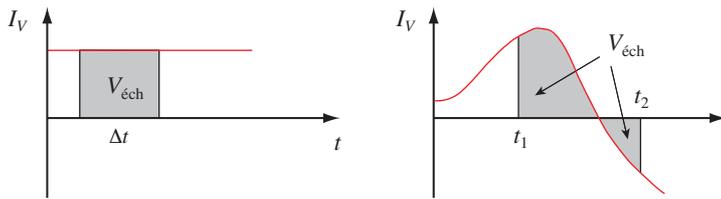
FIGURE 1.23 Un flux mesure l'intensité d'un écoulement à travers une surface; le signe du flux indique le sens de l'écoulement par rapport à l'orientation de la surface.

les flux par rapport à des surfaces traversées par les courants. On donne une orientation à cette surface au moyen d'un vecteur qui lui est perpendiculaire, et un écoulement qui a lieu dans le sens de ce vecteur correspond à un flux positif (fig. 1.23); un écoulement allant dans le sens opposé correspond à un flux négatif. On peut également donner une orientation à une surface fermée entourant un corps ou une région de l'espace, soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur. Il existe différentes conventions à ce sujet. Les physiciens et les mathématiciens attribuent un sens positif au vecteur normal pointant vers l'extérieur, alors que les ingénieurs font usuellement le contraire. Nous utiliserons la dernière convention, ce qui signifie que nous attribuerons un signe positif à un flux entrant dans le système.

Quantité échangée par un flux. Si nous connaissons l'intensité d'un flux, nous pouvons calculer la quantité de fluide qui a franchi la surface de référence durant un intervalle donné. Lorsque l'intensité du flux I_V est constante, ce calcul est particulièrement simple. Le volume échangé (entre le système et son environnement) par l'intermédiaire de ce flux, que nous désignerons par $V_{éch}$, est donné par :

$$V_{éch}(t_1, t_2) = I_V \Delta t \tag{1.15}$$

Si le flux est variable, la quantité échangée est déterminée exactement de la même manière que la variation du volume à partir du taux de variation (fig. 1.17). Il suffit de tracer le graphique du flux en fonction du temps et d'évaluer l'aire entre la courbe $I_V(t)$ et l'axe du temps pour l'intervalle de temps considéré (fig. 1.24).



Comme dans le cas de l'évaluation de la variation du volume à partir de son taux de variation, le volume échangé durant l'intervalle allant de t_1 à t_2 se calcule au moyen d'une intégrale :

$$V_{\text{éch}}(t_1, t_2) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} I_V dt \quad (1.16)$$

Les flux sont à l'origine des taux de variation qui sont positifs pour des flux entrant dans le système, négatifs pour des flux émergents. Les aires sous la courbe d'évolution du flux peuvent donc se situer au-dessus ou en dessous de l'axe du temps. Dans le dernier cas, l'aire (l'intégrale) prend une valeur négative.

Mesure des flux. Dans la pratique, il existe plusieurs méthodes pour mesurer l'intensité des flux de fluides. La plus élémentaire, mais pas nécessairement la plus efficace, consiste à recueillir et à mesurer la quantité de fluide transporté durant de brefs intervalles de temps. Le quotient des deux grandeurs représente la valeur moyenne de l'intensité du flux (pour l'intervalle considéré). Cependant, il existe des mesures directes ; certains appareils placés dans l'écoulement peuvent mesurer directement le débit.

1.3.5 Différences de pression

La différence de pression se mesure entre deux points du fluide, indépendamment des raisons physiques à l'origine de cette différence, sur lesquelles nous reviendrons à la section 1.5. Usuellement, il s'agit de la valeur aval de l'écoulement moins la valeur amont ou, dans un sens donné, de la valeur éloignée moins la valeur proche :

$$\Delta P_{AB} = P_B - P_A \quad (1.17)$$

1.4 ANALYSE DE SYSTÈME I : BILANS DE VOLUME

L'objectif de cette section est de formaliser les étapes qui aboutissent à un modèle dynamique de l'évolution d'un système. La première étape est la formulation des *équations de bilan* associées au système et aux processus étudiés.

1.4.1 Établissement du bilan

1. Établir un croquis de situation. Créer un croquis du système étudié et de son environnement. Il s'agit d'un croquis semi-réaliste contenant des informations sur la taille du système et sur ses parties (fig. 1.25).

2. Choisir les systèmes ou les éléments. Choisir un ou plusieurs systèmes, sous-systèmes ou éléments. Un système peut être soit un objet identifiable, soit une région de l'espace (dans ce cas, on l'appelle un volume de contrôle). Dans l'exemple étudié, nous choisissons deux volumes de contrôle contenant les cuves de la figure 1.25.

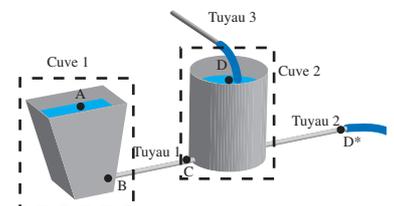


FIGURE 1.25 Un croquis de situation est partiellement réaliste, partiellement abstrait. Il montre le système dans son environnement et peut contenir des détails concernant les tailles des systèmes, etc.

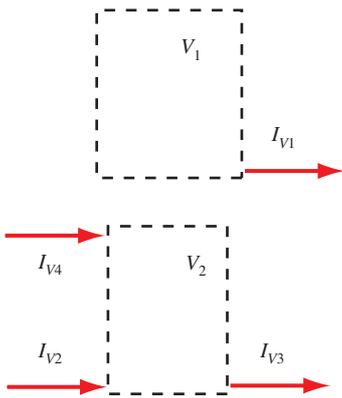


FIGURE 1.26 Vue éclatée de deux sous-systèmes. Les processus et les grandeurs accumulées sont identifiés pour chacun des sous-systèmes.

3. Choisir les grandeurs extensives. En hydraulique, la grandeur extensive (celle qui peut être accumulée) est la quantité de fluide, le volume V .

4. Isoler les systèmes ou éléments de leur environnement et identifier les processus. Dessiner des représentations abstraites des systèmes choisis, telles que les rectangles en trait discontinu de la figure 1.26. Identifier tous les flux, étant donné qu'ils représentent les processus; pour les découvrir, il faut demander pourquoi il y a des processus qui se déroulent et «explorer» le système pour trouver les entrées et les sorties. Dessiner une flèche pour chaque flux par rapport à son système. Étiqueter les flèches. Introduire les quantités accumulées (fig. 1.26). L'étape 4 consiste en la création d'une *vue éclatée du système*.

5. Formuler les équations de bilan. Pour chacun des sous-systèmes et pour chacune des grandeurs accumulées (extensives), formuler l'équation de bilan:

Sous sa forme instantanée, une équation de bilan met en relation le taux de variation du contenu du système (représenté ici par le volume V) avec tous les processus qui se déroulent à l'intérieur ou à l'extérieur du système :

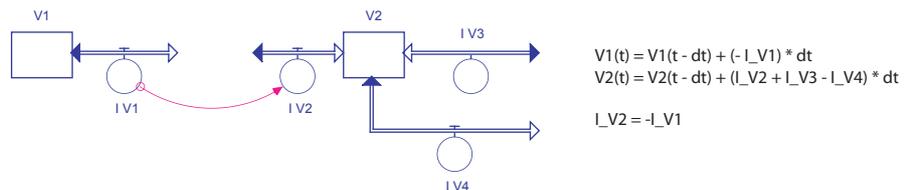
$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= I_{V1} \\ \dot{V}_2 &= I_{V2} + I_{V3} - I_{V4} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Sous sa forme intégrée, l'équation de bilan met en relation la variation des quantités accumulées et toutes les quantités échangées ou transportées pendant une certaine période :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= V_{\text{éch}, 1} \\ \Delta V_2 &= V_{\text{éch}, 2} + V_{\text{éch}, 3} + V_{\text{éch}, 4} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dans les diagrammes de dynamique des systèmes, les équations de bilan, dans leur forme instantanée, sont représentées graphiquement par la combinaison d'éléments d'accumulation (stocks) et d'écoulement (flows), comme le montre la figure 1.27.

FIGURE 1.27 Représentation de l'équation de bilan par un diagramme de dynamique des systèmes. La flèche fine indique une interaction. Les deux premières équations de bilan sont automatiquement générées par le logiciel.



Les deux premières équations qui figurent dans la partie droite de la figure (les équations de bilan) sont automatiquement générées par le logiciel de dynamique des systèmes.

6. Formuler la relation d'interaction. Dans notre exemple, il n'y a qu'une interaction: le flux sortant de la cuve 1 est égal au flux entrant dans la cuve 2 (fig. 1.27):

$$I_{V1} = -I_{V2} \tag{1.20}$$

Il faut relever un certain nombre de points importants relatifs à un bilan tel que celui qui est énoncé par l'équation (1.18):

- Il est impératif d'associer aux flux (et aux volumes échangés par l'intermédiaire de ces flux) les signes corrects: positif pour les flux entrants, négatif pour ceux qui émergent du système.
- Une équation de bilan ne sert pas à définir l'intensité I_V : $dV/dt = I_V$ n'est pas une définition. Le membre de gauche d'une équation de bilan est lié à ce qui se passe à l'intérieur du système, le membre de droite décrit des processus de transport qui se déroulent à l'extérieur du système.
- Une équation de bilan peut être utilisée de deux manières. Premièrement, si tous les flux sont connus, nous pouvons déterminer le taux de variation du contenu du système. Deuxièmement, si le taux de variation du contenu du système est connu, et si nous connaissons tous les flux sauf un, ce dernier peut être calculé.
- À elle toute seule, l'équation de bilan n'est pas d'une grande utilité. Ce n'est que lorsque l'on possède des informations particulières sur les flux qu'elle peut être utilisée pour effectuer des calculs. Ces informations dépendent des caractéristiques du système considéré. Elles doivent être formulées au moyen de relations particulières que l'on appelle *lois constitutives*. Elles ont pour objectif de décrire comment les propriétés physiques des éléments du système étudié influencent le déroulement des processus. Dans les sections suivantes, nous en énoncerons deux qui expliquent l'origine et l'effet des différences de pression qui apparaissent dans le système: la *loi de résistance*, qui gouverne l'intensité des flux, et la *loi de capacité* qui relie le contenu à la pression.

1.4.2 Visualisation du système au moyen de diagrammes

Les diagrammes constituent un instrument visuel important qui aide à créer les abstractions nécessaires pour la modélisation des processus dynamiques. Rappelons de quelle manière nous imaginons le déroulement des phénomènes naturels: l'écoulement, la production et l'accumulation de certaines grandeurs facilement visualisables sont la cause de ce que nous observons. En outre, ces grandeurs s'écoulent entre des niveaux différents: «en descendant la pente» pour les processus spontanés, «en remontant la pente» pour les processus contraints. Ainsi, lorsque de l'eau s'écoule, elle peut le faire de manière spontanée si elle passe d'un niveau élevé à un niveau bas de la pression. En revanche, le passage d'une pression basse à une pression élevée ne sera possible qu'avec l'aide d'une pompe; un tel processus est contraint (fig. 1.28).

À côté des *diagrammes de dynamique des systèmes* que nous avons déjà rencontrés dans ce chapitre (fig. 1.27), nous allons présenter un nouveau type de diagrammes extrêmement utiles lors de la construction de modèles, les *diagrammes de processus*.

Diagrammes de processus. Ils servent à représenter un système ou un élément d'un système et les processus qui s'y déroulent. Considérons, à titre d'exemple, un réservoir de fluide avec des entrées et des sorties. Un diagramme qui représente l'écoulement et le stockage, mais pas le bilan lui-même, commence par un rectangle. Les écoulements sont représentés par les flèches allant vers le rectangle ou en émergeant, alors que le stockage est symbolisé par un petit réservoir à l'intérieur du rectangle (fig. 1.29).

Dans une seconde étape, nous ajoutons l'information concernant les niveaux hydrauliques, c'est-à-dire la pression du fluide au moment où il entre dans le système ou en émerge (fig. 1.30). Les valeurs de la pression sont celles du fluide aux frontières du système. À l'intérieur du système, la pression peut varier d'un endroit à l'autre.

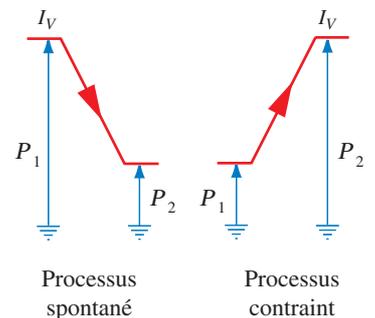


FIGURE 1.28 Lorsqu'une grandeur extensive s'écoule, elle le fait toujours entre deux niveaux de la grandeur intensive associée. Un fluide s'écoule de manière spontanée s'il passe d'un niveau élevé à un niveau bas de la pression. En revanche, l'écoulement vers une pression plus élevée ne sera possible qu'avec l'aide d'une pompe; un tel processus est contraint.

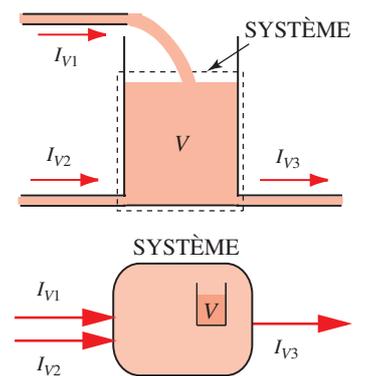
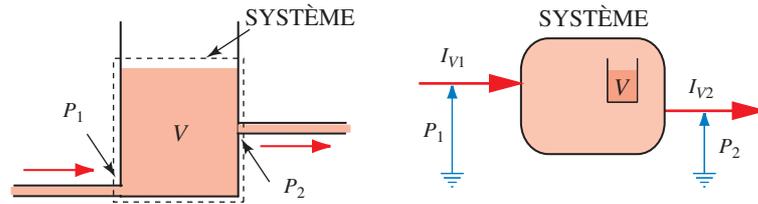


FIGURE 1.29 Représentation symbolique de l'écoulement et de l'accumulation au moyen d'un diagramme de processus. Le diagramme suggère le bilan, mais ce dernier est mieux représenté au moyen d'un diagramme de dynamique des systèmes.

FIGURE 1.30 Adjonction de l'information concernant les niveaux hydrauliques dans les diagrammes de processus. Le niveau hydraulique correspond à la pression du fluide.



1. Pourquoi un courant n'est-il pas un taux de variation? Pourquoi un volume échangé n'est-il pas une variation du volume?
2. Décrivez l'écoulement dont le flux est décrit dans le second diagramme de la figure 1.22. Quelle est la signification d'un flux négatif?
3. Si le taux de variation du volume est connu, que pouvez-vous dire au sujet des flux?



1. Un courant est une grandeur fondamentale introduite pour décrire un processus de transport. Un taux de variation est une grandeur qui décrit l'évolution du contenu d'un système. On peut affirmer les mêmes choses au sujet des grandeurs intégrales.
2. Tout d'abord, l'intensité du courant est constante et positive, ce qui implique que l'écoulement a lieu dans le sens indiqué par le vecteur d'orientation de la surface de référence. Ensuite, l'intensité diminue linéairement. Après son passage par zéro, le flux devient négatif, ce qui veut dire que l'écoulement change de sens.
3. Si le taux de variation est connu, seule la somme des flux peut être déterminée à partir de l'équation de bilan. Seules des lois particulières relatives aux écoulements peuvent nous donner des informations sur des écoulements particuliers.



EXEMPLE 1.3. Un cas simple d'établissement d'un bilan de fluide.

Considérez un récipient d'eau avec une admission et un orifice de sortie. Le flux entrant est constant et égal à 10 L s^{-1} . Le volume évolue à raison de -13 L s^{-1} . (a) Déterminez le flux volumique émergent; exprimez-le en termes de flux massique. (b) Combien d'eau est échangée par l'intermédiaire du courant émergent durant la première minute? (c) Déterminez le volume en fonction du temps, sachant que le volume initial est de 20 m^3 .

SOLUTION: (a) L'équation de bilan de volume dans sa forme instantanée nous permet de déterminer le flux manquant:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= I_{V1} + I_{V2} \quad \Rightarrow \quad I_{V2} = \dot{V} - I_{V1} = -13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} - 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = -23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \\ I_m &= \rho I_V \quad \Rightarrow \quad I_{m2} = 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot (-23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}) = -23 \text{ kg s}^{-1} \end{aligned}$$

(b) La quantité échangée est calculée selon l'équation (1.15):

$$V_{\text{éch 2}} = I_{V2} \Delta t = -23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \cdot 60 \text{ s} = -1.38 \text{ m}^3$$

(c) La variation du volume et le volume instantané peuvent être calculés de différentes manières. La plus directe est:

$$V(t) = V_0 + \Delta V_{0 \rightarrow t} = V_0 + \dot{V}(t-0) = 20 \text{ m}^3 - 13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \cdot t$$

■

1.5 ANALYSE DE SYSTÈME II: PRESSION ET FORCE D'ENTRAÎNEMENT HYDRAULIQUE

Nous savons que, dans une conduite, l'eau et l'huile ne s'écoulent pas spontanément. Cette simple observation implique que d'autres processus sont en œuvre. Ces processus fournissent une force d'entraînement pour l'écoulement des fluides.

1.5.1 Pression dans les fluides

Pour être précis, il y a deux choses que les fluides ne font pas spontanément à la surface de la Terre: sans assistance, ils ne s'écoulent pas en remontant la pente, ni horizontalement à travers des conduites ou dans des canaux. Dans le cas des écoulements horizontaux, une force d'entraînement est nécessaire à cause des frottements (section 1.7).

Il y a plusieurs manières de forcer un fluide à s'écouler lorsque c'est nécessaire. Dans la nature, nous observons majoritairement deux cas. Premièrement, l'eau s'écoule de haut en bas, entraînée par la gravité. Deuxièmement, dans l'atmosphère, des zones de haute pression se forment et l'air s'écoule alors vers des régions où la pression est plus basse.

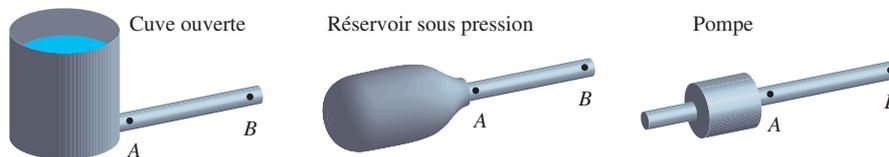


FIGURE 1.31 Pour que le fluide puisse s'écouler à travers la conduite de A à B, la pression doit être plus élevée en A. Une cuve, un réservoir sous pression (contenant un fluide sous haute pression) ou une pompe peuvent être utilisés pour engendrer une telle différence de pression.

Dans le domaine technique, on peut utiliser des réservoirs au fond desquels la pression est plus élevée, des réservoirs sous pression et des pompes (fig. 1.31). Ces observations suggèrent que des différences de pression sont les causes d'écoulements de fluides qui n'auraient pas lieu autrement. Encore une fois, l'exemple de deux réservoirs communicants est utile pour nous convaincre de ce fait. Le fluide ne s'écoulera dans la conduite que s'il existe une différence de niveau (de pression) entre les deux extrémités de la conduite. L'écoulement cesse dès que la différence de pression disparaît.

Pression dans les liquides. Si nous plongeons un capteur de pression dans un récipient rempli d'eau ou d'un autre liquide, nous constatons que la pression du fluide augmente linéairement au fur et à mesure que nous nous enfonçons dans le liquide. Ce constat ne dépend ni de la taille, ni de la forme du récipient. En fait, nous mesurerions la même relation linéaire entre la pression et la profondeur, que ce soit dans un lac, dans un récipient étroit, voire dans l'océan (fig. 1.32a).

La pente de la droite représentant la relation entre la pression et la profondeur dépend de la masse volumique du liquide. Dans l'eau, elle croît approximativement de 1 bar tous les 10 m (fig. 1.32b). Dans une huile végétale, la pente est réduite d'environ 10% (fig. 1.32c). Par contre, elle est de 13.6 bar pour 10 m de mercure.

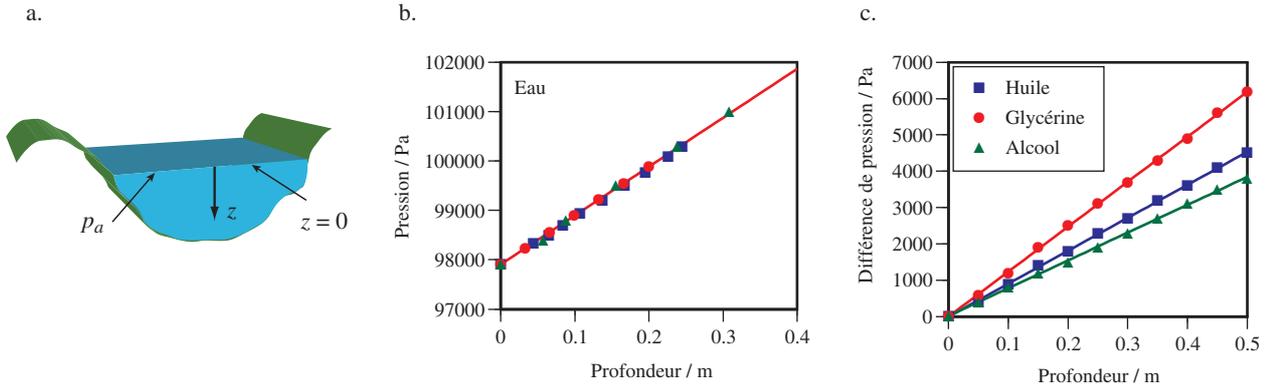


FIGURE 1.32 Évolution de la pression dans les fluides: (a) dans la nature; (b) dans des cuves d’eau de différentes sections; (c) pour trois liquides différents.

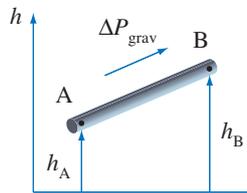


FIGURE 1.33 Évolution de la pression dans un fluide sous l’effet de la pesanteur.

C’est la pesanteur qui est à l’origine de l’apparition de la pression dans les fluides. Il est usuel d’exprimer l’évolution de cette pression en fonction de la hauteur au-dessus d’un niveau de référence. Ainsi, la différence de pression entre les deux extrémités de la conduite de la figure 1.33 est donnée par

$$\Delta P_{\text{grav}} = \Delta P_{AB} = P_B - P_A = -\rho g (h_B - h_A) \quad (1.21)$$

Cette relation n’est correcte que pour des fluides de densité constante. En revanche, elle est indépendante du récipient dans lequel se trouve le fluide.

La variation de la pression en fonction de l’altitude est appelée *gradient de pression*. La figure 1.32c révèle que ce gradient de pression dépend de la densité du liquide:

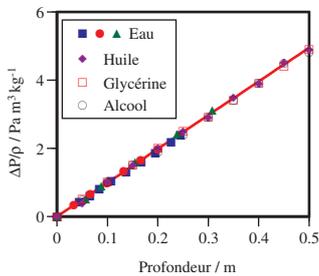


FIGURE 1.34 Évolution de la pression spécifique. Elle est la même pour les liquides incompressibles.

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g \quad (1.22)$$

Le gradient est négatif, ce qui exprime le fait que la pression diminue lorsque l’on s’élève dans le fluide. La figure 1.34 souligne la proportionnalité entre la pression spécifique et la profondeur.

Pression et direction de la pression. Les fluides au repos exercent une pression sur les surfaces des objets qui y sont plongés ou sur les parois des récipients qui les contiennent. Si nous envisageons un élément de surface suffisamment petit pour qu’on puisse admettre qu’il est plan, la direction de la force exercée par le fluide est perpendiculaire à cet élément de surface, quelle que soit l’orientation de la surface (fig. 1.35).

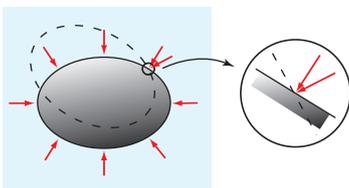


FIGURE 1.35 Un fluide immobile presse sur un objet immergé dans une direction perpendiculaire à la surface. La pression elle-même n’a pas de direction, il suffit d’indiquer son intensité.

Nous en déduisons un fait important: la pression d’un fluide est un nombre simple (une grandeur scalaire), pas une grandeur orientée (grandeur vectorielle). *La pression n’a pas de direction*, il suffit d’indiquer son intensité. Ce n’est que lorsque nous introduisons des objets dans le fluide que nous pouvons parler de la direction de la *force pressante sur les parois de l’objet*. Si le fluide est immobile, cette direction est perpendiculaire à la surface considérée. Ce n’est pas le cas si le fluide s’écoule le long de la surface; le fluide exerce une force d’entraînement dans la direction de l’écoulement à cause du frottement.

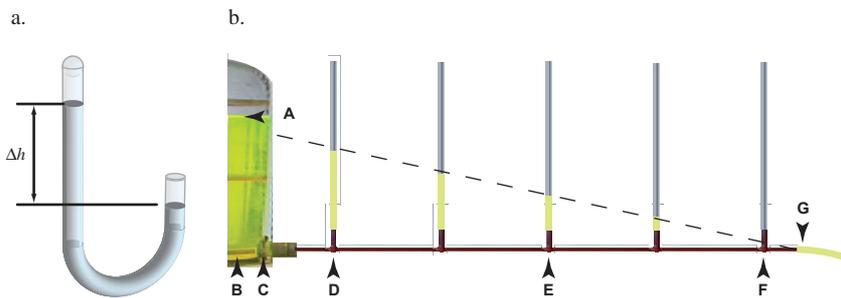
Pression dans les gaz. Dans l’atmosphère terrestre, la décroissance de la pression n’est pas linéaire lorsque l’on s’élève, mais la diminution de pression est d’autant plus faible que l’altitude est importante (fig. 1.36). Ce comportement est dû au fait que l’air n’est pas incompressible, et que sa densité diminue lorsque l’on s’élève. Si l’on admet

une atmosphère isotherme (dont la température ne varie pas en fonction de l'altitude), alors la densité est proportionnelle à la pression, et l'intégration de l'équation différentielle qui en résulte aboutit à une relation exponentielle (section 11.9.4):

$$P(h) = P(0)e^{-h/k} \quad (1.23)$$

Pour l'atmosphère terrestre, k vaut approximativement 7000 m, ce qui signifie que la pression décroît d'un facteur e tous les 7000 m, ce qui correspond à une division par 2 tous les 5000 m.

Mesure de la pression. Une des manières les plus simples pour mesurer des pressions est de les associer à une grandeur analogue dont elles dépendent, par exemple des colonnes de liquide dans des tubes verticaux ou en U (fig. 1.37). Un tel système est un baromètre; le premier fut construit en 1643 par Evangelista TORRICELLI.



On peut utiliser des colonnes de liquide dans des tubes verticaux en tant que capteurs de pression. Considérons par exemple une conduite horizontale à travers laquelle s'écoule un liquide, comme dans la figure 1.37. Les tubes verticaux montés sur la conduite horizontale indiquent de combien la pression qui règne dans l'écoulement dépasse celle de l'atmosphère. Nous observons que la chute de pression est linéaire le long de la conduite et qu'il y a en outre une chute de pression à l'entrée de la conduite. Nous reviendrons sur cette dernière particularité à la section 1.7.

1.5.2 Variation et différence de pression dans des circuits hydrauliques

Si nous voulons être en mesure de spécifier les conditions qui rendent possibles les écoulements de fluides, nous devons être capables de déterminer les pressions et les différences de pression le long des chemins empruntés par les fluides. Prenons pour exemple le dispositif hydraulique apparaissant dans la figure 1.38.

Un fluide, tel que de l'huile, s'écoule de A vers B à travers une pompe, puis à travers une conduite vers un récipient. En C, la conduite se ramifie en une seconde conduite au niveau du sol.

Nous souhaitons déterminer les valeurs de la pression aux points indiqués dans la figure, qui sont des points remarquables du circuit (entrées et sorties des éléments constitutifs, tels que conduites, pompes et cuves). En premier lieu, nous notons que la pression doit être la même en A, D et D*, vu que le fluide est au contact de l'air et doit donc avoir la même pression que l'air, à savoir P_{air} . En fait, nous pouvons imaginer une boucle hydraulique fermée passant successivement par les points A, B, C, D et retournant, par la voie des airs, vers le point A. Naturellement, nous devons nous retrouver au même niveau hydraulique, c'est-à-dire à la même pression, lorsque nous avons «bouclé la boucle». Il existe également une deuxième branche de C vers D* qui est parallèle à la branche qui va de C vers D à travers le fluide contenu dans le récipient.

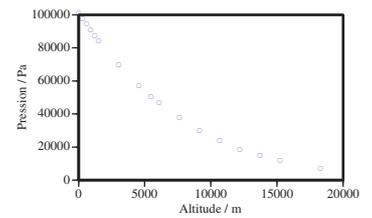


FIGURE 1.36 Pression atmosphérique en fonction de l'altitude. Les valeurs correspondent à une atmosphère dite atmosphère standard. Dans la réalité, les conditions changent aussi bien dans le temps que dans l'espace.

FIGURE 1.37 Mesure de la pression: (a) baromètre au mercure consistant en un tube en U dont une des branches est ouverte vers l'air environnant, l'autre fermée; (b) mesure dynamique: de l'eau s'écoule d'une cuve à travers un long tube horizontal. Les colonnes de liquide dans les tubes verticaux permettent de mesurer la pression en différents points de la conduite. On notera la chute de pression à l'entrée de la conduite (entre B et C).

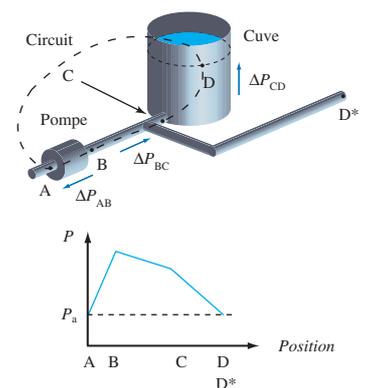


FIGURE 1.38 Évolution de la pression dans un système hydraulique. La valeur P_a correspond à la pression atmosphérique.

Il existe donc une deuxième boucle passant par les points A, B, C, D*, puis retournant vers A. On peut identifier une troisième boucle fermée passant par les points C et D et retournant à travers l'air vers D*. Ce que nous venons de constater peut être énoncé en tant que règle importante pour les circuits hydrauliques fermés :

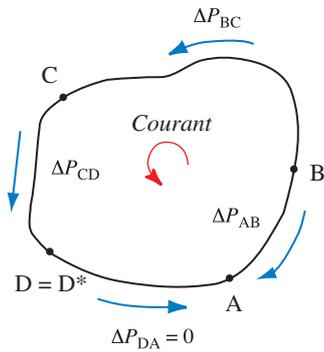


FIGURE 1.39 Les différences de pression le long d'une boucle hydraulique fermée ont une somme nulle. Une flèche pointant dans le sens de l'écoulement indique une pression décroissante, une pointant contre le courant indique une pression croissante.

Dans une boucle hydraulique fermée (fig. 1.39), qu'elle soit simple ou complexe, la somme de toutes les différences de pression entre les différents points de la boucle doit être égale à zéro :

$$\Delta P_{AB} + \Delta P_{BC} + \Delta P_{CD} + \dots = 0 \quad (1.24)$$

Cette règle est appelée loi des mailles. Il existe une règle équivalente pour les circuits électriques ; c'est la seconde loi de KIRCHHOFF (chapitre 2).

L'exemple de la figure 1.38 révèle une autre particularité des circuits hydrauliques. De C à D, nous remontons dans le fluide, ce qui provoque une diminution de pression jusqu'à la pression atmosphérique. La même baisse de pression doit avoir lieu entre C et D*, vu que le point D* est à la pression atmosphérique. Nous en déduisons que les différences de pression de branches parallèles sont égales.

Différences de pression et processus. L'exemple ci-dessus montre que les différences de pression peuvent être associées à différents types de processus et de systèmes :

- fluides accumulés dans des cuves, différences de niveau ; il s'agit d'une *différence de pression capacitive* désignée par le symbole ΔP_C (section 1.6) ; cette différence de pression est positive lorsque l'on s'enfonce dans le fluide, négative dans le cas contraire ;
- fluides accumulés dans des récipients sous pression ; il s'agit également d'une différence de pression capacitive ;
- résistance à l'écoulement ; on parle de *différence de pression résistive* que l'on désigne par le symbole ΔP_R (section 1.7) ; cette différence de pression est négative lorsque l'on traverse l'élément résistif dans le sens du courant, positive dans le cas contraire ;
- pompes et turbines ; seront également traitées à la section 1.7 ; si l'on parcourt l'élément dans le sens du courant, cette différence de pression est positive pour les pompes, négatives pour les turbines ;
- différences de vitesse d'écoulement (en différents points de l'écoulement, à cause de changements de section), sujet qui sera traité à la section 1.7 ;
- courants variables dans le temps ; le sujet sera abordé au chapitre 4.

Nous voulons appliquer la loi des mailles au circuit de la figure 1.25 afin de pouvoir modéliser son comportement. Nous parcourons la première maille dans le sens antihoraire en tenant compte des conventions de signe énoncées ci-dessus :

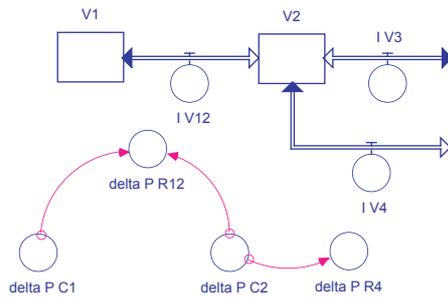
$$\begin{aligned} \Delta P_{C1} + \Delta P_{R12} - \Delta P_{C2} &= 0 \\ \Delta P_{R12} &= -(\Delta P_{C1} - \Delta P_{C2}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si on parcourt la seconde maille également dans le sens antihoraire, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta P_{C2} + \Delta P_{R4} &= 0 \\ \Delta P_{R4} &= -\Delta P_{C2} \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.5.3 Modélisation de la loi des mailles

Dans le diagramme de dynamique des systèmes, ces relations sont exprimées au moyen de cercles appelés «converters» qui servent à introduire dans le modèle les particularités du système étudié (fig. 1.40). Le flux passant de la cuve 1 à la cuve 2 est représenté par un «flow» unique, en lieu et place des deux «flows» de la figure 1.27.



$$\begin{aligned} V1(t) &= V1(t - dt) + (-I_{V12}) * dt \\ V2(t) &= V2(t - dt) + (I_{V12} + I_{V3} - I_{V4}) * dt \\ \text{delta_P_R12} &= -(\text{delta_P_C1} - \text{delta_P_C2}) \\ \text{delta_P_R4} &= -\text{delta_P_C2} \end{aligned}$$

FIGURE 1.40 Prise en compte de la loi des mailles pour les différences de pression dans le circuit de la figure 1.25.

1. Un dispositif tel que le tube en U de la figure 1.37, rempli de mercure, est un outil simple pour mesurer la pression de l'air. Si la pression de l'air vaut 0.90 bar (1 bar correspond à 10^5 Pa), de combien la colonne de mercure de la branche gauche surmontera-t-elle celle de la branche droite?
2. Pourquoi la courbe d'évolution de la pression atmosphérique (fig. 1.36) n'est-elle pas linéaire? Quelle information au sujet de la densité de l'air au niveau de la mer la tangente à l'origine de la courbe nous fournit-elle?
3. Pourquoi pouvons-nous affirmer qu'il doit y avoir une différence de pression entre les points B et C de la figure 1.37b?
4. Quelle est la cause de la diminution de pression le long de la conduite de la figure 1.37b? Quelle serait la variation de pression le long de la conduite si on bouchait son extrémité?
5. Que vaut la chute de pression de C à D* dans la figure 1.38? Le point D est à une hauteur h au-dessus du sol, et la densité du fluide est ρ . Quelles sont les lois ou relations nécessaires pour pouvoir répondre?



1. Vu que la pression est la même à des profondeurs identiques dans le mercure, la pression à la profondeur Δh dans la colonne de gauche doit être égale à celle de l'air. Avec une masse volumique de 13600 kg/m^3 et $g = 9.81 \text{ N/kg}$, nous obtenons $\Delta h = 0.67 \text{ m}$.
2. Comme l'air est compressible, sa densité est plus importante aux faibles altitudes et diminue lorsque l'on s'élève, ce qui explique pourquoi la pression diminue plus rapidement lorsque l'altitude augmente. La pente de la tangente à l'origine est: $\Delta P/\Delta h \approx 10^5 \text{ Pa} / 8000 \text{ m} = 12.5 \text{ N m}^{-3}$. Or, en vertu de l'équation (1.21), en divisant cette valeur par celle de g , on obtient $\rho = 1.27 \text{ kg m}^{-3}$.



3. Le prolongement de la droite qui relie les sommets des colonnes de liquide au-dessus de la conduite, et qui sert à indiquer la pression, ne rejoint pas la surface libre du liquide dans la cuve (point A). Le pression à l'entrée de la conduite est donc inférieure à celle au fond de la cuve. La différence de pression a servi à accélérer le liquide à l'entrée de la conduite.
4. C'est la résistance à l'écoulement qui est responsable de la diminution de pression. Si l'on bouche l'extrémité de la conduite, il n'y a plus d'écoulement, et la pression dans la conduite est la même qu'au fond du récipient. Le niveau des colonnes de liquide dans les tubes verticaux est le même que dans le récipient.
5. En vertu de la loi des mailles de l'équation (1.24), la différence de pression de C à D* doit être la même qu'entre C et D. Finalement, avec l'équation (1.21), nous avons $\Delta P_{CD} = -\rho g|\Delta h|$. Notez que la différence est négative.

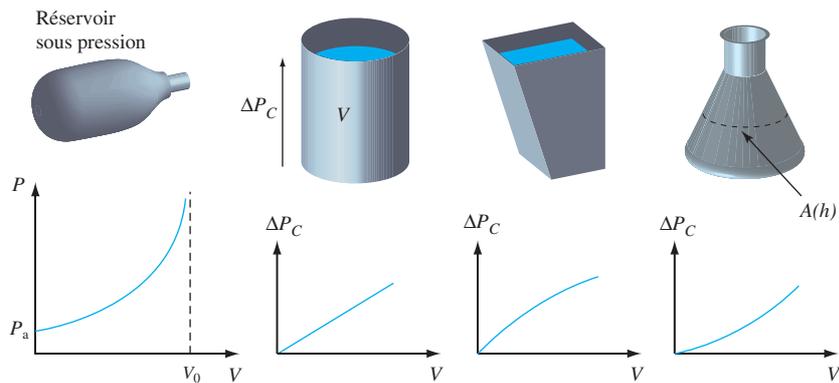
1.6 LOI DE CAPACITÉ HYDRAULIQUE

Les éléments de stockage sont responsables de la dynamique observée dans les systèmes hydrauliques. Nous devons donc être en mesure de donner une relation entre la quantité de fluide accumulée et la différence de pression engendrée. Les éléments de stockage peuvent être des cellules sous pression (telles que des accumulateurs à diaphragme, le cœur, les yeux, le crâne, etc.) ou des récipients qui «empilent» des fluides dans le champ de pesanteur terrestre.

1.6.1 Caractéristique capacitive

La pression dans un récipient augmente avec la quantité de fluide accumulée. La relation entre le volume stocké et la différence de pression associée, qui est appelée *différence de pression capacitive* ΔP_C , est elle-même appelée *caractéristique capacitive*. La figure 1.41 illustre cette notion par quelques exemples.

FIGURE 1.41 Caractéristique capacitive de différents récipients. La capacité hydraulique d'un récipient ouvert est proportionnelle à sa section (variable).



1.6.2 Élastance et capacité hydraulique

Il est possible de donner une expression mathématique de la caractéristique, c'est la loi de capacité.

La loi de capacité établit le lien entre la pression dans le fluide et son volume. Ce lien peut être exprimé au moyen de l'élastance α_V , qui est le facteur indiquant avec quelle facilité il est possible d'augmenter la pression avec une certaine quantité de fluide :

$$\dot{P}_C = \alpha_V \dot{V} \Leftrightarrow \alpha_V = \frac{\dot{P}_C}{\dot{V}} = \frac{dP}{dV} \quad (1.27)$$

$$\Delta P_C = \alpha_V \Delta V \quad \text{si } \alpha_V = \text{const}$$

Il est également possible de définir l'inverse de l'élastance, que l'on nomme capacité hydraulique C_V (dans le monde anglo-saxon, on la désigne par compliance). Cette grandeur indique avec quelle facilité il est possible d'augmenter le volume pour une augmentation de pression donnée.

$$\dot{V} = C_V \dot{P}_C \Leftrightarrow C_V = \frac{\dot{V}}{\dot{P}_C} = \frac{dV}{dP} \quad (1.28)$$

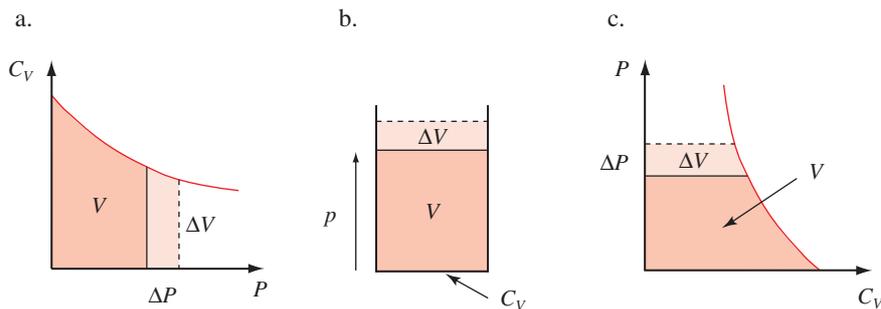
$$\Delta V = C_V \Delta P_C \quad \text{si } C_V = \text{const}$$

L'élastance α_V , qui se mesure en Pa m^{-3} , est égale à la pente de la tangente à la courbe représentant la caractéristique capacitive (fig. 1.42). Elle est une mesure de la tendance qu'a un organe creux à retourner vers ses dimensions originelles après la suppression d'une contrainte. Cela signifie que l'élastance mesure la rigidité des parois du récipient dans le cas des cellules sous pression. Pour les cuves, elle est proportionnelle à l'inverse de la section de la cuve, ce que nous pouvons déduire de l'équation (1.29).

Comme la pression dans une cuve ouverte remplie d'un liquide jusqu'à la hauteur h est égale à $P(h) = \rho gh = \rho gV(h)/A(h)$, on en déduit :

$$C_V = \frac{1}{\alpha_V} = \frac{A(h)}{\rho g} \quad (1.29)$$

L'équation suggère une manière de déterminer les variations de volume à partir des variations de pression si l'on connaît la capacité en fonction de la pression.



Pour une capacité constante (cuve à parois verticales), il suffit de multiplier la différence de pression par la capacité, ce qui correspond géométriquement à l'aire d'un rectangle. Nous pouvons en déduire que, de manière générale, la variation de volume associée à une variation de pression est égale à l'aire entre la fonction capacité - pression et l'axe de la pression (fig. 1.43a). Si l'on inverse les variables, l'aire en question correspond à une section verticale passant par l'axe de la cuve (fig. 1.43b et fig. 1.43c).

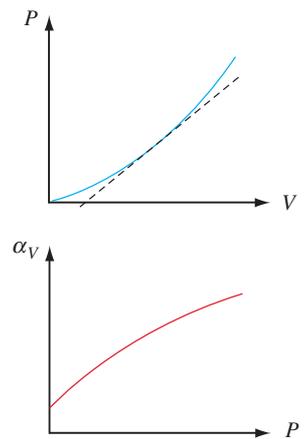


FIGURE 1.42 La pente de la tangente à la courbe de pression en fonction du volume accumulé est l'élastance α_V de l'élément de stockage. Généralement, l'élastance est une fonction de la pression.

FIGURE 1.43 Évaluation de la variation du volume engendrée par une variation de pression : (a) par intégration de la capacité sur la pression ; (b) et (c) : interprétation graphique : le volume accumulé est représenté par l'aire de la surface entre la courbe $P(C_V)$ et l'axe C_V .

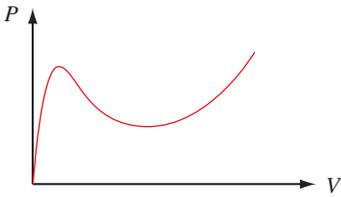


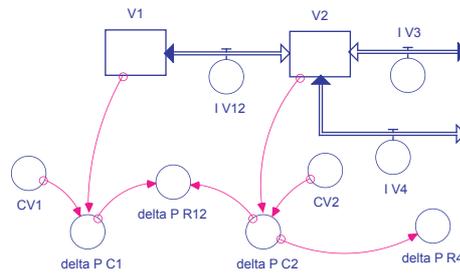
FIGURE 1.44 Caractéristique d'un ballon gonflable.

Si le récipient sous pression est fait de caoutchouc, comme par exemple un ballon d'enfant gonflable, la caractéristique $P-V$ de la figure 1.44 est beaucoup plus complexe que les cas traités ici, ce qui nous incite à utiliser de manière prudente les définitions de la capacité ou de l'élastance. L'application de la définition usuelle à la partie décroissante de la courbe donnerait une capacité négative, ce qui n'a pas de sens. Dans de tels cas, on doit travailler directement avec la caractéristique $P-V$ plutôt que d'utiliser les notions de capacité ou d'élastance.

1.6.3 Modélisation de la loi de capacité

La prise en compte de la capacité de chacun des deux récipients permet de calculer les deux pressions capacitives (fig. 1.45).

FIGURE 1.45 Introduction de la loi de capacité dans le circuit de la figure 1.25.



$$V1(t) = V1(t - dt) + (-I_{V12}) * dt$$

$$V2(t) = V2(t - dt) + (I_{V12} + I_{V3} - I_{V4}) * dt$$

$$\text{delta_P_C1} = V1/CV1$$

$$\text{delta_P_C2} = V2/CV2$$

$$\text{delta_P_R12} = -(\text{delta_P_C1} - \text{delta_P_C2})$$

$$\text{delta_P_R4} = -\text{delta_P_C2}$$

Notons que ces capacités peuvent être données en tant que valeur numérique, au moyen d'une équation telle que l'équation (1.29) pour la cuve 2, ou d'une table pour la cuve 1.

1. Quelle est la signification de la capacité hydraulique? Expliquez la différence entre des réservoirs qui stockent le liquide verticalement et des réservoirs sous pression pour des liquides et des gaz.
2. Pourquoi les courbes $P-V$ du premier et du dernier récipient de la figure 1.41 croissent-elles plus rapidement pour les grandes quantités de volume accumulé?
3. Quel est le profil du réservoir de liquide dont la capacité est représentée par la partie droite de la figure 1.43? Quelle est la signification de la distance horizontale entre l'axe P et la courbe $P-C_V$? À quoi cette grandeur est-elle proportionnelle?
4. La définition générale de la capacité met-elle en relation le volume et la pression, ou les variations de volume et celles de la pression? Est-ce que la capacité mesure ce qu'un système est capable de stocker?



1. La capacité hydraulique est la grandeur qui met en relation le taux de variation de la pression et la vitesse de variation du volume. Cette forme de la relation est également valable pour les réservoirs sous pression. Dans le cas de stockage de gaz à volume constant, il faut remplacer le volume par la quantité de gaz.
2. Dans le réservoir sous pression, la densité augmente avec l'apport de volume, ce qui fait croître la pression plus rapidement. Dans le cas du réservoir qui se rétrécit vers le haut, les mêmes variations de volume entraînent des variations de hauteur plus importantes au fur et à mesure que le contenu augmente à cause du rétrécissement.



- Le réservoir devient plus étroit au sommet. La distance horizontale dans le graphique est la capacité pour une pression donnée (du liquide au fond du réservoir). Elle est proportionnelle à la section du réservoir à cette hauteur.
- Elle met en relation les variations plutôt que les grandeurs elles-mêmes. Non, ce n'est pas le cas.

EXEMPLE 1.4. Réservoirs sous pression et écoulement.

Considérez un réservoir sous pression connecté par une conduite à une cuve à parois verticales (fig. 1.46). Cette cuve est ouverte à l'air qui a une pression de 1.0 bar. Le système contient une huile de masse volumique de 800 kg m^{-3} et de viscosité égale à 0.20 Pa s . La relation pression-capacité pour le réservoir sous pression est donnée dans le graphique de la figure 1.47. La section de la cuve est de 0.080 m^2 . La longueur et le rayon de la conduite mesurent 2.0 m et 0.020 m respectivement. (a) À un certain moment, le réservoir sous pression contient 0.15 m^3 d'huile, alors que la cuve en contient 0.20 m^3 . Dans quel sens l'huile s'écoule-t-elle? (b) Quel sera le niveau final de l'huile dans la cuve?

SOLUTION: (a) À partir de la courbe pression-capacité, nous calculons d'abord la pression du fluide dans le réservoir sous pression. Ensuite, nous déterminons le niveau et la pression de l'huile dans la cuve. La différence de pression nous permet de calculer le flux, pour autant que nous connaissions la résistance pour l'écoulement à travers la conduite, ce qui est le cas grâce à la loi de HAGEN-POISEUILLE (section 1.7.2).

La pression la plus basse possible dans le réservoir sous pression est 10^5 Pa . Nous calculons le volume de fluide contenu dans ce réservoir au moyen de l'aire entre la courbe pression-capacité et l'axe vertical, commençant à $P_a = 10^5 \text{ Pa}$ (fig. 1.43). Vu que la capacité est donnée par une fonction linéaire, à savoir

$$(P) = C_v (P_a) - a(P - P_a), \quad C_v (P_a) = 4.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}, \quad a = 4.0 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-2}$$

le calcul est simple (nous pouvons le lire dans le graphique):

$$V(P_r) = \frac{1}{2} (C_v (P_a) + C_v (P_r)) (P_r - P_a) \Rightarrow P_r = 1.50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Ici, P_r indique la pression dans le réservoir sous pression. La pression P_c du fluide au fond de la cuve peut être calculée au moyen de la capacité de ce récipient:

$$C_v = \frac{A}{\rho g} = \frac{0.080 \text{ m}^2}{800 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-1}} = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1} \Rightarrow P_c = 1.20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

On voit donc que l'huile doit s'écouler du réservoir sous pression vers la cuve.

(b) L'huile va s'écouler du réservoir sous pression vers la cuve jusqu'à ce que la pression du fluide dans chacun d'eux soit la même. L'issue de ce processus peut être représentée dans le diagramme pression-capacité. Vu que les variations de volume associées aux variations de pression apparaissent en tant qu'aires (fig. 1.48), nous voyons que la pression finale sera celle qui rend égales les valeurs absolues des variations de volume (bilan de volume):

$$\Delta V_r = -\Delta V_c$$

Ces variations peuvent maintenant être exprimées en termes de variations de pression:

$$\frac{1}{2} (C_{vr} (P_{ri}) + C_{vr} (P_{rf})) (P_{ri} - P_{rf}) = -C_{vc} (P_{ri} - P_{rf})$$

où p_f est la pression atteinte finalement. La résolution de l'équation donne $P_f = 126 \text{ kPa}$, ce qui donne une valeur finale de 0.260 m^3 d'huile dans la cuve. ■

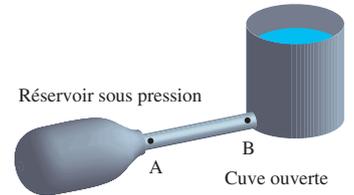


FIGURE 1.46 Réservoir sous pression connecté à une cuve à parois verticales.

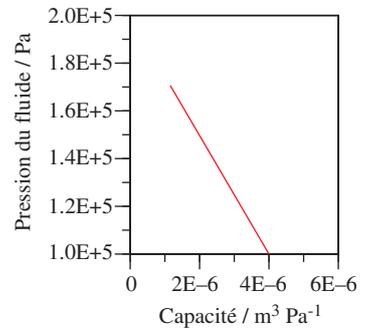


FIGURE 1.47 Relation pression-capacité pour le réservoir sous pression.

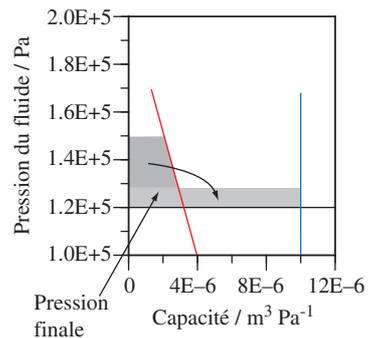


FIGURE 1.48 Visualisation des variations de volume en tant qu'aires dans la caractéristique pression-capacité.

1.7 COURANTS: FORCE D'ENTRAÎNEMENT ET RÉSISTANCE

À l'intérieur d'un fluide, la pression peut varier pour plusieurs raisons; l'une d'elles est le frottement. Lorsqu'un fluide s'écoule horizontalement, on observe une diminution de la pression dans le sens de l'écoulement (partie droite de la figure 1.37). On dit qu'un gradient de pression s'établit à cause de la résistance lorsque l'on force un fluide à travers une conduite.

1.7.1 Caractéristique de flux

Il existe une relation entre le flux volumique à travers la conduite et la chute de pression le long de celle-ci. Cette relation variera d'une circonstance à l'autre. Elle dépendra de l'intensité du courant, des propriétés du fluide, des caractéristiques de la conduite (dimensions, rugosité) et du type d'écoulement (laminaire ou turbulent, percolation). Cette relation peut être illustrée par un graphique qui exprime le flux volumique en fonction de la différence de pression. Un tel diagramme est appelé *caractéristique de flux* ou *caractéristique courant-pression* (*caractéristique $I_V - \Delta P$*), ou encore *caractéristique résistive*.

1.7.2 Force d'entraînement et résistance hydraulique

La figure 1.49 montre deux exemples de caractéristique $I_V - \Delta P$ pour des liquides s'écoulant en régime stationnaire à travers une conduite. Il existe une description simple de la relation entre le flux et la différence de pression. Elle résulte de l'action antagoniste de la *force d'entraînement* et de la *résistance*. Plus la force d'entraînement,

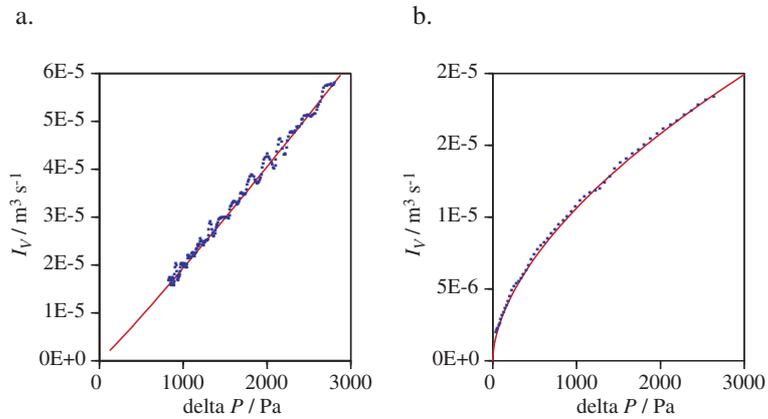


FIGURE 1.49 Caractéristique de flux : (a) pour un écoulement laminaire (huile dans un tube); (b) pour un écoulement turbulent (eau dans un tube).

c'est-à-dire la différence de pression, est importante, plus le flux est important. Plus la résistance est importante, plus le courant est faible. Nous devons fondamentalement faire la distinction entre deux types d'écoulement: laminaire ou turbulent. Usuellement, le passage du régime laminaire au régime turbulent se produit lorsqu'une certaine combinaison de la vitesse d'écoulement, de la viscosité du fluide, de sa densité et des dimensions de la conduite, le *nombre de REYNOLDS* (section 9.10.2), dépasse une valeur critique.

Écoulement laminaire. Pour un tel écoulement, la caractéristique est linéaire. Dans ce cas, nous pouvons formuler cette relation en nous servant de la notion de *conductance*. Le courant est considéré comme le résultat de l'action de la force d'entraînement et

d'un facteur qui nous indique avec quelle facilité le fluide est transféré. Cette image peut être exprimée comme suit:

Lorsque les frottements dans le fluide provoquent une chute de pression dans la direction de l'écoulement, il est possible d'exprimer le flux de fluide au moyen d'un terme qui exprime la force d'entraînement, à savoir la différence de pression le long de l'écoulement, et d'un facteur appelé conductance G_V :

$$I_V = -G_V \Delta P_R \quad (1.30)$$

ou, de manière équivalente,

$$I_V = -\frac{1}{R_V} \Delta P_R \quad (1.31)$$

où $R_V = 1/G_V$ est la résistance hydraulique .

ΔP_R est la chute de pression dans la direction de l'écoulement due à l'action des frottements. On se rend compte que la résistance R_V doit se mesurer en Pa s m^{-3} et que la conductance G_V doit l'être en $\text{m}^3 \text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Écoulement laminaire et loi de Hagen–Poiseuille. Le genre d'écoulement a une grande influence sur la relation entre le flux et la chute de pression, comme le montre le graphique de la fig. 1.49. Nous allons restreindre notre attention à des écoulements à travers des conduites de diamètre constant, et à des écoulement stationnaires. Stationnaire signifie que les propriétés de l'écoulement n'évoluent pas dans le temps. Dans une conduite, un écoulement est laminaire si sa vitesse est faible. Notons en passant que la vitesse d'écoulement moyenne \bar{v} pour une section A donnée, est liée à l'intensité du flux I_V par la relation:

$$I_V = A\bar{v} \quad (1.32)$$

On peut observer un écoulement laminaire dans les premiers centimètres de la colonne de fumée qui s'élève d'une cigarette. Si nous pouvions voir les lignes de courant, nous constaterions qu'elles sont parallèles, qu'elles ne se mélangent pas. Lorsque la vitesse de l'écoulement augmente, il y a une brusque transition vers un mouvement chaotique, au cours duquel le fluide est vigoureusement brassé: c'est le régime turbulent. Si tous les autres paramètres sont maintenus constants, l'apparition de la turbulence dépend de la viscosité du fluide: plus le fluide est visqueux, moins l'écoulement aura tendance à basculer en régime turbulent. La viscosité de l'eau est tellement faible qu'elle s'écoule pratiquement toujours en régime turbulent, même pour des valeurs relativement faibles de la vitesse d'écoulement. Le tableau 1.1 donne la liste des valeurs de la viscosité pour un certain nombre de fluides.

L'expérience montre qu'en régime laminaire, la relation entre le flux et la chute de pression est linéaire, comme on le voit dans la partie gauche de la figure 1.49. On s'attend à ce que la conductance dépende du rayon et de la longueur de la conduite, et de la viscosité du fluide. Nous montrerons dans l'exemple 9.16 du chapitre 9 que la conductance et la résistance sont, dans ce cas, données par la *loi de HAGEN-POISEUILLE*:

TABLEAU 1.1 Viscosité à 20°C.

Fluide	Viscosité $\eta / \text{Pa s}$
Huile de ricin	0.99
Glycérine	1.48
Huile d'olive	0.081
Mercure	0.00155
Eau	0.00100

$$G_v = \frac{\pi r^4}{8\eta l} = \frac{\pi d^4}{128\eta l} \tag{1.33}$$

Dans ces expressions, η représente la viscosité du fluide, r , d et l sont respectivement le rayon, le diamètre et la longueur de la conduite. Nous donnerons à la section 9.10, exemple 9.16, une dérivation de cette relation qui montre qu'un fluide de viscosité nulle serait un fluide parfait.

Écoulement turbulent. Notez que l'écoulement, qui a une caractéristique linéaire dans la figure 1.49, a une conductance (ou une résistance) constante, alors que pour l'écoulement turbulent, la résistance varie en fonction de la différence de pression.

Lors d'un écoulement à travers une conduite, la turbulence apparaît si une certaine combinaison de la vitesse du fluide, du diamètre de la conduite et de la viscosité du fluide dépasse une valeur critique. Ainsi, pour une conduite et un fluide donnés, la vitesse est un facteur décisif. La transition entre les deux régimes dépend elle aussi de circonstances qui sont difficiles à saisir; pour n'en citer qu'une, la rugosité de la conduite intervient en tant que facteur. La différence entre le régime laminaire et le régime turbulent peut être observée simplement dans la fumée s'élevant d'une cigarette (fig. 1.50).

FIGURE 1.50 Colonne de fumée s'élevant d'une cigarette. Sur les premiers centimètres, l'écoulement est laminaire, puis on assiste à la transition progressive vers le régime turbulent.



Sur les premiers centimètres au-dessus du tabac incandescent, nous observons une colonne de fumée bien droite, ce qui signifie que les particules de fumée suivent des trajectoires parallèles qui ne se croisent pas. Par contre, dans la zone turbulente plus haut dans la colonne de fumée, les différentes parties de l'écoulement sont violemment mélangées. Nous ne voulons pas entrer en détail dans ce sujet. Signalons simplement que ces relations sont souvent présentées sous forme graphique ou tabulaire.

Lors d'un écoulement turbulent, l'intensité du courant de volume n'est pas proportionnelle à la différence de pression entre les extrémités de la conduite, mais croît moins rapidement. En première approximation, la fonction racine carrée suffit pour exprimer la caractéristique d'un tel écoulement :

$$I_v = k\sqrt{|\Delta P|} \tag{1.34}$$

Le facteur k , appelé *facteur d'écoulement turbulent*, est semblable à une conductance. Cependant, les termes de conductance et de résistance sont réservés à l'écoulement laminaire.

La figure 1.51 illustre l'influence des particularités de la conduite et du fluide sur les écoulements au moyen de la caractéristique courant-pression. La courbe inférieure est liée à un écoulement en régime laminaire qui se distingue par la proportionnalité entre la différence de pression et l'intensité du flux. Les deux autres courbes sont les caractéristiques d'écoulements turbulents au cours desquels l'intensité du flux ne croît plus proportionnellement à la différence de pression, mais approximativement à la racine carrée de cette différence de pression.

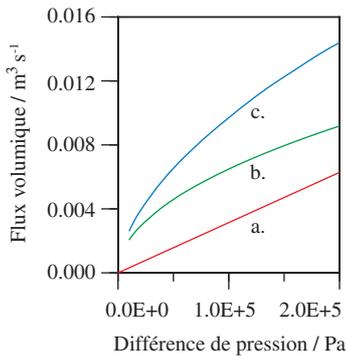


FIGURE 1.51 Caractéristique de flux pour différents écoulements à travers la même conduite (longueur 10.0 m, rayon 0.020 m): (a) huile (masse volumique 800 kg m⁻³, viscosité 0.20 Pa s) en régime laminaire; (b) eau (viscosité 0.0010 Pa s) en régime turbulent, conduite rugueuse; (c) conduite lisse.

Modélisation de la loi de résistance. Nous pouvons maintenant compléter le diagramme de dynamique des systèmes pour le circuit de la figure 1.25 en y introduisant les résistances des conduites (que nous pouvons calculer au moyen de l'équation (1.33), si nous admettons qu'il s'agit d'un écoulement laminaire). Finalement, nous pouvons calculer les deux intensités de courant à travers les tubes 1 et 2 en utilisant l'équation (1.31).

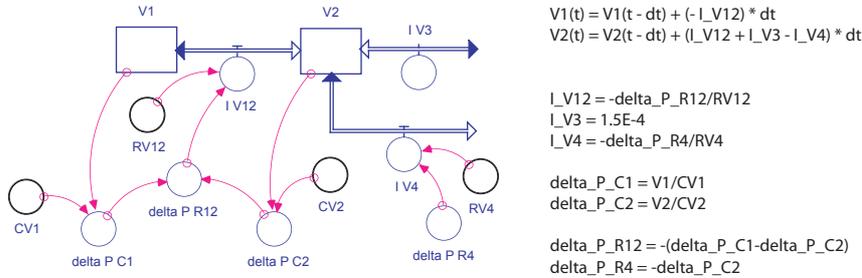


FIGURE 1.52 Intégration de la loi de résistance dans le modèle du système de la figure 1.25. Le modèle est complet et peut être validé, c'est-à-dire que les résultats qu'il fournit peuvent être comparés aux données expérimentales.

Pour compléter le modèle, il faut introduire les caractéristiques matérielles du système, c'est-à-dire les dimensions géométriques des récipients ainsi que la densité du fluide pour évaluer les capacités, les paramètres des conduites et la viscosité du liquide pour les résistances, ainsi que les valeurs initiales des volumes.

La figure 1.53 compare les résultats de la simulation pour deux situations différentes. La première correspond aux cuves représentées dans la figure 1.25, la cuve 1 en forme de pyramide tronquée inversée; les courbes d'évolution des niveaux sont étiquetées h_1 et h_2 . La deuxième simulation est celle que l'on obtient avec deux réservoirs cylindriques identiques; les courbes d'évolution des niveaux sont étiquetées h_1^* et h_2^* . On remarque que les deux niveaux se rapprochent plus rapidement l'un de l'autre dans le premier cas. Cela est dû au fait que l'élargissement vers le haut de la cuve 1 augmente sa capacité en vertu de l'équation (1.29) et que, par conséquent, la pression capacitive engendrée par cette cuve décroît moins rapidement. La différence de pression à disposition pour l'entraînement du fluide vers la cuve 2 est donc plus importante, ce qui explique pourquoi les niveaux des deux cuves se rapprochent plus rapidement que dans le cas de deux cuves à parois verticales.

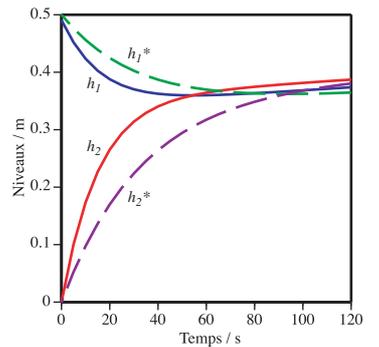


FIGURE 1.53 Résultats de la simulation du modèle du système de la figure 1.25. Les courbes étiquetées h_1 et h_2 correspondent aux récipients de la figure, les courbes discontinues étiquetées avec un astérisque à des récipients à parois verticales.

Notons également que la variation du niveau de la cuve 1 s'inverse après quelques dizaines de secondes. C'est la conséquence du fait que la cuve 2 est alimentée par le flux constant I_{V3} qui est plus important que les déperditions dues au flux I_{V4} . Le sens de circulation du flux I_{V12} entre les deux cuves s'inverse, ce qui explique l'augmentation du niveau de la cuve 1.

1.7.3 Variation de pression liée à la variation de vitesse: effet BERNOULLI

Nous voulons expliquer la diminution de pression qui apparaît à l'entrée de la conduite de la figure 1.37. Pour ce faire, nous mesurons les pressions aux points A et C durant le processus de vidange de la cuve (fig. 1.54). Les hauteurs de la colonne de liquide aux deux endroits peuvent être converties en pression. La pression au point B peut être obtenue par extrapolation.

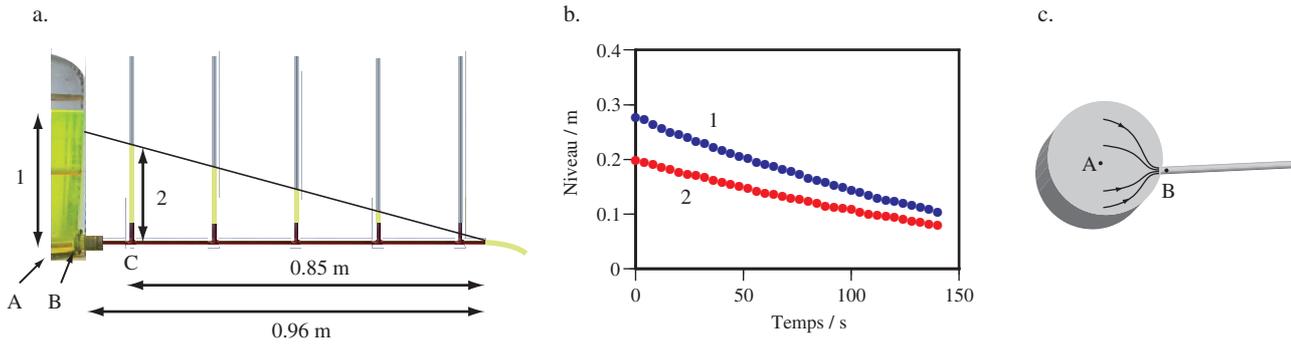


FIGURE 1.54 Vidange d'un réservoir à travers une conduite fine: (a) mesure de la pression; (b) pression aux points A et C; (c) illustration de l'origine de la différence de pression entre A et B: le fluide doit être mis en mouvement pour pouvoir s'écouler à travers la conduite.

Comme il n'y a qu'un seul flux, son intensité peut être déterminée indirectement à partir du taux de variation du volume contenu dans le récipient (courbe 1 dans le diagramme central de la figure 1.54). La vitesse d'écoulement se calcule à partir de la relation

$$I_V = AV \tag{1.35}$$

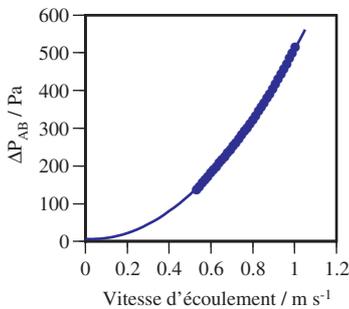


FIGURE 1.55 Différence de pression à l'entrée de la conduite en fonction de la vitesse d'écoulement. L'ajustement aux données d'une fonction quadratique est quasi parfait.

Après lissage des données, qui sont fortement entachées de bruit à cause de la méthode de mesure relativement imprécise, on reporte la différence de pression entre A et B en fonction de la vitesse d'écoulement (fig. 1.55). On voit immédiatement que cette relation n'est pas linéaire et que la courbe doit passer par l'origine (pour une vitesse d'écoulement nulle, la différence de pression entre A et B doit l'être aussi). La relation la plus simple qui satisfait cette condition est une relation quadratique. Un ajustement selon la méthode des moindres carrés ($\Delta P_{AB} \propto v^2$), révèle que le coefficient de proportionnalité est égal à $512 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$, une valeur numérique qui correspond à peu de chose près à la moitié de celle de la densité de l'eau qui était le liquide qui s'écoulait. Nous nous attendons donc à ce que la relation entre la variation de pression à l'entrée de la conduite soit donnée par:

$$\Delta P_{AB} = -\rho \frac{v^2}{2} \tag{1.36}$$

Ce résultat correspond à celui que nous trouverons au chapitre 8 (section 8.6, exemple 8.6) sur la base de considérations théoriques. C'est un cas particulier d'un résultat plus général dérivé à l'origine par Daniel BERNOULLI (1700-1782), raison pour laquelle on parle d'*effet BERNOULLI*.

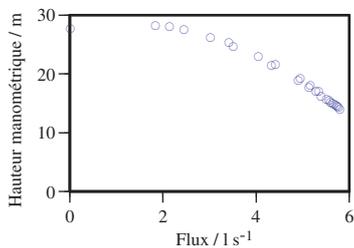


FIGURE 1.56 Caractéristique d'une pompe réelle (celle d'une pompe idéale serait une droite horizontale). La pression à la sortie de la pompe est indiquée en tant que hauteur d'une colonne d'eau.

1.7.4 Pompes

Une pompe engendre une différence de pression entre son entrée et sa sortie pour mettre en mouvement le fluide qui la traverse. Une pompe idéale produirait une différence de pression constante. Mais les pompes réelles ont une caractéristique différente (fig. 1.56), à cause de la résistance à l'écoulement. La diminution de la pression lorsque le débit augmente s'explique par le fait que la résistance à l'écoulement augmente avec l'intensité du flux. Une partie de la différence de pression disponible sert simplement à transporter le fluide à travers la pompe.

Production de chaleur dans les écoulements avec frottement. Dans un écoulement résistif, l'unique conséquence du processus est la production de chaleur. C'est

pourquoi nous pouvons dire que la résistance des fluides est associée au phénomène de *dissipation*, un autre terme pour la production de chaleur (chap. 3).

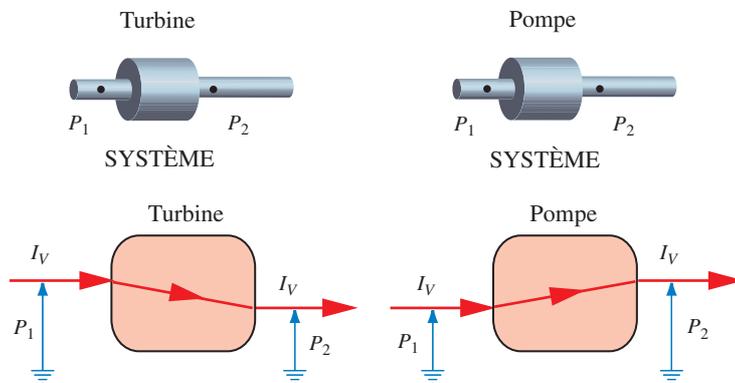
Nous pouvons maintenant répondre à la question de savoir s'il existe des conditions dans lesquelles un écoulement horizontal ne nécessite aucune différence de pression. Nous voyons, à partir de l'équation (1.31), que la résistance hydraulique devrait être nulle. De tels fluides n'existent pas, mais nous pouvons les imaginer. De telles abstractions sont appelées des *fluides parfaits*.

1.7.5 Démarrage et arrêt d'un courant de fluide

Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que des situations au cours desquelles l'intensité du flux était dictée par trois différences de pression, la pression capacitive, la pression résistive et la pression engendrée par une pompe. Nous avons ignoré les processus qui se manifestent lors du démarrage d'un écoulement (ouverture d'un robinet, enclenchement d'une pompe) ou lors de son interruption (fermeture d'un robinet). Or, l'observation révèle que lors de la mise en route d'un courant de fluide, l'intensité du flux ne passe pas instantanément d'une valeur nulle à sa valeur stationnaire et qu'elle ne tombe pas instantanément à zéro lors de la fermeture d'un robinet. La variation est progressive, et nous étudierons de manière détaillée au chapitre 4 le phénomène particulier lié à ces variations d'intensité, le phénomène d'*induction*.

1.7.6 Diagrammes de processus

Les écoulements et les niveaux nous permettent de dessiner des diagrammes de processus pour des dispositifs hydrauliques fondamentaux tels que des turbines et des pompes (fig. 1.58), et des conduites (fig. 1.57).



Les diagrammes de processus sont des instantanés: ils ne montrent pas l'évolution du système, mais représentent plutôt les conditions qui règnent à un instant donné à un ou plusieurs endroits d'un système ou d'un système combiné. En général, ils ne sont pas directement utilisables pour les calculs. Leur force réside dans le fait qu'ils représentent de manière simple les processus les plus importants. Ils sont un instrument qui nous permet de parler de manière cohérente du problème à résoudre en nous guidant dans l'utilisation d'une vision systémique des processus physiques. Les diagrammes de processus nous seront particulièrement utiles lorsque nous intégrerons l'énergie dans la description des processus.

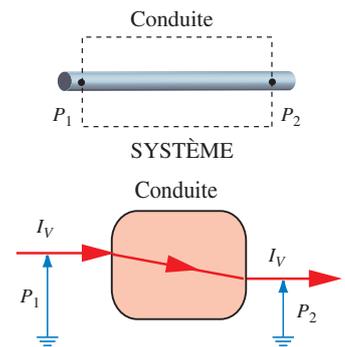


FIGURE 1.57 Diagramme de processus d'un écoulement à travers une conduite résistive. Le fluide s'écoule d'un point de pression élevée à un point de pression basse.

FIGURE 1.58 Diagrammes de processus pour une turbine et une pompe. Les diagrammes montrent les écoulements et les niveaux, et indiquent si l'écoulement monte ou descend par rapport au niveau hydraulique. Des écoulements qui descendent la pente sont spontanés: ils entraînent d'autres processus. Ceux qui remontent la pente sont contraints: on doit les entraîner.

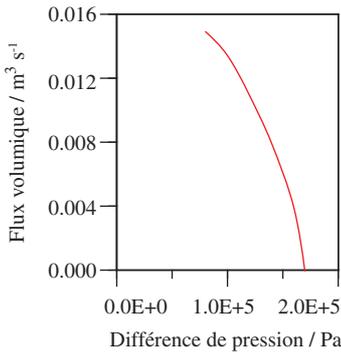


FIGURE 1.59 Caractéristique d'une pompe.

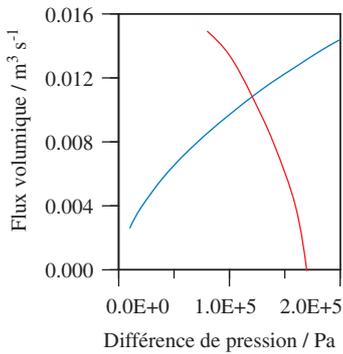


FIGURE 1.60 Superposition des caractéristiques.

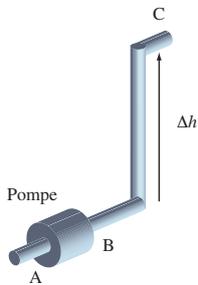


FIGURE 1.61 Pompage à travers une conduite verticale.

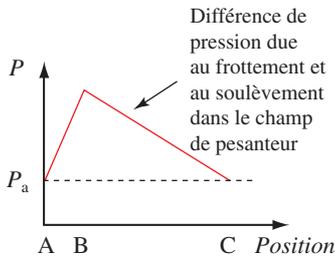


FIGURE 1.62 Évolution de la pression dans le circuit de la figure 1.61.

1. Des dispositifs techniques tels que des pompes ont également une caractéristique $I_V - \Delta p$: si tous les autres facteurs sont maintenus constants, l'écoulement dépend de la différence de pression entre l'entrée et la sortie du dispositif. Serait-il sensé d'introduire une résistance pour décrire les phénomènes associés à de tels dispositifs?



2. Une pompe est connectée à la conduite horizontale lisse de caractéristique décrite par la courbe (c) de la figure 1.51. La caractéristique $I_V - \Delta p$ de cette pompe apparaît dans la figure 1.59. Quelles valeurs prendront les différences de pression et les flux dans le système?

3. Lors d'un écoulement laminaire, deux conduites identiques en parallèle ont-elles une résistance plus faible qu'une conduite dont on a doublé la section?

1. Non, ce n'est pas sensé. On introduit une résistance pour décrire les effets des frottements sur l'écoulement, qui entraînent une production de chaleur. Ces phénomènes n'ont rien à voir avec ce qui se produit dans une pompe ou une turbine.



2. La différence de pression sur la pompe doit avoir la même valeur absolue que la chute de pression sur la conduite. Pour répondre aux questions, nous superposons les caractéristiques de la conduite et de la pompe (fig. 1.60). Les valeurs cherchées se trouvent à l'intersection des deux courbes (respectivement $1.2 \cdot 10^5$ Pa et 0.011 m³ s⁻¹).

3. Selon la loi de HAGEN-POISEUILLE dans l'équation (1.33), en doublant la section, on réduit la résistance d'un facteur quatre. Par contre, la mise en parallèle de deux conduites ne la diminue que de moitié.

EXEMPLE 1.5. Pompage d'eau à travers une conduite rugueuse.

De l'eau est pompée 5 m plus haut à travers la conduite rugueuse de 10 m de longueur et de 2 cm de rayon (fig. 1.61), dont la caractéristique est donnée par la courbe (b) de la figure 1.51. On souhaite avoir un flux de 8 L s⁻¹. (a) Quelle différence de pression la pompe doit-elle fournir pour un écoulement stationnaire? (b) Calculez la conductance et la résistance. (c) Que vaut la vitesse moyenne d'écoulement à travers une section de la conduite? d) Si l'écoulement était encore laminaire, le flux serait plus élevé ou moins élevé pour la différence de pression donnée?

SOLUTION: (a) Nous utilisons tout d'abord la loi des mailles énoncée dans l'équation (1.24) pour une boucle fermée allant de A à B, puis C, et retournant à A par les airs. La pression du fluide croît de A à B (c'est la valeur que nous devons déterminer), puis décroît à la valeur P_a entre B et C. La chute de pression est due à deux processus: il faut surmonter la résistance à l'écoulement et soulever le fluide dans le champ gravitationnel:

$$\Delta P_p + \Delta P_R + \Delta P_h = 0$$

où ΔP_p et ΔP_h sont les variations de pression dues respectivement à la pompe et à au soulèvement vertical (fig. 1.62): Pour ΔP_R nous consultons la caractéristique d'écoulement (courbe (b) de la figure 1.51). Un flux de 8 L s⁻¹ correspond à 0.0080 m³ s⁻¹, ce qui nous donne une valeur de $-1.5 \cdot 10^5$ Pa pour la chute de pression due au frottement. Pour ΔP_h nous avons

$$\Delta P_h = -\rho g |\Delta h| = -1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9.81 \text{ Pa m}^2 \text{ kg}^{-1} \cdot 5.0 \text{ m} = -4.9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

La pompe doit donc élever la pression du fluide de $1.99 \cdot 10^5$ Pa = 1.99 bar.

(b) Nous obtenons la conductance et la résistance en utilisant les lois correspondantes énoncées dans les équations (1.30) ou (1.31):

$$G_V = \frac{I_V}{\Delta P_R} = \frac{0.0080 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}}{1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 5.33 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \Rightarrow R_V = 1.88 \cdot 10^7 \text{ Pa s m}^{-3}$$

(c) L'équation (1.32) donne

$$\bar{v} = \frac{I_V}{A} = \frac{I_V}{\pi r^2} = \frac{0.0080 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}}{\pi \cdot 0.020^2 \text{ m}^2} = 6.4 \text{ m s}^{-1}$$

d) Pour un écoulement laminaire, nous pouvons calculer la conductance (ou la résistance) à partir de l'équation (1.33). Avec l'équation (1.30) nous obtenons

$$I_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta P_R = \frac{\pi \cdot 0.020^4 \text{ m}^4}{8 \cdot 0.0010 \text{ Pa s} \cdot 10 \text{ m}} 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0.94 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

La viscosité a été tirée du tableau 1.1. La valeur du flux est approximativement 100 fois plus grande que celle que l'on mesurerait. Nous avons sous-estimé la résistance d'un facteur 100. ■

EXEMPLE 1.6. Montage de conduites en série et en parallèle pour un écoulement laminaire.

Déterminez les relations pour la résistance hydraulique de deux conduites montées respectivement en parallèle ou en série (fig. 1.63), pour un écoulement laminaire. Négligez l'influence des coudes et des raccords dans les montages de conduites.

SOLUTION: pour un montage en parallèle, ΔP_R a la même valeur pour les deux conduites, alors que le courant total est la somme des deux courants. Ainsi :

$$R_V = \frac{\Delta P_R}{I_V} = \frac{\Delta P_R}{I_{V1} + I_{V2}} = \left(\frac{I_{V1} + I_{V2}}{\Delta P_R} \right)^{-1} = \left(\frac{I_{V1}}{\Delta P_R} + \frac{I_{V2}}{\Delta P_R} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Pour obtenir la résistance équivalente du montage en parallèle de conduites, nous devons additionner les inverses des résistances individuelles, puis calculer l'inverse de la somme.

Pour des conduites montées en série, nous procédons de manière analogue. Ici, le courant est le même pour les deux conduites, alors que la chute de pression totale est la somme des valeurs individuelles:

$$R_V = \frac{\Delta P_R}{I_V} = \frac{\Delta P_{R1} + \Delta P_{R2}}{I_V} = \frac{\Delta P_{R1}}{I_V} + \frac{\Delta P_{R2}}{I_V} = R_{V1} + R_{V2}$$

La résistance totale est la somme des résistances individuelles. Notez que ces résultats sont valables, sous une forme équivalente, pour un nombre quelconque de conduites. ■

1.8 MODÉLISATION DE QUELQUES PROCESSUS HYDRAULIQUES

L'objectif de cette section est d'illustrer et de mettre en pratique ce que nous avons découvert en cours de chapitre. Pour le faire, nous allons modéliser trois systèmes et processus hydrauliques simples, la vidange d'un récipient à parois verticales, son

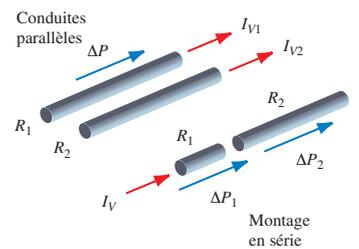


FIGURE 1.63 Montage de conduites en parallèle et en série.

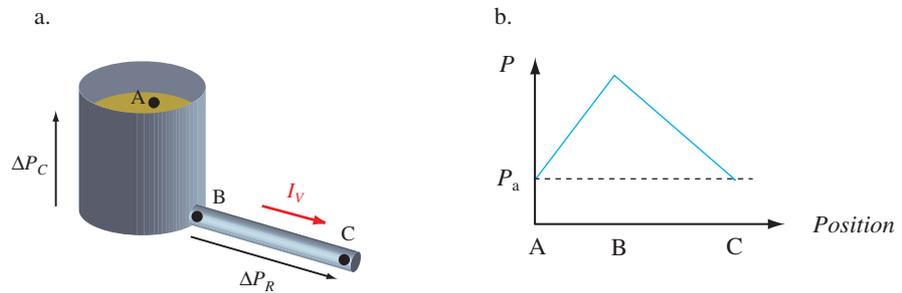
remplissage par une pompe, le système appelé windkessel et la migration d'un fluide à travers une chaîne de récipients.

Dans les deux premiers exemples, nous modéliserons le processus au moyen de Stella, puis nous résoudrons le même problème au moyen des méthodes de l'analyse mathématique,

1.8.1 Vidange d'un réservoir à parois verticales

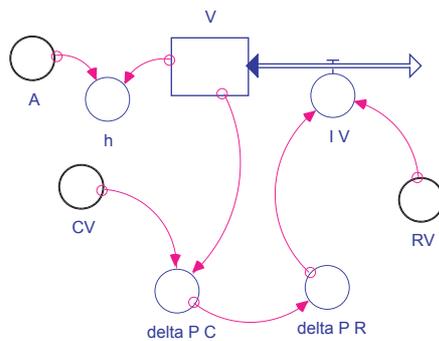
Élaboration du modèle et simulation. Nous voulons modéliser l'écoulement d'une huile visqueuse s'échappant d'une cuve à parois verticales à travers une conduite horizontale connectée au fond de la cuve, comme le montre la partie gauche de la figure 1.64. Les caractéristiques du système (récipient, conduite, fluide) ont été mesurées et une expérience a permis d'enregistrer l'évolution du processus, pour nous permettre de comparer notre modèle à la réalité.

FIGURE 1.64 Vidange d'un récipient à parois verticales; (a) système; (b) évolution de la pression en fonction de la position.



À partir des équations (1.29) et (1.33), nous pouvons calculer la capacité du récipient et la résistance de la conduite. L'évolution de la pression est représentée graphiquement dans la partie de la figure 1.64. Le diagramme de dynamique des systèmes apparaît dans la figure 1.65.

FIGURE 1.65 Diagramme de dynamique des systèmes du processus de vidange du système de la figure 1.64. Dans la partie droite de la figure, les équations qui sont utilisées pour simuler l'évolution du processus. La première équation est la version numérique du bilan; c'est la seule équation qui est écrite automatiquement par le logiciel lorsque l'on dessine le stock et le flux qui symbolisent le bilan. Les autres équations décrivent les particularités du système.



$$\begin{aligned}
 V(t) &= V(t - dt) + (-I_V) * dt \\
 \text{INIT } V &= A * h_0 \\
 \Delta P_C &= V / CV \\
 \Delta P_R &= -\Delta P_C \\
 I_V &= -\Delta P_R / RV \\
 CV &= A / (\rho * g) \\
 RV &= 8 * \eta * l / (\pi * r^4) \\
 h &= V / A \\
 A &= \pi * 0.1^2 \\
 h_0 &= 0.325 \\
 \eta &= 8.09E-2 \\
 g &= 9.81 \\
 l &= 1.05 \\
 r &= 0.0081 \\
 \rho &= 915
 \end{aligned}$$

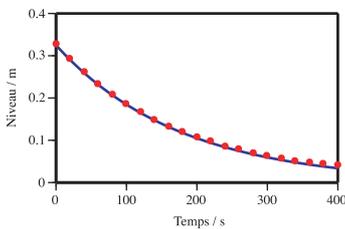


FIGURE 1.66 Résultat de la simulation du modèle de la figure 1.65 (ligne continue) comparé aux données expérimentales (points). L'accord est pratiquement parfait.

La comparaison entre la simulation du modèle et les données expérimentales (figure 1.66) révèle un correspondance quasi parfaite. Cela signifie que notre hypothèse au sujet de la proportionnalité entre le flux et la différence de pression sur la conduite était correcte. Cette hypothèse se serait révélée fautive si le fluide avait été de l'eau (section 1.8.7).

Recherche de la solution analytique. Le modèle repose sur l'énoncé du bilan. Si nous parcourons le système de A vers C, l'évolution de la pression est celle qui est donnée dans la figure 1.64b. Le flux émerge du système, il doit donc être compté négativement dans l'équation de bilan:

$$\dot{V} = -I_V \quad (1.37)$$

Les lois constitutives sont respectivement la loi de capacité :

$$\Delta P_C = \frac{V}{C_V} \quad (1.38)$$

et la loi de résistance :

$$I_V = -\frac{\Delta P_R}{R_V} \quad (1.39)$$

Ces deux lois constitutives sont liées entre elles par la loi des mailles :

$$\Delta P_R = -\Delta P_C \quad (1.40)$$

En combinant les équations (1.37) à (1.40), nous obtenons :

$$\dot{V} = -I_V = \frac{\Delta P_R}{R_V} = -\frac{\Delta P_C}{R_V} = -\frac{V}{R_V C_V}$$

ce qui donne finalement :

$$\dot{V} + \frac{V}{R_V C_V} = 0 \quad (1.41)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre (ou homogène). Nous observons que la dérivée de la fonction inconnue $V(t)$ est proportionnelle à la fonction elle-même. Seule une exponentielle a cette particularité. Nous posons donc en tant que fonction d'essai :

$$V(t) = A e^{\alpha t}$$

En substituant la dérivée première de cette fonction d'essai dans l'équation différentielle (1.41), nous trouvons que :

$$\alpha = -\frac{1}{R_V C_V}$$

À partir de la condition initiale, $V(t=0) = V_0$, nous trouvons que $A = V_0$, ce qui nous permet de conclure que :

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{R_V C_V}} \quad (1.42)$$

La diminution du volume lors de la vidange d'un récipient à parois verticales est donc de type exponentiel.

1.8.2 Constante de temps du processus

L'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle (1.41) ou de l'exposant de la solution (1.42) nous permet de conclure que le produit $R_V C_V$ a les dimensions d'un

temps. Pour en obtenir la signification, nous dérivons l'équation (1.42) par rapport au temps :

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \left(V_0 e^{-\frac{t}{R_V C_V}} \right) = -\frac{1}{R_V C_V} V_0 e^{-\frac{t}{R_V C_V}} = -\frac{1}{\tau_c} V_0 e^{-\frac{t}{R_V C_V}}$$

À l'instant $t = 0$, la dérivée est égale à :

$$\dot{V}(t = 0) = -\frac{V_0}{\tau_c}$$

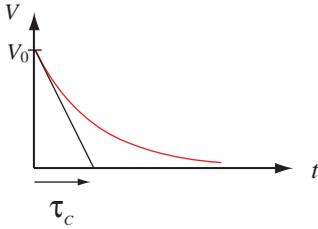


FIGURE 1.67 La constante de temps du processus correspond au segment de l'axe du temps entre l'origine et l'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente à l'origine de la courbe .

Or, la valeur de la dérivée est égale à la pente de la tangente, dans le cas particulier, celle de la tangente à l'origine de la courbe d'évolution du processus, ce qui nous permet de donner une interprétation graphique de la signification du produit $R_V C_V$. Il s'agit, sur l'axe du temps de la figure 1.67, de la base du triangle rectangle dont la tangente à l'origine de la courbe est l'hypoténuse et le segment d'ordonnée de longueur V_0 est le second côté.

On appelle *constante de temps résisto-capacitive du processus de vidange* la grandeur :

$$\tau_c = R_V C_V \tag{1.43}$$

Elle caractérise la rapidité d'évolution d'un processus modélisé par une fonction exponentielle. Elle correspond à la durée du processus s'il se déroulait à régime constant, c'est-à-dire avec un taux de variation et donc un flux de vidange constant égal à la valeur initiale de ces grandeurs. À l'instant $t = \tau_c$, le volume restant correspond à V_0/e , soit à 37% de la valeur initiale. Un système semblable à celui qui est modélisé dans la figure 1.65 est appelé un *système RC*, parce que les deux composantes qui sont responsables de l'évolution observée sont respectivement un élément résistif et un élément capacitif.

Il est assez usuel d'introduire la constante de temps dans la formulation de la solution de l'équation différentielle et de la réécrire sous la forme :

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad \text{avec} \quad \tau_c = R_V C_V \tag{1.44}$$

1.8.3 Remplissage au moyen d'une pompe idéale

Élaboration du modèle et simulation. Nous allons modéliser le processus de remplissage d'un récipient semblable à celui de la section précédente au moyen d'une pompe qui est censée délivrer une pression constante. Comme nous admettons que la conduite est située à la base du récipient, le flux variera en fonction du niveau du fluide dans la cuve.

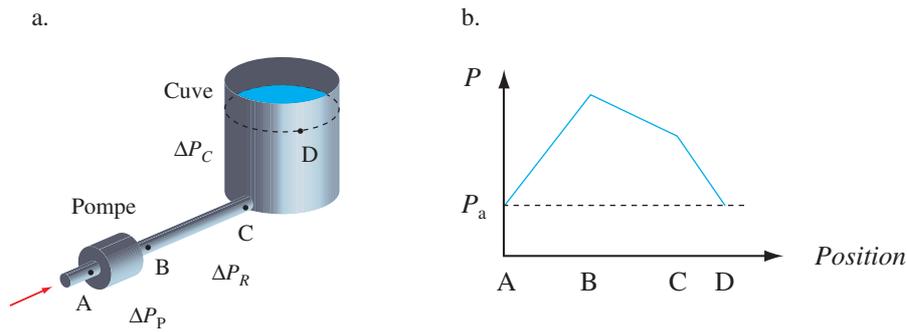


FIGURE 1.68 Remplissage d'une cuve au moyen d'une pompe; (a) système; (b) répartition des pressions.

Nous admettons qu'il s'agit de la même huile que dans l'exemple de la section précédente. En outre, nous admettons également que la pompe délivre une pression constante, ce qui simplifie la modélisation. Les caractéristiques du système, capacité et résistance, seront calculées au moyen des équations (1.29) et (1.33).

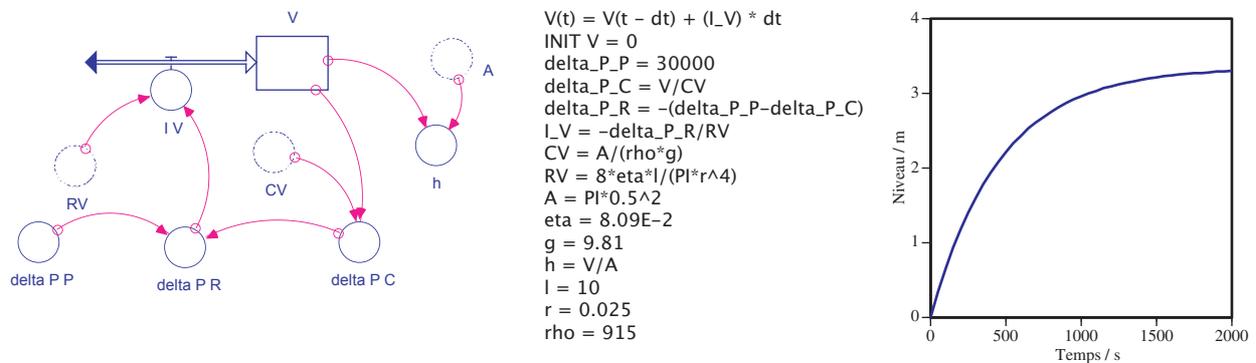


FIGURE 1.69 Modèle de remplissage d'une cuve au moyen d'une pompe idéale

Le modèle fait apparaître une caractéristique des processus de remplissage: la croissance du niveau devient de plus en plus faible. On dit que le niveau tend asymptotiquement vers sa valeur finale. La recherche de la solution analytique va permettre de préciser cette notion.

Recherche de la solution analytique. Le modèle repose sur l'énoncé du bilan. Si nous parcourons le système de A vers D, l'évolution de la pression est celle qui est donnée par la partie droite de la figure 1.68. Le flux entre dans le système, il doit donc être compté positivement dans l'équation de bilan:

$$\dot{V} = I_V \tag{1.45}$$

La différence de pression capacitive est négative:

$$\Delta P_C = \frac{V}{C_V} \tag{1.46}$$

La loi des mailles nous permet de calculer la différence de pression résistive:

$$\Delta P_R = -(\Delta P_P - \Delta P_C) = \Delta P_C - \Delta P_P \tag{1.47}$$

à partir de laquelle nous calculons le l'intensité du flux:

$$I_V = -\frac{\Delta P_R}{R_V} \quad (1.48)$$

En combinant les équations (1.45) à (1.48), nous obtenons :

$$\dot{V} = I_V = -\frac{\Delta P_R}{R_V} = -\frac{\Delta P_C - \Delta P_P}{R_V} = -\frac{V}{R_V C_V} + \frac{\Delta P_P}{R_V}$$

ce qui donne finalement :

$$\dot{V} + \frac{V}{R_V C_V} = \frac{\Delta P_P}{R_V} \quad (1.49)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre. En analyse, on démontre que la solution d'une telle équation différentielle peut être écrite en tant que superposition de la solution de l'équation homogène, qui est l'équation (1.41) dont la solution est donnée par l'équation (1.44), et d'une solution particulière qui prend en compte la présence du second membre. Nous écrivons donc :

$$V(t) = V_{\text{hom}}(t) + V_{\text{part}} = A e^{-\frac{t}{\tau_c}} + V_{\text{part}}$$

Nous utilisons un argument physique pour trouver une solution particulière. Nous savons qu'au bout d'un certain temps, le volume se stabilisera à une valeur maximale V_{max} (lorsque la pression de la pompe équilibrera la pression capacitive). Alors, la variation du flux dV/dt sera nulle; l'introduction de ces deux valeurs dans l'équation différentielle (1.49) donne :

$$V_{\text{max}} = C_V \Delta P_P \quad (1.50)$$

C'est la valeur vers laquelle tend $V(t)$ lorsque t tend vers l'infini :

$$V(t \rightarrow \infty) = V_{\text{max}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(A e^{-\frac{t}{\tau_c}} + V_{\text{part}} \right) = 0 + V_{\text{part}}$$

Ainsi :

$$V(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_c}} + V_{\text{max}}$$

À partir de la condition initiale, $V(t=0) = 0$, nous trouvons que $A = -V_{\text{max}}$, ce qui nous permet de conclure que :

$$V(t) = V_{\text{max}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \quad (1.51)$$

1.8.4 Constante de temps du processus

Vu que la partie homogène de la solution est la même que lors du processus de vidange, la constante de temps ne change pas. Pour en déterminer la signification, évaluons le taux de variation initial de la même manière qu'à la section 1.8.1 pour obtenir :

$$\dot{V}(t=0) = \frac{V_{\max}}{\tau_c}$$

Cette valeur est égale à la pente de la tangente à l'origine de la courbe d'évolution du processus (fig. 1.70). Cette tangente détermine, sur l'asymptote horizontale d'ordonnée V_{\max} donnée par l'équation (1.50), un segment de longueur égale à la valeur de la constante de temps. À l'instant $t = \tau_c$, le volume a atteint le 67% de la valeur maximale.

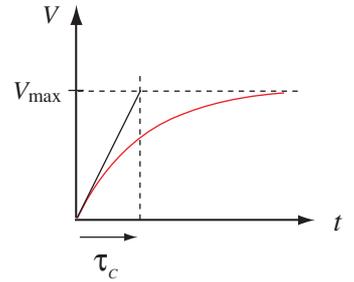


FIGURE 1.70 La constante de temps du processus correspond au segment de l'axe du temps entre l'origine et l'intersection de la tangente à l'origine de la courbe avec l'asymptote d'ordonnée égale à V_{\max} .

1.8.5 Modélisation d'un windkessel

Le mot «windkessel» est d'origine allemande et signifie chambre ou réservoir à air. C'est un système qui a été introduit au XVII^e siècle dans les pompes à bras qui servaient à combattre les incendies, afin de lisser les variations de la pression pulsée délivrée par la pompe pour d'obtenir un flux émergent presque constant.

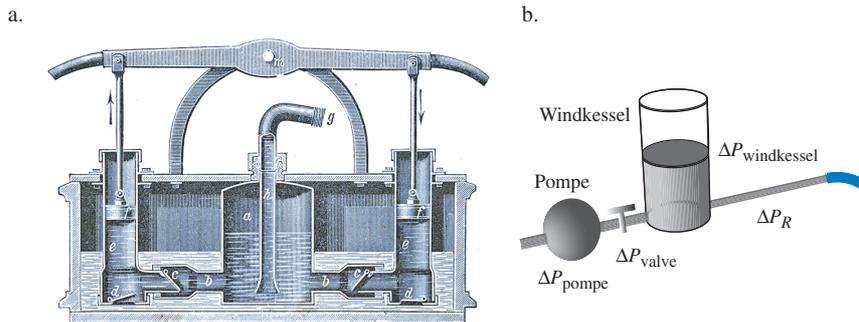
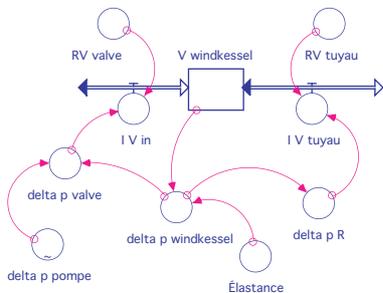


FIGURE 1.71 Windkessel: (a) pompe à incendie du début du XX^e siècle, actionnée à bras; le windkessel est la partie centrale; (b) représentation schématique du système.

Le principe du windkessel est représenté dans la figure 1.71. Cette pompe à incendie du début du XX^e siècle est actionnée à la force des bras. Lorsque l'un des pistons descend, il chasse l'eau dans le réservoir central (le windkessel) dont le niveau monte, comprimant l'air qui s'y trouve, ce qui engendre une surpression. Une valve empêche le reflux de l'eau. Simultanément, l'autre piston remonte, aspirant l'eau de l'extérieur vers le cylindre. La pression dans le windkessel varie de manière beaucoup moins prononcée que si le flux était uniquement entraîné par les pistons mobiles.



```
V_windkessel(t) = V_windkessel(t - dt) + (I_V_in - I_V_tuyau) *
INIT V_windkessel = 0

I_V_in = IF (delta_p_valve < 0) THEN -(delta_p_valve / RV_valv)
I_V_tuyau = -delta_p_R / RV_tuyau

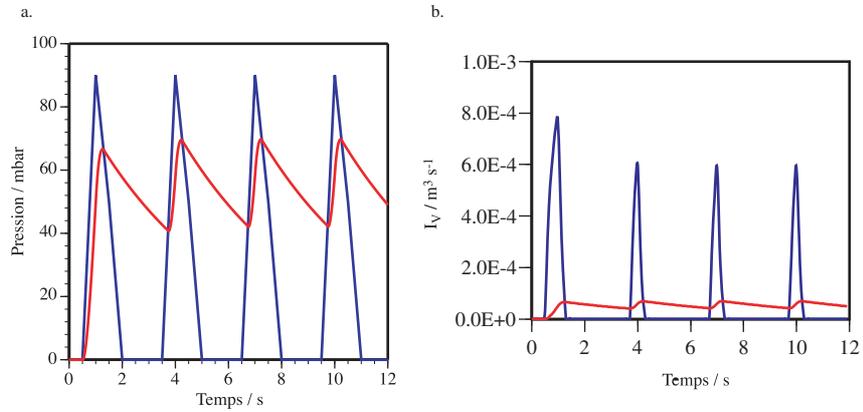
delta_p_R = -delta_p_windkessel
delta_p_valve = -(delta_p_pompe - delta_p_windkessel)
delta_p_windkessel = Élastance * V_windkessel
delta_p_pompe = GRAPH(TIME)

Élastance = 2e5
RV_tuyau = 1e6
RV_valve = 0.5e5
```

FIGURE 1.72 Modélisation du windkessel.

Le système est modélisé au moyen d'un récipient alimenté par une pompe qui délivre une pression intermittente (fig. 1.72). L'action de la valve est représentée par une structure if ... then ... else.

FIGURE 1.73 Simulation du comportement du windkessel: (a) évolution des pressions; (b) évolution des flux. Les pics sont les valeurs d'entrée (pompe), les valeurs réduites et lissées sont celles de la sortie (tuyau).



La simulation (fig. 1.73) montre que les variations de la pression et de l'intensité du flux à la sortie du windkessel sont fortement réduites par rapport à celles que l'on observe à l'entrée du système.

1.8.6 Chaîne de réservoirs

Nous nous intéressons à la manière dont un fluide migre à travers une chaîne de réservoirs (fig. 1.74a) dont seul le premier contient initialement du liquide. Ce système illustre sous une forme simplifiée, mais de manière exemplaire, un phénomène que l'on rencontre dans de nombreux domaines, la *diffusion*. Citons à titre d'exemple la tendance qu'ont les substances chimiques à se répartir uniformément dans l'espace disponible (morceau de sucre qui se dissout dans un verre d'eau), le fait que la chaleur migre des endroits chauds vers les régions froides, l'osmose qui n'est rien d'autre que le passage d'une substance à travers une membrane. Nous traiterons de manière détaillée ces exemples et d'autres encore dans des chapitres ultérieurs.

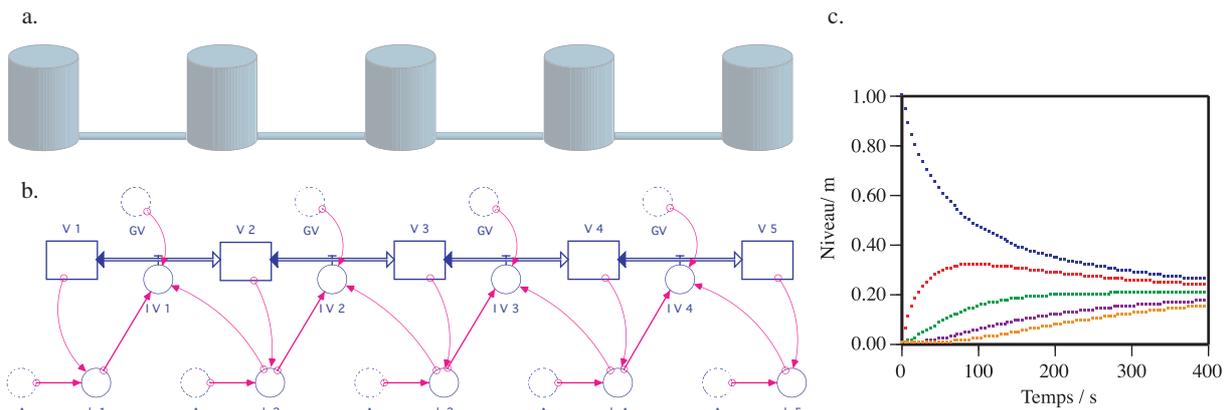


FIGURE 1.74 Chaîne de réservoirs: (a) système; seul le premier contient du liquide; (b) le modèle est une répétition de la même structure consistant en deux récipients communicants; (c) la simulation montre comment le liquide migre à travers la chaîne jusqu'à l'uniformisation des niveaux.

Le modèle, qui répète une structure de base consistant en deux récipients communicants (fig. 1.74b), montre comment le fluide progresse à travers le système, ainsi que

le délai qui s'écoule avant que les récipients successifs soient atteints par le fluide (fig. 1.74c).

1.8.7 Écoulement turbulent

Dans tous les exemples qui précèdent, nous avons admis que le fluide s'écoulait en régime laminaire, ce qui est le cas lorsqu'il s'agit d'une huile suffisamment visqueuse, comme dans l'exemple de la section 1.8.1 où le modèle basé sur cette hypothèse est en adéquation quasi parfaite avec les données expérimentales (fig. 1.66).

Si en revanche nous utilisons la même hypothèse pour modéliser l'équilibrage des niveaux de deux réservoirs contenant de l'eau, la divergence entre les données expérimentales et le modèle apparaît dès le début du processus (courbes discontinues dans la figure 1.75, dans laquelle les valeurs expérimentales sont représentées par des petits cercles). L'écoulement entre les deux récipients se déroule en régime turbulent. Si

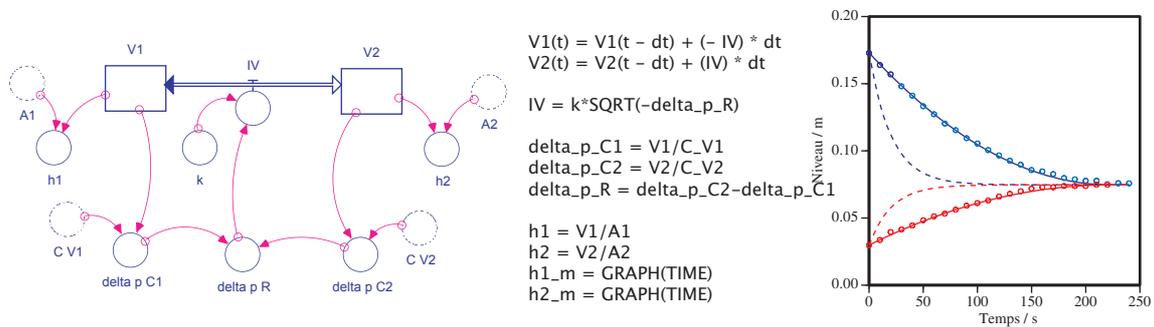


FIGURE 1.75 Modèle de l'équilibrage des niveaux de deux récipients contenant de l'eau. On obtient un modèle correct en admettant que l'écoulement est turbulent. Les courbes discontinues montrent quel serait le comportement du système si on admettait un écoulement laminaire.

nous utilisons l'approximation proposée par l'équation (1.34), nous obtenons un ajustement satisfaisant en fixant à $7.3 \cdot 10^{-7}$ la valeur du facteur d'écoulement turbulent k .

EXEMPLE 1.7. Diagramme de circuit hydraulique.

Considérez un circuit hydraulique consistant en une pompe, une turbine, des conduites et une cuve, comme le montre la figure 1.76. Admettez que le fluide doit être puisé et déversé dans un grand bassin au niveau du sol. Tracez un diagramme de flux combinant les diagrammes de processus pour chacun des composants importants.

SOLUTION: Plaçons le début du circuit à la pompe.

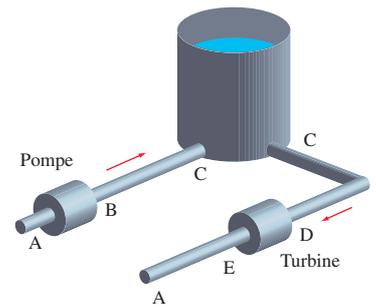


FIGURE 1.76 Circuit hydraulique traité dans l'exemple 1.7.

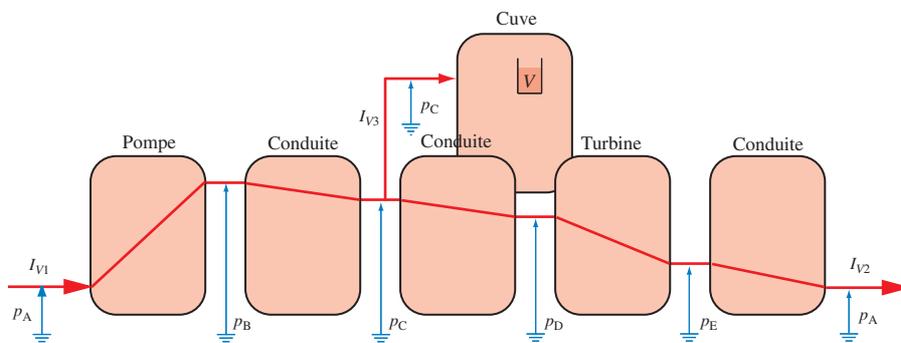


FIGURE 1.77 Diagramme de processus des éléments du circuit hydraulique de la figure 1.76.

La pompe, la conduite vers la cuve de stockage, les conduites allant vers la turbine, la turbine et la conduite retournant vers la pompe forment un circuit fermé: les éléments sont connectés en série. Le bassin ferme la boucle. La pression du fluide augmente dans la pompe, puis diminue dans les conduites et dans la turbine. La cuve est connectée en parallèle au segment A-B-C du circuit. Dans la colonne de fluide, la pression décroît de P_C à P_A . Notez que le courant se divise au point C. En C, la somme des trois flux est égale à zéro.



EXEMPLE 1.8. Modèle dynamique du remplissage d’une cuve.

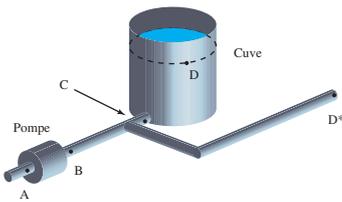


FIGURE 1.78 Circuit hydraulique traité dans l’exemple 1.8.

Considérez le système de la figure 1.78. L’écoulement obéit à la loi de HAGEN-POISEUILLE. Admettez que la conduite de la pompe vers la cuve et celle qui part de la cuve sont identiques. (a) Jusqu’à quelle hauteur peut-on remplir la cuve? (b) Représentez les processus au moyen d’un diagramme de dynamique des systèmes et simulez le comportement du système en admettant que les conduites de A à B et de C à D* ont une longueur de 1.0 m, un diamètre de 1.6 cm, que la cuve a un rayon de 0.30 m et que l’on veut la remplir d’une huile de masse volumique de 915 kg m^{-3} et de viscosité égale à $84 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$. Admettez que la pompe est une pompe idéale qui délivre une pression constante de 2.86 bar. (c) Modifiez le modèle du point (b) en admettant qu’il s’agit d’une pompe réelle dont la caractéristique est donnée par la figure 1.56 et comparez les résultats avec ceux de la simulation pour une pompe idéale.

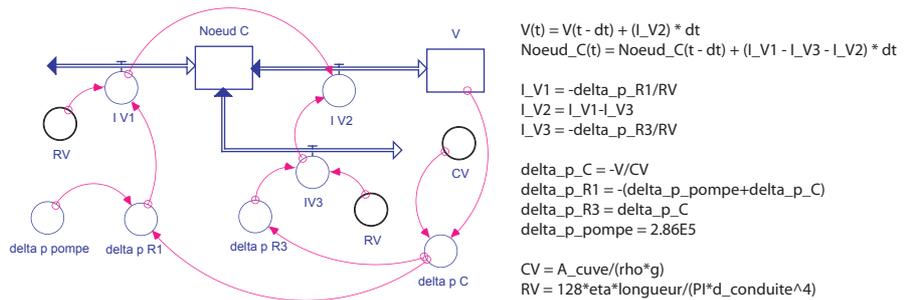
SOLUTION: (a) La hauteur maximale à laquelle la cuve peut être remplie dépend de la différence de pression maximale atteignable pour la colonne de liquide de C à D. Comme la cuve et la seconde conduite sont en parallèle, la différence de pression est la même que celle de C à D*. Mais cette dernière dépend du courant de fluide à travers cette conduite. Or, au moment où le niveau maximal est atteint, ce courant est le même qu’à travers la première conduite et la pompe, puisqu’à partir de ce moment-là, aucun liquide n’entre plus dans la cuve. Le fluide s’écoule directement de la pompe, par C vers D*. Comme les conduites sont identiques, chacune d’elles utilise la moitié de la différence de pression fournie par la pompe. Nous avons donc

$$\Delta P_{CD^*} = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{pompe}} \quad , \quad \Delta P_{CD} = \Delta P_{CD^*} \quad , \quad \Delta P_{CD} = \rho g \Delta h_{\text{max}}$$

ce qui nous permet de conclure que $\Delta h_{\text{max}} = \Delta P_{\text{pompe}} / (2\rho g)$.

a) Les éléments essentiels du modèle sont, tout d’abord, le bilan représenté par un stock et un flow uniques (I_{V2} partant du point C vers la cuve dans la figure 1.38). Ce courant émane du nœud au point C, nœud que l’on représente également au moyen d’un stock.

FIGURE 1.79 Modèle dynamique du circuit de la figure 1.78.



Étant donné que le nœud ne peut pas accumuler de fluide, I_{V2} est égal à la somme de I_{V1} et I_{V3} . I_{V1} et I_{V3} peuvent être calculés au moyen de la loi de résistance si les différences de pression sur les conduites de B à C et de C à D* sont connues. Tout ce que nous avons à faire est de calculer la pression P_B à partir de la différence de pression fournie par la pompe, et P_C à partir de la loi de capacité appliquée à la cuve (fig. 1.79).

(c) Pour pouvoir intégrer la caractéristique de la pompe dans le modèle, nous devons pouvoir disposer d’une courbe basée sur des points équidistants, ce qui n’est pas le cas des données

disponibles. À partir de celles-ci (fig. 1.56), nous ajustons une courbe du second degré au moyen de la méthode des moindres carrés.

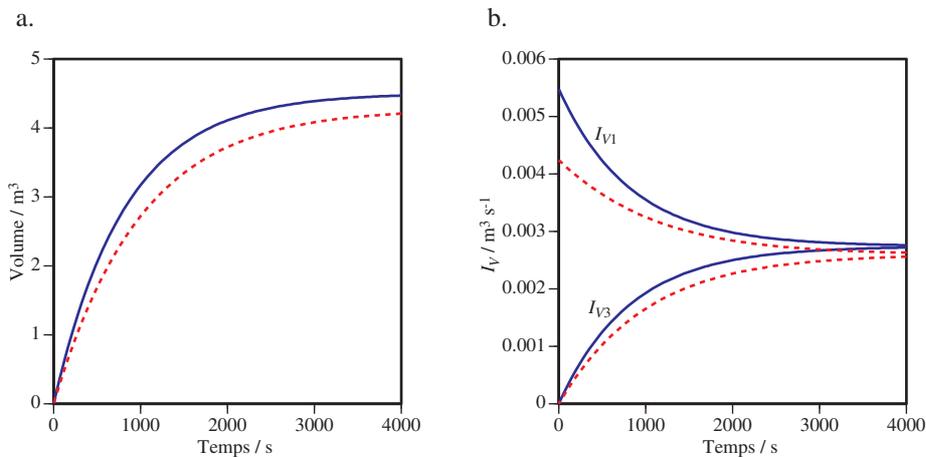


FIGURE 1.80 Comparaison du comportement du système de la figure 1.78 avec une pompe idéale (courbes continues) et avec une pompe réelle (courbes discontinues): (a) évolution du volume accumulé dans la cuve; (b) évolution de l'intensité des courants dans les conduites.

Les résultats de la simulation (fig. 1.80) montrent que l'évolution des valeurs du volume accumulé et des intensités des courants dans les conduites est réduite par rapport aux valeurs qui sont délivrées par la pompe idéale, ce qui s'explique par le fait que la pression à la sortie de la pompe diminue d'autant plus que l'intensité du flux est importante; les différences entre les valeurs idéales et les valeurs réelles sont les plus importantes au début du processus de remplissage, lorsque les valeurs de la pression capacitive, qui s'oppose à l'arrivée du fluide, sont faibles. Le niveau final est plus faible à cause de la pression nécessaire pour maintenir le flux dans la conduite parallèle à la cuve.

■

Résumé du chapitre

Nous avons étudié un aspect restreint du vaste domaine qui traite de l'écoulement des fluides, à savoir l'hydraulique. L'hydraulique étudie les fluides dans des environnements contrôlés – conduites et réservoirs –, souvent dans la perspective d'applications techniques. Malgré ses limitations, elle nous apprend beaucoup sur le comportement de la nature. Rappelons les points dont il est important de se souvenir à propos de l'hydraulique.

Les processus hydrauliques consistent en l'écoulement et l'accumulation de quantités de fluide. Si nous ne considérons que des fluides incompressibles tels que l'eau ou l'huile, nous pouvons utiliser leur *volume* V pour en mesurer la quantité. Il s'agit de la *grandeur extensive* (qui croît avec la taille du système) servant à décrire les processus hydrauliques.

Pour des fluides incompressibles, et en l'absence de réactions chimiques, le volume de fluide ne peut changer qu'à la suite d'afflux ou de déflux. La somme algébrique de tous les flux volumiques, représentés par le symbole I_V , nous indique à quelle vitesse évolue le volume de fluide accumulé, ce que l'on exprime au moyen de l'équation de bilan: $\dot{V} = I_{V1} + I_{V2} + \dots$, où \dot{V} représente le taux de variation du volume.

Les observations permettent de se rendre compte que ce sont des *différences de niveau ou de pression* qui engendrent les flux responsables des variations des quantités de fluides accumulées dans un système. Réciproquement, des variations des quantités accumulées produisent des variations de pression. La *pression* P est la *grandeur*

intensive (qui ne dépend pas de la taille du système) qui sert à décrire l'état du système. C'est elle qui est responsable de l'évolution dynamique du système.

Les caractéristiques physiques des éléments du système (réservoirs et conduites) déterminent de quelle manière évolue son état. Ces particularités sont exprimées au moyen de relations que l'on appelle *lois constitutives*.

Dans les réservoirs de fluide, la pression du fluide est liée à la quantité stockée par l'intermédiaire de la *loi de capacité*: le taux de variation de la pression, multiplié par la capacité C_V , nous indique à quelle vitesse évolue le volume stocké: $\dot{V} = C_V \dot{P}_C$. Le lien entre la variation du volume et celle de la pression peut également être exprimé au moyen de l'élastance α_V , qui est l'inverse de la capacité: $\dot{P}_C = \alpha_V \dot{V}$.

Généralement, il y a toujours des frottements lors d'un écoulement à cause de la viscosité. En conséquence, la pression du fluide diminue dans le sens de l'écoulement. Il faut une différence de pression pour entraîner un fluide à travers une conduite, et cette différence de pression est liée au flux par l'intermédiaire de la *loi de résistance*: le flux est égal au quotient de la différence de pression et de la résistance hydraulique R_V : $I_V = -1/R_V \cdot \Delta P_R$. La loi de résistance peut également être exprimée au moyen de la conductance G_V qui est l'inverse de la résistance: $I_V = -G_V \cdot \Delta P_R$.

La combinaison de l'équation de bilan et des lois constitutives, ainsi que de la loi des mailles (dans un circuit fermé, la somme des différences de pression est nulle) et de celle des nœuds (en un nœud du circuit, la somme algébrique des intensités de courant volumique est nulle), permet de construire des modèles complets de processus hydrauliques dynamiques.

Questions

1. Quels sont les processus décrits par un bilan? Quel est le bilan pour des quantités d'eau?
2. Peut-on dire que les écoulements d'eau sont les seuls processus qui peuvent modifier la quantité d'eau dans un système? Sinon, quelle loi doit-on changer, et comment?
3. Pourquoi l'intensité du champ de pesanteur joue-t-elle un rôle dans la pression d'une colonne de fluide?
4. Considérez deux lacs qui communiquent à travers un canal unique, sans autre afflux ou déflux. Le système est-il à l'équilibre lorsque les deux lacs contiennent la même quantité d'eau?
5. Quelle est la relation entre viscosité, frottement et production de chaleur dans un écoulement de fluide? Quelles sont les conditions pour un écoulement idéal?
6. Dans l'exemple 1.5, nous avons calculé la pression que devait fournir une pompe pour entretenir un écoulement stationnaire. Votre réponse est-elle la même si le fluide entrant dans la pompe est déjà en mouvement ou s'il est immobile?
7. Dans la figure 1.81, une droite reliant l'extrémité de la conduite et les niveaux supérieurs des tubes de verre indiquant la pression du fluide rejoint le niveau libre du liquide dans la cuve (haut de la figure 1.81). Sous quelles hypothèses est-ce le cas? En réalité, on découvre que cette droite passe par un point en dessous du niveau libre (bas de la figure). Quelle est la raison de ce comportement? Qu'avons-nous négligé?

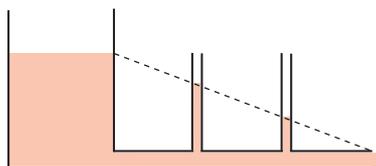
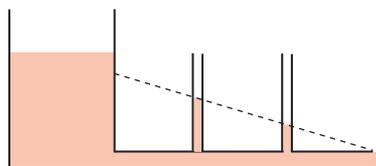


FIGURE 1.81
Question 7



8. Nous avons associé les notions de résistance et de capacité respectivement avec l'écoulement à travers des conduites et des réservoirs stockant des fluides. Serait-il possible qu'une capacité soit une résistance, et *vice versa*?
9. Comment se présente la caractéristique d'une pompe capable de fournir une différence de pression constante, quelle que soit la valeur du flux de fluide?
10. Utilisez l'«analogie hydraulique» d'une cuve à parois verticales contenant un fluide pour expliquer la relation entre contenu, niveau et capacité. Quelle est la correspondance entre les grandeurs géométriques et les grandeurs physiques respectives?

11. Expliquez la signification des termes processus hydrauliques «spontanés» et «contraints». Dans quel sens le phénomène de l'écoulement résistif d'un flux visqueux à travers une conduite est-il spontané? Comment cela est-il exprimé dans un diagramme de processus?
12. Comment se présente le diagramme de processus de la vidange d'une cuve comme dans la figure 1.31?
13. Dans la figure 1.65, le bilan (première équation de la liste) ne doit pas être écrit explicitement avec un logiciel de dynamique des systèmes. Pourquoi?
14. Comment les courants à travers les deux conduites de l'exemple 1.8 évoluent-ils dans le temps? Raisonner qualitativement.

Exercices

1. Une pompe propulse de l'eau à travers une longue conduite, puis à travers une turbine. Dessinez la combinaison de diagrammes de processus qui représente ce système.
2. Calculez la pression qui règne au fond d'un lac de 100 m de profondeur.
3. La pression sanguine d'un humain correspond à celle d'une colonne de mercure de 130 mm. Que vaut cette pression?
4. On pompe de l'huile de ricin à travers une conduite de 10 m de long et de 5.0 cm de diamètre. Calculez la résistance.
5. On pompe de l'eau à travers une conduite lisse de 10 m de long et de 4.0 cm de diamètre. Le flux est de 10 L s^{-1} . L'eau s'écoule ensuite à travers une turbine, puis retourne vers la pompe à travers une conduite identique à la première. La pompe fournit une différence de pression de 5.0 bar. Quelle est la différence de pression sur la turbine?
6. Déterminez la capacité hydraulique d'une piscine de 25 m de long et de 15 m de large.
7. Deux réservoirs communicants à parois verticales de diamètres 0.40 m et 0.60 m, sont remplis d'huile d'olive à des niveaux respectifs de 1.0 m et 0.30 m. Quel sera le niveau final commun de l'huile dans les réservoirs?
8. Dans le processus modélisé dans la figure 1.65, l'évolution dans le temps du volume de fluide est donnée par la figure 1.82. Pourquoi est-ce ainsi? Quelle est la valeur de la pente (négative) de la courbe au début du processus?

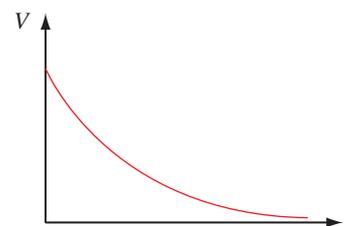


FIGURE 1.82
Exercice 8

Problèmes

- Une fontaine est alimentée par deux courants. Le premier varie son intensité linéairement de 2.0 L s^{-1} à 1.0 L s^{-1} en l'espace de 10 s, alors que le second a une intensité constante de 0.5 L s^{-1} . Depuis le début de la 4^e seconde jusqu'à la fin de la 6^e, le contenu de la fontaine diminue de 0.030 m^3 . (a) Quelle est l'intensité du flux constant qui s'écoule de la fontaine? (b) Quel est le volume du contenu de la fontaine après 10 s, si on admet que le volume initial était de 200 L?
- De l'huile, de masse volumique égale à 800 kg m^{-3} et de viscosité égale à 0.60 Pa s , s'écoule à travers le système de la figure 1.83. La pression en A vaut 1.40 bar, en C 1.20 bar. Le petit diamètre est de 1.0 cm, le grand diamètre de 2.0 cm. On peut négliger l'influence des coudes et arêtes et admettre un régime laminaire (loi de HAGEN-POISEUILLE). (a) Quelle est l'intensité du flux volumique à travers la conduite inférieure? (b) Que vaut le flux volumique total à travers les conduites? (c) Que vaut la pression en B?

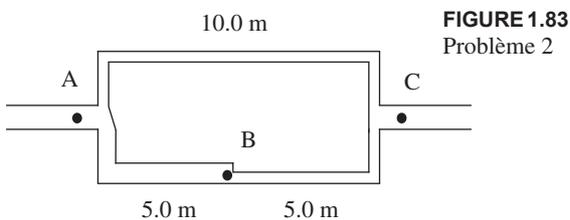


FIGURE 1.83
Problème 2

- Deux réservoirs (fig. 1.84) contiennent une huile ayant une masse volumique de 800 kg m^{-3} et une viscosité de 0.20 Pa s . Initialement, dans le réservoir de gauche, de section égale à 0.010 m^2 , le niveau du fluide est à 10 cm; dans le second réservoir, de section égale à 0.0025 m^2 , le niveau est de 60 cm. Le tuyau reliant les deux réservoirs a une longueur de 1.0 m et un diamètre de 1.0 cm. (a) Calculez la pression en A, B, C et D à cet instant. (b) Esquissez le profil de la pression (pression en fonction de la position) pour le parcours de A à D; ajoutez un point C* à l'autre extrémité de la conduite; (c) Quelle est l'intensité du flux volumique immédiatement après l'ouverture de la conduite?

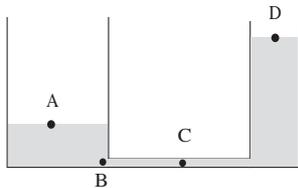


FIGURE 1.84
Problème 3

- On veut remplir un lac artificiel de grande surface et de faible profondeur au moyen d'une conduite horizontale de 10 km de longueur. Initialement, le lac est vide et son contenu final doit être de 10^5 m^3 d'eau. La résistance de la conduite est régie par la loi de HAGEN-POISEUILLE, et la chute de pression linéaire est de 100 Pa par mètre, pour un flux volumique de $1.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Pendant le remplissage du bassin, l'eau s'évapore à un rythme constant de $0.10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. (a) Si le flux volumique est constant et égal à $0.50 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, quel est alors le taux de variation du volume d'eau dans le lac? (b) Combien de temps

faudra-t-il pour remplir le lac? (c) Quelle est la différence de pression fournie par la pompe?

- Une grande cuve est remplie d'huile à travers une conduite raccordée au fond (comme dans la figure 1.85). L'écoulement à travers la conduite se fait en régime laminaire. Énoncez le flux instantané en termes de longueur et de rayon de la conduite, de la viscosité et de la masse volumique de l'huile, et de la hauteur de l'huile dans la cuve.

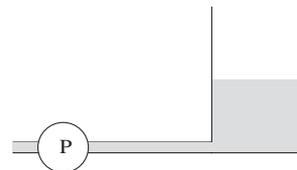


FIGURE 1.85
Problème 5

- Deux réservoirs (fig. 1.84) contiennent une huile ayant une masse volumique de 800 kg m^{-3} et une viscosité de 0.20 Pa s . Initialement, dans le réservoir de gauche, de section égale à 0.010 m^2 , le niveau du fluide est à 10 cm; dans le second réservoir, de section égale à 0.0025 m^2 , le niveau est de 60 cm. Le tuyau reliant les deux réservoirs a une longueur de 1.0 m et un diamètre de 1.0 cm. Esquissez l'évolution des niveaux en fonction du temps.
- Calculez la capacité hydraulique d'un tube en U utilisé en tant que jauge de pression. Le diamètre intérieur du tube est de 8.0 mm.
- Calculez la capacité hydraulique d'un réservoir de fluide de section conique en fonction de la pression du fluide au fond du réservoir.
- Deux réservoirs sont reliés par une conduite comme dans la figure 1.86. Le second réservoir a une entrée et une sortie. Supposez que l'écoulement obéit à la loi de HAGEN-POISEUILLE. (a) Énoncez les équations de bilan de volume pour les fluides dans les réservoirs. (b) Formulez la relation entre le volume de fluide et la pression au fond de chaque réservoir. (c) Énoncez les lois pour les écoulements à travers chacune des conduites. (d) Formulez les équations différentielles pour le niveau de fluide dans chacun des réservoirs en termes de capacité et de résistance des éléments du système.

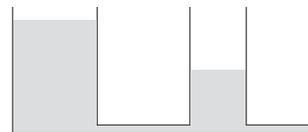


FIGURE 1.86
Problème 9

- Pour le système de cuve, conduites et pompe de la figure 1.38 dérivez (a) la différence de pression instantanée sur la pompe et (b) le flux volumique instantané à travers la pompe. Le fluide est de l'huile comme dans le Problème 6. Elle atteint un niveau de 1.0 m dans la cuve dont le diamètre vaut 1.0 m. Les conduites ont un diamètre de 5.0 cm et des longueurs respectives de 2.0 m (B à C) et 3.0 m (C à D*).

CHAPITRE 2

SYSTÈMES ET PROCESSUS ÉLECTRIQUES

Les phénomènes électriques sont la conséquence de l'écoulement de l'électricité, plus précisément de la charge électrique. Nous allons montrer que la charge électrique peut être accumulée et peut s'écouler, deux caractéristiques qui sont identiques à celles que nous avons attribuées au volume en hydraulique lors de l'étude de l'écoulement des fluides. Relevons cependant que les thèmes abordés dans ce chapitre sont loin d'épuiser tout ce que l'on peut découvrir au sujet des phénomènes électriques (et magnétiques). Nous allons mettre en évidence et utiliser la similitude entre les processus électriques et hydrauliques pour modéliser une partie de ceux qui se déroulent dans les circuits électriques, profiter des acquis du premier chapitre et appliquer des modèles semblables à des processus semblables. Nous devons tenir compte d'une différence par rapport aux fluides, à savoir que la charge électrique peut prendre des valeurs positives et négatives. Mais nous verrons que, grâce à une convention, cette différence n'a pratiquement pas d'influence sur les modèles que nous élaborerons.

2.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Cette première section va nous permettre de découvrir les phénomènes fondamentaux liés à l'électricité, dont une partie sont connus depuis l'Antiquité. On avait alors remarqué que certaines substances devenaient «électriques» par frottement. C'était entre autres le cas d'une résine fossile, l'ambre, qui servait, et sert encore à faire des bijoux. En grec, l'ambre s'appelle *elektron*.

Ces phénomènes fondamentaux sont liés à ce que l'on appelle l'électricité statique, dont les effets ne sont pas facilement mesurables. Les découvertes de GALVANI et VOLTA durant la seconde moitié du XVIII^e siècle permettront d'entretenir des flux constants d'électricité, ce qui a rendu possible l'étude scientifique et technique de l'électricité.

2.1.1 Électrisation par frottement

Nous observons quotidiennement que des objets peuvent se charger électriquement par frottement. Ainsi, lorsque nous peignons nos cheveux fraîchement lavés et séchés, nous avons de la peine à les coiffer et nous entendons de légers crépitements. Si nous le faisons dans le noir, en face d'un miroir, nous pouvons même observer de petites étincelles. Un phénomène semblable a lieu lorsque nous enlevons un vêtement qui contient des fibres synthétiques ou lorsque nous touchons une poignée de porte après avoir marché sur certains types de revêtement de sol. C'est l'étude et la compréhension de ces phénomènes qui ont conduit à la maîtrise de l'électricité et qui ont donné au monde qui nous entoure une partie importante de son aspect.

Nous mettons une sphère métallique isolée en contact avec un bâton de résine artificielle préalablement frotté: la sphère s'électrise, ce que l'on peut mettre en évidence au moyen d'un électromètre, appareil dont le principe de fonctionnement sera expliqué plus bas (fig. 2.1).

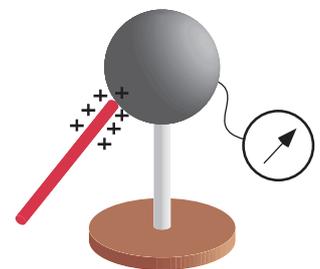


FIGURE 2.1 Électrisation d'un objet par frottement et transfert de cette charge sur une sphère métallique, avec mise en évidence de l'électrisation au moyen d'un électromètre.

Interprétation. L'électrisation de la sphère ne peut être comprise que si l'on admet que le bâton frotté a amené sur elle une grandeur particulière, semblable à un fluide, que l'on appelle la *charge électrique* que l'on désigne par le symbole Q . Il s'agit d'une grandeur extensive, puisqu'elle peut être accumulée dans un système (ici, la sphère).

2.1.2 Transport d'électricité

Si la charge électrique est une grandeur extensive, elle doit avoir des propriétés semblables à celles d'un fluide tel que l'eau. Elle doit par exemple pouvoir être transportée d'un endroit à un autre.

Quelques observations confirment cette hypothèse. Une partie de la charge qui se trouve sur une sphère métallique peut être transportée sur une autre sphère métallique au moyen d'une troisième que l'on peut assimiler à une «cuillère électrostatique» (fig. 2.2a). Ce processus ressemble à un transfert d'eau d'un réservoir à un autre. L'état de charge de chacune des sphères est révélé par un électromètre.

C'est également possible en mettant les deux sphères en contact l'une avec l'autre ou en les reliant au moyen d'un fil métallique (fig. 2.2b). Souvent, il suffit même de les rapprocher suffisamment pour qu'une étincelle saute de la sphère chargée sur l'autre, qui sera alors partiellement chargée (fig. 2.2c).

Interprétation. Tout comme un fluide, la charge électrique peut également être transportée, s'écouler d'un «réservoir électrique» vers un autre. On appelle *courant électrique* un tel flux de charges électriques. On le désigne par le symbole I_Q .

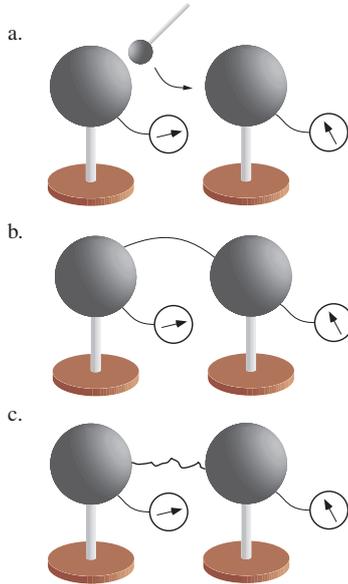
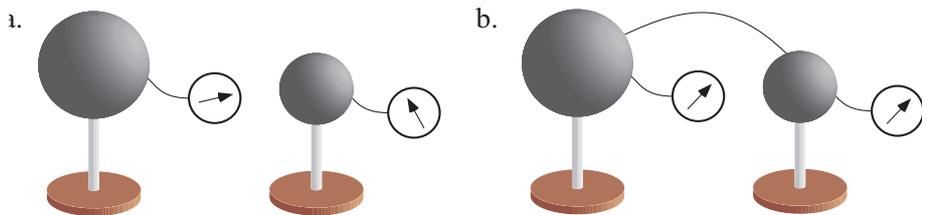


FIGURE 2.2 Exemples de transport d'électricité: (a) au moyen d'une «cuillère électrostatique»; (b) par un fil conducteur; (c) à travers l'air.

2.1.3 Équilibrage des niveaux électriques

L'expérience révèle que le transport de charges électriques d'un objet vers un autre ne peut pas se poursuivre indéfiniment, mais que, quelle que soit la manière dont la charge est transférée d'une sphère sur l'autre, le processus s'interrompt lorsque les deux électromètres affichent la même valeur (fig. 2.3), que l'on peut considérer comme un «niveau électrique».

FIGURE 2.3 Lors d'un transfert spontané de charge, le processus s'interrompt lorsque les niveaux électriques indiqués par les électromètres sont devenus les mêmes: (a) avant le transfert; (b) après équilibrage des niveaux.



L'étude quantitative du phénomène d'équilibrage des niveaux ne peut se faire que si l'on utilise des éléments électriques dont les caractéristiques et les modes de fonctionnement seront expliqués dans les sections suivantes. On remplace les sphères par des éléments capables de stocker la charge électrique, appelés *condensateurs*, que l'on peut charger au moyen d'une batterie (l'équivalent moderne de la pile de VOLTA) ou d'une alimentation (une «pompe électrique»). On remplace l'électromètre par un voltmètre. On relie le premier condensateur chargé à un second non chargé au moyen d'un conducteur qui offre une certaine résistance à l'écoulement de l'électricité, raison pour laquelle on l'appelle une résistance. Les résultats apparaissent dans le graphique de la figure 2.4c. La charge du condensateur chargé diminue alors que celle de l'autre condensateur augmente. Le processus se poursuit jusqu'à ce que les deux niveaux soient devenus égaux.

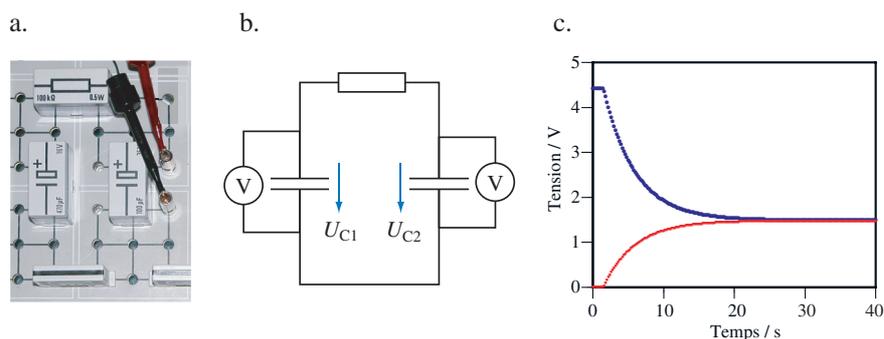


FIGURE 2.4 Processus d'équilibrage des niveaux: (a) montage expérimental; (b) schéma de montage: condensateurs (traits parallèles) reliés au moyen d'une résistance (rectangle); les niveaux de charge (tension U_C) sont mesurés au moyen d'un voltmètre (V encerclé); (c) évolution de l'état du système en fonction du temps.

Interprétation. Le phénomène observé est semblable à l'écoulement d'eau d'un réservoir vers un autre à travers une conduite: le processus s'interrompt lorsque le niveau est le même dans les deux réservoirs, c'est-à-dire lorsque la pression est la même au fond de chacun des deux réservoirs (fig. 2.5). Dans le cas du processus électrique, l'électricité (le « fluide ») ne peut s'écouler, être transportée, du « réservoir » de gauche vers celui de droite que tant que les deux niveaux électriques sont différents. Ce niveau électrique est appelé *potentiel électrique* (ou plus simplement *potentiel*), et les différences de potentiel sont appelées *tension électrique*. Le potentiel est désigné par le symbole ϕ et la tension par U . Dans le graphique de la figure 2.4c, l'évolution de la charge est en fait indiquée par la tension aux bornes des condensateurs.

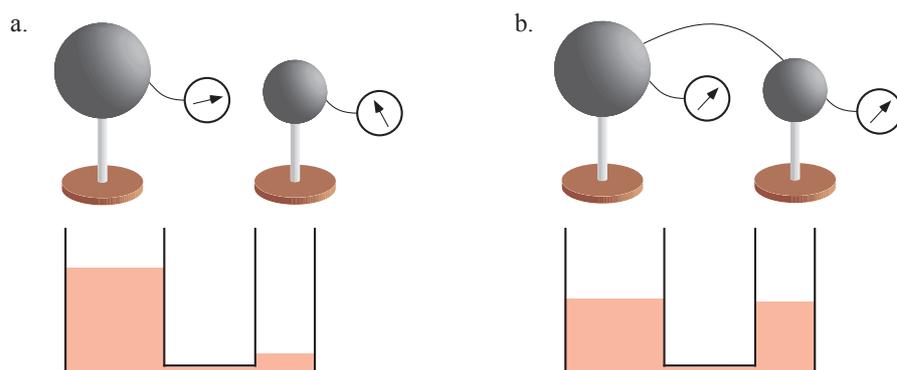


FIGURE 2.5 L'équilibrage des niveaux électriques lors d'un transfert de charge est comparable à celui des niveaux dans des vases communicants: (a) avant le transfert; (b) après équilibrage des niveaux.

2.1.4 Deux types de charge électrique

La similitude entre les processus électriques et hydrauliques n'est pas totale. En effet, alors qu'il n'existe qu'une seule espèce d'un liquide particulier, il n'en va pas de même pour la charge électrique, ce que révèle l'observation qui suit (fig. 2.6).

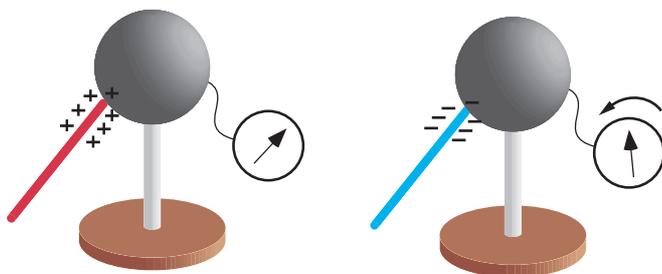


FIGURE 2.6 Il existe deux types de charge électrique: l'électricité résineuse, dite positive, et l'électricité vitreuse, dite négative.

Nous chargeons une sphère métallique reliée à un électromètre au moyen d'un bâton de verre frotté avec une peau de chamois. Si nous touchons cette sphère avec un bâton de résine artificielle frottée avec un chiffon de laine, nous remarquons une diminution de la valeur indiquée par l'électromètre: les charges du bâton de résine artificielle neutralisent (au moins partiellement) celles du bâton de verre, comme le feraient deux quantités positives et négatives.

Si nous chargeons une sphère avec le bâton de résine artificielle, une autre avec la peau de chamois qui a servi à électriser le bâton, ces deux charges se neutralisent.

Interprétation. L'électrisation par frottement ne sert pas à produire de la charge électrique, mais plutôt à séparer les charges positives et les charges négatives. Toutes les observations confirment ce que suggère cette expérience, à savoir:

On ne peut ni créer, ni détruire des charges électriques; on ne peut que séparer les charges positives des charges négatives. La charge électrique est une grandeur conservée.

La charge d'un système est la somme algébrique de ses charges positives et négatives. Lorsque cette somme est nulle, on dit que le corps en question est électriquement neutre.

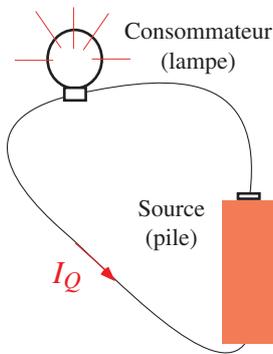


FIGURE 2.7 Circuit simple, consistant en une source, la pile, qui entretient le mouvement des charges dans le circuit, et un consommateur, la lampe, qui utilise l'énergie apportée par la charge électrique pour produire de la lumière (et de la chaleur).

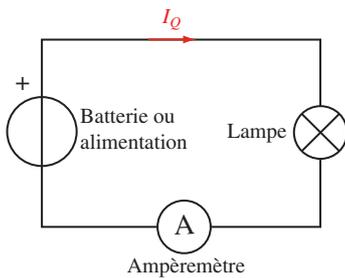


FIGURE 2.8 Représentation schématique du circuit de la figure 2.7. La polarité de l'alimentation est indiquée au moyen du signe +. L'instrument (A cerclé) qui sert à mesurer l'intensité du courant est un ampèremètre; il se branche dans le circuit (en série).

Au XVIII^e siècle, lorsque l'on a découvert les deux types d'électricité, on les a qualifiés d'*électricité vitreuse* et d'*électricité résineuse*. C'est Benjamin FRANKLIN qui les a rebaptisées en les appelant respectivement *positive* et *négative*. Cette correspondance est arbitraire, mais elle a été fixée une fois pour toutes.

2.1.5 Circuits: «pompes» et «consommateurs»

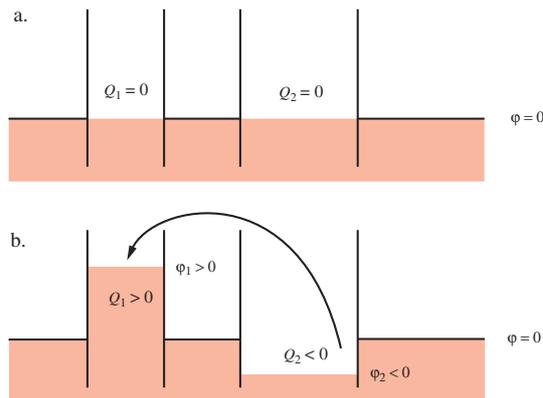
Lorsque l'on effectue des expériences avec de l'électricité statique, comme exposé ci-dessus, les processus sont en général de faible intensité et ne peuvent pas être entretenus durant un temps suffisamment long pour favoriser l'observation.

Pour entretenir un courant de charges électriques pendant un temps prolongé, il faut tout d'abord une «pompe»: ce sont les batteries, accus et générateurs qui jouent ce rôle. Les premiers appareils de ce type furent des «piles de VOLTA» constituées de l'empilement (d'où le nom) d'éléments galvaniques. Lorsque l'on relie les deux pôles d'une pile au moyen d'un fil conducteur (fig. 2.7), un courant de charges s'établit dans le fil. Celui-ci s'échauffe et des réactions chimiques ont lieu dans la pile. Usuellement, ces fils relient entre eux des appareils électriques qu'il est usuel d'appeler des «consommateurs». Pour que le courant puisse circuler, il faut que le circuit soit fermé. À aucun endroit du circuit, il n'y a accumulation (ou déperdition) de charge. Le rôle de la pile ou de tout autre dispositif est simplement de «pomper» les charges dans le circuit, d'entretenir leur mouvement en établissant la différence de potentiel entre les niveaux de laquelle les charges s'écouleront. Dans ce qui va suivre, nous appellerons «source de tension», ou plus brièvement «source», ou encore «alimentation» tout appareil qui remplit ce rôle de pompe à électricité. Le courant électrique circule des lieux de potentiel élevé vers les lieux de potentiel bas, que l'on désigne, dans une source, par + (pôle positif) et - (pôle négatif). Une telle source (de tension continue) est symbolisée par un cercle affecté du signe + pour indiquer la polarité (fig. 2.8). L'intensité du courant électrique est mesurée au moyen d'un ampèremètre.

2.1.6 Analogie hydraulique des phénomènes électriques

Nous avons, dans la première partie de ce chapitre, mis en évidence un certain nombre d'analogies entre l'hydraulique et les phénomènes électriques (nature extensive de la charge électrique, écoulement de cette charge entre les niveaux d'une grandeur intensive que nous avons appelée le potentiel électrique). Nous avons comparé le transfert de charges d'une sphère à l'autre à l'écoulement d'un fluide entre deux réservoirs communicants. Nous avons ainsi pu en donner une «image hydraulique» (fig. 2.5) qui nous a permis de comprendre quand et pourquoi le processus de transfert de charge s'interrompt. Nous voyons donc que cette analogie contribue fortement à la compréhension de ces nouveaux phénomènes, et nous voulons l'utiliser pour illustrer de manière imagée les processus que nous allons encore découvrir dans ce chapitre et dans les autres domaines de la physique.

Comment tenir compte du fait qu'il existe deux types de charges électriques, la charge positive et la charge négative? La situation est semblable à celle que l'on rencontre dans la mesure de la température (mesurée en degrés CELSIUS) ou de l'altitude (mesurée par rapport au niveau de la mer; la vallée du Jourdain et la mer Morte sont à des altitudes négatives). Il en va de même dans le domaine financier: les dettes sont une «fortune négative». Nous allons donc imaginer que les systèmes chargés sont des récipients plongés dans une mer dont le niveau représente le niveau zéro de la charge, la neutralité électrique. Un système chargé positivement aura un niveau supérieur à celui de la mer, un système chargé négativement un niveau inférieur à celui de la mer.



La figure 2.9 illustre la séparation des charges de deux objets initialement neutres, par exemple la séparation des charges d'un bâton de verre (récipient de gauche) par frottement au moyen d'un chiffon en peau de chamois (récipient de droite).

2.1.7 Modèle des processus de charge et décharge

Les observations des sections précédentes ont révélé la profonde analogie qui existe entre les processus hydrauliques et électriques. Comme nous disposons d'un outil de modélisation, nous pouvons d'ores et déjà élaborer un modèle des processus électriques pour tester la validité de cette analogie.

Nous envisageons le processus de charge d'un condensateur, suivie de sa décharge. Le montage expérimental apparaît dans la figure 2.10. Durant le processus de charge, l'interrupteur est en position 1 et l'alimentation charge le condensateur. Lorsque le condensateur est chargé, l'interrupteur est basculé en position 2, déconnectant ainsi l'alimentation et permettant au condensateur de se décharger.

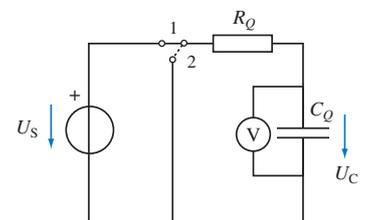


FIGURE 2.10 Montage expérimental pour l'étude des processus de charge (interrupteur en position 1) et de décharge (interrupteur en position 2) d'un condensateur.

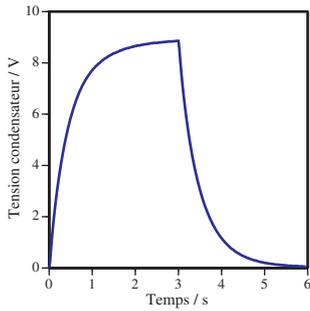


FIGURE 2.11 Mesure de la tension aux bornes du condensateur. Le graphique révèle la similitude avec les processus de remplissage et de vidange d'un réservoir en régime laminaire.

Les résultats de l'expérience (fig. 2.11) mettent en évidence la similitude des comportements hydraulique et électrique. La structure du modèle sera donc semblable à celle des processus de remplissage au moyen d'une pompe (fig. 1.69) et de vidange (fig. 1.65) d'un réservoir à paroi verticale. Les éléments constitutifs seront un stock représentant le condensateur portant la charge Q ainsi que d'un flux représentant le courant de charge ou de décharge I_Q ; cette structure correspond à l'équation de bilan de charge:

$$\dot{Q} = I_Q \tag{2.1}$$

Nous associons au stock représentant le condensateur sa capacité C_Q , ce qui permettra de déterminer le niveau électrique, la tension qui règne à ses bornes en fonction de la charge accumulée:

$$U_c = \frac{Q}{C_Q} \tag{2.2}$$

Le courant de charge I_Q sera déterminé par la tension (pression électrique) U_S délivrée par la source de tension et par la résistance R_Q du circuit. Nous admettons, comme dans le cas du régime laminaire en hydraulique la relation la plus simple possible pour l'intensité du courant, à savoir qu'il est proportionnel à la tension et inversement proportionnel à la résistance du circuit:

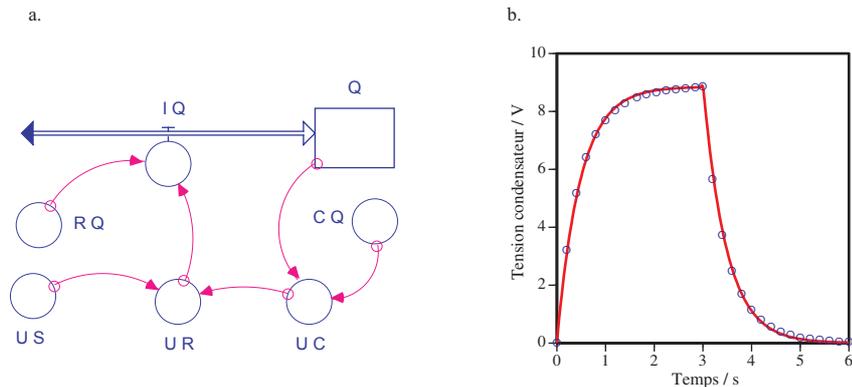
$$I_Q = \frac{U_R}{R_Q} \tag{2.3}$$

Finalement, nous appliquons la loi des mailles:

$$U_R = -U_C \tag{2.4}$$

ce qui clôt le modèle.

FIGURE 2.12 Charge et décharge d'un condensateur: (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) confrontation des résultats du modèle (ligne continue) et des mesures (petits cercles). Pour alléger le graphique, il n'y a qu'une mesure sur dix qui est reprise.



La figure 2.12a montre le diagramme de dynamique des systèmes servant à modéliser les processus envisagés. Pour passer du régime de charge à celui de décharge, il suffit, dans le modèle, de mettre à zéro la tension de la source à l'instant $t = 3.0$ s. Les valeurs des paramètres matériels ont été reprises des données des fabricants, à savoir: $C_Q = 470 \mu F$ et $R_Q = 1 k\Omega$. Nous reviendrons plus loin sur les unités de mesure utilisées.

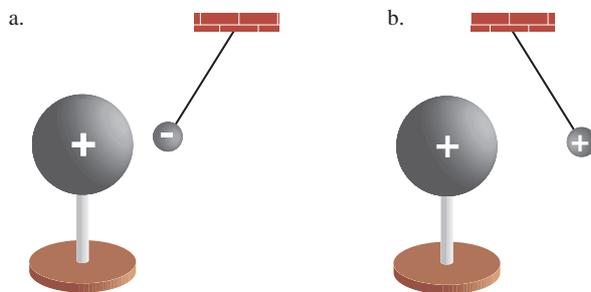
L'adéquation quasi parfaite des données calculées aux données expérimentales nous conforte dans notre hypothèse de la similitude de comportement des processus

hydraulique et électrique, respectivement. Cette similitude sera exploitée dans ce chapitre et dans les chapitres ultérieurs. Mais avant de passer à l'élaboration des lois constitutives, nous allons ajouter quelques observations fondamentales relatives aux processus électriques.

2.1.8 Interaction entre charges électriques

Pour aller plus avant dans la compréhension des phénomènes électriques, nous allons réaliser un certain nombre d'expériences au cours desquelles nous ne chargerons plus les objets au moyen de bâtons frottés, mais d'appareils qui réalisent cette séparation des charges soit par frottement (générateur de Van de Graaff), soit par création d'une différence de potentiel (source de haute tension). Dans l'analogie hydraulique, l'action de ces appareils est semblable à celle d'une pompe qui acheminerait de l'eau de la mer vers le récipient (charge positive) ou du récipient vers la mer (charge négative), ou d'un récipient vers l'autre, comme dans la figure 2.9.

Nous disposons de deux sphères métalliques, la première fixe, l'autre mobile, suspendue à un fil. Nous pouvons les charger au moyen de la source de haute tension.



a) Lorsque les deux sphères portent des charges de signes opposés, nous constatons que la sphère suspendue se rapproche de la sphère fixe.

b) Lorsque les deux sphères portent des charges de même signe, la sphère mobile s'éloigne de la sphère fixe.

Interprétation

Les objets chargés électriquement interagissent: ceux qui portent des charges de même signe se repoussent, ceux qui portent des charges de signes opposés s'attirent.

On tire profit du comportement observé dans les électroscopes qui servent à révéler la présence de charges sur les objets. La figure 2.14a montre une représentation du modèle le plus ancien de cet instrument, l'électroscope à feuilles d'or (elles étaient suspendues à une tige métallique dans un récipient en verre qui contenait souvent un dessiccateur). Si nous touchons la tige métallique supportant les feuilles d'or avec un corps électrisé, les feuilles s'écartent, étant donné que la tige a transmis la même charge aux deux feuilles. Si on étalonne cet instrument, il devient un électromètre. Une autre réalisation de cet instrument (figure 2.14b) consiste à remplacer les feuilles d'or par une aiguille suspendue légèrement au-dessus de son centre de gravité.

Dans les deux cas, le châssis de l'électroscope est isolé du support de la partie mobile par un bon isolant (c'est-à-dire un mauvais conducteur de l'électricité) pour éviter les «fuites». D'autre part, il est *mis à terre*, c'est-à-dire mis en contact avec la terre à l'aide d'un fil conducteur. Au cas où le châssis se chargerait accidentellement, il partagerait immédiatement sa charge avec la terre; les parts étant proportionnelles aux aires des deux corps, cela revient à dire que le châssis de l'électroscope reste continuellement

FIGURE 2.13 Interaction entre charges électriques: (a) les charges de signes opposés s'attirent; (b) les charges de même signe se repoussent.

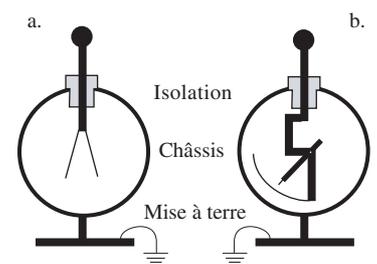


FIGURE 2.14 Électroscopes: (a) version récente de l'ancien électroscope à feuilles d'or; (b) l'aiguille est suspendue légèrement au-dessus de son centre de gravité (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

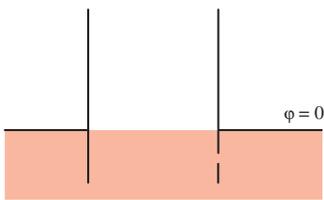


FIGURE 2.15 Analogie hydraulique de la mise à terre. Elle met en contact le système avec une mer de charges électriques; de ce fait, le niveau électrique du système est toujours nul (neutralité électrique).

2.1.9 Champ électrique

L'interaction entre les objets chargés se manifeste sans qu'un contact soit nécessaire. Elle a lieu comme si l'espace autour des objets chargés était devenu «élastique». Un objet qui porte une charge électrique est entouré de ce que l'on appelle un champ électrique auquel les objets chargés sont sensibles.

Des objets chargés électriquement sont entourés d'un champ électrique. Lorsque ces objets portent des charges de même signe, le champ électrique les éloigne l'un de l'autre; lorsqu'ils portent des charges de signes opposés, le champ électrique les rapproche l'un de l'autre.

La notion de champ a été introduite dans la physique par Michael FARADAY durant la première moitié du XIX^e siècle pour expliquer les phénomènes électriques et magnétiques. Un champ est un objet de la physique caractérisé par un certain nombre de propriétés qu'il est usuel de rattacher aux entités matérielles (chapitre 13). Ce qui fait sa particularité, c'est son caractère immatériel. La description classique des champs, due à FARADAY, consiste à mettre en évidence la structuration de l'espace par le champ au moyen de lignes de champ qui ont une direction et un sens qui indiquent dans quelle direction et dans quel sens s'exercerait la force sur une charge témoin qui est positive par convention.

Il existe dans la nature plusieurs autres types de champs. La physique moderne tente d'ailleurs de décrire la nature uniquement au moyen de ce concept (en y ajoutant un certain nombre d'ingrédients, tels que la physique quantique). Nous verrons, dans le chapitre 13, que ce que nous interprétons comme une attraction entre les objets chargés est en fait la conséquence de l'action du champ. Lorsque les deux charges sont de signes opposés, le champ les attire dans la région de grande intensité qui se situe entre les deux charges, alors que lorsque celles-ci sont de même signe, le champ les attire dans les régions de forte intensité qui se situent de part et d'autre de chacune des charges.

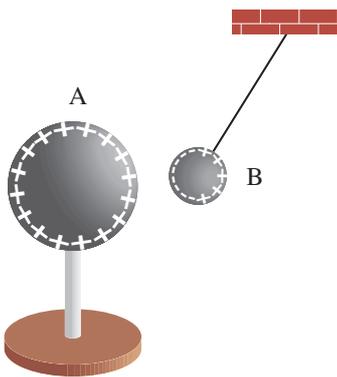


FIGURE 2.16 Une manifestation du phénomène d'influence: par l'intermédiaire de son champ électrique, la sphère A polarise la sphère B qui est alors attirée dans les régions du champ le plus intense.

Champ électrique et phénomène d'influence. Nous avons découvert qu'il était possible de charger des objets par frottement. Ce n'est pas la seule manière de procéder; un phénomène, appelé influence électrique, permet d'obtenir le même effet.

Nous répétons l'expérience de la figure 2.13, mais en ne chargeant pas la sphère suspendue. Nous constatons que, quelle que soit la charge de la sphère fixe, la sphère mobile est attirée vers elle.

Interprétation. La seule explication possible est que le champ électrique de la sphère A (admettons qu'elle soit chargée positivement) agit sur la charge de la sphère B de telle façon que le côté proche de A devient majoritairement négatif à cause de l'attraction qui s'exerce entre charges de signes opposés, l'autre majoritairement positif, la sphère B restant globalement neutre (fig. 2.16). Ce phénomène de redistribution des charges est la *polarisation*. Les charges négatives de B étant plus proches des charges positives de A que ses charges positives, l'attraction dominera.

On appelle influence électrostatique le phénomène de séparation des charges, de polarisation, par l'intermédiaire d'un champ électrique.

Réalisons une seconde expérience pour illustrer la séparation de charges par l'intermédiaire du phénomène d'influence.

Nous chargeons une sphère fixe par exemple positivement. Nous amenons deux plaques métalliques neutres dans le voisinage de la sphère chargée en nous assurant qu'elles sont en contact (fig. 2.17). Par l'intermédiaire du phénomène d'influence, le champ de la sphère sépare les charges de telle façon que la plaque proche de la sphère présentera une plus grande concentration de charges négatives, alors que la plaque éloignée de la sphère présentera une plus grande concentration de charges positives.

Nous séparons les deux plaques pendant qu'elles sont encore dans le champ électrique de la sphère chargée, puis nous les éloignons de cette dernière. En utilisant l'électroscope, nous pouvons vérifier qu'elles portent la même charge, mais de signes opposés.

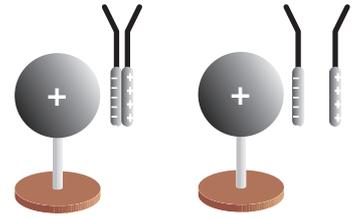


FIGURE 2.17 Séparation de charges au moyen du phénomène d'influence. La paire de plaques métalliques se polarise dans le champ de la sphère. Lorsqu'on les sépare, on obtient deux plaques portant des charges de signes opposés.

2.1.10 Conducteurs et isolants

Si, dans l'expérience de la figure 2.17, nous avons remplacé les plaques métalliques par des plaques en résine artificielle ou en céramique, nous n'aurions pas observé de séparation des charges. La seule interprétation possible est d'admettre que, dans ce type de matériau, les charges ne sont pas mobiles, qu'elles sont liées et ne peuvent pas se déplacer. Vu qu'ils empêchent la migration des charges, ces matériaux sont dits *isolants*; ceux qui permettent le mouvement des charges, tels que les métaux, sont dits *conducteurs*.

Il est important de noter qu'il y a, en fonction des matériaux considérés, un passage progressif de la qualité de conducteur vers celle d'isolant. Nous y reviendrons plus en détail lorsque nous parlerons de la loi de résistance (sect. 2.6).

1. Considérez l'expérience décrite dans la figure 2.3. Les électromètres mesurent-ils la quantité d'électricité (la charge) ou l'intensité électrique (la tension)?
2. Lorsque l'on frotte un matériau isolant (plastic, gomme, verre, ambre) avec une fourrure ou un tissu, il se charge électriquement. D'où vient la charge? A-t-elle été produite?
3. Les générateurs, alimentations électriques et les batteries génèrent-elles de l'électricité?
4. Une balle de ping-pong métallisée, mais non chargée, est suspendue à un fil. On en approche un bâton de résine artificielle frottée avec une fourrure. On observe que la balle est d'abord attirée, puis violemment repoussée dès qu'elle touche le bâton. Expliquez ces deux comportements opposés.

Q

1. Les électromètres mesurent la tension. S'ils mesuraient la charge, les indications ne seraient pas les mêmes si les sphères n'avaient pas le même diamètre.
2. L'action de frotter deux matériaux différents l'un contre l'autre ne produit pas de charges électriques, mais en arrache de l'un des matériaux; les charges arrachées apparaissent alors sur l'autre matériau.
3. Non, ces appareils servent à mettre en mouvement et à entretenir le mouvement des charges électriques. Ce sont des pompes à électricité.

R

4. Durant l'approche des deux objets, le bâton chargé positivement attire les charges négatives de la couche métallique, ce qui explique l'attraction entre les deux objets; la balle de ping-pong est encore neutre, mais ses charges sont réparties différemment à sa surface, elle est devenue un dipôle électrique. À l'instant du contact entre les deux objets, il y a transfert de charge; les deux objets portent maintenant des charges de même signe et se repoussent.

2.2 GRANDEURS FONDAMENTALES ET GRANDEURS DÉRIVÉES

Nous allons maintenant mettre à profit les similitudes que nous avons relevées entre les systèmes hydrauliques et les systèmes électriques. Tout comme en hydraulique, nous avons besoin de trois grandeurs fondamentales pour décrire et expliquer les phénomènes électriques. Une première pour la quantité d'électricité accumulée dans les systèmes, une deuxième pour les flux et une troisième pour le niveau électrique, le potentiel, en différents points d'un système.

2.2.1 Grandeurs primitives

Quantité d'électricité ou charge électrique. Résumons ce que nous avons observé dans la section précédente :

On attribue les phénomènes électriques à la présence, sur ou dans les objets, d'une grandeur que l'on appelle la charge électrique, désignée par le symbole Q . La charge électrique est la grandeur extensive (semblable à un fluide) servant à la description des phénomènes électriques.

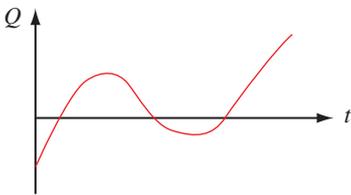


FIGURE 2.18 Évolution de la charge électrique d'un système en fonction du temps. Contrairement à une quantité de fluide, qui ne peut être que positive, la charge peut être positive ou négative.

La charge électrique se mesure en coulomb (C). Comme, dans le système international, l'unité électrique fondamentale est celle de l'intensité du courant électrique (c'est-à-dire du flux de charges), qui se mesure en ampère (A), la charge peut également être exprimée en ampèreseconde : $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$.

Nous avons observé que la charge électrique se manifeste sous deux formes, que nous appelons *positive* et *négative*. Un objet électriquement neutre est un objet qui contient autant de charge positive que négative. La charge électrique d'un système peut fluctuer dans le temps entre des valeurs positives et des valeurs négatives (fig. 2.18). La charge électrique ne peut être ni créée, ni détruite; on dit que c'est une *grandeur conservée*. Elle est la source des champs électriques qui sont des systèmes immatériels responsables, entre autres, de la transmission de l'interaction entre des objets chargés électriquement.

Il est intéressant de noter que la charge électrique est quantifiée, ce qui veut dire que toute charge électrique est un multiple de la *charge élémentaire* e , qui est la charge portée par l'électron négatif ou le proton positif. La charge élémentaire vaut $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Courant électrique. Tout comme un fluide, la charge électrique peut être stockée et peut également être transportée, s'écouler à travers des matériaux. On appelle *courant électrique* un tel flux de charges électriques, et on désigne son intensité par le symbole I_Q . L'unité de l'intensité du courant électrique est l'ampère (A). L'ampère est l'une des sept unités fondamentales du Système international.

Dans les processus dynamiques, le courant électrique varie généralement en fonction du temps (fig. 2.19). Nous avons vu qu'il existe deux sortes de charges électriques, les charges positives et les charges négatives. Pour la modélisation et l'étude des phénomènes électriques qui sont accompagnés de flux de charges, il est nécessaire de préciser quelle est la charge qui s'écoule pour éviter toute ambiguïté. Ce problème est réglé au moyen d'une convention :

Lors de l'étude des phénomènes de transport de charge électrique, on admet par convention que le courant électrique est toujours un flux de charges positives.

Contrairement à la mesure directe de la charge, qui est difficile, la mesure de l'intensité du courant électrique n'est pas problématique. Traditionnellement, on utilise les effets magnétiques du courant électrique pour le faire au moyen d'un ampèremètre (fig. 2.20). Cet instrument doit être introduit dans le flux de charges («en série»), ce qui implique que sa résistance interne doit être aussi faible que possible pour éviter que sa présence ne fausse trop fortement les propriétés de la branche du circuit dans laquelle il est connecté. Les versions modernes de ces instruments de mesure sont appelées multimètres, puisqu'ils servent à mesurer à la fois l'intensité du courant (ampèremètre), celle de la tension (voltmètre) et celle de la résistance (ohmmètre).

Potentiel électrique.

La grandeur intensive qui mesure l'intensité de l'état électrique, le niveau électrique d'un système en un point donné est le potentiel électrique désigné par φ_{e1} et mesuré en volt (V). Le potentiel électrique n'a pas de zéro absolu, contrairement à la pression. Cette particularité implique que seules les différences de potentiel sont importantes; on les appelle tension électrique.

2.2.2 Charge et variation de la charge

En vertu des similitudes entre les processus hydrauliques et les processus électriques, nous pouvons pratiquement reprendre ce qui a été fait à la section 1.2 en remplaçant simplement le volume par la charge et la pression par le potentiel électrique. Il y aura quelques différences que nous relèverons quand cela se révélera nécessaire.

Variation de la charge. Elle est donnée par :

$$\Delta Q(t_1, t_2) = Q(t_2) - Q(t_1) = Q_2 - Q_1 \tag{2.5}$$

Taux de variation de la charge. Il indique à quelle vitesse varie la charge électrique du système considéré (fig. 2.21). Ce taux de variation, dénoté dQ/dt ou \dot{Q} , peut être déterminé par dérivation si l'on connaît l'expression mathématique de son évolution, soit graphiquement si l'on dispose d'un diagramme de son évolution temporelle.

Variation de la charge accumulée. Lorsque le taux de variation de la charge est connu, la variation de la charge durant un intervalle de temps est obtenue par intégration (fig. 2.22), comme dans le cas de l'évaluation de la charge transportée ou échangée par l'intermédiaire d'un flux :

$$\Delta Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}(t) dt \tag{2.6}$$

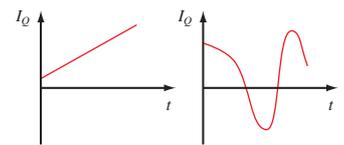


FIGURE 2.19 Évolution de l'intensité du courant électrique en fonction du temps.

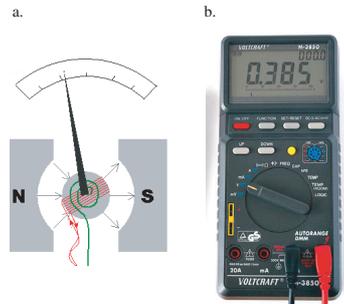


FIGURE 2.20 Ampèremètres: (a) «ancien» ampèremètre basé sur les effets magnétiques du courant; (b) multimètre moderne.

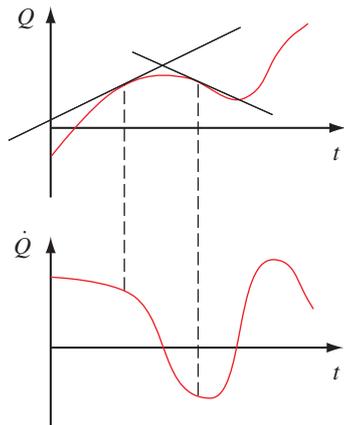


FIGURE 2.21 Détermination graphique du taux de variation de la charge électrique.

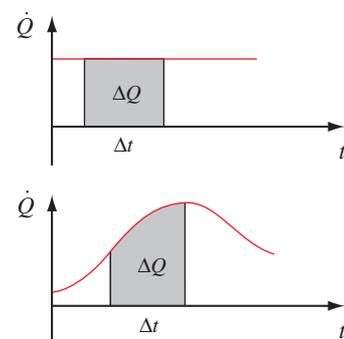


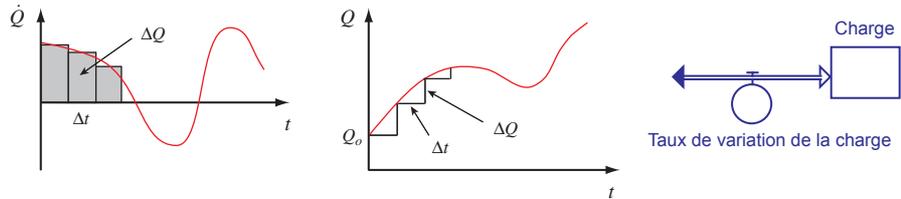
FIGURE 2.22 Variation de la charge d'un système calculée à partir de son taux de variation.

Si l'on connaît la valeur initiale de la charge $Q(t=0) = Q_0$, il est possible de la calculer en fonction du temps. Si le taux de variation est donné sous forme analytique, on obtiendra la charge en fonction du temps par intégration :

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t \dot{Q}(t) d\tilde{t} \tag{2.7}$$

Dans les autres cas, on obtiendra ce résultat graphiquement ou numériquement (avec une feuille de calcul ou au moyen d'un outil de modélisation des systèmes dynamiques (fig. 2.23).

FIGURE 2.23 Détermination de la charge en fonction du temps à partir du taux de variation et de la valeur initiale par intégration numérique. À droite : intégrateur dans un logiciel de dynamique des systèmes.



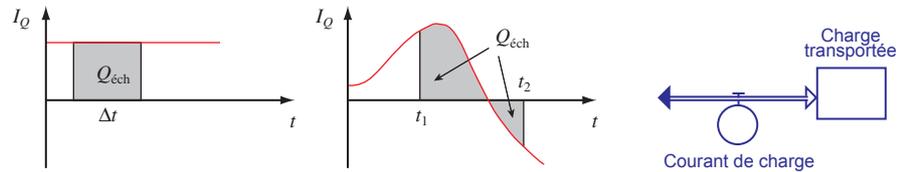
2.2.3 Courants et quantités échangées

Charge transportée. Si l'on connaît l'intensité du courant en fonction du temps, comme c'est le cas dans la figure 2.19, on obtient la charge transportée ou échangée par intégration :

$$Q_{\text{éch}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} I_Q(t) dt \tag{2.8}$$

Rappelons que dans les outils de dynamique des systèmes, tels que STELLA, cette intégration est effectuée automatiquement si l'on représente le courant par un symbole de «flow» connecté à un symbole de «stock» (bas de la figure 2.24). Le stock contiendra la quantité échangée.

FIGURE 2.24 La charge transportée par un courant électrique est calculée par intégration. Le résultat de cette opération correspond à l'aire comprise entre la courbe $I_Q(t)$ et l'axe t . Dans la partie droite de la figure, la même opération réalisée au moyen des outils de dynamique des systèmes.



2.2.4 Différence de potentiel

En tant que variation de la grandeur intensive, la différence de potentiel entre deux points A et B est définie comme la différence de la valeur en B et de la valeur en A :

$$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A \tag{2.9}$$

On appelle tension électrique (ou chute de potentiel) U_{AB} entre les points A et B d'un système l'opposé de la différence de potentiel entre ces deux points :

$$U_{AB} = -\Delta\varphi_{AB} = -(\varphi_B - \varphi_A) = \varphi_A - \varphi_B \tag{2.10}$$

Nous montrerons (section 2.4) que la tension est positive sur une résistance dans le sens conventionnel du courant (flux de charges positives), alors qu'elle est négative entre les bornes d'une batterie dans le sens du courant.

1. Quelle est la grandeur extensive liée aux phénomènes électriques? Quelles sont ses particularités?
2. Pourquoi a-t-on besoin d'une convention au sujet du courant électrique?
3. Quelle est la particularité de la tension électrique?



1. La grandeur extensive servant à décrire les phénomènes électriques est la charge électrique. Il en existe deux sortes, dites positive et négative. La charge électrique est quantifiée, ce qui signifie que la charge totale d'un système est un multiple d'une charge élémentaire désignée par le symbole e . La charge électrique est une grandeur conservée, ce qui veut dire qu'elle ne peut être ni produite, ni détruite. La charge d'un système est due à des courants de charge, jamais à une création ou annihilation.
2. À cause de l'existence de deux types de charges électriques. Selon cette convention, le courant électrique est un flux de charges positives.
3. La tension électrique est l'opposé de la différence de potentiel électrique. Une diminution du potentiel correspond à une tension positive, raison pour laquelle on utilise la notion de chute de potentiel lorsque l'on parle de la tension électrique.



EXEMPLE 2.1. Évaluation de la charge transportée par un courant.

Le courant à travers une résistance croît linéairement de 0.20 A à 1.0 A en l'espace de 100 s. (a) Quelle quantité de charge s'est écoulée à travers une section du conducteur. (b) Établir la forme analytique de l'évolution de la charge transportée en fonction du temps.

SOLUTION: (a) La charge transportée correspond à l'aire d'un trapèze, comme dans la partie gauche de la figure 2.19, soit:

$$Q_{\text{éch}}(0\text{s}, 100\text{s}) = \frac{1}{2}(0.20\text{ A} + 1.0\text{ A})100\text{ s} = 60\text{ C}$$

(b) À partir des données, on trouve que l'évolution du courant est donnée par:

$$I_Q(t) = 0.20\text{ A} + 0.008\text{ A s}^{-1} \cdot t$$

Par intégration, on obtient:

$$Q_{\text{éch}}(t) = \int_0^t I_Q(\tilde{t})d\tilde{t} = 0.20\text{ A} \cdot t + 0.004\text{ A s}^{-1} \cdot t^2$$

$$Q_{\text{éch}}(t) = \int_0^t I_Q(\tilde{t})d\tilde{t} = 0.20\text{ A} \cdot t + 0.004\text{ A s}^{-1} \cdot t^2$$



2.3 ANALYSE DE SYSTÈME I: BILANS DE CHARGE

Comme en hydraulique, il y a deux étapes principales dans la préparation de la modélisation d'un système électrique. La première consiste en l'identification des courants électriques et des bilans de charge, ce que nous allons discuter ci-dessous. La seconde étape servira à l'identification des tensions, ce qui sera l'objet de la section 2.4.

2.3.1 Bilan

Dans le circuit de la figure 2.25, il y a deux éléments de stockage. Un courant d'intensité I_{Q1} émerge du condensateur désigné par C_1 . Ce courant se ramifie au point A en deux courants d'intensités respectives I_{Q2} et I_{Q3} . Nous allons justifier le fait que :

$$I_{Q1} = I_{Q2} + I_{Q3} \tag{2.11}$$

Nous énonçons une équation de bilan pour chacune des quantités accumulées (usuellement en forme dynamique, c'est-à-dire en forme instantanée), pour relier le taux de variation du contenu de chaque système avec les processus qui en sont la cause :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -I_{Q1} \\ \dot{Q}_2 &= I_{Q2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

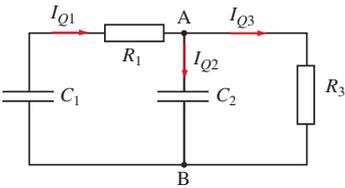
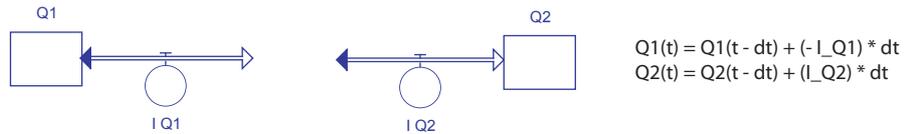


FIGURE 2.25 Schéma de montage d'un circuit constitué de deux condensateurs et de deux résistances.

FIGURE 2.26 Représentation des équations de bilan des charges pour les deux condensateurs de la figure 2.25 au moyen de diagrammes de dynamique des systèmes.



Sans les relations représentant les processus, ce bilan n'est pas d'une grande utilité. Dans un premier temps, nous allons examiner ce qui se passe au point A du circuit de la figure 2.25.

2.3.2 Première loi de KIRCHHOFF: conservation de la charge

Au point A du circuit de la figure 2.25, que l'on appelle un *nœud* du circuit, le courant se ramifie dans les deux branches qu'il rencontre. Comme il n'y a aucun élément susceptible de stocker la charge incidente, nous devons admettre que la somme des intensités des courants entrant dans le nœud est égale à celle des intensités des courants émergeant du nœud, ce qui revient à dire que la somme algébrique de toutes les intensités doit être nulle (fig. 2.27).

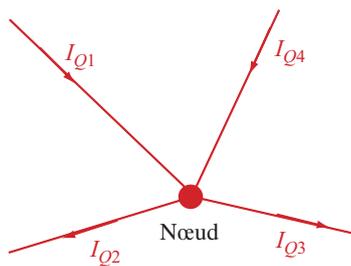


FIGURE 2.27 Dans un nœud du circuit, la charge ne peut s'accumuler; la somme des intensités des courants entrants doit être égale à celle des intensités des courants sortants.

Dans les ramifications d'un circuit électrique (que l'on appelle des nœuds du circuit), la charge ne peut pas s'accumuler. Sa variation est donc nulle, et il s'ensuit que, dans un nœud, l'équation de bilan des charges prend la forme :

$$\sum_j I_{Q,j} = I_{Q1} + I_{Q2} + I_{Q3} + \dots = 0 \tag{2.13}$$

Cette loi est la première loi de KIRCHHOFF ou loi des nœuds.

Lors de l'application de cette loi, on associe à chaque intensité une flèche de référence (que l'on dessine sur le conducteur) qui indique le sens du courant conventionnel et l'on compte positivement les courants qui vont vers le nœud et négativement ceux qui en émergent. Dans des circuits ramifiés, on ne sait pas à l'avance dans quel sens circulent certains courants; on leur attribue donc un sens arbitraire. Si les calculs donnent pour une certaine intensité une valeur négative, cela signifie que le courant en question circule dans le sens opposé à celui que l'on a admis.

Modélisation de la loi des nœuds. Dans un diagramme de dynamique des systèmes, un nœud du circuit sera représenté par un stock vers lequel convergent ou duquel émergent les courants. La loi des nœuds exprimera la relation qui assurera que le contenu de ce stock reste toujours nul.

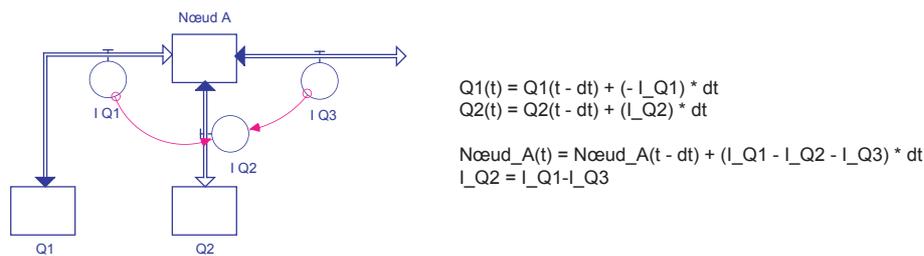


FIGURE 2.28 Diagramme de dynamique des systèmes intégrant la loi des nœuds: le nœud est représenté par un stock dont le contenu est toujours nul. La loi des nœuds permet de calculer une intensité en fonction des deux autres (supposées connues ou calculables).

Les connecteurs expriment la loi des nœuds sous la forme:

$$I_{Q2} = I_{Q1} - I_{Q3}$$

Les lois constitutives que nous énoncerons dans les sections suivantes nous permettront de déterminer les intensités en fonction des particularités physiques des éléments auxquelles elles sont associées.

L'application de la loi des nœuds au nœud B du circuit de la figure 2.25 fournit une équation identique à l'équation (2.11), ce qui implique que ce nœud est équivalent au nœud A.

1. Le second condensateur de la figure 2.25 reçoit, durant une certaine période, une quantité de charge de 2.0 C venant du premier condensateur. Durant la même période, il perd 3.0 C à travers la seconde résistance. Quelles sont les variations de charge pour chacun des condensateurs?
2. Les énoncés (2.11) et (2.13) de la loi des nœuds sont-ils équivalents? Qu'est-ce qui les différencie?

Q

1. La variation de charge du premier condensateur est de -2.0 C, celle du second est de -1.0 C.
2. Ils sont équivalents. Dans l'énoncé (2.11), on compte positivement dans le membre de gauche les courants qui vont vers le nœud et positivement dans le membre de droite ceux qui en émanent. Dans l'énoncé (2.13), on compte positivement les courants qui vont vers le nœud et négativement ceux qui en émanent; leur somme est égale à zéro (le nœud ne peut pas accumuler de charge).

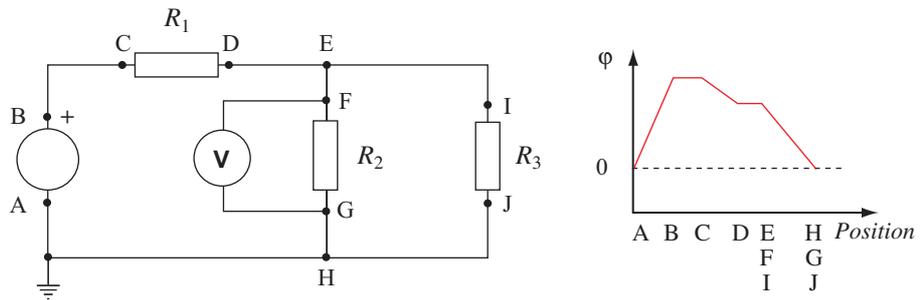
R

2.4 ANALYSE DE SYSTÈME II: POTENTIELS ET TENSIONS

Les potentiels jouent le rôle de niveaux électriques. Les différences de potentiels, les tensions, sont les différences de niveau qui entraînent les processus électriques. De manière alternative, il existe des processus qui provoquent l'apparition d'une différence de potentiel.

Différences de potentiel dans des circuits fermés. L'évolution du potentiel (du niveau électrique) le long des branches d'un circuit électrique peut se mesurer en branchant un voltmètre en parallèle au segment du circuit entre les extrémités duquel règne la tension que l'on veut mesurer. Comme nous le verrons plus loin, un voltmètre est un galvanomètre à cadre mobile dont l'étalonnage a été modifié en tenant compte de sa caractéristique $U-I_Q$ pour lui permettre d'indiquer une tension.

FIGURE 2.29 Représentation graphique de l'évolution du potentiel.



Dans un circuit fermé, on obtient une sorte de «paysage électrique» que l'on peut visualiser dans un diagramme où l'on reporte l'évolution du potentiel ϕ en fonction de la position dans le circuit (c'est exactement la même chose que ce que nous faisons en hydraulique lorsque nous reportons la pression P en fonction de la position dans le circuit hydraulique). Dans le circuit ci-dessus, nous avons admis que les fils électriques qui relient entre eux les divers éléments n'offrent aucune résistance au passage du courant électrique et ne provoquent donc pas de chute de potentiel. L'étude d'un tel diagramme révèle une particularité des circuits électriques, à savoir que lorsque l'on retourne au point de départ, on a rencontré autant d'augmentations que de diminutions du potentiel, ce qui implique que la somme des variations de potentiel est nulle. Ce constat s'énonce sous forme de loi.

Lorsque l'on parcourt un circuit (une maille) simple, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum_i U_i = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + \dots = 0 \quad (2.14)$$

Cette loi est la deuxième loi de KIRCHHOFF ou loi des mailles.

Comme dans une pompe hydraulique (qui sert à élever la pression), le niveau électrique (potentiel) s'élève dans une source. La charge est «pompée» d'un niveau électrique bas vers un niveau électrique élevé. La différence de niveau est alors positive, ce qui veut dire que la tension aux bornes de la batterie est négative. Pour une source, on dessinera donc une «flèche de référence» pour indiquer la tension ou chute de potentiel dans le sens opposé à celui du courant conventionnel.

Pour un «consommateur» (par exemple une résistance R ou un moteur), le niveau électrique baisse, ce qui veut dire que la tension (chute de potentiel) est positive. La flèche de référence liée à la tension sur le consommateur aura le même sens que celui du courant. Entre les extrémités de segments parallèles, la chute de potentiel est la même.

Comme lors de l'application de la loi des nœuds, il est important de respecter les règles relatives aux signes. Après avoir introduit les flèches de référence, pour chacune des mailles, on choisit un sens de parcours et, à partir d'un point de départ, on additionne les tensions (différences de potentiel) en les comptant positivement si l'on se déplace dans le sens de la flèche de référence, négativement dans le cas contraire.

Différences de potentiel et processus. Les différences de potentiel, les tensions sont associées à différents types de processus et de systèmes, dont une partie seront étudiés dans les sections qui suivent. Ce sont:

- les charges accumulées dans des condensateurs (section 2.5);
- les résistances des conducteurs électriques (symbole: fig. 2.30), étudiées à la section 2.6;
- les batteries, générateurs et autres alimentations (symbole: fig. 2.31), qui seront traités à la section 2.7;
- les appareils électriques;
- les commutateurs électroniques;
- les variations des flux (seront étudiées au chapitre 4).

À chaque type d'élément utilisé dans un système, et pour chaque situation particulière, on doit énoncer une loi particulière dite *loi constitutive*. Elles n'ont pas une portée générale comme les équations de bilan, la loi des nœuds et la loi des mailles. Elles décrivent les particularités des processus et des objets.

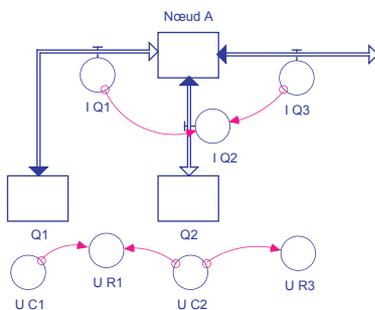
Nous allons voir dans les sections suivantes qu'il existe une loi constitutive pour chacune des différences de potentiel apparaissant dans un système.

L'application de la loi des mailles à chacune des deux mailles du circuit de la figure 2.25 (en partant à chaque fois du point B et en parcourant la maille dans le sens horaire) donne:

$$-U_{C1} + U_{R1} + U_{C2} = 0$$

$$-U_{C2} + U_{R3} = 0$$

Modélisation de la loi des mailles. La figure 2.32 montre comment la loi des mailles est prise en compte dans les logiciels de dynamique des systèmes.



$$Q1(t) = Q1(t - dt) + (- I_Q1) * dt$$

$$Q2(t) = Q2(t - dt) + (I_Q2) * dt$$

$$Nœud_A(t) = Nœud_A(t - dt) + (I_Q1 - I_Q2 - I_Q3) * dt$$

$$I_Q2 = I_Q1 - I_Q3$$

$$U_R1 = U_C1 - U_C2$$

$$U_R3 = U_C2$$

Dans les deux cas, les tensions sur les résistances sont déterminées à partir des tensions sur les condensateurs qui peuvent être calculées à partir de la loi de capacité (section 2.5).

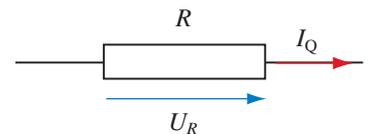


FIGURE 2.30 Tension engendrée par le passage du courant à travers une résistance.

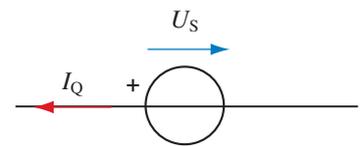


FIGURE 2.31 Symbole d'une source de tension en régime continu. Le signe + indique le pôle positif de la source (qui peut être une pile, une batterie, un générateur, etc.).

FIGURE 2.32 Diagramme de dynamique des systèmes modélisant le circuit de la figure 2.25 après introduction de la loi des mailles pour les deux mailles du circuit.

1. La partie droite de la figure 2.29 montre, entre autres, l'évolution du potentiel dans la boucle gauche du circuit. Combien de tensions y trouve-t-on? Comment sont-elles liées entre elles?
2. Quelle est la relation entre les tensions sur les résistances R_2 et R_3 ? Pourquoi?
3. Un moteur électrique contient des bobines de fil métallique qui a des propriétés résistives. La tension que l'on mesure aux bornes du moteur lorsqu'il fonctionne correspond-elle à celle qui est responsable de l'échauffement?



1. Il y a trois tensions: la tension négative sur l'alimentation (entre A et B) et deux tensions positives, sur les résistances R_1 et R_2 . Leur somme est nulle.
2. Les deux tensions sont égales, car les résistances sont montées en parallèle. Les courants qui se ramifient au point E se rejoignent au point H en ayant franchi la même différence de potentiel (comme un courant d'eau qui s'écoule de part et d'autre d'une île au milieu d'un fleuve: la différence de niveau est la même).
3. Non, cette tension a deux composantes: la plus importante est celle qui sert à entraîner le mouvement du moteur et la moins importante, mais non négligeable, est due à la composante résistive.



EXEMPLE 2.2. Application des lois de KIRCHHOFF.

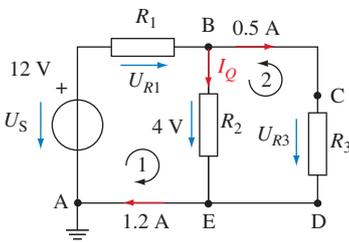


FIGURE 2.33 Analyse d'un circuit électrique.

Dans le circuit de la figure 2.33 sont indiquées les valeurs de certaines tensions et de certaines intensités. Déterminez les valeurs manquantes. Quelle est la valeur du potentiel électrique en C, si on le fixe à zéro en A (mise à terre)?

SOLUTION: L'intensité du courant est de 1.2 A dans la branche de la source et de la résistance R_1 et de 0.5 A dans la branche de la résistance R_3 . Le premier de ces deux courants entre dans le nœud B alors que le second en sort. Il s'ensuit que le courant I_Q dans la branche de la résistance R_2 doit être égal à leur différence, à savoir 0.7 A; comme sa valeur est positive, il circule de B vers E. L'application de la loi des mailles dans la maille 1 donne, si l'on choisit le sens de parcours indiqué par la flèche et si l'on commence le parcours en A: $-12\text{ V} + U_{R1} + 4\text{ V} = 0\text{ V}$. On en déduit que U_{R1} vaut +8 V. Dans la maille 2, les tensions entre B et E et entre C et D sont les mêmes, vu que les deux segments sont montés en parallèle; nous avons donc $U_{R3} = 4\text{ V}$. Mais comme il s'agit d'une chute de potentiel, et que le potentiel en D est le même qu'en A, nous pouvons conclure que le potentiel en C vaut +4 V.

Dès que les circuits deviennent plus compliqués, on ne peut plus procéder comme ci-dessus, mais on doit appliquer de manière systématique les deux lois de KIRCHHOFF. Dans cet exemple, nous obtenons de cette manière:

$$\begin{aligned} \text{Nœud B:} & \quad 1.2\text{ A} - 0.5\text{ A} - I_Q = 0\text{ A} \\ \text{Maille 1:} & \quad -12\text{ V} + U_{R1} + 4\text{ V} = 0\text{ V} && \text{(début du parcours en A)} \\ \text{Maille 2:} & \quad -4\text{ V} + U_{R3} = 0\text{ V} && \text{(début du parcours en E)} \end{aligned}$$

Il est clair que la résolution de ce système (de 3 équations à 3 inconnues) donne les résultats obtenus plus haut.



2.5 CONDENSATEURS ET LOI DE CAPACITÉ

La plupart des éléments dans une installation électrique conduisent la charge sans l'accumuler. Si l'on veut accumuler des charges, on a recours à des éléments spécialement conçus à cet effet que l'on appelle des condensateurs. Ces éléments, avec les éléments inductifs que nous étudierons au chapitre 4, sont à l'origine du comportement dynamique des circuits électriques.

2.5.1 Stockage d'électricité: charge et tension

Les condensateurs les plus simples sont les sphères montées sur une support isolé que nous avons chargées dans les expériences fondamentales de la section 2.1 (fig. 2.34 a). Mais il n'est pas possible de les intégrer dans des circuits, ce qui nous oblige à développer des condensateurs qui prennent peu de place tout en ayant une grande capacité de stockage. Le prototype est le condensateur à plaques parallèles (fig. 2.34 b). Dans un tel condensateur, on déplace, au moyen d'une source, des charges d'une des plaques sur l'autre, ce qui veut dire qu'une des plaques porte la charge opposée à celle de l'autre. La charge totale du condensateur est donc nulle, mais on dit que sa charge est celle de l'une des plaques (en général la plaque positive). Nous verrons plus bas comment, à partir de ce prototype historique, on conçoit des condensateurs que l'on peut intégrer dans des circuits par réduction du volume occupé tout en augmentant les qualités de stockage

Caractéristique capacitive. Lorsque l'on charge un condensateur, une tension apparaît entre ses bornes, tension qui croît avec la charge accumulée. Il existe donc une relation entre la charge accumulée et la tension associée que l'on désigne par U_C . Cette relation est la *caractéristique capacitive* (fig. 2.35a). Une autre manière de représenter cette relation est d'utiliser l'analogie hydraulique (fig. 2.35b), au moyen d'une cuve imaginaire dont le contenu représente la charge et le niveau la tension U_C . En général, la caractéristique n'est pas linéaire. Une relation linéaire correspond à une capacité constante; dans ce cas, la section de la cuve imaginaire représente la capacité du condensateur.

Or, l'analogie hydraulique d'un condensateur, que nous avons introduite et utilisée à la section 2.1, est celle d'un récipient à parois verticales dont le contenu correspond à la charge, le niveau à la tension (par rapport au niveau 0) et la section à la capacité, en analogie à ce qui a été défini au chapitre 1 pour les récipients hydrauliques.

La loi de capacité établit le lien entre la tension aux bornes d'un condensateur et sa charge au moyen de la capacité électrique C_Q qui indique avec quelle facilité il est possible d'augmenter la tension avec une certaine quantité de charge:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= C_Q \dot{U}_C & \Leftrightarrow & & C_Q &= \frac{\dot{Q}}{\dot{U}_C} = \frac{dQ}{du} & (2.15) \\ Q &= C_Q U_C & \text{si} & & C_Q &= \text{const} \end{aligned}$$

La capacité électrique C_Q se mesure en farad (F). Un farad correspond à un As V^{-1} .

La relation caractéristique peut également être exprimée au moyen de l'*élastance électrique* α_Q , qui est le facteur indiquant avec quelle facilité il est possible d'augmenter la tension avec une certaine quantité de charge:

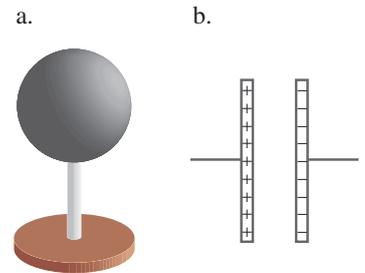


FIGURE 2.34 Condensateurs: (a) condensateur sphérique; (b) condensateur à plaques parallèles.

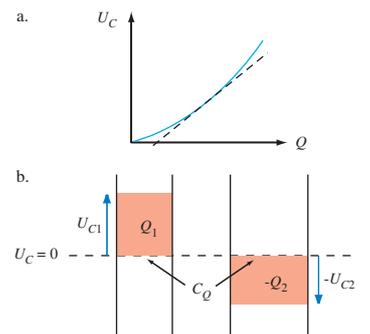


FIGURE 2.35 Condensateurs: (a) tension en fonction de la charge accumulée; la pente de la courbe caractéristique est l'élastance du condensateur; (b) analogie hydraulique de condensateurs; un condensateur est comme une cuve qui stocke la charge Q , qui peut être positive ou négative. Le niveau de la «cuve» dépend de la quantité accumulée divisée par la section de la cuve, qui symbolise la capacité.

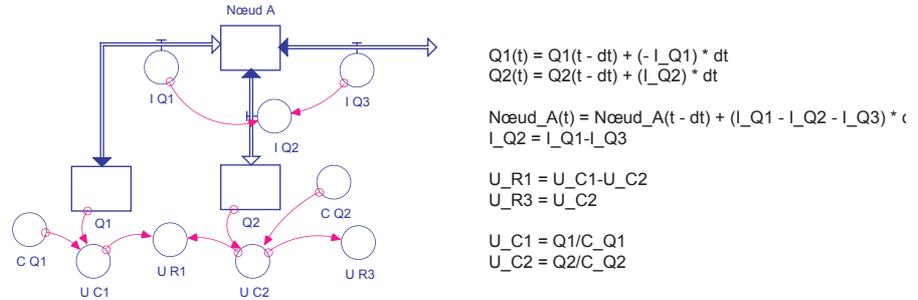
$$\dot{U}_C = \alpha_Q \dot{Q} \Leftrightarrow \alpha_Q = \frac{\dot{U}_C}{\dot{Q}} = \frac{dU_C}{dQ} \tag{2.16}$$

$$U_C = \alpha_Q Q \quad \text{si} \quad \alpha_Q = \text{const}$$

α_Q est égal à la pente de la tangente à la courbe caractéristique (fig. 2.35a).

Modélisation de la loi de capacité. La figure 2.36 montre comment la loi de capacité est prise en compte dans les logiciels de dynamique des systèmes.

FIGURE 2.36 Diagramme de dynamique des systèmes modélisant le circuit de la figure 2.25 après introduction de la loi de capacité pour chacun des condensateurs.



La tension aux bornes de chacun des condensateurs est calculée à partir de l'équation pour une capacité constante.

2.5.2 Types de condensateurs

Comme dans le cas hydraulique, la capacité d'un condensateur dépend essentiellement de sa géométrie. Les capacités des condensateurs usuels sont en général très petites (pF à mF). À défaut de mesures particulières, il n'est possible d'accumuler que de très petites quantités de charge. Une sphère de 10 cm de rayon a une capacité d'environ 10 pF (fig. 2.37), ce qui veut dire qu'elle ne pourra pas emmagasiner une charge beaucoup plus importante que quelques mC; en effet, la tension entre sa surface et le sol est alors de l'ordre de la centaine de kilovolts. Dans les calculs ci-contre, la grandeur:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1} = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

est la *constante diélectrique* ou *permittivité du vide*. C'est une constante de la nature qui prend en compte les propriétés électriques du vide. On peut montrer que c'est cette constante, liée à une constante magnétique appelée constante d'induction ou perméabilité magnétique du vide, qui détermine la vitesse de la lumière dans le vide

La formule donnant la capacité d'un condensateur à plaques parallèles

$$C_Q = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.17}$$

montre comment sa géométrie influence ses propriétés de stockage. Il sera d'autant meilleur que sa surface est grande et que la distance entre les plaques est faible. Or, on ne peut pas diminuer arbitrairement cette distance sans courir le risque de décharge spontanée (à travers l'espace qui sépare les deux plaques). On y remédie en intercalant une fine couche isolante entre les deux plaques, par exemple une feuille de papier paraffiné. On observe alors que, à charge constante, la tension entre les plaques diminue, ce qui équivaut à une augmentation de la capacité. Ce phénomène s'explique de la manière suivante: en présence du champ électrique engendré par les charges sur les plaques du condensateur, les molécules de l'isolant sont polarisées par le phénomène

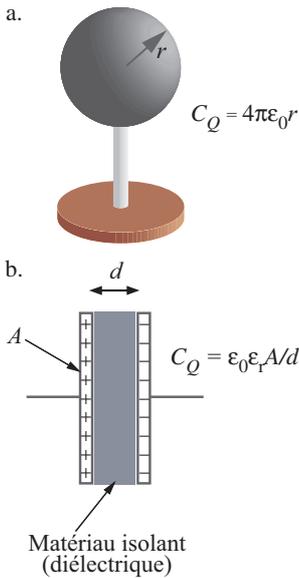


FIGURE 2.37 Évaluation de la capacité de divers condensateurs: (a) condensateur sphérique; (b) condensateur à plaques parallèles.

d'influence et s'orientent de telle manière que leur extrémité positive est dirigée vers la plaque négative, et réciproquement. D'autre part, cette polarisation provoque l'apparition d'un champ dipolaire moléculaire (section 13.6) qui est de sens opposé à celui du condensateur et l'affaiblit, ce qui entraîne la diminution de la tension observée. On tient compte de l'augmentation de la capacité au moyen d'un coefficient multiplicatif ϵ_r appelé *constante diélectrique* ou *permittivité relative* du matériau.

$$C_Q = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.18)$$

Cette analyse nous permet également de comprendre pourquoi les isolants sont parfois désignés par le terme de *diélectrique*, ce qui signifie en fait «transparent pour le champ électrique», mais non conducteur du courant électrique.

Pour augmenter la surface du condensateur sans occuper trop de place, on utilise de longues feuilles métalliques très minces entre lesquelles on intercale les feuilles isolantes et l'on enroule le tout pour obtenir ainsi un condensateur enroulé (fig. 2.38). Il existe encore d'autres types de condensateurs, dont les particularités sont adaptées aux objectifs visés. Le principe reste le même, mais le diélectrique change; on obtient ainsi des condensateurs à film plastique, des condensateurs céramiques (un dépôt d'argent est déposé directement sur le support céramique), des condensateurs électrolytiques constitués par une électrode (anode) formée d'aluminium ou de tantale, recouverte d'une couche très fine de son oxyde; l'autre électrode (cathode) se compose du même métal et elle est en contact avec l'électrolyte; ces derniers condensateurs sont polarisés.

De nombreuses applications techniques nécessitent des capacités bien plus importantes que le micro- ou le millifarad. Nous reviendrons à la section 2.8 sur des systèmes d'accumulation de charge appelés supercondensateurs.

On peut, en appliquant les lois de KIRCHHOFF, montrer que le montage de capacités peut être remplacé par une capacité équivalente, à savoir que les capacités de condensateurs montés en parallèle s'additionnent, alors que pour le montage en série, ce sont les inverses des capacités qui s'additionnent.

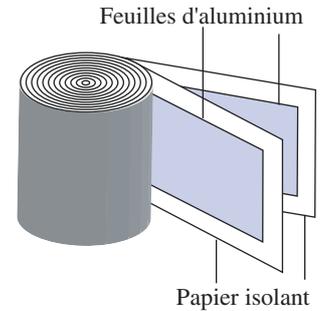


FIGURE 2.38 Principe du condensateur enroulé.

1. Comment se présente la caractéristique d'un condensateur qui a une capacité constante?
2. Expliquez la signification de la capacité électrique.
3. Quelle est la charge d'un condensateur de $100 \mu\text{F}$ de capacité si on le branche à une source qui délivre une tension de 100 V ?

Q

1. Dans le diagramme U_C - Q , c'est une droite dont la pente est l'inverse de la capacité.
2. La capacité électrique indique avec quelle facilité il est possible d'augmenter la charge du condensateur pour une augmentation donnée de la tension.
3. La charge est égale à 10 mC .

R

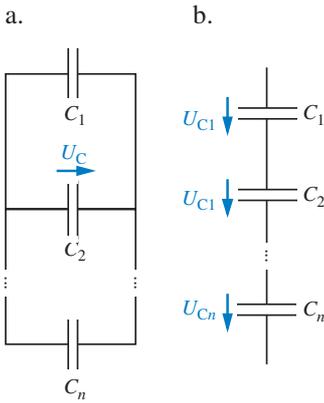


FIGURE 2.39 Montage de condensateurs : (a) en parallèle ; (b) en série.

EXEMPLE 2.3. Associations de condensateurs.

Déterminer la capacité équivalente : (a) de condensateurs montés en parallèle (fig. 2.39a) ; (b) de condensateurs montés en série (fig. 2.39b).

SOLUTION : (a) Tous les condensateurs ont en commun la même tension U_C . La charge totale du montage est égale à la somme des charges. Il s'ensuit :

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 U_C + C_2 U_C + \dots + C_n U_C = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U_C$$

Donc : $C_{\text{parallèle}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

(b) Tous les condensateurs portent la même charge Q (qui est la charge du montage en série), et les tensions s'additionnent ; donc :

$$U_{\text{tot}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

Ainsi : $C_{\text{série}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)^{-1}$



2.6 LOI DE RÉSISTANCE ET MÉCANISMES DE TRANSPORT

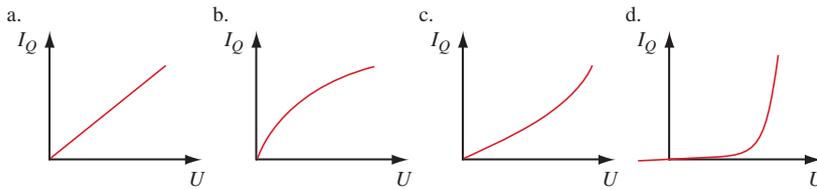
Dans cette section, nous allons déterminer quels facteurs déterminent l'intensité d'un courant électrique lorsqu'il franchit une différence de potentiel due à la présence d'un élément résistif. Nous serons ainsi amenés à envisager différents processus de transport et à énoncer la loi de résistance pour le cas particulier des conducteurs métalliques.

2.6.1 Transport de l'électricité

Il est possible de transporter des charges électriques en déplaçant un corps chargé. On parle alors de *convection* (la charge est transportée avec l'objet ou la substance qui se déplace, comme c'était le cas dans l'expérience de la figure 2.2). On rencontre ce même phénomène de transport de l'électricité par convection par exemple dans les gaz ionisés, ou dans le jet d'électrons d'un téléviseur de première génération.

Le cas usuel est celui où la charge s'écoule à travers un matériau sans qu'il y ait transport conjoint de matière ; on parle alors de *conduction* de la charge. Les exemples sont nombreux : les électrolytes (liquides conducteurs), les métaux normaux (conduction des électrons), quelques semi-conducteurs (qui peuvent présenter une conduction de charges négatives, les électrons, ou de charges positives, les trous). Nous reviendrons plus en détail sur ces mécanismes en fin de section.

Lorsque l'on applique une tension entre les deux extrémités d'un élément d'un circuit, un courant apparaît, dont l'intensité dépend de la valeur de la tension. La relation entre ces deux grandeurs varie d'un matériau à l'autre. On la représente graphiquement au moyen d'un diagramme que l'on appelle la *caractéristique résistive* de l'élément en question. Elle indique avec quelle facilité le matériau conduit l'électricité.



La figure 2.40. montre quelques exemples sur lesquels nous allons revenir en cours de chapitre. La pente de la courbe caractéristique est d'autant plus prononcée que le courant circule facilement à travers l'élément considéré.

Loi de résistance pour un conducteur métallique (loi d'OHM). Au moyen d'une expérience simple (fig. 2.41), nous allons rechercher le lien entre l'intensité et la tension entre les extrémités d'un conducteur métallique. Nous varions la tension entre les extrémités d'un conducteur métallique et mesurons l'intensité du courant qui le parcourt. Nous constatons que, pour autant qu'elle ne soit pas trop importante, l'intensité est proportionnelle à la tension. À tension constante, l'intensité varie d'un matériau à l'autre (fig. 2.40a).

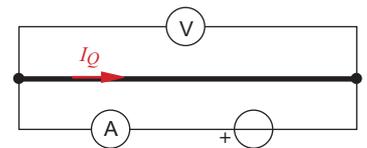


FIGURE 2.41 Montage expérimental pour l'établissement de la loi de résistance.

L'intensité du courant qui s'établit dans un conducteur métallique est proportionnelle à la tension entre ses deux extrémités, ce qui peut s'exprimer de deux manières :

$$U_R = R_Q I_Q \quad \text{ou} \quad I_Q = G_Q U_R \quad (2.19)$$

Dans ces relations, qui énoncent la loi d'OHM, R_Q et G_Q représentent respectivement la résistance et la conductance du conducteur. La comparaison montre que, comme en hydraulique, chacune de ces grandeurs est l'inverse de l'autre :

$$G_Q = \frac{1}{R_Q} \quad (2.20)$$

La résistance électrique se mesure en ohm (Ω) et son inverse, la conductance en siemens (S).

Notons que nous avons déjà rencontré l'équivalent de la loi d'OHM en hydraulique lorsque nous avons énoncé la loi de résistance pour un écoulement en régime laminaire (loi de HAGEN-POISEUILLE) :

$$\Delta p_R = -R_V I_V \quad \text{ou} \quad I_V = -G_V \Delta p_R$$

Nous voyons que les deux énoncés sont identiques, au signe négatif près. Cette différence provient du fait qu'en électricité, on travaille avec les tensions qui sont des variations de potentiel négatives, alors qu'en hydraulique, on travaille directement avec les différences de pression.

Dans les deux cas, l'origine de la chute de pression ou de la chute de potentiel est due aux « frottements » dans les conduites qui entraînent une production de chaleur (fig. 2.42). Nous reviendrons sur ce phénomène aux chapitres 3 et 5.

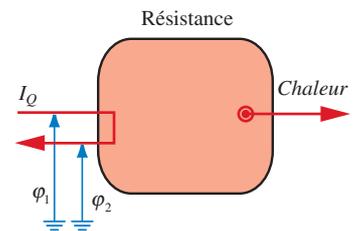


FIGURE 2.42 Diagramme de processus représentant la loi de résistance. Le courant traverse la résistance et en émerge à un potentiel plus bas, une partie de l'énergie transportée par le courant ayant servi à produire de la chaleur (le point entouré d'un cercle symbolise la production de chaleur).

FIGURE 2.43 Diagramme de dynamique des systèmes modélisant le circuit de la figure 2.25 après introduction de la loi de résistance. Le modèle est complet.

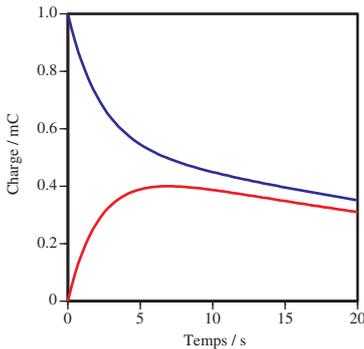
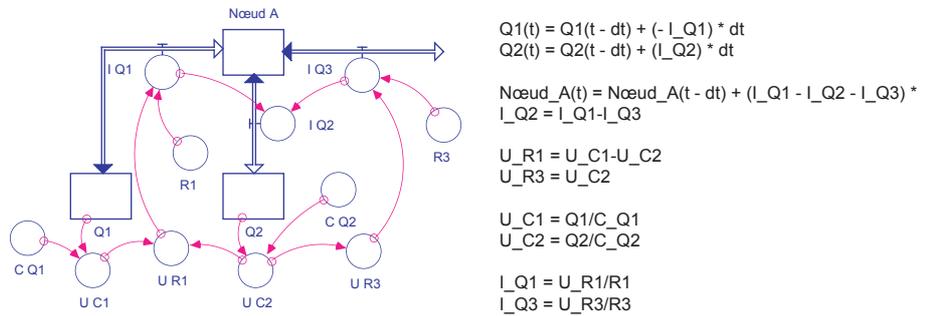


FIGURE 2.44 Simulation du comportement du système de la figure 2.25.

Les résistances et la tension aux bornes de chacune d'elles étant connues, la loi d'OHM (2.19) permet de calculer les intensités respectives.

La figure 2.44 montre le résultat de la simulation pour un système constitué de deux condensateurs de capacité égale à 100 µF, connectés par la résistance R₁ de 50 kΩ. La résistance R₃ vaut 300 kΩ. Au début du processus, le premier condensateur est chargé à 10 V, le second est déchargé. On observe que le premier condensateur se décharge au profit du second, qui lui-même se décharge à travers la résistance R₃.

Notons que, dans le cas particulier, on peut éviter l'introduction du nœud A au moyen d'un stock. La figure 2.45 montre le modèle dans sa version simplifiée. Mais s'il y avait eu, par exemple, une résistance ou tout autre élément dans la branche du condensateur C₂, l'introduction du nœud A n'aurait pas pu être évitée.

FIGURE 2.45 Modèle du système de la figure 2.25 évitant l'introduction du nœud A.

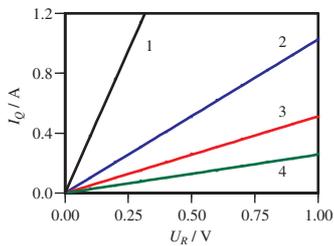
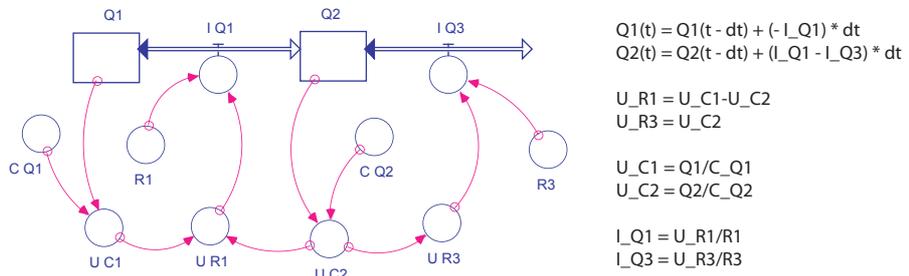


FIGURE 2.46 Caractéristiques de quelques conducteurs ohmiques: 1: chrome, l = 1 m, r = 0.4 mm; 2: constantan, l = 1 m, r = 0.4 mm; 3: constantan, l = 2 m, r = 0.4 mm; 4: constantan, l = 1 m, r = 0.2 mm.

Conducteurs ohmiques. La valeur de la résistance d'un élément résistif dépend de ses particularités. Pour déterminer quels sont ces facteurs dans le cas d'un conducteur ohmique (caractéristique linéaire), nous effectuons une expérience en variant successivement la longueur, la section et le matériau conducteur. Pour toute une catégorie de conducteurs, on trouve que la résistance est proportionnelle à la longueur l, inversement proportionnelle à la section A, et qu'elle change d'un matériau à l'autre (fig. 2.46).

La résistance ou la conductance d'un fil conducteur de longueur ℓ et de section A sont respectivement données par:

$$R_Q = \rho_{el} \frac{\ell}{A} \quad \text{ou} \quad G_Q = \sigma_{el} \frac{A}{\ell} \quad (2.21)$$

où ρ_{el} et σ_{el} sont respectivement la résistivité et la conductivité électrique du matériau.

La résistivité se mesure en $\Omega \text{ m}$ alors que la conductivité s'exprime en S m^{-1} .

Le tableau 2.1 nous indique la résistivité de quelques matériaux. Mais il met avant tout en évidence la gigantesque variation de la résistivité (26 ordres de grandeur) entre les conducteurs et les isolants.

TABEAU 2.1 Résistivité de quelques matériaux.

Matériau	Résistivité / $\Omega \text{ m}$	Matériau	Résistivité / $\Omega \text{ m}$
Argent	$1.59 \cdot 10^{-8}$	Graphite	$1.38 \cdot 10^{-5}$
Cuivre	$1.77 \cdot 10^{-8}$	Silicium	$1.7 \cdot 10^4$
Or	$2.35 \cdot 10^{-8}$	Eau	$2 \cdot 10^5$
Aluminium	$2.82 \cdot 10^{-8}$	Verre	10^{12}
Laiton	$7.0 \cdot 10^{-8}$	Ambre	10^{18}

Relevons une nouvelle fois la ressemblance des relations (2.21) avec la loi de HAGEN-POISEUILLE qui exprime la résistance et la conductance d'une conduite hydraulique en régime laminaire. Dans la loi de HAGEN-POISEUILLE, c'est le carré de la section qui intervient; cette différence provient du fait que les mécanismes de transport ne sont pas les mêmes.

Si nous introduisons l'équation (2.21) dans l'équation (2.19), nous obtenons $I_Q = A \sigma_{\text{el}} U_R / l$. Pour un conducteur homogène, I_Q / A représente la *densité du courant de charge* j_Q , alors que U_R / l est le *gradient du potentiel électrique*. Cela suggère que

$$j_Q = -\sigma_{\text{el}} \frac{d\varphi_{\text{el}}}{dx} \quad (2.22)$$

Dans cette expression, $d\varphi_{\text{el}}/dx$ est le gradient de φ_{el} qui mesure à quelle vitesse le potentiel varie dans la direction du flux de charge. L'équation (2.22) est la formulation la plus générale de la loi d'OHM. Comme σ_{el} peut dépendre de la température du conducteur, la loi d'OHM peut déboucher sur des caractéristiques non linéaires, telles que celle du filament d'une lampe à incandescence (fig. 2.40b). La particularité remarquable de la loi d'OHM est que le transport de charge est proportionnel au gradient du potentiel.

2.6.2 Mécanismes de transport de la charge électrique

Il est important de noter que la loi d'OHM n'est valable que dans le cas particulier, mais courant, des conducteurs métalliques, et pour autant que l'intensité ne soit pas trop importante. Nous voulons aborder brièvement les mécanismes de conduction de la charge électrique pour illustrer un certain nombre d'autres situations possibles.

Conduction dans les solides. Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, on pensait que le courant électrique était un flux de charges positives. Après la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1896, on comprit que, dans les métaux, la charge électrique était transportée par les électrons. Comment se déroule ce processus?

Conducteurs. Les métaux se distinguent des autres solides par une structure cristalline telle que les électrons externes n'appartiennent pas à un atome particulier, mais qu'ils sont «libres». L'explication des phénomènes sous-jacents sera donnée à la section 3.6.2, lorsque nous aurons expliqué comment l'énergie intervient dans les

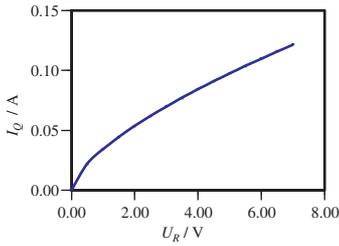


FIGURE 2.47 Caractéristique d'un conducteur métallique. Lorsque l'intensité devient trop importante, l'échauffement provoque une augmentation de la résistance.

processus physiques. Lorsque l'on applique une tension à un conducteur métallique, les électrons se mettent en mouvement, permettant ainsi le transport de l'électricité (fig. 2.47). La résistance est due à deux phénomènes : d'une part aux collisions des électrons avec les impuretés et les défauts du réseau cristallin; cette contribution à la résistance est indépendante de la température. La seconde contribution est due à l'agitation thermique du réseau cristallin qui, en quelque sorte, raccourcit la distance entre deux collisions successives. Cet effet, qui croît avec la température, est prédominant aux températures ambiantes. C'est la raison pour laquelle les métaux ont un coefficient de température positif, dont la définition sera donnée par l'équation (2.23).

Isolants. Dans un matériau isolant, les électrons sont liés tellement fortement qu'ils ne peuvent se libérer pour contribuer au transport de l'électricité. Si l'on parle encore de conductivité d'un tel matériau, c'est qu'il n'est jamais pur, et les impuretés, c'est-à-dire des atomes étrangers, contribuent à lui donner une conductivité extrêmement réduite.

Semi-conducteurs. Il existe une catégorie de matériaux qui prennent une place intermédiaire entre les conducteurs et les isolants. Il s'agit de certains éléments tétravalents (quatre électrons externes), tels que le silicium et le germanium. Comme nous le verrons à la section 3.6.2, lorsque la température augmente, des électrons acquièrent assez d'énergie pour se «libérer», laissant un trou positif dans le réseau. Ces électrons et ces trous peuvent se déplacer sous l'effet d'un champ électrique : l'isolant est devenu faiblement conducteur : c'est un semi-conducteur. On comprend pourquoi la résistivité d'un tel matériau diminue lorsque la température augmente. Ils ont un coefficient de température négatif.

Il existe un autre moyen d'augmenter la conductivité d'un semi-conducteur. On remplace par exemple une faible proportion d'atomes tétravalents du semi-conducteur par des atomes d'arsenic, qui sont pentavalents. À température ambiante, cet électron supplémentaire est disponible pour conduire l'électricité. Cette opération, appelée «dopage» du semi-conducteur, permet d'augmenter sa conductivité de manière contrôlée en dosant la concentration d'atomes dopants. On peut également doper le semi-conducteur avec des atomes trivalents, tels que le bore. Dans ce cas, l'électron manquant laisse un «trou». Ces trous se comportent comme des charges positives libres et contribuent ainsi à augmenter la conductivité du matériau. Dans le premier cas, on parle de *dopage n*, vu qu'on a apporté des porteurs de charge négative, dans le second cas de *dopage p*, vu que les trous représentent une charge positive.

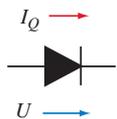


FIGURE 2.48 Symbole de la diode dans un diagramme de circuit.

Si l'on assemble deux semi-conducteurs dopés différemment en une *jonction p-n*, la diffusion des porteurs de charge à travers l'interface établit une barrière de potentiel qui ne peut être surmontée que si l'on applique une tension convenablement polarisée. On appelle *diode* un tel assemblage qui ne laisse passer le courant que dans un seul sens; une diode fonctionne de manière semblable à une valve, ce que nous illustrerons à la section 2.8.3 en modélisant l'équivalent électrique du windkessel. La figure 2.48 montre le symbole utilisé dans les schémas électriques et la figure 2.49 sa caractéristique. On utilise les diodes, entre autres dans les redresseurs de courant alternatif.

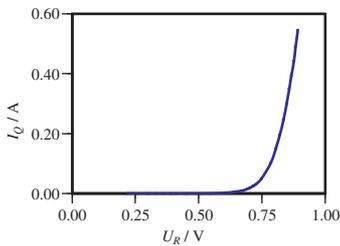


FIGURE 2.49 Caractéristique d'une diode semi-conductrice.

Conduction dans le vide. En soi, le vide est un isolant parfait. Si l'on veut transporter de l'électricité à travers le vide, il faut, au moyen de mesures adéquates, arracher des charges de la surface d'électrodes pour les amener dans l'espace dans lequel elles doivent se déplacer. On atteint cette objectif par l'émission d'électrons (canons à électrons). Le moyen le plus simple consiste à chauffer une électrode métallique, raison pour laquelle on parle d'émission thermique (ou thermoémission). Après leur émission, les électrons sont amenés vers leur objectif au moyen de champs électriques impliquant des différences de potentiel de quelques dizaines de kilovolts (tube cathodique utilisé dans certains téléviseurs ou écrans d'ordinateur).

Conduction dans les gaz. Lorsque l'électricité est transportée à travers un gaz de densité non négligeable, une quantité de nouveaux phénomènes peuvent apparaître. Les processus de transport sont essentiellement déterminés par les chocs entre les porteurs de charge (généralement les électrons) et les atomes et molécules du gaz. C'est d'une part l'énergie des porteurs de charge et, d'autre part, celle de l'ionisation du gaz qui déterminent les phénomènes physiques qui se manifestent. Nous n'allons considérer ici que le cas particulier de la lampe fluorescente.

Dans une lampe fluorescente, on revêt les parois d'une substance qui devient fluorescente dans le domaine visible. Cette fluorescence est excitée essentiellement par la partie ultraviolette du spectre du gaz de remplissage, dont la pression est de l'ordre du kPa. La décharge a lieu entre deux électrodes distantes de quelques dizaines de centimètres. La caractéristique de la lampe fluorescente est facile à interpréter (fig. 2.50). Elle montre que la résistance diminue lorsque l'intensité augmente. En effet, lorsque l'intensité augmente, la température des électrodes augmente également, ce qui entraîne une plus forte émission d'électrons, et par le fait même, une ionisation plus importante du gaz par l'intermédiaire des chocs. L'augmentation de la densité des porteurs de charge entraîne une augmentation de la conductivité.

Conduction dans les électrolytes. Les électrolytes sont des sels fondus ou dissous, tels que l'oxyde d'aluminium (la bauxite), le chlorure de sodium (sel de cuisine) ou l'acétate de plomb dans de l'eau. Si l'on plonge une paire d'électrodes dans le sel fondu ou dans la solution et que l'on applique une tension, un courant circule et des réactions chimiques ont lieu. Dans du sel de cuisine fondu, du sodium métallique se dépose sur l'électrode négative (la cathode) et il y a dégagement de chlore à l'électrode positive (l'anode). C'est un processus identique qui permet d'obtenir de l'aluminium métallique à partir de la bauxite. Un autre exemple est la déposition de plomb sur la cathode lors de l'électrolyse d'une solution d'acétate de plomb (fig. 2.51).

Les sels fondus ou en solution se dissocient en des ions chargés positivement (par exemple le sodium Na^+) et négativement (par exemple le chlore Cl^-). Les ions de sodium chargés positivement migrent en direction de la cathode où ils sont neutralisés par liaison d'un électron alors que les ions du chlore, chargés négativement, abandonnent leur électron surnuméraire à l'anode. Il y a donc un courant de charges positives de l'anode vers la cathode accompagné d'un flux de matière. Notons que le flux des électrons déposés à l'anode par les ions de chlore se déplace dans le circuit dans le sens opposé à celui du courant conventionnel (fig. 2.52).

Influence de la température sur la conductivité. On modélise la dépendance de la température au moyen de coefficients de température de la résistivité. Le coefficient de température linéaire α_R est défini par :

$$\alpha_R = \frac{1}{\rho_{\text{el}}} \frac{d\rho_{\text{el}}}{dT} \quad (2.23)$$

Dans cette relation, T représente la température absolue. L'unité de mesure de ce coefficient de température est le kelvin⁻¹ (K^{-1}). Il représente la variation relative de la résistivité en fonction de la température. Ce coefficient peut être positif, par exemple pour les conducteurs métalliques (PTC: Positive Temperature Coefficient) ou négatif, par exemple pour les semi-conducteurs ou les lampes fluorescentes (NTC: Negative Temperature Coefficient).

Dans un domaine de température limité, on peut admettre que α est constant; il est alors possible d'approximer la variation de la résistivité par :

$$\rho_{\text{el}}(T) = \rho_{\text{el}}(T_0) [1 + \alpha_R (T - T_0)] \quad (2.24)$$

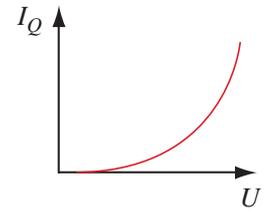


FIGURE 2.50 Caractéristique d'une lampe fluorescente.

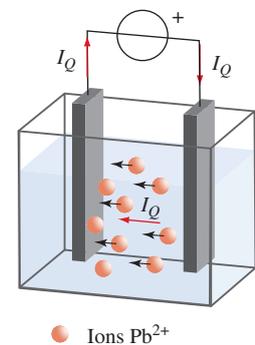


FIGURE 2.51 Électrolyse d'acétate de plomb.

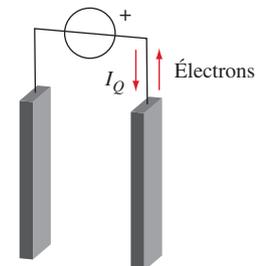


FIGURE 2.52 Le flux d'électrons est opposé à celui du courant conventionnel.

Dans cette expression, T_0 représente une température de référence arbitraire, pour laquelle la résistivité est connue. Pour obtenir des résultats plus précis, on peut introduire un coefficient de température quadratique β_R ($[\beta] = \text{K}^{-2}$). Alors :

$$\rho_{\text{el}}(T) = \rho_{\text{el}}(T_0) \left[1 + \alpha_R(T - T_0) + \beta_R(T - T_0)^2 \right] \quad (2.25)$$

On met à profit cette variation de la résistivité pour mesurer des températures (élément de platine).

La pratique montre que la résistivité ρ_{el} de conducteurs métalliques décroît usuellement lorsque la température diminue. Pour un certain nombre de matériaux conducteurs, la résistivité disparaît brutalement en dessous d'une certaine température, dite température critique T_c : le matériau devient supraconducteur (fig. 2.53). Dans un supraconducteur, une fois lancé, le courant circule sans être entretenu.

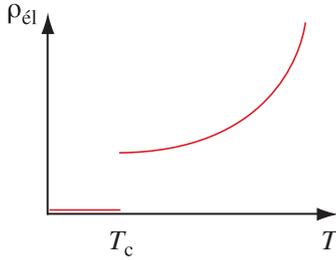


FIGURE 2.53 Supraconduction : pour certains matériaux, la résistance disparaît en dessous d'une certaine température critique.

1. On dit des métaux qu'ils sont des conducteurs ohmiques, c'est-à-dire qu'ils ont une caractéristique linéaire. Le filament d'une lampe à incandescence est un métal, donc un conducteur ohmique. Pourquoi la caractéristique d'une lampe à incandescence n'est-elle pas linéaire ?
2. Deux conducteurs métalliques ont la même masse, mais le second a une longueur double de celle du premier. Comparez la résistance du second conducteur à celle du premier.



1. La caractéristique n'est plus linéaire à cause du fort échauffement du filament destiné à le rendre incandescent. Cet échauffement provoque une augmentation de la résistivité, comme le montrent les équations (2.24) et (2.25).
2. La résistance du second conducteur est quatre fois plus grande que celle du premier.



2.7 SOURCES, ALIMENTATIONS, INSTRUMENTS DE MESURE

Nous savons qu'il faut des « pompes » pour entretenir un courant électrique. Ces dispositifs peuvent être des batteries, des cellules à combustible, des dynamos et des générateurs. Même si leur rôle est celui d'une pompe, ils sont communément appelés « sources » (source de tension ou source de courant) ou « alimentation ».

2.7.1 Batteries et piles à combustible

Nous avons vu, lorsque nous avons parlé de l'électrolyse dans la section 2.6.2, que des réactions chimiques peuvent être activées par des processus électriques. Mais il est également possible que des réactions chimiques entraînent l'établissement de courants électriques. C'est ce phénomène qui rend possible l'existence de batteries et de piles à combustible.

En principe, une batterie (à l'origine la pile VOLTA) est une cellule électrolytique qui fonctionne « à l'envers ». Si l'on plonge une électrode de cuivre dans un bain de sulfate

de cuivre (qui contient des ions Cu^{2+} et SO_4^{2-}), une électrode de zinc dans une solution de sulfate de zinc (contenant des ions Zn^{2+} et SO_4^{2-}) et que l'on sépare ces deux parties par une paroi poreuse, on a construit une *batterie* (fig. 2.54). Ce système permet de faire par exemple fonctionner une lampe qui serait branchée entre les deux électrodes, et un voltmètre indique une tension d'approximativement 1.10 V. Ce voltmètre révèle également que l'électrode de cuivre est le pôle positif de la batterie. Le courant conventionnel circule donc de l'électrode en cuivre vers celle en zinc, et les électrons en sens inverse.

Les réactions qui se déroulent dans la cellule sont les suivantes. Les électrons arrivant à l'électrode de cuivre neutralisent les ions de cuivre Cu^{2+} qui sont dans la solution, et du cuivre métallique se dépose sur l'électrode. De l'autre côté, l'électrode de zinc se «dissout» dans la solution sous forme de ions Zn^{2+} , qui abandonnent deux électrons qui migrent vers l'électrode de cuivre. Au fur et à mesure que se déroule la réaction, les ions Zn^{2+} s'accumulent dans la moitié de l'électrode de zinc, alors que les ions de sulfate SO_4^{2-} le font dans la cellule de l'électrode de cuivre. La neutralité est garantie par la migration des ions à travers la paroi poreuse, mais la composition chimique des solutions varie, ce qui entraîne un «épuisement» progressif de la batterie.

Il est possible, en combinant les métaux des électrodes et les électrolytes de différentes manières, d'obtenir des batteries qui sont optimisées pour les applications auxquelles elles sont destinées. Ainsi, il existe des batteries «réversibles», c'est-à-dire des batteries dans lesquelles on peut rétablir l'état initial en inversant les réactions chimiques en appliquant une tension à leurs bornes. Ce sont les batteries que l'on appelle «rechargeables» (les *accus*).

Lorsque les substances qui sont nécessaires pour les réactions chimiques sont amenées en continu dans la batterie, on a affaire à une pile à combustible (dont le principe a déjà été énoncé en 1839 par William GROVE), mais dont le développement a été relancé par la conquête spatiale américaine dans les années 1960.

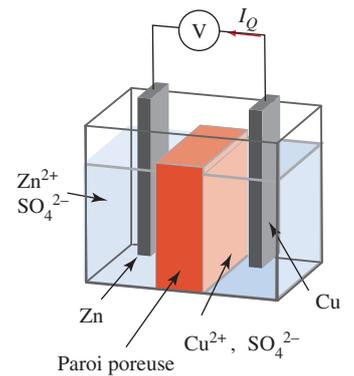


FIGURE 2.54 Batterie. Les réactions entre les diverses substances peuvent être utilisées pour entretenir un courant électrique.

2.7.2 Caractéristiques d'une source de tension

Lorsque l'on mesure la tension aux bornes d'une batterie (que nous appellerons source), on constate qu'elle varie en fonction de l'intensité du courant qui la traverse. D'autre part, on observe que la batterie s'échauffe, ce qui permet de supposer l'existence d'un processus dissipatif à l'intérieur de la source. Nous effectuons une expérience pour en savoir plus,

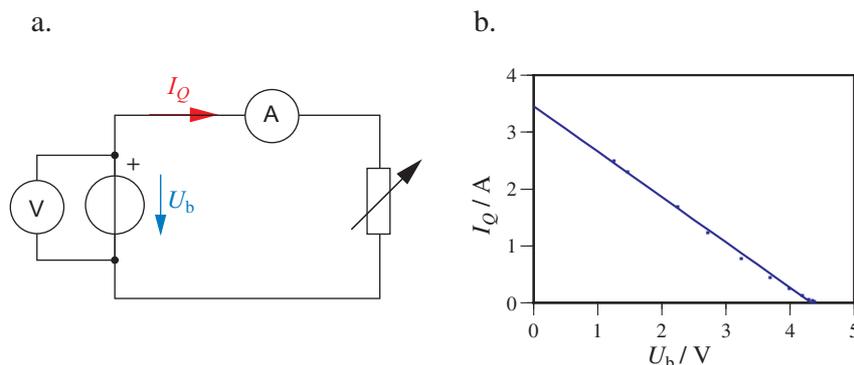


FIGURE 2.55 Caractéristique d'une source: (a) montage expérimental; (b) caractéristique courant-tension.

Au moyen du montage de la figure 2.55a, nous varions la charge à laquelle est soumise la pile et mesurons la tension aux bornes et l'intensité. Le report des résultats dans un graphique (fig. 2.55b) révèle une relation linéaire entre la tension aux bornes de la source et l'intensité qu'elle entretient dans le circuit.

Nous en concluons :

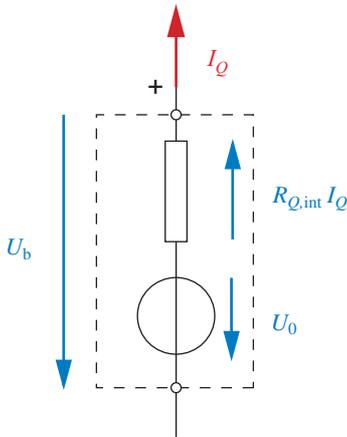


FIGURE 2.56 Modèle d'une source réelle consistant en un montage en série d'une source idéale et d'une résistance interne.

Il existe une relation linéaire entre la tension aux bornes U_b d'une source et l'intensité I_Q débitée par cette source :

$$U_b = U_0 - R_{Q,int} I_Q \quad (2.26)$$

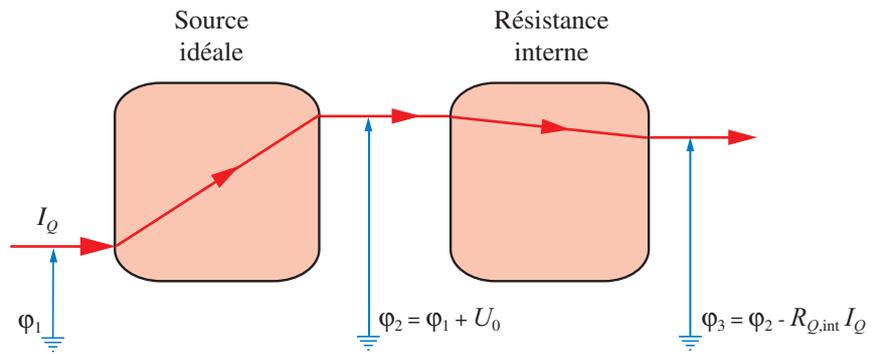
où U_0 est la tension à vide, et $R_{Q,int}$ représente la résistance interne de la source. Cette relation peut également être exprimée par :

$$I_Q = I_{Q,cc} - G_{Q,int} U_b \quad (2.27)$$

où $I_{Q,cc}$ l'intensité du courant de court-circuit et $G_{Q,int} = 1/R_{Q,int}$ est la conductance interne de la source.

Une source réelle est généralement modélisée par le montage en série d'une source idéale de tension à vide U_0 et d'une résistance interne $R_{Q,int}$ (fig. 2.56 et 2.57).

FIGURE 2.57 Diagramme de processus d'une source réelle.



2.7.3 Instruments de mesure

Les instruments de mesure électrique peuvent être analogiques ou numériques. L'instrument de base analogique est un galvanomètre à cadre mobile dont le fonctionnement repose sur les propriétés magnétiques du courant électrique (fig. 2.20). Celui des instruments numériques est généralement un voltmètre qui compare la tension à mesurer à une tension de référence.

Comme les instruments de mesure sont introduits dans le circuit électrique, il faut les concevoir de telle manière que leur présence n'introduise qu'une perturbation minimale du phénomène lors de la mesure.

L'ampèremètre est branché en série dans le circuit; la perturbation qu'il introduit sera d'autant plus faible que sa résistance est faible. Il faudra donc tendre à la minimiser. Le voltmètre est branché en parallèle; il dévie une partie du courant pour pouvoir effectuer la mesure de la tension. Pour que cette part du courant dévié soit minimale, il est nécessaire que la résistance du voltmètre soit aussi grande que possible.

On peut satisfaire à ces contraintes en utilisant des résistances que l'on appelle des *shunts*. Dans un ampèremètre, ce shunt est monté en parallèle à l'instrument de base et dévie la majorité du courant (fig. 2.58). Comme la résistance de l'instrument de base et le shunt sont montés en parallèle, la résistance globale de l'ampèremètre sera

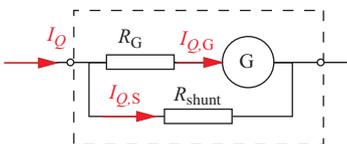


FIGURE 2.58 Principe du shuntage d'un ampèremètre. G est un galvanomètre à cadre mobile (un milliampèremètre) de résistance propre R_G . La partie la plus importante du courant incident est déviée à travers le shunt.

inférieure à celle du shunt. D'autre part, en utilisant différentes valeurs de shunts, on étend la plage d'utilisation de l'instrument. Dans un voltmètre, on place le shunt en série avec l'instrument de base. Les deux résistances s'additionnent et celle du voltmètre sera supérieure à celle du shunt.

Les instruments utilisés dans la pratique sont des multimètres qui peuvent assurer plusieurs fonctions. On passe d'une fonction à l'autre et d'un domaine de sensibilité à l'autre en branchant les shunts adéquats au moyen d'un interrupteur.

EXEMPLE 2.4. Influence des instruments de mesure.

Une source a une tension à vide de 12.0 V et une résistance interne négligeable. On la branche sur une résistance de 125 Ω. On mesure la tension sur la résistance et l'intensité du courant qui la traverse au moyen d'un voltmètre de résistance interne égale à 1.0 kΩ et d'un ampèremètre de résistance interne égale à 10.0 Ω (fig. 2.59). (a) Déterminer la valeur indiquée par chaque instrument de mesure ainsi que l'intensité du courant circulant dans la résistance. (b) Déterminer l'erreur relative introduite dans les mesures par la présence des instruments.

SOLUTION: (a) Nous appliquons les lois de KIRCHHOFF:

$$\begin{aligned} I_{QA} - I_{QR} - I_{QV} &= 0 \\ 10I_{QA} + 125I_{QR} - 12 &= 0 \\ -125I_{QR} + 1000I_{QV} &= 0 \end{aligned}$$

La résolution du système d'équations donne:

$$I_{QA} = 99.08 \text{ mA}; I_{QR} = 88.07 \text{ mA}; I_{QV} = 11.01 \text{ mA}; U_R = 11.01 \text{ V}$$

Les valeurs idéales sont respectivement: $I_{QA} = 96 \text{ mA}$ et $U_R = 12 \text{ V}$, ce qui implique que les erreurs relatives sont:

$$e_{\text{courant}} = \frac{7.93 \text{ mA}}{96.0 \text{ mA}} 100\% = 8.26\%; e_{\text{tension}} = \frac{0.99 \text{ V}}{12.0 \text{ V}} 100\% = 8.25\%$$

Il est clair qu'il s'agit de très mauvais instruments (dont les caractéristiques ont été choisies afin d'exagérer les erreurs introduites par les mesures). Les instruments utilisés dans la pratique sont conçus de manière à minimiser leur influence; ainsi, les résistances des voltmètres numériques sont généralement de 10 MΩ.

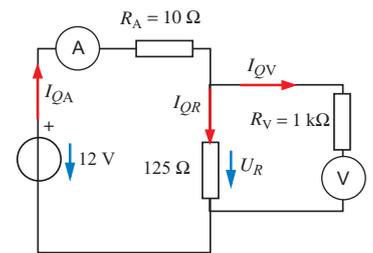


FIGURE 2.59 Instruments de mesure: leur résistance interne fausse le résultat de la mesure.

1. Pourquoi le courant délivré par une batterie est-il limité, même si la résistance de charge est très faible?
2. On forme un circuit au moyen d'une batterie, d'une résistance de charge variable et d'un ampèremètre. En outre, on connecte un voltmètre aux bornes de la batterie. Pour une première valeur de la résistance de charge, les instruments indiquent 1.0 A et 3.80 V; pour une seconde valeur, on obtient 6.0 A et 3.60 V. Esquisser le schéma de montage et calculer la tension à vide et la résistance interne de la batterie.



1. Parce que la batterie présente elle aussi une résistance au passage du courant qu'elle entretient, sa résistance interne.
2. Le schéma de montage est celui de la figure 2.55a. En appliquant la loi des mailles à chaque jeu de mesure et en résolvant le système de deux équations à deux inconnues, on obtient: $U_0 = 3.84 \text{ V}$, $R_{0, \text{int}} = 0.04 \Omega$.



2.8 MODÈLES DYNAMIQUES DE SYSTÈMES RC

Comme en hydraulique, où la présence de réservoirs entraîne l'apparition d'un comportement dynamique, c'est la présence d'accumulateurs de charge (condensateurs) dans des circuits électriques qui détermine le comportement dynamique propre à ces systèmes. Afin de mettre en évidence les similitudes entre les deux domaines, nous allons modéliser la décharge d'un condensateur à travers une résistance, ou sa charge au moyen d'une source.

2.8.1 Décharge d'un condensateur

Élaboration du modèle dynamique et schématisation. Le schéma de montage et l'évolution des tensions apparaissent dans la figure 2.60. On considère la plaque positive en tant que système. Il est inutile de prendre en compte la plaque négative. Elle apparaît implicitement dans la loi de capacité par l'intermédiaire de la tension qui s'établit entre les deux plaques. En procédant de la sorte, on a fixé le zéro du potentiel au niveau de la plaque négative au moyen de la mise à terre. Énonçons les relations qui vont servir à établir le modèle:

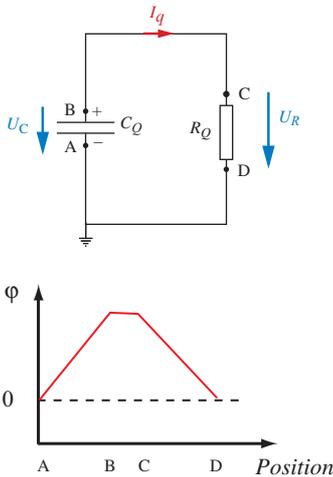


FIGURE 2.60 Schéma du montage pour la décharge d'un condensateur à travers une résistance et représentation graphique de l'évolution du potentiel.

Équation de bilan des charges:

$$\dot{Q} = I_Q$$

Loi de capacité:

$$U_C = \frac{Q}{C_Q}$$

Loi de résistance (loi d'OHM):

$$I_Q = \frac{U_R}{R_Q}$$

Loi des mailles:

$$U_R = -U_C$$

Valeur initiale:

$$Q(t=0) = Q_0$$

Nous introduisons ces relations dans le logiciel de modélisation dynamique. Les valeurs de la capacité et de la résistance sont respectivement $100 \mu\text{F}$ et $50 \text{ k}\Omega$, et le condensateur est chargé à 10 V au début du processus de décharge.

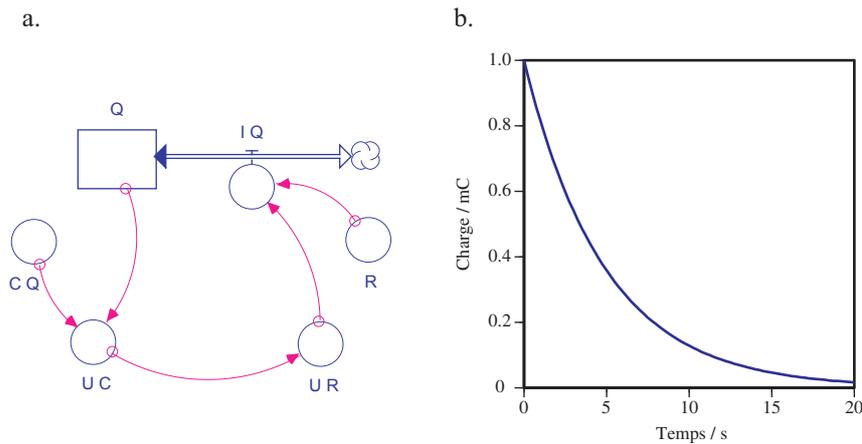


FIGURE 2.61 Décharge d'un condensateur: (a) diagramme de dynamique des systèmes; (b) évolution de la charge (ou de la tension). La tangente à la courbe d'évolution de la charge détermine la constante de temps du processus.

La figure 2.61 illustre le fait que la décharge est un processus de décroissance exponentielle, ce qui sera confirmé par la résolution analytique du problème.

Résolution analytique du modèle. Nous procédons de la même manière qu'à la section 1.8.1, lorsque nous avons recherché la solution analytique de la vidange d'un réservoir. Nous calculons I_Q en combinant les trois lois énoncées ci-dessus :

$$I_Q = \frac{U_R}{R_Q} = -\frac{U_C}{R_Q} = -\frac{Q}{R_Q C_Q}$$

La substitution dans l'équation de bilan des charges et le regroupement des termes dans le membre de gauche donnent finalement

$$\dot{Q} + \frac{Q}{R_Q C_Q} = 0 \quad (2.28)$$

Cette équation est identique à l'équation différentielle (1.41) qui décrit la vidange d'un réservoir lorsqu'on y remplace le volume V par la charge Q . Elle a donc la même solution :

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{R_Q C_Q}} \quad (2.29)$$

Le produit

$$\tau_c = R_Q C_Q \quad (2.30)$$

est la constante de temps résisto-capacitive du processus de décharge. La valeur numérique que l'on obtient à partir des caractéristiques du système correspond à celle que l'on trouve en traçant la tangente à l'origine de la courbe de décharge dans la figure 2.61. Rappelons que la constante de temps représente le temps que mettrait le système pour atteindre l'état final si le processus se déroulait constamment avec les taux de variation initiaux. Notons que la courbe d'évolution de la charge (ainsi que celle de l'intensité I_Q ou de la tension aux bornes du condensateur U_C) n'atteint pas l'axe t , mais s'en approche arbitrairement; les mathématiciens disent que les grandeurs tendent asymptotiquement vers zéro, ce qui veut dire que, théoriquement, le processus de décharge dure infiniment longtemps. Les électrotechniciens estiment qu'après 5τ la

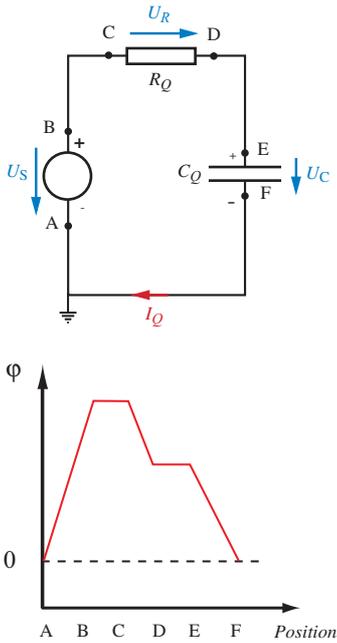


FIGURE 2.62 Schéma du montage pour la charge d'un condensateur au moyen d'une source et représentation graphique de l'évolution du potentiel.

FIGURE 2.63 Charge d'un condensateur : (a) diagramme de dynamique des systèmes; (b) évolution de la charge (ou de la tension). L'intersection de la tangente à la courbe d'évolution de la charge avec l'asymptote horizontale détermine la constante de temps du processus.

décharge est pratiquement complète; la théorie montre que la charge est alors tombée à 7 millièmes de sa valeur originelle.

2.8.2 Charge d'un condensateur

Élaboration du modèle dynamique et simulation. La figure 2.62 montre le schéma de montage et l'évolution des tensions dans le circuit. Les relations du modèle sont:

Équation de bilan des charges: $\dot{Q} = I_Q$

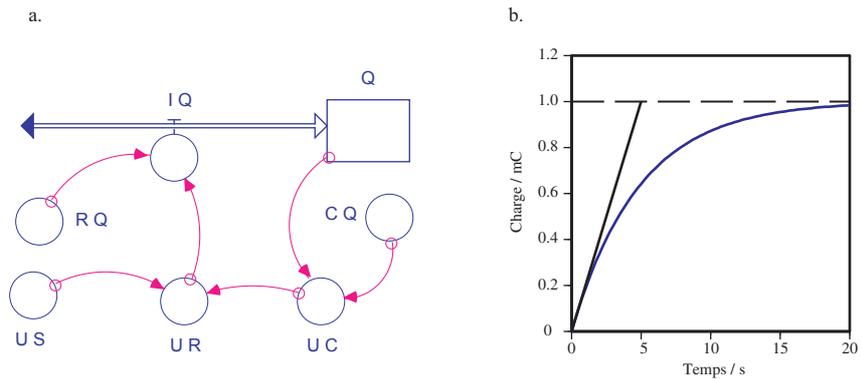
Loi de capacité: $U_C = \frac{Q}{C_Q}$

Loi de résistance (loi d'OHM): $I_Q = \frac{U_R}{R_Q}$

Loi des mailles: $U_R = U_S - U_C$

Valeur initiale: $Q(t = 0) = 0$

Nous ajoutons au modèle du processus de décharge une source qui délivre une tension de 10 V. La figure 2.63 illustre le résultat de la simulation.



La charge du condensateur tend asymptotiquement vers une valeur qui est égale au produit de la tension de la source et de la capacité du condensateur, à savoir:

$$Q_{\max} = C_Q U_S \tag{2.31}$$

On s'attend naturellement à ce que la constante de temps du processus de charge soit la même que pour la décharge, vu que l'on a simplement inversé le sens du courant par l'intermédiaire de la source de tension, ce qui est confirmé si l'on trace la tangente à l'origine de la courbe d'évolution de la charge. Cette tangente intercepte l'asymptote à un instant dont la valeur est la même que la constante de temps de la décharge.

Résolution analytique du modèle. En combinant les trois lois pour trouver l'intensité du courant de charge que l'on substitue dans l'équation de bilan, nous obtenons:

$$\dot{Q} + \frac{Q}{R_Q C_Q} = \frac{U_S}{R_Q} \tag{2.32}$$

qui se différencie de l'équation différentielle (2.28) par la présence du second membre. Pour obtenir la solution particulière, nous recourons à l'argument de la stabilisation de la charge à la valeur Q_{\max} calculée par l'équation (2.31), ce qui nous permet de conclure:

$$Q(t) = Q_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{R_0 C_0}} \right) \tag{2.33}$$

2.8.3 Équivalent électrique du windkessel

Nous l'avons déjà souligné, il y a de grandes similitudes entre les comportements des systèmes hydrauliques et électriques. Nous allons l'illustrer une nouvelle fois en élaborant l'équivalent électrique du windkessel.

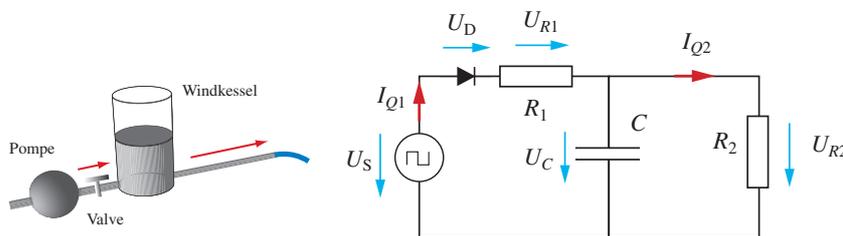


FIGURE 2.64 Équivalent électrique du windkessel.

La figure 2.64 montre la correspondance entre les éléments hydrauliques et électriques. À la pompe correspond une source qui délivre une tension intermittente, à la valve correspond une diode, le windkessel est représenté par un condensateur et les conduites par des résistances.

Les relations nécessaires pour la modélisation du système sont:

la loi des mailles :

$$\begin{aligned} -U_S + U_D + U_{R1} + U_C &= 0 \\ -U_C + U_{R2} &= 0 \end{aligned}$$

la loi de capacité :

$$U_C = \frac{Q}{C_Q}$$

la loi de résistance :

$$I_{Q1} = \frac{U_{R1}}{R_1} ; \quad I_{Q2} = \frac{U_{R2}}{R_2}$$

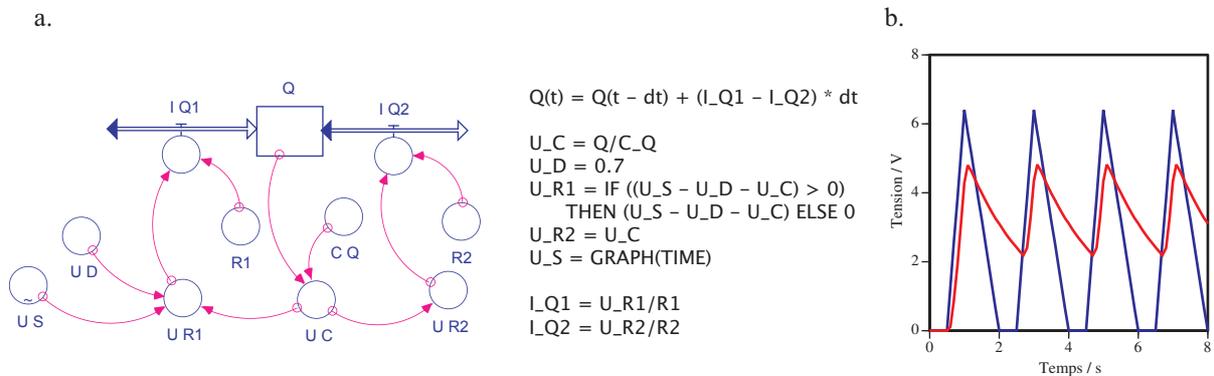


FIGURE 2.65 Équivalent électrique du windkessel: (a) modèle dynamique; (b) simulation.

La présence de la diode est prise en compte au moyen d'une structure if... then... else, la tension de seuil est de 0.7 V. La figure 2.65 permet de se rendre compte de la similitude avec les résultats obtenus à la section 1.8.5.

2.8.4 Chaîne de condensateurs et supercondensateurs

Il est possible de former des chaînes de condensateurs et de résistances unidimensionnelles, voire des réseaux bi- ou tridimensionnels. Si les tensions initiales ne sont pas partout les mêmes, le système va évoluer dynamiquement pour tendre vers une uniformisation des tensions.

Illustrons le phénomène en modélisant l'équivalent électrique de la chaîne de récipients que nous avons analysée à la section 1.8.6.

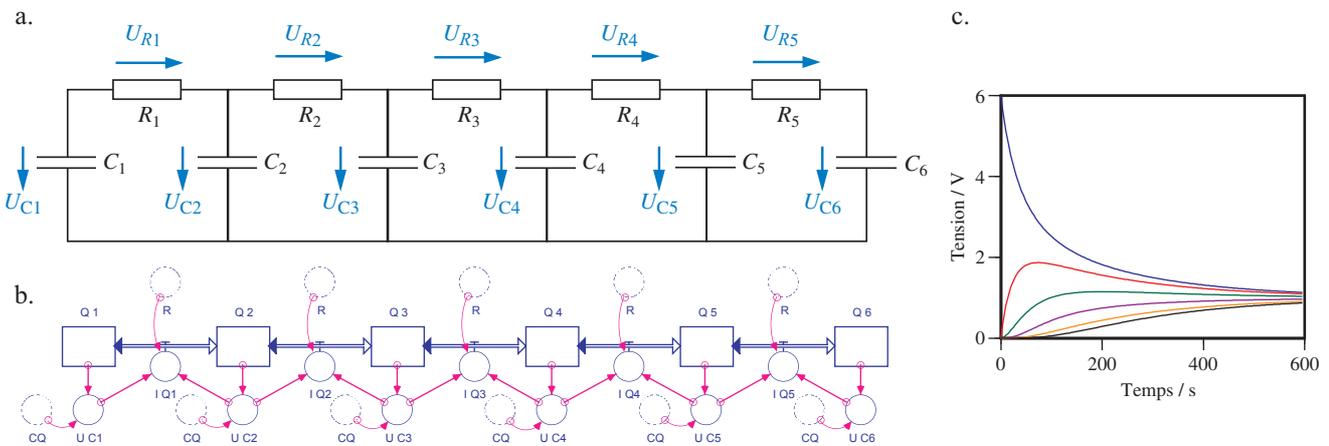
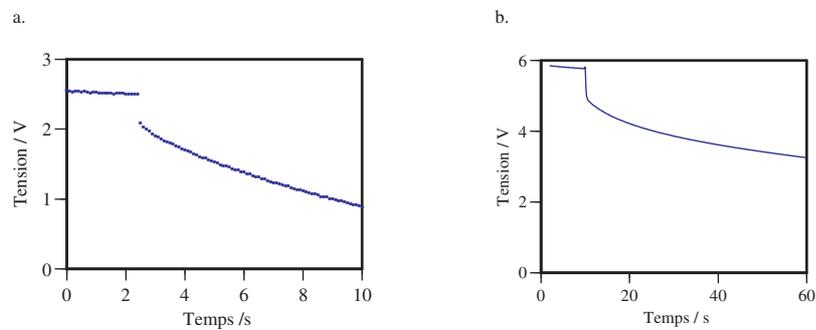


FIGURE 2.66 Migration de la charge à travers une chaîne de condensateurs: (a) dispositif expérimental; (b) modèle de dynamique des systèmes; (c) simulation du comportement. On observe que la charge diffuse à travers le système jusqu'à ce que la tension soit uniforme.

La figure 2.66 met en évidence la concordance des modèles et la similitude des comportements des systèmes hydrauliques et électriques équivalents.

Mais le modèle dynamique de cette chaîne de condensateurs va nous permettre de comprendre une particularité de ce que l'on appelle des supercondensateurs. Ils se distinguent des condensateurs usuels par des capacités élevées (jusqu'à quelques dizaines de farad, alors que les capacités des condensateurs usuels vont du picofarad à quelques dizaines de millifarad), ce qui permet d'emmagasiner de grandes quantités d'énergie disponible quasi instantanément, contrairement à l'énergie des accumulateurs (chapitre 3).

FIGURE 2.67 Supercondensateur: (a) décharge d'un supercondensateur; (b) décharge d'une chaîne de condensateurs.



Lorsque l'on décharge un tel supercondensateur à travers une résistance (fig. 2.67a), on observe une brusque chute du potentiel au début du processus de décharge. Si nous déchargeons le système de la chaîne de condensateurs à travers une résistance après avoir remplacé le condensateur 6 par un condensateur de capacité 30 fois plus faible, nous observons le même comportement initial (fig. 2.67b).

La similitude entre les deux courbes (et la différence avec la courbe de décharge de la figure 2.61) suggère que la charge d'un supercondensateur doit diffuser à travers le matériau dont il est constitué, tout comme la charge migre à travers la chaîne de condensateurs et résistances. Dans un condensateur standard, la charge est accumulée à la surface d'un film conducteur à partir duquel elle peut s'écouler sans délai, de la même manière qu'un fluide qui s'écoule d'un réservoir à travers une conduite raccordée au fond du réservoir.

Résumé du chapitre

Au cours de ce chapitre, nous avons pu nous familiariser avec les processus électriques fondamentaux et également mettre en évidence les similitudes et analogies entre les processus électriques et hydrauliques.

La description des phénomènes électriques nécessite l'introduction de deux grandeurs fondamentales: la charge électrique Q et le potentiel électrique φ_{el} . Ces deux grandeurs correspondent respectivement au volume V et à la pression P en hydraulique.

La charge électrique Q est la grandeur extensive en électricité: elle peut être accumulée, peut s'écouler entre les systèmes et ses variations dans un système sont décrites par une équation de bilan: $\dot{Q} = I_{Q1} + I_{Q2} + \dots$. La charge a une particularité: il en existe deux sortes que l'on appelle positive et négative. Par convention, on admet que les charges impliquées dans les processus d'accumulation et d'écoulement sont des charges positives. De ce fait, le courant I_Q est toujours un courant de charges positives. Les charges électriques interagissent entre elles et avec l'environnement par l'intermédiaire du champ électrique.

La grandeur intensive est le potentiel électrique φ_{el} . Contrairement à la pression P qui est une grandeur absolue (il y a un zéro de la pression et il n'existe pas de pression négative), le potentiel électrique est une grandeur relative: le niveau zéro peut être fixé arbitrairement (par exemple par la mise à terre). La charge électrique s'écoule toujours entre deux niveaux du potentiel. On appelle tension U l'opposé d'une différence de potentiel: $U = -\Delta\varphi_{el}$. La charge s'écoule spontanément entre deux points d'un circuit entre lesquels règne une tension positive, que l'on appelle quelquefois «chute de potentiel».

Les «réservoirs» de charge électrique sont les condensateurs que l'on caractérise au moyen de leur capacité C_Q . Comme en hydraulique, la capacité lie entre eux le taux de variation de la charge et celui de la tension: $\dot{Q} = C_Q \dot{U}_c$. Les condensateurs sont essentiellement constitués de deux «feuilles» conductrices séparées par une couche isolante très mince. Charger un condensateur consiste à déplacer les charges de l'une des feuilles vers l'autre; le condensateur est électriquement neutre, mais le déséquilibre se manifeste par l'apparition d'une tension à ses bornes.

Sauf en cas de supraconductivité, les conducteurs électriques opposent une résistance à la circulation du courant électrique. Ce phénomène est modélisé au moyen de la loi de résistance qui introduit les notions de conductance G_Q et de résistance électrique R_Q . Il existe une catégorie particulière de conducteurs pour lesquels l'intensité du courant est proportionnelle à la tension: ce sont les conducteurs ohmiques. Toutefois, leur

résistance dépend généralement de la température. Pour ces conducteurs, la loi de résistance s'énonce sous la forme: $U_R = R_Q I_Q$ ou $I_Q = G_Q U_R$.

Le courant électrique ne peut circuler que s'il est entretenu. Pour le faire, on utilise ce que l'on appelle des sources ou des alimentations qui sont des «pompes à électricité». Ces appareils ne créent pas de charge électrique mais la mettent en mouvement et l'entretiennent, de manière analogue à une pompe hydraulique qui entretient le mouvement d'un fluide dans les conduites. Les alimentations, telles qu'une batterie, opposent elles aussi une certaine résistance au passage du courant électrique. Elles sont modélisées en tant que montage en série d'une source idéale et d'une résistance interne (ces deux composants ne peuvent pas être séparés physiquement).

Les modèles réalisés dans ce chapitre ont mis en évidence les fortes analogies entre les processus électriques et les processus hydrauliques.

Questions

- On arrache un ruban collant de la surface d'une sphère métallique isolée. Expliquez comment il est possible de montrer que la sphère est chargée et que le ruban porte une charge de signe opposé.
- Deux sphères métalliques qui se touchent sont amenées dans le voisinage d'un générateur de Van de Graaff chargé à une tension très élevée. Si nous séparons les deux sphères, nous constatons que l'une est chargée positivement, l'autre négativement. Que s'est-il passé? Le même phénomène est-il possible avec des sphères non conductrices?
- Deux sphères métalliques portent des charges différentes (éventuellement de signes opposés). On les met en contact. Expliquez ce qui arrive lorsqu'on les met en contact. Quelle est l'analogie avec deux réservoirs hydrauliques communicants? Quelles sont les différences éventuelles?
- Si un courant électrique circule dans un fil de cuivre, les électrons circulent dans le sens opposé. Quelle est la raison de cette observation?
- Comment branche-t-on des ampèremètres et des voltmètres dans un circuit?
- Pourquoi un ampèremètre doit-il avoir une faible résistance interne? La résistance d'un voltmètre doit-elle également être aussi faible que possible?
- À quoi servent les shunts dans un ampèremètre?
- Un oiseau peut se poser sans danger sur une ligne à haute tension. Pourquoi cet oiseau se mettrait-il à rôtir s'il chevauchait une lampe allumée branchée sur cette ligne?
- Un condensateur consiste généralement en deux conducteurs qui se font face et qui portent des charges égales de signes opposés. La charge totale d'un condensateur est donc toujours nulle. Pourquoi peut-on malgré tout parler de la charge d'un condensateur?
- Quelle est la signification de la constante de temps d'un système RC?

Exercices

- Un nœud d'un circuit est parcouru par trois courants. Deux s'écoulent vers le nœud et valent respectivement 0.50 A et 0.35 A. Déterminez la troisième intensité.
- Un solénoïde (une longue bobine de fil conducteur) est constitué de 1000 m de fil de cuivre de diamètre égal à 0.60 mm. Déterminez la résistance électrique du solénoïde.
- La résistance d'un thermomètre à résistance platine Pt-100 croît de 6.0%. Déterminez la variation de température qui en est responsable. Le coefficient de température de la résistance du thermomètre au platine vaut $2.0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.
- À 20°C, la résistance d'un fil de tungstène vaut 500 Ω . Déterminez sa résistance à la température de 1500°C en utilisant

l'approximation quadratique de la variation de la résistance en fonction de la température.

- On mesure un courant de 0.250 A lorsqu'une lampe est alimentée à 110 V. (a) Déterminez la résistance de la lampe. (b) Vous attendez-vous à mesurer un courant de 0.50 A si vous branchez la lampe sur 220 V?
- On branche une résistance de 20 Ω aux bornes d'une batterie dont la tension nominale vaut 1.50 V. Un ampèremètre de résistance interne égale à 1.0 Ω mesure une intensité de 0.060 A. Déterminez la résistance interne de la batterie.
- Lors de la décharge d'un condensateur, l'intensité du courant vaut, à un certain moment, 0.75 A. Quel est alors le taux de variation de la charge du condensateur?
- Un condensateur de capacité égale à 1.0 μF est chargé. À un certain moment, sa tension varie à un taux de + 1000 V/s. (a) Déterminez le taux de variation de sa charge. (b) Que vaut à cet instant l'intensité du courant par rapport au condensateur?
- Un circuit électrique est constitué d'un condensateur et d'une résistance ayant respectivement une capacité et une résistance de 0.10 μF et 100 Ω . Déterminez la constante de temps de ce circuit.
- Un condensateur se décharge à travers une résistance de 5000 Ω se décharge à la moitié de sa tension initiale en 3.0 s. Déterminez la capacité de ce condensateur.

Problèmes

- On veut réaliser un long fil de diamètre constant ayant un coefficient de température faible à 20°C. Le fil est constitué de petits segments alternés de fer et de carbone. Le carbone a un coefficient de température négatif. Quel doit être le rapport des longueurs des segments de fer et de carbone? Les coefficients de température de la résistance électrique de deux matériaux sont respectivement 0.0050 K^{-1} et -0.00050 K^{-1} . Leur résistivités valent respectivement $10 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ et $3500 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.
- Un appareil est connecté à une batterie de 12 V au moyen de deux câbles. Les standards de sécurité de l'American Yacht Club spécifient que la chute de potentiel le long d'un câble ne doit pas dépasser 10% de la tension de la batterie. Admettez que le courant qui circule à travers un câble de 6.0 m vaut exactement 20 A. Quel doit être le diamètre minimum du câble pour cette valeur de l'intensité?
- Une LED (light emitting diode) fonctionne à une tension de 1.20 V. Le courant de fonctionnement maximal est de 20 mA. La LED est branchée à une pile de 4.5 V. (a) Comment concevez-vous le circuit électrique comprenant la pile et la LED? Dessinez un schéma du montage. (b) Calculez toutes les valeurs des grandeurs électriques durant le fonctionnement du circuit (tensions, intensités, résistances).
- Une lampe à incandescence est branchée dans un circuit alimenté à 220.0 V. Un ampèremètre, branché entre l'alimentation

et la lampe, indique une intensité de 0.500 A. La résistance de l'ampèremètre vaut 2.0Ω . Un voltmètre, de résistance interne égale à $10 \text{ k}\Omega$, est branché aux bornes de la lampe. Que vaut la résistance de la lampe et quelle est la tension indiquée par le voltmètre?

5. Le montage ci-dessous est utilisé pour mesurer la valeur inconnue U_x de la tension d'une batterie. La branche de la batterie contient une résistance R_2 . Une deuxième branche est constituée d'une batterie de tension connue U_0 et d'une résistance R_1 . La résistance médiane est un fil de longueur L ayant une résistance totale R . Un contact mobile relie à la branche de la première batterie. On déplace ce contact jusqu'à ce que le courant à travers cette batterie s'annule; c'est le cas lorsque la longueur de fil, mesurée depuis le haut, prend la valeur l . (a) Exprimez U_x au moyen des autres grandeurs du circuit. (b) La résistance interne de la batterie étudiée joue-t-elle un rôle dans cette expérience?

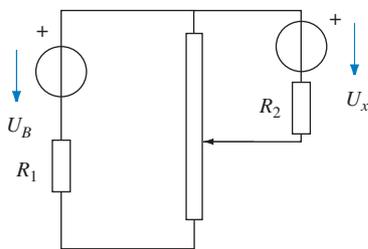


FIGURE 2.68
Problème 5

6. On veut mesurer les caractéristiques d'une jauge de contrainte au moyen d'un pont de Wheatstone (fig. 2.69). La valeur de la résistance 1 est de 40Ω , alors que celle de la seconde résistance est de 100Ω . Lorsque la jauge n'est pas sous contrainte, la résistance ajustable R_{var} doit être fixée à 300Ω pour équilibrer le circuit (aucun courant à travers l'ampèremètre très sensible dans la branche médiane). Nous modélisons la jauge de contrainte en tant que fil dont le diamètre diminue de 0.80% et dont la longueur croît de 2.0% lorsqu'elle est sous contrainte. Quelle modification doit-on apporter à la valeur de R_{var} pour rééquilibrer le pont?

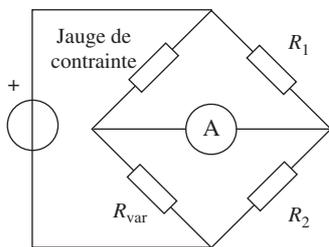


FIGURE 2.69
Problèmes 6 et 7

7. Un thermomètre à résistance de platine est branché à la place de la jauge de contrainte dans le pont de Wheatstone de la fig. 2.69. Le pont est équilibré (intensité nulle à travers l'ampèremètre) lorsque le thermomètre est plongé dans de l'eau à 20°C et que la résistance R_{var} est ajustée à $10.0 \text{ k}\Omega$. On plonge le thermomètre dans un autre liquide. On peut réé-

quilibrer le pont en augmentant la résistance variable de $1 \text{ k}\Omega$. Quelle est la température du second liquide? Le coefficient de température de la résistance électrique du thermomètre vaut $2.0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

8. Une résistance de 120Ω est branchée en série avec le montage en parallèle d'une capacité de 4 mF et d'une seconde résistance de 60Ω (fig. 2.70). Ce circuit est branché à une source de tension de 24 V . (a) Décrivez (verbalement et au moyen de diagrammes) l'évolution dans le temps de la tension sur la seconde résistance. (b) À un certain instant, l'intensité à travers la première résistance vaut 150 mA . Que vaut la charge du condensateur à cet instant? (c) Que vaut l'intensité dans la branche du condensateur à cet instant?

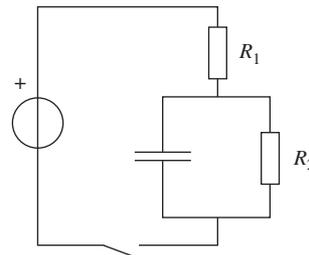


FIGURE 2.70
Problème 8

9. Le condensateur du circuit de la fig. 2.70 est déchargé. La batterie délivre une tension de 24 V , les éléments R_1 et R_2 ont des résistances respectives de 120Ω et 60Ω . Le condensateur a une capacité de 4.0 mF . (a) Dessinez (ou esquissez) les diagrammes de l'évolution dans le temps des tensions sur le condensateur et sur la seconde résistance R_2 après la fermeture de l'interrupteur. Quelles seront les valeurs maximales de la tension? (b) Dessinez (ou esquissez) les diagrammes de l'évolution dans le temps de l'intensité à travers le condensateur et à travers la seconde résistance. Déterminez les valeurs maximales des intensités. (c) Quelle sera la charge du condensateur après un temps suffisamment long?
10. Deux condensateurs identiques, de capacités égales à 1.0 mF sont connectés comme le montre la fig. 2.71. À un certain moment, les tensions sont respectivement de 100 V sur le premier condensateur et 50 V sur le second. Quels sont, à cet instant, les taux de variation de la tension sur chacun des condensateurs?

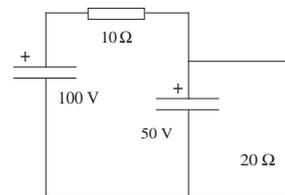


FIGURE 2.71
Problème 10

11. Un projectile passe à travers deux grilles formées au moyen de fils conducteurs. Lorsqu'il passe à travers la première grille, il déclenche la décharge d'un condensateur qui est stoppée lorsqu'il franchit la seconde grille. La tension initiale du condensateur est de 200 V , sa valeur finale est de 85 V . La

capacité et la résistance des éléments du circuit sont respectivement de $3.0 \mu\text{F}$ et 100Ω . La distance entre les deux grilles est de 10 cm. Quelle est la vitesse du projectile?

12. (a) Dessinez un système hydraulique constitué de pompes, conduites et réservoirs, équivalent au circuit électrique de la fig. 2.70. (b) Remplacez par un second condensateur la résistance R_2 dans le circuit du Problème 8. À quoi ressemble le système hydraulique équivalent? (c) Un réservoir déverse son contenu dans un second réservoir à travers une conduite. Le fluide s'échappe du second réservoir à travers une autre conduite (fig. 1.86). Comment se présente le circuit électrique équivalent?
13. Un fil est utilisé en tant que jauge de résistance. Il est allongé de 2%; on admet que le volume reste constant. Quel est le pourcentage de variation de la résistance du fil conducteur?

INTERLUDE I

SYSTÈME CARDIOVASCULAIRE EN TANT QUE SYSTÈME RC

Le système cardiovasculaire humain, et de manière générale celui des mammifères, est un exemple intéressant de système dynamique hydraulique. Dans ce premier Interlude, nous allons montrer comment une partie du système peut être étudiée, autant par l'expérience que par la modélisation dynamique. L'objectif de cet Interlude et de ceux qui vont suivre est de permettre, sur des exemples modérément complexes, de mettre en pratique ce que nous avons appris dans les chapitres précédents.

Les investigations expérimentales auront, dans le cas présent, une forme intéressante. Comme nous sommes rarement en mesure d'expérimenter avec des organismes vivants, nous élaborerons des circuits électriques analogues avec lesquels nous pourrons jouer facilement. Nous créerons ensuite des modèles dynamiques mathématiques des modèles physiques — les circuits — et comparerons les résultats des simulations aux données obtenues dans le laboratoire. Après nous être convaincus que nous comprenons l'analogie électrique de certaines parties du système cardiovasculaire, nous transférerons les modèles au cas hydraulique. Nous possédons un jeu de données — pression et flux sanguin dans le ventricule gauche et l'aorte d'un mouton — que nous pourrons comparer avec les simulations du modèle hydraulique, ce qui nous permettra de déterminer les valeurs des paramètres importants du système réel.

I.1 SYSTÈME CARDIOVASCULAIRE D'UN MAMMIFÈRE

Chacun sait que les mammifères, tels que les êtres humains, ont un cœur et des vaisseaux sanguins de taille variable qui parcourent leur corps. Le cœur sert de pompe et les vaisseaux transportent le sang. Alors que l'interprétation en tant que système hydraulique semble évidente, elle est relativement récente. Le médecin arabe Ibn NAFIS a décrit le système circulatoire au XII^e siècle, mais son œuvre a été oubliée et n'a été redécouverte en Europe qu'en 1924. C'est la raison pour laquelle, dans le monde scientifique, on attribue la paternité de la découverte du rôle du système cardiovasculaire à William HARVEY, qui en fit la description en 1628. Le révérend Stephen HALES mesura la pression sanguine d'un cheval en 1733. Le physicien Thomas YOUNG exprima, en 1809, la conviction que l'écoulement du sang faisait partie du domaine de l'hydraulique. Le médecin et physicien Jean-Léonard POISEUILLE étudia l'écoulement du sang et dérivait la relation entre flux et différence de pression pour un écoulement laminaire dans une conduite circulaire (chapitre 1, section 1.7.2, équation (1.33)). Finalement, vers la fin du XIX^e siècle, Otto FRANK décrivit le système circulatoire en termes de circuits électriques et démontra l'importance du modèle de type windkessel pour comprendre l'écoulement du sang dans le corps des mammifères.

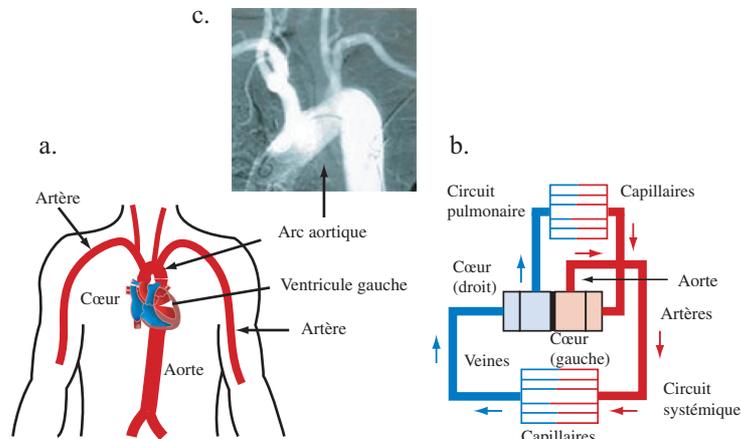
I.1.1 Un cœur, deux pompes, et deux parties d'un circuit

Pour faire bref, on peut dire que le circuit cardiovasculaire est constitué de deux parties dont les deux chambres du cœur sont les centres respectifs (fig. I.1). La partie droite du cœur pompe le sang à travers les poumons (*circuit pulmonaire*) où il se recharge d'oxygène. De là, il s'écoule vers la partie gauche du cœur, tout d'abord dans l'*atrium*

(anciennement oreillette), puis dans la chambre principale, le *ventricule gauche*. Le sang est alors injecté dans les artères qui le distribuent dans le corps. Il existe plusieurs branches de ce circuit corporel, appelé *circuit systémique*, qui traversent le torse et ses organes, les bras, les jambes et la tête. Après avoir apporté l'oxygène, les nutriments, l'eau et la chaleur aux différentes parties du corps et recueilli les déchets, le sang retourne vers le ventricule droit à travers les veines. Entre les artères et les veines, un système de vaisseaux très fins, les *capillaires*, assure la distribution fine des apports du sang.

Circuit systémique. C'est à la fois le système de distribution du sang oxygéné pour toutes les parties du corps (fig. I.1), et celui qui ramène le sang appauvri vers la partie droite du cœur. Il commence dans le ventricule gauche, responsable de produire la pression afin que le sang puisse circuler vers toutes les parties du corps. La conduite qui émerge du cœur est l'*aorte*; elle se ramifie en artères qui, elles-mêmes, se divisent en vaisseaux plus fins, puis en capillaires.

FIGURE I.1 Système cardiovasculaire : (a) torse humain montrant quelques éléments du système cardiovasculaire, en particulier le cœur et une partie du circuit systémique qui consiste en l'aorte, les artères se ramifiant à partir de l'aorte, et des vaisseaux plus petits qui ne sont pas montrés. Après avoir été pompé à partir du ventricule gauche dans l'aorte, puis dans les artères, pour aboutir dans les capillaires, le sang est collecté et ramené à travers les veines dans le ventricule droit. De là, il est pompé dans le circuit pulmonaire et retourne dans le ventricule gauche; (b) en fait, ce qu'il est habituel de désigner comme deux circuits différents est un circuit unique avec deux stations de pompage séparées disposées dans le circuit fermé; (c) angiogramme de l'arc aortique.



I.1.2 Évolution de la pression sanguine le long du circuit systémique

Lorsque le médecin mesure notre pression sanguine, il entoure le haut du bras d'un brassard rempli d'air, muni d'un manomètre. Le stéthoscope intégré dans le brassard est placé au-dessus du pli du coude, ce qui permet au médecin d'entendre le bruit du sang qui circule dans l'artère humérale. La pression du brassard est augmentée jusqu'à ce que le passage du sang soit bloqué, puis réduite lentement. Généralement, le médecin annonce quelque chose comme « 130 sur 80 ». La première valeur correspond à la *pression systolique* (lorsque le sang recommence à circuler quand on libère le blocage) et la seconde est la *pression diastolique*, détectée lorsque l'on n'entend plus le bruit de la circulation du sang, ce qui veut dire que la pression du brassard est inférieure à celle du sang dans l'artère (fig. I.2a).

Les valeurs de la pression annoncées par le médecin sont données en mmHg, et correspondent à la pression engendrée par une colonne de mercure dont la longueur, mesurée en millimètres, correspond à ces valeurs (chapitre 1, section 1.3.1). La pression atmosphérique standard de 1 bar correspond à celle qui est engendrée par une colonne de mercure de 760 mm. En outre, une valeur nulle correspondrait à la pression ambiante, c'est-à-dire à la pression moyenne dans le corps qui, elle, correspond à la pression ambiante.

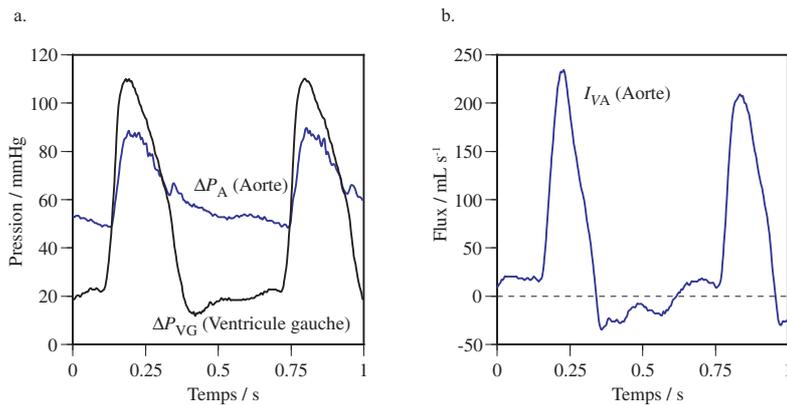


FIGURE I.2 Mesures : (a) pression sanguine et (b) flux sanguin mesurés sur un mouton, en fonction du temps. La courbe de pression, qui varie approximativement entre 110 et 20 mmHg a été mesurée à l'intérieur du ventricule gauche. La seconde courbe de pression, qui varie entre 90 et 50 mmHg, a été mesurée dans l'aorte, à proximité du cœur. Le flux est négatif pour une courte période, ce qui indique que le sang reflue vers le cœur, mais sans y retourner.

Pression en fonction du temps et de la position. Il est évident que la pression sanguine dans l'artère humérale évolue en fonction du temps, comme le montre la figure I.2a. Une autre information importante est fournie par l'évolution de la pression sanguine le long du circuit systémique, à savoir depuis le ventricule gauche, à travers l'aorte, les artères, les capillaires puis sur le retour à travers les veines vers la partie droite du cœur (fig. I.3)

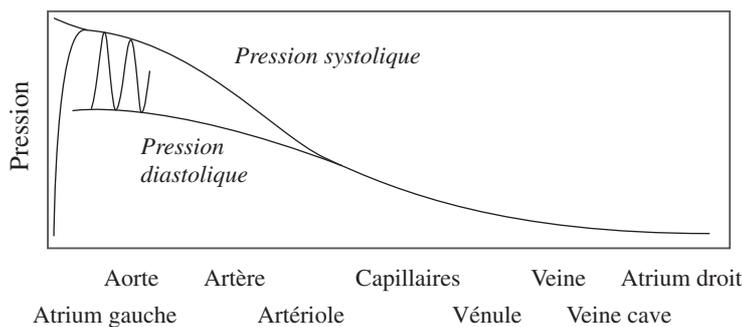


FIGURE I.3 Diagramme qualitatif de l'évolution de la pression dans le circuit systémique en fonction de la position. Dans le ventricule gauche, dans la région occupée par l'aorte, les artères et les artérioles, la pression oscille dans le temps et répercute les battements du cœur. Il n'y a pratiquement plus de pulsations dans les capillaires et les veines.

Les valeurs des pressions systolique et diastolique changent en fonction de l'activité, mais elles évoluent aussi lentement à cause du vieillissement de notre organisme. Les personnes âgées ont généralement des valeurs de pression sanguine plus élevées que celles de jeunes personnes. Il est possible d'influencer ces valeurs par notre régime, de l'exercice ou la prise de médicaments.

Rythme cardiaque et mécanismes de contrôle de la pression sanguine. Nous savons tous que notre rythme cardiaque change en fonction de notre activité. Si nous faisons de l'exercice, si nous sommes excités, le rythme cardiaque augmente. On peut percevoir que la pression augmente parallèlement. Au contraire, lorsque nous nous relaxons, la pression et le rythme cardiaque diminuent. Apparemment, les organismes possèdent un système de contrôle automatique très élaboré qui prend en charge cette tâche. Si nous souhaitons comprendre ce système, nous devons prendre en compte les activités électrique et chimique à côté des aspects hydrauliques.

I.2 VENTRICULE, AORTE ET CIRCUIT SYSTÉMIQUE EN TANT QUE SYSTÈME DE TYPE WINDKESSEL

Pourquoi indique-t-on deux valeurs lors de la mesure de la pression sanguine ? Pourquoi la seconde valeur n'est-elle pas simplement nulle ou proche de zéro, sachant que la pression dans le ventricule gauche atteint une valeur proche de zéro à un certain moment du cycle cardiaque ?

Examinons attentivement le circuit systémique. Le sang oxygéné arrivant du circuit pulmonaire s'écoule, à une pression très basse par rapport à la pression ambiante, de l'atrium gauche vers le ventricule gauche qui commence alors à se contracter, augmentant ainsi la pression du sang. À un certain point, la valve aortique s'ouvre et le sang contenu dans le ventricule gauche s'échappe dans l'aorte. La quantité de sang contenue dans le cœur diminue, la pression également, et la valve se referme.

L'aorte et ses propriétés sont responsables pour la plus grande partie de ce qui se passe ensuite d'un point de vue hydraulique. Contrairement aux artères, capillaires et veines, l'aorte est un vaisseau flexible. Cela signifie qu'elle ne fonctionne pas seulement en tant que conduite, mais également comme récipient de stockage, de manière semblable à un ballon gonflable ou un accumulateur à membrane (chapitre 1, section 1.6.1, figure 1.41). Elle stocke le sang qui arrive du ventricule gauche pour un bref instant et le relâche de manière relativement régulière dans les artères et les capillaires qui fonctionnent comme de simples conduites qui distribuent le sang. Leur fonction peut être décrite en disant qu'elles opposent une résistance à l'écoulement du sang qui est relativement visqueux. La pression mesurée au cabinet médical est proche de la pression qui règne dans l'aorte. Cette grandeur varie de manière rythmique entre une valeur élevée (légèrement inférieure à la pression maximale atteinte dans le cœur) et une valeur basse. Comme il reste toujours du sang dans l'aorte, cette pression basse, la pression diastolique, n'est jamais proche de zéro.

En résumé, le ventricule gauche est la pompe intermittente du circuit systémique, l'aorte est un windkessel, et le reste des vaisseaux sanguins servent de réseau de distribution (fig. I.4). La valve aortique garantit que le sang ne reflue pas vers le cœur.

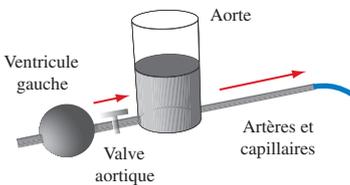
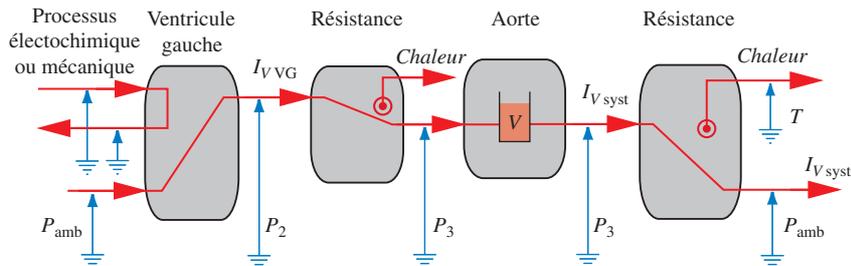


FIGURE I.4 Modèle de type windkessel pour le circuit systémique. Il consiste en une pompe qui prend le liquide dans l'environnement, une conduite courte avec une valve et un récipient avec une longue conduite qui restitue le liquide à l'environnement.

FIGURE I.5 Diagramme de processus de la chaîne d'éléments constituée du ventricule gauche (en tant que pompe en régime continu, ce qu'elle n'est pas), de l'aorte en tant qu'élément de stockage et des vaisseaux du circuit systémique.



La figure I.5 illustre au moyen d'un diagramme de processus le rôle des différents éléments de la partie considérée du système cardiovasculaire. Le ventricule gauche est l'élément qui assure l'élévation de la pression nécessaire pour permettre la circulation du sang. L'aorte sert à la fois de conduite et d'élément de stockage. Les vaisseaux qui relient entre eux ces éléments et qui distribuent le sang dans le corps offrent une certaine résistance à son écoulement.

Au chapitre 1, section 1.8.5, nous avons appris comment créer un modèle dynamique d'un simple windkessel tel que celui de la figure I.4. Nous pourrions en profiter et l'appliquer directement à nos idées du fonctionnement de l'aorte branchée entre le ventricule gauche et le reste du circuit systémique. Cependant, nous allons faire un détour

et créer un système expérimental consistant en un circuit électrique qui, à tout point de vue, est analogue au windkessel hydraulique (chapitre 2, section 2.8.3).

I.3 WINDKESSEL ÉLECTRIQUE ET MODÈLE

Le système de type windkessel (fig. I.6a) peut être modélisé par un système physique qui utilise des éléments électriques, une alimentation, des condensateurs, des résistances et une diode (fig. I.6b). En mettant le circuit sous une tension variable délivrée par l'alimentation qui simule la pression du sang dans le ventricule gauche, on obtient sur le condensateur une tension analogue à la pression sanguine dans l'aorte (fig. I.6c)

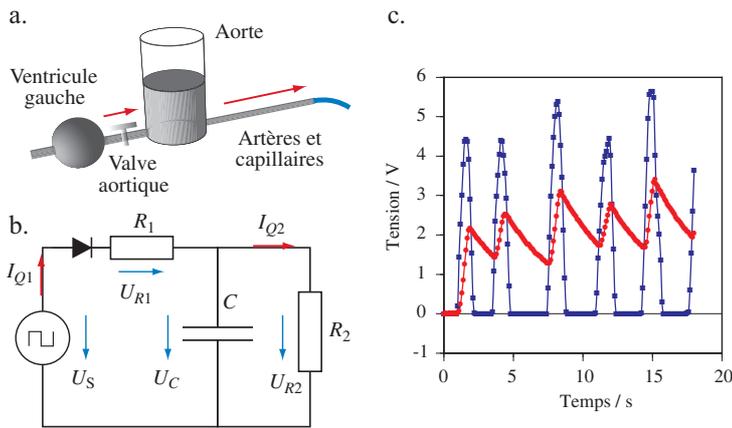


FIGURE I.6 Modélisation électrique du système cardiovasculaire : (a) modèle de type windkessel pour le circuit systémique consistant en une pompe qui prend le liquide dans l'environnement, une conduite courte avec une valve et un récipient avec une longue conduite qui restitue le liquide à l'environnement ; (b) circuit électrique analogue consistant en une alimentation avec diode pour simuler la pompe intermittente, un condensateur pour modéliser l'aorte et une résistance qui joue le rôle des vaisseaux ; (c) réponse du système soumis à une tension variable de l'alimentation.

Il est important, lorsque l'on remplace le windkessel hydraulique par un circuit électrique équivalent, de bien faire correspondre les tensions avec les différences de pression et d'appliquer correctement la loi des mailles. Dans notre modèle, nous avons deux mailles, l'une allant de l'air ambiant à travers la pompe et la valve vers le récipient pour retourner vers l'environnement, la seconde passant de l'environnement à travers le récipient et la conduite longue vers l'air ambiant (fig. I.7). La pompe intermittente est représentée par une alimentation qui fournit une tension dont la variation dans le temps ressemble à celle de la différence de pression de la pompe.

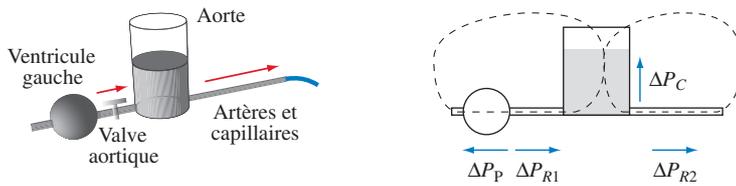
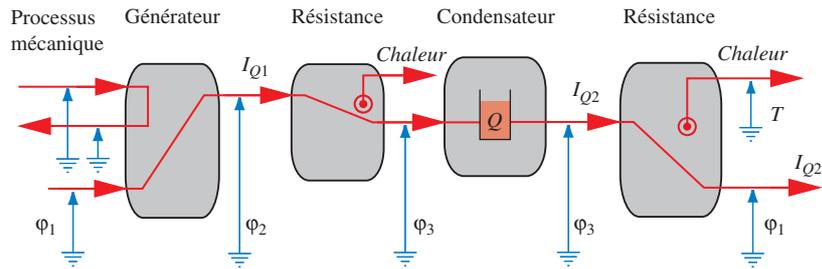


FIGURE I.7 Le système de type windkessel comprend deux mailles indépendantes. Le long d'une maille, la somme des différences de pression est nulle.

Le diagramme de processus de la figure I.8 établit la correspondance entre les éléments du circuit cardiovasculaire présentés dans la figure I.5 et leur équivalent électrique dans le modèle de windkessel de cette partie du circuit.

FIGURE I.8 Diagramme de processus de la chaîne d'éléments constituée d'un générateur, d'une résistance, d'un condensateur en tant qu'élément de stockage et d'une seconde résistance en parallèle avec le condensateur.

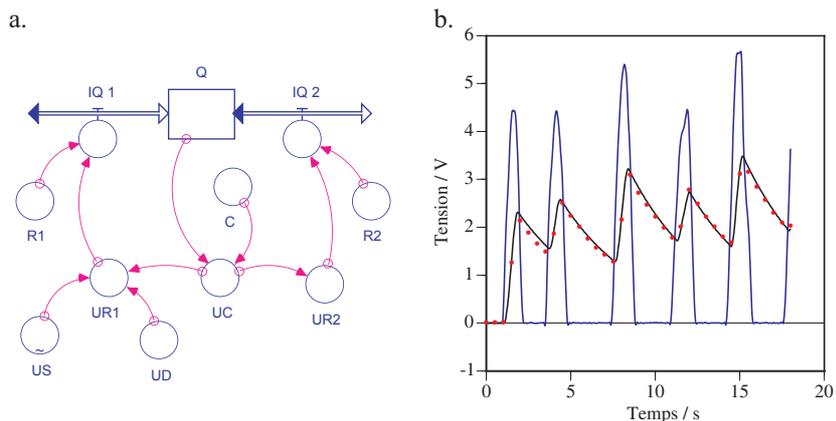


I.3.1 Modèle de dynamique des systèmes

L'élaboration du modèle dynamique du circuit électrique — et par analogie pour les éléments cœur–aorte–vaisseaux de la partie systémique du circuit cardiovasculaire — est assez simple (fig. I.9a). La coïncidence entre la simulation et les données mesurées peut être quasi parfaite pour le circuit électrique (fig. I.9b), alors que ce modèle sera toujours trop simple pour représenter correctement un système physiologique. Il nous fournit malgré tout une compréhension claire des processus importants qui se déroulent dans le système cardiovasculaire.

Le modèle consiste en une équation de bilan unique pour la charge électrique du condensateur (qui correspond au volume accumulé dans le récipient). Cette charge peut circuler à travers deux éléments résistifs (conduites), le premier associé au circuit comprenant l'alimentation (pompe), l'autre étant associé à la seconde maille (conduite longue). Les flux à travers ces éléments résistifs sont obtenus en tant que quotient des tensions (différences de pression) aux bornes des éléments et de leurs résistances respectives (chapitre 2, section 2.6.1, équation (2.19)). La tension aux bornes du condensateur (pression du fluide dans le récipient) est calculée au moyen de la loi de capacité (chapitre 2, section 2.5.1, équation (2.16)) en tant que quotient de la charge et de la capacité. La valve est simulée au moyen d'une diode. Finalement, les tensions sur les résistances sont obtenues à partir de la loi des mailles (chapitre 2, section 2.4, équation (2.14)).

FIGURE I.9 Modélisation électrique du windkessel: (a) diagramme du modèle dynamique; (b) résultats de la simulation (ligne continue) et comparaison avec les valeurs mesurées sur le condensateur (points). La tension de l'alimentation (U_S) a été utilisée en tant que donnée d'entrée dans le modèle.



Les équations du modèle consistent en une équation de bilan, deux lois des mailles qui relient les tensions et cinq relations constitutives pour les résistances, la diode, le condensateur et l'alimentation:

$$dQ / dt = I_{Q_1} - I_{Q_2} \quad , \quad Q(0) = 0$$

```

UR_1 = US - UD - UC
UR_2 = UC
IQ_1 = IF (UR_1 > 0) THEN UR_1/R1 ELSE 0
IQ_2 = UR_2/R2
UC = Q/C
US = Graphical_Function(TIME)
UD = 0.82
C = 458e-6
R1 = 1.00e3
R2 = 1.0e4

```

I.3.2 Limitations du modèle

Le modèle électrique représentant le circuit de type windkessel donne de bons résultats. Le seul défaut est la modélisation fortement simplifiée de la diode. Nous avons admis qu'il s'agit d'une diode parfaite qui empêche la circulation du courant tant que la tension à ses bornes est inférieure à 0.82 V; au-dessus de cette valeur, elle est un conducteur parfait. C'est une approximation assez grossière de la réalité, mais elle semble suffisante. La modélisation réaliste d'une diode sera traitée dans l'Interlude II.

Que devons-nous faire pour transférer ce modèle au cas physiologique? Il suffit de changer les noms des variables, c'est-à-dire remplacer la charge par le volume, la tension par la différence de pression, la capacité électrique par la capacité hydraulique, etc. et, naturellement, changer les valeurs numériques des paramètres.

Même sans avoir procédé à cette transformation, nous savons à quoi vont ressembler les fonctions simulées, c'est-à-dire la pression et les flux volumiques, vu que les cas sont analogues du point de vue mathématique (fig. I.10a).

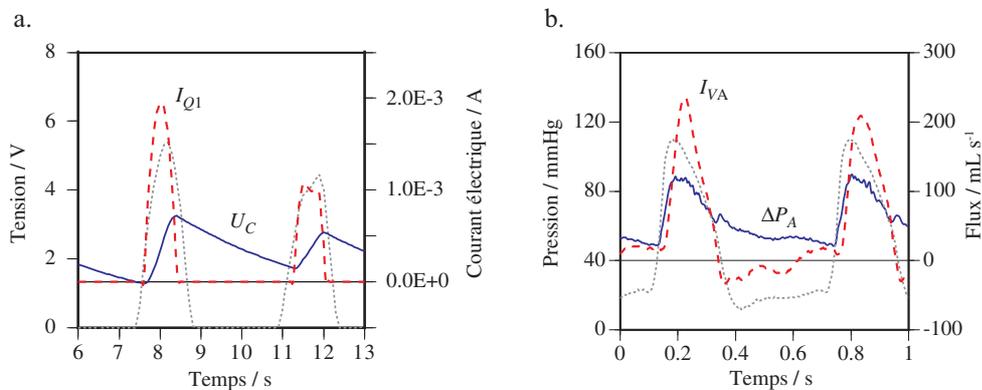


FIGURE I.10 Modèle électrique de type windkessel: (a) résultats de la simulation; (b) données physiologiques recueillies sur un mouton (voir la figure I.2 pour les détails); les lignes pointillées correspondent respectivement à U_S et à ΔP_{VG} , c'est-à-dire les données d'entrée de nos modèles dynamiques. U_C correspond à ΔP_A et I_{Q1} à I_{VA} . Le courant électrique correspond au flux de charge entrant dans le condensateur.

Si nous comparons les résultats de la simulation (fig. I.10a) aux données recueillies dans le système cardiovasculaire d'un mouton (fig. I.10b), nous détectons quatre différences bien visibles, deux pour les paires $U_C \rightarrow \Delta P_A$ et deux pour les paires $I_{Q1} \rightarrow I_{VA}$. U_C n'augmente pas assez rapidement lorsque l'alimentation externe est enclenchée, et la décroissance de la tension a une forme différente de celle de ΔP_A après le passage par le maximum; il semble qu'il y a deux temps de relaxation caractéristiques

dans la fonction de pression, d'abord un bref, puis un plus long. De plus, on soupçonne une oscillation dans la fonction de ΔP_A .

Les différences entre I_{Q1} et $I_{V,A}$ sont encore plus frappantes. Il y a un léger délai dans la croissance de $I_{V,A}$ après que la pression dans le ventricule gauche est devenue supérieure à celle de l'aorte. $I_{V,A}$ et I_{Q1} ne sont pas directement comparables, vu que le flux sanguin a été mesuré *dans* l'aorte, à une certaine distance de la valve aortique. Deuxièmement, et c'est beaucoup plus important, l'intensité du flux sanguin devient légèrement négative pour une courte période du cycle cardiaque, indiquant que le sang s'écoule vers l'arrière au point de mesure. Cela ne signifie pas que le sang retourne dans le ventricule gauche, mais plutôt qu'il oscille dans l'aorte. Il n'est pas possible d'obtenir un régime oscillatoire dans un modèle RC, qu'il soit hydraulique ou électrique.

1.3.3 Circuit avec des condensateurs supplémentaires

Nous ne serons pas en mesure de résoudre le problème de l'apparition d'oscillations dans cette investigation. Ce sera le cas lorsque nous aurons étudié les effets de l'inertie sur les écoulements, ce que nous ferons lors de l'étude du phénomène d'induction au chapitre 4. Dans l'interlude II, nous reprendrons alors le cas du système circulatoire et étendrons nos modèles de telle manière que nous pourrions alors affirmer que nous comprenons la nature des flux négatifs de sang et de ses oscillations dans l'aorte.

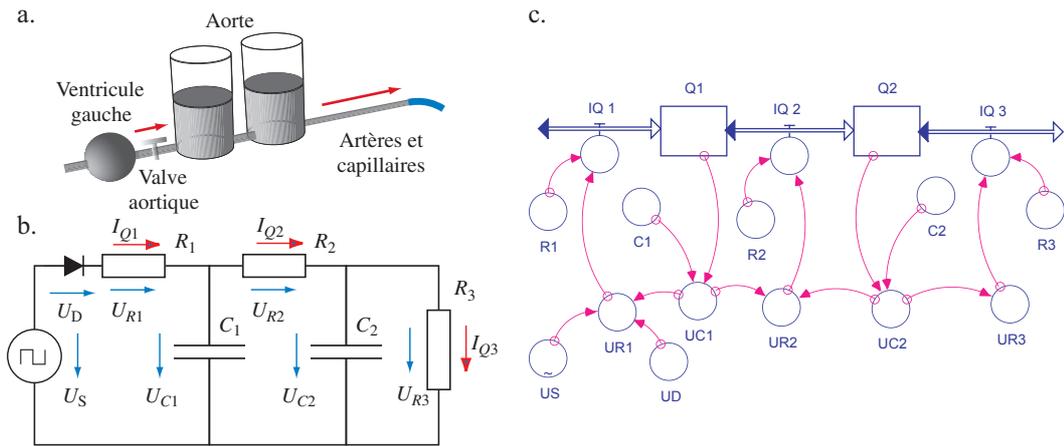


FIGURE I.11 Amélioration du modèle: (a) remplacement du récipient unique par deux récipients reliés par une courte conduite; (b) circuit électrique RC équivalent; (c) diagramme de dynamique des systèmes correspondants. Il serait possible d'augmenter le nombre d'éléments de stockage pour affiner encore plus le modèle.

Nous allons améliorer le modèle de telle manière qu'il affichera des résultats un peu meilleurs pour la forme de la fonction de pression, ou plutôt, si nous le faisons d'abord pour le circuit électrique, pour la tension sur le condensateur. Représenter l'aorte longue et élastique par un seul récipient de stockage (fig. I.4) est assez sommaire. Les conditions rencontrées par le sang diffèrent d'un point à l'autre de l'aorte et évoluent dans le temps en chaque point de l'aorte. Les modèles que nous avons créés reproduisent les variations temporelles, mais pas les variations spatiales. Nous pouvons surmonter le problème en divisant l'aorte en un certain nombre d'éléments, chacun représenté par son dispositif de stockage. Ces éléments de stockage sont reliés par l'écoulement du liquide d'un élément à l'autre. Nous imitons de cette manière un modèle de l'aorte au moyen de la méthode des éléments finis (fig. I.11).

Si, pour le modèle à deux condensateurs, nous souhaitons utiliser les mêmes paramètres que pour le modèle de la figure I.9, nous pouvons distribuer les capacités sur les deux condensateurs de manière à ce que leur somme soit égale à $450 \mu\text{F}$. Nous utilisons $C_1 = 50 \mu\text{F}$ et $C_2 = 400 \mu\text{F}$. Comme la pression aortique a été mesurée près du ventricule gauche, il est sensé d'attribuer la valeur la plus faible au premier condensateur. Si nous attribuons à la connexion entre les deux condensateurs une résistance de $2 \text{ k}\Omega$, les résultats de la simulation pour la tension et l'intensité des courants sont ceux de la figure I.12. L'amélioration la plus frappante apparaît dans la forme de la tension sur le premier condensateur: elle augmente plus rapidement, atteint son maximum à l'intérieur de la courbe en forme de cloche représentant U_S , et sa décroissance affiche clairement deux constantes de temps.

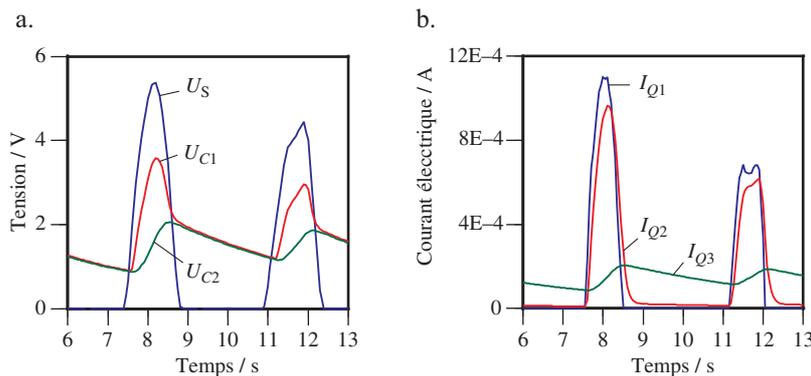


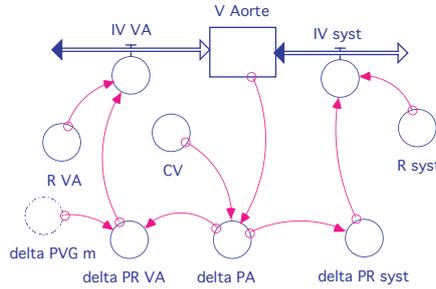
FIGURE I.12 Simulation du modèle amélioré: (a) tension U_{C1} et U_{C2} ; la forme d' U_{C1} ressemble beaucoup plus à celle de ΔP_A mesurée sur le mouton que dans le modèle précédent; (b) intensité des courants I_{Q1} , I_{Q2} et I_{Q3} qui ne manifeste pas de comportement oscillatoire.

Il n'y a pas de véritable amélioration dans la simulation des courants. Ils ne deviennent pas négatifs ni ne se mettent à osciller. Cependant, I_{Q2} représente le flux de sang mesuré dans l'aorte de manière plus proche de la réalité. Ce n'est ni le flux entrant, ni le flux émergent de l'aorte, puisqu'il s'agit du courant entre les deux éléments de stockage, donc un courant à l'intérieur de l'aorte. Le courant émergent I_{Q3} révèle un aspect important du rôle de l'aorte: elle lisse fortement le variation d'intensité de l'écoulement du sang vers les parties du corps.

I.4 PREMIER MODÈLE HYDRAULIQUE

Après ce détour par la modélisation électrique, nous sommes en mesure de créer des modèles dynamiques hydrauliques du circuit systémique du système cardiovasculaire des mammifères. Nous prenons pour base le modèle élaboré pour l'équivalent électrique du windkessel de la figure I.9 et changeons de façon approprié les noms des variables (fig. I.13). Les équations restent les mêmes. Il n'y a qu'une différence évidente: la fonction de la diode a été remplacée par une valve qui s'ouvre et se ferme en fonction du signe de la différence de pression entre le ventricule et l'aorte. La résistance de cette valve aortique est incluse dans la résistance à l'écoulement R_{VA} .

FIGURE I.13 Diagramme du modèle dynamique d'un système hydraulique de type windkessel. Un élément de stockage unique reçoit un fluide dont la pression est engendrée par une pompe travaillant de manière cyclique. La pompe n'est pas modélisée directement, mais la pression mesurée ΔP_{VG_m} est utilisée pour représenter la pression du sang dans le ventricule gauche. Le flux émergent est modélisé en tant que flux laminaire, ce qui est également le cas du flux entrant. La relation capacitive est aussi linéaire.



$$V_{Aorte}(t) = V_{Aorte}(t - dt) + (I_{V_VA} - I_{V_syst}) * dt$$

$$INIT V_{Aorte} = CV * \Delta P_{PA_init}$$

$$I_{V_VA} = IF (\Delta P_{PR_VA} > 0) THEN \Delta P_{PR_VA} / R_{VA} ELSE 0$$

$$I_{V_syst} = \Delta P_{PR_V} / R_{syst}$$

$$\Delta P_{PR_VA} = P_{VG_m} - \Delta P_{PA}$$

$$\Delta P_{PR_syst} = \Delta P_{PA}$$

$$\Delta P_{PA} = V_{Aorte} / CV$$

$$R_{VA} = 1.87e7$$

$$R_{syst} = 2.39e8$$

$$CV = 3.46e-9$$

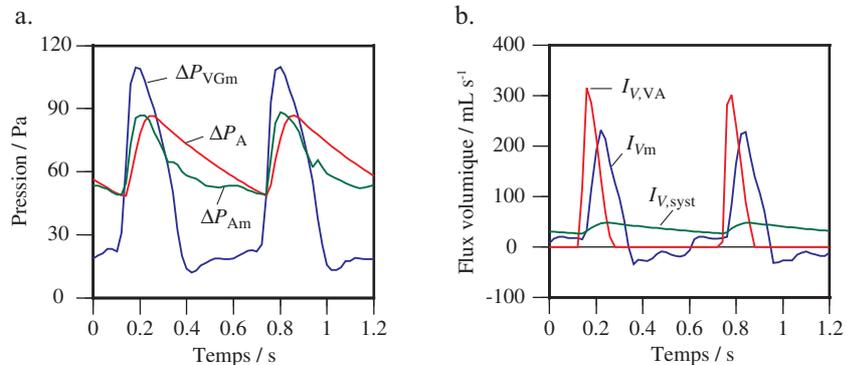
$$\Delta P_{PA_init} = 7500$$

Comme on pouvait s'y attendre, la pression simulée ΔP_A et les intensités des courants $I_{V,VA}$ et $I_{V,syst}$ ont les mêmes formes que celles que nous avons trouvées pour U_C et les courants du modèle électrique; il suffit de comparer les figures I.14 et I.10a. Nous pouvons reprendre l'essentiel des remarques faites au sujet des résultats fournis par le modèle électrique le plus simple: la pression sanguine simulée est trop simple (fig. I.14a) et l'écoulement du sang ne change pas de sens (fig. I.14b).

Détermination des paramètres. Un des objectifs de la modélisation des systèmes cardiovasculaires est d'obtenir des valeurs utiles de la capacité de l'aorte, la résistance à l'écoulement pour le flux du ventricule gauche dans l'aorte et la résistance des vaisseaux (artères et capillaires) qui constituent la partie systémique du circuit. En général, on peut essayer d'obtenir de telles valeurs en ajustant les résultats de la simulation aux fonctions mesurées selon le temps. Comme nous avons trois paramètres inconnus, il se pourrait que nous rencontrions des problèmes et c'est ce qui peut arriver si l'on n'est pas attentif.

Pour commencer, nous admettons que la résistance des vaisseaux systémiques est relativement élevée. Nous savons depuis le chapitre 1 que la résistance de conduites d'un demi-mètre de longueur et de quelques millimètres de diamètre intérieur est de l'ordre de grandeur de 10^8 unités SI standard. Pour la résistance qui s'offre au passage du sang entre le ventricule gauche et l'aorte, nous pouvons admettre que sa valeur est approximativement 10 fois plus faible. Cette valeur nous est suggérée par le rapport des constantes de temps liées respectivement à la croissance et à la décroissance de la pression mesurée ΔP_{Am} (fig. I.14a); lors de la création du circuit électrique analogue, nous avons constaté qu'un rapport $R_1 : R_2$ de 1:10 donne un comportement qui n'est pas trop éloigné de ce que nous savons du cas physiologique.

FIGURE I.14 Comparaison entre simulation et valeurs mesurées pour le modèle de la figure I.13: (a) la pression ΔP_{Am} est la pression mesurée dans l'aorte, ΔP_{VG} est la pression dans le ventricule gauche, utilisée comme donnée d'entrée dans le modèle; (b) les intensités $I_{V,VA}$ et $I_{V,syst}$ sont les intensités des flux entrant dans et émergent de l'aorte. Les fonctions mesurées utilisées dans ce modèle ont été construites à partir d'un des cycles mesurés qui est répété autant de fois que nécessaire.



Pour obtenir un ajustement entre ΔP_A et ΔP_{Am} qui est aussi bon que celui qu'on peut constater dans la figure I.14a, nous cherchons une valeur convenable pour la capacité hydraulique de l'aorte par approximations successives. Il est encore possible de faire des ajustements fins du rapport des résistances avant d'obtenir le résultat désiré.

Que se passe-t-il si l'on prend une autre valeur de départ pour R_2 , par exemple une valeur 10 fois plus faible? Nous devons également réduire la valeur de R_1 d'un facteur 10 et trouver la valeur de C par approximations successives. Nous trouverons que la nouvelle valeur de la capacité doit être 10 fois plus grande que celle de la première tentative. Cela signifie-t-il que les paramètres du système physiologiques sont arbitraires?

Ce n'est pas le cas. Ce que nous observons ici est un problème général qui se présente avec un système RC simple si l'on ajuste une seule fonction mesurée, par exemple la tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge, et que l'on veut obtenir les valeurs inconnues de R et C . Nous pouvons utiliser n'importe quelle paire de valeurs tant que le produit de R et C , c'est-à-dire $RC = \tau$, est choisi de manière appropriée. Nous avons appris lors de l'étude de systèmes hydrauliques et électriques simples que le produit RC est la constante de temps liée aux processus de charge et de décharge à travers des résistances linéaires d'éléments de stockage linéaires. Comparer une fonction simulée unique telle que la tension capacitive à la fonction mesurée correspondante ne suffit pas si nous voulons déterminer les valeurs de R et de C .

Nous avons besoin d'une seconde observation, que nous possédons, à savoir l'intensité du courant dans l'aorte, mesurée près de la valve aortique (fig. I.14b). Nous devons comparer les courants simulés avec celui qui a été mesuré.

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous n'obtiendrons pas de résultats vraiment satisfaisants pour l'instant. Notre modèle simple de la figure I.13 nous donne le flux entrant dans et le flux émergent de l'aorte, mais pas le courant *dans* l'aorte. Même si nous n'arrivons pas à obtenir un meilleur résultat que celui de la figure I.14b, nous devons essayer d'ajuster la quantité totale de fluide transférée par les flux entrant $I_{V,VA}$ et le flux mesuré par cycle. Nous pouvons calculer ces grandeurs dans le modèle en intégrant les flux et en comparant les résultats. Si nous le faisons, nous obtenons un jeu unique des paramètres C , R_{VA} et R_{syst} . Les résultats d'un tel ajustement apparaissent dans la table des équations du modèle de la figure I.13.

Nous n'avons pas rencontré ces problèmes lors de la modélisation électrique du windkessel parce que nous pouvions admettre que les valeurs des résistances électriques avaient été déterminées de manière indépendante. Ayant accepté ces valeurs, nous avons pu ajuster la capacité et la valeur critique de la tension de la diode pour obtenir sans difficulté un ajustement optimal.

Modèles non linéaires. Dans le système électrique, les résistances utilisées ont un comportement parfaitement linéaire, et le condensateur suit une relation quasi linéaire. Dans le cas hydraulique, nous avons une liberté supplémentaire par rapport au cas électrique: les écoulements peuvent être turbulents et la relation capacitive peut être non linéaire.

Est-ce que le changement apporte une amélioration? Ce n'est pas vraiment le cas. Si nous remplaçons les deux relations pour les flux par des expressions relatives à des écoulements turbulents, le changement n'est pas notable, sauf naturellement les valeurs des facteurs de flux. La pression simulée ΔP_A a le même aspect que celui de la figure I.14a. Le flux entrant $I_{V,VA}$ est un peu plus faible mais plus large, ce qui donne la même quantité de fluide transférée lors d'un cycle. Le reflux n'apparaît pas dans la simulation.

I.5 EXTENSION DU MODÈLE HYDRAULIQUE

Comme nous nous y attendions, le premier modèle avec un réservoir unique ne donne rien de mieux qu'un accord semi-quantitatif avec le comportement du circuit cardiovasculaire. Malgré sa simplicité, il nous aide à comprendre ce système physiologique complexe. Nous savons maintenant pourquoi la pression du sang dans l'aorte varie entre les valeurs systolique et diastolique, la dernière restant bien supérieure à la pression ambiante.

Les expériences avec des circuits électriques nous ont montré la voie vers une extension de notre premier modèle. Dans cette section et dans la section suivante, nous allons élaborer deux modèles supplémentaires qui vont améliorer notre compréhension du système cardiovasculaire et de la fonction du ventricule gauche en tant que pompe.

La première étape vers une amélioration est l'élaboration d'un modèle de type windkessel dans lequel l'aorte est divisée en deux sections inégales. Notons qu'il serait possible d'augmenter le nombre de sections jusqu'à ce que ce nombre soit convenable. Le modèle étendu est à nouveau presque parfaitement analogue au cas électrique exposé dans la figure I.11. À l'exception du traitement de la diode, notre action consiste simplement à changer les noms des variables (fig. I.15) et les valeurs des paramètres pour lesquelles nous avons de bonnes valeurs de départ fournies par notre premier modèle. L'adjonction principale est l'apparition d'un flux de sang I_{V12} dans l'aorte entre les deux éléments de stockage, flux dont l'intensité est dépendante de la différence des pressions entre les deux parties de l'aorte.

Si nous admettons que le premier élément de l'aorte à la sortie du ventricule gauche est plus court que le second, nous pouvons admettre que la pression simulée pour cet élément relativement proche de la valve aortique correspondra mieux à celle qui a été mesurée. Ce qui nous conforte dans cette supposition est le fait qu'un élément plus court répondra plus rapidement à l'arrivée du sang, ce qui correspond à ce qui a été observé.

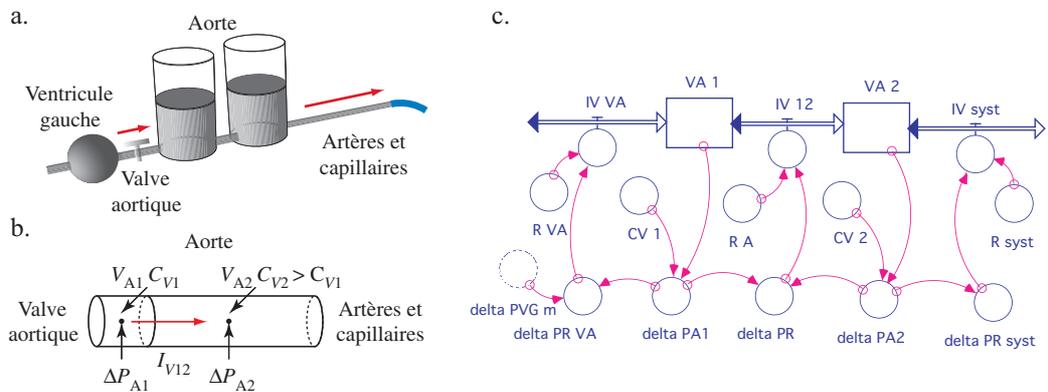


FIGURE I.15 Amélioration du modèle hydraulique: (a) remplacement du récipient unique par deux récipients reliés par une courte conduite; (b) l'aorte est divisée en deux segments de longueurs inégales, le premier ayant une capacité plus faible que le second; (c) modèle de dynamique des systèmes, qui comporte un flux entre les deux éléments de l'aorte.

Regardons d'un peu plus près les équations et les valeurs des paramètres de ce modèle. Il y a maintenant deux équations de bilan de volume, une pour chaque élément de stockage avec, à chaque fois, un flux entrant et un flux émergent. Les valeurs initiales pour les volumes sont déterminées par les valeurs initiales appropriées de la pression capacitive et de la capacité associée. Nous admettons que les flux sont laminaires, et

leurs intensités sont déterminées par les différences de pression associées. Les lois de capacité sont également considérées comme linéaires.

```

VA_1(t) = VA_1(t - dt) + (IV_VA - IV_12) * dt
INIT VA_1 = CV_1*delta_PA1_init
VA_2(t) = VA_2(t - dt) + (IV_12 - IV_syst) * dt
INIT VA_2 = CV_2*delta_PA2_init
IV_VA = IF (delta_PR_VA>0) THEN delta_PR_VA/R_VA ELSE 0
IV_12 = delta_PR/R_A
IV_syst = delta_PR_syst/R_syst

delta_PA1 = VA_1/CV_1
delta_PA2 = VA_2/CV_2
delta_PR_VA = LVP_m-delta_PA1
delta_PR_syst = delta_PA2
delta_PR = delta_PA1-delta_PA2

R_VA = 1.5e7
R_A = 1.8e7
R_syst = 2.10e8
CV_1 = 0.38e-9
CV_2 = 3.84e-9
delta_PA1_init = 6700
delta_PA2_init = 6600

```

Les résistances à l'écoulement à l'entrée et à la sortie de l'aorte sont pratiquement les mêmes que celles que nous avons utilisées pour l'ajustement aux données mesurées dans le modèle à un seul récipient (fig. I.13). Elles ont été légèrement réduites pour prendre en compte le fait qu'une partie de la résistance se manifeste à l'intérieur de l'aorte, ce que nous avons représenté par R_A . Nous avons donné à la capacité du premier élément de stockage une valeur 10 fois inférieure à celle du second élément. Comme nous pouvons le constater, nous obtenons une assez bonne approximation de la croissance de la pression dans la première phase et de sa décroissance dans la deuxième phase lors de la simulation (fig. I.16a). La seconde phase de la décroissance de la pression ne s'ajuste pas encore de manière satisfaisante. Même si maintenant le flux I_{V2} a des valeurs plus proches des valeurs mesurées (fig. I.16b), il ne manifeste pas de comportement oscillatoire.

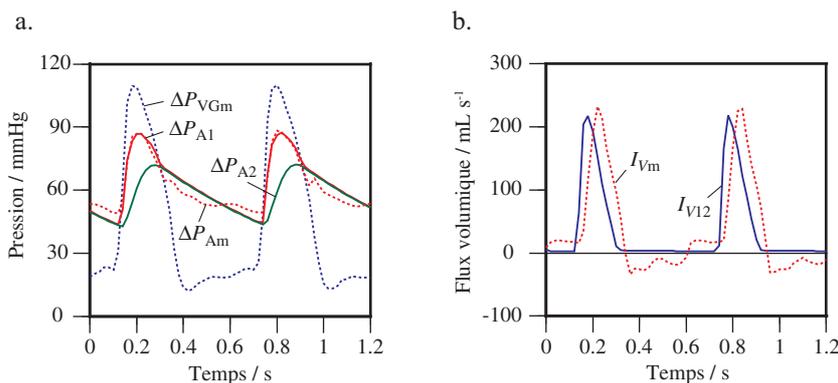


FIGURE I.16 Résultats de la simulation du modèle à deux récipients: (a) pression ventriculaire ΔP_{VG} et pression aortique ΔP_{C1} comparée à la pression mesurée ΔP_{Am} ; (b) flux aortique simulé I_{V12} comparé au flux mesuré I_{Vm} .

Nous pouvons naturellement produire bien d'autres modèles étendus de ce système physiologique. Nous pouvons introduire des sections supplémentaires de l'aorte, utiliser des relations constitutives non linéaires, etc. Une extension évidente serait d'inclure des branchements d'artères à partir de l'aorte, comme le montre la figure I.1. Tous ces changements amèneraient le modèle à une représentation plus proche des détails du système réel. Cependant, deux étapes importantes de la modélisation du

système cardiovasculaire ne serait pas incluses : la modélisation du fonctionnement du muscle cardiaque et la compréhension de l'apparition d'oscillations dans l'aorte. Le premier problème sera traité dans la section suivante, le second le sera dans l'interlude II.

I.6 VENTRICULE GAUCHE EN TANT QUE POMPE INTERMITTENTE

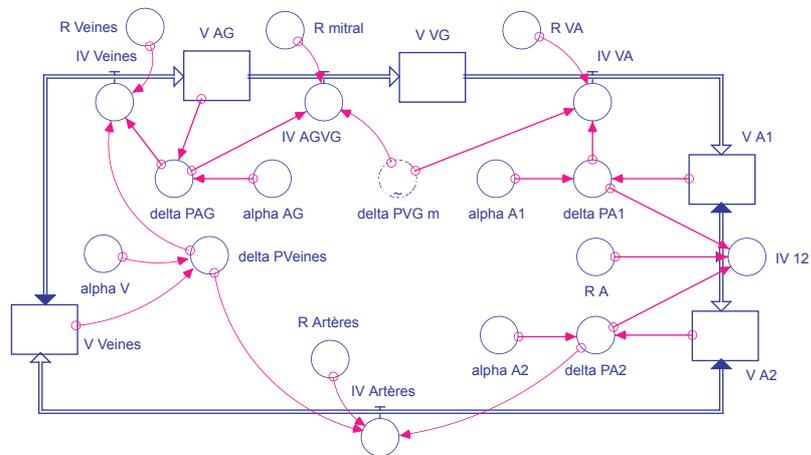
Jusqu'ici, nous n'avons pas tenté de modéliser le cœur en tant que pompe : nous avons utilisé la pression mesurée dans le ventricule gauche ΔP_{VG} pour entraîner nos modèles. Nous allons accomplir un petit pas vers une meilleure compréhension de la manière dont fonctionne le ventricule gauche en le modélisant en tant que réservoir qui reçoit du sang, augmente sa pression pour l'éjecter. Nous serons ainsi en mesure de construire un diagramme important, la boucle pression-volume du ventricule gauche utilisée en médecine pour permettre de comprendre le cœur en tant que pompe intermittente.

I.6.1 Circuit fermé et caractéristique PV d'une pompe

Si nous voulons comprendre les processus qui se déroulent dans le ventricule gauche, nous devons en apprendre plus sur l'écoulement du sang vers et hors de ce ventricule. Nous avons déjà traité le cas de l'éjection du sang dans nos modèles : lorsque la pression du sang dans le ventricule gauche dépasse celle qui règne dans l'aorte, la valve aortique s'ouvre et le sang est injecté dans l'aorte. Mais le ventricule gauche doit être refourni en sang. Si nous remontons le circuit cardiovasculaire, nous voyons qu'il arrive de l'atrium gauche qui, lui-même, l'a reçu du circuit pulmonaire (fig. I.1b). Le sang arrive dans les poumons par l'intermédiaire du ventricule droit qui reçoit le sang veineux arrivé dans l'atrium droit (fig. I.1b).

Modélisation. Nous simplifions le circuit en laissant de côté la partie droite du cœur et les poumons. En procédant de la sorte, nous obtenons un circuit fermé contenant les éléments suivants : atrium gauche, ventricule gauche, aorte et vaisseaux systémiques (artères et veines). Nous connecterons les veines directement à l'atrium gauche. Si nous admettons que les veines sont des vaisseaux élastiques et contiennent une quantité assez importante de sang, notre modèle consiste en quatre éléments de stockage principaux : l'atrium gauche, le ventricule gauche, l'aorte et les veines (fig. I.17).

FIGURE I.17 Modèle d'un système cardiovasculaire fermé laissant de côté le circuit pulmonaire : les veines, l'atrium et le ventricule gauches sont ajoutés en tant qu'éléments de stockage à notre précédent modèle de type windkessel. Le ventricule gauche n'est pas modélisé, sa fonction est représentée par la pression mesurée $\Delta P_{VG,m}$.



Nous complétons le meilleur de nos modèles précédents, celui de la figure I.15c comprenant deux éléments de stockage de grandeur différente pour l'aorte (branche verticale droite du diagramme de la figure I.17). Nous ajoutons un réservoir pour le volume de sang dans le ventricule gauche (V_{VG}). Nous n'irons pas plus loin pour l'instant dans la modélisation de cette partie du cœur; l'information la plus importante sur son fonctionnement sera encore représentée par la pression mesurée $\Delta P_{VG,m}$.

Un réservoir supplémentaire sert à prendre en compte le volume de sang stocké dans l'atrium gauche (V_{AG}) et l'écoulement de cet élément vers le ventricule gauche est symbolisé par le flux IV_{AGVG} . Comme précédemment, nous rendons ce flux dépendant de la différence de pression entre le sang accumulé dans l'atrium gauche et celui du ventricule gauche; R_{mitral} représente la résistance à cet écoulement. Pour pouvoir déterminer la pression dans l'atrium gauche, nous introduisons l'élastance de cet élément (chapitre 1, section 1.6.2, équation (1.27)). Nous utilisons également l'élastance plutôt que la capacité pour qualifier les propriétés physiques des deux segments de l'aorte, de l'atrium gauche et des veines.

Enfin, nous avons besoin du flux entrant dans l'atrium gauche provenant du sang accumulé dans les veines (rappelons que le circuit pulmonaire n'a pas été pris en compte). Ce dernier élément de stockage (V_{Veines}) reçoit le fluide provenant du second segment de l'aorte ($IV_{Artères}$), ce qui ferme notre circuit simplifié.

Comme dans le cas de l'atrium gauche et des segments de l'aorte, la pression du sang dans les veines est calculée à partir du volume emmagasiné et de l'élastance des veines. L'intensité du flux de l'aorte vers les veines est dictée par la résistance systémique utilisée précédemment, et une résistance supplémentaire est introduite pour déterminer l'intensité du flux des veines vers l'atrium. Comme à chaque fois, nous admettons que ces flux sont linéairement dépendants des différences de pression respectives. Tous les éléments de notre modèle sont en place.

Il y a maintenant deux valves dans ce circuit fermé simple: une première entre l'atrium gauche et le ventricule gauche, la valve mitrale, et la valve aortique entre le ventricule gauche et l'aorte. Cela implique que les expressions pour les flux à travers ces valves (IV_{AGVG} et IV_{VA} dans le diagramme de la figure I.17) doivent être rendus dépendants de l'état de la valve: si la différence de pression (dans la direction du flux) devient négative, le flux doit être mis à zéro.

Estimation des paramètres et simulation du modèle. La simulation d'un tel modèle nécessite beaucoup de soin et passablement d'approximations successives. À cause de sa taille, ce modèle introduit un assez grand nombre de paramètres et de valeurs initiales qui doivent être choisis de manière judicieuse si nous souhaitons des résultats de simulation raisonnables (fig. I.18).

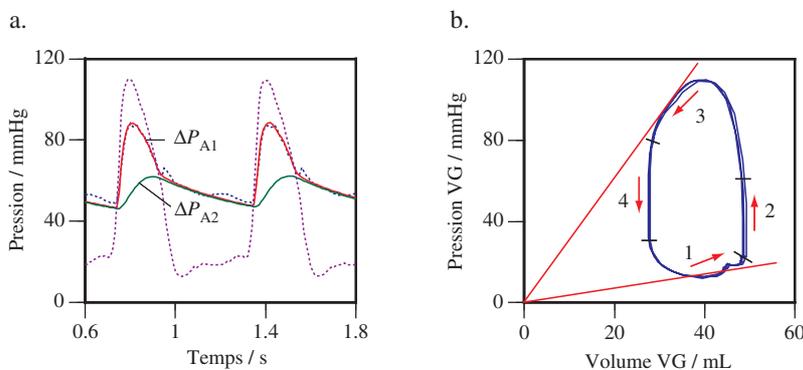


FIGURE I.18 Quelques résultats de la simulation du modèle de la figure I.17: (a) la pression aortique est modélisée presque correctement par ΔP_{A1} , à l'exception du comportement oscillatoire; le courant intra-aortique I_{V2} est très semblable à ce que nous avons obtenu précédemment: il ne manifeste pas d'oscillations; (b) relation entre la pression sanguine et le volume de sang dans le ventricule gauche.

Nous commençons par utiliser les valeurs des résistances pour la valve aortique, les vaisseaux systémiques et le flux intra-aortique. Pour être proche des valeurs utilisées dans la pratique médicale, nous mesurons le volume en mL, le temps en secondes et la pression en mmHg. Si nous convertissons les valeurs utilisées dans la simulation de la figure I.16, nous obtenons des valeurs d'environ 0.1, 1 et 0.2 mmHg s mL⁻¹, pour R_VA, R_syst et R_A respectivement. Nous avons également les valeurs des capacités des deux segments de l'aorte que nous convertissons dans les nouvelles unités. Les inverses de ces valeurs sont les élastances que nous estimons à approximativement 12 et 1.2 mmHg mL⁻¹ pour alpha_A1 et alpha_A2 respectivement.

Il s'agit ensuite d'estimer les volumes de sang pour chacun des cinq éléments de stockage de notre modèle. Nous pouvons à nouveau utiliser l'expérience antérieure et estimer que l'aorte contiendra entre 30 et 50 mL de sang, vu qu'elle a un rayon de 1.0 à 1.5 cm et une longueur d'environ 25 cm pour un mouton adulte. En outre, nous savons que le volume éjecté par le cœur durant un cycle doit être d'environ 20 mL. Nous pouvons ainsi admettre que le ventricule gauche contient entre 20 et 40 mL de sang, valeur qui change de manière rythmique dans le temps. Le volume de sang dans l'atrium gauche doit être du même ordre de grandeur. Ce qui laisse le reste du sang, probablement plus de 3 litres pour un mouton adulte, réparti dans les veines. Nous prenons 3000 mL pour V_Veines.

Admettons maintenant que l'élément de stockage désigné par «V_Veines» divise en deux la pression entre l'aorte et l'atrium gauche. Cela signifie que nous devons répartir R_syst en deux parties : la première moitié R_Artères représente la résistance des vaisseaux qui transportent le sang oxygéné vers les organes et la seconde moitié R_Veines est la résistance des vaisseaux qui ramènent le sang pauvre en oxygène et riche en gaz carbonique au ventricule droit. Sachant que la pression du sang dans les veines devrait se situer entre celles de l'aorte et de l'atrium, cette dernière devant être peu supérieure à la valeur de la pression la plus basse dans le ventricule gauche, nous pouvons estimer une valeur pour alpha_V, située entre 0.1 et 0.15 mmHg mL⁻¹. Nous utilisons le même argument pour alpha_AG pour l'atrium gauche et obtenons une estimation de 1 mmHg mL⁻¹. La résistance pour l'écoulement de l'atrium vers le ventricule devrait être égale ou plus petite que celle du ventricule vers l'aorte. Nous avons ainsi terminé le travail destiné à fournir des valeurs de départ pour tous les paramètres de notre modèle.

La figure I.18a montre le résultat d'une simulation particulière. La pression aortique s'ajuste assez bien à la courbe mesurée, mais nous devons nous souvenir que nous utilisons la pression mesurée dans le ventricule gauche pour actionner le modèle, ce qui veut dire que nous ne pouvons pas prédire cette grandeur. Comme dans les exemples précédents, nous devons prendre soin de bien ajuster le courant dans l'aorte à la fonction mesurée, ce que nous faisons indirectement en égalant les quantités totales transportées par les écoulements simulés et mesurés.

Le cœur en tant que pompe intermittente. L'information supplémentaire majeure fournie par ce modèle est la forme de la relation entre la pression et le volume de sang dans le ventricule gauche (fig. I.18b). Elle nous montre quelque chose de nouveau : le fonctionnement d'une pompe intermittente plutôt que celui d'une pompe en régime continu.

Nous pouvons maintenant visualiser les détails du cycle cardiaque. Considérons la phase 1 de ce cycle en nous basant sur la figure I.18b. La pression sanguine dans le ventricule gauche est presque à sa valeur minimale, et c'est également le cas du volume de sang qui s'y trouve. À partir de ce point, le volume de sang augmente grâce à l'apport venant de l'atrium gauche, ce qui implique également que la pression dans l'atrium est plus élevée que dans le ventricule à cet instant et durant toute la phase 1. Le ventricule se remplit de sang alors que la pression n'augmente que faiblement, ce qui indique que la paroi du cœur est relaxée — son élastance est faible durant cette

phase. Il est possible d'estimer une valeur de l'élastance pour la phase 1 en mesurant la pente de la droite ajustée à la partie inférieure de la boucle PV dans le diagramme; nous obtenons une valeur d'environ 0.4 mmHg mL^{-1} .

Le ventricule s'est rempli et sa paroi se tend. La pression du sang augmente, la valve mitrale se ferme et le volume reste constant alors que la tension et la pression du fluide augmentent (phase 2). À un certain moment, la pression du sang va dépasser la valeur dans l'aorte, la valve aortique va s'ouvrir et le volume de fluide dans le ventricule décroît (phase 3). Vu que la tension du muscle commence à diminuer, la pression devient trop faible pour que le sang puisse continuer à se déverser dans l'aorte, la valve aortique se referme. Comme le muscle cardiaque se relaxe, le volume de sang reste constant (phase 4) et nous aboutissons à nouveau au point de départ de la phase 1.

Il est nécessaire de mentionner un dernier point. Il est clair que la tension de la paroi du ventricule et de ce fait l'élastance de cet élément évoluent dans le temps. Nous pouvons estimer la valeur maximale de cette élastance en mesurant la pente de la seconde droite ajustée à la boucle PV: nous obtenons une valeur d'environ 4 mmHg mL^{-1} . Cette valeur nous sera utile dans la dernière étape que nous allons maintenant aborder dans cette étude du système cardiaque.

I.6.2 Modèle simple d'élastance variable du ventricule gauche

Après un premier pas modeste vers une modélisation de la fonction de pompe du ventricule gauche, il serait souhaitable de rendre notre compréhension du fonctionnement du cœur indépendante de la pression mesurée $\Delta P_{VG,m}$.

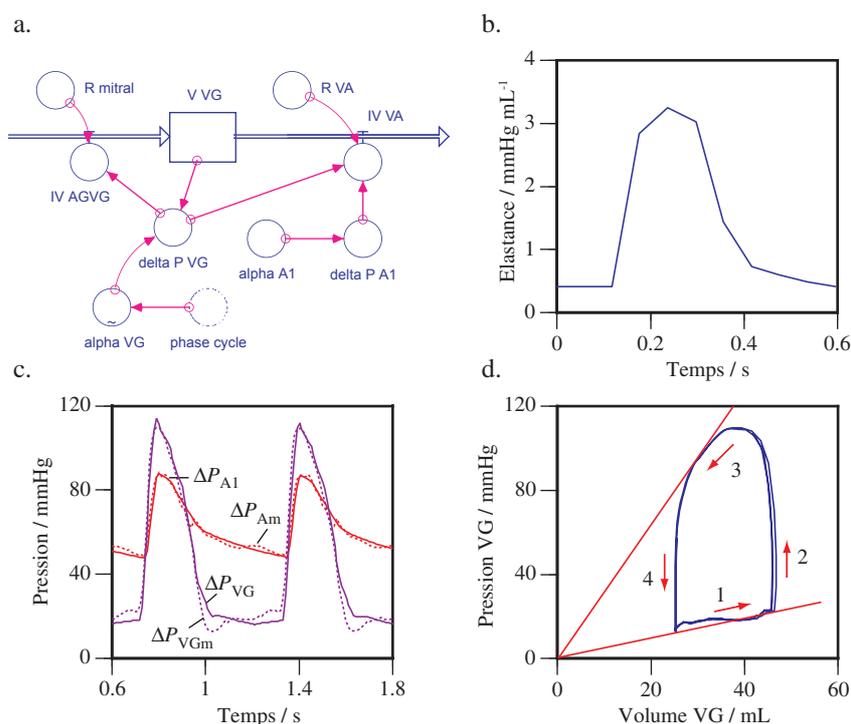


FIGURE I.19 Modélisation du ventricule gauche avec une élastance variable: (a) partie du modèle montrant comment intégrer l'élastance comme une fonction répétitive dans le temps pour prédire la pression ventriculaire ΔP_{VG} ; (b) évolution temporelle simulée de l'élastance utilisée dans le modèle; (c) comparaison des pressions ventriculaire et aortique simulées avec les valeurs mesurées correspondantes; (d) la boucle PV est très semblable à celle de la figure I.18.

C'est une tâche assez difficile, vu qu'elle implique de comprendre la stimulation électrique du muscle cardiaque et la réponse mécanique des parois du ventricule, ce qui n'est pas notre objectif. Nous allons contourner le problème en modélisant le ventricule gauche en lui attribuant des valeurs de l'élastance variant dans le temps. À partir

du volume déjà intégré dans le modèle et de cette élastance variable, nous pouvons prédire la valeur de la pression ventriculaire (variable ΔP_{VG} dans la partie du modèle que montre la figure I.19a). Comme nous avons admis que tous les cycles sont identiques, nous ne devons construire la fonction $\alpha_{V,VG}(t)$ que pour un cycle qui dure assez précisément 0.60 s dans le cas du mouton sur lequel ont été effectuées les mesures.

Nous avons appris dans la section précédente que l'élastance varie approximativement entre 0.4 et 4 mmHg mL⁻¹. Partant de la phase de pression basse du cycle, nous construisons une courbe qui commence à 0.4 mmHg mL⁻¹, augmente vers 4 mmHg mL⁻¹ et décroît jusqu'à 0.4 mmHg mL⁻¹ durant le cycle de 0.60 s (fig. I.19b).

La fonction phase-cycle détermine à quel instant d'un cycle se trouve le temps de simulation en calculant le reste de la division entière par 0.6 du temps de simulation. Lorsque le temps de simulation est un multiple de 0.6, le reste est nul, phase-cycle est remis à zéro et la simulation se poursuit en repartant avec la valeur initiale de la courbe d'élastance.

Nous sommes maintenant en présence d'un résultat complètement nouveau : nous pouvons non seulement comparer les mesures et les simulations de la pression et du flux aortiques, mais également celles de la pression du sang dans le ventricule gauche du mouton (fig. I.19c). Malgré le fait que nous n'ayons pas résolu le problème des oscillations du sang dans l'aorte, nous pouvons être assez satisfaits du résultat obtenu.

I.7 POUR ALLER PLUS LOIN

Nos investigations nous ont permis de bien progresser mais ne sont de loin pas terminées. Nous comprenons maintenant un certain nombre de choses sur le fonctionnement du système cardiovasculaire des mammifères, mais nous avons également réalisé ce que nous ne comprenons pas encore.

À côté de la nécessité de créer un meilleur modèle, il y a autre chose que nous devrions faire : utiliser les modèles, varier les valeurs des paramètres et examiner les changements dans les réponses du système lors des simulations. De cette manière, nous pouvons en apprendre encore plus sur les particularités du système étudié. Nous pourrions par exemple poser des questions telles que celle de savoir comment la pression et le flux sanguins vont réagir si nous modifions quelques propriétés du système physiologique — qu'advient-il lorsque nous vieillissons ou si la valve aortique ne fonctionne plus comme elle le devrait, etc. Nous laissons cette partie du travail au lecteur de cette étude de cas.

CHAPITRE 3

RÔLE ET PROPRIÉTÉS DE L'ÉNERGIE

Jusqu'à présent, nous n'avons pas fait usage d'un aspect important des processus physiques. Chaque fois que quelque chose a lieu dans le monde physique, une grandeur supplémentaire apparaît dans les phénomènes, l'énergie. Nous allons découvrir qu'elle joue un rôle particulier, différent des rôles que jouent d'autres grandeurs telles que l'électricité, le mouvement ou la chaleur, avec lesquelles elle est souvent confondue.

Dans un premier temps, nous examinerons des chaînes de processus, ce qui nous apprendra qu'une description qui n'utilise que des quantités de fluide ou d'électricité ne suffit pas : il est nécessaire de disposer d'une grandeur qui quantifie le couplage des processus ; c'est l'énergie. Après cette introduction qualitative, nous définirons des mesures quantitatives de cette nouvelle grandeur en étudiant des chutes d'eau, et des processus hydrauliques et électriques. Enfin, nous examinerons en détail le transfert et le stockage de l'énergie.

3.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Cette première section a pour but de nous faire découvrir le couplage de processus et de nous permettre de trouver le moyen de quantifier avec quelle efficacité un processus entraîne un processus consécutif.

3.1.1 Chauffage électrique d'un volume d'eau

Nous chauffons de l'eau au moyen d'un thermoplongeur. Nous enregistrons le taux initial d'augmentation de la température et répétons l'expérience plusieurs fois en variant les valeurs de la tension et de l'intensité du courant du thermoplongeur (figure 3.1). À chaque fois, nous utilisons la même quantité d'eau ayant la même température initiale. Les données expérimentales sont rassemblées dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 Chauffage d'un volume d'eau.

Tension	Courant	Tension et courant	Évolution de la température	Quotient
U / V	I_Q / A	UI_Q / VA	$dT/dt^a / ^\circ C s^{-1}$	$UI_Q / (dT/dt)$
101.2	0.98	99.2	$2.98 \cdot 10^{-2}$	3328.1
101.2	1.98	200.4	$5.95 \cdot 10^{-2}$	3367.7
148.7	2.01	298.9	$8.93 \cdot 10^{-2}$	3347.0

a. Taux de variation de la température au début du processus.

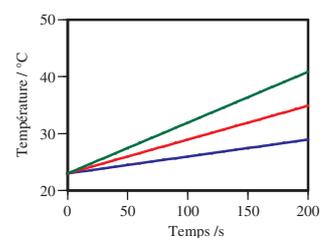


FIGURE 3.1 Évolution de la température d'une même quantité d'eau en fonction des différents modes opératoires du thermoplongeur qui sert à la chauffer.

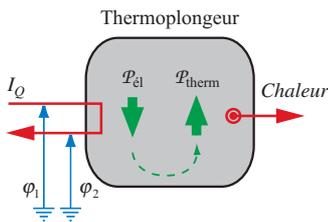


FIGURE 3.2 Diagramme de processus d'un thermoplongeur. La charge électrique Q chute entre deux niveaux du potentiel électrique φ . Ce processus sert à produire de la chaleur (le cercle avec le point central symbolise une source). La flèche désignée par P_{el} représente la puissance du processus électrique consistant en une libération d'énergie servant à entraîner le processus de production de chaleur.

Interprétation. Cette expérience nous confronte avec le couplage de deux processus. Le processus électrique entraîne le processus thermique de chauffage de l'eau. Comme la quantité d'eau et la température initiale sont toujours les mêmes, nous pouvons utiliser le taux de variation de la température de l'eau pour mesurer avec quelle efficacité le processus électrique entraîne le processus thermique. Vu que les grandeurs électriques varient d'une expérience à l'autre, il n'est pas surprenant que le taux de variation de la température le fasse aussi. Mais on constate que ce taux de variation évolue de manière proportionnelle au produit des deux grandeurs électriques, la tension et l'intensité du courant, ce que confirme la valeur quasi constante du quotient des grandeurs électriques et thermiques. En conséquence, on peut admettre que le produit de la tension et de l'intensité mesure l'efficacité du processus électrique. On utilise la notion de *puissance*, désignée par le symbole \mathcal{P} , pour mesurer cette efficacité.

Les deux processus qui se déroulent dans le thermoplongeur sont de nature différente et sont caractérisés par des grandeurs fondamentales qui n'ont rien en commun : un processus électrique, qui consiste en la chute de la charge électrique Q entre deux niveaux du potentiel φ , entraîne un processus thermique de production de chaleur, processus que nous étudierons en détail au chapitre 5. Comme la charge électrique ne peut pas être « transmuée » en chaleur, nous devons admettre qu'une autre grandeur assure le couplage entre les deux processus : il s'agit de l'énergie. Nous découvrirons à la section 3.3 que la puissance \mathcal{P} correspond au taux de libération d'énergie dans le processus primaire et au taux d'utilisation de cette énergie dans le processus secondaire.

Les diagrammes de processus (figure 3.2) se prêtent extrêmement bien pour mettre en évidence le couplage des deux processus au moyen de la puissance de chacun d'eux.

3.1.2 Chute d'eau et centrales électriques.

Les centrales hydroélectriques mettent en évidence un autre type de couplage : la chute de l'eau accumulée dans le bassin de retenue entraîne un processus électrique. La chute de l'eau est due à la gravité, ce qui nous permet de dire que la gravité entraîne le processus électrique qui se déroule dans les centrales électriques. Le tableau 3.2 rassemble les données gravitationnelles et électriques d'un certain nombre de centrales hydroélectriques suisses.

TABLEAU 3.2 Exemples de centrales hydroélectriques.^a

Centrale hydroélectrique	Courant de masse	Différence d'altitude	Courant · différence d'altitude	Tension et courant ^b	Quotient
	$I_m / \text{kg s}^{-1}$	$\Delta h / \text{m}$	$I_m \cdot \Delta h / \text{kg s}^{-1} \text{m}$	$UI_q / \text{V A}$	$UI_q / (I_m \cdot \Delta h)$
Bavona	18 000	890	$16.0 \cdot 10^6$	$137 \cdot 10^6$	8.6
Nendaz	45 000	1014	$45.6 \cdot 10^6$	$384 \cdot 10^6$	8.4
Handeck III	12 500	445	$5.6 \cdot 10^6$	$48 \cdot 10^6$	8.6
Chatelard	16 000	814	$13.0 \cdot 10^6$	$107 \cdot 10^6$	8.2
Tiefencastel	16 700	374	$6.2 \cdot 10^6$	$50 \cdot 10^6$	8.0

a. Centrales hydroélectriques avec bassins d'accumulation en Suisse.

b. Produit de la tension et de l'intensité du courant mesurés sur le générateur.

Interprétation. À nouveau, nous sommes en présence du couplage de deux processus de nature complètement différente qui se déroulent dans la centrale et constatons que le produit de la tension et de l'intensité (grandeurs de sortie de la centrale) est proportionnel au produit de la différence de niveau (hauteur de chute) et du flux mesuré en courant de masse (grandeurs d'entrée). Le quotient des deux produits est pratiquement constant, ce qui nous conforte dans l'hypothèse que le produit de la différence de niveau et du courant de masse mesure l'efficacité, c'est-à-dire la puissance \mathcal{P} du processus gravitationnel. La figure 3.3 illustre le couplage au moyen d'un diagramme de processus; notons qu'un certain nombre de processus intermédiaires se déroulent entre l'entrée de l'eau dans la turbine et la circulation du courant électrique dans le générateur; ils n'ont pas été pris en compte dans cette analyse, mais seront traités au fur et à mesure de la nécessité dans ce chapitre et dans des chapitres ultérieurs.

3.1.3 Turbine, générateur et puissance hydraulique

Une petite turbine est actionnée par un courant d'eau émanant d'un robinet (figure 3.4). On mesure la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la turbine ainsi que l'intensité du flux volumique traversant le système. La turbine entraîne un générateur auquel on a branché une ampoule. On varie la différence de pression et le flux volumique de telle manière que l'intensité lumineuse soit toujours la même, ce qui consiste à veiller à ce que la tension aux bornes de la lampe ne varie pas. On constate que le produit de la différence de pression et de l'intensité du courant volumique est pratiquement inchangé à chaque nouvelle expérience (tab. 3.3).

TABLEAU 3.3 Couplage turbine-générateur.

Différence de pression $\Delta P / \text{Pa}$	Courant volumique $I_V / \text{m}^3 \text{ s}^{-1}$	$\Delta P I_V / \text{Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$
$0.66 \cdot 10^5$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	16.5
$0.72 \cdot 10^5$	$0.22 \cdot 10^{-3}$	15.8
$0.82 \cdot 10^5$	$0.18 \cdot 10^{-3}$	14.8
$0.92 \cdot 10^5$	$0.18 \cdot 10^{-3}$	16.6

Données recueillies par Michele d'Anna.

Interprétation. Dans cette expérience, le système couple un processus hydraulique à un processus électrique (figure 3.5). Si nous considérons la luminosité comme mesure de la puissance du processus final dans la chaîne allant de l'eau à la lumière, nous constatons que la puissance est la même chaque fois que le produit de la différence de pression et du flux volumique est le même. Cela suggère que le produit de ces deux grandeurs fondamentales de l'hydraulique peut être utilisée pour quantifier la puissance des processus hydrauliques. C'est le troisième exemple de processus dont la puissance est mesurée par le produit d'une différence de niveau de la grandeur intensive caractéristique et de l'intensité du flux de la grandeur extensive associée.

3.2 ÉNERGIE ET COUPLAGE DANS LES CHAÎNES DE PROCESSUS

Les exemples de la section 3.1 nous ont permis d'illustrer le couplage de processus physiques de nature différente à l'intérieur d'un système. Un processus en entraîne un

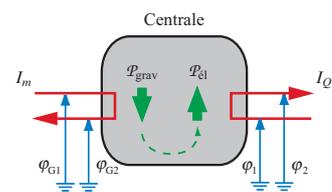


FIGURE 3.3 Diagramme de processus d'une centrale hydroélectrique idéale. Le couplage entre les deux processus est visualisé au moyen des puissances des processus gravitationnel et électrique. La grandeur φ_G symbolise le potentiel gravitationnel. Notons que cette figure ignore toute une série de processus intermédiaires.



FIGURE 3.4 Couplage turbine-générateur.

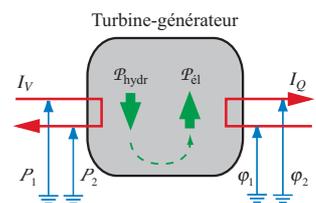


FIGURE 3.5 Diagramme de processus du système turbine-générateur. L'énergie libérée par le processus hydraulique, représentée par la puissance $\mathcal{P}_{\text{hydr}}$, entraîne le processus électrique final.

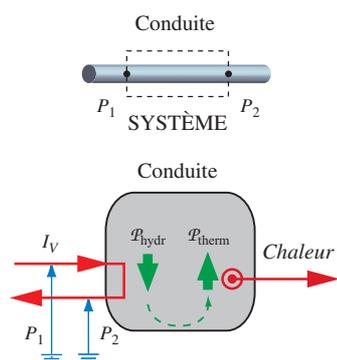


FIGURE 3.6 Dans un écoulement visqueux, le fluide s'écoule de la pression élevée vers la pression basse, entraînant une production de chaleur.

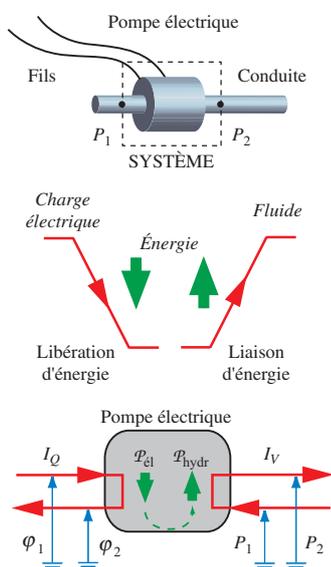


FIGURE 3.7 Une pompe électrique couple les processus électrique et hydraulique. Le processus moteur libère de l'énergie qui est liée dans le processus consécutif. La quantité d'énergie libérée ou liée est la mesure du «travail» ou de l'«accomplissement» réalisé par le processus. La libération et la liaison d'énergie sont représentées par des flèches verticales.

FIGURE 3.8 Des processus peuvent être liés pour former des chaînes. En général, des processus d'écoulement assurent le couplage entre les dispositifs et les systèmes.

autre, et ainsi de suite, ce qui peut donner naissance à des chaînes extrêmement longues. Cette observation nous a amenés à admettre l'existence d'une grandeur physique qui lie un processus au suivant, les processus spontanés aux processus contraints. Cette grandeur est l'énergie.

3.2.1 Libération et liaison d'énergie

À côté de ceux que nous avons découverts à la section 3.1, nous pouvons étendre la liste de processus couplés à d'autres domaines de la physique (tab. 3.4) : ainsi, un processus rotatoire entraîne une production de chaleur lorsque le foret d'une perceuse fait un trou dans une pièce métallique ; lors de l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite, le processus hydraulique entraîne une production de chaleur (figure 3.6).

TABLEAU 3.4 Exemples de couplage de processus.

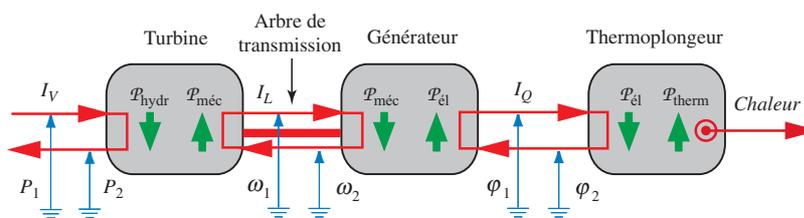
	Hydraulique	Électricité	Rotation	Chaleur
Hydraulique	Bélier hydraulique	Turbine plus générateur	Turbine	Écoulement visqueux
Électricité	Pompe électrique	Transformateur	Moteur électrique	Thermo-plongeur
Rotation	Pompe à main	Générateur	Engrenage	Frottement
Chaleur	Pompe à chaleur solaire	Générateur thermoélectrique	Machine thermique	Réfrigérateur à absorption

Précisons maintenant ce que nous avons abordé dans la section précédente. Lors du couplage de deux processus, le processus moteur libère de l'énergie lors de la chute de la grandeur extensive (figure 3.7), énergie qui est utilisée pour entraîner le processus consécutif, c'est-à-dire pour le pompage vers le haut d'une autre grandeur extensive. Dans ce cas, nous affirmons qu'il y a liaison d'énergie à la grandeur qui s'écoule «en remontant la pente». C'est pourquoi nous pouvons utiliser la quantité d'énergie libérée pour mesurer le travail effectué par un processus et la quantité d'énergie liée pour mesurer ce qui a été accompli. Cette libération et cette liaison d'énergie sont liées à la puissance \mathcal{P} que nous avons introduite pour quantifier l'efficacité des processus.

Chaque fois qu'un processus est entraîné, c'est-à-dire chaque fois qu'une grandeur extensive s'écoule «en remontant la pente», de l'énergie est liée. Cette énergie a dû être libérée par le processus moteur. L'énergie est la grandeur qui couple deux processus de nature différente.

3.2.2 Enchaînements de processus: le transfert d'énergie

Considérons un enchaînement de processus tel que celui de la figure 3.8.



Les processus couplés sont comme des maillons d'une chaîne qui peut être très longue. La turbine, entraînée par un écoulement d'eau, entraîne elle-même un générateur qui, à son tour, peut être utilisé pour générer la production de chaleur dans un thermoplongeur (figure 3.8). L'énergie n'est pas que la mesure du couplage de deux processus à l'intérieur d'un système tel que la turbine, le générateur ou le thermoplongeur par l'intermédiaire de libération et de liaison d'énergie. Le couplage doit également être assuré tout au long des enchaînements. Deux dispositifs différents sont couplés par l'écoulement, d'un dispositif à l'autre, de grandeurs extensives telles que le volume d'eau V , le moment cinétique L (sera traité au chapitre 7) ou la charge électrique Q (figure 3.8). Considérons le couplage du générateur et du thermoplongeur dans la figure 3.8. Dans le générateur, de l'énergie a été liée au courant électrique qui circule d'un potentiel bas vers un potentiel plus élevé. Dans le thermoplongeur, l'énergie est libérée lors de la chute de la charge électrique du potentiel élevé vers le potentiel bas. Pour l'instant, nous admettons que la quantité d'énergie libérée dans le thermoplongeur est la même que celle qui a été liée au courant électrique dans le générateur. Le second processus inverse parfaitement le premier; le courant électrique et la différence de potentiel sont les mêmes. C'est pourquoi nous admettons que l'énergie liée lors du premier processus est transférée du générateur vers le système que le suit (figure 3.9). En fait, chaque fois que des dispositifs sont couplés dans des processus, de l'énergie est transférée de l'un à l'autre.

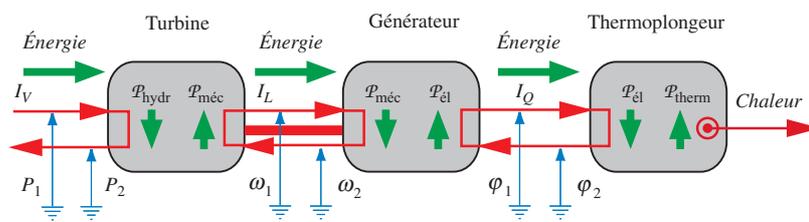


FIGURE 3.9 L'énergie est transférée d'un système à l'autre en compagnie des grandeurs échangées dans les processus – telles que les fluides et la charge électrique. Le transfert est représenté par des flèches grasses pointant d'un système vers le suivant.

Dans des chaînes de processus, des systèmes (dispositifs) sont couplés par l'écoulement de certaines grandeurs extensives telles que des fluides ou la charge électrique. Le transfert de ces grandeurs d'un système à l'autre est accompagné d'un écoulement d'énergie.

3.2.3 Interruption et reprise de processus: le stockage de l'énergie

Les enchaînements de processus ne doivent pas nécessairement se dérouler de manière continue. Il est possible de les interrompre, puis de les reprendre plus tard ou à un autre endroit. Il doit donc être possible de stocker l'énergie transférée à travers la chaîne pour qu'elle puisse être utilisée pour d'autres processus.

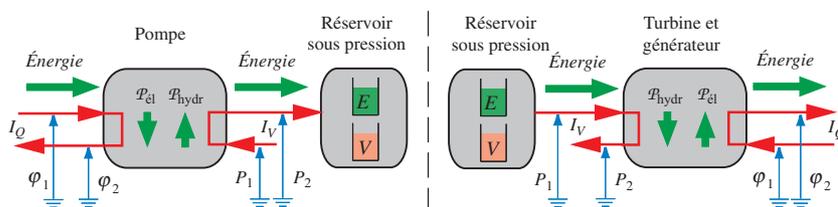


FIGURE 3.10 Des enchaînements de processus peuvent être interrompus et repris plus tard. Cela peut être expliqué au moyen du stockage d'énergie. Les réservoirs symboliques affectés des lettres V et E représentent respectivement le stockage du volume et de l'énergie.

Considérons un réservoir sous pression que l'on remplit d'un fluide au moyen d'une pompe (figure 3.10). Nous devons fournir de l'énergie à la pompe pour qu'elle puisse fonctionner. Là, elle est libérée par la chute de la charge électrique entre les deux

niveaux du potentiel, puis liée au flux volumique et transférée avec le fluide au réservoir sous pression. Le réservoir n'est donc pas seulement un dispositif de stockage pour les fluides, il stocke également de l'énergie. Nous pouvons utiliser un réservoir sous pression rempli d'un fluide – et donc d'énergie – pour entraîner un système turbine/générateur, récupérant ainsi l'énergie qui avait été absorbée auparavant par le réservoir.

L'énergie peut être stockée dans des systèmes. Les dispositifs de stockage d'énergie peuvent être utilisés pour entraîner des chaînes de processus séparées de la première chaîne (qui avait été utilisée pour «remplir» le dispositif de stockage) dans le temps et dans l'espace.

3.2.4 Conservation de l'énergie: l'énergie peut-elle disparaître ou être créée?

Supposons que nous fassions fonctionner différentes pompes électriques de manière identique. À première vue, on pourrait s'attendre à ce qu'elles donnent toutes le même résultat, mesuré en termes de quantité d'eau pompée à une hauteur donnée. En fait, on trouve des résultats différents: certaines pompes travailleront moins bien que d'autres.

La majorité des processus dans la nature semblent ne pas se dérouler avec une efficacité optimale, l'efficacité étant mesurée en termes de quantité d'énergie liée dans le processus désiré (contraint) comparée à celle qui a été libérée dans le processus moteur (spontané). Une efficacité parfaite serait atteinte si l'énergie liée correspondait à 100% de l'énergie libérée. C'est ce que nous avons supposé dans les figures 3.7 à 3.10.

Cela signifie-t-il que les pompes de qualité moindre perdent de l'énergie, comparées aux meilleures? Ce n'est pas le cas. On découvre que le moteur entraîne simultanément deux processus – celui qui est souhaité et une production de chaleur non souhaitée – où chacun lie une partie de l'énergie libérée. À eux deux, ils utilisent 100% de l'énergie disponible. Cela est vrai pour tous les processus. La «perte» apparente d'énergie est toujours associée à la production non souhaitée de chaleur qui accompagne toujours le processus pour lequel la machine a été conçue (figure 3.11).

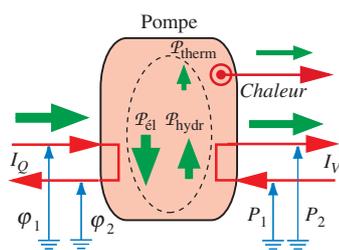


FIGURE 3.11 L'énergie n'est pas «perdue» lors d'un processus qui ne se déroule pas parfaitement. La quantité d'énergie qui semble faire défaut a entraîné un processus non souhaité: la production de chaleur.

Il existe une autre cause de perte d'énergie. Usuellement, les dispositifs de stockage d'énergie perdent progressivement une partie de leur énergie au cours du temps. À nouveau, nous pouvons interpréter cette observation non pas comme une perte réelle, mais comme la conséquence d'une «fuite» de l'énergie. L'énergie qui n'est plus disponible peut toujours être détectée dans la nature, tout au moins en principe.

En résumé, il n'y a aucune raison d'admettre que l'énergie puisse disparaître, ni qu'elle puisse être créée. Si nous souhaitons mettre en route un enchaînement de processus, nous avons toujours besoin d'un dispositif de stockage de l'énergie qui devra fournir l'énergie qui circulera à travers la chaîne. On croit qu'il s'agit là d'une des propriétés fondamentales de la nature: l'énergie ne peut être ni créée, ni détruite; *l'énergie est une grandeur conservée.*

3.2.5 Propriétés de l'énergie

Énergie est un terme qui apparaît très souvent dans ce que l'on peut lire en science et en technologie. Souvent, l'utilisation de ce terme est floue, ce qui donne une image imprécise de ce qu'est vraiment l'énergie. On entend souvent parler de production et de perte d'énergie, alors que l'énergie est conservée. On parle de conversion d'énergie, et on lui donne une foule de noms différents, alors qu'il n'y a qu'une sorte d'énergie: on parle d'énergie électrique, hydraulique, mécanique, d'énergie cinétique ou potentielle,

de travail et de chaleur, et ainsi de suite. Ce qui est encore plus grave, c'est que l'on confonde l'énergie avec les grandeurs fondamentales qui s'écoulent lors des processus physiques, par exemple l'électricité, la chaleur et le mouvement.

En fait, nous avons peu de choses à savoir au sujet de l'énergie, et ce que nous allons formuler se répète dans chacun des domaines de la physique. En nous basant sur ce que nous avons découvert jusqu'à présent, nous pouvons affirmer :

Il existe une grandeur unique, appelée énergie, qui accompagne tous les processus. Cette grandeur a les propriétés suivantes :

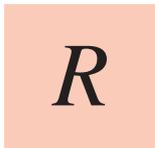
- L'énergie peut s'écouler d'un système à l'autre.
- L'énergie peut être stockée dans les systèmes.
- L'énergie peut être libérée et liée à l'intérieur des systèmes.
- L'énergie ne peut être ni créée, ni détruite, elle est conservée.

Les deux premières propriétés font de l'énergie une grandeur extensive, ce qui veut dire que l'on peut énoncer un *bilan de l'énergie* (section 3.5). Nous allons maintenant étudier plus attentivement les propriétés de l'énergie, entre autres dans des buts quantitatifs.

1. Considérez une pompe électrique. Quelle est la signification du processus moteur? Quel est le processus entraîné? Quel est le rôle de l'énergie ?
2. Quelles sont les propriétés essentielles de l'énergie et comment peut-on les représenter graphiquement dans des diagrammes de processus et des diagrammes de dynamique des systèmes?
3. On entend souvent parler de «conversion de l'énergie». Quelles sont les propriétés de l'énergie qui peuvent être considérées comme responsables de cette expression?
4. Quelle est la signification d'expressions telles que «de l'énergie a été perdue» et «de l'énergie a été détruite» au cours d'un processus?



1. Le processus moteur (le processus électrique) est un processus spontané au cours duquel la grandeur extensive (la charge électrique) franchit une différence de potentiel «en descendant la pente». Dans ce cas, il y a libération d'énergie. Le processus entraîné (le processus hydraulique) est un processus au cours duquel la grandeur extensive (le volume de fluide) franchit une différence de potentiel «en remontant la pente». Tout ou partie de l'énergie libérée dans le processus primaire est nécessaire pour entraîner le processus secondaire. Cette partie de l'énergie émerge du système en compagnie de la grandeur extensive associée à ce processus.
2. L'énergie peut être stockée, transférée, libérée, et elle est conservée. Le stockage peut être représenté au moyen d'un «réservoir d'énergie» dans un diagramme de processus. Le transfert est représenté par une flèche entre les systèmes, alors que la libération et la liaison d'énergie sont représentées par des flèches verticales à l'intérieur d'un diagramme de processus. La conservation, tout comme le stockage et le transfert, sont représentés par un bilan dans un diagramme de dynamique des systèmes.
3. Prenez l'exemple d'une pompe qui «convertit de l'énergie électrique en énergie hydraulique». Nous pouvons accepter cette affirmation en tant que métaphore pour le couplage des



processus électrique et hydraulique dans la pompe: l'énergie est libérée dans la pompe par la chute de la charge électrique et elle est transbordée pour être liée à l'écoulement du fluide. Elle change de «porteur», pas de type (section 3.4).

4. Ces expressions signifient qu'une partie de l'énergie libérée dans un processus entraîne un processus probablement non souhaité, ce qui conduit à une réduction de la quantité d'énergie disponible pour le processus désiré. Usuellement, le processus non souhaité est une production de chaleur.

3.3 PUISSANCE DES PROCESSUS

La nature nous présente un processus extrêmement simple qui peut servir de modèle parfait des processus physiques: la chute d'eau. À la surface du globe, la gravité est responsable de l'écoulement de l'eau. Nous introduisons l'énergie en tant que mesure du travail effectué par la gravité dans une chute d'eau (figure 3.12).

Les observations de la section 3.1 nous ont révélé que le produit de la grandeur extensive qui s'écoule lors d'un processus et de la différence des niveaux entre lesquels elle s'écoule peut servir à mesurer l'efficacité du processus. Cette grandeur est la *puissance \mathcal{P} du processus*. Nous allons maintenant l'introduire de manière précise et en énoncer les particularités.

3.3.1 Gravité et puissance d'une chute d'eau

Comme la gravité est responsable de la chute de l'eau, nous devons quantifier le processus gravitationnel afin d'avoir tous les éléments nécessaires pour exprimer l'énergie libérée par une chute d'eau.

Masse gravitationnelle et champ gravitationnel. Tout comme des quantités de fluide et de charge électrique sont à l'origine des phénomènes hydrauliques et électriques, la *masse gravitationnelle* est la source de la gravité. La masse gravitationnelle, mesurée en kilogrammes (kg), est responsable de la pesanteur des corps, raison pour laquelle on l'appelle également *masse pesante*. Le poids F_G d'un corps, mesuré en newton (N), est proportionnel à sa masse gravitationnelle m_G :

$$F_G = gm_G \quad (3.1)$$

Le facteur de proportionnalité g mesure l'intensité du champ gravitationnel à la surface du globe, du champ de pesanteur. À la surface de la Lune, le poids d'un objet est réduit au sixième de la valeur sur la Terre. La valeur utilisée habituellement pour g est 9.81 N kg^{-1} .

Puissance d'une chute d'eau. Nous mesurons la quantité d'eau qui s'écoule au moyen du *courant de masse (gravitationnelle) I_m* , mesuré en kilogrammes par seconde. La seconde grandeur nécessaire est la hauteur de chute Δh , mesurée en mètres. Ce sont les grandeurs que nous avons utilisées pour quantifier provisoirement la puissance du processus gravitationnel dans les centrales hydroélectriques du tableau 3.2.

La valeur du facteur de proportionnalité est suggérée par le fait qu'il s'agit d'un processus gravitationnel. Il est raisonnable de supposer que la chute d'une même quantité d'eau d'une même hauteur ait un effet moindre sur la Lune que sur la Terre, ce qui est exprimé au moyen de l'intensité du champ gravitationnel. Nous pouvons donc calculer



FIGURE 3.12 Une chute d'eau libère de l'énergie.

le *taux de libération d'énergie*, ou en d'autres termes, la *puissance gravitationnelle d'une chute d'eau*:

$$|\mathcal{P}_{\text{grav}}| = |g\Delta h I_m| = \left| \frac{dE}{dt} \right| \quad (3.2)$$

Cette nouvelle grandeur se mesure en watt (W) dans le système international.

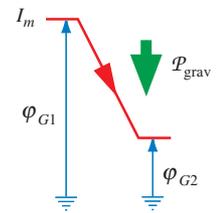
Potentiel. Il existe une interprétation graphique simple de l'expression pour la puissance d'une chute d'eau (figure 3.13). Nous combinons les deux premiers facteurs du deuxième membre de l'équation (3.2) en une nouvelle grandeur que nous appelons le *niveau* ou *potentiel du processus gravitationnel*:

$$\varphi_G = gh \quad (3.3)$$

Nous pouvons alors écrire la puissance du processus comme le produit de la différence du potentiel gravitationnel et du courant de masse franchissant cette différence de niveaux:

$$\mathcal{P}_{\text{grav}} = -\Delta\varphi_G I_m \quad (3.4)$$

Le signe moins est arbitraire. Il a été choisi pour être conforme à l'usage en électricité qui attribue un signe positif à la tension dans le sens du courant conventionnel. La puissance d'un processus spontané est donc positive, alors que celle d'un processus contraint est négative.



$$\mathcal{P}_{\text{grav}} = -(\varphi_{G2} - \varphi_{G1}) I_m$$

FIGURE 3.13 La puissance d'une chute d'eau peut être représentée graphiquement. Si une grandeur telle que la masse franchit une différence de potentiel «de haut en bas», de l'énergie est libérée. La *puissance* est la grandeur qui mesure le taux de libération d'énergie.

3.3.2 Dissipation et efficacité des processus

Nous voyons que la détermination expérimentale du facteur de proportionnalité entre le processus gravitationnel et le processus électrique dans le tableau 3.2 donne des valeurs qui sont légèrement plus faibles que *g*. Cela est dû au fait que les processus entre le bassin d'accumulation et le générateur ne se déroulent pas de manière idéale: une partie de l'énergie libérée par la chute de l'eau est utilisée pour la production de chaleur qui résulte des frottements. Cette production de chaleur qui accompagne le déroulement des processus est appelée *dissipation*, et les processus sont dits *dissipatifs*. Nous désignerons dorénavant par $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ la puissance nécessaire à cette production de chaleur non souhaitée. Le lien entre cette puissance et la production de chaleur sera traité à la section 5.4.

La dissipation est toujours présente dans la réalité, car des processus parallèles tels que le frottement lient une partie de l'énergie libérée (figure 3.14). Pour mesurer l'efficacité du transfert de l'énergie vers le processus désiré, on introduit une nouvelle grandeur, l'*efficacité* ou *rendement* η , que l'on calcule en tant que rapport des puissances impliquées:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{processus désiré}}}{\mathcal{P}_{\text{processus moteur}}} \quad (3.5)$$

Comme ce sera confirmé à la section 3.3.3, la puissance d'un processus électrique est égale au produit de la tension et de l'intensité du courant. En appliquant cette règle aux valeurs du tableau 3.2, nous voyons que l'efficacité globale des centrales hydroélectriques modernes est remarquablement élevée, de l'ordre de 80% à 90%.

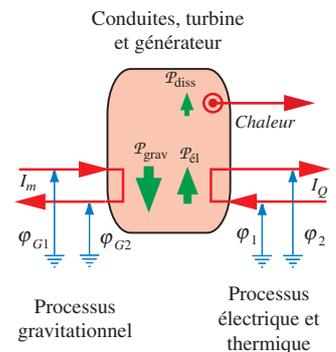


FIGURE 3.14 Lors d'un couplage de processus qui ne se déroule pas de manière idéale, il n'y a qu'une partie de l'énergie libérée qui est utilisée pour le processus souhaité.

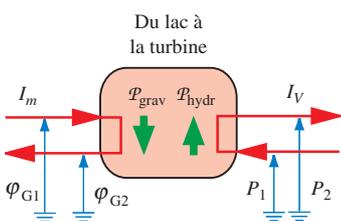


FIGURE 3.15 Processus hydraulique entraîné par un processus gravitationnel. Alors que c'est la même eau qui possède simultanément les propriétés masse et volume, ces grandeurs physiques apparaissent en tant qu'entités séparées dans le diagramme de processus.

Q

1. Quelle est la signification du mot *puissance*? De quels facteurs la puissance d'un processus gravitationnel dépend-elle?
2. Quelle est la signification de la grandeur apparaissant dans la dernière colonne du tableau 3.2? Pourquoi les valeurs sont-elles différentes?
3. Le diagramme de processus apparaissant dans la figure 3.14 combine tous les éléments d'une centrale hydroélectrique du lac artificiel au générateur. Si vous décomposez ce système en ses parties, quel est le processus qui se déroule en premier.

R

1. La *puissance* sert à mesurer le taux auquel l'énergie est libérée (ou liée) à la suite de l'écoulement d'une grandeur extensive (telle que la masse gravitationnelle) d'un niveau élevé vers un niveau bas (ou d'un niveau bas vers un niveau élevé) du potentiel. La puissance gravitationnelle est égale au produit de l'intensité du courant de la grandeur extensive (masse gravitationnelle) et de la différence du potentiel gravitationnel.
2. Le produit de la tension et de l'intensité du courant mesure le taux de travail effectué par le processus électrique (section 3.3.3). C'est pourquoi, dans le cas idéal, le rapport de cette grandeur et du produit du courant de masse et de la hauteur de chute devrait être égal à l'intensité du champ gravitationnel g . Cependant, comme les centrales hydroélectriques ne fonctionnent pas de manière idéale, nous obtenons des valeurs qui sont inférieures à 9.81 N/kg . Comme les efficacités des installations sont différentes, nous obtenons des valeurs différentes pour le facteur de la dernière colonne du tableau 3.2.
3. Le premier processus entraîné par la chute de masse est le processus hydraulique consistant à «pomper» du volume à travers une différence de pression (figure 3.15).

EXEMPLE 3.1. Deux lacs artificiels en série.

Une installation hydroélectrique consiste en deux lacs artificiels, le premier situé 200 m plus haut que le second. Il y a une première usine électrique au niveau du second lac, et une seconde 300 m plus bas. L'eau du premier lac alimente le second. Le lac supérieur reçoit $5 \cdot 10^8 \text{ m}^3$ d'eau par les rivières qui l'alimentent. Le lac inférieur reçoit $2 \cdot 10^8 \text{ m}^3$ par des rivières. (a) À un certain moment, le courant d'eau du premier lac vers le second est de $20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, et le courant du second lac vers l'usine inférieure mesure $25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Que vaut la puissance gravitationnelle totale résultant de la chute de l'eau? (b) Combien d'énergie est libérée en une année par le processus gravitationnel, si on utilise toute l'eau amenée dans les lacs?

SOLUTION: (a) La puissance gravitationnelle combinée est la somme des puissances du premier et du second processus:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{grav} &= \mathcal{P}_{grav,1} + \mathcal{P}_{grav,2} = \Delta(g h)_1 I_{m1} + \Delta(g h)_2 I_{m2} = \Delta(g h)_1 \rho I_{V1} + \Delta(g h)_2 \rho I_{V2} \\ &= 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 200 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 20 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \\ &\quad + 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 300 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 113 \text{ MW} \end{aligned}$$

(b) Vu que la puissance est le taux de libération d'énergie, la quantité d'énergie libérée durant une certaine période E_{grav} est égale au produit de la puissance moyenne et de la durée:

$$E_{grav} = \bar{\mathcal{P}}_{grav} \Delta t = \Delta(g h) \bar{I}_m \Delta t = \Delta(g h) m^*$$

où m^* est la masse totale d'eau s'écoulant à travers la différence de potentiel durant l'intervalle Δt . Il y a $5 \cdot 10^{11}$ kg d'eau s'écoulant du premier vers le second lac et $5 \cdot 10^{11}$ kg plus $2 \cdot 10^{11}$ kg s'écoulant hors du second lac. Nous avons donc $E_{\text{grav}} = 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 200 \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{11} \text{ kg} + 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 300 \text{ m} \cdot 7 \cdot 10^{11} \text{ kg} = 3.0 \cdot 10^{15} \text{ Ws}$. (1 W·s = 1 J.)

3.3.3 Puissance des processus électriques

Les observations de la section 3.1.1 confirment que la puissance des processus électriques doit bel et bien être écrite dans la forme de l'équation (3.4). Le produit UI_Q est la mesure du taux de «travail effectué» par le processus électrique :

$$\mathcal{P}_{\text{el}} = -\Delta\varphi_{\text{el}} I_Q \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_{\text{el}} = UI_Q \quad (3.6)$$

3.3.4 Puissance des processus hydrauliques

En nous basant sur les observations de la section 3.1.3 relative au couplage turbine-générateur, nous pouvons admettre que le même type de relation est valable pour les processus hydrauliques :

$$\mathcal{P}_{\text{hydr}} = -\Delta P I_V \quad (3.7)$$

3.3.5 Processus et puissance en général

TABLEAU 3.5 Comparaison de différents processus.

	Grandeur	Courant	Potentiel	Différence de potentiel	Puissance
Gravité	Masse gravitationnelle	Courant de masse	Potentiel gravitationnel	$\Delta\varphi_G$	$-\Delta\varphi_G I_m$
Hydraulique	Volume de fluide	Courant de volume	Pression	ΔP	$-\Delta P I_V$
Électricité	Charge électrique	Courant électrique	Potentiel électrique	$\Delta\varphi_{\text{el}} = -U$	$-\Delta\varphi_{\text{el}} I_Q$ $= UI_Q$

En résumé, tous les types de processus étudiés affichent la même structure de base (tab. 3.5); grâce à cette analogie de structure, la connaissance d'un domaine nous aide à comprendre d'autres sujets.

Si une grandeur s'écoule «en descendant la pente», elle libère de l'énergie à un certain taux. Ce taux est la *puissance du processus*. L'énergie libérée sert à entraîner «vers le haut» le processus consécutif, au cours duquel l'énergie est liée à la grandeur qui s'écoule (figure 3.16). La loi qui régit l'énergie libérée ou liée est la suivante :

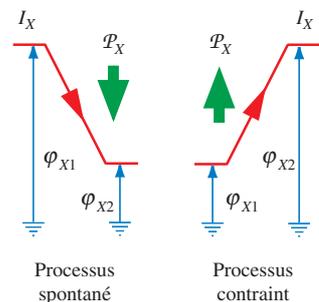


FIGURE 3.16 Processus et puissance des processus. La même structure fondamentale est découverte dans tous les processus physiques.

Lors d'un processus affectant une grandeur extensive X , la puissance du processus, qui correspond au taux de libération ou de liaison de l'énergie, dépend toujours de deux facteurs, la différence de potentiel $\Delta\varphi_X$ et l'intensité du courant I_X franchissant cette différence de potentiel :

$$\mathcal{P}_X = -\Delta\varphi_X I_X \quad (3.8)$$

La lettre X représente la grandeur extensive qui s'écoule et détermine la nature du processus : masse, volume et charge électrique respectivement pour les processus gravitationnels, hydrauliques et électriques (tab. 3.5). Pour un processus particulier, nous devons utiliser la grandeur extensive adéquate et son potentiel associé. Ainsi, pour un processus hydraulique, X correspond à V , et $\Delta\varphi_X$ correspond à Δp .

Énergie libérée (ou liée) dans un processus. Jusqu'à maintenant, nous avons présenté les processus dans leur forme instantanée, dynamique. Nous parlons de courants et de «taux de travail» ou de taux de libération d'énergie. Ces grandeurs mesurent à quelle vitesse se déroule le processus, c'est-à-dire à quelle vitesse l'énergie est libérée ou liée.

Mais, parfois, nous aimerions être en mesure d'indiquer combien d'énergie a été libérée ou liée au cours d'un processus qui s'est déroulé sur une certaine période. La quantité d'énergie libérée par un processus – appelée quelquefois *travail*¹ – peut être obtenue graphiquement en déterminant, dans un graphique puissance-temps, l'aire comprise entre la courbe de la puissance et l'axe t (figure 3.17). Cette grandeur est calculée par intégration du produit de la différence de potentiel $\Delta\varphi_X$ et du flux I_X de la grandeur X :

$$E_X = \int \mathcal{P}_X(t) dt = - \int \Delta\varphi_X(t) I_X(t) dt \quad (3.9)$$

Si la différence de potentiel reste constante pendant toute la durée du processus, alors l'énergie libérée ou liée peut se calculer de manière simple en tant que produit de cette différence de potentiel et de la quantité X_{tr} qui s'est écoulée à travers cette différence de potentiel :

$$E_X = -\Delta\varphi_X X_{tr} \quad \text{si } \Delta\varphi_X = \text{const} \quad (3.10)$$

L'unité de mesure de l'énergie est le joule (J); en tant que produit des grandeurs puissance et temps, l'énergie peut également se mesurer en wattseconde (1 J = 1 W·s).

3.3.6 Bilan de puissance dans des circuits électriques et hydrauliques

Une première indication relative au bilan d'énergie peut être obtenue en considérant l'énergie libérée ou liée dans des circuits hydrauliques et électriques fermés : la somme de tous les termes de puissance hydraulique et électrique doit être nulle.

1. Les notions de *puissance* et de *travail* sont parfois utilisées de manière inconsistante dans différents domaines de la physique. En mécanique, par exemple, le travail représente la quantité d'énergie *transférée*, et non pas libérée.

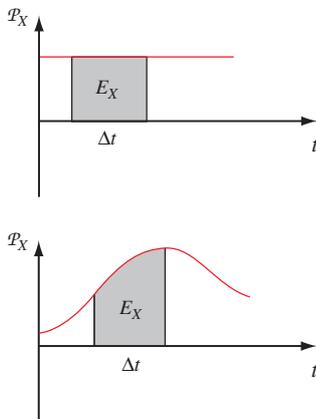


FIGURE 3.17 L'énergie libérée lors d'un processus est calculée à partir de la puissance en fonction du temps.

C'est une conséquence de la seconde loi de KIRCHHOFF (loi des mailles) que nous avons rencontrée en hydraulique (chap. 1) et en électricité (chap. 2). Considérons un circuit électrique simple contenant une source, une résistance et un moteur électrique (figure 3.18). Le courant de charge circulant à travers les trois éléments est le même, et les tensions sur ceux-ci doit avoir une somme nulle :

$$U_S + U_R + U_M = 0 \tag{3.11}$$

Le courant circule à travers chacun des éléments, avec pour conséquence la libération ou la liaison d'énergie. Si nous multiplions l'équation (3.11) par l'intensité du courant I_Q , nous obtenons $U_S I_Q + U_R I_Q + U_M I_Q = 0$. Vu que les termes représentent la puissance électrique dans les éléments, cela est équivalent à

$$\mathcal{P}_{el,S} + \mathcal{P}_{el,R} + \mathcal{P}_{el,M} = 0 \tag{3.12}$$

Cela signifie que l'énergie liée par le processus électrique dans la batterie est égale à l'énergie libérée dans la résistance et le moteur combinés en conséquence de la chute de la charge électrique. Autrement dit, l'énergie délivrée par la source est utilisée par la résistance et le moteur.

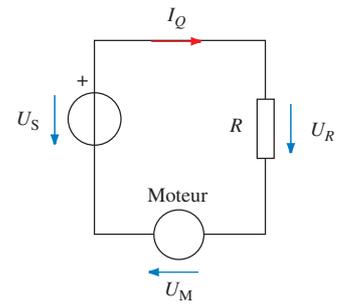
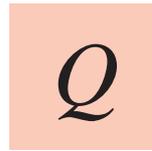
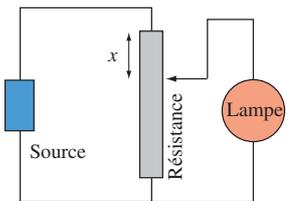


FIGURE 3.18 Dans un circuit fermé, la somme des différences de potentiel est toujours nulle. C'est pourquoi la somme des termes représentant la puissance électriques de tous les éléments doit également être nulle.

1. Quelle sorte de montage expérimental pourrait-on utiliser pour démontrer la validité de l'équation (3.7) ?
2. Comment pouvez-vous déterminer la quantité d'énergie libérée par une source idéale au cours du temps ? Quelles grandeurs devez-vous mesurer ? Quel est le processus qui libère de l'énergie ?



1. Un système qui couple des processus hydrauliques et électriques, tel que l'ensemble turbine-générateur. Il faut veiller à ce que les processus se déroulent de telle manière que le produit du courant électrique et de la tension soit constant. S'il en va de même du produit du flux volumique et de la différence de pression, l'équation (3.7) est confirmée par l'expérience.
2. Il faut mesurer la tension et l'intensité du courant. Leur produit, la puissance électrique, doit être intégré (figure 3.17) pour obtenir l'énergie libérée. Cette énergie est libérée par des réactions chimiques.



EXEMPLE 3.2. Puissance d'une lampe à incandescence.

Considérons une lampe de 100 W fonctionnant à une tension de 220 V. On la monte en parallèle à une résistance variable dans un circuit alimenté par une source de 220 V (figure 3.19). Le curseur divise la résistance de 1000 Ω dans le rapport des longueurs x et $l - x$. Si $x = 1/4$ et si la résistance de la lampe reste constante, indépendamment de la valeur x , que vaut la puissance de la lampe ?

SOLUTION: Nous déterminons d'abord la résistance de la lampe à partir de sa puissance nominale. Pour une résistance, la relation entre puissance, tension et résistance est

$$\mathcal{P}_{el} = UI_Q \quad , \quad U = R_L I_Q \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{el} = \frac{1}{R_L} U^2$$

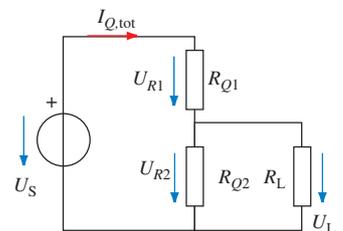


FIGURE 3.19 Batterie, résistance et lampe dans un circuit électrique.

Nous avons donc $R = (220 \text{ V})^2 / 100 \text{ W} = 484 \Omega$. Pour déterminer la tension sur la lampe dans le circuit de la seconde figure, nous notons que $R_{Q1} = 250 \Omega$ et $R_{Q2} = 750 \Omega$. À partir de la résistance du montage des trois résistances, nous calculons l'intensité du courant à travers la source :

$$R_{Q,\text{tot}} = R_{Q1} + \left(\frac{1}{R_{Q2}} + \frac{1}{R_L} \right)^{-1} = 544 \Omega, \quad I_{Q,\text{tot}} = U / R_{Q,\text{tot}} = 0.40 \text{ A}$$

Nous en concluons que $U_{R1} = R_{Q1} I_{\text{tot}} = 101 \text{ V}$, et $U_L = 220 \text{ V} - 101 \text{ V} = 119 \text{ V}$. Finalement, nous avons

$$\mathcal{P}_{\text{el}} = \frac{1}{R_L} U_L^2 = 29.3 \text{ W}$$

Notons que de travailler avec les grandeurs liées à l'énergie ne nous dispense pas de connaître les bases des processus qui se déroulent. Il est nécessaire de calculer les intensités des courants et les différences de potentiel avant de pouvoir déterminer les valeurs des grandeurs liées à l'énergie. ■

EXEMPLE 3.3. Puissance dissipée dans un système hydraulique.

Le taux de variation d'un écoulement d'huile à travers une conduite droite évolue linéairement et passe de $0.001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ à $0.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ en 5 s. La conduite a une longueur de 10.0 m et un diamètre de 7.0 cm. L'huile a une masse volumique de 910 kg/m^3 , une viscosité de 0.081 Pa s , et l'écoulement a lieu en régime laminaire. (a) Donnez l'équation de l'évolution du flux volumique en fonction du temps et représentez-la graphiquement, sachant qu'il vaut $0.001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à l'instant $t = 0 \text{ s}$. (b) Comment la valeur de la différence de pression due aux frottements dans la conduite évolue-t-elle en fonction du temps; que vaut-elle à l'instant $t = 2 \text{ s}$? (c) Faites les mêmes calculs pour la puissance hydraulique due la résistance.

SOLUTION: (a) L'évolution linéaire du taux de variation du flux est donnée par :

$$\dot{i}_v(t) = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} - 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-3} \cdot t$$

Par intégration, et en prenant en compte la condition initiale, on obtient :

$$I_v(t) = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} + 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \cdot t - 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-3} \cdot t^2$$

La figure 3.20 montre l'évolution du flux volumique pour les 5 premières secondes.

(b) La résistance de la conduite est évaluée à partir de la loi de HAGEN-POISEUILLE pour un écoulement laminaire (équation (1.33)) :

$$R_v = -\frac{8\eta l}{\pi r^4} = \frac{8 \cdot 0.081 \text{ Pa s} \cdot 10 \text{ m}}{\pi \cdot (0.035 \text{ m})^4} = 1375 \cdot 10^3 \text{ Pa s m}^{-3}$$

La différence de pression Δp_R sur l'élément résistif est égale à l'opposé du produit de cette valeur et du flux volumique :

$$\Delta P_R(t) = -R_v I_v(t) = -1375 \text{ Pa} (0.1 + 0.1 \cdot t - 0.01 \cdot t^2); \quad \Delta P_R(2 \text{ s}) = -3.57 \text{ kPa}$$

L'évolution de cette différence de pression est présentée dans la figure 3.21a. À l'échelle près, elle est la symétrique de la courbe de la figure 3.20. Les différences de pressions dues à la résistance sont négatives dans le sens du courant.

(c) La puissance hydraulique due à la résistance 2 est calculée à partir de l'équation (3.7) :

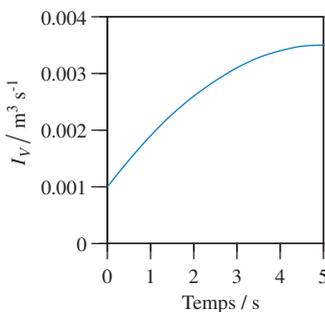


FIGURE 3.20 Évolution du courant d'huile en fonction du temps.

$$\mathcal{P}_R(t) = -\Delta P_R I_V(t) = R_V I_V^2(t) = 1375 \text{ Pa} (0.1 + 0.1 \cdot t - 0.01 \cdot t^2)^2; \quad \mathcal{P}_R(2 \text{ s}) = 9.29 \text{ W}$$

La figure 3.21b montre l'évolution de la puissance résistive. Notez que la puissance hydraulique due au frottement interne du fluide est toujours positive.

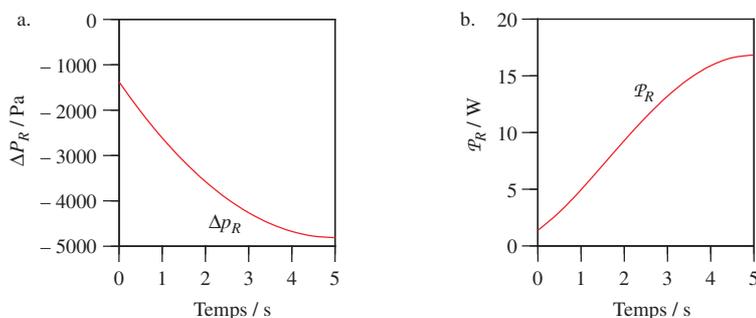


FIGURE 3.21 Différences de pression et puissances hydrauliques en fonction du temps pour l'élément résistif du circuit hydraulique.

EXEMPLE 3.4. Maximisation de la puissance d'une batterie.

Dans la figure 3.22, qui montre la caractéristique courant-tension de la batterie étudiée à la section 2.7.2, l'aire des rectangles représente la puissance délivrée en fonction de la charge. On observe que cette puissance est faible si la tension est élevée ou si l'intensité est élevée, et qu'elle sera maximale quelque part entre deux. Déterminer pour quelle valeur de la charge cette puissance sera maximale.

SOLUTION: Nous substituons l'équation (2.26) dans l'équation (3.6):

$$\mathcal{P}_{\text{él}} = U_b I_Q = (U_0 - R_{Q,\text{int}} I_Q) I_Q = U_0 I_Q - R_{Q,\text{int}} I_Q^2$$

En exigeant que la dérivée de la puissance par rapport au courant de charge s'annule:

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{él}}}{dI_Q} = U_0 - 2R_{Q,\text{int}} I_Q = 0$$

nous trouvons que le courant de charge qui permet de délivrer une puissance maximale est:

$$I_Q = \frac{U_0}{2R_{Q,\text{int}}}$$

Cela signifie que la puissance délivrée sera maximale si la résistance de charge est égale à la résistance interne de la batterie.

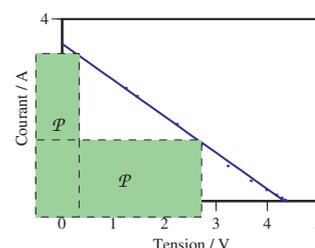


FIGURE 3.22 Puissance délivrée par une batterie.

3.4 TRANSFERT D'ÉNERGIE ET PORTEURS D'ÉNERGIE

L'énergie libérée dans un processus n'apparaît pas, venant du néant, et l'énergie liée n'y disparaît pas. Elle est soit transférée dans ou hors du système, soit elle provient d'un dispositif de stockage ou sera stockée (section 3.5). Nous voulons maintenant

étudier le transfert d'énergie. Le point le plus important qui sera évoqué dans cette section est le couplage entre l'écoulement des grandeurs extensives associées à la gravité, l'hydraulique et l'électricité avec l'écoulement de l'énergie dans et hors des systèmes. Nous découvrirons que la masse, le volume et la charge agissent comme des *porteurs d'énergie* dans les processus dont ils sont responsables.

3.4.1 Porteurs d'énergie, potentiels et courants d'énergie

Un exemple simple illustre le fonctionnement de la nature. Envisageons l'écoulement stationnaire d'une huile visqueuse à travers une conduite droite, comme dans la figure 3.7. Comme le fluide qui s'écoule d'un point de pression élevée vers un point de pression moindre, ce processus hydraulique libère de l'énergie à un certain taux (figure 3.23). Cette énergie est ensuite liée dans le processus thermique qui s'ensuit. Souvenons-nous que la production de chaleur due au frottement interne du fluide est la seule chose qui se produit dans la conduite; nous pouvons donc admettre que 100% de l'énergie libérée est liée dans le processus consécutif.

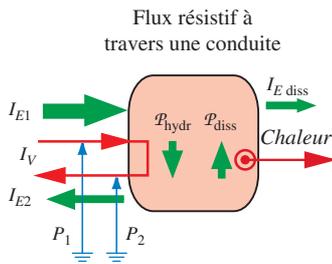


FIGURE 3.23 L'énergie libérée dans la « chute » du fluide d'un niveau haut vers un niveau bas de la pression doit être fournie au système. Elle s'écoule vers le – ou hors du – système avec le fluide sous pression.

Pour devenir concret, admettons que l'intensité du courant de fluide est de $0.10 \text{ m}^3/\text{s}$ et que la chute de pression est de 0.50 bar . En vertu de l'équation (3.7), l'énergie doit être libérée au taux de 5.0 kW , ce qui veut dire que, chaque seconde, 5000 J d'énergie sont libérés et rendus disponibles pour la production de chaleur. Cette énergie doit être amenée dans le système et, comme le seul processus qui s'y déroule est l'écoulement du fluide, nous sommes obligés de conclure qu'un fluide qui s'écoule sous pression transporte une certaine quantité d'énergie: nous associons un *courant d'énergie* au courant de fluide (figure 3.23). Il est donc plausible de considérer que le fluide est un *porteur d'énergie* par rapport au système.

Nous nous attendons à ce que le courant d'énergie dépende de deux facteurs. Tout d'abord, il doit être proportionnel au courant de fluide; deux courants identiques doivent avoir un effet double de celui d'un seul. D'autre part, la pression du fluide doit jouer un rôle. Déterminons la relation entre l'énergie et son courant porteur.

Si un fluide qui pénètre dans un système à un certain niveau (pression) transporte de l'énergie, ce doit être également le cas du fluide qui réémerge du système. C'est pourquoi nous admettons que le taux auquel l'énergie est libérée est égal à la différence de l'intensité des courants d'énergie entrant et sortant. Vu que la différence des flux d'énergie est égale au produit de la différence de pression et du flux volumique, c'est-à-dire,

$$|I_{E1}| - |I_{E2}| = |(P_2 - P_1) I_V|$$

l'expression la plus simple pour un courant d'énergie est donnée par le produit du flux volumique et de la pression du fluide à l'entrée – ou à la sortie – du système.

$$I_{E, \text{hydr}} = P I_V \quad (3.13)$$

On peut créer une image simple pour se souvenir de cette relation. On peut envisager la pression comme un «facteur de chargement» du «courant porteur». Le flux volumique est «chargé» d'énergie en accord avec la valeur de la pression. C'est pourquoi le flux d'énergie est égal au produit du courant porteur et de son facteur de chargement.

À nouveau, il s'agit de la structure de l'écoulement de l'énergie valable dans tous les domaines de la physique. Si nous considérons les différents dispositifs et processus étudiés jusqu'ici – gravitationnels et électriques, ainsi qu'hydrauliques, nous arrivons toujours à la même relation pour les courants d'énergie.

L'intensité d'un courant d'énergie entrant dans – ou émergeant d' – un système est le produit de l'intensité du courant porteur et de son potentiel associé (figure 3.24):

$$I_{E,X} = \varphi_X I_X \quad (3.14)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le potentiel électrique n'est pas une grandeur absolue. Les valeurs du potentiel électrique doivent toujours être mesurées par rapport à un niveau choisi, la «terre». Il en va de même du potentiel gravitationnel; sur notre planète, nous nous référons usuellement à des niveaux ou hauteurs par rapport au niveau de la mer. De tous les niveaux que nous connaissons jusqu'ici, seul le niveau hydraulique (la pression) est absolu. Les flux d'énergie dans les processus électriques et gravitationnels n'ont, pour cette raison, pas tout à fait la même signification que lors d'écoulements de fluides. Seule la différence des flux d'énergie entrant et sortant d'un système avec un courant unique d'une grandeur extensive est indépendante du choix arbitraire des niveaux. Cette différence est égale à la puissance du processus associé (figure 3.23).

Ce constat nous indique que cette vision de l'énergie «transportée» par le courant d'une grandeur extensive ne doit pas être prise trop à la lettre. Comme nous le verrons plus bas, «transportée» ne signifie pas que le courant porteur «contient» l'énergie fournie. L'interprétation physique de l'équation (3.14) doit être que l'énergie s'écoule toujours *en même temps* que la grandeur extensive – plutôt que liée au courant porteur. En revanche, il est tout à fait correct d'affirmer que *l'énergie ne s'écoule jamais seule*: il y a toujours un ou plusieurs écoulements conjoints d'autres grandeurs physiques.

3.4.2 Modes de transport de grandeurs extensives

Il existe, pour les grandeurs extensives, trois types de processus de transport fondamentalement différents, et l'équation (3.14) n'est valable que pour l'un d'entre eux. Nous étudierons en détail les processus de transport dans des chapitres ultérieurs, mais nous voulons les aborder brièvement, vu leur importance pour les transferts d'énergie.

Transports par conduction. Tous les processus de transport que nous avons rencontrés jusqu'ici font partie de la même catégorie: ce sont ceux au cours desquels une différence de potentiel est nécessaire pour que la grandeur extensive puisse s'écouler spontanément – une différence de potentiel gravitationnel pour les courants de masse gravitationnelle, une différence de pression pour les courants de volume, et une différence de potentiel électrique (une tension) pour les courants de charge. Examinons plus attentivement ces trois exemples.

Lorsque la charge électrique circule à travers un matériau conducteur, elle le fait «en descendant la pente» d'un potentiel élevé vers un potentiel bas (chapitre 2). La charge s'écoule spontanément *à travers* la matière, et non pas avec la matière. Ce type de transport est appelé *conduction* de l'électricité.

Alors qu'à première vue il semble différent, l'écoulement de volume entre deux niveaux de la pression est du même type. Il est vrai qu'il y a ici également un écoulement de matière. Cependant, ce n'est pas le point important. Les quantités de fluide s'écoulent à cause de la présence d'une différence de leur potentiel associé – la pression –, ce qui est justement la caractéristique distinctive des transports par conduction. Il en va de même pour les processus gravitationnels: la masse gravitationnelle engendre des

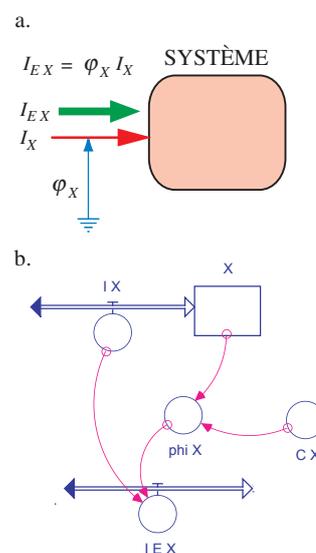


FIGURE 3.24 Relation entre flux d'énergie, flux «porteur» et «facteur de chargement»: (a) représentation dans un diagramme de processus; (b) représentation dans un diagramme de dynamique des systèmes.

champs gravitationnels et, par conséquent, des différences de potentiel gravitationnel. À nouveau, l'écoulement de la grandeur extensive est associé à son propre potentiel.

Transports par convection. La charge, par exemple, peut être transportée d'une manière totalement différente. Plutôt que de circuler à travers un conducteur, elle peut être stockée dans un corps. Si cet objet se déplace, il entraîne cette charge avec lui. Le cas le plus fréquent de ce type de transport implique des écoulements de fluides. Les fluides peuvent stocker d'autres grandeurs extensives telles que la charge, la chaleur ou de la quantité de mouvement. Ainsi, lorsqu'un fluide s'écoule, le flux de volume ou de substance est accompagné de celui des grandeurs qu'il contient. Elles ne s'écoulent pas à travers le fluide, mais *avec* le fluide.

On parle alors de transport par *convection*. Ici, l'écoulement d'une grandeur telle que la charge n'est *pas* associé à une différence de potentiel; la charge est transportée par l'écoulement du fluide qui, lui, est dû à une différence de pression! En résumé, un transport par convection de grandeurs extensives ne nécessite pas la présence d'une différence du potentiel associé.

Les transports par conduction de grandeurs extensives sont associés à (des différences de) leurs potentiels (tab. 3.5). En cas de convection, la force d'entraînement est celle qui entraîne le fluide contenant d'autres grandeurs extensives qui sont transportées lors de son mouvement.

Rayonnement. Finalement, quelques-unes des grandeurs extensives peuvent être transportées à travers l'espace au moyen du rayonnement. C'est par exemple le cas de la chaleur qui s'écoule de la surface du Soleil vers la Terre. Le rayonnement peut contenir – et donc transporter – de la chaleur. Lorsqu'il est intercepté par un corps matériel, il peut être absorbé avec la chaleur qu'il contient. Le transfert du rayonnement dans un système matériel est d'une nature totalement différente de celle du transport par conduction et par convection. Il suffit de penser à une sphère de verre exposée à la lumière du Soleil pour s'en convaincre. Les grandeurs, telles que la chaleur, qui sont transportées par le rayonnement, sont déposées directement à l'intérieur des corps sans devoir s'écouler à travers le matériau à partir de la surface.

Transports d'énergie. Dans les trois types de transport de grandeurs extensives, l'énergie s'écoule également, mais la relations entre les courants et le flux d'énergie ne prend la forme de l'équation (3.14) que dans un seul cas, à savoir dans les transports par *conduction*. Tous les autres cas, convection, rayonnement, et absorption ou émission de rayonnement doivent être étudiés de manière particulière.

Relevons encore une fois que lors du transport par conduction, l'énergie ne s'écoule pas nécessairement avec la grandeur extensive. Ainsi, l'énergie qui s'écoule en même temps que le courant électrique le fait à l'extérieur du conducteur, véhiculée par le champ électromagnétique qui entoure le conducteur.

3.4.3 Remarque au sujet des «formes» d'énergie

Il est courant d'entendre dire par exemple que, dans un générateur, l'énergie hydraulique a été «convertie» en énergie électrique et, réciproquement, que dans une pompe électrique, l'énergie électrique a été «convertie» en énergie hydraulique.

Il est important de réaliser qu'il n'existe pas plusieurs sortes d'énergie. C'est toujours la même énergie qui migre à travers un enchaînement de processus. À l'intérieur de chaque système qui couple deux processus de nature différente, l'énergie change de courant porteur. Ainsi, elle entre dans une pompe électrique en compagnie du courant

électrique et en émerge en compagnie du courant hydraulique. Les noms que l'on donne aux différentes « formes » ou « sortes » d'énergie sont donc liés aux grandeurs extensives qu'elle accompagne et pas à l'énergie elle-même, comme il usuel est de l'entendre.

Un système qui couple deux processus, une machine, sert donc à transborder l'énergie d'un porteur à l'autre, mais en aucun cas à en changer la nature.

EXEMPLE 3.5. Courant d'énergie à la sortie d'un réservoir de fluide.

Un réservoir sous pression est rempli d'huile à une pression de 3.0 bar. L'huile s'échappe du réservoir à travers une longue conduite horizontale ouverte à l'air libre à une pression de 1.0 bar (figure 3.25). La conduite a une longueur de 10.0 m et un diamètre de 4.0 cm. La viscosité de l'huile est de 0.20 Pa s. (a) Quelle est la valeur du flux d'énergie dû à l'écoulement du fluide hors du réservoir, mesurée à la sortie du réservoir? (b) Que vaut le flux d'énergie à la sortie de la conduite? (c) Pourquoi les résultats en a et b sont-ils différents?

SOLUTION: (a) Le flux d'énergie à la sortie du réservoir est égal au produit de la pression de l'huile à cet endroit et du flux volumique. La pression est celle du fluide dans le réservoir. Nous utilisons la loi de HAGEN-POISEUILLE pour évaluer le flux volumique:

$$I_E = P I_V = p \frac{\pi r^4}{8 \eta l} (P_a - P) = -1.88 \text{ kW}$$

(b) Le flux volumique est le même que ci-dessus. La pression du fluide a été réduite au tiers de la valeur dans le réservoir. De ce fait, le flux d'énergie associé n'est plus que de -628 W .

(c) L'énergie émergeant du réservoir entre dans la conduite. Vu que la pression tombe de 3.0 bar à 1.0 bar, de l'énergie est libérée dans la conduite à cause du frottement interne du fluide au taux de $(P - P_a)I_V = 1257 \text{ W}$, ce qui correspond à la différence entre les flux d'énergie entrant et sortant de la conduite.

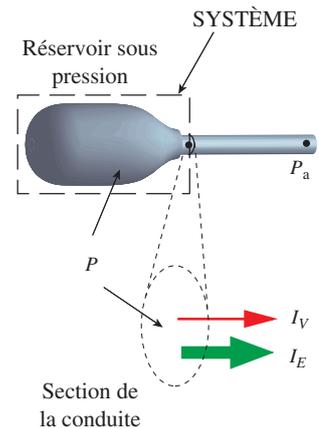


FIGURE 3.25 Réservoir sous pression avec conduite. Les flux sont mesurés aux surfaces du système.

3.5 ACCUMULATION ET BILAN D'ÉNERGIE

Dans un certain sens, l'énergie est comme des quantités d'eau ou d'argent: nous pouvons en tenir une comptabilité. Nous avons appliqué ce principe dans les processus stationnaires étudiés dans les sections précédentes. L'énergie s'écoule à travers les enchaînements de processus et, comme nous croyons que c'est une grandeur conservée, nous savons que l'intensité de l'écoulement ne varie pas.

Mais des variations dans le temps des intensités des écoulements sont cependant possibles si de l'énergie est stockée dans les systèmes. Ce n'est que si nous prenons en compte le stockage de cette grandeur que nous obtiendrons une formulation générale du bilan.

3.5.1 Formulation générale du bilan d'énergie

À moins de croire que de l'énergie est créée ou annihilée lorsque des enchaînements de processus sont interrompus, nous devons accepter l'idée qu'elle peut être stockée (section 3.2). Les corps – et les systèmes physiques en général – peuvent contenir de l'énergie, ils peuvent en absorber et en émettre, changeant ainsi les quantités accumulées.

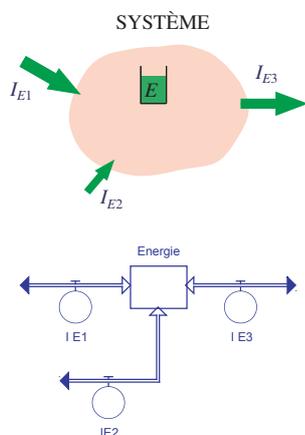


FIGURE 3.26 Le bilan de l'énergie ressemble à celui de quantité de fluide. Le contenu en énergie d'un système ne peut évoluer qu'en conséquence d'écoulements d'énergie vers ou hors du système.

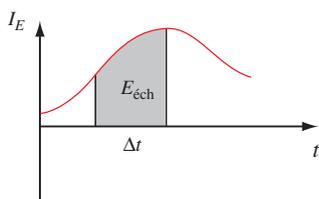


FIGURE 3.27 Représentation graphique de l'énergie échangée par l'intermédiaire d'un courant d'énergie.

Tout comme dans le cas de quantités d'eau ou de charge électrique, une équation de bilan met en relation ce qu'il advient de la grandeur accumulée en conséquence d'écoulements vers ou hors du système, et comme l'énergie est conservée, nous savons que les quantités stockées ne peuvent varier que par l'intermédiaire des flux. C'est ce que nous appelons le bilan d'énergie pour un système.

L'énergie peut être stockée et peut s'écouler. La somme de tous les flux d'énergie par rapport à un système indique à quelle vitesse varie la quantité d'énergie stockée (figure 3.26):

$$\dot{E} = \sum_i I_{E,i} = I_{E,\text{net}} \quad (3.15)$$

Cette forme de l'équation de bilan est valable à n'importe quel instant. D'autre part, la variation de la quantité d'énergie stockée est égale à la quantité totale d'énergie transférée vers ou hors du système:

$$\Delta E = \sum_i E_{\text{éch},i} = E_{\text{éch},\text{net}} \quad (3.16)$$

$E_{\text{éch}}$ est la quantité d'énergie échangée au cours du processus, et correspond à l'aire grisée dans la figure 3.27.

L'énergie échangée par l'intermédiaire d'un flux correspond également à une aire dans le diagramme $I_E(t)$ et se calcule par intégration:

$$E_{\text{éch},i} = \int_{t_1}^{t_2} I_{E,i}(t) dt \quad (3.17)$$

Les outils de la dynamique des systèmes nous permettent d'exprimer le bilan de l'énergie dans sa forme dynamique et de la manipuler aisément. Il suffit de tracer un stock pour représenter la quantité d'énergie accumulée, connecté à autant de flows que nécessaire pour symboliser les flux (figure 3.26).

Notons qu'une des propriétés de l'énergie – la faculté de pouvoir être libérée et liée – n'apparaît pas dans un bilan. La libération et la liaison d'énergie, que nous mesurons au moyen de la puissance d'un processus, a toujours lieu à l'intérieur du système considéré, alors que le bilan n'énonce que la relation entre les quantités stockées et les quantités s'écoulant vers ou hors du système.

1. Quelles sont les propriétés que partagent les quantités d'eau et d'énergie? Lesquelles sont-elles nécessaires pour pouvoir énoncer un bilan?
2. Pourquoi la propriété particulière de l'énergie, à savoir d'être libérée et liée dans les processus, n'apparaît-elle pas dans son bilan?
3. Laquelle des deux formes de l'équation de bilan – équation (3.15) ou (3.16) – est-elle la plus générale?



1. Des quantités d'eau et d'énergie peuvent être accumulées, elles peuvent s'écouler, et elles sont conservées (si nous faisons abstraction de la possibilité de réactions chimiques dans le cas de l'eau). Seuls le stockage et l'écoulement sont des conditions nécessaires pour l'existence d'un bilan relatif à une grandeur.
2. La libération d'énergie est un processus «interne» qui n'affecte pas le bilan. Les bilans ne contiennent que des termes relatifs au stockage et aux écoulements.
3. L'équation (3.15) est la plus générale. Elle est valable à n'importe quel instant, alors que l'équation (3.16) n'est valable que pour une période particulière. La connaissance de la première permet de déduire la seconde, mais l'inverse n'est pas possible.



EXEMPLE 3.6. Taux de variation de l'énergie stockée dans un réservoir d'eau.

De l'eau est pompée à raison de 50 L s^{-1} par le fond d'une cuve ouverte. La pression de l'air est de 1.0 bar ; la cuve a une section de 0.80 m^2 (figure 3.28). Quel est le taux de variation de l'énergie de l'eau stockée dans la cuve à l'instant où le niveau d'eau situé 2.0 m au-dessus de l'admission?

SOLUTION: Il faut déterminer tous les flux d'énergie relatifs au système pour pouvoir calculer le taux de variation à partir du flux net (bilan selon l'équation (3.15)). Il y a deux surfaces au travers desquelles l'énergie entre et émerge du système. La première est au point C, où le fluide pénètre dans le système à une pression P_C comme le montre la figure 3.28. La seconde est la surface libre du liquide. Elle est mobile et pousse l'air. L'eau ne franchit pas les limites du système, mais l'énergie le fait. Naturellement, il n'y a pas de différence fondamentale entre un fluide qui franchit une section des limites du système à une pression donnée, et un fluide qui en pousse un autre à une frontière qui se déplace avec ces fluides. Dans les deux cas, le flux d'énergie est calculé selon des règles identiques, raison pour laquelle nous représentons les deux écoulements comme produit de leurs flux volumiques et des pressions respectives.

Selon l'équation (3.14), les deux flux d'énergie valent

$$I_{E1} = P_C I_V = (P_a + \rho g h) I_V = (10^5 \text{ Pa} + 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 2.0 \text{ m}) 0.050 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 5.98 \text{ kW}$$

$$I_{E2} = P_D I_V = P_a I_V = 10^5 \text{ Pa} \cdot (-0.050 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}) = -5.0 \text{ kW}$$

(figure 3.28b). Le taux de variation de l'énergie est donc

$$\dot{E} = I_{E1} + I_{E2} = 0.98 \text{ kW}$$

3.5.2 Stocker de l'énergie avec l'aide de la gravité

Lorsque nous construisons une tour ou lorsque la nature fait surgir une chaîne de montagnes, il y a stockage d'énergie. Nous voulons en évaluer la quantité en étudiant la construction d'une tour (figure 3.29). On utilise des briques de masse totale m , toutes posées au niveau du sol. La tour est déjà partiellement construite à la hauteur h . Il faut fournir une quantité d'énergie équivalente à $m_b g h$ pour placer la brique suivante au sommet de la construction, si m_b représente la masse d'une brique individuelle. Comme il s'agit d'un processus gravitationnel (un corps est soulevé dans le champ gravitationnel), l'énergie fournie par une personne ou une grue est stockée dans le champ

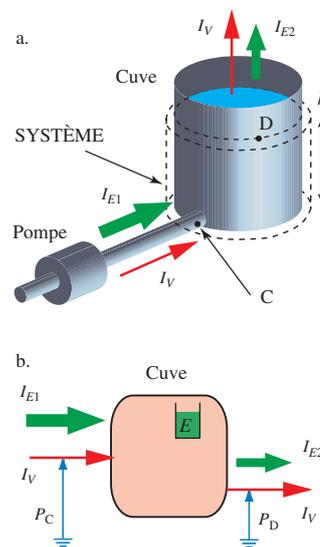


FIGURE 3.28 Remplissage d'une cuve au moyen d'une pompe.

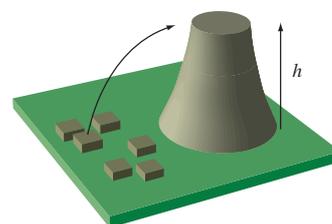


FIGURE 3.29 L'énergie stockée est celle qu'il faut fournir pour soulever les briques du sol à leurs niveaux respectifs. L'énergie est stockée dans le champ gravitationnel.

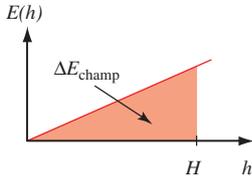


FIGURE 3.30 Énergie accumulée dans le champ de pesanteur à la suite de l'empilement des briques servant à construire la tour.

gravitationnel. La valeur totale de l'énergie stockée grâce à la construction de la tour peut être calculée en sommant les contributions associées à chacune des briques.

Considérons d'abord une tour à parois verticales. La première couche de briques est posée à même le sol, ce qui ne nécessite aucune énergie. La seconde couche requiert une faible quantité d'énergie. La couche suivante, un peu plus, et ainsi de suite. L'énergie nécessaire pour chaque couche croît proportionnellement à la hauteur de la couche. La somme de toutes les contributions requises pour empiler les couches servant à bâtir une tour de hauteur H est équivalente à l'énergie qui serait nécessaire pour amener toutes les briques à mi-hauteur, c'est-à-dire à la hauteur du centre de masse (figure 3.30). Elle est donc égale à $mgH/2$, ce qui correspond à l'aire du triangle dans la figure 3.30. Ici, m représente la masse totale des briques. L'énergie du champ gravitationnel a augmenté d'autant :

$$\Delta E_{\text{champ}} = \frac{1}{2} g H m \quad (3.18)$$

L'analogie hydraulique nous aide à visualiser cette relation. Souvenons-nous que le quotient de la variation d'une quantité de fluide stockée et de la variation de pression associée a la signification de la capacité du dispositif de stockage. Ici, la grandeur stockée est la masse des briques, et le facteur gh est le potentiel gravitationnel. Il s'ensuit que la *capacité gravitationnelle* C_G est définie par

$$\Delta m = C_G \Delta(gh) \quad (3.19)$$

Pour une structure à parois verticales, cette grandeur est constante. À partir de l'équation (3.19), nous trouvons qu'elle est égale à $A\rho/g$. Pour une structure de section variable, nous devons simplement remplacer la section constante A par la variable $A(h)$. En conclusion :

$$C_G(h) = \frac{A(h)\rho}{g} \quad (3.20)$$

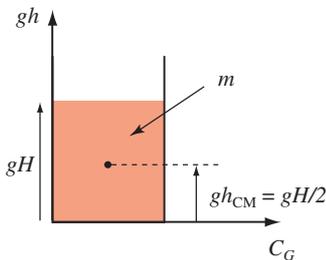


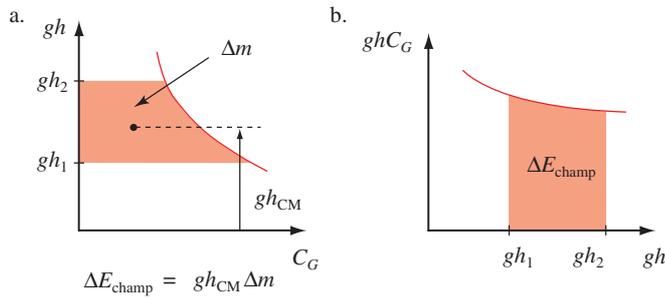
FIGURE 3.31 Analogie hydraulique de masse empilée dans le champ gravitationnel. Le diagramme représente le potentiel en fonction de la capacité de la structure.

Nous pouvons maintenant tracer la courbe du potentiel gravitationnel (mesuré par rapport à un niveau de référence convenablement choisi) en fonction de la capacité. Pour une structure droite, le diagramme est celui de la figure 3.31. La quantité de la grandeur extensive stockée – ici la masse gravitationnelle – est représentée par l'aire apparaissant dans le diagramme. La quantité stockée multipliée par le potentiel moyen gh_{CM} auquel elle a été élevée représente la quantité d'énergie accumulée dans le système.

Pour une construction de profil quelconque, le calcul est un peu plus compliqué. Un diagramme semblable à celui de la figure 3.31 reste valable. À nouveau, le produit de la masse et du potentiel gravitationnel moyen $gh_{\text{moy}} = gh_{\text{CM}}$ auquel elle a été élevée représente la quantité d'énergie stockée (figure 3.32a). Il se révèle que l'utilisation de la moyenne arithmétique, c'est-à-dire $gh_{\text{moy}} = 0.5(gh_1 + gh_2)$, donne des résultats acceptables. Cependant, pour trouver la valeur exacte, nous devons utiliser un autre diagramme. Pour construire une tour, il faut soulever de petites parties Δm_i de la masse de la structure à une certaine hauteur h_i . L'énergie ΔE_i nécessaire pour le faire est

$$\begin{aligned} \Delta E_i &= g h_i \Delta m_i \quad , \quad \Delta m_i = C_{G_i} \Delta(gh_i) \\ \Rightarrow \Delta E_i &= g h_i C_{G_i} \Delta(gh_i) \end{aligned}$$

Si nous traçons la grandeur ghC_G en fonction de gh , nous voyons que la contribution ΔE_i est égale à l'aire d'un rectangle étroit. La variation totale de l'énergie du dispositif de stockage est donc représentée par l'aire entre la courbe et l'axe gh (figure 3.32b).



EXEMPLE 3.7. Stockage d'énergie dans un bassin d'accumulation.

La surface d'un bassin d'accumulation a une aire de 2.0 km^2 (figure 3.33). Il a une profondeur de 50 m et le fond a une aire de 1.0 km^2 . Nous admettons que le profil vertical du lac est une fonction linéaire de la profondeur. Quelle quantité d'énergie, mesurée par rapport à la centrale électrique située 50 m en dessous du fond du lac, a-t-on stockée grâce à l'eau accumulée dans le lac ?

SOLUTION: Si nous souhaitons utiliser la méthode approximative de la figure 3.32 pour calculer ΔE , nous devons évaluer le potentiel gravitationnel au fond et à la surface du lac par rapport à la centrale, ainsi que la capacité en fonction du niveau (hauteur ou potentiel); nous utilisons la figure 3.34 pour illustrer nos calculs. Les potentiels gravitationnels des niveaux sont

$$gh_1 = 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 50 \text{ m} = 490 \text{ N m kg}^{-1}, \quad gh_2 = 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 100 \text{ m} = 981 \text{ N m kg}^{-1}$$

La capacité gravitationnelle est proportionnelle à la section horizontale du lac qui est une fonction linéaire de la hauteur. La première valeur est calculée comme suit:

$$C_{G1} = \frac{A(h_1)\rho}{g} = \frac{10^6 \text{ m}^2 1000 \text{ kg m}^{-3}}{9.81 \text{ N kg}^{-1}} = 1.02 \cdot 10^8 \text{ kg}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

La seconde vaut le double. La masse de l'eau accumulée dans le lac est donc

$$m = \frac{1}{2}(C_{G1} + C_{G2})(gh_1 - gh_2) = 7.50 \cdot 10^{10} \text{ kg}$$

(figure 3.35). En prenant la moyenne arithmétique des potentiels gravitationnels au fond et à la surface du lac comme niveau moyen auquel l'eau est élevée par rapport à la centrale, nous trouvons que la quantité d'énergie stockée est

$$\Delta E \approx \frac{1}{2}(gh_1 + gh_2)m = \frac{1}{2}(490 \text{ N kg}^{-1} + 981 \text{ N kg}^{-1})7.50 \cdot 10^{10} \text{ kg} = 5.5 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

En utilisant la méthode exacte de la figure 3.32b, nous obtenons le graphique de ghC_G en fonction de gh de la figure ci-contre. Une détermination de l'aire sous la courbe de la figure 3.35 donne une valeur de $5.61 \cdot 10^{13} \text{ J}$, ce qui correspond à peu de chose près à la valeur approximative ci-dessus.

3.5.3 Énergie accumulée dans les capacités électriques

Les tours, les cuves, les bassins d'accumulation sont des capacités gravitationnelles. Nous nous attendons donc à ce que les résultats de la section précédente soient

FIGURE 3.32 (a) Potentiel gravitationnel en fonction de la capacité pour une structure à section variable; (b) l'énergie stockée peut aussi être calculée au moyen du diagramme représentant le produit du potentiel et de la capacité en fonction du potentiel.

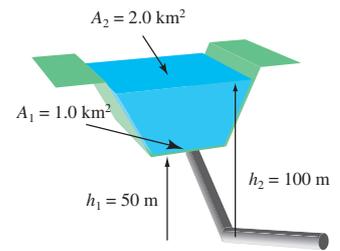


FIGURE 3.33 Bassin d'accumulation avec conduite.

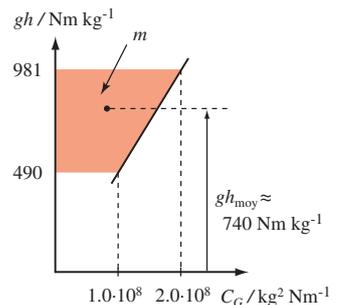


FIGURE 3.34 Évaluation du potentiel moyen

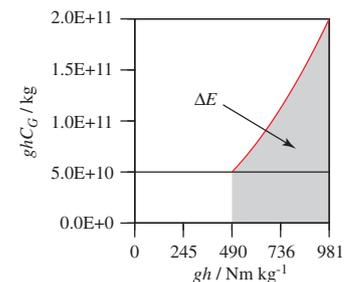


FIGURE 3.35 Diagrammes représentant l'analogie hydraulique d'un stockage gravitationnel.

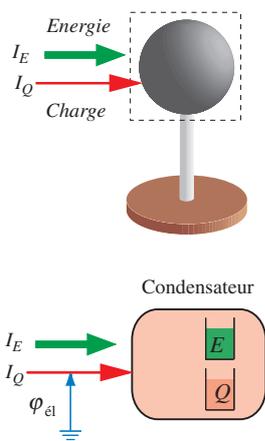


FIGURE 3.36 Charger un condensateur signifie lui fournir de la charge et de l'énergie. Les deux grandeurs sont stockées.

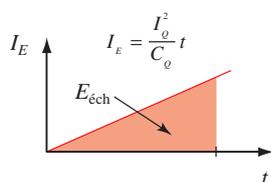


FIGURE 3.37 Durant la charge d'un condensateur, le flux d'énergie associé à un courant de charge constant est une fonction linéaire du temps.

également applicables à des éléments capacitifs hydrauliques et électriques. Nous allons maintenant dériver ce résultat pour des condensateurs électriques en nous basant sur une idée différente. Puis, nous présenterons une relation générale pour l'énergie des éléments capacitifs.

Nous considérons la charge d'une capacité électrique telle qu'une sphère métallique (figure 3.36). Pour simplifier les choses, nous admettons que le courant de charge est constant (le résultat ne dépend pas du mode de charge). Nous allons évaluer l'énergie stockée dans le système à partir de l'équation de bilan de l'énergie du condensateur :

$$\Delta E = E_{\text{éch}}$$

où $E_{\text{éch}}$ est l'énergie fournie au condensateur durant le processus de charge. Cette dernière quantité est calculée à partir du courant d'énergie durant la charge. Nous devons exprimer le courant d'énergie en fonction du temps dans un diagramme tel que celui de la figure 3.27, puis évaluer l'aire sous la courbe.

Le courant d'énergie est le produit de l'intensité du courant de charge et du potentiel électrique (équation (3.14)) :

$$I_E(t) = \varphi_{\text{el}}(t) I_Q$$

Nous devons tenir compte du fait que le potentiel, c'est-à-dire la tension du condensateur par rapport à la terre, varie durant le processus. Il dépend de la charge instantanée que l'on peut calculer à partir de l'équation de bilan de la charge :

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C_Q}$$

$$\dot{Q} = I_Q \Rightarrow Q(t) = I_Q t$$

La dernière relation découle de la constance de I_Q . C'est pourquoi le courant d'énergie durant le processus de charge est une fonction linéaire du temps (figure 3.37) :

$$I_E(t) = \frac{I_Q t}{C_Q} I_Q = \frac{I_Q^2}{C_Q} t$$

L'énergie échangée peut être évaluée facilement, vu que la surface dans le diagramme de la figure 3.37 est un triangle. Nous obtenons $E_{\text{éch}} = 1/2 t I_Q^2 / C_Q$, ce qui signifie que

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_Q} = \frac{1}{2} C_Q U_C^2 \quad (3.21)$$

Dans l'analogie hydraulique, cela correspond à l'énergie d'un fluide stocké dans un récipient à parois verticales (figure 3.31), dans lequel tout le fluide aurait été élevé à la moitié du niveau supérieur.

3.5.4 Généralisation

La dérivation présentée ici peut être étendue à des cas plus généraux, ainsi qu'à des capacités de différents types, gravitationnel, hydraulique et électrique. Nous obtenons toujours le résultat général :

La variation de la quantité d'énergie stockée dans une capacité est égale au produit de la variation de la grandeur extensive accumulée et du niveau du centre de masse (proche du niveau moyen) de la grandeur stockée, mesuré par rapport à un niveau de référence choisi arbitrairement (figure 3.38a):

$$\Delta E = \varphi_{X, \text{CM}} \Delta X \approx \varphi_{X, \text{moy}} \Delta X \quad (3.22)$$

De manière alternative, l'énergie stockée peut être calculée à partir du produit du potentiel et de la capacité (figure 3.38b):

$$\Delta E = \int_{\varphi_{X1}}^{\varphi_{X2}} \varphi_X C_X d\varphi_X \quad (3.23)$$

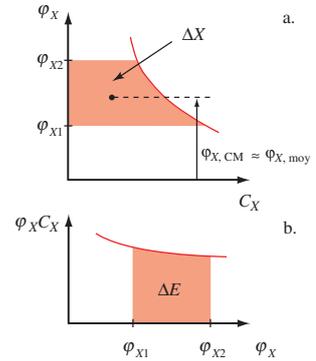


FIGURE 3.38 L'énergie emmagasinée dans des capacités peut être déterminée graphiquement lorsque la capacité est variable.

TABLEAU 3.6 Différents types de capacités constantes.

	Gravitation	Hydraulique	Électricité
Capacité	C_G	C_V	C_Q
Différence potentiel	$\Delta(gh)$	ΔP	U_C
Grandeur stockés	$\Delta m = C_G \cdot \Delta(gh)$	$\Delta V = C_V \cdot \Delta P$	$\Delta Q = C_Q U$
Énergie stockée	$\Delta E = 1/2 C_G \cdot \Delta(gh)^2$	$\Delta E = 1/2 C_V \cdot \Delta P^2$	$\Delta E = 1/2 C_Q U_C^2$

1. Le tableau 3.6 indique comment calculer l'énergie stockée dans des capacités. Où l'énergie réside-t-elle?
2. On charge un condensateur de 100 μF de capacité à 10 V. Que valent la charge accumulée et l'énergie emmagasinée?



1. Dans les trois cas, l'énergie est accumulée dans un champ. Dans le cas de la gravitation, l'énergie est accumulée dans le champ de pesanteur et non pas le corps qui a été soulevé. Dans le cas hydraulique, la réponse est la même, comme le montrent les développements de la section 3.5.2. Dans le cas du condensateur, l'énergie réside à nouveau dans le champ électrique qui s'établit entre les conducteurs qui accueillent les charges. Dans les trois cas, on peut imaginer que le champ, qu'il soit gravitationnel ou électrique, a une certaine élasticité, et que le fait de déplacer des masses, des fluides ou des charges dans ces champs augmente la tension qui règne dans le champ et le charge d'énergie. La terminologie électrique correspond à cette image.

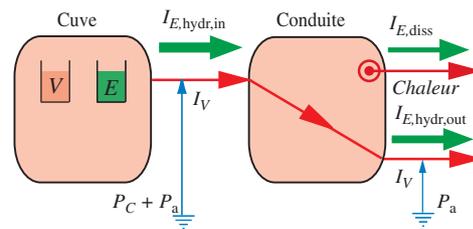


2. La charge accumulée est égale à 1 mC. L'énergie emmagasinée est de 10 mJ.

3.5.5 Intégration de l'énergie dans les modèles dynamiques

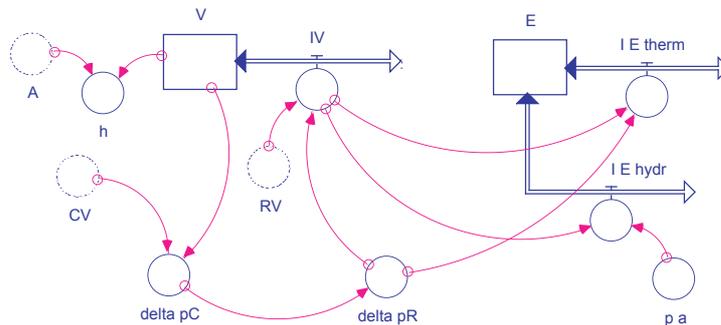
Il est très simple d'intégrer les flux d'énergie dans les modèles de processus dynamiques. Considérons, à titre d'exemple, la vidange de la cuve que nous avons traitée à la section 1.8.1.

FIGURE 3.39 Mise en évidence des flux d'énergie lors de la vidange d'une cuve.



Il y a deux flux qui transportent l'énergie accumulée dans la cuve à travers la conduite. Un flux d'énergie hydraulique transportée par le flux volumique qui émerge de la conduite à la pression ambiante p_a et un flux dissipatif transporté par la chaleur produite à cause des frottements.

FIGURE 3.40 Inclusion du bilan d'énergie dans le modèle dynamique de la vidange d'une cuve.



Pour prendre en compte de l'énergie dans le modèle dynamique, nous introduisons un stock qui représente l'énergie accumulée dans le système. Ce stock se vide par l'intermédiaire des deux flux mentionnés ci-dessus, ce qui s'énonce au moyen de l'équation de bilan de l'énergie :

$$\dot{E} = I_{E,hydr} + I_{E,therm}$$

où les flux d'énergie sont calculés selon l'équation (3.14) :

$$I_{E,hydr} = P_a I_V$$

$$I_{E,therm} = \Delta P_R I_V$$

Puisque nous évaluons l'énergie hydraulique émergente à pression ambiante, nous devons tenir compte de la contribution de la pression ambiante dans l'énergie accumulée. Ainsi, le contenu initial d'énergie de la cuve sera donné par :

$$E_0 = \frac{1}{2} C_V (\Delta P_{C_0} + P_a)^2$$

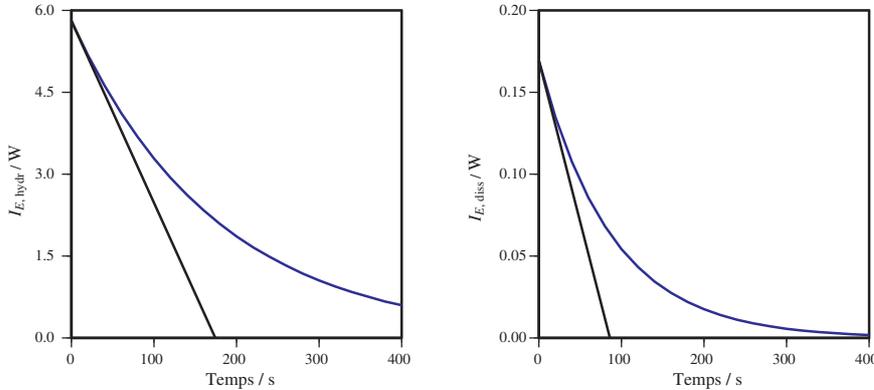


FIGURE 3.41 Flux d'énergie lors de la vidange d'une cuve. La constante de temps liée au flux dissipatif est égale à la moitié de celle du flux d'énergie hydraulique.

Nous remarquons que les deux flux n'ont pas la même constante de temps. Nous connaissons la manière dont évoluent les flux volumiques en régime laminaire :

$$I_V(t) = I_{V0} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad \text{avec} \quad \tau_c = R_V C_V$$

ce qui nous permet, à partir de l'équation (3.14), de déterminer de quelle manière les flux d'énergie évoluent dans le temps :

$$I_{E, \text{hydr}} = P_a I_V(t) = P_a I_{V0} e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

$$I_{E, \text{therm}} = -\Delta P_R I_V(t) = R_V I_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau_c}} = R_V I_0^2 e^{-\frac{t}{\tau_c/2}}$$

La constante de temps liée au flux dissipatif est égale à la moitié de celle du flux d'énergie hydraulique. C'est une conséquence du fait que le flux dissipatif est proportionnel au carré du flux volumique ; en électricité, on désigne par *effet Joule* cette particularité des flux dissipatifs.

3.6 UNE CONSÉQUENCE DE LA QUANTIFICATION DE L'ÉNERGIE

On n'a pu comprendre les différents comportements dans la conduction de l'électricité (section 2.6.2) qu'après le développement de la physique quantique, durant le premier quart du XX^e siècle. Nous allons exposer brièvement les lignes essentielles de cette théorie et en déduire les raisons de l'existence, dans la conduction électrique, de conducteurs, semi-conducteurs et isolants.

3.6.1 Quantification de grandeurs physiques

Au chapitre 2, nous avons été confrontés pour la première fois au fait que certaines grandeurs physiques sont *quantifiées*, c'est-à-dire qu'elles sont des multiples d'une brique élémentaire insécable. C'est le cas de la charge électrique libre qui est toujours un multiple de la charge élémentaire e qui vaut $1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Notons toutefois que les quarks, les particules dont sont constitués notamment les protons et les neutrons,

portent des charges égales au tiers de la charge élémentaire; mais ces particules ne se rencontrent jamais à l'état libre, tout au moins aux énergies atteignables sur Terre, même dans les plus grands accélérateurs de particules.

La découverte de la quantification de la charge électrique par J.J. Thompson en 1896 précède de quatre ans celle de la quantification de l'énergie. Les physiciens essayaient depuis 1860 de comprendre et de modéliser le rayonnement du corps noir, c'est-à-dire d'un objet qui absorbe toute la lumière, et l'énergie qu'elle transporte, sans la réfléchir ni la transmettre; les petites mangeoires pour oiseaux que l'on suspend aux arbres durant l'hiver en sont une illustration: le trou d'entrée est noir parce qu'il laisse entrer la lumière qui n'en ressort jamais. En 1900, Max PLANCK découvrit la formule qui rendait compte correctement de la répartition spectrale du rayonnement électromagnétique à l'intérieur d'une telle enceinte, c'est-à-dire de la distribution de l'intensité du rayonnement en fonction de sa longueur d'onde ou de sa fréquence. Pour expliquer sa formule, découverte par des essais successifs, par un modèle physique, il dut recourir à ce qu'il jugea comme un simple artifice de calcul. Il admit que l'énergie échangée entre les parois et le champ électromagnétique ne pouvait l'être qu'en des multiples entiers de «particules élémentaires d'énergie», de *quanta* d'énergie dont la valeur s'exprime par:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} \quad (3.24)$$

où h représente le *quantum d'action* (grandeur résultant du produit d'énergie et de temps), f la fréquence du rayonnement électromagnétique (de la lumière) envisagé, λ sa longueur d'onde et c la vitesse de la lumière. La grandeur h , la constante de PLANCK, vaut $6.67 \cdot 10^{-34}$ J s. Sa petitesse est responsable du fait qu'elle ne manifeste sa présence qu'au niveau atomique et sub-atomique.

Cinq ans plus tard, Albert EINSTEIN expliqua entre autres l'effet photoélectrique (arrachage par la lumière d'électrons de la surface d'un métal) en admettant que la lumière elle-même était quantifiée, c'est-à-dire qu'elle était constituée de particules que l'on appela les *photons*.

Les développements qui suivirent ces deux révolutions aboutirent à l'élaboration, essentiellement entre 1920 et 1925, d'une théorie totalement nouvelle, la physique quantique. C'est cette théorie qui permet entre autres de comprendre pourquoi un matériau est un bon ou un mauvais conducteur de l'électricité.

3.6.2 Influence de la quantification sur la conduction de l'électricité

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, on pensait que les charges mobiles étaient positives. Après la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1896, on comprit que, dans les métaux, c'étaient eux qui transportaient la charge électrique. Comment se déroule ce processus?

La physique quantique a permis de comprendre et d'expliquer comment, dans un atome isolé, les électrons s'arrangent autour du noyau en couches successives. Celui ou ceux qui occupent la dernière couche sont appelés électrons de valence; suivant les éléments considérés, ils sont plus ou moins fortement liés au reste de l'atome et contribuent à donner à cet atome ses propriétés physico-chimiques. Ce sont par exemple ces électrons qui sont responsables des réactions chimiques contribuant à la formation de molécules. Un tel électron ne peut être que dans des «états» qui correspondent à des valeurs bien définies de l'énergie, séparées par des intervalles de valeurs inaccessibles. Il ne peut passer d'un état accessible à l'autre que s'il reçoit ou libère la quantité d'énergie qui correspond à la différence des valeurs associées aux deux états respec-

tifs. Cette transitions entre deux états se fait par absorption ou émission d'un photon dont la fréquence ou la longueur d'onde satisfait la relation donnée par l'équation (3.24). Mais lorsqu'un tel atome fait partie d'un solide, il interagit avec ses voisins, et ses «états» possibles ne correspondent plus à des énergies bien définies, mais à un continuum de valeurs, réunies en «bandes d'énergie», séparées elles aussi par des intervalles de valeurs inaccessibles. Les bandes qui contiennent les états accessibles sont appelées «bandes permises», alors que les autres sont les «bandes interdites».

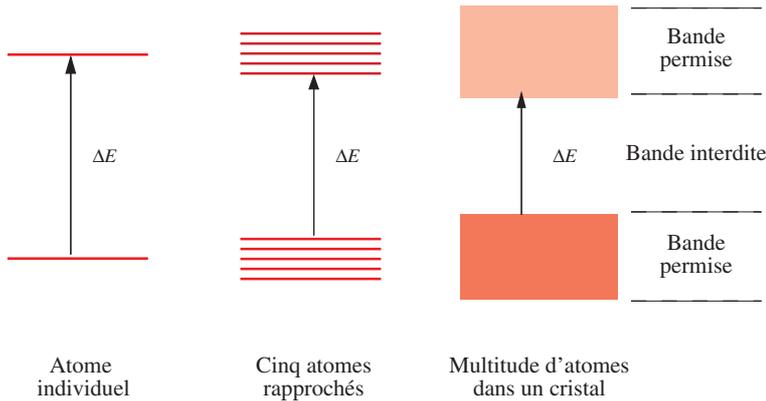


FIGURE 3.42 Schéma de bandes. L'interaction entre les atomes augmente le nombre d'états accessibles. Lorsque le nombre d'atomes est important, les niveaux accessibles occupent une bande, dite bande permise. L'espace entre deux bandes permises est une bande interdite.

Conducteurs et isolants. Le schéma des bandes permet de comprendre pourquoi un solide conduit ou ne conduit pas l'électricité. Il y a deux situations possibles : à température absolue nulle, les électrons remplissent complètement la dernière bande à laquelle ils peuvent accéder; cette bande est la «bande de valence». La bande permise qui se situe au-dessus de la bande de valence, la bande de conduction, est totalement vide; on a alors affaire à un isolant. Dans le second cas, les couches peuvent se superposer et le remplissage des couches successives par les électrons s'arrête à un niveau qui est inférieur à la limite supérieure d'une bande permise; on a alors affaire à un métal. La bande partiellement remplie se nomme «bande de conduction».

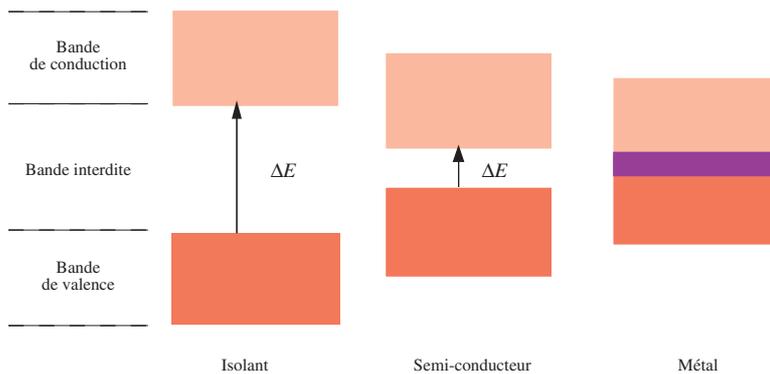


FIGURE 3.43 La largeur de la bande interdite détermine le comportement électrique du matériau. Lorsqu'elle est importante, le matériau est isolant. Dans les conducteurs, il y a chevauchement de la bande de valence et de la bande de conduction. Les semi-conducteurs sont un cas intermédiaire.

Semi-conducteurs. Le comportement des isolants dépend fortement de la largeur de la bande interdite qui sépare la bande de valence de la bande de conduction. Pour certains éléments, tels que le germanium et le silicium, qui sont tétravalents, cette bande interdite est suffisamment étroite pour que, lorsque la température augmente, des électrons acquièrent assez d'énergie pour passer de la bande de valence à la bande de conduction, laissant un trou dans la bande de valence. Les électrons qui sont passés dans la bande de conduction et les trous dans la bande de valence peuvent se déplacer sous

l'effet d'un champ électrique: l'isolant est devenu faiblement conducteur: c'est un semi-conducteur. On comprend pourquoi la résistivité d'un tel matériau diminue lorsque la température augmente. Ils ont un coefficient de température négatif.

Comme nous l'avons mentionné à la section 2.6.2, on peut augmenter la conductivité en remplaçant par exemple une faible proportion d'atomes tétravalents du semi-conducteur par des atomes d'arsenic, qui ont un électron de valence en plus. À température ambiante, l'énergie de cet électron supplémentaire est suffisante pour lui permettre d'accéder à la bande de conduction. Cette opération, appelée «dopage» du semi-conducteur, permet d'augmenter sa conductivité de manière contrôlée en dosant la concentration d'atomes dopants. On peut également doper le semi-conducteur avec des atomes trivalents, tels que le bore. Dans ce cas, l'électron manquant laisse un «trou» dans la bande de valence. Ces trous se comportent comme des charges positives libres et contribuent ainsi à augmenter la conductivité du matériau. Dans le premier cas, on parle de *dopage n*, vu qu'on a apporté des porteurs de charge négative, dans le second cas de *dopage p*, vu que les trous représentent une charge positive.

Résumé du chapitre

L'énergie est la grandeur physique qui participe à tous les processus et, par le fait même, elle est celle qui permet le couplage de processus auxquels participent des grandeurs extensives de nature différente.

L'énergie peut être accumulée dans les systèmes, elle peut circuler de l'un à l'autre, c'est donc une grandeur extensive dont les variations sont décrites par une équation de bilan: $\dot{E} = I_{E1} + I_{E2} + \dots$. Elle a une particularité importante: elle n'apparaît jamais seule, mais toujours en compagnie d'une autre grandeur extensive. Ainsi, lorsqu'elle s'écoule, elle le fait, transportée par le flux d'une autre grandeur extensive telle qu'un courant de fluide ou un courant électrique. C'est de cette particularité que découle la distinction entre les «formes» d'énergie; ces formes ne distinguent pas entre elles des sortes différentes d'énergie, mais par l'intermédiaire de quelle grandeur physique elle a été transportée.

Lorsqu'une telle grandeur extensive circule spontanément entre deux niveaux de son potentiel associé, elle libère de l'énergie. On appelle puissance du processus le taux de libération d'énergie. La puissance produite par la chute d'une grandeur X entre deux niveaux de son potentiel est égale à $\mathcal{P}_X = -\Delta\varphi_X I_X$, ce qui implique que la puissance d'un processus spontané est positive. Lorsqu'une grandeur Y est contrainte à franchir une différence de potentiel «en remontant la pente», l'énergie est liée au flux de la grandeur Y ; la puissance de ce processus contraint se calcule de la même manière, elle est donc négative. Lors du couplage de processus faisant intervenir des grandeurs de nature différente, l'énergie libérée par la chute de la grandeur X rend possible le processus contraint auquel participe la grandeur Y . Ces phénomènes de libération et de liaison d'énergie se déroulent à l'intérieur des systèmes.

Lorsque l'énergie circule entre les systèmes, elle est toujours transportée par le flux d'une grandeur extensive, elle ne circule jamais seule. Le flux d'énergie est proportionnel au flux de la grandeur extensive transporteuse et à la valeur du potentiel qui lui est associé: $I_{E,X} = \varphi_X I_X$. Notons que les flux d'énergie ont des valeurs relatives, puisqu'ils dépendent du choix du niveau zéro du potentiel (à l'exception, pour l'instant, de l'hydraulique parce que la pression P est une grandeur absolue).

La valeur de l'énergie accumulée dans un système en même temps que la grandeur extensive X qui l'y a amenée est proportionnelle au carré de la quantité de la grandeur accumulée et à l'inverse de la capacité (si celle-ci est constante): $\Delta E = 1/2 \Delta X^2 / C_X$.

Si l'on utilise le potentiel pour caractériser le processus, l'énergie est alors proportionnelle à la capacité et au carré de la différence de potentiel: $\Delta E = 1/2 C_X \cdot \Delta\phi_X^2$. Dans tous les cas, l'énergie réside dans le champ gravitationnel ou électrique. Nous verrons plus loin qu'elle peut être accumulée ailleurs que dans un champ.

Questions

1. Comment doit être conçue une expérience de chauffage d'eau pour assurer que le processus qui entraîne le chauffage donne toujours le même résultat? Pourquoi le chauffage de l'eau avec un thermoplongeur est-il une expérience simple pour introduire une mesure de la puissance électrique?
2. Quel est le diagramme de processus d'une batterie? Pourquoi la batterie doit-elle être idéale si vous souhaitez déterminer l'énergie libérée à partir des mesures des grandeurs électriques (tension et intensité du courant électrique)?

Exercices

1. Estimez la puissance des chutes du Niagara.
2. Trois lampes identiques sont montées dans un circuit (figure 3.44). Que est le rapport des puissances de la lampe L1 et de la lampe L2?

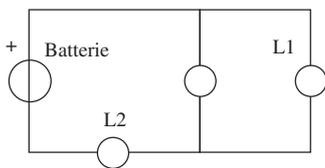


FIGURE 3.44 Exercice 2

3. Un fil de longueur totale L est connecté à une certaine tension. Il est constitué d'une partie ayant une résistivité ρ_1 une longueur L_1 et une partie de résistivité ρ_2 et de longueur L_2 . Les deux parties ont la même section. Quel doit être le rapport des longueurs pour que la puissance électrique soit la même pour les deux parties?
4. Un condensateur déchargé est connecté à une batterie et une résistance. (a) Esquissez le diagramme de processus (pour les porteurs et les flux d'énergie) pour les trois éléments du circuit. (b) Expliquez comment déterminer combien d'énergie chaque élément a absorbée ou émise au total.

Problèmes

1. Une expérience doit démontrer que le produit de la tension et du courant électrique est égale à la puissance électrique. Vous disposez d'un récipient que vous pouvez isoler thermiquement, d'un thermoplongeur, d'un voltmètre et d'un ampèremètre, ainsi que d'un thermomètre et d'un chronomètre, et de l'eau à profusion. Vous ne savez rien sur le comportement thermique de l'eau. Vous ne savez pas, par exemple, si la température de l'eau croît linéairement avec la quantité d'énergie ajoutée, indépendamment de la température à laquelle se déroule le processus. Comment concevez-vous l'expérience?

2. Comparaison de la surface requise pour une installation hydroélectrique et une installation solaire. Données relatives à l'installation hydroélectrique: la hauteur moyenne du bassin (à parois verticales) est de 200 m au-dessus des turbines. L'eau soutirée en une année correspond à une baisse de niveau de 30 m. Le rendement de l'installation est de 85%. Données relatives à l'installation photovoltaïque: en Suisse, le rayonnement moyen sur une surface horizontale (altitude solaire, jour, nuit et mauvais temps pris en compte) est 1/10 de la constante solaire de 1360 W m^{-2} . Le rendement de l'installation est de 9%. De combien l'aire de la surface de l'installation solaire doit-elle être plus grande ou plus petite que celle du bassin d'accumulation si toutes deux ont la même puissance moyenne calculée sur l'année.
3. Un morceau de fil qui a une résistance de 10Ω à une température de 20°C est connecté à des tensions variables. On mesure le courant (voir tableau). Le coefficient de température de la résistance est 10^{-2} K^{-1} . Déterminez comment la puissance électrique dans le fil dépend de la différence de température par rapport à 20°C .

TABLEAU 3.7 Problème 3.

U / V	44	78	110
I_Q / A	2.24	2.58	2.74

4. Un moteur diesel ayant un rendement de 40% entraîne un générateur de rendement égal à 85%. Il consomme 20 L de carburant par heure. Un litre libère une énergie équivalente à 40 MJ. (a) Le générateur délivre une tension de 380 V. Que vaut l'intensité du courant? (b) Que valent les flux d'énergie qui refroidissent le moteur et le générateur?
5. Un panneau solaire possède la caractéristique courant-tension de la figure 3.45. La tension à vide est de 20 V, le courant de court-circuit de 3.0 A. Nous approximations la caractéristique par la fonction $I(U) = a - b \cdot U^n$, avec $n = 8$. (a) Déterminez les coefficients a et b . (b) Quelle devrait être la valeur de la résistance de charge pour que le système travaille au maximum de sa puissance?

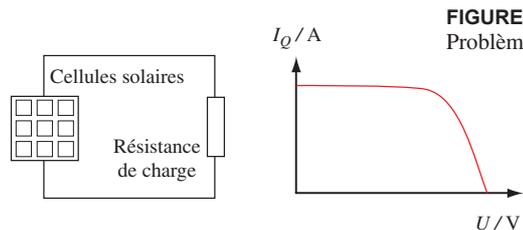


FIGURE 3.45 Problème 5

6. On veut remplir un lac artificiel de grande surface et de faible profondeur au moyen d'une conduite horizontale de 10 km de longueur. Initialement, le lac est vide, et son contenu final doit être de 10^5 m^3 d'eau. La résistance de la conduite est de type ohmique (flux volumique proportionnel à la différence de pression), et la chute de pression linéaire est de 100 Pa m^{-1} pour un débit de $1.0 \text{ m}^3/\text{s}$. Pendant le remplissage du bassin, l'eau s'évapore à un rythme constant de $0.1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. (a) De combien d'énergie aura-t-on besoin pour remplir le lac si le

débit constant est de $0.50 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$? (b) Quelle valeur devrait-on donner à ce débit volumique (constant) pour que l'énergie nécessaire au remplissage soit minimale?

7. On doit pomper de l'huile d'olive à travers une conduite verticale de 20 m de longueur. La viscosité de l'huile d'olive est de $0.081 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, sa masse volumique de 910 kg m^{-3} . La conduite a un diamètre de 5.0 cm. Le flux volumique souhaité est de 10 L s^{-1} . L'écoulement obéit à la loi de HAGEN-POISEUILLE. (a) Quelle doit être la puissance minimale de la pompe? (b) Quelle différence de pression la pompe doit-elle fournir?
8. Un réservoir cylindrique de 20 cm de diamètre est rempli de 31.4 L d'une huile ayant une viscosité de $0.20 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et une masse volumique de 800 kg m^{-3} . L'huile s'écoule du fond à travers une conduite horizontale de 1.0 m de longueur et de 5.0 mm de diamètre (figure 1.31). (a) Que vaut le flux volumique initial? (b) Après combien de temps le niveau sera-t-il tombé à 0.40 m? (c) Que vaut, à cet instant, le taux de libération d'énergie dû au frottement interne du fluide?
9. Une cuve est remplie par le bas au moyen d'une pompe à travers une longue conduite horizontale (figure 3.46). La pompe génère une différence de pression constante. (a) Jusqu'à quel niveau peut-on remplir la cuve? (b) Esquissez le diagramme de processus pour l'énergie et ses porteurs. (c) Esquissez le diagramme du flux volumique, des différences de pression et des flux d'énergie pour la pompe, la conduite et la cuve.

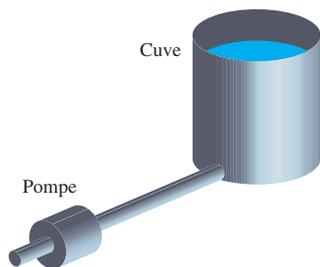


FIGURE 3.46
Problème 9

10. Une cuve de section égale à 2.0 m^2 est remplie par le bas d'huile d'olive à travers une conduite horizontale en 1000 s (figure 3.46). Le niveau final doit être de 5.0 m. La conduite a une longueur de 20 m et un diamètre de 6.0 cm. Le flux volumique est maintenu constant. La masse volumique de l'huile est de 910 kg m^{-3} , sa viscosité de $0.081 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. (a) Représentez graphiquement la puissance de la pompe en fonction du temps. (b) De combien d'énergie a-t-on besoin pour ce processus? (c) Combien d'énergie a-t-on stockée dans la cuve?
11. Un condensateur chargé (capacité C , tension U_0) est connecté à travers une résistance R à un condensateur identique, déchargé. Le courant qui s'établit après fermeture de l'interrupteur décroît de manière exponentielle. (a) Que vaut l'intensité initiale du courant? (b) Appliquez le bilan d'énergie à chacun des condensateurs. Quelle partie de l'énergie initiale est encore stockée à la fin dans les deux condensateurs?

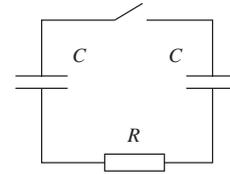


FIGURE 3.47
Problème 11

12. Un condensateur déchargé et une résistance de 20Ω sont connectés en série à une batterie. On mesure l'évolution dans le temps de la tension du condensateur (figure 3.48). (a) Que vaut la puissance électrique dans la résistance à $t = 0.030 \text{ s}$? (b) Quel est, au même instant, le taux de variation de l'énergie du condensateur? (c) Utilisez l'équation de bilan de l'énergie pour déterminer le taux de libération d'énergie de la batterie.

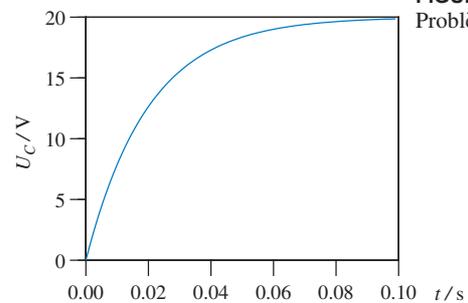


FIGURE 3.48
Problème 12

13. On remplit de mercure un tube en U de diamètre intérieur égal à 1.5 cm. La longueur totale de la colonne de fluide est de 0.60 m. Initialement, le niveau du fluide dans la branche gauche dépasse de 30 cm celui de la branche droite. À cet instant, le fluide est au repos. (a) Déterminez l'énergie stockée dans cette capacité hydraulique. (b) À quel taux le flux volumique augmente-t-il à l'instant initial? (c) Que vaut alors le taux de variation de l'énergie de la capacité hydraulique? (d) Que vaut le taux de variation de l'énergie du fluide en mouvement? (e) Négligez les frottements. Que vaut le flux volumique à l'instant où les niveaux sont égaux dans les deux branches?
14. Un thermoplongeur dans une bouilloire est connecté à 220 V. À 20°C , sa résistance électrique vaut 160Ω . Elle augmente linéairement avec la température, et le coefficient de température de la résistance vaut $4.0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Le transfert d'énergie du thermoplongeur à l'eau est déterminé par le coefficient de transfert de la chaleur de $100 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. (Le flux d'énergie du thermoplongeur à l'eau est proportionnel à la différence de température entre l'eau et le thermoplongeur. Le flux d'énergie est le produit du coefficient de transfert de la chaleur, de l'aire de la surface, et de la différence de température entre le plongeur et l'eau.) L'aire de la surface du thermoplongeur est de 0.020 m^2 . Que vaut le flux d'énergie vers l'eau?

15. Un condensateur de capacité égale à $2.0 \mu\text{F}$ est connecté en série avec une résistance et une batterie de 100 V . Après avoir été chargé, il est déconnecté de la batterie et déchargé dans un second circuit électrique ayant une résistance de $5.0 \text{ k}\Omega$. Durant le processus de décharge, l'intensité du courant électrique varie selon l'expression $I(t) = I_o \exp(-t/RC)$.
- (a) Déterminez la tension sur le condensateur en fonction du temps. (b) Esquissez qualitativement chaque flux d'énergie par rapport au condensateur et à la résistance en fonction du temps (combien de flux d'énergie y a-t-il?) (c) Déterminez combien d'énergie était stockée dans le condensateur avant qu'on le décharge.

CHAPITRE 4

PHÉNOMÈNES INDUCTIFS ET OSCILLATIONS

Beaucoup d'écoulements dans la nature manifestent une sorte d'inertie: leurs variations entraînent des effets observables. En général, il n'est pas possible de faire démarrer ou d'arrêter instantanément des écoulements; il leur faut du temps pour varier.

Ce comportement est appelé induction. Les phénomènes inductifs abondent lors d'écoulements de fluides, d'électricité et de quantité de mouvement. Dans ce chapitre, nous étudierons ses effets lorsqu'elle se manifeste lors de l'écoulement de fluide ou d'électricité. Tout d'abord, nous verrons comment l'adjonction de l'induction permet de construire des modèles plus réalistes des processus dynamiques. Après l'avoir énoncée, nous utiliserons la loi d'induction lors de l'élaboration de modèles de circuits incluant des éléments résistifs et inductifs. Puis, nous jetterons un regard sur deux éléments inductifs en hydraulique et en électricité. Finalement, nous étudierons les oscillations qui apparaissent dans les systèmes contenant des capacités et des inductances.

4.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, nous allons mettre en évidence des comportements nouveaux qui apparaissent lors de l'écoulement de grandeurs extensives telles que les liquides ou l'électricité.

4.1.1 Démarrage d'un courant d'eau

Lors de l'ouverture d'un robinet, par exemple lors de la vidange d'un réservoir, le courant d'eau n'atteint pas instantanément sa valeur stationnaire. On peut l'observer en filmant l'établissement d'un courant de liquide à la sortie d'une conduite horizontale. La portée du jet augmente progressivement puis se stabilise finalement (fig. 4.1).

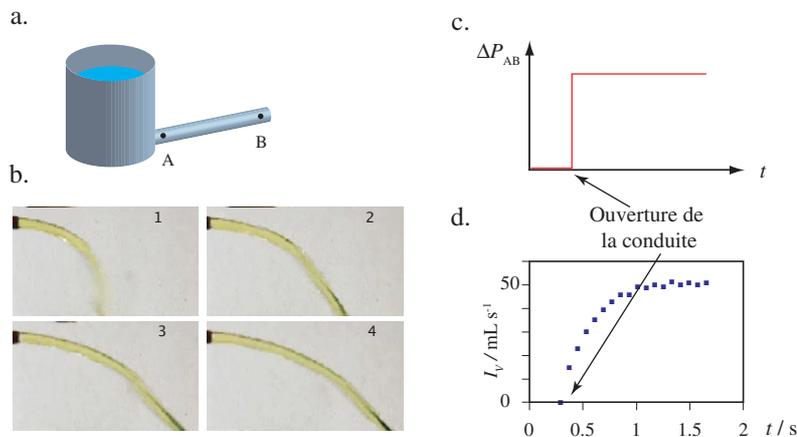


FIGURE 4.1 Établissement d'un courant d'eau: (a) dispositif expérimental; (b) instantanés extraits de la séquence vidéo; (c) variation de la pression entre les extrémités de la conduite; (d) variation de l'intensité du flux (en unités arbitraires obtenues à partir de la portée du jet).

Interprétation. L'eau contenue dans le tuyau possède une certaine inertie, ce qui l'empêche de se mettre en mouvement instantanément; elle doit être accélérée. Cette inertie des courants de fluide est à l'origine du phénomène d'induction.

4.1.2 Coup de bélier

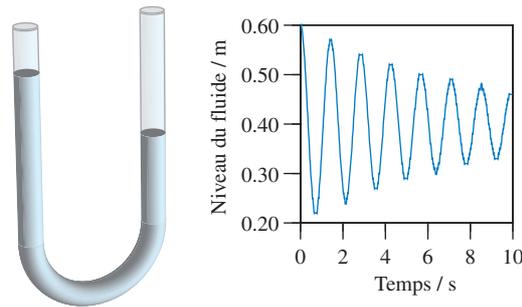
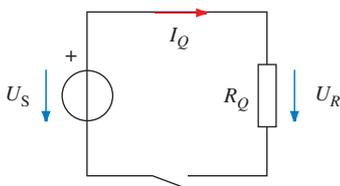
Si l'on ferme brusquement un robinet, il peut arriver que l'on entende un bruit à caractère explosif qui peut se répercuter dans les conduites.

Interprétation. Lors de la fermeture brusque du robinet, l'eau entraînée par son inertie a tendance à poursuivre son mouvement, ce qui engendre une forte augmentation de la pression en amont de la vanne. C'est cette surpression qui, en se libérant, provoque l'onde de choc à l'origine du bruit explosif. À nouveau, c'est l'inertie du fluide qui provoque l'apparition de ce phénomène de type inductif.

4.1.3 Oscillations entre deux réservoirs communicants

Il peut arriver que l'établissement de l'équilibre entre deux vases communicants ne se fasse pas comme nous l'avons observé au chapitre 1 (section 1.1.1), mais que le liquide oscille entre les deux réservoirs un certain nombre de fois avant de s'immobiliser. C'est le cas lorsque l'on déséquilibre une colonne de mercure contenue dans une tube en U (fig. 4.2).

FIGURE 4.2 Oscillation d'une colonne de mercure dans un tube en U.



Interprétation. Lorsque le fluide qui s'est mis en mouvement à cause de la différence de niveau atteint la position d'équilibre, il poursuit son mouvement à cause de son inertie; il ne peut pas être stoppé instantanément. Nous avons ici une nouvelle confirmation que l'inertie entraîne l'apparition du phénomène d'induction.

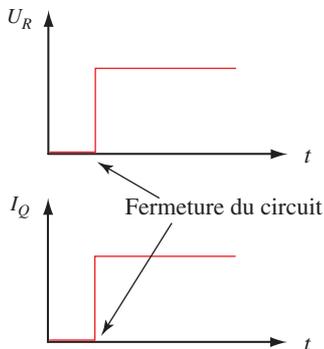


FIGURE 4.3 Lorsque le circuit est fermé, l'intensité du courant saute instantanément à la valeur calculée à partir de la loi de résistance.

4.2 DÉMARRAGE, ARRÊT ET OSCILLATIONS DE COURANTS

Jusqu'ici, nous avons tenu compte de deux phénomènes dans notre description de la nature: si des fluides ou de l'électricité sont stockés dans des capacités, la différence de potentiel augmente sur ces dispositifs; et si ces grandeurs s'écoulent à travers des résistances, le potentiel associé diminue dans le sens de l'écoulement. Comme nous allons le voir, les modèles de processus dynamiques qui n'utilisent que des éléments capacitifs et résistifs ne rendent pas compte des observations faites à la section 4.1.

4.2.1 Courants dans des systèmes RC et comportement réel

Considérons un circuit électrique simple, tel que celui de la figure 4.3, consistant en une source, une résistance et un interrupteur. Lors de la fermeture du circuit, un courant se met à circuler; selon la loi de résistance énoncée au chapitre 2, son intensité est

$$I_Q(t) = \frac{U_R(t)}{R_Q} \quad (4.1)$$

où $U_R(t)$ est la tension sur la résistance. Si cette grandeur est constante, le courant l'est aussi. Notons que, selon ce modèle, le courant atteint la valeur calculée à partir de l'équation (4.1) aussitôt que le circuit est fermé: I_Q suit U_R instantanément (fig. 4.3).

Comme second exemple, étudions le modèle de deux réservoirs communicants décrits au moyen des lois de capacité et de résistance. La pression au fond d'un réservoir est déterminée par le niveau du fluide, et la différence de pression entre la sortie de l'un des réservoirs à l'entrée de l'autre est responsable de l'intensité du courant de fluide à travers la conduite de raccordement, selon une relation analogue à l'équation (4.1).

Dans les modèles du chapitre 1, le comportement du système est décrit par les niveaux des fluides en fonction du temps, comme dans la figure 4.4. Au moment de l'ouverture de la vanne, le courant de fluide prend sa valeur maximale, pour décroître ensuite et atteindre une valeur nulle au moment où les deux niveaux s'équilibrent. Cette condition rend impossible l'apparition d'oscillations du fluide entre les deux réservoirs.

Le saut instantané d'un courant à une autre valeur requise par la loi de résistance dans l'équation (4.1) est certainement irréaliste, comme le montre l'observation de la section 4.1.1, illustrée par la figure 4.1d. En outre, nous savons que le fluide peut osciller entre les deux réservoirs, ce que nous a révélé l'expérience de la section 4.1.3. Voilà pourquoi des modèles construits uniquement à partir de réservoirs et de résistances (systèmes RC) ne peuvent pas expliquer complètement ce que nous observons dans la nature. Nous devons apprendre à décrire les conditions qui entraînent des variations de l'intensité de courants, ou comment les variations de courants induisent d'autres phénomènes.

4.2.2 Induction et force d'entraînement inductive

Examinons l'écoulement d'un liquide émergeant d'une cuve à travers une conduite horizontale, comme dans la figure 4.5 et dans l'expérience de la section 4.1.1. Si la sortie de la conduite (point B) est bouchée, la pression sera la même partout dans la conduite, et il n'y aura aucun écoulement. Si nous retirons le bouchon, la pression du fluide en B devient égale à la pression ambiante, provoquant l'apparition d'une différence de pression entre A et B. Nous savons que le courant mettra un certain temps pour croître de zéro à sa valeur maximale, pour se mettre ensuite à décroître, vu que la pression en A diminue avec le niveau de fluide.

Que le courant ait besoin d'un certain temps pour passer de zéro à sa valeur maximale est un fait inexplicable en termes de capacité et de résistance. Notons que le courant est nul à l'instant initial, alors même que la différence de pression Δp_{AB} n'est pas nulle. Cette différence de pression ne peut donc pas servir à entretenir un courant selon la loi de résistance $I_V = -\Delta P_R/R_V$. En d'autres termes, $\Delta P_R \neq \Delta P_{AB}$.

Bien au contraire, au tout début, $I_V = 0$, et donc $\Delta P_R = 0$. Cela signifie que toute la différence de pression ΔP_{AB} doit être à l'origine d'un nouveau processus, la croissance du flux volumique. Vu que la variation du courant est liée à ce que nous avons appelé un comportement inductif, nous appellerons *différence de pression inductive* ΔP_L la différence de pression responsable de la croissance du courant. Au premier instant, lorsque le liquide commence à s'écouler, on a $\Delta P_L = \Delta P_{AB}$.

Le phénomène d'induction est mesuré par la vitesse à laquelle le flux évolue, c'est-à-dire en termes de taux de variation du flux dI_V/dt . La valeur initiale du taux de variation du courant peut être représentée par la pente de la courbe I_V-t à l'instant où elle

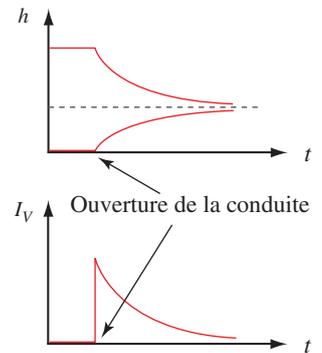


FIGURE 4.4 Lorsque l'on ouvre la vanne de la conduite reliant deux cuves de fluide, le courant de fluide saute instantanément à sa valeur initiale.

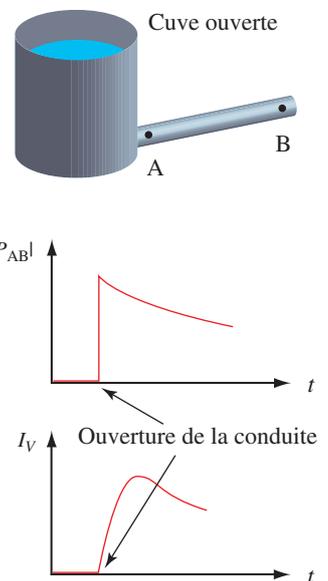


FIGURE 4.5 Lors de la vidange d'un fluide à travers une longue conduite horizontale, le courant ne peut pas atteindre instantanément la valeur calculée selon la loi de résistance. Il croît graduellement.

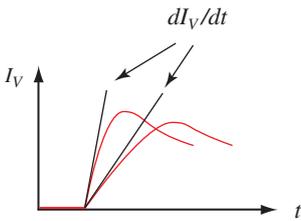


FIGURE 4.6 Pour une différence de pression inductive donnée, le courant croîtra d’autant plus rapidement que le quantité de fluide dans la conduite est faible.

commence à croître à partir de $I_V = 0$ (fig. 4.6). Pour une différence de pression donnée, le courant croîtra plus ou moins rapidement en fonction des propriétés physiques du système. Si, par exemple, la quantité de fluide à mettre en mouvement est faible, la différence de pression Δp_L entraînera une croissance rapide de l’intensité I_V .

Comme le courant n’est plus nul, il doit également y avoir une différence de pression associée à l’écoulement à travers l’élément résistif. En d’autres termes, la différence de pression ΔP_{AB} n’est plus uniquement responsable de la croissance du flux. Et c’est exactement ce que nous observons : la pente de la courbe I_V-t décroît avec le temps. Nous pouvons nous attendre à ce que le courant croisse tant que son intensité est inférieure à $\Delta P_{AB}/R_V$.

Nous voyons donc que, dans une conduite traversée par un courant d’intensité variable, la différence de pression entre l’entrée et la sortie se répartit sur une contribution inductive qui est responsable de la variation de l’intensité et une contribution résistive qui sert à entretenir le courant. La pression résistive diminue toujours dans le sens du courant. Par contre, la pression inductive diminue également dans le sens du courant lors d’une augmentation de l’intensité, alors qu’elle augmente dans le sens du courant lors d’une diminution de l’intensité, comme l’a révélé l’observation de la section 4.1.2 (coup de bélier).

La cause des effets inductifs dans les circuits électriques est moins évidente. Elle est liée au champ magnétique engendré par la circulation du courant électrique. Si le courant varie, le champ magnétique en fait autant. La croissance ou la décroissance du champ magnétique entraîne l’apparition d’une tension induite U_L respectivement positive ou négative (sections 4.3 et 4.5).

1. Pourquoi la différence de pression dans le sens de l’écoulement n’est-elle pas due à la résistance du fluide lorsque l’écoulement vient de commencer?
2. Le circuit électrique de la figure 4.3 vient d’être fermé. Pourquoi la tension U_R doit-elle être égale à zéro, et pourquoi cela pose-t-il problème?
3. Pourquoi un modèle RC d’un tube en U rempli de mercure ne prévoit-il pas les oscillations du fluide?
4. Une pompe fournit une différence de pression constante ΔP_{AB} le long d’une conduite contenant un fluide. Initialement, le fluide est immobile. Pourquoi pouvons-nous prévoir que l’intensité du flux I_V croîtra jusqu’à atteindre la valeur $\Delta P_{AB}/R_V$?
5. Une différence de pression inductive *négative* est associée avec une augmentation de l’intensité du courant de fluide. Pourquoi une tension *positive* est-elle responsable d’une augmentation de l’intensité du courant électrique?



1. Si l’écoulement est juste en train de démarrer, le flux volumique est nul. De ce fait, la différence de pression résistive $\Delta P_R = -R_V I_V$ doit également être nulle.
2. Le courant électrique est encore nul, ce qui signifie que $U_R = R_Q I_Q$ est aussi égal à zéro. En vertu de la loi des mailles, la somme de toutes les tensions dans le circuit doit être égale à zéro. Sachant que $U_B \neq 0$, et $U_R = 0$, nous sommes confrontés à une contradiction que nous ne pouvons éliminer qu’en admettant la présence dans le circuit d’une tension supplémentaire qui est responsable du taux de variation du courant.



3. Dans un système RC, le courant devient nul dès que les niveaux de fluide sont les mêmes. Vu que cela signifie également que la différence de pression est nulle, le fluide ne peut plus continuer à circuler.
4. Lorsque le courant a atteint cette intensité, la différence de pression résistive est égale à la différence de pression ΔP_{AB} . C'est pourquoi il n'y a plus de différence de pression disponible pour accélérer le fluide.
5. Une tension est définie en tant que différence de potentiel électrique *négative*. Nous avons donc dans ce cas une différence de potentiel électrique *négative* associée à un courant d'intensité *croissante*.

4.3 LOI D'INDUCTION

Nous avons découvert que les variations de l'intensité de courants sont liées à des différences de potentiel et voulons étudier la nature précise de cette relation. Nous commencerons par des circuits hydrauliques, puis nous utiliserons l'analogie entre l'hydraulique et l'électricité pour formuler également la loi d'induction pour les processus électriques.

4.3.1 Loi d'induction en hydraulique

L'écoulement de fluides dans des conduites droites montre que, lorsqu'un courant commence à circuler, le taux de variation du flux I_V dépend de la différence de pression disponible pour accélérer le fluide, ce qui correspond à la différence de pression ΔP_{AB} . Les expériences montrent que la pente initiale de la courbe I_V-t est proportionnelle à la différence de pression sur la conduite. Le taux de variation du flux I_V et la différence de pression inductive sont en fait toujours proportionnels, et pas seulement lorsque le courant démarre. Nous devons simplement noter que la différence de pression inductive n'est plus égale à ΔP_{AB} dès qu'apparaissent les frottements dans le fluide.

L'induction hydraulique est la conséquence de l'inertie du fluide qui s'écoule à travers une conduite. Il devrait donc être possible de dériver une relation entre le taux de variation de courants et les différences de pression inductive sur la base des lois de la mécanique, ce qui sera fait dans l'exemple 8.1 et à la section 11.9.3. Pour l'instant, nous considérons les observations comme l'expression d'une loi hydraulique.

Loi d'induction: La différence de pression inductive ΔP_L et le taux de variation du flux volumique dI_V/dt sont proportionnels. La constante de proportionnalité est l'inductance L_V du système (fluide dans une conduite):

$$\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V \quad (4.2)$$

Un courant croissant dans le temps est associé à une différence de pression négative, un courant décroissant entraîne une différence de pression positive (fig. 4.7). L'inductance L_V se mesure en $\text{Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$.

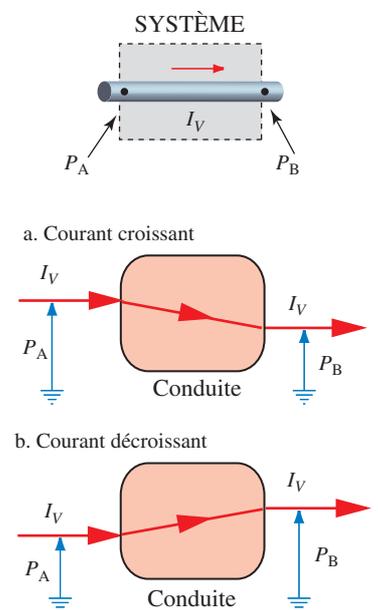


FIGURE 4.7 La croissance et la décroissance de courants sont couplées à des différences de pression inductives respectivement négatives et positives.

EXEMPLE 4.1. Estimation d'une inductance hydraulique.

De l'eau est immobile dans une conduite. À l'ouverture du robinet, la différence de pression sur la conduite est de 2.0 bar. Le taux de variation initial du courant est de 2.0 L s⁻². (a) Que vaut l'inductance? (b) Quel serait le taux de variation si la conduite était deux fois plus longue?

SOLUTION: (a) L'inductance est calculée à partir de l'équation (4.2):

$$L_V = -\frac{\Delta P_L}{\dot{I}_V} = -\frac{-2.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{2.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} = 10^8 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$$

Cette valeur est assez courante pour des conduites de fluides. Un oléoduc de plusieurs centaines de kilomètres de longueur a une inductance semblable.

(b) Si tous les autres facteurs sont maintenus constants, le doublement de la longueur de la conduite double la quantité d'eau à accélérer. Nous nous attendons donc à voir augmenter l'inductance d'un facteur 2. Le taux de variation initial du flux deviendrait donc égal à 1.0 L s⁻². ■

4.3.2 Différences de pression dans les circuits hydrauliques

Il est très important de bien comprendre la nature d'une différence de pression sur une conduite contenant un fluide (fig. 4.8). Comme nous venons de le voir, la différence de pression de A à B fournie, par exemple, par une pompe, peut être mise en relation avec plusieurs processus. La pression peut diminuer dans le sens du courant à cause des frottements dans le fluide, mais elle peut tout aussi bien augmenter ou diminuer de A à B parce que le courant varie dans le temps. Nous connaissons deux extrêmes : soit le courant est stationnaire et toute la différence de pression est liée aux frottements, soit le courant est nul à l'instant considéré, et toute la différence de pression est uniquement due à la variation du courant. Dans ces deux cas extrêmes, nous avons respectivement $\Delta P_{AB} = \Delta P_R$, ou $\Delta P_{AB} = \Delta P_L$. En général, la différence de pression est due simultanément aux deux phénomènes, ce qui signifie qu'elle est répartie sur les deux processus :

$$\Delta P_{AB} = \Delta P_L + \Delta P_R \tag{4.3}$$

Cela peut être extrêmement bien visualisé dans les circuits électriques (fig. 4.8) où les inductances et les résistances sont des éléments séparés, montés en série (section 4.3.3). Nous pouvons imaginer que la pression diminue (ou augmente) d'abord à cause du processus inductif, puis à cause des frottements. La somme des différences de pression inductive et résistive est égale à la différence de pression de A à B.

Souvenons-nous que ΔP_R ne peut être que négatif (dans le sens de l'écoulement), alors que ΔP_L peut, comme le montre l'équation (4.3), prendre l'un ou l'autre signe, ce qui veut dire que ΔP_{AB} peut être négatif ou positif. Une valeur positive de ΔP_L signifie que le flux de fluide décroît dans le temps.

EXEMPLE 4.2. Différences de pression résistive et inductive.

De l'eau s'écoule d'une cuve à travers une conduite horizontale comme dans la figure 4.5. La conduite a une longueur de 1.75 m et un rayon de 2.0 mm. Le niveau initial de l'eau dans la cuve est de 0.20 m. Les graphiques de la fig. 4.9 montrent le comportement modélisé du système avec et sans prise en compte de l'induction. L'écoulement est toujours laminaire. (a) Déterminez l'inductance et la résistance du fluide dans la conduite. (b) Calculez les différences de pression inductive et résistive pour $t = 20$ s. (c) Déterminez la fonction $I_V(t)$ après un temps suffisamment

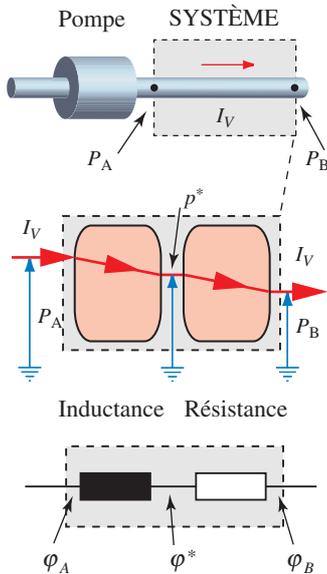


FIGURE 4.8 Le fluide dans une conduite peut être sujet à de la résistance et de l'inductance. Alors que les phénomènes partagent tout l'espace de A à B, nous les modélisons de manière séquentielle. Pris ensemble, ΔP_L et ΔP_R déterminent ΔP_{AB} .

long ($t > 10$ s), et calculez la section de la cuve. (d) Déterminez la différence de pression totale sur la conduite à l'instant $t = 20$ s, et évaluez le volume d'eau contenu dans la cuve à cet instant.

SOLUTION: (a) Comme dans l'exemple 4.1, l'inductance peut être évaluée si nous connaissons la différence de pression inductive et le taux de variation du flux volumique. On peut obtenir ce dernier graphiquement à partir de la pente de la courbe à l'instant $t = 0$ s (fig. 4.9b). Une détermination graphique donne une valeur de $6 \cdot 10^{-6} / 0.45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. La différence de pression inductive à l'instant $t = 0$ s est égale à la différence de pression sur la colonne de liquide dans la cuve :

$$\Delta P_L(t=0) = -\rho gh(t=0) = -1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9.81 \text{ N kg}^{-1} \cdot 0.2 \text{ m} = -1.96 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Il en résulte pour l'inductance

$$L_V = -\frac{\Delta P_L}{\dot{I}_V} = -\frac{-1962 \text{ Pa}}{1.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}^2$$

La résistance pour l'écoulement laminaire est donnée par

$$R_V = \frac{8\eta l}{\pi r^4} = \frac{8 \cdot 0.0010 \text{ Pa s} \cdot 1.75 \text{ m}}{3.14 \cdot (0.0020 \text{ m})^4} = 2.79 \cdot 10^8 \text{ Pa s m}^{-3}$$

(b) Nous obtenons la différence de pression inductive en appliquant la loi d'induction, pour autant que nous connaissons le taux de variation du courant. Cette grandeur peut être estimée graphiquement à partir du premier graphique (fig. 4.9a), ce qui donne $dI_V/dt(t=20 \text{ s}) \approx -3.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} / 30 \text{ s} = -1.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Ainsi

$$\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V \approx -1.5 \cdot 10^8 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3} (-1.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}) = 18 \text{ Pa}$$

La différence de pression résistive est calculée sur la base de la loi de résistance

$$\Delta P_R = -R_V I_V = -2.79 \cdot 10^8 \text{ Pa s m}^{-3} \cdot 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = -1.00 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Nous pouvons lire sur le premier graphique (fig. 4.9a) l'intensité du courant à l'instant $t = 20$ s.

(c) Après la montée rapide du courant, la phase inductive est pratiquement terminée et les différences de pression inductives deviennent très petites. La fonction $I_V(t)$ est pratiquement identique à celle que l'on obtiendrait sans la prise en compte de l'induction. Pour cette raison, nous pouvons déterminer une approximation de $I_V(t)$ en calculant la solution de la vidange de la cuve qui ne prend en compte que la capacité et la résistance :

$$I_V(t) = I_{V0} \exp(-t/\tau_c) \quad , \quad \tau_c = R_V C_V \quad , \quad I_{V0} = -\Delta P_{AB}(0)/R_V$$

Nous avons $I_{V0} = 7.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Le courant décroîtra à $1/e$ de la valeur initiale en l'espace d'une constante de temps τ . L'examen du premier graphique (fig. 4.9a) montre que $\tau \approx 30$ s. Ce qui donne $C_V = \tau/R_V = 1.08 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$. À partir de là, nous pouvons calculer la section de la cuve

$$A = \rho g C_V = 1.05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

(d) La différence de pression totale est la somme des contributions inductive et résistive :

$$\Delta P_{AB} = \Delta P_L + \Delta P_R = 18 \text{ Pa} + (-1000 \text{ Pa}) = -982 \text{ Pa}$$

C'est pourquoi le niveau d'eau est de 0.10 m. Le volume d'eau peut être calculé au moyen de la capacité que nous obtenons à partir de la constante de temps $\tau = R_V C_V$; d'où, $C_V = \tau/R_V = 30/2.8 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1} = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$. Nous avons maintenant

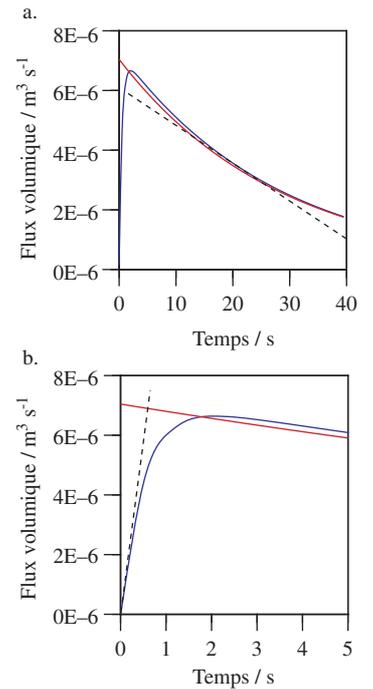


FIGURE 4.9 Graphiques représentant le flux volumique en fonction du temps dans un système hydraulique. La courbe qui commence à $7\text{E}-6$ unités a été calculée sans prise en compte de l'induction. La figure b est un agrandissement de la partie initiale du premier graphique.

$$V(20\text{ s}) = C_V \Delta P_C (20\text{ s}) = C_V (-\Delta P_{AB} (20\text{ s})) = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1} \cdot 980 \text{ Pa} = 1.06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Naturellement, nous pourrions déterminer la quantité d'eau qui s'est échappée de la cuve durant l'intervalle de temps allant de 0 s à 20 s (en évaluant l'aire entre la courbe I_V-t et l'axe t), et en déduire la valeur du volume initial.



4.3.3 Loi d'induction en électricité

L'électricité et l'hydraulique ont énormément de points communs. Les deux phénomènes sont décrits en termes de grandeurs extensives que nous imaginons en train de s'écouler et d'être stockées dans des systèmes. Les évolutions de la charge électrique et des quantités de fluides sont toutes deux décrites par une équation de bilan. Chacune de ces grandeurs est associée à un potentiel, et les différences de ces potentiels ont une somme nulle le long d'un circuit fermé. Les différences de potentiel liées aux processus sont responsables pour les flux résistifs, et dans les deux domaines nous avons introduit des lois de capacité et de résistance.

Loi d'induction. L'analogie se prolonge vers les phénomènes inductifs (tab. 4.1). Il est tout aussi impossible d'avoir des courants électriques que des écoulements hydrauliques qui sautent instantanément à des valeurs déterminées uniquement par les lois de résistance, et il existe des circuits électriques qui peuvent osciller. Ces phénomènes sont la conséquence de la combinaison d'éléments inductifs avec ceux que nous avons déjà utilisés dans la description des circuits électriques. Dans les éléments inductifs, le taux de variation du courant électrique est lié à une tension induite donnée par la loi d'induction :

Loi d'induction: La tension induite U_L et le taux de variation du courant électrique dI_Q/dt sont proportionnels. La constante de proportionnalité est l'inductance L_Q de l'élément :

$$U_L = L_Q \dot{I}_Q \tag{4.4}$$

Un courant croissant dans le temps est associé avec une tension induite positive, un courant décroissant avec une tension U_L négative. L'unité de mesure de l'inductance électrique est le henry (H), soit 1 V s A .

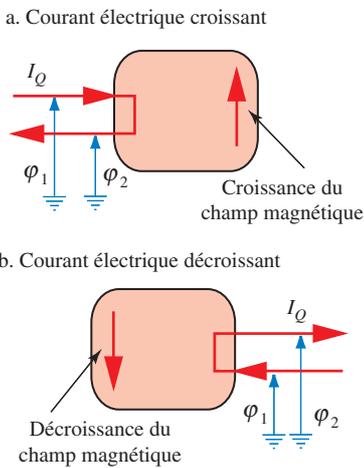


FIGURE 4.10 Phénomène d'induction : (a) si un courant électrique croît, il induit une différence de potentiel qui le fait s'écouler en descendant la pente, ce qui entraîne une croissance du champ magnétique ; (b) un courant décroissant est lié à un champ décroissant.

Champs magnétiques. La différence fondamentale entre l'induction électrique et hydraulique provient de l'origine du phénomène. Vu qu'ils ont une certaine inertie, les fluides ont besoin d'une différence de pression pour pouvoir varier leur débit. En revanche, l'induction électrique est due au fait qu'un champ magnétique est couplé au courant électrique. Les courants électriques produisent un champ magnétique dont l'intensité dépend de celle du courant. Si nous faisons croître un courant, le champ magnétique associé doit croître lui aussi. Le phénomène de la croissance du champ doit être causé par le courant électrique. L'électricité est la cause d'autres phénomènes lorsqu'elle circule en descendant ou en remontant la pente : c'est la source de la différence de potentiel associée aux processus inductifs (fig. 4.10). Le rôle du champ magnétique lors des phénomènes d'induction sera expliqué en détail au chapitre 14.

Le tableau 4.1 récapitule les lois constitutives des deux domaines étudiés jusqu'à présent, l'hydraulique et l'électricité. Il met en évidence le fait que les processus

fondamentaux, même s'ils n'ont pas toujours les mêmes causes, sont exprimés par les mêmes lois. Nous rencontrerons les mêmes similitudes aussi bien en thermodynamique qu'en mécanique.

TABEAU 4.1 Comparaison d'éléments hydrauliques et électriques.

	Capacités	Résistances	Inductances
Hydraulique	$\dot{V} = C_V \dot{P}$ $\Delta V = C_V \Delta P$	$\Delta P_R = -R_V I_V$	$\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V$
Électricité	$\dot{Q} = C_Q \dot{U}_C$ $Q = C_Q U_C$	$U_R = R_Q I_Q$	$U_L = L_Q \dot{I}_Q$

Tensions dans les circuits électriques. Tous les éléments utilisés dans des circuits électriques, tels que conducteurs, résistances, capacités, ont également des propriétés inductives. Cependant, leur inductance est normalement très faible, ce qui nous permet de les traiter comme n'ayant qu'une propriété. Pour obtenir de fortes inductances, on utilise différentes bobines de fil conducteur, telles qu'un solénoïde (section 4.5). Dans les diagrammes de circuit, les inductances sont représentées par des rectangles noirs (fig. 4.11).

Si un élément d'un circuit électrique possède à la fois une résistance et une inductance, la tension sur cet élément est la somme de la tension induite et de la tension résistive (fig. 4.11):

$$U_{AB} = U_L + U_R \quad (4.5)$$

Cette relation est analogue à celle que nous avons rencontrée dans le cas des circuits hydrauliques et qui est exprimée par l'équation (4.3).

Les phénomènes de transport (de volume dans les processus hydrauliques, de charge électrique dans les phénomènes électriques, de quantité de mouvement ou de moment cinétique lors du mouvement linéaire ou de rotation, d'entropie dans les processus thermiques) ne sont pas seulement soumis à un comportement résistif, mais également à une sorte d'inertie. Toute variation de l'intensité I_X du courant d'une grandeur extensive X est accompagnée de l'apparition d'une différence de potentiel $\Delta\phi_{L,X}$. Dans sa forme la plus simple, cette différence de potentiel est donnée par:

$$\Delta\phi_{L,X} = -L_X \dot{I}_X \quad (4.6)$$

Cette différence de potentiel inductive est proportionnelle au taux de variation de la grandeur X et à l'inductance L_X . Le signe négatif indique qu'une diminution du potentiel dans le sens du courant est associée à une croissance de l'intensité du courant.

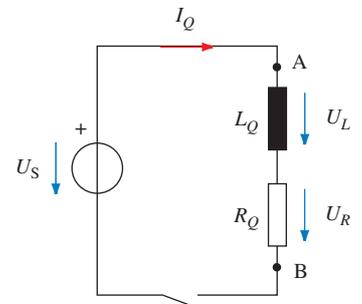


FIGURE 4.11 Représentation d'éléments inductifs et résistifs dans un diagramme de circuit électrique. Dans les modèles, les inductances et les résistances sont également représentées ainsi, même si dans les éléments réels, tels que de longs fils conducteurs bobinés, ces deux propriétés sont inséparables.

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de signe négatif dans la loi d'induction électrique dans l'équation (4.4) comme c'est le cas en hydraulique dans l'équation (4.2)?
2. Considérez un circuit électrique comme dans la figure 4.11 ou une conduite contenant un fluide comme dans la figure 4.8. Est-il possible d'avoir une tension négative ou une différence de pression positive de A à B?
3. On ferme l'interrupteur dans le circuit de la figure 4.11. Pourquoi le courant électrique atteint-il une valeur stationnaire? Comment la calcule-t-on?



1. Le loi d'induction électrique est formulée en termes de tension et non pas de différence de potentiel. C'est ce qui justifie le changement de signe.
2. Cette condition peut survenir si un courant diminue très rapidement, donnant naissance à une forte tension induite négative ou à une forte différence de pression induite positive.
3. Le courant augmente dans le temps, ce qui entraîne une augmentation de la tension sur la résistance. Lorsque $U_R = -U_B$, nous avons $U_L = 0$ V, et le courant ne peut plus continuer à augmenter. La valeur de l'intensité stationnaire est déterminée au moyen de la loi de résistance, en prenant $U_R = -U_B$.



4.4 MODÈLES RL DE CIRCUITS HYDRAULIQUES ET ÉLECTRIQUES

Les systèmes les plus simples qui incluent des éléments inductifs sont ceux qui sont représentés dans les figures 4.8 et 4.11. Une pompe ou une batterie sont utilisées pour établir respectivement une différence de pression constante et une tension constante de A à B. Quels sont les modèles de dynamique des systèmes et le comportement du système?

4.4.1 Démarrage et arrêt d'un courant dans un circuit RL

Parlons tout d'abord du comportement que nous nous attendons à observer, qui devrait être le même aussi bien lors de processus hydrauliques que dans les circuits électriques. Tout de suite après la fermeture des circuits, la différence de potentiel de A à B est égale et opposée respectivement à la valeur de la différence de pression fournie par la pompe et de la tension délivrée par la batterie. Vu que l'intensité du courant est nulle à cet instant, les différences de potentiel résistives le sont également. C'est pourquoi le courant doit varier à un taux $dI/dt = -\Delta\phi_{AB}/L$ (fig. 4.12). Comme le courant augmente, la valeur de la différence de potentiel (négative) due à la résistance doit le faire également. La valeur de la différence de potentiel d'origine inductive doit donc diminuer dans le temps, ce qui entraîne une diminution de la pente du courant croissant. Finalement, lorsque le courant atteint sa valeur stationnaire $I_{stat} = \Delta\phi_{AB}/R$, la différence de potentiel d'origine inductive est nulle, et le courant ne varie plus du tout. Naturellement, le processus peut être inversé: lors de la coupure d'un courant, la réaction n'est pas instantanée, bien au contraire; le courant décroît de manière exponentielle.

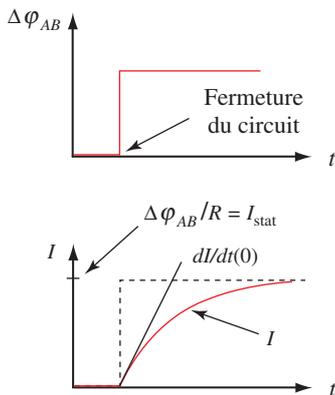


FIGURE 4.12 Comportement RL simple: le courant croît de manière exponentielle et tend vers une valeur stationnaire.

Le comportement décrit ici en termes qualitatifs peut, par exemple, être facilement observé en mesurant et en affichant les grandeurs d'un circuit électrique au moyen d'un oscilloscope (fig. 4.13)

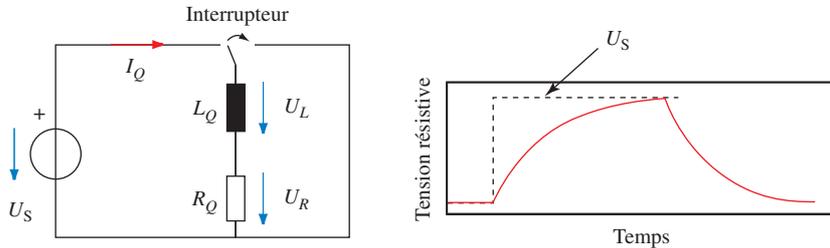


FIGURE 4.13 Enclenchement et déclenchement d'un courant électrique. Le diagramme montre la tension mesurée sur la résistance.

4.4.2 Constante de temps résisto-inductive

Comme nous le verrons plus bas, le courant est une fonction exponentielle du temps. Nous avons déjà été confrontés à ce comportement (chap. 1 et 2) et nous avons introduit la notion de constante de temps résisto-capacitive. Il semble plausible que le comportement dans le temps de systèmes *RL* puisse être décrit en termes semblables. Nous introduisons la *constante de temps résisto-inductive* τ_L qui, de manière analogue à la procédure des chapitres 1 et 2, est mesurée par la section que la tangente à la courbe, à l'instant de la fermeture du circuit, détermine sur l'horizontale (l'asymptote) d'ordonnée égale à la valeur stationnaire du courant (fig. 4.14). La représentation graphique nous permet de déterminer la valeur de cette constante de temps. Si X représente la grandeur extensive (volume ou charge électrique) qui s'écoule, son taux de variation $I_X(t)$ à l'instant initial est égal au quotient de la valeur du courant stationnaire et de la constante de temps τ_L :

$$\dot{I}_X = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{R_X} = \frac{I_{X\text{ stat}}}{\tau_L}$$

Mais, en vertu de la loi d'induction, à l'instant initial, le taux de variation de l'intensité est donné (au signe près suivant le domaine considéré) par:

$$\dot{I}_X = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{L_X}$$

La comparaison des deux expressions donne:

$$\tau_L = \frac{L_X}{R_X} \tag{4.7}$$

La constante de temps représente également l'intervalle de temps nécessaire pour que le courant atteigne une fraction égale à $1 - 1/e \approx 0.64$ de la valeur finale.

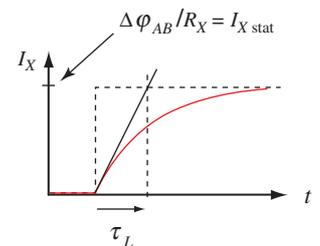


FIGURE 4.14 Définition graphique de la constante de temps inductive.

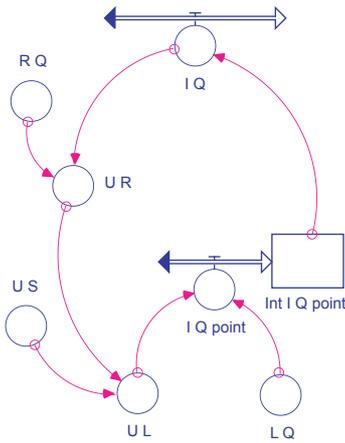


FIGURE 4.15 Diagramme de dynamique des systèmes du modèle d'un système *RL* représentant l'enclenchement d'un courant.

4.4.3 Modèle dynamique du démarrage d'un courant

Examinons le circuit électrique de la figure 4.11. Lorsque nous fermons l'interrupteur, le courant commence à croître pour atteindre finalement une valeur stationnaire. Cette variation du courant est décrite par la loi d'induction: le taux de variation de l'intensité du courant est égal au quotient de la tension induite et de l'inductance de l'élément inductif. C'est notre point de départ pour l'élaboration du diagramme de dynamique des systèmes et du modèle. Nous introduisons les symboles représentant la tension induite U_L , l'inductance L_Q , et le taux de variation du courant et connectons les deux premiers éléments avec le dernier (fig. 4.15). Ce que nous venons de faire représente l'équation :

$$\dot{I}_Q = \frac{U_L}{L_Q}$$

L'étape suivante consiste à obtenir l'intensité du courant à partir de son taux de variation par intégration :

$$I_Q = \int \dot{I}_Q dt$$

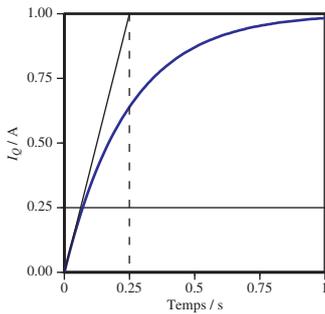


FIGURE 4.16 Enclenchement d'un courant électrique en présence d'un élément inductif.

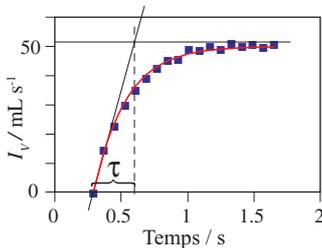


FIGURE 4.17 Résultat de la simulation du modèle de la fig. 4.15.

C'est un nouvel aspect du modèle que nous sommes en train d'élaborer : nous n'avons pas encore été confrontés à une loi exprimant le taux de variation d'une grandeur à l'exception, indirectement, des équations de bilan où la somme de tous les courants est égale au taux de variation de la grandeur accumulée. Ici, nous n'avons pas affaire à une équation de bilan, mais d'un point de vue purement mathématique, il n'y a aucune différence entre ce que nous désirons faire ici, c'est-à-dire calculer le courant à partir de son taux de variation, et calculer le contenu d'un système à partir de la somme des courants. C'est la raison pour laquelle l'opération d'intégration est représentée par un stock (fig. 4.15). Pour obtenir le courant en fonction du temps, nous avons encore besoin de sa valeur initiale, qui est zéro dans le cas particulier. Un programme de dynamique des systèmes obtient la solution de cette relation en utilisant les mêmes méthodes numériques que celles qui sont utilisées dans le cas d'une équation de bilan.

Nous pouvons maintenant poursuivre la recherche de la solution. Connaissant l'intensité du courant, nous pouvons calculer la tension résistive au moyen de la loi de résistance et, à partir de l'équation (4.5), nous calculons la tension induite. Notez que U_{AB} dans la figure 4.11 est l'opposé de la valeur de U_S (tension de la source). Ce qui ferme la boucle de rétroaction toujours présente dans les systèmes *RL* (fig. 4.15). La simulation à partir de ce modèle pour une tension de 4 V, une résistance de 4 Ω et une inductance de 1 H est représentée dans la figure 4.16; la constante de temps inductive est égale à 0.25 s, comme le prédit la théorie.

On obtient le modèle de l'enclenchement du courant d'eau de la figure 4.1 en remplaçant, dans celui de la figure 4.15, les grandeurs électriques par les grandeurs hydrauliques correspondantes. À partir des données expérimentales, on peut estimer les paramètres du système. Avec une inductance $L_V = 15 \cdot 10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$ et une résistance $R_V = 55 \cdot 10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$, on atteint une adéquation quasi parfaite (fig. 4.17). La constante de temps, donnée par l'équation (4.7), est égale à 0.28 s.

4.4.4 Description formelle des systèmes RL

En énonçant les équations équivalentes aux relations représentées dans les diagrammes de la figure 4.15, nous obtenons le modèle complet qui est formulé par le système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{I}_Q &= \frac{U_L}{L_Q}, \quad I_Q(0) = 0 \\ U_L &= U_S - U_R \\ U_R &= R_Q I_Q \end{aligned} \quad (4.8)$$

En substituant les deux dernières équations du système d'équations (4.8) dans la première, nous obtenons, après réarrangement des termes :

$$\dot{I}_Q + \frac{R_Q}{L_Q} I_Q = \frac{U_S}{L_Q}, \quad I_Q(0) = 0 \quad (4.9)$$

C'est une équation différentielle qui a exactement la même structure que celle qui décrit la charge d'un condensateur (2.32), si l'on fait correspondre Q à I_Q et C_Q à L_Q . Sa solution sera donc semblable. Elle est donnée par :

$$I_Q(t) = \frac{U_S}{R_Q} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right) \quad (4.10)$$

ce que nous pouvons vérifier en substituant ce résultat dans l'équation différentielle. Ici, τ_L est la constante de temps résisto-inductive exprimée par l'équation (4.7). Le courant croît à partir de zéro pour atteindre une valeur stationnaire après un temps plus ou moins long, déterminé par les paramètres du circuit.

EXEMPLE 4.3. Constante de temps résisto-inductive.

À partir des données de l'exemple 4.2, (fig. 4.9. (a) Déterminez graphiquement la constante de temps inductive. (b) Comparez le résultat avec celui que vous obtenez au moyen de l'équation (4.7). (c) Si le niveau du fluide pouvait être maintenu constant, combien de temps le courant mettrait-il pour atteindre le 99% de sa valeur finale?

SOLUTION: (a) Le courant atteint approximativement 64% de sa valeur finale en une constante de temps. Comme il n'y a pas d'état stationnaire, nous utilisons la valeur maximale du courant, à savoir approximativement $6.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Le 64% de cette valeur ($\approx 4.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) est atteint environ 0.5 s après le début. Une estimation de la constante de temps est donc 0.5 s.

(b) Par le calcul, nous obtenons :

$$\tau_L = \frac{L_V}{R_V} \approx \frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}}{8 \cdot 0.0010 \text{ Pa s} \cdot 1.75 \text{ m} / (\pi(0.0020 \text{ m})^4)} = 0.54 \text{ s}$$

(c) Si le niveau de fluide peut être maintenu constant, la différence de pression sur la conduite l'est aussi. Dans ce cas, nous avons à résoudre le simple problème du démarrage d'un courant évoqué plus haut. Vu que le courant initial est égal à $-U_P/R_V$, nous avons :

$$0.99 = 1 - \exp(-t/\tau_L)$$

ce qui peut être résolu par rapport à l'intervalle de temps inconnu :

$$t = -\tau_L \ln(1 - 0.99)$$

Avec une constante de temps de 0.5 s, cette valeur devient égale à 2.3 s. Rappelons que les électrotechniciens estiment qu'après 5τ le processus a pratiquement atteint le régime stationnaire. ■

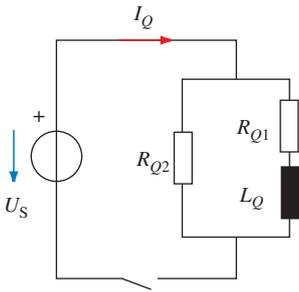


FIGURE 4.18 Circuit électrique composé d’une batterie, de résistances et d’un élément inductif.

EXEMPLE 4.4. Circuit électrique avec inductance.

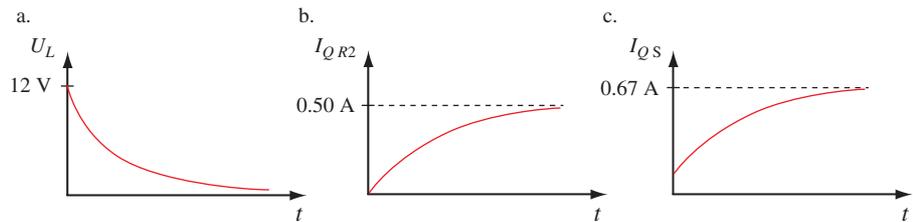
Considérez le circuit électrique de la figure 4.18. Une inductance idéale est connectée à une résistance de $24\ \Omega$, et les deux sont montés en parallèle avec une résistance de $72\ \Omega$. Ces trois éléments sont branchés sur une batterie qui délivre une tension constante de $12\ \text{V}$. On ferme le circuit à l’instant $t = 0\ \text{s}$. (a) Donnez une esquisse qualitative de l’évolution dans le temps de la tension induite (tension sur l’inductance idéale). (b) Donnez une esquisse qualitative de l’évolution dans le temps de la tension sur la première résistance. Quelle est la valeur maximale de l’intensité du courant? (c) Esquissez l’évolution dans le temps du courant à travers la batterie.

SOLUTION: Lors de la fermeture du circuit à l’instant $t = 0\ \text{s}$, la tension sur R_{Q2} , ainsi que sur R_{Q1} et l’inductance, saute à $12\ \text{V}$. Dans la branche contenant l’inductance, le courant est nul, vu qu’il n’a pas pu se mettre à croître. Vu qu’il n’y a pas d’élément inductif dans la branche de R_{Q2} , le courant saute instantanément à sa valeur donnée par la loi de résistance. Dans la branche contenant l’inductance, le courant croîtra selon les règles discutées dans la section relative aux circuits RL ; comme le montre la figure 4.14, il augmente jusqu’à ce qu’il ait atteint sa valeur stationnaire.

(a) Comme le courant initial dans la branche qui contient l’inductance est nul, la tension sur R_{Q1} doit être nulle. Donc, à l’instant $t = 0\ \text{s}$, nous avons $U_L = 12\ \text{V}$, ce qui correspond à la valeur maximale de la tension induite. Puis, elle diminue de manière exponentielle jusqu’à zéro, ce qui correspond à l’état stationnaire (fig. 4.19a).

(b) Comme nous l’avons déjà mentionné, le courant initial à travers R_1 est nul. Lorsque l’état stationnaire est atteint, la tension sur l’inductance est nulle, ce qui implique que $U_{R1} = 12\ \text{V}$. En conséquence, la valeur maximale du courant dans cette branche est de $12\ \text{V} / 24\ \Omega = 0.50\ \text{A}$ (fig. 4.19b).

FIGURE 4.19 Évolution de la tension et des courants en fonction du temps.



(c) Le courant dans la branche de R_{Q2} est dicté par la loi de résistance. Avec une tension constante de $12\ \text{V}$, nous obtenons une intensité égale à $12\ \text{V} / 72\ \Omega = 1/6\ \text{A}$. Il faut ajouter cette intensité constante à celle qui traverse R_1 pour obtenir la valeur du courant de la batterie (fig. 4.19c). ■

4.5 EXEMPLES D’ÉLÉMENTS INDUCTIFS

Le phénomène d’induction est dû à l’inertie des fluides en hydraulique et au champ magnétique en électricité. Ces observations nous permettent de relier l’inductance des éléments respectivement aux propriétés mécaniques des fluides et à celles des champs électromagnétiques. Mais pour le faire, nous avons besoin des théories de la mécanique et de l’électromagnétisme. Vu que nous les étudierons plus tard, nous n’allons pour l’instant présenter que deux cas qui ont un intérêt concret, à savoir l’inductance d’un fluide dans une conduite droite et celle d’un long conducteur bobiné pour donner un solénoïde.

4.5.1 Inductance hydraulique d'un fluide dans une conduite

L'inductance d'un fluide dans une conduite de longueur l et de rayon r dépend de la masse volumique du fluide ρ , de la longueur l , et de la section de la conduite $A = \pi r^2$. Elle augmente avec la masse volumique et la longueur, et diminue si la section de la conduite augmente :

$$L_V = \frac{\rho l}{A} \quad (4.11)$$

Cette relation sera justifiée au chapitre 8 (exemple 8.1), lorsque nous aborderons les phénomènes de mouvement linéaire et, d'une manière différente, à la section 11.9.3, dans le contexte des systèmes ouverts mécaniques. Donnons les arguments qui la rendent plausible. Les deux premières proportionnalités sont faciles à comprendre : l'inertie, c'est-à-dire la masse du fluide à accélérer, croît linéairement avec la masse volumique et la longueur de la conduite. L'influence de la section de la conduite n'est pas aussi simple à justifier. D'une part, une section double offre une surface double à l'action de la pression ; d'autre part, il faut accélérer un volume de fluide double. Les deux facteurs semblent se compenser, ce qui impliquerait que la section n'intervient pas dans la valeur de l'inductance. Mais une section double signifie que l'on a la même intensité du courant pour une vitesse deux fois moindre. C'est pourquoi une section double provoque un doublement du taux de variation du courant pour une différence de pression inductive donnée.

Il faut noter un point important au sujet des inductances hydrauliques. Nous savons qu'elles lient le taux de variation du courant à la différence de pression inductive. Cependant, il est également possible d'avoir des différences de pression dans des fluides sans frottement qui sont dues à un autre phénomène. Nous avons vu à la section 1.7.3 que, si un courant stationnaire s'écoule à travers une conduite qui se rétrécit, la pression décroît dans le sens de l'écoulement. Vu que l'intensité du courant ne varie pas, cette variation de la pression n'est pas d'origine inductive ; nous savons qu'elle est due à l'effet BERNOULLI. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des conduites qui ont une section constante.

4.5.2 Inductance d'un solénoïde

On appelle solénoïde un enroulement de fil électrique à spires jointives enroulées sur un cylindre (fig. 4.20). Lorsqu'un courant électrique circule dans le fil, un champ magnétique s'établit essentiellement dans l'espace cylindrique. Des bobinages de ce type sont utilisés dans les électro-aimants. Le champ magnétique peut être fortement amplifié si le solénoïde est rempli d'un matériau ferromagnétique, par exemple un noyau de fer.

Le champ magnétique dépend de l'intensité du courant traversant la bobine et du nombre de spires par unité de longueur. Étant donné que la croissance ou la décroissance du champ occupant l'espace à l'intérieur du solénoïde est responsable du comportement inductif de cet élément, nous nous attendons à ce que l'inductance dépende de son volume et du nombre de spires par unités de longueur ; elle est donnée par :

$$L_Q = \frac{\mu_o N^2 A}{l} \quad (4.12)$$

Ici, μ_o est une constante de la nature, la constante d'induction ou perméabilité du vide ; sa valeur est de $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$. N , A et l sont respectivement le nombre de spires, l'aire de la section et la longueur du solénoïde. Avec un noyau de fer, l'intensité du champ

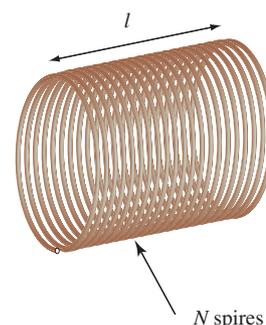


FIGURE 4.20 Un solénoïde, une bobine droite de fil électrique à spires jointives, produit à l'intérieur du cylindre un champ magnétique dirigé selon l'axe de la bobine.

et l'inductance sont amplifiés plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de fois. Cette relation sera justifiée au chapitre 14, section 14.3.

EXEMPLE 4.5. Inductance de conduites hydrauliques.

Des conduites de 60 cm de diamètre relient un lac artificiel à l'usine électrique. Elles ont une longueur de 350 m. (a) Quelle est l'inductance hydraulique d'une telle conduite? (b) Un courant d'eau de $1.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ circule dans cette conduite. Si ce courant devait être arrêté en 0.10 s, quelle serait la valeur de la différence de pression inductive?

SOLUTION: (a) L'inductance hydraulique est calculée selon l'équation (4.11):

$$L_V = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho l}{\pi r^2} = \frac{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 350 \text{ m}}{\pi \cdot (0.30 \text{ m})^2} = 1.24 \cdot 10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$$

(b) En prenant un taux de variation du courant moyen de $10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$, nous avons

$$\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V = -1.24 \cdot 10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3} (-10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}) = 124 \text{ bar}$$

Aucune conduite ne peut résister à une telle surpression (coup de bélier). C'est la raison pour laquelle les centrales hydroélectriques sont toutes équipées d'une cheminée d'équilibre qui permet d'évacuer cette surpression. ■

EXEMPLE 4.6. Inductance de solénoïdes montés en série.

Un long fil conducteur est bobiné sur deux supports cylindriques en carton. Le premier a une longueur de 20 cm et un diamètre de 6.0 cm, alors que la longueur et le diamètre du second sont respectivement de 10 cm et 4.0 cm. Il y a 200 spires sur le premier support et 300 sur le second. Déterminez l'inductance de ce dispositif.

SOLUTION: Nous calculons d'abord les inductances individuelles selon l'équation (4.12):

$$L_{Q1} = \frac{\mu_0 N_1^2 A_1}{l_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} 300^2 \pi (0.030 \text{ m})^2}{0.20 \text{ m}} = 0.71 \text{ mH}$$

$$L_{Q2} = \frac{\mu_0 N_2^2 A_2}{l_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} 200^2 \pi (0.020 \text{ m})^2}{0.10 \text{ m}} = 1.42 \text{ mH}$$

Pour déterminer l'inductance du montage en série, nous tenons compte du fait que la tension totale est la somme des tensions:

$$U_L = U_{L1} + U_{L2}$$

À partir de la loi d'induction donnée par l'équation (4.4), nous obtenons

$$U_L = L_{Q1} \dot{I}_Q + L_{Q2} \dot{I}_Q = (L_{Q1} + L_{Q2}) \dot{I}_Q$$

vu que le courant et son taux de variation sont les mêmes pour les deux éléments. Nous en concluons que l'inductance d'un montage en série est égale à la somme des inductances:

$$L_Q = L_{Q1} + L_{Q2} = 2.13 \text{ mH}$$

■

4.6 PUISSANCE ET STOCKAGE D'ÉNERGIE LORS DE PROCESSUS INDUCTIFS

Au chapitre 3, nous avons utilisé des diagrammes de processus incluant des flux d'énergie pour des dispositifs tels que des pompes, turbines et générateurs, lacs artificiels et conduites, résistances, moteurs électriques, etc. Ils démontrent tous que la libération d'énergie est suivie de sa liaison lorsque les processus sont couplés.

4.6.1 Puissance des processus inductifs

Les éléments inductifs semblent nous confronter à un cas légèrement différent. Tout d'abord, alors que les autres dispositifs fonctionnent strictement en sens unique – dans les résistances, lorsqu'ils le font spontanément, le volume ou la charge s'écoulent toujours «en descendant la pente» – les processus dans les inductances se déroulent dans les deux sens. D'autre part, la majorité des systèmes mentionnés plus haut peuvent fonctionner de manière stationnaire sans impliquer de stockage d'énergie; par contre, des dispositifs inductifs ne fonctionnent que dynamiquement et ils servent également de dispositifs de stockage d'énergie.

Troisièmement, et ceci est le plus important, il n'est pas facile de détecter si, dans de tels dispositifs, il y a deux processus couplés, l'un se déroulant «en descendant la pente», l'autre «en remontant la pente». Un examen attentif montre qu'il y a bel et bien des processus qui sont couplés à ceux de nature hydraulique ou électrique qui, eux, sont reconnaissables de manière évidente.

Le phénomène de l'induction électromagnétique est couplé à la croissance ou à la décroissance du champ magnétique engendré par le courant électrique. Nous étudierons les champs électriques et magnétiques au chapitre 13. Tout comme le champ de pesanteur (section 3.5.2), le champ magnétique agit en tant que dispositif de stockage de l'énergie qui est libérée par ou liée au courant électrique, selon que le courant est croissant ou décroissant dans le temps. Si le courant électrique qui traverse un élément inductif croît dans le temps, c'est-à-dire si $dI_Q/dt > 0$, il s'écoule «en descendant la pente» à travers la différence de potentiel induite

$$\Delta\varphi_L = -L_Q \dot{I}_Q \quad \text{ou} \quad U_L = L_Q \dot{I}_Q \quad (4.13)$$

Ce processus est associé à une libération d'énergie au taux

$$\mathcal{P}_{ei} = -\Delta\varphi_L I_Q \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_{ei} = U_L I_Q \quad (4.14)$$

Il doit y avoir un processus qui se déroule «en remontant la pente» grâce à l'énergie disponible. Ce processus existe: c'est l'établissement du champ magnétique qui, dans le même temps, sert de dispositif de stockage de l'énergie libérée par le processus électrique (fig. 4.21a).

Si le courant électrique à travers l'élément inductif décroît dans le temps, c'est-à-dire si $dI_Q/dt < 0$, le champ magnétique décroît lui aussi, libérant de l'énergie qui est prise en charge par le courant électrique. En conséquence, ce courant est entraîné «en remontant la pente» à travers la différence de potentiel induite $\Delta\varphi_L$ (fig. 4.21b).

Le cas de l'induction hydraulique est tout à fait semblable, à la différence près qu'il n'y a pas l'équivalent du champ magnétique associé au courant. C'est plutôt la croissance ou la décroissance de la quantité de mouvement du fluide qui agit de manière semblable au champ magnétique.

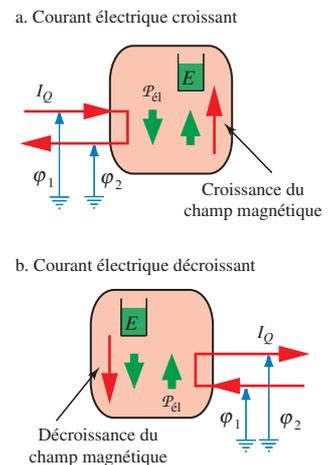


FIGURE 4.21 Dans un processus électrique de type inductif, de l'énergie est libérée ou liée. Le processus est couplé à la création ou à la destruction d'un champ magnétique qui sert de dispositif de stockage d'énergie dans l'élément inductif.

Lors de processus inductifs dus à la variation de l'intensité des courants d'une grandeur X , la puissance associée au processus envisagé est égale au produit de la différence de potentiel inductive $\Delta\phi_{L,Y}$ donnée par l'équation (4.6) et de l'intensité du courant de la grandeur X :

$$\mathcal{P}_{L,X} = -\Delta\phi_{L,X}I_X = L_X\dot{I}_X I_X \quad (4.15)$$

Alors que la puissance d'un processus résistif est toujours positive, car c'est un processus dissipatif, celle d'un processus inductif peut être positive ou négative, ce qui indique qu'un tel processus permet l'accumulation ou la libération d'énergie, donc qu'il conserve l'énergie.

1. Sous quelles conditions de l'énergie peut-elle être libérée dans un élément inductif lors d'un processus électrique?
2. Pouvez-vous donner un exemple de libération d'énergie par un processus inductif en hydraulique?

Q

1. Le courant électrique doit varier dans le temps, ce qui induit une différence de potentiel. De l'énergie est libérée par la chute de la charge si le courant croît dans le temps (fig. 4.21a).
2. La fermeture brutale d'un robinet peut engendrer un coup de bélier dont il a été question à la section 4.1.2 et dans l'exemple 4.5. Il s'agit d'un processus inductif qui libère de l'énergie (qui peut éventuellement servir à endommager la conduite).

R

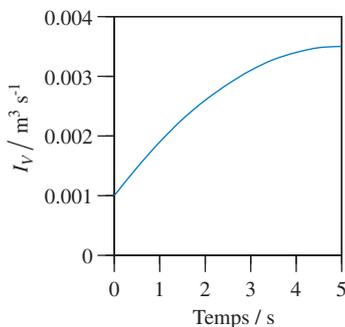


FIGURE 4.22 Évolution du courant d'huile en fonction du temps.

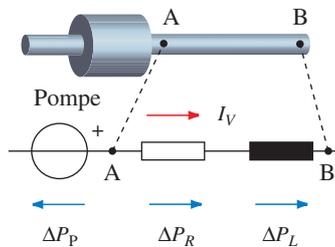


FIGURE 4.23 Circuit électrique équivalent pour une pompe et une conduite contenant de l'huile.

EXEMPLE 4.7. Puissance et énergie libérée dans un système hydraulique.

Nous reprenons les données de l'exemple 3.3 (fig. 4.22): le taux de variation d'un écoulement d'huile à travers une conduite droite évolue linéairement et passe de $0.001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ à $0.0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ en 5 s. La conduite à une longueur de 10.0 m et un diamètre de 7.0 cm. L'huile a une masse volumique de 910 kg m^{-3} , une viscosité de 0.081 Pa s , et l'écoulement a lieu en régime laminaire. (a) Déterminez l'évolution dans le temps de la différence de pression inductive, évaluez sa valeur à l'instant $t = 2\text{s}$ et ajoutez son graphique à celui de la figure 3.21a. (b) Déterminez l'évolution dans le temps de la puissance hydraulique due au phénomène d'induction, évaluez sa valeur à l'instant $t = 2\text{s}$ et complétez la figure 3.21b. (c) Combien d'énergie la pompe libère-t-elle durant les 5 premières secondes si son efficacité est de 80%?

SOLUTION: La pompe et la conduite transportant l'huile correspondent, en électricité, au montage en série d'une batterie, d'une résistance et d'une inductance (fig. 4.23). Comme ces éléments sont montés en série, leurs contributions s'additionnent.

(a) L'inductance de la conduite est évaluée à partir de l'équation (4.11):

$$L_V = \frac{\rho l}{\pi r^2} = \frac{910 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m}}{\pi \cdot (0.035 \text{ m})^2} = 2365 \cdot 10^3 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$$

La pression inductive est donnée par l'équation (4.2):

$$\Delta P_L(t) = -L_v \dot{j}_v(t) = -2365 \text{ Pa} (1.0 - 0.2 \text{ s}^{-1} \cdot t); \quad \Delta P_L(2 \text{ s}) = -1.42 \text{ kPa}$$

L'évolution de cette différence de pression apparaît dans la figure 4.24a.

(b) La puissance due à l'induction se calcule à partir de l'équation (4.14):

$$\mathcal{P}_L = -\Delta P_L I_v(t) = 2.365 \text{ W} (1.0 + 0.8 \text{ s}^{-1} \cdot t - 0.3 \text{ s}^{-2} \cdot t^2 + 0.02 \text{ s}^{-3} \cdot t^3)$$

La différence de pression induite et la puissance associée apparaissent dans la figure 4.24. La puissance due à l'induction est positive tant que l'intensité du courant croît dans le temps.

La valeur de la puissance due à l'induction à l'instant $t = 2 \text{ s}$ est $\mathcal{P}_L(t = 2 \text{ s}) = 3.69 \text{ W}$.

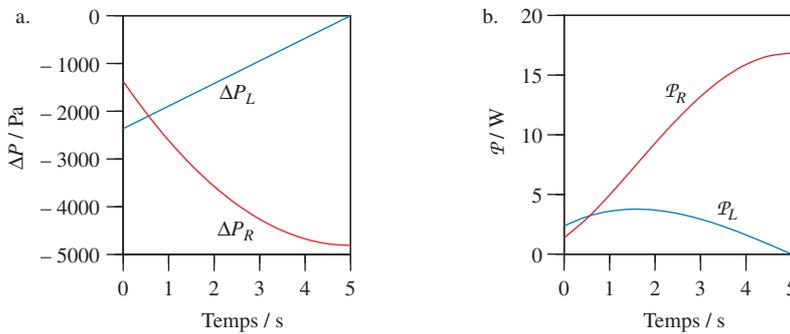


FIGURE 4.24 Différences de pression et puissances hydrauliques en fonction du temps pour les éléments résistif et inductif du circuit hydraulique.

(c) De l'énergie est libérée dans la pompe à la suite du processus électrique qui l'entraîne. Nous pouvons calculer sa valeur si nous connaissons la puissance du processus électrique en fonction du temps. L'aire entre la courbe $\mathcal{P}_{p,el}(t)$ et l'axe t correspond au résultat désiré.

L'efficacité étant de 80%, la puissance électrique de la pompe doit être égale à 1/0.80 fois la puissance hydraulique, selon l'équation (3.5). La puissance hydraulique est calculée à partir de la différence de pression Δp_p sur la pompe et le courant d'huile. Comme, selon la loi des mailles, la somme de toutes les différences de pression est nulle, nous avons:

$$\Delta P_p(t) = -\Delta P_R(t) - \Delta P_L(t)$$

En rassemblant tous les résultats précédents, nous trouvons:

$$\Delta P_{p,el}(t) = -\Delta P_R(t) - \Delta P_L(t) = 3740 \text{ Pa} + 902 \text{ Pa s}^{-1} \cdot t - 137.5 \text{ Pa s}^{-2} \cdot t^2$$

(fig. 4.25a). Si nous multiplions cette expression par l'intensité du courant de fluide, nous obtenons la puissance électrique de la pompe:

$$\mathcal{P}_{p,el}(t) = \frac{1}{0.80} \Delta P_{p,el}(t) I_v(t); \quad \mathcal{P}_{p,el}(t = 2 \text{ s}) = 16.23 \text{ W}$$

et l'énergie libérée durant les 5 premières secondes est approximativement de 83 J. Cette valeur correspond à l'aire comprise entre la courbe représentant $\mathcal{P}_{p,el}(t)$ et l'axe t dans la figure 4.25b.

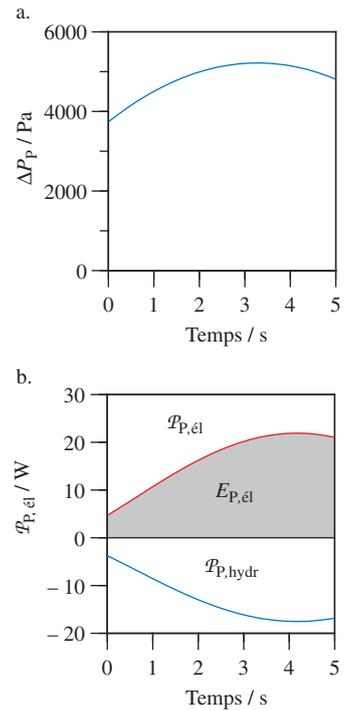


FIGURE 4.25 Différence de pression et puissance hydraulique et électrique de la pompe. Comme la pompe n'est pas idéale, la valeur absolue de la puissance électrique est supérieure à celle de la puissance hydraulique.

4.6.2 Stockage d'énergie par des inductances

Puisque le phénomène d'induction n'est pas dissipatif, l'énergie peut également être stockée par des éléments inductifs électriques ou hydrauliques. Nous pouvons nous

inspirer de la figure 4.21a pour calculer l'énergie contenue dans une inductance: c'est celle qui a été libérée. Évaluons la quantité d'énergie accumulée lorsqu'un courant augmente dans le temps.

La puissance instantanée est donnée par

$$\mathcal{P}_X = -\dot{\phi}_X I_X \quad \text{avec} \quad \dot{\phi}_X = -L_X \dot{I}_X$$

Nous obtenons l'énergie accumulée par intégration:

$$\Delta E = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{final}}} \mathcal{P}_X dt = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{final}}} L_X I_X \dot{I}_X dt = \int_{I_{\text{init}}}^{I_{\text{final}}} L_X I_X dI_X$$

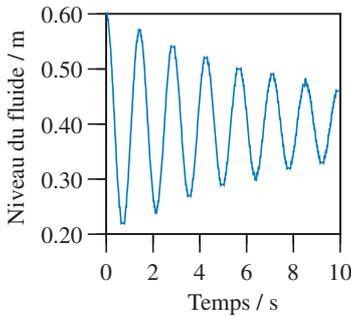


FIGURE 4.26 Beaucoup de systèmes manifestent un comportement oscillatoire – quelques-uns simples comme du mercure dans un tube en U...

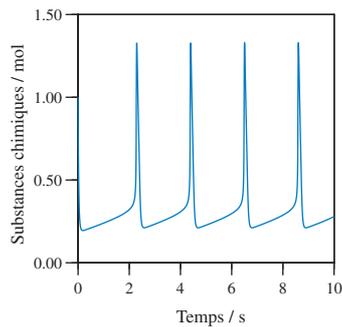


FIGURE 4.27 ... d'autres plus complexes, comme cet oscillateur chimique (oscillations du calcium)...

Pour une inductance constante et une intensité initiale nulle, l'énergie stockée dans un élément d'inductance constante L_X est donnée par:

$$\Delta E = \frac{1}{2} L_X I_X^2 \quad (4.16)$$

où I_X est la valeur finale de l'intensité du courant de la grandeur X .

4.7 SYSTÈMES OSCILLANTS

Les systèmes oscillants, qu'ils soient simples ou complexes, abondent dans la nature ainsi que dans les systèmes techniques et sociaux. Cependant, les systèmes oscillants de la physique sont relativement simples à étudier et nous permettent de découvrir la structure cachée derrière les apparences.

4.7.1 Exemples de systèmes oscillants

Les oscillations sont des phénomènes répétitifs. De l'eau qui va et vient entre deux réservoirs communicants est l'exemple d'un système oscillant simple (fig. 4.26). Ici, les oscillations sont périodiques, décroissent usuellement dans le temps, mais montrent une forme simple.

Mais il existe des phénomènes plus complexes, tels que les oscillations de systèmes chimiques. Si les réactions qui se déroulent dans un réacteur sont alimentées par un écoulement de certaines substances, ou si certaines substances sont éliminées, et si les réactions obéissent à quelques règles particulières, les quantités des substances peuvent osciller vers le haut ou vers le bas. Les oscillations du calcium apparaissant dans la figure 4.27 sont périodiques comme celles de l'eau décrites ci-dessus, mais l'aspect des courbes est bien différent de celui d'oscillations simples.

Beaucoup de systèmes naturels subissent des variations complexes, voire apériodiques. Malgré tout, la structure oscillatoire est clairement visible. Par exemple, El Niño (ENSO: El Niño Southern Oscillation) est un phénomène dans lequel le couplage entre l'atmosphère et l'océan dans le Pacifique équatorial produit un phénomène à grande échelle qui se répète à des intervalles variant approximativement entre deux et sept ans (fig. 4.28).

En temps normal (fig. 4.28a), l'alizé souffle d'est en ouest sur le Pacifique équatorial. L'eau chaude de surface s'accumule dans le Pacifique occidental où les températures

de surface dépassent d'environ 8°C celles de la côte sud-américaine; les températures basses sont dues à la remontée en surface des eaux profondes plus froides (upwelling). À proximité du continent américain, la couche d'eau froide est à environ 50 m sous la surface. Durant un El Niño (fig. 4.28b), les vents dominants s'affaiblissent dans le Pacifique central et occidental. Cela entraîne un abaissement de la frontière entre l'eau chaude de surface et la couche froide dans le Pacifique oriental, et une élévation de cette frontière près de la côte asiatique. La couche d'eau froide descend à environ 150 m de profondeur dans le voisinage des côtes sud-américaines. L'efficacité du brassage (upwelling) est fortement diminuée, et la température de surface augmente. Ces changements dans l'océan se répercutent sur le temps. En particulier, on observe un affaiblissement des alizés orientaux, et les chutes de pluie migrent vers l'est à la suite du temps chaud.

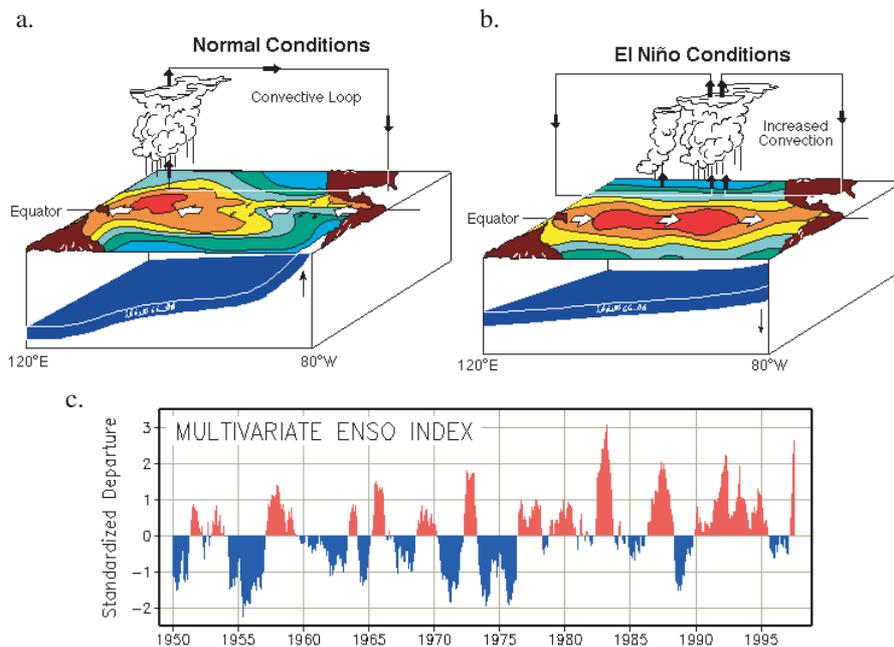


FIGURE 4.28 ... et d'autres très complexes. El Niño (ENSO: El Niño Southern Oscillation) est un phénomène oscillatoire auquel participent l'atmosphère et l'océan dans la région du Pacifique équatorial. L'ENSO index (Figure c) est une combinaison de différentes mesures qui indiquent la présence ou l'absence de l'effet El Niño.

Nous allons tout d'abord étudier des oscillations d'un point de vue qualitatif, décrivant le comportement, discutant l'exemple d'oscillations hydrauliques et créant un premier diagramme de dynamique des systèmes. Dans la section 4.8, nous passerons à une descriptions mathématique du phénomène.

4.7.2 Réservoirs communicants

Pour savoir pourquoi certains systèmes manifestent un comportement oscillatoire, nous allons étudier deux réservoirs communicants (fig. 4.29). Nous savons que si nous les remplissons avec une huile très visqueuse à des niveaux différents, ceux-ci vont s'équilibrer comme le montre la figure 4.4. Le courant à travers la conduite qui relie les deux réservoirs va décroître dans le temps pour s'interrompre lorsque les deux niveaux seront égaux. Nous savons par les modèles que nous avons construits dans les chapitres 1 et 2 que ce type de comportement est le résultat de l'action conjointe de dispositifs de stockage (capacités) et de résistances. On parle de systèmes RC.

Fluides oscillants: le rôle de l'inertie. Si, par contre, nous utilisons un fluide de faible viscosité et si la section de la conduite est suffisamment grande, nous observerons un phénomène totalement différent. Au lieu de s'interrompre lorsque les deux niveaux

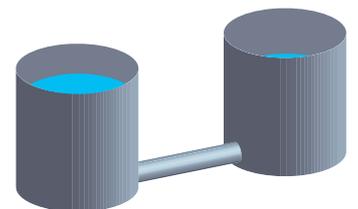


FIGURE 4.29 Eau oscillant entre deux réservoirs communicants.

sont égaux, le courant a une intensité maximale à ce moment-là. C'est une conséquence de l'inertie du fluide qui va et vient entre les deux réservoirs, comme nous l'avons observé à la section 4.1.3. La diminution de l'amplitude des oscillations est due aux frottements.

Aux sections 4.1 et 4.2, nous avons attribué à l'induction la cause de l'apparition des oscillations. En nous basant sur les observations et sur cette analyse, nous concluons que, pour qu'un système puisse être le siège d'oscillations, deux conditions doivent être remplies :

- il doit y avoir deux dispositifs de stockage pour que le fluide puisse s'écouler en un mouvement de va-et-vient, et
- l'écoulement doit montrer un comportement inductif afin qu'il ne s'interrompe pas la première fois que les niveaux des fluides sont devenus égaux.

Élaboration du modèle dynamique et simulation. Nous voulons construire le diagramme de dynamique des systèmes pour le dispositif de deux réservoirs communicants de la figure 4.29. Nous ferons les mêmes hypothèses qu'au chapitre 1 au sujet des propriétés des cuves et des conduites, à la différence près que nous y ajouterons l'induction. Dans nos modèles, les réservoirs sont uniquement caractérisés par leur capacité; nous négligeons le fait qu'il y a également des frottements dans les réservoirs et que ceux-ci peuvent avoir une inductance. L'écoulement du fluide à travers les conduites est soumis aux phénomènes de résistance et d'induction, comme nous l'avons discuté à la section 4.3. Nous pouvons représenter notre modèle au moyen d'un circuit électrique qui contient les mêmes éléments, à savoir deux capacités, une inductance et une résistance (fig. 4.30).

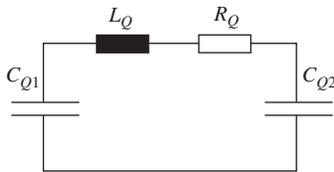


FIGURE 4.30 Circuit électrique représentant un modèle des réservoirs communicants de la fig. 4.29.

Nous obtenons le modèle souhaité en adjoignant à celui de l'équilibrage des niveaux développé à la section 1.2.4 le modèle de l'établissement d'un courant de la section 4.4.3. La loi de capacité nous permet de calculer la pression au fond des réservoirs. La différence de ces deux pressions est équivalente à la tension d'une source dans un circuit contenant une résistance et une inductance (fig. 4.11). L'application de la loi des mailles nous permet de calculer respectivement la tension ou la différence de pression induite et d'en déduire le taux de variation du courant. L'intégration de cette valeur donne l'intensité du courant, permettant ainsi de lier les deux modèles en un seul (fig. 4.31).

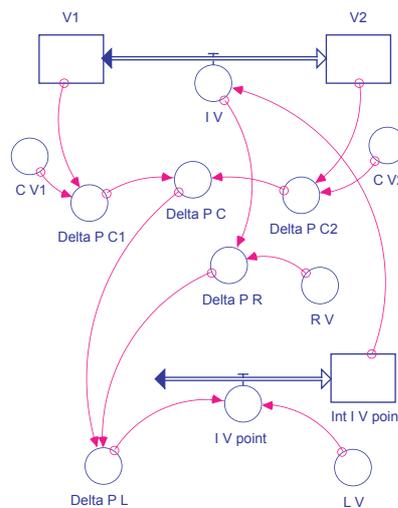


FIGURE 4.31 La combinaison du modèle de l'équilibrage des niveaux entre deux réservoirs communicants avec celui d'un circuit RL engendre le modèle d'un système oscillant.

La simulation de ce modèle (fig. 4.32) donne une solution qui est exactement pareille à celle que représente la figure 4.26, ce qui prouve que notre analyse du phénomène est correcte. Un régime d'oscillations peut apparaître dans des systèmes qui combinent des capacités, des inductances et des résistances (que l'on appelle des systèmes RCL). Si la résistance R_V est considérée comme nulle dans le modèle, les oscillations ne seront pas amorties, ce qui correspond exactement à ce que nous attendions.

4.7.3 Description du comportement oscillatoire le plus simple

Entrons maintenant dans une description plus détaillée du comportement du système oscillant le plus simple. Les expériences et les modèles des systèmes LC montrent que les oscillations, décrites au moyen de l'une des variables importantes telles que volume du fluide ou pression, ou charge, courant et tension dans un circuit électrique, prennent la forme d'une courbe sinusoïdale (fig. 4.33). On parle alors d'une *oscillation harmonique*. L'expression mathématique qui décrit une telle oscillation devra donc avoir la forme :

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t - \varphi) \quad (4.17)$$

Ici, x représente l'une quelconque des grandeurs qui évoluent sinusoïdalement, telles que le volume ou le niveau de fluide dans une cuve, la pression au fond de la cuve, le flux de fluide, ou des grandeurs électriques telles que la charge, la tension, le courant, etc. On l'appelle l'«*élongation*» du système, vu qu'elle représente son éloignement par rapport à l'état d'équilibre. Dans le membre de droite, la grandeur \hat{x} assure tout d'abord l'homogénéité des grandeurs de part et d'autre du signe d'égalité, le sinus étant un nombre pur. Cette grandeur représente l'*amplitude* de l'oscillation, qui est la moitié de la valeur absolue de la différence entre le maximum et le minimum de la courbe sinusoïdale (fig. 4.33). Dans l'argument du sinus (que l'on appelle la *phase*), le facteur ω , appelé *fréquence angulaire*, garantit, s'il est mesuré en s^{-1} , que l'argument soit un nombre pur, alors que la constante additive φ , la *constante de phase*, permet d'avoir, si c'est nécessaire, une élongation non nulle pour $t = 0$.

Grandeurs descriptives. Les oscillations harmoniques font partie des phénomènes périodiques. Ces phénomènes peuvent être caractérisés par les grandeurs que nous avons introduites ci-dessus et par d'autres qui leur sont liées. Ainsi, on peut utiliser également la *période* T qui se mesure en seconde et correspond au temps qui s'écoule entre deux passages successifs par un état identique du système (fig. 4.33), ou encore la *fréquence* f ou ν qui correspond au nombre de répétitions du phénomène par unité de temps. Notons tout d'abord que la fréquence et la période liées par la relation

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\nu} \quad (4.18)$$

vu que, durant une période T , le phénomène a lieu exactement une fois.

Il existe également entre ces trois grandeurs un autre lien qui découle du fait que si, dans l'argument du sinus, on remplace t par $t+T$ (décalage d'une période dans la figure 4.33), celui-ci prend la même valeur :

$$\sin[\omega(t+T) + \varphi] = \sin[\omega(t + \varphi) + \omega T] = \sin(\omega t + \varphi)$$

ce qui n'est possible que si $\omega T = 2\pi$, ce qui entraîne

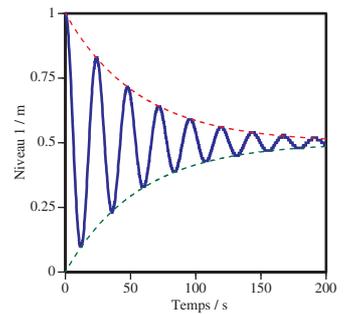


FIGURE 4.32 Oscillation d'un fluide entre deux réservoirs.

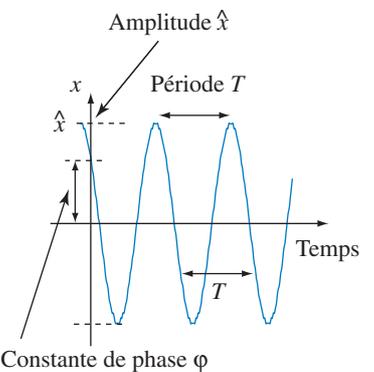


FIGURE 4.33 Une oscillation harmonique est décrite par une courbe sinusoïdale.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\nu \quad (4.19)$$

Cette dernière relation implique que la fréquence doit être mesurée dans une autre unité que la fréquence angulaire; la fréquence f (ou ν) se mesure en hertz (Hz).

Détermination de la période des oscillations. Il est intéressant de se demander de quels paramètres du système dépend la période ou la fréquence d'un oscillateur harmonique. Nous allons motiver notre réponse sans avoir recours aux équations et à leur solution. Pour le faire, nous nous référons au système de deux réservoirs communicants discuté plus haut (fig. 4.29), et concentrons notre attention sur le premier quart de période. Durant cet intervalle, le courant croît de zéro à sa valeur maximale, jusqu'à ce que les niveaux s'égalisent (temporairement). Deux phénomènes se combinent pour donner ce résultat. Au début, le processus inductif du démarrage du courant dans un système RL produit la croissance initiale de la fonction. Ce phénomène se déroule dans une échelle de temps mesurée par la constante de temps résisto-inductive τ_L déterminée par l'équation (4.7). Dans le même temps, le réservoir de gauche se vide au profit de celui de droite, processus caractérisé par une échelle de temps donnée par la constante de temps résisto-capacitive τ_C . Comme nous nous attendons à ce que la période des oscillations croisse avec l'inductance, nous présumons que T est proportionnel à τ_L . Il doit en aller de même pour la relation entre la période et la constante de temps résisto-capacitive. L'augmentation de la capacité du système doit ralentir le processus. En conclusion, nous nous attendons à ce que le carré de la période des oscillations soit proportionnel au produit des deux constantes de temps :

$$T^2 \sim \tau_L \tau_C$$

Vu que $\tau_L = L_V/R_V$ et $\tau_C = R_V C_V$, la période des oscillations doit être proportionnelle à la racine carrée du produit de L_V et C_V . Comme nous le verrons à la section 4.8, c'est bel et bien le cas. Nous trouverons que

$$T = 2\pi\sqrt{L_V C_V} \quad (4.20)$$

Il est clair que ce résultat peut être également appliqué aux phénomènes électriques. Nous remplaçons simplement le volume par la charge, la pression par le potentiel électrique, l'inductance hydraulique par sa contrepartie électrique, et ainsi de suite.

1. Les cuves ou les capacités des figures 4.29 et 4.30, sont-elles connectées en série ou en parallèle? Quelle est, en vertu de la réponse, la capacité totale du système des deux cuves?
2. Un système composé d'un condensateur et d'un solénoïde est le plus simple des oscillateurs électriques. Quelle est la grandeur qui oscille? Quels sont les deux dispositifs de stockage dont nous avons dit qu'ils devaient impérativement être présents? Quels éléments manifestent un comportement inductif?
3. Quelle est la période des oscillations du mercure dans le tube en U de la figure 4.26? Quelle est la plage des valeurs de la période des oscillations du phénomène El Niño?



1. Les cuves ou les condensateurs sont montés en série. Donc, l'inverse de la capacité totale est égale à la somme des inverses des capacités individuelles.
2. La grandeur qui va et vient dans le système est la charge électrique. Elle oscille d'une des plaques du condensateur vers l'autre, et inversement. C'est pourquoi un condensateur unique représente déjà deux dispositifs de stockage. Le solénoïde est l'élément inductif.
3. On observe 7 oscillations complètes en 10 secondes dans le diagramme des oscillations. La période est donc de $10 \text{ s} / 7 = 1.43 \text{ s}$; elle est constante. Dans le cas d'El Niño, l'indice ENSO de la figure 4.28c montre une période variant entre 2 et 7 ans. Il ne semble pas y avoir un ordre sous-jacent dans ce système aperiodique.



4.8 TRAITEMENT MATHÉMATIQUE DES OSCILLATIONS

Nous allons énoncer les équations qui sous-tendent le modèle de la figure 4.31 pour traiter sous forme analytique le phénomène oscillatoire. Pour des raisons typographiques, nous utiliserons la notation de Leibniz pour les dérivées temporelles.

4.8.1 Élaboration du modèle

L'élaboration du modèle selon la dynamique des systèmes commence par le bilan des volumes pour les deux réservoirs. Volumes et capacités donnent les différences de pression capacitatives qui, sommées, donnent la différence de pression sur la conduite $\Delta P_C = \Delta P_{C1} + \Delta P_{C2}$, qui elle-même est opposée à la somme des différences de pression résistive et inductive $\Delta P_R + \Delta P_L$. À partir des trois premières de ces quatre grandeurs, on peut exprimer ΔP_L , pour obtenir dI_V/dt et, par intégration, I_V , l'intensité du courant entre les réservoirs. Couplée avec R_V , cette intensité nous permet de calculer ΔP_R , et de fermer ainsi la structure du modèle.

Équations de bilan:
$$\frac{dV_1}{dt} = -I_V; \quad \frac{dV_2}{dt} = I_V$$

Lois de capacité:
$$V_1 = C_{V1} \Delta P_{C1}; \quad V_2 = -C_{V2} \Delta P_{C2}$$

Loi d'induction:
$$\frac{dI_V}{dt} = -\frac{\Delta P_L}{L_V}$$

Loi de résistance:
$$\Delta P_R = -R_V I_V$$

Loi des mailles:
$$\Delta P_C + \Delta P_R + \Delta P_L = 0$$

On peut interpréter $\Delta P_C = \Delta P_{C1} + \Delta P_{C2}$ comme l'entraînement total du courant qui est soumis à la résistance et à l'inductance de la conduite. En combinant les équations ci-dessus, après avoir attribué aux deux réservoirs montés en série une capacité globale calculée comme en électricité par:

$$\frac{1}{C_V} = \frac{1}{C_{V1}} + \frac{1}{C_{V2}}$$

on obtient tout d'abord deux équations couplées :

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta P_C)}{dt} &= \frac{1}{C_V} I_V \\ \frac{dI_V}{dt} &= -\frac{1}{L_V} (R_V I_V + \Delta P_C) \end{aligned}$$

En éliminant I_V entre ces deux équations, on obtient une seule équation différentielle du second ordre pour ΔP_C :

$$\frac{d^2(\Delta P_C)}{dt^2} + \frac{R_V}{L_V} \frac{d(\Delta P_C)}{dt} + \frac{1}{L_V C_V} \Delta P_C = 0 \quad (4.21)$$

qui est l'équation différentielle des oscillations amorties. Si on élimine ΔP_C , on obtient une équation différentielle pour I_V qui a exactement la même forme :

$$\frac{d^2 I_V}{dt^2} + \frac{R_V}{L_V} \frac{dI_V}{dt} + \frac{1}{L_V C_V} I_V = 0$$

4.8.2 Cas particulier des oscillations libres

Si on admet que les frottements sont nuls ($R_V = 0$), alors le second terme de l'équation différentielle ci-dessus disparaît :

$$\frac{d^2(\Delta P_C)}{dt^2} + \frac{1}{L_V C_V} \Delta P_C = 0$$

Si nous réécrivons l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2(\Delta P_C)}{dt^2} = -\frac{1}{L_V C_V} \Delta P_C$$

nous nous rendons compte que la fonction inconnue $\Delta P_C(t)$ est telle que, lorsqu'on la dérive deux fois, elle est identique à elle-même, à un facteur multiplicatif près. Il n'existe que trois fonctions qui ont cette propriété : le sinus et le cosinus (qui n'est qu'un sinus déphasé) et l'exponentielle. Posons, comme fonction d'essai une sinusoïdale, comme nous l'avons déjà fait avec l'équation (4.17) en remplaçant \hat{x} par ΔP_C :

$$\Delta P_C(t) = \hat{\Delta P}_C \sin(\omega t + \varphi)$$

Comme nous allons le voir ci-dessous, ω est fixé par les particularités du système physique, alors que ΔP_C et φ seront déterminés par les conditions initiales.

Substituons cette fonction d'essai dans l'équation différentielle :

$$-\omega^2 \Delta \hat{P}_C \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{L_V C_V} \Delta \hat{P}_C \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Delta \hat{P}_C \sin(\omega t + \varphi) \left(-\omega^2 + \frac{1}{L_V C_V} \right) = 0$$

La dernière égalité ne peut être vérifiée à tout instant que si le contenu de la parenthèse est nul. Nous pouvons ainsi déterminer que :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_V C_V}}$$

En conclusion, nous pouvons dire qu'un fluide qui s'écoule entre deux réservoirs reliés par une conduite sans frottement oscillera entre les deux réservoirs de telle façon que la différence de pression capacitive sur la conduite évoluera selon :

$$\Delta P_C(t) = \Delta \hat{P}_C \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_V C_V}}$$

Une fonction d'essai exponentielle aurait également donné une oscillation sinusoïdale ; on le démontre de manière analogue à ce qui va être établi pour les oscillations amorties dans la section suivante.

4.8.3 Recherche de la solution pour les oscillations amorties

Si nous analysons l'équation (4.21), nous observons que la fonction $\Delta P_C(t)$ est telle que toutes ses dérivées sont proportionnelles entre elles ; la seule fonction qui manifeste cette propriété est l'exponentielle. Nous n'avons pas d'autre choix que celui d'une fonction d'essai exponentielle :

$$\Delta P_C(t) = C e^{\alpha t}$$

La substitution de cette fonction et de ses dérivées dans l'équation différentielle donne (si nous posons $1/(L_V C_V) = \omega_0^2$ pour le carré de la fréquence angulaire de l'oscillation non amortie, c'est-à-dire pour ce que l'on appelle la fréquence propre du système) :

$$C e^{\alpha t} \left[\alpha^2 + \frac{R_V}{L_V} \alpha + \omega_0^2 \right] = 0$$

Cette égalité doit toujours être vérifiée, quel que soit t ; ce n'est possible que si le contenu des crochets s'annule. La résolution de l'équation du second degré pour α donne :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R_V}{2L_V} \pm \sqrt{\frac{R_V^2}{4L_V^2} - \omega_0^2} = -\frac{R_V}{2L_V} \pm \beta$$

Nous sommes donc en présence de deux solutions de l'équation différentielle. En analyse, on montre que la solution générale de l'équation différentielle est la combinaison linéaire (somme pondérée) de ces deux solutions :

$$\Delta P_C(t) = e^{-\frac{R_V}{2L_V} t} \left[A e^{\beta t} + B e^{-\beta t} \right]$$

Trois cas peuvent se présenter, suivant que $R_V^2/(4L_V^2)$ est supérieur, égal ou inférieur à ω_0^2 . Nous n'envisageons ici que le dernier cas qui, comme nous allons le montrer, est le seul qui décrit un processus oscillatoire. En effet, si les frottements sont trop importants, ils empêchent le système d'osciller. Dans le cas d'un amortissement faible ($R_V^2/(4L_V^2) < \omega_0^2$), que l'on appelle également sous-critique, le radicande est négatif et le radical devient imaginaire. Si nous posons : $j\sqrt{[\omega_0^2 - R_V^2/(4L_V^2)]} = j\omega_d$, où ω_d est la fréquence angulaire de l'oscillation amortie ou pseudo-fréquence (d pour damped), il vient :

$$\Delta P_C(t) = e^{-\frac{R_V}{2L_V}t} [Ae^{j\omega_d t} + Be^{-j\omega_d t}]$$

où A et B sont des constantes complexes. En vertu de la relation d'EULER :

$$e^{\pm jz} = \cos(z) \pm j \sin(z)$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Delta P_C(t) &= e^{-\frac{R_V}{2L_V}t} \left\{ A [\cos(\omega_d t) + j \sin(\omega_d t)] + B [\cos(\omega_d t) - j \sin(\omega_d t)] \right\} \\ &= e^{-\frac{R_V}{2L_V}t} [(A + B) \cos(\omega_d t) + j(A - B) \sin(\omega_d t)] \end{aligned}$$

Comme A et B sont des constantes arbitraires, nous pouvons les remplacer en leur substituant : $(A + B) = \Delta \hat{P}_C \sin(\varphi)$ et $j(A - B) = \Delta \hat{P}_C \cos(\varphi)$. L'équation ci-dessus prend alors la forme :

$$\Delta P_C(t) = \Delta \hat{P}_C e^{-\frac{R_V}{2L_V}t} [\sin(\omega_d t) \cos(\varphi) + \cos(\omega_d t) \sin(\varphi)]$$

L'utilisation d'un des théorèmes d'addition de la trigonométrie permet de réécrire la solution :

$$\Delta P_C(t) = \Delta \hat{P}_C e^{-\frac{R_V}{2L_V}t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

C'est l'équation d'une oscillation amortie, dont l'amplitude, donnée par $A(t) = \Delta \hat{P}_C \exp[(-R_V/2L_V)t]$, décroît de manière exponentielle en fonction du temps. La figure 4.34 montre les oscillations entre deux réservoirs communicants. La ligne discontinue qui enveloppe la courbe des oscillations est l'exponentielle qui décrit la décroissance de l'amplitude.

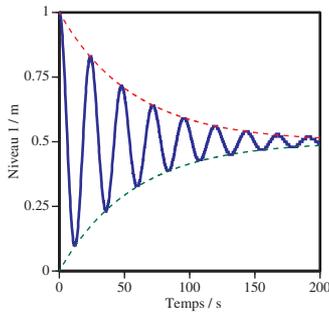


FIGURE 4.34 Oscillation amortie du fluide circulant entre deux réservoirs communicants. La courbe discontinue montre le taux de décroissance de l'amplitude.

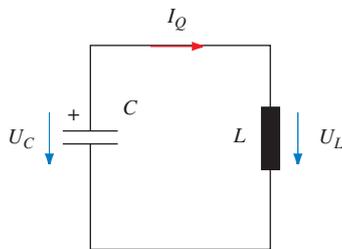


FIGURE 4.35 Circuit oscillant.

EXEMPLE 4.8. Énergie lors d'oscillations électromagnétiques.

Considérons un circuit électrique simple composé d'une capacité et d'une inductance idéales (fig. 4.35), qui valent respectivement 1.0 μ F et 0.020 H. Le condensateur est chargé à une tension de 100 V. (a) Calculer l'énergie du condensateur et de l'inductance en fonction du temps. (b) Quand le taux de variation de l'énergie de l'inductance atteint-il son maximum (ou minimum)? (c) Calculer l'énergie totale du système.

SOLUTION : Dans la section 4.7, nous avons découvert que le système doit être le siège d'oscillations harmoniques de fréquence

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_Q C_Q}} = \frac{1}{\sqrt{0.020 \text{ H} \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 7071 \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.89 \text{ ms}$$

La tension et le courant varient sinusoïdalement dans le temps (fig. 4.36):

$$U_c(t) = U_{c0} \cos(\omega t)$$

$$I_Q(t) = C_Q U_{c0} \omega \sin(\omega t)$$

(a) Selon les équations (3.21) et (4.16), les énergies du condensateur et de l'inductance sont

$$E_c(t) = \frac{1}{2} C_Q U_c^2(t) = \frac{1}{2} C_Q U_{c0}^2 \cos^2(\omega t)$$

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L_Q I_Q^2 = \frac{1}{2} L_Q C_Q^2 U_{c0}^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

(fig. 4.37). La dernière relation peut être transformée au moyen de l'expression pour la fréquence, ce qui donne

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L_Q C_Q^2 U_{c0}^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} L_Q C_Q^2 U_{c0}^2 \frac{1}{L_Q C_Q} \sin^2(\omega t) = C_Q U_{c0}^2 \sin^2(\omega t)$$

(b) L'examen de la fonction $E_L(t)$ montre que le taux de variation de l'énergie de l'inductance est nul à chaque quart de période. Il a son maximum à $1/4$ de la période, puis à nouveau à $3/4 T$, et ses minima à $1/2 T$ et à la fin de la période.

(c) Pour calculer l'énergie totale, nous avons simplement à sommer les contributions capacitives et inductives:

$$E = E_c(t) + E_L(t) = \frac{1}{2} C_Q U_{c0}^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = \frac{1}{2} C_Q U_{c0}^2$$

Évidemment, l'énergie totale est constante et correspond à l'énergie initiale du condensateur. ■

Résumé du chapitre

Le démarrage ou l'arrêt d'un courant, que ce soit celui d'un fluide ou de l'électricité, ne peut pas se faire instantanément, à cause de l'inertie du système. Il nécessite la présence d'une différence de pression ou de potentiel qui rend possible la variation du courant; il s'agit du phénomène d'induction.

La différence de pression ou de potentiel est proportionnelle au taux de variation de l'intensité du courant: $\Delta\varphi_X = -L_X \dot{I}_X$. Dans cette relation, appelée loi d'induction, la grandeur X peut être le volume V ou la charge électrique Q . Le coefficient L_X est l'inductance du système.

Le phénomène d'induction est une conséquence de l'inertie du fluide en hydraulique. Par contre, en électricité, cette «inertie» est due au fait que le courant électrique est toujours accompagné d'un champ magnétique; lors d'une variation de l'intensité du courant électrique, le champ magnétique associé doit varier lui aussi, ce qui a le même effet que l'inertie des fluides.

Contrairement aux résistances hydrauliques ou électriques, dont la présence dans un système entraîne une dissipation d'énergie, les éléments inductifs peuvent accumuler

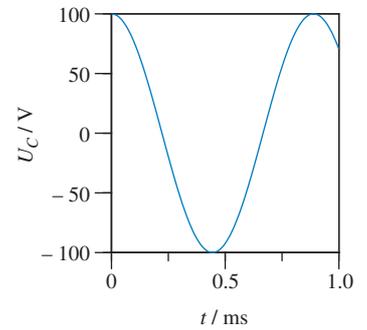


FIGURE 4.36 Évolution de la tension du condensateur.

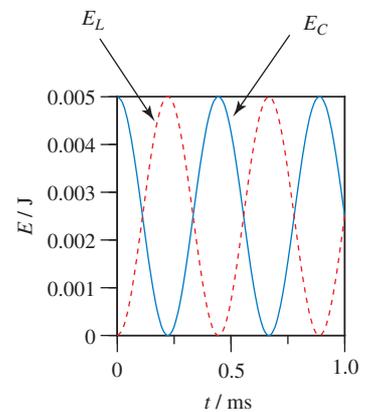


FIGURE 4.37 Évolution de la répartition de l'énergie sur les composants capacitif et inductif d'un système oscillant.

de l'énergie et la restituer. La puissance instantanée associée à un processus inductif est égale à $\mathcal{P}_X = -\dot{\phi}_X I_X$ avec $\dot{\phi}_X = -L_X \dot{I}_X$. Pour une inductance constante, ce qui est usuel, l'énergie accumulée par le processus de croissance d'un courant à partir d'une valeur initiale nulle est $\Delta E = \frac{1}{2} L_X I_X^2$ où I_X est la valeur finale atteinte par l'intensité du flux de la grandeur X .

Un système constitué du couplage adéquat d'au moins deux éléments capacitifs et d'un élément inductif peut manifester un comportement oscillatoire.

Questions

- On entend souvent dire que le phénomène d'induction est la conséquence d'un phénomène de «résistance», à savoir la résistance à la variation du courant. Dans le cas de l'hydraulique plus particulièrement, on peut concevoir que l'inertie est la cause de cette opposition à une variation du mouvement. Quelle est la différence entre l'induction et la résistance provoquée par le frottement interne du fluide?
- Si un élément dans un circuit électrique possède simultanément une résistance et une inductance, les différences de potentiel résistives et inductives sur l'élément s'additionnent. Pourquoi est-ce ainsi? Pourquoi ces deux différences de potentiel ne sont-elles pas toutes deux égales à la différence de potentiel sur l'élément?
- Dans l'exemple 4.2, il est affirmé que la différence de pressions inductive à l'instant $t = 0$ s est égale à la différence de pression sur la colonne de fluide dans le réservoir. Pourquoi cette affirmation n'est-elle pas tout à fait correcte? Qu'avons-nous négligé en postulant ce résultat? Le problème est le même que celui auquel il est fait allusion dans la Question 7 du chapitre 1.

Exercices

- Dans un circuit tel que celui de la figure 4.11, équipé d'une batterie de 24 V, on observe, dans deux expériences différentes, des taux initiaux de croissance de l'intensité du courant de $5.0 \cdot 10^3$ A s⁻¹, et 10 A s⁻¹. Que valent les inductances des éléments dans chacun des cas?
- Une huile de masse volumique égale à 910 kg m^{-3} et de viscosité égale à $0.081 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ s'écoule à travers une longue conduite droite. La longueur et le rayon de la conduite sont respectivement de 10 m et 50 mm. Le flux volumique est de $10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. (a) Quelles sont les valeurs de la résistance et de l'inductance hydrauliques? (b) Quelle est la constante de temps de ce dispositif hydraulique? (c) Que vaudra la différence de pression induite si l'on interrompt le courant en 0.010 s?
- Un réservoir au fond duquel est connectée une longue conduite horizontale a une capacité de $10^{-5} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$. La résistance et l'inductance du système sont respectivement de 10^6 Pa s m^{-3} et $10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$. La masse volumique du fluide dans la cuve est de 1000 kg m^{-3} et le niveau initial est de 1.0 m. (a) Que valent les deux constantes de temps du système? (b) Esquissez de manière aussi précise que possible l'évolution du flux volumique en fonction du temps (pour les 20 premières secondes).
- On pompe un fluide à travers une conduite rectiligne dont l'inductance hydraulique est de $5.0 \cdot 10^6 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-3}$ et la résistance négligeable. Le flux volumique croît linéairement de $-0.02 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ à $0.03 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ durant les 5 premières secondes. À l'instant $t = 2.0$ s, la pression du fluide à la sortie de la conduite vaut 1.50 bar, que vaut-elle à l'entrée? Comment cette valeur change-t-elle à l'instant $t = 3.0$ s?
- On remplit au moyen d'un tuyau horizontal de 0.50 m de longueur et de 6.0 cm de diamètre, placé à la hauteur du fond, un récipient à parois verticales et à section quadratique de 1.0 m de côté. La pompe d'alimentation produit une surpression de 0.20 bar, le fluide pompé a une masse volumique de 900 kg m^{-3} et une viscosité de 0.20 Pa s . (a) Quelle sera la valeur maximale du flux volumique si on néglige le phénomène d'induction? (b) Que vaut la puissance hydraulique dissipée à cause des frottements dans la conduite à l'instant où le niveau dans le récipient atteint la moitié de la valeur finale? (c) Esquisser aussi précisément que possible l'évolution au cours du temps du flux volumique en tenant compte du phénomène d'induction.
- À l'instant $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur d'un circuit électrique comprenant une batterie, un solénoïde idéal et une résistance montés en série. Le tableau 4.2 indique les valeurs de la tension mesurée sur le solénoïde en fonction du temps. (a) Quelle est la tension délivrée par la batterie? (b) Quelle est la constante de temps inductive du circuit? (Suggestion: reportez les données dans une échelle linéaire-logarithmique.)

TABLEAU 4.2
Problème 6.

t / ms	U_L / V
1.0	18.2
2.0	13.8
3.0	10.4
4.0	7.90
5.0	5.98
6.0	4.53
7.0	3.43
8.0	2.60

Problèmes

- On pompe du pétrole brut à travers une conduite de 100 km de longueur et de 1.0 m de diamètre. En admettant que l'écoulement est amorcé à partir de l'immobilité, déterminez le temps que mettra le courant pour atteindre 99% de sa valeur stationnaire. Considérez que l'écoulement reste laminaire.
- On pompe du pétrole brut à travers une conduite de 100 km de longueur et de 1.0 m de diamètre. En admettant que l'écoulement est amorcé à partir de l'immobilité, déterminez le temps que mettra le courant pour atteindre 99% de sa valeur stationnaire. Considérez que l'écoulement reste laminaire.
- Un solénoïde idéal ayant une inductance de 5.0 mH est connecté en série avec une résistance de 10Ω à une source. La tension de la source est variée pour entretenir un courant selon la figure 4.38. (a) Déterminez la tension de la source en fonction du temps. (b) Que valent les puissances électriques

dans la résistance et dans l'inductance à 4.5 ms ? (c) À 4.5 ms, d'où vient l'énergie libérée dans la résistance ?

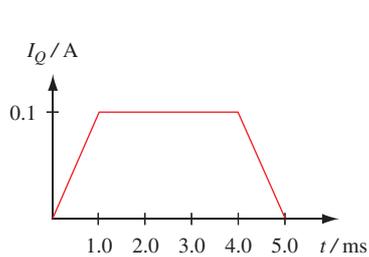


FIGURE 4.38
Problème 8

9. Dans un circuit comprenant une alimentation, un solénoïde et une résistance montés en série, la tension sur l'alimentation est variée de telle manière que le courant est donné par $I_Q(t) = 3.0 \text{ A} - 5.0 \text{ A s}^{-1} \cdot t$. La résistance et l'inductance valent respectivement 4.0Ω , and 0.50 H . (a) Que valent les tensions sur la résistance et l'inductance à l'instant $t = 0.40 \text{ s}$? (b) Déterminez la tension de l'alimentation en fonction du temps.
10. L'intensité du courant dans un solénoïde varie linéairement dans le temps de 1.0 A à -1.0 A en l'espace de 2.0 s . Le solénoïde a une inductance de 0.50 H et une résistance de 1.0Ω . (a) Tracez la tension sur le solénoïde en fonction du temps. (b) Tracez séparément la puissance due à la résistance et celle due à l'inductance en fonction du temps. (c) Combien d'énergie la source doit-elle délivrer durant les 2 premières secondes ?

INTERLUDE II

SYSTÈME CARDIOVASCULAIRE EN TANT QUE SYSTÈME RLC

Un premier modèle du fonctionnement du système cardiovasculaire d'un mouton a été élaboré dans l'interlude I. Ce modèle de type RC nous a permis d'atteindre une assez bonne adéquation avec les données expérimentales, à une exception près. Durant un bref intervalle du cycle, le sang reflue vers le cœur sans y retourner et son écoulement manifeste des oscillations, ce qui ne peut être expliqué et modélisé qu'en attribuant au système des propriétés inductives. Un des objectifs de cet interlude est d'intégrer cette particularité dans le modèle existant.

II.1 INTRODUCTION

La figure II.1 montre les résultats de la simulation du comportement du système cardiovasculaire d'un mouton basée sur un modèle de type RC. Ce modèle ne rend pas compte du reflux du sang dans l'aorte (valeur négative du courant volumique) observé entre approximativement 0.35 s et 0.6 s, ni des oscillations entre 0.4 s et 0.75 s.

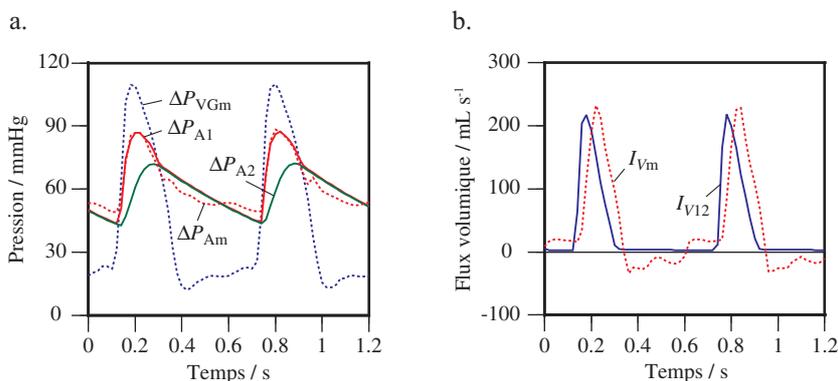


FIGURE II.1 Résultats de la simulation du modèle provisoire du système cardiovasculaire d'un mouton: (a) pression ventriculaire ΔP_{VG} et pression aortique ΔP_{A1} comparée à la pression mesurée ΔP_{Am} ; (b) flux aortique simulé I_{V12} comparé au flux mesuré I_{Vm} .

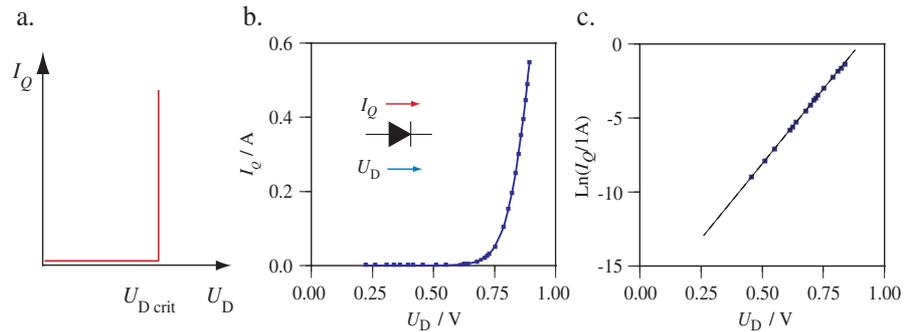
Nous avons appris au chapitre 4 qu'un système ne peut manifester un comportement oscillatoire que s'il possède des propriétés à la fois capacitives et inductives. Nous nous proposons de compléter notre modèle en prenant en compte l'inertie de l'écoulement du sang dans l'aorte. Nous le ferons dans un premier temps en complétant le modèle de windkessel électrique (section II.3), puis en le transposant dans le modèle d'écoulement du sang (section II.4).

Dans nos modèles de type windkessel électrique, l'action de la diode que nous utilisons pour simuler le comportement de la valve aortique est représentée de manière simple. Nous allons proposer un modèle plus réaliste et montrer que son insertion dans un modèle peut entraîner d'importants problèmes numériques (section II.2).

II.2 MODÉLISATION DYNAMIQUE D'UNE DIODE

Dans le modèle de l'interlude I, nous avons utilisé une diode pour simuler l'action de la valve aortique. Nous avons admis qu'elle ne laissait passer le courant qu'à partir d'un certain seuil, ce qui correspond à une caractéristique simple, mais peu réaliste (fig. II.2a), la réalité étant représentée par la figure II.2b. Dans le modèle, la fonction de la diode est simulée en exigeant qu'elle ne laisse passer le courant qu'à partir d'une certaine valeur de la tension et qu'elle empêche des valeurs négatives de l'intensité (section I.3.1). Ce modèle simple donne d'excellents résultats, comme le démontre la figure I.9.

FIGURE II.2 Caractéristique d'une diode: (a) modèle simplifié utilisé dans les simulations de l'interlude I; (b) caractéristique réelle; (c) représentation logarithmique de l'intensité.



Dans cette section, nous allons d'abord mesurer la caractéristique d'une diode, déterminer comment l'intégrer dans le modèle et faire apparaître les problèmes qui peuvent se manifester dans la simulation des modèles dont elle fait partie.

II.2.1 Caractéristique d'une diode

La caractéristique de la diode (fig. II.2b) est clairement non ohmique. Si l'on reporte le logarithme de l'intensité du courant en fonction de la tension, on obtient une droite (fig. II.2c), ce qui nous permet d'approximer la caractéristique de la diode au moyen d'une fonction exponentielle:

$$I_{QD} = I_{QD0} (e^{aU_D} - 1) \tag{II.1}$$

La constante soustractive rend compte du fait que l'intensité est nulle lorsque la tension sur la diode s'annule. Pour de grandes valeurs négatives de la tension, le terme $\exp(aU_D)$ devient très petit et l'intensité devient proche de $-I_{QD0}$.

Détermination expérimentale des paramètres de la diode. Nous utilisons le circuit de type windkessel électrique de la figure II.3. Les résultats des mesures au cours desquelles nous varions la tension de la source et mesurons les tensions aux bornes de la source, de la résistance R_1 et du condensateur apparaissent dans la figure II.4.

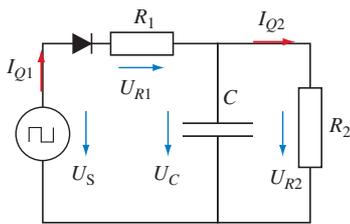
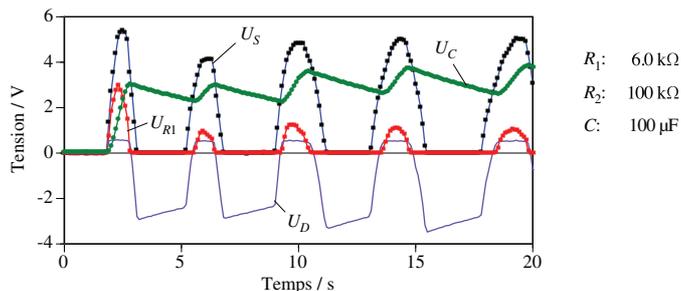


FIGURE II.3 Circuit de type windkessel électrique pour la détermination des paramètres de la diode.

FIGURE II.4 Résultats des mesures effectuées sur le circuit de type windkessel de la figure II.3. Les valeurs de la tension U_D ont été calculées à partir de la loi des mailles.



R_1 : 6.0 kΩ
 R_2 : 100 kΩ
 C : 100 μF

L'évolution de la tension sur la diode qui apparaît dans le graphique découle de la loi des mailles:

$$U_D(t) = U_S(t) - U_{R1}(t) - U_C(t) \tag{II.2}$$

Nous déterminons l'intensité du courant à travers la diode à partir de la loi d'OHM:

$$I_{QD} = \frac{1}{R_1} U_{R1}(t) \tag{II.3}$$

Nous sélectionnons une plage de valeurs pour lesquelles la tension U_D est positive et suffisamment grande pour que l'intensité soit notable, à savoir $U_D > 0.35$ V. Il en résulte le graphique de la figure II.5.

Un ajustement aux données de la figure II.5b au moyen de la méthode des moindres carrés donne, entre le logarithme de l'intensité du courant à travers la diode et la tension sur cet élément, la relation:

$$\ln(I_{QD} / 1 \text{ A}) = 21.61 \text{ V}^{-1} U_D - 20.23 \tag{II.4}$$

Il s'ensuit que les paramètres que nous devons introduire dans la relation (II.1) sont respectivement:

$$a = 21.61 \text{ V}^{-1} \text{ et } I_{QD0} = 1 \text{ A } e^{-20.23} = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ A} \tag{II.5}$$

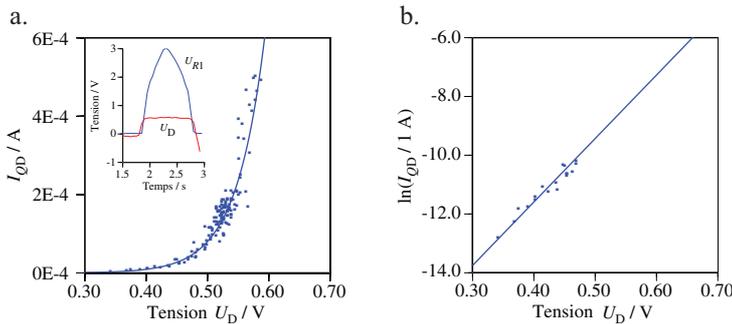


FIGURE II.5 Caractéristique d'une diode: (a) valeurs expérimentales de l'intensité en fonction de la tension sur la diode obtenues à partir du circuit de la figure II.3; (b) même caractéristique dans une échelle logarithmique.

II.2.2 Apparition de relations algébriques circulaires dans le modèle

Lorsque l'on essaie d'introduire cette caractéristique de la diode dans le modèle du windkessel électrique de la figure II.3, le logiciel n'accepte pas le lien entre l'intensité I_{Q1} et la tension U_D sur la diode (fig. II.6). La raison est la suivante: nous calculons l'intensité du courant I_{Q1} au moyen de la tension sur la première résistance du circuit:

$$I_{Q1} = \frac{1}{R_1} U_{R1} \tag{II.6}$$

Cependant, cette grandeur est dépendante de la tension sur la diode par l'intermédiaire de la loi des mailles:

$$U_{R1} = U_S - U_C - U_D \tag{II.7}$$

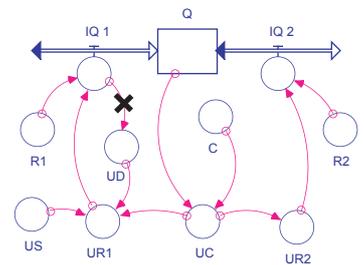


FIGURE II.6 L'introduction directe de la caractéristique de la diode dans le modèle du windkessel électrique provoque l'apparition d'une relation circulaire entre trois variables, ce que n'autorise pas le logiciel.

Comme la tension U_D dépend de l'intensité du courant à travers la diode en vertu de l'équation (II.1), explicitement :

$$U_D = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{I_{Q1}}{I_{QD0}} + 1 \right) \quad (\text{II.8})$$

nous obtenons une relation circulaire entre U_{R1} , I_{Q1} et U_D . Le logiciel que nous utilisons pour la modélisation dynamique (comme la plupart des logiciels standard) n'est pas en mesure de gérer ce genre de situation et n'accepte pas la création du lien entre I_{Q1} et U_D .

Pourquoi le logiciel ne gère-t-il pas cette situation alors que des relations circulaires sont présentes dans tous nos modèles qui contiennent des boucles de rétroaction ? Un examen de ces modèles révèle que les boucles de rétroaction contiennent toujours au moins un élément de stockage, ce qui rend le modèle dynamique. Sans un tel élément, les relations circulaires entre des variables aboutissent à des équations algébriques non linéaires. En effet, si nous substituons les équations (II.6) et (II.8) dans la relation (II.7), nous obtenons :

$$U_{R1} = U_S - U_C - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{R_1} \frac{U_{R1}}{I_{QD0}} + 1 \right) \quad (\text{II.9})$$

qui est une équation non linéaire pour U_{R1} .

Nous reviendrons à la section II.2.6 sur les problèmes numériques liés à l'apparition de relations algébriques circulaires.

II.2.3 Résolution du problème lié aux relations algébriques circulaires

Comme le logiciel ne gère pas les modèles contenant des relations algébriques circulaires, nous devons trouver le moyen de résoudre ce problème. En examinant le circuit de la figure II.3, on se rend compte que c'est la connexion en série de la diode et de la première résistance qui en est l'origine. Par contre, le montage en série de la première et de la seconde résistance n'est pas problématique : le condensateur placé entre ces résistances fait du circuit un système dynamique. On en conclut qu'il doit y avoir au moins un élément dynamique dans chaque boucle qui apparaît dans un modèle.

Du point de vue physique, il y a deux manières d'introduire un élément dynamique entre la diode et la première résistance. Nous pouvons admettre que la diode n'est pas seulement conductrice, mais qu'elle a également des propriétés capacitives. La seconde manière est de lui attribuer des propriétés inductives qui rendent compte de l'inertie du courant électrique, thème que nous avons traité au chapitre 4, section 4.3.3.

Pour justifier cette manière de procéder, il suffit de réaliser que les éléments des systèmes dynamiques ont des propriétés multiples. Attribuer des propriétés capacitives ou inductives à une diode est réaliste. Les éléments électriques que nous avons rencontrés jusqu'ici ont simultanément des propriétés capacitives, inductives et résistives. Comme souvent une de ces propriétés est dominante, on peut modéliser l'élément en ne tenant compte que de la propriété dominante. Un exemple mécanique de la multiplicité des propriétés est l'aorte qui est à la fois un système capacitif qui stocke le sang, le laisse circuler en lui opposant une certaine résistance et, à cause de l'inertie du sang qui la traverse, est également un élément inductif. Les trois propriétés ont des importances pratiquement égales.

II.2.4 Modèle de diode avec propriétés capacitives

L'attribution de propriétés capacitives à la diode est réalisée par l'introduction d'un condensateur auxiliaire placé de telle manière qu'il engendre une boucle supplémentaire contenant l'alimentation, la diode et ce condensateur (fig. II.7) afin de rendre dynamique la partie gauche du circuit.

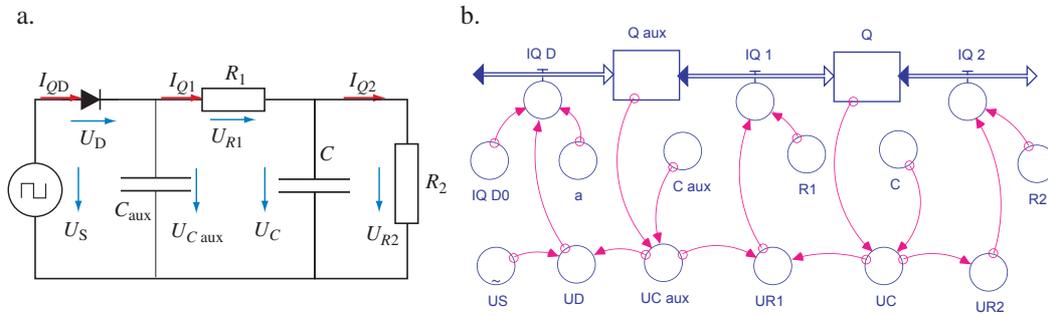


FIGURE II.7 Résolution du problème des relation algébriques circulaires : (a) adjonction d'un condensateur auxiliaire entre la diode et la première résistance afin de rendre dynamique la partie gauche du circuit ; (b) diagramme de dynamique des systèmes correspondant.

L'ajout du condensateur auxiliaire modifie les calculs par rapport au modèle de la section I.3.1. La loi des mailles nous fournit la tension sur la diode :

$$U_D = U_S - U_{C,aux}$$

sur la première résistance :

$$U_{R1} = U_{C,aux} - U_C$$

et sur la seconde résistance :

$$U_{R2} = U_C$$

Les tensions sur les condensateurs découlent de la loi de capacité. L'intensité du courant à travers la diode est donnée par l'équation (II.1), celle des deux autres par la loi d'OHM avec la même condition que dans le modèle de la section I.3.1 en ce qui concerne I_{Q1} .

Il reste une question importante à régler : quelle valeur de la capacité faut-il attribuer à ce condensateur auxiliaire ? Pour des raisons physiques, elle doit être extrêmement faible, plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle du condensateur du modèle de windkessel électrique.

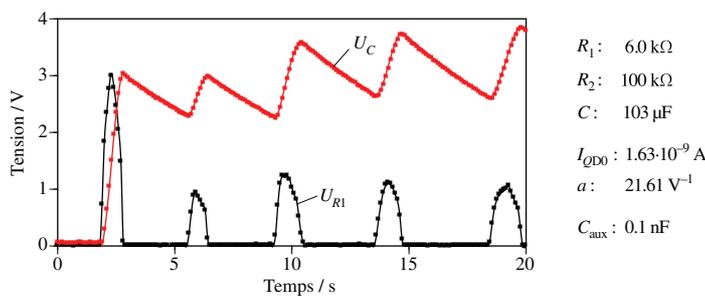


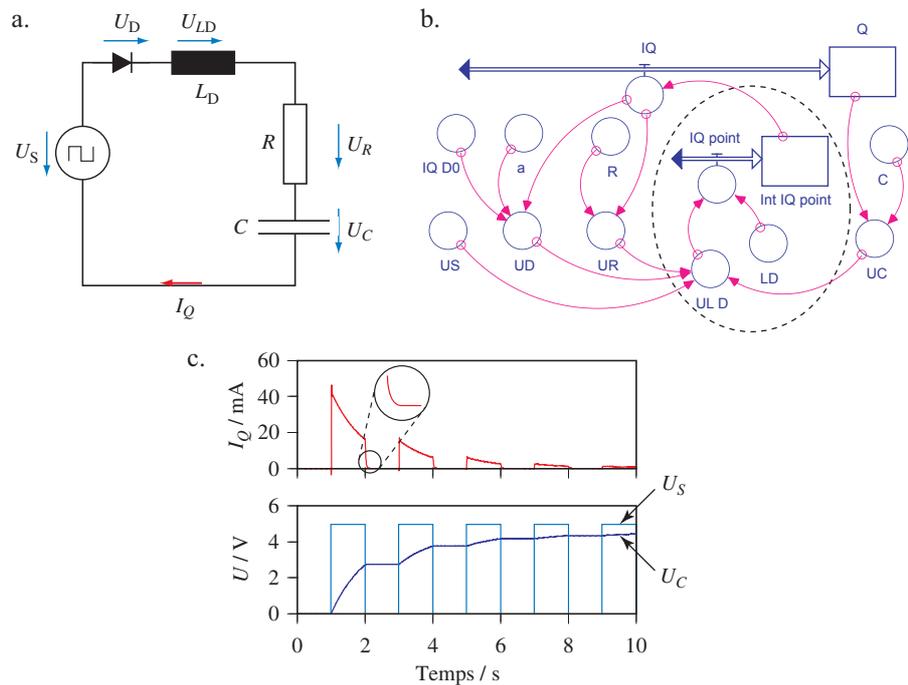
FIGURE II.8 Simulation du modèle de la figure II.7. Les valeurs mesurées sont représentées par des points, les résultats de la simulation par une ligne continue. Les valeurs des paramètres apparaissent à droite. Seule la capacité a dû être augmentée de 3%.

Pour la simulation présentée à la figure II.8, la valeur choisie est de 100 pF, mais nous aurions pu choisir une valeur plus faible. Si nous choisissons une valeur supérieure à 10 μF, nous commençons à remarquer des différences entre la simulation et les valeurs mesurées. À partir de 100 μF, la simulation ne ressemble en rien aux valeurs mesurées. La présence dans le modèle de deux condensateurs de capacités qui diffèrent l'une de l'autre de plusieurs ordres de grandeur provoque l'apparition d'un nouveau problème numérique, celui des équations «raides» qui sera abordé à la section II.2.6.

II.2.5 Modèle de diode avec propriétés inductives

Une autre manière d'intégrer la caractéristique d'une diode dans un modèle est de lui attribuer une propriété inductive.

FIGURE II.9 Résolution du problème des relation algébriques circulaires: (a) circuit de charge d'un condensateur à travers une diode et une résistance; (b) diagramme de dynamique des systèmes correspondants; la partie entourée d'un ovale en pointillé comprend la loi d'induction ainsi que l'intégrateur qui calcule l'intensité; (c) simulation pour une tension variable (signal carré) de l'alimentation.



Si nous ajoutons un élément inductif en tant que partie de la diode dans le circuit de charge d'un condensateur de la figure II.9a, dans le diagramme de dynamique des systèmes, l'intensité du courant de charge devra être évaluée de manière différente. Au lieu d'appliquer directement la loi d'OHM, on l'obtient par intégration de son taux de variation qui découle de la loi d'induction:

$$\dot{i}_Q = \frac{1}{L_D} U_{LD}$$

Cette partie du modèle apparaît dans l'ovale en pointillé du diagramme de dynamique des systèmes de la figure II.9b. La loi des mailles fournit la tension U_{LD} :

$$U_{LD} = U_S - U_C - U_R - U_D$$

Les tensions sur le condensateur et sur la résistance sont fournies respectivement par les lois de capacité et d'OHM, alors que la tension sur la diode est égale à:

$$U_D = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{I_Q}{I_{QD0}} + 1 \right) \quad (\text{II.10})$$

II.2.6 Problèmes numériques

Dans cette section, nous allons aborder un certain nombre de problèmes numériques qui peuvent survenir lors de la simulation de modèles de systèmes dynamiques.

Équations algébriques non linéaires résultant d'une relation circulaire. Lorsque nous avons introduit la caractéristique réaliste de la diode dans le modèle de windkessel électrique à la section II.2.2, l'évaluation de la tension sur la première résistance débouche sur l'équation

$$U_{R1} = U_S - U_C - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{R_1} \frac{U_{R1}}{I_{Q,D0}} + 1 \right) \quad (\text{II.11})$$

qui est une équation non linéaire pour U_{R1} . Comme elle ne peut pas être résolue analytiquement, c'est-à-dire au moyen d'une formule telle que celle qui sert à résoudre l'équation du deuxième degré, elle devrait être résolue à chaque étape de la procédure de simulation du modèle. La résolution d'une telle équation nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif. Plaçons-nous à l'instant t_i . La valeur de $U_S(t_i)$ est donnée, ainsi que celles des paramètres a , I_{QD0} et R_1 . Si nous admettons que la valeur de U_{R1} est censée avoir été calculée à l'étape précédente t_{i-1} , nous pouvons l'insérer dans le membre de droite de l'équation (II.11) afin d'obtenir une nouvelle valeur pour U_{R1} , que nous pouvons à nouveau insérer dans le membre de droite en répétant l'opération en espérant que la procédure converge suffisamment rapidement et utiliser cette nouvelle valeur pour cette étape de la simulation.

Mais, comme nous l'avons vu, beaucoup de logiciels standard de modélisation dynamique n'intègrent pas ces algorithmes gourmands en temps de calcul, raison pour laquelle ils refusent les relations algébriques circulaires.

Équations «raides». Nous avons contourné le problème des relations algébriques circulaires en rendant dynamique la partie gauche du circuit de la figure II.3 par l'introduction d'un élément de stockage, un condensateur, entre la diode et la première résistance (fig. II.7a).

Si nous souhaitons utiliser de très petites valeurs de la capacité C_{aux} afin de minimiser son influence sur le comportement dynamique du système, les méthodes numériques simples intégrées dans les logiciels de modélisation dynamique butent sur de sérieux problèmes conduisant à l'échec de la simulation.

Le choix de la longueur du pas d'intégration (section 16.4.4) est crucial pour que la simulation du comportement du système soit aussi fidèle à la réalité que possible. Si le pas choisi est trop grand, la simulation diverge, produisant des résultats insensés. Dans un tel cas, la simulation n'est pas seulement inexacte, mais également instable, donc totalement inutilisable. Jusqu'à présent, nous avons toujours réussi à trouver une valeur convenablement petite pour la longueur du pas d'intégration utilisée par le logiciel.

Mais que signifie «convenable» dans le cas qui nous occupe? C'est l'examen des constantes de temps apparaissant dans les modèles qui guide ce choix. Par exemple, si nous simulons la charge d'un condensateur, nous choisissons la longueur du pas d'intégration de manière à être certain que le logiciel effectue un nombre suffisant d'étapes de calcul durant une période de longueur correspondant à celle durant laquelle ont lieu

les plus grandes variations du système, Si le système considéré contient des éléments avec différentes constantes de temps, on choisit l'intervalle de temps adapté aux variations les plus rapides.

Qu'advient-il si les constantes de temps diffèrent de plusieurs ordres de grandeur? C'est exactement ce à quoi nous sommes confrontés dans notre exemple. Si nous attribuons au condensateur auxiliaire une capacité de 100 pF et que la première résistance vaut 6 kΩ, la constante de temps est de l'ordre de la microseconde. Cela signifie que nous devrions choisir un pas de l'ordre de 10^{-7} s, contraignant le logiciel à effectuer 10 millions de pas pour une seconde de temps de simulation, alors que la constante de temps de R_1 et du condensateur d'origine est de l'ordre de la seconde. Si l'on choisissait pour C_{aux} une valeur encore plus faible, le problème serait encore plus grave, le logiciel aurait besoin de beaucoup plus de temps pour calculer une solution, ou il n'y aurait plus suffisamment de mémoire pour stocker toutes les valeurs nécessaires pour l'acquisition du résultat.

L'idéal serait que les mathématiciens mettent à disposition un algorithme qui ajusterait la longueur du pas automatiquement, c'est-à-dire le rendre beaucoup plus grand dès que les variations rapides ont cessé et que le système varie de manière plus calme. Les bons logiciels de modélisation intègrent usuellement une telle possibilité.

Cependant, dans beaucoup de cas, et notre exemple en fait partie, cette technique ne fonctionne pas. La méthode esquissée devient instable dès que le logiciel tente d'augmenter la valeur du pas d'intégration, même dans les plages de valeurs pour lesquelles la solution varie très lentement. La variation rapide reste «incrustée» dans les équations, même lorsque l'on entre dans une période où elle a cessé d'être effective. Lorsque l'on est confronté à un problème de la sorte, les mathématiciens disent que les équations du modèle sont «raides». Les systèmes raides nécessitent l'utilisation de procédures numériques particulières qui garantissent la stabilité de la solution même lorsque le pas d'intégration est augmenté. Ces méthodes sont dites implicites.

Instabilité de l'algorithme d'intégration. Lorsque l'on lance la simulation du modèle de la charge du condensateur de la section II.2.5, on bute sur de sérieux problèmes dans de nombreux cas. Quelle en est la cause? Nous savons que l'intensité du courant ne doit pas devenir négative, la diode étant censée ne laisser passer le courant que dans le sens positif. La relation (II.10) devrait éviter que l'intensité tombe en dessous de $-I_{QD0}$. Vu que le courant $-I_{QD0}$ est très faible, ce ne devrait pas être un problème.

Cependant, il se révèle que l'évaluation de l'intensité du courant par intégration de son taux de variation peut devenir instable, la valeur de I_Q (représentée par le stock dans la partie entourée d'un ovale dans la figure II.10b) peut devenir fortement négative. C'est un problème numérique dû à la nature des intégrateurs numériques. La forme la plus simple d'un tel intégrateur est la méthode d'EULER explicite:

$$I_{Q,i+1} = I_{Q,i} + \dot{I}_{Q,i} \cdot \Delta t \tag{II.12}$$

ce qui équivaut à ajouter à la valeur provenant du pas précédent l'accroissement calculé comme produit du taux de variation instantané et de l'intervalle de temps Δt . Si le taux de variation est fortement négatif, ou si Δt est trop grand, ou les deux, $I_{Q,i+1}$ pourra devenir fortement négatif. Ce fait rend invalide le pas suivant de l'intégration numérique. Pour cette raison, nous devons nous assurer que cela n'arrive pas en imposant une condition qui empêche I_{QD} de devenir négatif, par exemple:

$$\begin{aligned} \text{IF } (I_Q + U_{LD} / L * DT) > 0 \text{ THEN } dI_Q / dt = U_{LD} / L \\ \text{ELSE } dI_Q / dt = -c * I_Q / DT \end{aligned}$$

L'algorithme teste si $I_{Q, i+1}$ reste positif. Dans l'affirmative, il utilise la loi d'induction pour calculer le taux de variation de l'intensité du courant. Si la réponse est négative, nous utilisons une relation qui entraîne une décroissance exponentielle vers zéro de l'intensité tout en évitant qu'elle devienne négative. L'effet de cette condition est rendu visible dans la partie agrandie de la figure II.9c pour une valeur de $c = 1$.

Si on prend une valeur de c plus grande, I_Q décroît plus rapidement vers zéro. Dans ce cas, et/ou pour une valeur faible de L , on peut être confronté à un nouveau problème numérique qui rend «raides» les équations du modèle.

II.3 MODÈLE DE WINDKESSEL ÉLECTRIQUE AVEC INDUCTION

Il n'est possible de modéliser l'apparition d'oscillations dans le flux aortique qu'en introduisant dans le modèle un élément inductif qui permet de prendre en compte l'inertie inhérente à tout écoulement de fluide, ce qui nous permettra de quantifier l'intensité du flux sanguin à l'intérieur de l'aorte, et non plus simplement à ses extrémités.

II.3.1 Élargissement du modèle

Dans un premier temps, nous complétons le modèle du windkessel électrique élaboré à la section I.3.3 (fig. I.11) en y insérant une self entre les deux condensateurs qui représentent les deux segments en lesquels nous avons découpé l'aorte.

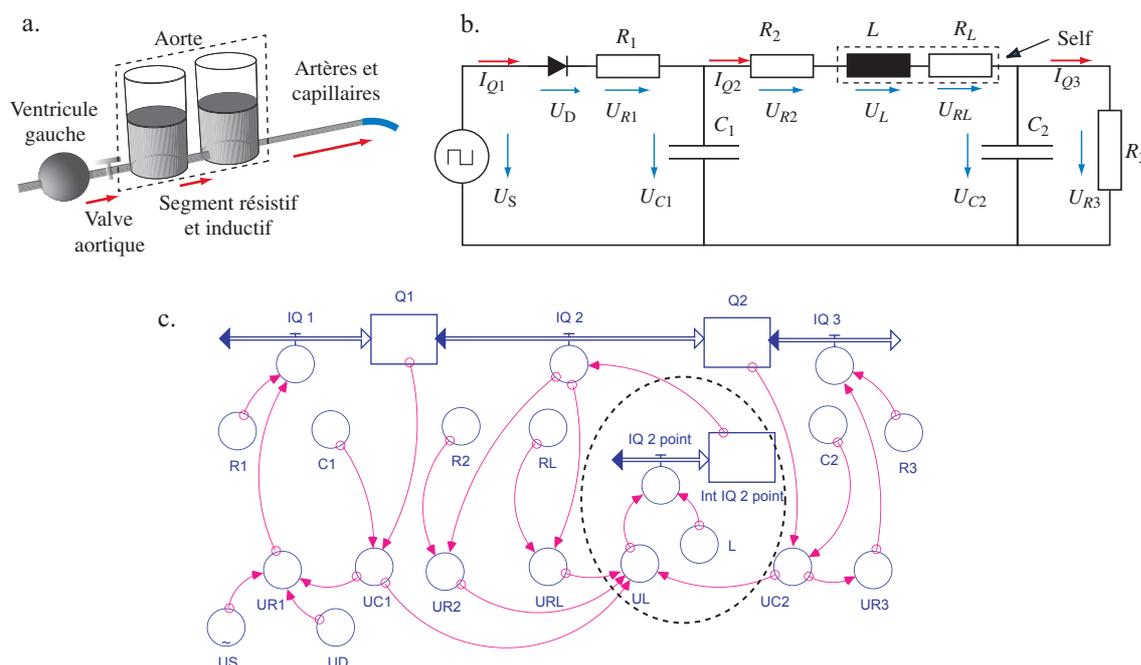


FIGURE II.10 Modélisation du circuit sanguin: (a) windkessel hydraulique; (b) windkessel électrique avec adjonction d'une self entre les deux condensateurs pour la modélisation de l'inertie de l'écoulement du sang; la résistance R_2 sert à mesurer le courant dans la self; (c) diagramme de dynamique des systèmes correspondant au windkessel électrique; la partie entourée d'un ovale en pointillé comprend la loi d'induction ainsi que l'intégrateur qui calcule l'intensité.

La figure II.10b montre le circuit électrique modifié qui est analogue au système hydraulique de la partie (a) de la même figure alors que la partie (c) représente le diagramme de dynamique des systèmes correspondant; la partie entourée d'un ovale en

pointillé comprend la loi d'induction ainsi que l'intégrateur qui calcule l'intensité. Ce circuit électrique va nous permettre d'étudier le système à la fois par l'expérience et par modélisation et simulation.

L'intensité du courant entrant est déterminée par la résistance R_1 :

$$I_{Q2} = \frac{U_{R1}}{R_1}$$

La tension U_{R1} découle de l'application de la loi des mailles :

$$U_{R1} = U_S - U_D - U_{C1}$$

Pour permettre à ce circuit électrique de se comporter de manière aussi proche que possible de celle du circuit sanguin d'un mammifère, nous donnons à la tension de l'alimentation U_S un profil semblable à celui de la pression dans le ventricule gauche. Ce profil apparaît dans la figure II.11 a. La fonction de la diode est modélisée de la manière simple utilisée dans l'Interlude I.

Dans la branche médiane du circuit, la résistance R_2 sert à mesurer indirectement l'intensité du courant aortique I_{Q2} . Dans le modèle, l'intensité I_{Q2} est déterminée à partir de la loi d'induction. À partir de la tension sur la self donnée par la loi des mailles :

$$U_L = U_{C1} - U_{R2} - U_{RL} - U_{C2}$$

nous déterminons le taux de variation de l'intensité I_{Q2} :

$$\dot{I}_{Q2} = \frac{U_L}{L}$$

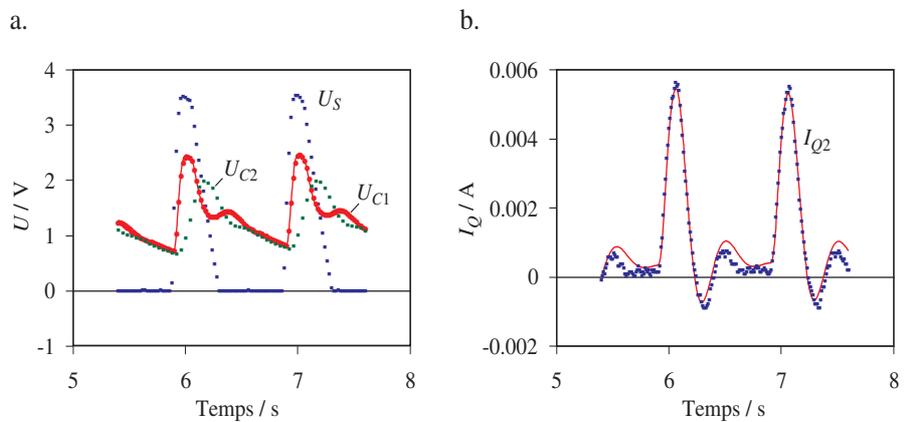
À partir de cette relation, l'intensité I_{Q2} est évalué par intégration dans le logiciel de dynamique des systèmes.

L'intensité I_{Q3} dans la troisième boucle du circuit est calculée à partir de la loi des mailles et de la loi d'OHM.

II.3.2 Simulation

Les résultats de la simulation sont présentés dans la figure II.11.

FIGURE II.11 Résultats de la simulation du modèle après introduction d'un élément inductif: (a) tension sur les deux capacités; les mesures sont représentées par des points et le résultat de la simulation de U_{C1} par une ligne continue; U_S est la tension d'entrée utilisée dans le modèle; (b) intensité I_{Q2} à travers l'élément inductif.



Les tensions mesurées sur les condensateurs et sur R_2 (qui sert à mesurer de manière indirecte l'intensité du courant I_{Q2}) s'ajustent très bien aux valeurs mesurées (fig. II.10a). Les valeurs des paramètres utilisées pour optimiser la simulation correspondent à celles qui ont été mesurées de manière indépendante ($L = 20$ H, $C_1 = C_2 = 480$ μ F, $U_D = 0.80$ V). Seule la valeur de la résistance utilisée pour la self est notablement différente de la valeur mesurée statiquement: nous devons utiliser la valeur $R_L = 120$ Ω au lieu des 63 Ω mesurés statiquement. Cette différence est due aux propriétés magnétiques du noyau de fer de la self: lorsqu'il est soumis à des cycles, il y a production de chaleur comme dans les résistances standard.

II.4 INCLUSION DE L'INERTIE DU FLUX SANGUIN

Nous allons adjoindre au modèle hydraulique de l'Interlude I un élément inductif pour tenir compte de l'inertie inhérente à tout écoulement de fluide.

II.4.1 Transfert au cas hydraulique du modèle avec inertie du fluide

Maintenant que nous avons pu, au moyen du modèle de windkessel électrique, simuler l'apparition d'oscillations grâce à l'introduction d'un élément inductif, nous allons transférer ce modèle au cas de la circulation sanguine. Dans un premier temps, nous complétons le modèle élaboré à la section I.5 (fig. I.15). Le diagramme de dynamique des systèmes ainsi complété apparaît dans la figure II.12.

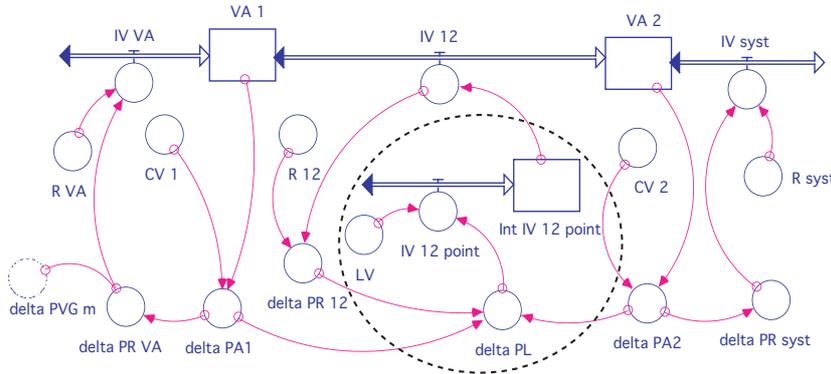


FIGURE II.12 Diagramme de dynamique des systèmes du windkessel hydraulique avec prise en compte de l'inertie de l'écoulement au moyen d'un élément inductif. La partie entourée d'un ovale en pointillé comprend la loi d'induction ainsi que l'intégrateur qui calcule l'intensité. Le ventricule gauche n'est pas modélisé, sa fonction est représentée par la pression mesurée ΔP_{VGM} .

Dans le modèle de la figure I.15, la grandeur I_{V12} représente le flux sanguin à l'intérieur de l'aorte, entre les deux sections qui divisent l'aorte. La différence de pression sanguine

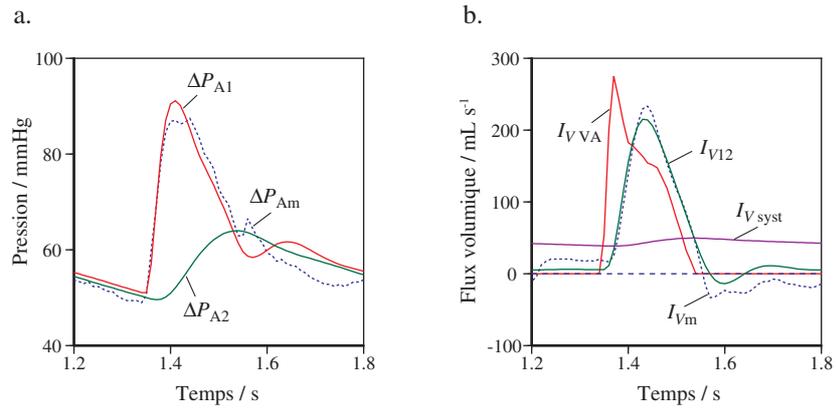
$$\Delta P_{12} = \Delta P_{A1} - \Delta P_{A2}$$

est maintenant associée à deux phénomènes: à l'effet inductif dû au taux de variation du flux sanguin et à l'effet résistif dû à la viscosité:

$$\Delta P_{12} = \Delta P_L + \Delta P_{R12} = L_v \dot{I}_{V12} + R_{V12} I_{V12}$$

Les paramètres utilisés pour cette simulation sont énumérés dans le tableau II.1. Vu la similitude des modèles, le modèle hydraulique produit des résultats semblables au modèle de windkessel électrique de la section II.3, à savoir l'apparition d'oscillations, autant de la pression (fig. II.13a) que du flux aortique (fig. II.13b).

FIGURE II.13 Résultats de la simulation du modèle de la figure II.12: (a) pression mesurée et résultats de la simulation pour ΔP_{A1} et ΔP_{A2} ; (b) intensité du flux aortique mesuré près de la valve aortique et résultats de la simulation pour I_{VVA} , I_{V12} et $I_{V\text{ syst}}$. Les courbes des valeurs mesurées sont représentées en pointillé.



Le flux aortique devient négatif durant une certaine période et la fréquence des oscillations est comparable à la valeur mesurée. Toutefois, la durée du reflux est plus brève que celle qui a été mesurée et les oscillations de la pression (par exemple ΔP_{A1}) sont déphasées par rapport à celles de la pression mesurée ΔP_{Am} . En outre, la simulation ne reproduit pas le petit pic de pression qui apparaît juste après la fermeture de la valve aortique. La prise en compte de l'inertie de l'écoulement du sang dans l'aorte a accentué l'effet de lissage du flux systémique.

TABLEAU II.1 Valeurs des paramètres du modèle de la figure II.12.

Grandeur	Symbole	Valeur SI	Valeur «médicale»
Résistance	R_{VA}	$1.45 \cdot 10^7 \text{ Pa s m}^{-3}$	$0.110 \text{ mmHg s mL}^{-1}$
	R_{12}	$1.90 \cdot 10^7 \text{ Pa s m}^{-3}$	$0.144 \text{ mmHg s mL}^{-1}$
	R_{sys}	$1.70 \cdot 10^8 \text{ Pa s m}^{-3}$	$1.292 \text{ mmHg s mL}^{-1}$
Capacité	C_{V1}	$1.70 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$	$0.191 \text{ mL mmHg}^{-1}$
	C_{V2}	$8.90 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$	$1.171 \text{ mL mmHg}^{-1}$
Inductance	L_V	$6.3 \cdot 10^5 \text{ Pa s}^2 \text{ m}^{-1}$	$4.79 \cdot 10^{-3} \text{ mmHg s}^2 \text{ mL}^{-1}$
Valeurs initiales	$\Delta P_{A1,0}$	7000 Pa	53 mmHg
	$\Delta P_{A2,0}$	7000 Pa	53 mmHg
	$\dot{I}_{V12,0}$	$1.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	10 mL s^{-2}

Malgré cette avancée, les résultats ne sont de loin pas satisfaisants. Nous sommes dans une situation semblable à celle de la fin de la section I.5 de l'Interlude I et nous allons adopter la même stratégie en affinant simultanément le modèle.

La première étape consistera à fermer le circuit comme à la section I.6 afin de renvoyer le sang vers le cœur et de le modéliser en tant que pompe intermittente afin de pouvoir simuler le flux entre le ventricule gauche et l'aorte. Simultanément, nous affinerons le modèle de l'aorte en y ajoutant un troisième segment.

La seconde étape consistera à ajouter au modèle une dérivation pour tenir compte du fait que l'aorte ne débouche pas uniquement sur les artères inférieures qui distribuent le sang vers les organes abdominaux et les jambes, mais que des artères rayonnent vers la tête et les bras depuis l'arc aortique. Dans cette ultime étape, nous tiendrons compte de l'inertie de l'écoulement dans le segment entre le ventricule gauche et le début de l'aorte.

II.4.2 Le cœur en tant que pompe intermittente et fermeture du circuit

Comme à la section I.6, nous fermons le circuit systémique en le divisant en deux parties, les artères qui apportent le sang riche en oxygènes aux organes et les veines qui ramènent au cœur le sang chargé de dioxyde de carbone. Naturellement, nous laissons de côté le circuit pulmonaire et la partie droite du cœur et ramenons le sang directement dans l'atrium gauche sans nous soucier de la façon dont il a été réoxygéné. Dans le même temps, nous affinons le modèle de l'aorte en y adjoignant un troisième segment. Les capacités des différents éléments sont remplacées par leurs inverses, les élastances, caractéristiques utilisées dans le monde médical.

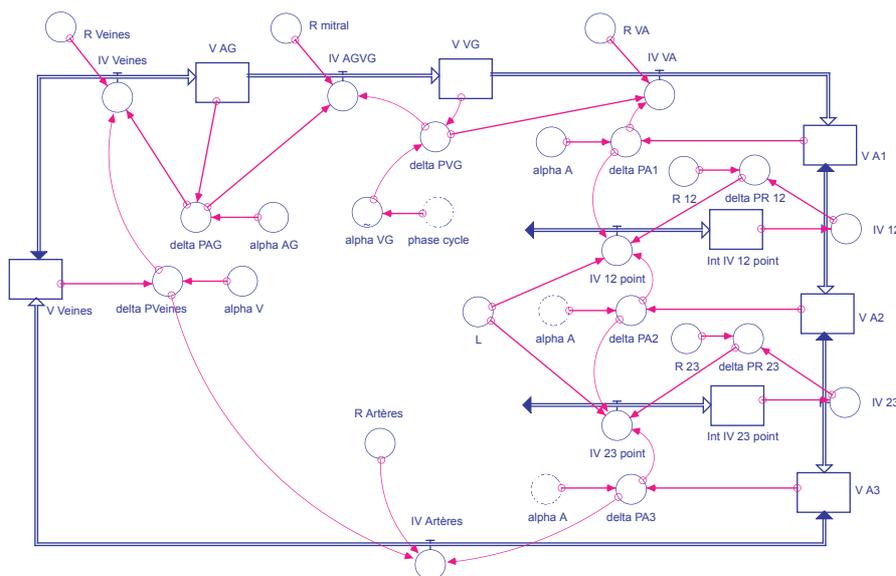


FIGURE II.14 Modèle du système cardiovasculaire fermé laissant de côté le circuit pulmonaire : les veines, l'atrium et le ventricule gauches sont ajoutés en tant qu'éléments de stockage au précédent modèle. Le ventricule gauche est modélisé en tant que pompe intermittente caractérisée par une élastance variable dans le temps.

La figure II.15 présente les résultats de la simulation de ce nouveau modèle. Comme il utilise les mêmes caractéristiques du ventricule gauche que celles utilisées à la fin de l'Interlude I, l'évolution de la pression ΔP_{VG} correspond à celle de la figure I.19.

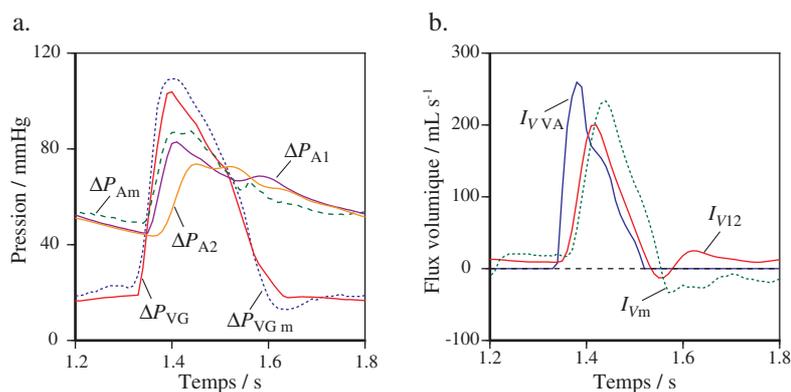


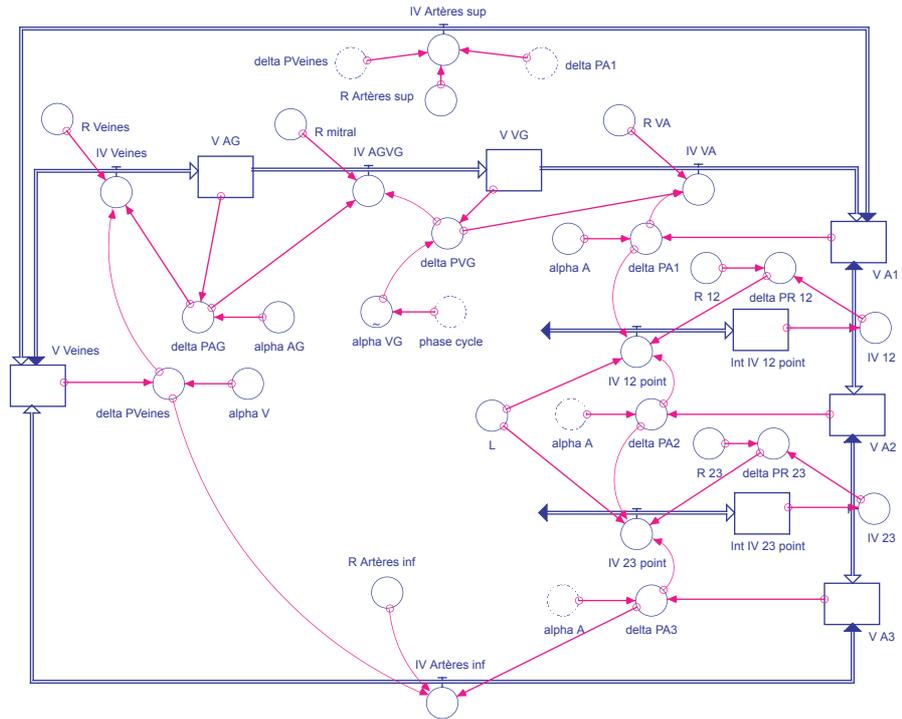
FIGURE II.15 Résultats de la simulation du modèle de la figure II.14 : (a) pression mesurée et résultats de la simulation pour ΔP_{VG} , ΔP_{A1} et ΔP_{A2} ; (b) intensité du flux aortique mesuré près de la valve aortique et résultats de la simulation pour I_{VVA} , I_{V12} et $I_{V_{syst}}$. Les courbes des valeurs mesurées sont représentées en pointillé.

La pression ΔP_{A1} à l'entrée de l'aorte évolue maintenant de manière plus proche de celle qui a été mesurée. Par contre, l'extension du modèle n'a pas encore apporté d'amélioration dans l'évolution du flux aortique. La durée du reflux reste bien inférieure à celle qui a été mesurée.

II.4.3 Prise en compte des artères supérieures

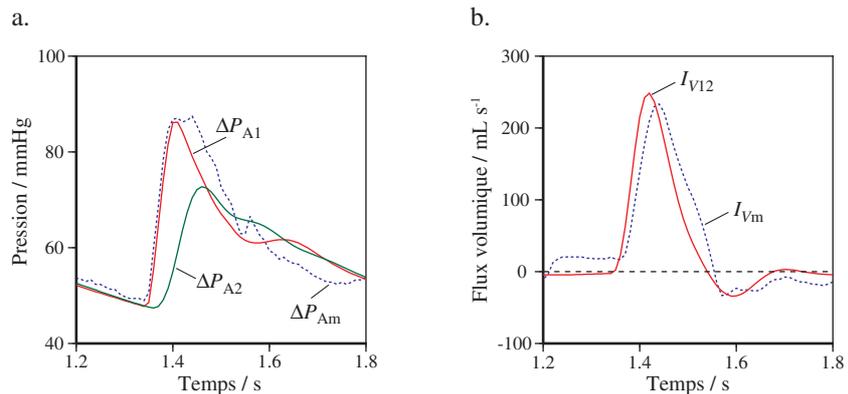
Une partie du sang qui arrive du ventricule gauche dans l'aorte est distribuée vers la tête et les bras par l'intermédiaire de trois artères qui émanent de l'arc aortique. Nous modélisons cette partie du circuit cardiovasculaire par un flux issu du premier segment de l'aorte pour aboutir dans le stock qui représente le circuit veineux. L'intensité de ce flux est contrôlé par la différence de pression entre l'entrée de l'aorte et le circuit veineux et par la résistance de ces artères (fig. II.16).

FIGURE II.16 Extension du modèle de la figure II.14 par l'introduction d'un flux entre l'entrée de l'aorte et le circuit veineux pour rendre compte de la distribution du sang oxygéné vers la tête et les bras.



L'influence de cette extension du modèle apparaît dans la figure II.17.

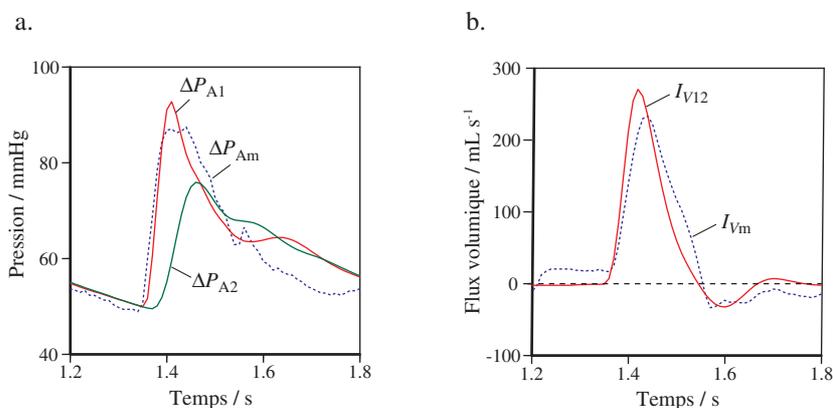
FIGURE II.17 Résultats de la simulation du modèle de la figure II.16: (a) pression mesurée et résultats de la simulation pour ΔP_{VG} , ΔP_{A1} et ΔP_{A2} ; (b) intensité du flux aortique mesuré près de la valve aortique et résultats de la simulation pour I_{V12} . Les courbes des valeurs mesurées sont représentées en pointillé.



L'adjonction de cette dérivation influence le déphasage entre la pression mesurée à l'entrée de l'aorte et celle que livre la simulation. La durée du reflux et des oscillations dans l'aorte est maintenant proche de ce que révèlent les mesures.

II.4.4 Prise en compte de l'inertie entre le ventricule gauche et l'aorte

L'écoulement du sang entre le ventricule gauche et l'aorte a lieu dans un environnement élastique, ce qui entraîne l'apparition d'effets inductifs modélisés par la loi d'induction insérée dans le diagramme de dynamique des systèmes de la figure II.18.



Même si elle rend notre modèle plus proche de la réalité, l'introduction de cette propriété de l'écoulement n'améliore pas l'adéquation aux valeurs mesurées de la pression ventriculaire et du flux aortique. Vu le grand nombre de paramètres ajustables dont les valeurs apparaissent dans le tableau II.2, il est très difficile de trouver la combinaison qui garantit un ajustement optimal aux données mesurées.

TABLEAU II.2 Valeurs des paramètres du modèle de la figure II.16.

Grandeur	Valeur	Grandeur	Valeur
R_{VA}	$0.06 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	α_{AG}	$0.33 \text{ mL mmHg}^{-1}$
R_{12}	$0.075 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	α_V	$0.01 \text{ mL mmHg}^{-1}$
R_{23}	$0.075 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	L	$3.5 \cdot 10^{-3} \text{ mmHg s}^2 \text{ mL}^{-1}$
$R_{Art. sup.}$	$1.50 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	L_{in}	$5.0 \cdot 10^{-4} \text{ mmHg s}^2 \text{ mL}^{-1}$
$R_{Art. inf.}$	$0.85 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	$V_{VG,0}$	60 mL
R_{Veines}	$0.05 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	$V_{Ai,0}$	15 mL
R_{mitral}	$0.05 \text{ mmHg s mL}^{-1}$	$V_{Veines,0}$	3000 mL s^{-2}
α_A	2.5 mL mmHg^{-1}	$V_{AG,0}$	65 mL

II.4.5 Les phases du cycle cardiaque: diagramme pression-volume

À la fin de l'Interlude I, nous avons introduit brièvement le diagramme pression-volume qui relie entre eux la pression qui règne dans le ventricule gauche et son volume (fig. II.20). Il est usuel de distinguer quatre segments sur cette courbe. Ces segments correspondent aux étapes du cycle cardiaque qui sont décrites en détail dans le tableau II.3.

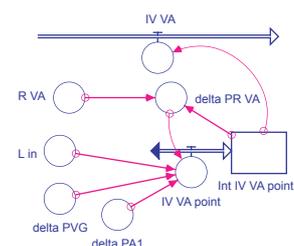


FIGURE II.18 Élément ajouté au modèle de la figure II.16 pour la prise en compte de l'inertie du flux sanguin entre le ventricule gauche et l'aorte au moyen de la loi d'induction.

FIGURE II.19 Résultats de la simulation du modèle de la figure II.16: (a) pression mesurée et résultats de la simulation pour ΔP_{VG} , ΔP_{A1} et ΔP_{A2} ; (b) intensité du flux aortique mesuré près de la valve aortique et résultats de la simulation pour I_{V12} . Les courbes des valeurs mesurées sont représentées en pointillé.

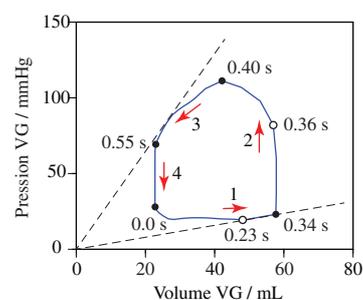


FIGURE II.20 Diagramme pression-volume du cycle cardiaque. Les points pleins correspondent au passage d'une phase à l'autre, les points évidés à un événement particulier à l'intérieur d'une phase.

TABLEAU II.3 Phases du cycle cardiaque.

	Pression	Flux volumique	Volume
<p>Phase 1 $0.0\text{ s} < t \leq 0.34\text{ s}$</p>	<p>La pression dans l'atrium gauche est plus élevée que celle du ventricule gauche qui reste pratiquement à sa valeur minimale, ce qui indique que la paroi du cœur est relâchée (l'élastance est faible), lui permettant d'accueillir le sang venant de l'atrium. La pression dans l'aorte est au minimum (pression diastolique).</p>	<p>La différence de pression entre l'atrium gauche et le ventricule gauche entraîne l'ouverture de la valve mitrale, le sang s'écoule entre ces deux cavités, d'abord passivement, entraîné par le gradient de pression, puis activement (systole atriale après 0.23 s). Comme la valve aortique est fermée, il n'y a aucun flux du ventricule vers l'aorte, mais le sang oscille dans l'aorte.</p>	<p>Le volume de sang du ventricule gauche croît aux dépens de celui de l'atrium gauche durant toute la phase. Le volume de sang dans l'aorte est au minimum.</p>
<p>Phase 2 $0.34\text{ s} < t \leq 0.40\text{ s}$</p>	<p>La paroi du ventricule gauche se tend et la pression augmente. Lorsque la pression du ventricule gauche dépasse celle de l'aorte ($t = 0.36\text{ s}$), la valve aortique s'ouvre et la pression aortique augmente rapidement.</p>	<p>La valve mitrale se referme, le flux entre l'atrium et le ventricule gauche est interrompu. À l'ouverture de la valve aortique, les flux entre le ventricule gauche et à l'intérieur de l'aorte croissent très rapidement (phase d'éjection rapide). L'intensité mesurée dans l'aorte est plus faible, vu qu'une partie est déviée vers les artères supérieures.</p>	<p>Entre 0.34 s et 0.36 s, le volume du ventricule gauche reste constant, on est dans une phase de contraction isovolumique. Puis, le contenu du ventricule gauche diminue au profit de celui de l'aorte. L'atrium gauche est relâché et se remplit par l'intermédiaire d'une des veines pulmonaires.</p>
<p>Phase 3 $0.40\text{ s} < t \leq 0.55\text{ s}$</p>	<p>La tension du muscle cardiaque diminue. Lorsque la pression ventriculaire devient inférieure à la pression aortique, la valve aortique se ferme ($t = 0.55\text{ s}$) et la pression aortique commence à décroître.</p>	<p>Les deux flux diminuent progressivement jusqu'au moment de la fermeture de la valve aortique (phase d'éjection lente).</p>	<p>Les volumes ventriculaire et aortique décroissent conjointement.</p>
<p>Phase 4 $0.55\text{ s} < t \leq 0.60\text{ s}$</p>	<p>Le muscle cardiaque entame sa phase de relaxation qui durera jusqu'au début de la phase de contraction du cycle suivant.</p>	<p>À la fermeture de la valve aortique, le sang se met à osciller dans l'aorte.</p>	<p>Comme le muscle cardiaque se relaxe, le volume de sang dans l'aorte et le ventricule gauche reste constant, on a atteint la phase de relaxation isovolumique.</p>

Résumons dans quel état se trouve le muscle cardiaque au cours de chacune des ces quatre phases.

Durant la phase 1, entre 0.0 s et 0.34 s, le muscle cardiaque est relâché, il se trouve en situation de *diastole ventriculaire*. Il en va de même de l'atrium gauche, sauf à la fin de cette phase durant laquelle il se contracte pour chasser le sang dans le ventricule, ce qui devient nécessaire parce que les pressions dans les deux cavités se sont équilibrées. Cette dernière phase est appelée *systole atriale*.

La phase 2, commence par une brève période, la *contraction isovolumique*, au cours de laquelle le muscle se contracte sans pour autant produire de flux sanguin, vu que les valves mitrale et aortique sont fermées. Après l'ouverture de la valve aortique, la contraction se poursuit jusqu'à l'atteinte de la pression ventriculaire maximale.

La tension du muscle cardiaque diminue durant la phase 3, ce qui entraîne une décroissance conjointe du flux volumique entre le ventricule et l'aorte, ainsi qu'une diminution des deux volumes. Les phases 2 et 3 constituent la *systole ventriculaire*.

Durant la phase 4, vu que les deux valves sont fermées, la relaxation du cœur se fait à volume constant, on est en phase de *relaxation isovolumique*.

La systole ventriculaire, durant laquelle le muscle est contracté, dure approximativement 0.20 s. Comme la durée du cycle est de 0.60 s, on constate que le cœur passe les deux tiers du cycle en état de diastole ventriculaire, c'est-à-dire en état de relâchement.

CHAPITRE 5

PROCESSUS ET MACHINES THERMIQUES

La thermodynamique est la science qui traite de la chaleur et de la température, de la manière dont les corps et d'autres systèmes physiques se comportent en présence de chaleur, et de l'utilisation de celle-ci pour entraîner d'autres processus. Dans ce chapitre, nous allons introduire les grandeurs fondamentales et les concepts de base de la thermodynamique.

Nous le ferons en observant et en interprétant un certain nombre de processus dans lesquels la chaleur joue un rôle. En utilisant les idées développées dans les chapitres précédents, nous serons en mesure d'élaborer des modèles simples des processus envisagés et de découvrir ainsi les propriétés fondamentales des grandeurs thermiques et leur lien avec l'énergie.

De manière plus prononcée que dans les chapitres précédents, l'énergie apparaîtra souvent en compagnie de la chaleur. La raison en est que, dans la thermodynamique traditionnelle, élaborée au milieu du XIX^e siècle notamment par Rudolf CLAUSIUS, ce que nous associons au concept de chaleur dans notre vie quotidienne a été identifié avec l'énergie.

5.1 PHÉNOMÈNES THERMIQUES

Les phénomènes thermiques font partie de notre quotidien, ce qui nous permet de concevoir les grandeurs qui sont nécessaires à leur modélisation. Sur la base d'expériences, nous allons introduire de nouveaux concepts fondamentaux, à savoir ceux de *température*, *chaleur* et *énergie*. Nous connaissons les deux premières grandeurs, même de manière quelquefois approximative, et les chapitres précédents nous ont familiarisés avec l'énergie.

5.1.1 Contact thermique entre deux corps

Nous versons dans un récipient constitué de deux compartiments identiques séparés par une mince paroi de métal (fig. 5.1) de l'eau chaude dans le premier et de l'eau froide dans le second.

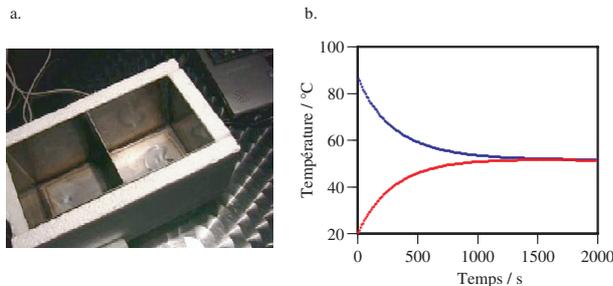


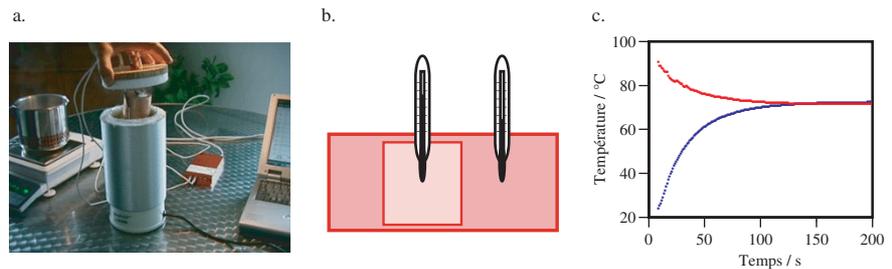
FIGURE 5.1 Contact thermique : (a) deux volumes identiques d'eau chaude et froide sont en contact à travers une mince paroi métallique séparant les deux compartiments d'un récipient bien isolé; (b) les températures se rapprochent progressivement jusqu'à ce qu'elles soient égales.

Le récipient est bien isolé et recouvert d'une plaque de polystyrène. Pour uniformiser la température, l'eau est continuellement brassée dans chacun des compartiments au moyen d'agitateurs magnétiques. On constate que la température de l'eau chaude diminue alors que celle de l'eau froide augmente jusqu'à ce que les températures s'égalisent à un niveau qui correspond assez bien à la moyenne des deux températures initiales.

Les températures s'équilibrent également lorsque les objets en contact thermique sont faits de matières différentes et ont des tailles différentes.

La figure 5.2 illustre ce fait pour un cylindre de cuivre plongé dans un bain d'eau chaude. En général, la température finale est située entre les températures initiales des deux objets en contact thermique.

FIGURE 5.2 Contact thermique: (a) un cylindre de cuivre froid est plongé dans de l'eau chaude contenue dans un récipient isolé; (b) représentation schématique; (c) évolution des températures jusqu'à l'égalisation.



Interprétation. La chaleur a migré de l'eau chaude vers l'eau froide tant que les deux températures étaient différentes. Nous pouvons donc interpréter la différence de température comme étant la *force d'entraînement pour le flux de chaleur* et la *température comme le niveau thermique*, vu la similitude observée avec l'équilibrage des niveaux dans des vases communicants (chapitre 1) et l'équilibrage des tensions de deux condensateurs reliés par des résistances (chapitre 2). Le second exemple démontre que ce sont les niveaux thermiques qui s'équilibrent, et non pas les quantités de chaleur résidant dans les corps. En d'autres termes, la température ne mesure pas les quantités de chaleur, mais le *degré de chaleur*.

5.1.2 Compression de l'air

Chacun a observé que si l'on comprime rapidement l'air dans une pompe de bicyclette tout en l'empêchant de sortir, celle-ci s'échauffe et peut devenir très chaude si l'on répète l'opération plusieurs fois. En procédant à cette compression de l'air dans un cylindre muni d'un piston, au fond duquel on a placé un morceau d'amadou, ou d'une substance facilement inflammable, on peut en observer la combustion même après une seule compression rapide.

Interprétation. La combustion de l'amadou indique que l'air dans le cylindre est devenu très chaud. Pourquoi est-ce le cas? Si l'on analyse la situation, on se rend compte qu'il n'y a aucune source de chaleur à l'intérieur du cylindre, que celle-ci ne peut pas avoir migré de l'extérieur vers l'intérieur du cylindre (l'air dans le cylindre est plus chaud que celui de l'environnement). On pourrait penser que le frottement dans l'air serait responsable de l'échauffement, mais on peut conclure que cet effet est négligeable, vu que le piston reprend pratiquement sa position initiale si on l'abandonne, ce qui veut dire que la compression était presque parfaitement élastique. La quantité de chaleur dans l'air est donc resté pratiquement constante. La température de l'air s'élève parce que la chaleur a été comprimée dans un volume beaucoup plus faible, elle a été portée à un niveau plus élevé (fig. 5.3).

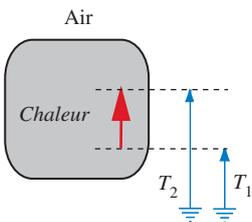


FIGURE 5.3 Diagramme de processus de la compression de l'air sans chauffage ni refroidissement (compression adiabatique). La température augmente. Pour parler de manière imagée, la chaleur de l'air a été amenée à un niveau plus élevé.

Cet exemple démontre de manière convaincante que la chaleur et la température ne peuvent pas être de même nature physique. Lors de la compression rapide de l'air, la quantité de chaleur reste constante alors que la température s'élève fortement.

5.1.3 Refroidissement et chauffage d'eau dans une canette

Afin de pouvoir observer le processus de refroidissement, on verse de l'eau très chaude dans une canette en aluminium dont les parois ont été polies. Pour assurer une température uniforme, l'eau est brassée continuellement au moyen d'un brasseur magnétique et on enregistre cette température (fig. 5.4). La température diminue rapidement au début, puis de moins en moins vite, pour atteindre finalement une valeur légèrement supérieure à celle de l'air ambiant.

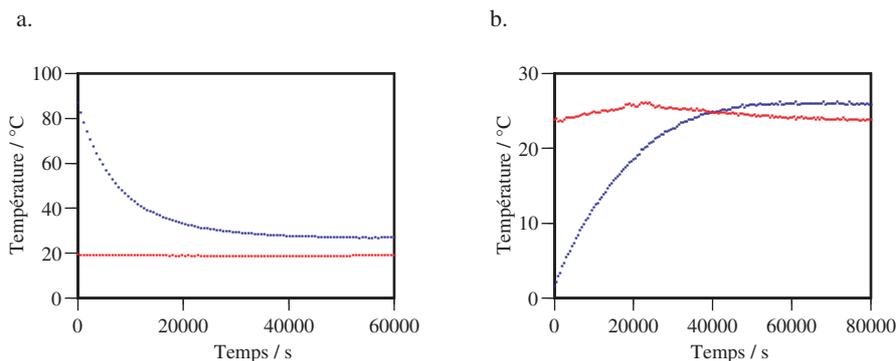


FIGURE 5.4 Refroidissement et chauffage : (a) évolution de la température d'eau chaude dans une canette d'aluminium à parois minces ; la température finale est supérieure à la température ambiante ; (b) évolution de la température d'eau froide dans une bouteille isolée ; la température finale est supérieure à la température ambiante.

Si de l'eau très froide contenue dans une canette entourée d'un manteau isolant est placée dans une pièce très chaude, sa température augmente d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement pour se stabiliser à nouveau à une valeur légèrement supérieure à celle de l'air ambiant, pour autant que l'on ait pris soin de la brasser continuellement.

Interprétation. L'eau chaude perd de la chaleur à travers les parois de la canette. La différence de température entre l'eau et l'air ambiant est la *force d'entraînement* du flux de chaleur, et ce flux est d'autant plus important que la différence de température est élevée. Cela explique l'aspect de la courbe d'évolution de la température. Le brasseur magnétique remplit son rôle grâce au frottement visqueux du fluide ; il s'agit donc d'un processus dissipatif qui produit un peu de chaleur, ce qui explique pourquoi la température se stabilise à une valeur légèrement supérieure à celle de l'air ambiant.

Si l'eau est plus froide que l'air ambiant, la chaleur migre en sens inverse, mais l'évolution de la température a lieu de manière analogue.

5.1.4 Premier modèle d'un processus thermique

L'évolution de la température lors des processus observés dans les expériences des sections 5.1.1 et 5.1.3 offre une ressemblance frappante avec les processus d'équilibrage des niveaux en hydraulique et des tensions en électricité, ainsi que de vidange et de remplissage d'un réservoir ou de décharge et charge d'un condensateur.

Cette similitude des comportements nous permet d'élaborer un premier modèle basé sur cette analogie. Nous admettons que les processus thermiques peuvent être décrits au moyen de deux grandeurs fondamentales, une grandeur extensive, qu'il serait naturel d'appeler *chaleur* ou *calorique*, comme l'a fait Sadi CARNOT qui a jeté les fondements de l'étude théorique des processus thermiques. Comme nous allons le voir plus loin, pour des raisons historiques, la notion de chaleur est réservée à une grandeur

physique qui ne peut pas résider dans les corps, mais peut seulement être transférée. Pour les mêmes raisons, la notion de calorique a été éliminée du corpus théorique et remplacée par une autre grandeur dotée d'un nom savant, l'entropie S . C'est une grandeur semblable à un fluide qui peut être accumulée dans les objets, circuler d'un système à l'autre et, nous l'avons vu dans les chapitres précédents, peut être produite lors de processus dissipatifs. Nous pouvons donc énoncer une équation de bilan d'entropie (version provisoire):

$$\dot{S} = I_S + \Pi_S \tag{5.1}$$

où la grandeur Π_S représente le taux de production d'entropie (par exemple celui qui est dû au brassage magnétique). L'entropie accumulée dans un système est proportionnelle à la température (absolue) T , qui est la grandeur de niveau, la grandeur intensive liée à la description des processus thermiques. Nous pouvons donc énoncer une loi de capacité:

$$S = K_S T \tag{5.2}$$

où K_S représente la capacité entropique du système. Nous avons vu en hydraulique que la capacité d'un récipient dépend de sa géométrie. La capacité thermique d'un système, sa faculté d'accumuler une quantité plus ou moins grande d'entropie, dépend respectivement de sa masse (ou de sa quantité de matière). Il est donc usuel de travailler avec la capacité entropique spécifique κ_S définie par:

$$\kappa_S = \frac{K_S}{m} \tag{5.3}$$

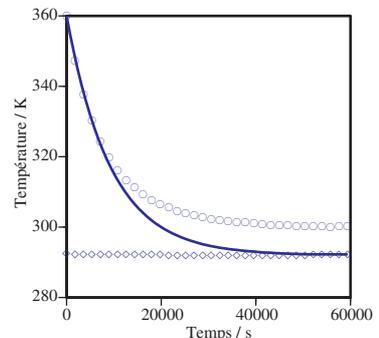
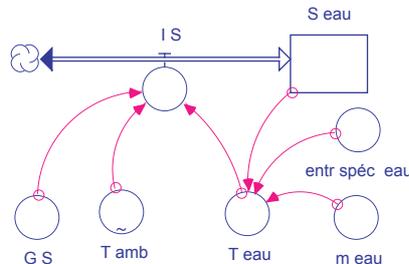
L'entropie circule toujours entre deux niveaux de son potentiel associé qui, c'est devenu évident dans les sections précédentes, n'est rien d'autre que la température absolue T . L'intensité du flux d'entropie I_S est déterminée par la différence de température ΔT et, respectivement, par la conductance G_S ou la résistance R_S du matériau traversé, ce que l'on peut énoncer au moyen d'une loi de résistance:

$$I_S = G_S \Delta T \iff \Delta T = R_S I_S \tag{5.4}$$

ΔT représente la différence entre la température instantanée de l'eau et celle de l'air ambiant. Signalons d'ores et déjà que la conductance, et par le fait même la résistance, sont des grandeurs qui ne sont pas nécessairement constantes et qui peuvent dépendre de la température.

Dans un premier temps, nous allons modéliser le processus de refroidissement sans prise en compte de la production d'entropie due au brassage.

FIGURE 5.5 Refroidissement d'eau dans une canette: (a) modèle du processus sans prise en compte de l'influence du brassage; (b) comparaison de la simulation de l'évolution de la température (ligne continue) et des valeurs mesurées (petits cercles). La température finale correspond à la température ambiante (losanges).



Vu que nous n'avons pas pris en compte la production d'entropie due au brassage, il est normal que, dans ce modèle, la température finale de l'eau soit celle de l'environnement.

Pour pouvoir tenir compte de ce processus supplémentaire, nous devons évaluer sa puissance. Cette valeur peut être extraite des données expérimentales, comme nous le montrerons à l'exemple 5.4. Nous avons découvert au chapitre 3 que la puissance d'un processus était égale au produit de l'intensité du flux de la grandeur extensive considérée et de la variation du potentiel associé. Dans notre cas, le flux est remplacé par le taux de production d'entropie Π_S . Mais quelle est la variation de température associée à ce processus? Comme l'entropie créée à la température T de l'eau par le brassage n'existait pas avant sa production, nous devons admettre qu'elle a été élevée de la température nulle à celle de l'eau. La variation de température est donc égale à la température instantanée de l'eau, ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{brassage}} = T_{\text{eau}} \Pi_{S, \text{brassage}} \quad (5.5)$$

La prise en compte de cette contribution dans le modèle permet d'obtenir une simulation qui correspond assez bien aux données expérimentales.

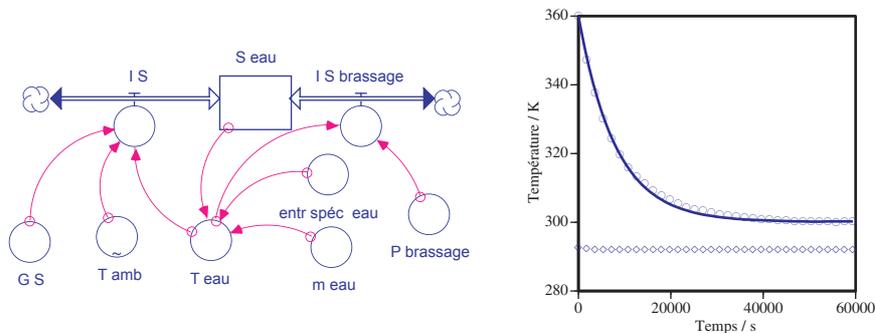


FIGURE 5.6 Refroidissement d'eau dans une canette : (a) modèle du processus avec prise en compte de l'influence du brassage ; (b) comparaison de la simulation de l'évolution de la température (ligne continue) et des valeurs mesurées (petits cercles). La température finale correspond aux mesures. La divergence est due au fait que la capacité entropique de l'eau n'est pas constante.

Il faut toutefois relever que l'ajustement n'est pas parfait. Nous découvrirons plus loin que cette divergence est due au fait que la capacité entropique de l'eau n'est pas constante, mais qu'elle dépend de la température.

Avant de passer à l'élaboration des lois constitutives, nous allons compléter nos observations relatives aux différents processus thermiques.

5.1.5 Flux de chaleur dans une barre métallique

L'extrémité d'une barre cylindrique de cuivre est plongée dans de l'eau froide alors que l'autre extrémité est chauffée par la flamme d'une bougie. On observe que la température de l'eau augmente. On observe une diminution progressive de la température le long de la barre de cuivre.

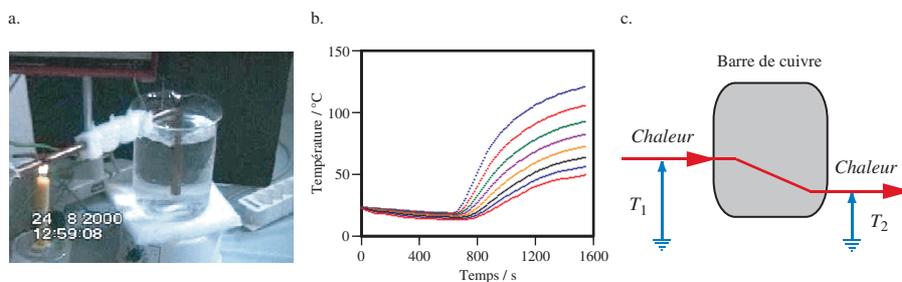


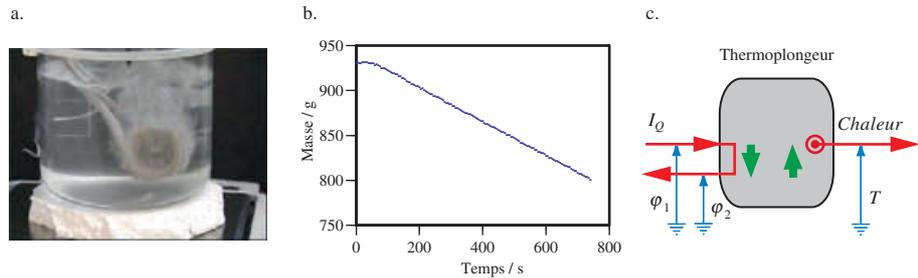
FIGURE 5.7 Flux de chaleur : (a) une bougie chauffe de l'eau indirectement à travers une barre de cuivre qui transfère à l'eau la chaleur produite par la bougie ; (b) évolution dans le temps de la température en différents points de la barre de cuivre ; au départ, la barre est à température ambiante, puis la bougie est allumée à $t = 700$ s ; (c) diagramme de processus du flux de chaleur.

Interprétation. La chaleur produite par la flamme de la bougie est transférée par l'intermédiaire de la barre de cuivre dans l'eau. Ce processus de migration de la chaleur à travers le matériau est appelé *conduction*. Il est analogue à la conduction de l'électricité dans les métaux. La diminution de la température le long de la barre est nécessaire pour entraîner le flux de chaleur vers le récipient d'eau.

5.1.6 Vaporisation d'eau au moyen d'un thermoplongeur

De l'eau placée dans un récipient ouvert mais dont les parois sont isolées est chauffée au moyen d'un thermoplongeur dont la puissance est maintenue constante. À une température proche de 100°C, elle se met à bouillir. Les mesures permettent de constater que la température reste constante pendant tout le processus de vaporisation et que la masse de l'eau diminue linéairement.

FIGURE 5.8 Vaporisation d'eau: (a) l'eau est vaporisée au moyen d'un thermoplongeur dans un récipient ouvert dont les parois sont isolées; la température reste constante durant le processus de vaporisation; (b) la masse de l'eau est enregistrée en fonction du temps; (c) diagramme de processus.



Interprétation. Nous constatons à nouveau que ce changement de phase nécessite un apport de chaleur qui n'entraîne aucune variation de la température des deux substances participant à ce changement de phase. Comme la chaleur est produite à un taux constant par le thermoplongeur et que la masse de l'eau diminue de manière linéaire, nous en concluons que des quantités égales de chaleur produisent des quantités égales de vapeur.

La chaleur a dû être *produite* par le thermoplongeur, elle n'y était pas contenue préalablement, sinon le processus de chauffage s'arrêterait assez rapidement. Le diagramme de processus du thermoplongeur explique comment il faut comprendre le processus. De l'énergie est libérée dans le processus électrique et mise à disposition pour le processus consécutif qui est la production de chaleur. La chaleur a été produite à partir de rien, mais pas d'elle-même, un processus particulier a délivré l'énergie nécessaire pour le faire.

5.1.7 Fusion de glace et congélation d'eau

Lorsqu'elle est placée dans un environnement chaud, la glace fond. Pour étudier le déroulement du processus de manière détaillée, nous plaçons un tube de verre rempli de glace dans un récipient d'eau tiède et nous enregistrons l'évolution des températures de la glace et de l'eau. On observe que, tout d'abord, la température de la glace s'élève jusqu'à 0°C. Ensuite, la température du mélange de glace et d'eau contenu dans le tube à essai reste constante à 0°C alors que celle de l'eau du récipient diminue progressivement. Cette situation perdure jusqu'à ce que la glace soit totalement fondue. Ce n'est qu'à partir de ce moment que la température de l'eau contenue dans le tube à essai commence à s'élever.

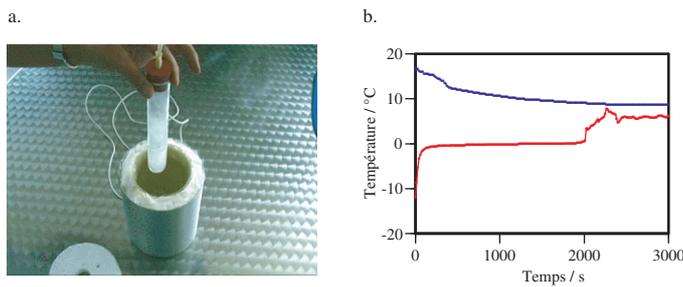


FIGURE 5.9 Fusion de glace: (a) un tube à essai rempli de glace à basse température est placé dans de l'eau à température ambiante; le tout est dans un récipient en verre bien isolé; (b) les températures du bain d'eau (courbe supérieure) et du mélange eau-glace dans le tube à essai (courbe inférieure) sont enregistrées.

Réciproquement, si de l'eau est placée dans un environnement très froid (nettement en dessous de 0°C), le processus inverse se déroule. La température de l'eau tombe à 0°C , de la glace commence à se former et la température du mélange n'évolue plus jusqu'à ce que toute l'eau se soit solidifiée. Seulement alors, la température de la glace commence à descendre en dessous du point de congélation.

Interprétation. Il faut de la chaleur pour faire fondre la glace. Dans un premier temps, la chaleur provenant de l'eau sert à réchauffer la glace jusqu'au point de fusion. À partir de ce moment, la chaleur provenant de l'eau du récipient sert uniquement à faire fondre la glace, raison pour laquelle la température du mélange dans le tube à essai reste bloquée à 0°C .

5.1.8 Moteur de STIRLING

Le moteur de STIRLING est un exemple classique de moteur thermique. Contrairement aux moteurs à combustion interne, le gaz contenu dans le moteur (par exemple de l'air) est chauffé depuis l'extérieur et de l'eau sert à refroidir la partie chaude du moteur. Ce système peut entraîner un processus mécanique. Si on réduit le flux de l'eau de refroidissement, l'efficacité du moteur est réduite.

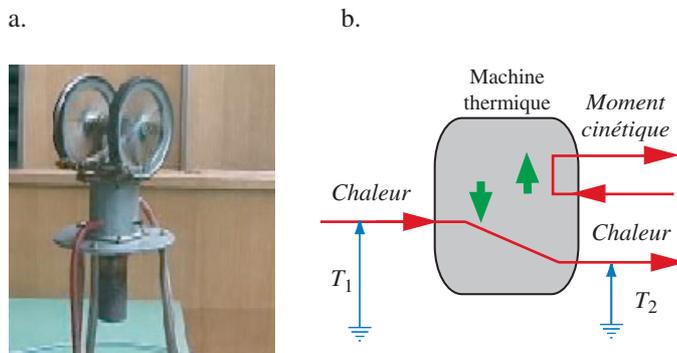


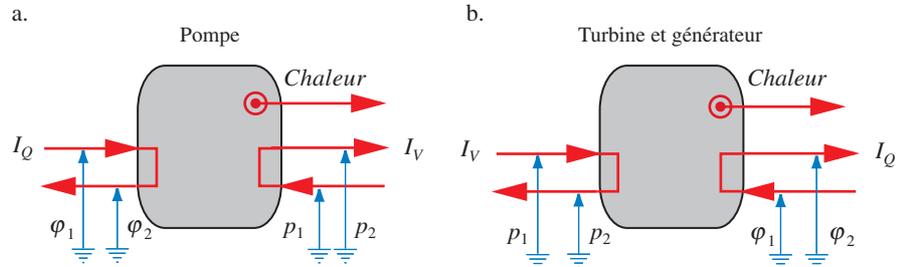
FIGURE 5.10 Moteur de STIRLING: (a) le moteur à combustion externe; la chaleur apportée de la source chaude extérieure migre vers la source froide et entraîne un processus mécanique; (b) diagramme de processus: la chaleur s'écoule d'une température élevée vers une température plus basse, libérant de l'énergie qui sert à entraîner un processus rotatoire.

Interprétation. Elle reprend celle proposée par Sadi CARNOT dans son ouvrage de 1824, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. La chaleur, qu'il appelait le « calorique », tombe de la température élevée de la chaudière, ou « source chaude », à la température basse de la partie que l'on appelle le condenseur, ou « source froide ». En le faisant, elle libère de l'énergie utilisée pour entraîner le processus mécanique du moteur. Toute la chaleur fournie par la chaudière doit être évacuée vers l'environnement dans le condenseur. Cela explique pourquoi l'eau de refroidissement s'échauffe plus si on réduit son débit et pourquoi, dans ce cas, l'efficacité du moteur diminue: la différence de température entre la chaudière et le condenseur est plus faible.

5.1.9 Inversion du mode de fonctionnement d'une pompe électrique

Dans une pompe électrique, le processus électrique entraîne un processus hydraulique (fig. 5.11, partie gauche). Mais nous l'avons tous observé, la pompe s'échauffe, car de la chaleur a été produite à cause des frottements. Il est possible d'inverser les processus, c'est-à-dire d'utiliser le système en tant que turbine et générateur (fig. 5.11, partie droite). Dans ce cas également, le système s'échauffe à cause de la production de chaleur.

FIGURE 5.11 Diagramme de processus: (a) d'une pompe entraînée par un moteur électrique; (b) de son inverse, un système de turbine et générateur. Les deux systèmes produisent de la chaleur. La production de la chaleur ne peut pas être inversée; c'est ce que l'on appelle l'irréversibilité.



Interprétation. Les processus physiques peuvent être inversés, à une exception près, la production de chaleur. Pour pouvoir inverser tous les processus dans un système qui produit de la chaleur, nous devrions détruire de la chaleur, ce qui est impossible. Au contraire, il y a une nouvelle production de chaleur. Nous en concluons que la chaleur est une grandeur qui peut être produite, mais pas détruite.

1. Pourquoi le phénomène décrit par la figure 5.2 montre-t-il que, lors du contact thermique entre deux corps, ce sont les températures plutôt que les quantités de chaleur qui s'équilibrent?
2. Pourquoi la température commune atteinte par le cuivre et l'eau dans l'expérience de la figure 5.2 n'est-elle pas égale à la température moyenne? Y a-t-il des situations analogues en hydraulique et en électricité?
3. La chaleur a-t-elle toujours pour effet de rendre les corps plus chauds? A-t-on toujours besoin de chaleur pour rendre un corps plus chaud?
4. Citez quelques moyens de produire de la chaleur.
5. Quels types de processus sont-ils réversibles? Lesquels ne le sont pas?



1. À cause de la taille différente des objets en contact.
2. Parce que les capacités thermiques des deux systèmes ne sont pas les mêmes (celle de l'eau est plus élevée que celle du cuivre). La situation est la même que lors de l'équilibrage des niveaux de vases communicants de sections (capacités) différentes ou de l'équilibrage des tensions de condensateurs de capacités différentes.
3. Non, elle peut les faire fondre ou se vaporiser (sans élévation de température). Non, on peut par exemple comprimer un gaz.
4. Le feu, la circulation de l'électricité, les frottements, les réactions chimiques, l'absorption de la lumière solaire, la diffusion de substances, etc.
5. Tous les processus durant lesquels il n'y a pas de production de chaleur sont réversibles.



5.2 GRANDEURS FONDAMENTALES: TEMPÉRATURE ET CHALEUR

Dans la section précédente, nous avons utilisé de manière informelle les notions de température et de chaleur. L'objectif de cette section est de préciser leur sens, d'en dégager les propriétés et également de préciser ce qu'elles sont ou ne sont pas. Cette section débouchera entre autres sur l'identification de la chaleur avec l'entropie.

5.2.1 Notion de température

Dans la vie quotidienne, on qualifie souvent les objets au moyen de leur degré de chaleur, qui indique à quel point un corps est chaud. Ces degrés de chaleur peuvent être imaginés comme alignés sur un collier de perles, les perles indiquant la variation de très froid à très chaud en passant par froid, tiède, chaud, etc.

La température est la coordonnée de ces degrés de chaleur. Tout comme pour les systèmes de coordonnées, on peut introduire différentes échelles de température.

Il est fréquent de rencontrer des personnes qui confondent les concepts de chaleur et de température et les utilisent indifféremment. Or, de simples observations permettent de se rendre compte que ces deux notions ne représentent pas la même grandeur. Envisageons un volume d'eau qui contient une certaine quantité de chaleur et divisons-le en deux parties égales (fig. 5.12). L'expérience nous révèle que leur température est la même que celle du volume initial. Par contre, la chaleur, tout comme le volume ou la masse, a été répartie en parts égales dans les deux moitiés.

Deux des expériences dont il a été question dans la section précédente permettent d'illustrer la différence entre les deux notions. Lorsque l'on chauffe de la glace, elle fond grâce à l'apport de chaleur, mais sa température ne varie pas tant que l'on a un mélange d'eau et de glace. Dans l'expérience de la compression rapide de l'air dans un cylindre, la température augmente sans qu'il y ait eu un apport de chaleur.

Tous les phénomènes au cours desquels il y a transfert de chaleur entre deux systèmes ne se poursuivent que pour autant qu'il y a une différence de température entre les deux. On en conclut que la chaleur ne s'écoule spontanément qu'entre deux niveaux de la température. Le tableau 5.1 compare cette grandeur avec celles de niveau introduites dans les chapitres précédents.

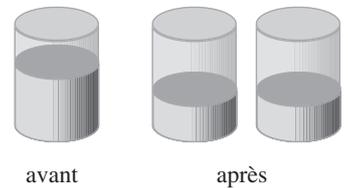


FIGURE 5.12 L'eau chaude contient une certaine quantité de chaleur à une certaine température. Si on répartit l'eau du premier verre à parts égales dans deux verres, chacune de ces parts contient la moitié de la chaleur originelle. La température n'est pas affectée par cette opération.

TABLEAU 5.1 Comparaison de quelques processus.

Processus	Grandeur	Potentiel
Récipients d'eau reliés par une conduite	Volume d'eau	Niveau d'eau
Sphères chargées en contact	Charge électrique	Potentiel électrique
Corps en contact thermique	Chaleur	Température

La comparaison nous amène à interpréter la température comme le potentiel thermique et les différences de température comme la force motrice thermique. La température est la grandeur intensive liée aux processus thermiques.

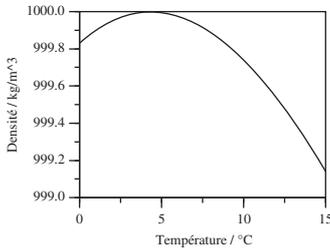


FIGURE 5.13 Variation de la densité de l'eau en fonction de la température, dans le voisinage de 4°C. La pression est constante et égale à la pression atmosphérique.

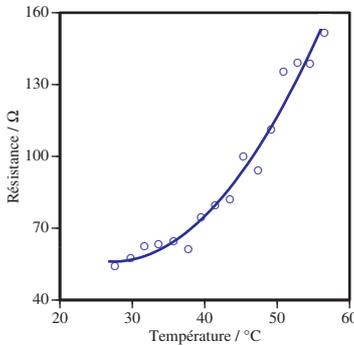


FIGURE 5.14 Variation d'une résistance en fonction de la température. Une courbe du second degré a été ajustée aux points mesurés (uniquement dans le domaine mesuré).

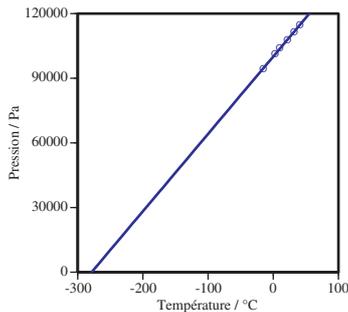


FIGURE 5.15 La pression des gaz (à volume constant) décroît linéairement avec la température. La figure montre l'extrapolation vers la pression nulle.

La température peut être mesurée au moyen d'une quelconque substance dont les propriétés changent avec la température. De telles propriétés thermoscopiques sont la longueur de tiges, le volume de liquides, la pression de gaz, la résistance électrique de conducteurs, la tension de thermocouples, le rayonnement thermique et beaucoup d'autres. Examinons deux exemples.

Thermomètre au mercure et échelle CELSIUS. Une première échelle de température empirique peut être basée sur le thermomètre au mercure: la variation du volume du liquide est utilisée en tant que propriété thermométrique. Un tel dispositif sert à définir l'échelle CELSIUS: la température du point de congélation de l'eau correspond à 0°C, et 100°C est la température de vaporisation de l'eau à une pression de l'air de 1 bar. On admet implicitement que la température CELSIUS est une fonction linéaire du volume du liquide thermométrique.

Tous les liquides ne se prêtent pas à faire office de substance thermométrique; l'eau est le contre-exemple le plus frappant (fig. 5.13). L'eau existe en tant que liquide entre 0°C et 100°C, mais son volume décroît entre le point de congélation et 4°C, où elle atteint sa densité maximale, pour croître à nouveau au-dessus de cette température. Cette particularité est appelée une *anomalie* de l'eau; elle est à l'origine du fait que l'eau des lacs gèle d'abord en surface, ce qui sauve les poissons durant l'hiver.

Résistance électrique. Comme nous l'avons déjà mentionné à la section 2.6.2, la résistivité électrique d'un matériau varie avec la température, ce qui rend son utilisation possible pour la thermométrie. La figure 5.14 montre la relation entre la résistance d'un matériau et la température. Très souvent, cette relation peut être approximée par une fonction du second degré:

$$R(\theta) = R_0 \left(1 + \alpha_R (\theta - \theta_0) + \beta_R (\theta - \theta_0)^2 \right) \tag{5.6}$$

où α_R et β_R sont respectivement les *coefficients de température de la résistivité linéaire et quadratique*.

Température du gaz parfait. L'échelle CELSIUS se prête bien pour l'usage dans la vie courante, mais elle est mal adaptée pour les besoins théoriques. Nous allons maintenant introduire l'échelle de température de la thermodynamique, l'*échelle KELVIN*, qui est basée sur la *température du gaz parfait* et qui, comme nous le montrerons à la section 5.8, est indépendante du fluide thermométrique.

Les gaz changent de volume et de pression en fonction de leur température. Si l'on maintient le volume constant (un tel processus est dit *isochore*), la pression augmente lors de l'échauffement du gaz. Pour des gaz très dilués (loin du point de liquéfaction, pression peu élevée, température suffisamment élevée), on observe un comportement linéaire (AMONTONS, 1703, fig. 5.15):

$$P(\theta) = P_0 (1 + \beta\theta) \tag{5.7}$$

Le coefficient de proportionnalité β est le *coefficient de température de la pression*. Il vaut:

$$\beta = \frac{1}{273.15^\circ\text{C}} \tag{5.8}$$

Si l'on imagine que le gaz conserve toujours la propriété décrite par la relation ci-dessus, particulièrement pour les basses températures, on constate que la pression s'annule pour une certaine température. Cette valeur est la même pour toutes les substances, elle représente le zéro absolu de la température (fig. 5.16). Si l'on introduit une échelle

dont le zéro correspond à -273.15°C , la pression des gaz dilués devient proportionnelle à cette nouvelle température.

Les gaz qui ont les propriétés décrites ci-dessus sont des gaz parfaits. C'est la raison pour laquelle la nouvelle température est appelée température des gaz parfaits ou température absolue T :

$$T = \theta^{\circ} \cdot \frac{1 \text{ K}}{1^{\circ}\text{C}} + 273.15 \text{ K} \quad (5.9)$$

La relation ci-dessus montre qu'une différence de température de 1 K correspond à une différence de température de 1°C . L'unité de mesure est le kelvin (K). L'échelle ainsi définie est l'échelle KELVIN.

L'introduction de cette nouvelle échelle montre que la pression d'un gaz parfait à volume constant est proportionnelle à la température absolue, ce qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (5.10)$$

Notons que cette relation est valable pour toutes les substances dans un état de dilution suffisant (par exemple pour une substance telle que du sel dilué dans de l'eau).

5.2.2 Propriétés de la chaleur

S'il y a une proposition qui ne peut pas être mise en doute, c'est celle qui affirme que la *chaleur* est ce qui rend un objet chaud et qui fait fondre la glace. Pour rendre un objet tel qu'une pierre encore plus chaude, nous lui fournissons de la chaleur, pour le refroidir, nous en retirons de la chaleur. Si nous laissons de la glace dans un environnement chaud, elle fondra à cause d'un apport de chaleur. La *chaleur* est la grandeur idéale pour décrire ces processus.

Ce que la chaleur n'est pas. Commençons par tenter de répondre à la question : Qu'est-ce qu'un objet en mouvement, une sphère chargée et un corps chaud ont en commun ? Sur la base de ce que nous avons appris dans les chapitres précédents, nous pouvons affirmer que chacun des ces objets a reçu de l'énergie (fig. 5.17). Dans chacun des cas, le système possède plus d'énergie que si l'objet ne se mouvait pas, la sphère n'était pas chargée ou le corps n'était pas chaud. Du point de vue de l'énergie, les trois situations sont semblables. Mais alors, qu'est-ce qui différencie par exemple une pierre en mouvement d'une pierre chaude ?

Nous apprendrons que l'objet est en mouvement parce qu'il a reçu de la quantité de mouvement et que cet apport entraîne une hausse d'énergie. Mais nous savons également que l'énergie d'un système peut avoir de multiples origines, raison pour laquelle nous attribuons à la quantité de mouvement le fait que l'objet est en mouvement plutôt que de devenir chaud.

Si nous appliquons ce raisonnement au corps chaud, nous devons conclure que la pierre est chaude non pas parce qu'elle contient de l'énergie, mais parce qu'elle contient plus de chaleur que si elle était froide. Une pierre s'échauffe et un cube de glace fond parce qu'ils reçoivent de la chaleur. Même si nous savons que l'énergie accompagne tous les processus, chauffage inclus, elle ne fait pas de distinction entre eux. La conclusion est : *ce que nous appelons chaleur dans la vie quotidienne n'est pas de l'énergie.*

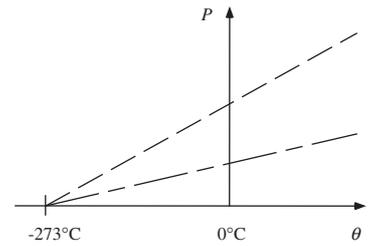


FIGURE 5.16 La pression des gaz dilués évolue linéairement avec la température lorsque le volume est maintenu constant. Si l'on reporte les mesures pour deux gaz différents, on obtient deux droites pour lesquelles $p=0$ se situe à la même température. Ce comportement est observé pour tous les gaz suffisamment dilués et chauds. La droite qui interpole et extrapole les mesures effectuées représente le modèle du gaz parfait.

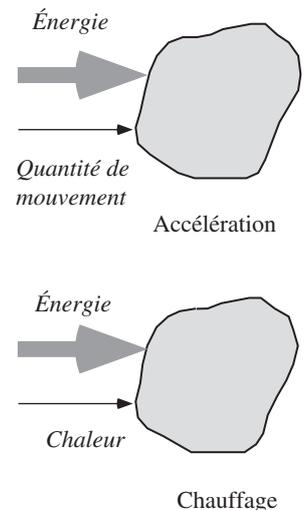


FIGURE 5.17 Comparaison de deux processus. Dans le premier, nous accélérons une pierre. En termes physiques, nous pouvons dire que nous avons transféré de la quantité de mouvement, ce qui le fait se mouvoir plus rapidement. Simultanément, de l'énergie est ajoutée à la pierre. Dans le second cas, la pierre est chauffée. La différence est que, maintenant, nous ajoutons de la chaleur plutôt que de la quantité de mouvement. La chaleur rend la pierre plus chaude.

Les lois de la physique nous confortent dans cette vision. Nous apprendrons au chapitre 8 que l'énergie est une mesure différente de la gravité et de l'inertie, ce qui implique qu'une augmentation de l'énergie d'un système entraîne une augmentation de sa masse. Cela ne signifie pas nécessairement que l'objet est devenu plus rapide, plus chaud ou les deux ; il peut tout aussi bien être devenu chargé électriquement. L'énergie, et donc la masse, ne peut pas être utilisée pour distinguer des processus différents. Nous avons absolument besoin d'autres grandeurs telles que la quantité de mouvement ou la charge électrique pour déterminer ce qui est arrivé à un objet. Appliqué aux processus thermiques, cela signifie que si la chaleur est la grandeur responsable de l'échauffement d'une pierre ou de la fusion de la glace, plutôt que de rendre ces objets plus lourds, alors la chaleur ne peut pas être de l'énergie.

Ce qu'est la chaleur. La grandeur que nous avons appelée chaleur dans les pages précédentes était appelée calorique par Sadi CARNOT et ses contemporains. Cette grandeur facile à visualiser et comprise intuitivement correspond à ce qui, après 1850, a été appelée *entropie* en physique, chimie et ingénierie. Nous voyons donc que le concept d'entropie qui, dans la présentation traditionnelle de la thermodynamique, est considéré comme formel, dérivé et non intuitif, a des racines simples et intuitives. C'est une grandeur analogue au volume et à la charge en dynamique des fluides et en électricité respectivement.

À partir de maintenant, nous utiliserons le terme d'*entropie* pour désigner des quantités de chaleur. Cependant, lorsque nous utiliserons le langage familier, le terme de chaleur désignera toujours une quantité d'entropie. Dans une expression telle que « de la chaleur a été produite durant ce processus », le mot *chaleur* sera utilisé à la place de son équivalent formel, à savoir l'entropie. Dans tous les autres cas, nous n'utiliserons pas le terme de *chaleur* pour la seule acception valable en thermodynamique traditionnelle, à savoir en tant que quantité d'énergie échangée lors d'un processus de chauffage.

Chauffage et refroidissement: transport d'entropie. Nous avons observé que la température d'un objet peut être augmentée par un apport d'entropie. Nous appellerons dorénavant *chauffage* ce processus, et cette notion représentera le *taux de transfert d'entropie vers le système*. Réciproquement, nous appellerons *refroidissement* le *taux de transfert d'entropie hors du système* (fig. 5.18).

Il est évident que l'entropie, la chaleur, peut être transportée. Elle nous arrive du Soleil pour être distribuée dans l'atmosphère avant d'être rayonnée dans l'espace. Elle s'écoule des profondeurs de la Terre vers sa surface. Elle migre à travers une barre métallique (fig. 5.7). De grandes quantités sont transportées du golfe du Mexique vers l'Europe par l'intermédiaire du Gulf Stream. Dans un chauffage central, elle est transportée de la chaudière vers les radiateurs. Ces quelques exemples montrent qu'il existe trois *modes de transport de l'entropie*, de la chaleur.

- *Conduction.* L'entropie s'écoule à travers les corps entraînée par une différence de température entre différentes parties des corps.
- *Convection.* L'entropie est transportée avec les corps en mouvement, essentiellement les fluides. La force motrice de ce type de transport d'entropie est celle qui entraîne le flux de matière, par exemple une différence de pression.
- *Rayonnement.* L'entropie qui nous vient du Soleil est transportée par la lumière, c'est-à-dire le champ électromagnétique.

Accumulation d'entropie. Si le chauffage est le taux de transfert d'entropie vers un système, cela implique que l'entropie doit être contenue dans le système, de la même manière que de l'eau ou de l'électricité transportée vers un système sont contenues dans le système (fig. 5.19). Nous pouvons donc affirmer:

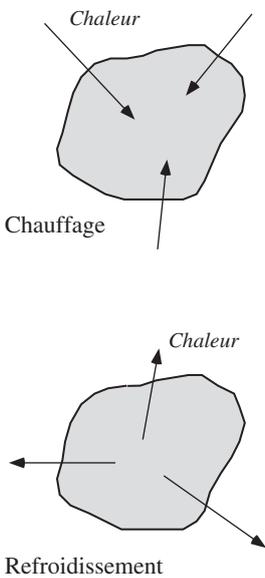


FIGURE 5.18 Chauffage et refroidissement. Par *chauffage*, nous entendons un flux d'entropie vers l'intérieur du corps. Dans le cas du *refroidissement*, l'entropie émerge du corps. Nous assumons donc que l'entropie est une grandeur qui peut s'écouler et qui peut être accumulée dans les corps.

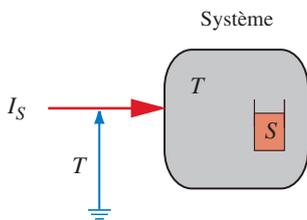


FIGURE 5.19 Accumulation d'entropie (diagramme de processus avec le réservoir d'entropie).

L'entropie est une grandeur qui peut être accumulée dans les corps et qui peut s'écouler d'un corps à l'autre. Ces propriétés en font une grandeur extensive (semblable à un fluide). C'est la grandeur extensive fondamentale pour la description des processus thermiques. Elle est désignée par le symbole S . Nous introduisons pour cette nouvelle grandeur une unité particulière, le carnot (Ct)

Pour des raisons historiques, l'entropie est traditionnellement mesurée en J K^{-1} . Nous montrerons à la section 5.4 quelle est l'origine de ce fait. Dans ce chapitre, nous mentionnerons à chaque fois l'équivalence: $1 \text{ Ct} = 1 \text{ J K}^{-1}$.

Nous pouvons ajouter l'entropie à la liste des grandeurs extensives que nous connaissons.

TABLEAU 5.2 Grandeurs semblables à un fluide.

Processus	Grandeur
Hydraulique	Volume V
Électrique	Charge électrique Q
Gravité	Masse grave m
Thermique	Entropie S

Rappelons ce qui a déjà été dit à plusieurs reprises dans les chapitre précédents au sujet des grandeurs semblables à des fluides telles que la charge électrique ou l'entropie. Ces grandeurs sont des notions abstraites, elles ne sont pas matérielles dans quelque sens que ce soit.

Production d'entropie. Il y a une question que nous ne nous sommes pas encore posée: d'où vient l'entropie? La nature nous révèle qu'il doit y avoir des sources d'entropie. Dans certains cas, l'entropie s'écoule hors des corps lors d'un processus de refroidissement. Mais il y a d'autres exemples plus intéressants: de l'entropie nous vient du Soleil ou des profondeurs de la Terre; de l'entropie est produite dans un feu, lorsque nous nous frottons les mains pour les réchauffer, lorsque de l'électricité circule dans un conducteur (fig. 5.20).

Il y a une différence fondamentale entre le premier exemple et les suivants. Dans le premier cas, l'objet qui se refroidit perd l'entropie qu'il avait reçue lors du chauffage; il y a simplement inversion des processus. Dans les autres cas, l'entropie émise n'était pas préalablement présente dans le système; la température du Soleil ne diminue pas, celle de la Terre non plus, nos mains se réchauffent, la température du conducteur ne diminue que si nous coupons le courant. Nous devons en conclure que lors de ces processus, l'entropie du monde augmente. Nous devons donc admettre une évidence que nous impose la nature: *l'entropie peut être créée, elle peut être produite au cours de certains processus.*

Parmi les processus producteurs d'entropie que nous connaissons déjà, citons les frottements dans les fluides (chapitre 1), le transport de l'électricité par conduction (chapitre 2), qui sont des processus de transport en présence de résistances. Mais si les phénomènes de transport sont producteurs d'entropie, alors le transport conductif de l'entropie lui-même doit l'être aussi. Cette particularité jouera un rôle important dans tous les phénomènes de transfert de chaleur que nous étudierons par la suite.

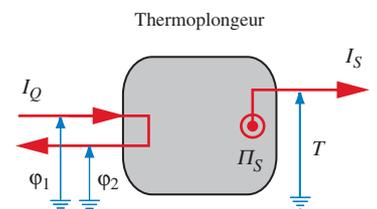


FIGURE 5.20 Production d'entropie (diagramme avec la source d'entropie représentée par un point entouré d'un cercle).

Irréversibilité. Puisque l'entropie peut être créée, on doit immédiatement se poser la question de savoir si elle peut être détruite. À nouveau, la nature nous offre la réponse, à savoir que *l'entropie ne peut pas être détruite*.

Les processus réels sont dits *irréversibles*. Illustrons cette notion par deux exemples : si nous lançons un objet sur une surface horizontale, nous savons qu'il ralentira et finira par s'arrêter à cause des frottements qui entraînent une production d'entropie. L'objet pourra être lancé en sens inverse, mais à nouveau, de l'entropie sera produite lors de ce mouvement inversé. Jamais on ne verra un objet qui s'est arrêté à cause des frottements réabsorber (et détruire) l'entropie émise et se mettre spontanément en mouvement. C'est ce que l'on entend par irréversibilité d'un processus.

Un autre exemple est celui de la section 5.1.9. Le fonctionnement d'une pompe électrique peut être inversé pour en faire un générateur, à l'exception près que le système s'échauffera dans ses deux modes de fonctionnement. Nous pouvons donc proposer la définition suivante :

Un processus irréversible est un processus au cours duquel il y a création d'entropie. Un processus qui se déroule sans production d'entropie est dit réversible. Un autre terme est utilisé pour caractériser les processus au cours desquels il y a production d'entropie : on parle de processus dissipatifs.

1. Pourquoi la fusion de la glace ou la vaporisation de l'eau démontrent-elles clairement la différence entre la chaleur (l'entropie) et la température ? Pourquoi cette différence est-elle plus difficile à percevoir lors du chauffage de l'eau ?
2. D'où vient l'entropie et où va-t-elle lors de l'utilisation d'un thermoplongeur pour chauffer de l'eau ?
3. Quelle est la signification des termes « chauffage » et « refroidissement » ? Sont-ils équivalents à « devenir plus chaud » et « devenir plus froid » ?

Q

1. Parce que lors d'un changement de phase, la température ne varie pas malgré l'apport (ou le retrait) d'entropie. Lors du chauffage de l'eau, la quantité d'entropie et la température augmentent toutes deux.
2. De nulle part : elle est produite dans le thermoplongeur et va dans l'eau.
3. Le chauffage consiste en un apport d'entropie au système, le refroidissement en un retrait d'entropie. Ces processus ne sont pas équivalents à devenir plus chaud ou plus froid ; un changement de phase est un chauffage ou un refroidissement sans variation de température.

R

5.2.3 Processus thermiques et diagrammes T-S

Lors de processus auxquels participe la chaleur, il y a plusieurs grandeurs physiques qui peuvent varier simultanément. À titre d'exemple, l'atmosphère terrestre est, d'un endroit à l'autre, constamment et simultanément en train de varier sa pression, sa

température, son volume, de s'échauffer ou de se refroidir, pour ne citer que quelques aspects de ses changements. Pour simplifier la description de phénomènes physiques aussi complexes, on essaie, dans un premier temps, de ne considérer que des processus «simples» au cours desquels une ou deux grandeurs varient simultanément. L'objectif de cette section est de montrer comment les diagrammes T - S permettent de donner une vision simple de processus thermiques fondamentaux.

Compression et détente adiabatique. Revenons à l'expérience de la section 5.1.2 qui consistait à compresser un volume d'air tellement rapidement qu'aucun échange de chaleur ne pouvait avoir lieu avec l'extérieur du système. Notre analyse nous a permis de conclure que la quantité d'entropie (de chaleur) n'avait pas varié dans le système, vu qu'il n'y avait aucun apport par chauffage ou par dissipation. Le processus en question n'a pour conséquence qu'une variation de la température sans variation de l'entropie. Un tel processus est dit *adiabatique* ou *isentropique*.

Dans un diagramme où l'on reporte la température en fonction de la quantité d'entropie, un tel processus est décrit par une droite verticale (fig. 5.21).

Chauffage à volume constant. Lorsque, par exemple, un gaz est chauffé dans un récipient dont le volume ne varie pas, le processus est dit *isochore*, la température augmente en même temps que la quantité d'entropie accumulée dans le volume envisagé.

Dans un tel cas, la construction du diagramme T - S n'est pas aussi simple que lors d'un processus adiabatique. Seule la connaissance des lois constitutives, c'est-à-dire de la manière dont la substance réagit à l'apport ou au retrait d'entropie, permet de tracer le diagramme en question. Dans les sections suivantes, l'introduction de la capacité entropique nous permettra de la faire en connaissance de cause. Pour l'instant, nous nous contentons d'une illustration qualitative d'un processus isochore (fig. 5.22).

Processus isotherme. Un autre type particulier de processus thermique consiste à chauffer un gaz en maintenant sa température constante. On parle alors de *processus isotherme*. Nous avons vu qu'une détente adiabatique entraînait une diminution de la température, alors qu'un chauffage à volume constant produisait l'effet contraire. Forts de cette observation, nous pouvons conclure que l'augmentation de la température d'un gaz due à un apport d'entropie peut être compensée par une augmentation adéquate du volume. La figure 5.23 montre comment un tel processus peut être réalisé. Le processus est représenté par des droites horizontales dans le diagramme T - S .

1. Quelle courbe représente la condensation de la vapeur d'eau dans un diagramme T - S ?
2. Un morceau de fer chaud est en train de refroidir dans un environnement froid. Comment se présentent les diagrammes T - S pour le morceau de fer et pour l'environnement durant ce processus?
3. Comment se présente le diagramme T - S de la détente d'air dans un cylindre équipé d'un piston? Supposez qu'il n'y a ni chauffage, ni refroidissement. Y a-t-il une différence entre le diagramme d'une détente réversible et celui d'une détente irréversible?
4. Est-il possible que l'air devienne plus chaud lorsque son entropie diminue?

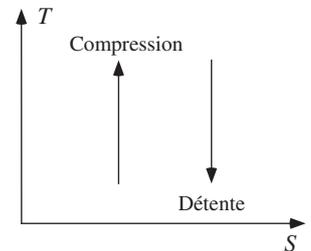


FIGURE 5.21 Diagramme T - S d'une compression ou d'une détente adiabatique, c'est-à-dire sans échange d'entropie (de chaleur et d'énergie) avec l'extérieur.

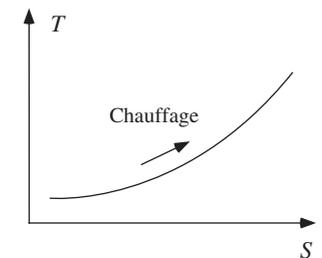


FIGURE 5.22 Diagramme T - S d'un processus isochore (ici, d'un chauffage à volume constant). L'aspect de la courbe dépend des propriétés du corps que l'on chauffe.

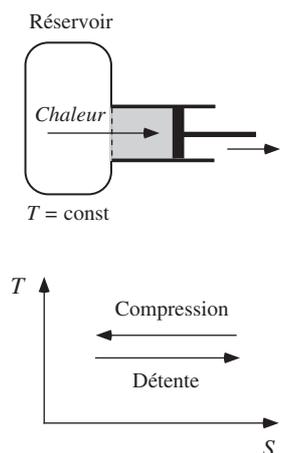


FIGURE 5.23 Réalisation et diagramme T - S d'un processus isotherme.



1. Droite horizontale de la droite vers la gauche passant par l'ordonnée 100°C (273.15 K).
2. Pour le fer: de la partie supérieure droite vers la partie inférieure gauche du graphique. Pour l'environnement: droite (quasi-)horizontale de la gauche vers la droite du graphique.
3. Détente réversible: droite verticale, de haut en bas. Détente irréversible: courbe de la partie supérieur gauche vers la partie inférieure droite (il y a production d'entropie).
4. Oui, si on le comprime en même temps qu'on le refroidit (retrait d'entropie).

5.3 BILAN D'ENTROPIE

Les propriétés de l'entropie que nous avons découvertes à la section 5.2.2 révèlent qu'il s'agit d'une grandeur extensive. Comme pour celles que nous avons rencontrés dans les chapitres précédents, nous pouvons énoncer une équation de bilan que nous allons élaborer progressivement.

Chauffage, refroidissement et dissipation. Les processus de chauffage et de refroidissement sont liés d'une part à des transports d'entropie à travers les matériaux entre deux niveaux de la température: il s'agit d'un processus de conduction. Nous décrivons ce mode de transport de l'entropie au moyen de flux d'entropie désignés par $I_{S, \text{cond}}$. Mais nous savons que la conduction de l'entropie est accompagnée d'une production d'entropie que nous prendrons en compte au moyen du taux de production d'entropie Π_S . Le taux de variation de l'entropie due au chauffage ou refroidissement par conduction sera donc donné par:

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond, net}} + \Pi_S \tag{5.11}$$

Dans cette équation, la grandeur $I_{S, \text{cond, net}}$ représente les flux nets par rapport au système considéré. Rappelons que les flux entrants sont positifs, les flux sortants négatifs. En outre, il y a deux différences importantes entre un taux de production et un flux. Dans le cas des flux, la grandeur transportée provient d'un autre système dont elle aura été extraite et où elle fera défaut. L'entropie produite ne fera défaut nulle part, elle apparaît simplement dans le système (fig. 5.24).

Apport d'entropie par convection. Nous avons également découvert que l'entropie peut être amenée dans un système ou en être extraite par l'intermédiaire de l'écoulement d'un fluide. Dans ce cas, l'écoulement de l'entropie n'est pas dû à une différence de température, mais à une différence de pression qui entraîne l'écoulement du fluide. C'est le phénomène de convection qui est responsable du flux d'entropie que nous désignerons par $I_{S, \text{conv}}$. Nous ajoutons cette contribution à l'équation de bilan d'entropie:

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond, net}} + I_{S, \text{conv, net}} + \Pi_S \tag{5.12}$$

Dans la section précédente, nous avons mentionné que l'entropie pouvait également être transportée par rayonnement, par exemple par l'intermédiaire du rayonnement solaire. Nous laisserons de côté pour l'instant cette contribution à la variation de l'entropie d'un système; le sujet sera traité dans les chapitres 10 et 11.

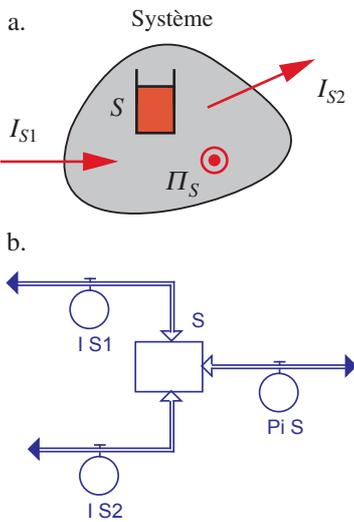


FIGURE 5.24 Bilan d'entropie: (a) diagramme de processus montrant l'accumulation, les flux et la production d'entropie; (b) diagramme de dynamique des systèmes correspondant à l'équation de ce bilan.

Lors de processus de chauffage ou de refroidissement d'un système, le taux de variation de l'entropie est dû aux flux et à la production ou à la dissipation d'entropie :

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond, net}} + I_{S, \text{conv, net}} + \Pi_S \quad (5.13)$$

La variation de l'entropie du système est égale à la somme de l'entropie transportée ou échangée par l'intermédiaire des flux et de l'entropie produite par des réactions ou à cause de la dissipation :

$$\begin{aligned} \Delta S_{(t_1 \rightarrow t_2)} &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{S}(t) dt = S_{\text{éch}(t_1 \rightarrow t_2)} + S_{\text{prod}(t_1 \rightarrow t_2)} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [I_{S, \text{cond, net}}(t) + I_{S, \text{conv, net}}(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \Pi_S(t) dt \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le taux de production d'entropie est toujours positif: $\Pi_S \geq 0$

Les lois constitutives déterminent les intensités des flux et des taux de production.

EXEMPLE 5.1. Un bilan d'entropie.

On chauffe de l'eau d'une manière particulière avec un thermoplongeur. Le taux de production d'entropie est maintenu constant à 1.2 Ct s^{-1} . Les pertes de chaleur à travers les parois du récipient sont données par un flux d'entropie qui croît, en 1000 s, de 0.20 Ct s^{-1} à 0.50 Ct s^{-1} . Considérez l'eau et le récipient comme un système unique. (a) Dessinez le diagramme de processus du système. (b) Comment le taux de variation de l'entropie varie-t-il au cours du temps? (c) De combien l'entropie du système a-t-elle varié au cours de ces 1000 s?

SOLUTION: (a) Le système est parcouru par la charge électrique qui s'écoule entre deux niveaux du potentiel. Ce processus produit de l'entropie. Une partie de l'entropie produite est accumulée, le reste se perd dans l'environnement, comme le montre la figure 5.25a.

(b) Le taux de variation de l'entropie peut être calculé à partir de l'équation (5.12), pour autant que tous les courants et taux de production soient connus. Ils sont, en vertu de la donnée, soit constants, soit croissants linéairement en fonction du temps (fig. 5.25b).

$$\begin{aligned} \Pi_S(t) &= 1.2 \text{ Ct s}^{-1} ; I_S(t) = at + b ; a = -3.0 \cdot 10^{-4} \text{ Ct s}^{-2} ; b = -0.20 \text{ Ct s}^{-1} \\ \dot{S}(t) &= ct + d ; c = -3.0 \cdot 10^{-4} \text{ Ct s}^{-2} ; d = 1.0 \text{ Ct s}^{-1} \end{aligned}$$

(c) Nous obtenons la variation de l'entropie du système par intégration de son taux de variation. Donc :

$$\Delta S = \int_0^{1000} \dot{S}(t) dt = \int_0^{1000} (ct + d) dt = \left[\frac{1}{2} ct^2 + dt \right]_0^{1000} = -150 \text{ Ct} + 1000 \text{ Ct} = 850 \text{ Ct}$$

ce qui correspond à l'aire du trapèze grisé dans la figure ci-contre.

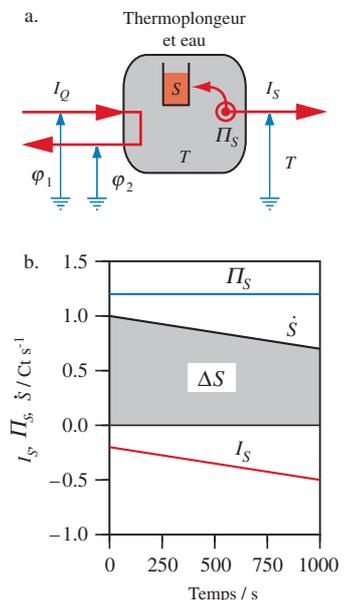


FIGURE 5.25 Exercice 5.1 : a) diagramme de processus ; b) évolution des grandeurs thermiques.

5.4 ÉNERGIE DANS LES PROCESSUS THERMIQUES

Sachant que l'énergie participe à tous les processus physiques, nous devons établir la relation entre elle et les grandeurs que nous venons d'introduire pour décrire les processus thermiques en procédant par analogie, ainsi que compléter l'équation de bilan de l'énergie par l'adjonction d'un terme supplémentaire qui décrit ce nouveau type d'échange d'énergie.

5.4.1 Inclusion des processus thermiques dans le bilan d'énergie

Pour nous convaincre que les processus thermiques impliquent des échanges d'énergie, revenons sur le chauffage d'un volume d'eau au moyen d'un thermoplongeur envisagé dans la section 5.1.6. L'énergie entre dans le système transportée par l'électricité et elle est transférée à l'eau par l'intermédiaire de l'entropie produite dans le thermoplongeur à cause de sa résistance.

Les échanges d'énergie lors de processus thermiques sont pris en compte par l'adjonction d'un terme supplémentaire dans l'équation de bilan de l'énergie :

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = I_{E,\text{hydr}} + I_{E,\text{él}} + \dots + I_{E,\text{therm}} \quad (5.15)$$

$I_{E,\text{therm}}$ se réfère aux transferts d'énergie lors de chauffage et de refroidissement. La forme intégrée sur un intervalle de temps de l'équation de bilan de l'énergie sera :

$$\Delta E_{(t_1 \rightarrow t_2)} = E_{\text{éch, hydr, } (t_1 \rightarrow t_2)} + E_{\text{éch, él, } (t_1 \rightarrow t_2)} + \dots + E_{\text{éch, therm, } (t_1 \rightarrow t_2)} \quad (5.16)$$

5.4.2 Entropie, température, énergie

Pour trouver la relation entre l'entropie et l'énergie, nous profitons de l'analogie entre les processus thermiques et les processus hydrauliques et électriques que nous avons étudiés dans les chapitres précédents. Il y a presque deux cents ans, SADI CARNOT, dans ses recherches sur la puissance motrice du feu, utilisa la comparaison entre la puissance d'une chute d'eau et celle de la chaleur, ce dont s'inspire notre vision des processus physiques et chimiques. La vision de CARNOT¹, que nous reprenons, est la suivante :

1. «D'après les notions établies jusqu'à présent, on peut comparer avec assez de justesse la puissance motrice de la chaleur à celle d'une chute d'eau: toutes deux ont un maximum que l'on ne peut pas dépasser, quelle que soit d'une part la machine employée pour recevoir l'action de l'eau, et quelle que soit de l'autre la substance employée pour recevoir l'action de la chaleur. La puissance motrice d'une chute d'eau dépend de sa hauteur et de la quantité de liquide; la puissance motrice de la chaleur dépend aussi de la quantité de calorique employé, et de ce qu'on pourrait nommer, de ce que nous appellerons la hauteur de sa chute, c'est-à-dire de la différence de température des corps entre lesquels se fait l'échange de calorique.» *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les et sur les machines propres à développer cette puissance.*

- Une machine thermique absorbe de l'entropie de la chaudière, que nous appellerons dorénavant «source chaude», à une température élevée; si elle pouvait fonctionner de manière réversible, la même quantité d'entropie serait transmise au condenseur, c'est-à-dire à l'environnement à une température basse. Dès maintenant, nous appellerons «source froide» cette partie de la machine thermique.
- Le transfert d'entropie d'un point de température élevée à un point de basse température libère de l'énergie à un certain taux qui correspond à la puissance thermique; cette énergie entraîne le processus mécanique.
- L'énergie ainsi libérée est transmise à la machine par l'entropie produite dans la source chaude. De manière générale, de l'énergie est transférée avec l'entropie lors de processus de chauffage et de refroidissement.

En nous inspirant de l'image de la chute d'eau et en considérant le diagramme du processus thermique (fig. 5.26), nous pouvons conclure :

La puissance d'une machine thermique est proportionnelle à la chute du potentiel thermique, la température, et au flux d'entropie :

$$\mathcal{P}_{\text{therm}} = -(T_2 - T_1) I_S \quad (5.17)$$

L'énergie libérée lors de la chute d'entropie doit être introduite dans le système dans lequel elle est libérée. Elle l'est par le courant d'entropie lors du chauffage. Réciproquement, lors du refroidissement du système, il n'y a pas qu'un courant d'entropie vers l'extérieur, mais également un courant d'énergie (fig. 5.27) .

Le flux d'énergie associé à un processus thermique est égal au produit de l'intensité du flux d'entropie et de la température :

$$I_{E, \text{therm}} = T I_S \quad (5.18)$$

L'entropie est le porteur de l'énergie dans les processus thermiques (chauffage et refroidissement).

L'énergie échangée lors d'un processus de chauffage ou refroidissement, est donnée par :

$$E_{\text{éch, therm.}, (t_1 \rightarrow t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} T I_S dt \quad (5.19)$$

Cette dernière relation révèle que l'énergie correspond au produit de l'entropie et de la température. Au milieu du XIX^e siècle, lors de l'élaboration de la thermodynamique traditionnelle par CLAUSIUS, l'énergie fut considérée comme la grandeur thermique fondamentale et l'entropie dut être introduite a posteriori comme une grandeur dérivée. C'est pour cette raison qu'elle est mesurée en J K^{-1} . Dans le reste de ce chapitre, nous utiliserons les deux notations : $1 \text{ Ct} = 1 \text{ J K}^{-1}$.

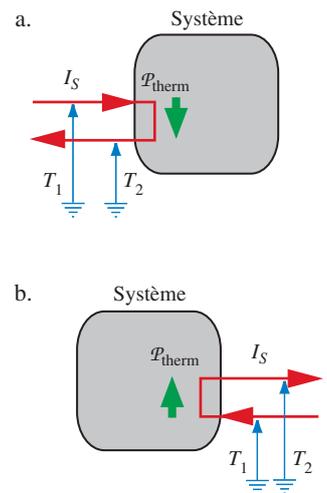


FIGURE 5.26 Diagrammes de processus expliquant la relation de base entre l'entropie et l'énergie : (a) de l'énergie est libérée lorsque de l'entropie «tombe» d'une température élevée vers une température plus basse; (b) de l'énergie est utilisée pour pomper de la chaleur vers une température plus élevée. Le taux auquel l'énergie est libérée ou utilisée est la puissance thermique.

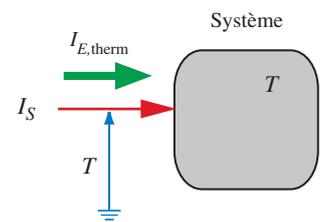


FIGURE 5.27 Le flux d'entropie lors du processus de chauffage (ou de refroidissement) est accompagné d'un courant d'énergie.

5.4.3 Dissipation

L'entropie est produite à partir de rien, mais le processus n'a pas lieu spontanément. Il faut «travailler» pour la produire, c'est-à-dire qu'une partie ou la totalité de l'énergie disponible est utilisée pour ce processus. Au chapitre 3, nous avons appelé *dissipation* ce phénomène de «gaspillage» de l'énergie (l'énergie nécessaire pour la production d'entropie n'est plus disponible pour produire du travail utile, sauf si le but du processus est de produire de la chaleur). Appelons *taux de dissipation* $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ le taux auquel l'énergie est dissipée.

Pour mettre en relation le taux de dissipation $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ et le taux de production d'entropie Π_S , nous allons nous appuyer sur l'exemple d'un thermoplongeur en régime permanent (fig. 5.28). Comme nous sommes en régime permanent, les deux courants d'énergie et, de ce fait, les deux puissances sont égales et de signes opposés. Dans l'équation (5.17), la température T_2 est celle du thermoplongeur et de l'eau, ainsi que celle du flux d'entropie émergent, donc T dans la figure 5.28. À quelle température correspond ici la température T_1 du flux entrant dans la partie inférieure de la figure 5.26? C'est le taux de production d'entropie qui correspond à ce flux entrant et, vu que l'entropie n'existait pas avant d'avoir été produite par le processus envisagé, nous pouvons assimiler sa production à son élévation du zéro absolu à la température T . Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{diss}} = T \Pi_S \tag{5.20}$$

ce qui nous permet de tirer la conclusion que :

Créer de l'entropie à la température T équivaut à l'élever du zéro absolu à cette température; l'énergie nécessaire pour sa production est égale à celle pour pomper l'entropie au niveau désiré.

Le taux de production d'entropie Π_S est une grandeur positive ou nulle, mais jamais négative, vu que l'entropie ne peut pas être détruite. En conséquence, le taux de dissipation $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ l'est aussi, en vertu de l'équation (5.20). Or, selon l'équation (5.17), la puissance du processus de production de chaleur $\mathcal{P}_{\text{therm}}$ est négative, puisque T_2 correspond à T et T_1 au zéro absolu. En conclusion :

$$\mathcal{P}_{\text{diss}} = -\mathcal{P}_{\text{therm}} \tag{5.21}$$

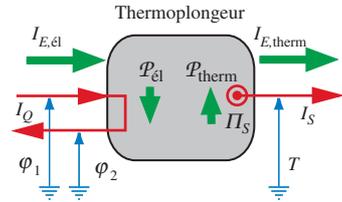


FIGURE 5.28 Diagramme de processus d'un thermoplongeur. L'énergie libérée par le processus électrique est complètement dissipée (utilisée pour produire de l'entropie).

1. Que signifie le terme «irréversible»?
2. Le moteur de STIRLING de la figure 5.10 est refroidi par un courant d'eau. Comment le moteur réagit-il si on augmente le débit de l'eau de refroidissement?
3. Quelle doit être l'intensité d'un flux d'entropie s'écoulant d'une source chaude à 500 K vers une source froide à 300 K pour obtenir une puissance thermique de 1.0 MW?
4. Quel est le lien entre la puissance thermique et les flux d'énergie thermique?



1. On dit d'un processus qu'il est irréversible si son déroulement est accompagné d'une production d'entropie (de chaleur).
2. L'efficacité augmente.
3. $I_S = \mathcal{P}_{\text{therm}} / \Delta T = 5000 \text{ W K}^{-1} = 5000 \text{ Ct s}^{-1}$.
4. La différence des flux d'énergie thermique est égale à la puissance thermique.



EXEMPLE 5.2. Énergie dissipée dans un thermoplongeur.

On utilise un thermoplongeur pour chauffer de l'eau. Il est connecté au réseau électrique qui délivre une tension de 220 V; on mesure une intensité du courant de 1.5 A; ces valeurs restent constantes. (a) Que vaut le taux de production d'entropie dans le thermoplongeur et l'eau considérés comme un système unique si la température est de 20°C? (b) Combien d'entropie est produite en 10 s si la température croît linéairement jusqu'à 22°C durant cet intervalle?

SOLUTION: (a) La puissance électrique du thermoplongeur

$$\mathcal{P}_{\text{el}} = UI_o = 220 \text{ V} \cdot 1.5 \text{ A} = 330 \text{ W}$$

est égale au taux de dissipation d'énergie. Donc:

$$\Pi_s = \frac{\mathcal{P}_{\text{diss}}}{T} = \frac{330 \text{ W}}{293 \text{ K}} = 1.126 \text{ W K}^{-1} = 1.126 \text{ Ct s}^{-1}$$

(b) L'évolution de la température est donnée par:

$$T(t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{10 \text{ s}} t$$

et la quantité d'entropie produite durant cet intervalle sera, selon l'équation (5.14):

$$\begin{aligned} S_{\text{prod}} &= \int_{0\text{s}}^{10\text{s}} \Pi_S(t) dt = \int_{0\text{s}}^{10\text{s}} \frac{\mathcal{P}_{\text{diss}}}{T(t)} dt \\ &= \mathcal{P}_{\text{diss}} \int_{0\text{s}}^{10\text{s}} \frac{1}{T(t)} dt = \mathcal{P}_{\text{diss}} \frac{10 \text{ s}}{T_2 - T_1} [\ln(T(t))]_{0\text{s}}^{10\text{s}} \\ &= \mathcal{P}_{\text{diss}} \frac{10 \text{ s}}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 11.22 \text{ J K}^{-1} = 11.22 \text{ Ct} \end{aligned}$$

Comme la variation de température est très faible, le résultat est pratiquement égal à celui que l'on obtient si l'on admet que le taux de production d'entropie est constant. ■

5.5 ENTROPIE ET TEMPÉRATURE DANS LES FLUIDES SIMPLES

L'entropie peut avoir différents effets sur les matériaux, tels que la dilatation, la fusion ou la vaporisation, ou le chauffage. Dans cette section, nous allons étudier les cas où l'unique réponse à un accroissement de l'entropie du corps est une augmentation de sa température, afin de déterminer comment la température et le contenu en entropie

d'un corps dépendent l'une de l'autre. Nous serons amenés à introduire la notion de *capacité en entropie* ou *capacité entropique*.

5.5.1 Modèle de chauffage uniforme

Le modèle que nous allons construire est celui de chauffage ou refroidissement uniforme et réversible, ce qui signifie que nous admettons que lors du chauffage, l'entropie se répartit instantanément dans tout le corps sans qu'il y ait production d'entropie due à cet écoulement d'entropie. Dans ce cas, l'entropie ajoutée au système sera réémise lors du refroidissement, ce qui est la caractéristique d'un processus réversible.

Un tel processus peut être approché par le chauffage de liquides. Vu qu'ils peuvent être brassés facilement, il est aisé d'attribuer une température unique à tout le corps durant l'absorption d'entropie, et cette température peut être mesurée facilement. Durant le chauffage des solides, qui fonctionne différemment, il est plus difficile de déterminer les variations d'entropie et de température.

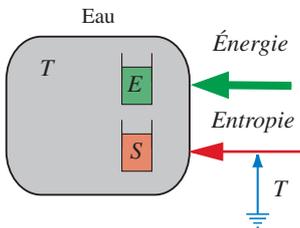


FIGURE 5.29 Diagramme de processus du chauffage d'un corps : de l'entropie et de l'énergie sont ajoutés. Si aucun autre processus n'entre en jeu, les quantités ajoutées sont accumulées dans le système.

5.5.2 Bilan d'entropie et d'énergie

Le modèle dont il est question est représenté par le diagramme de processus de la figure 5.29. Si le chauffage et le refroidissement sont réversibles, l'équation de bilan de l'entropie prend la forme :

$$\dot{S} = I_S \tag{5.22}$$

et que les seuls processus admis sont le chauffage et le refroidissement, l'équation de bilan de l'énergie est :

$$\dot{E} = I_{E, \text{therm}} \tag{5.23}$$

La relation entre les flux d'entropie et d'énergie lors du chauffage nous permet de combiner ces deux équations de bilan pour trouver une relation pour la variation d'entropie d'une part et celle de l'énergie d'autre part :

$$\dot{E} = T\dot{S} \tag{5.24}$$

Ceci est un exemple de ce qui est généralement appelé *relation fondamentale de GIBBS*. Nous en rencontrerons plusieurs autres versions dans les chapitres qui traiteront des processus thermiques.

5.5.3 Apport d'entropie à un liquide

Nous allons examiner le chauffage d'eau et d'éthylène glycol dans un récipient presque parfaitement isolé. Le thermoplongeur produit l'entropie qui est transférée au liquide en même temps que l'énergie, ce qui entraîne une élévation de la température.

Les résultats de la section 5.4 nous permettent de déterminer l'entropie produite et transférée au liquide. Il suffit de connaître la puissance du thermoplongeur et la température en fonction du temps. Le taux de production d'entropie est calculé à partir de ces valeurs et, par intégration, par exemple dans un tableur, nous pouvons déterminer la variation de l'entropie du liquide durant l'intervalle considéré. Si nous fixons arbitrairement une entropie nulle pour une température de référence (usuellement 0°C), la variation d'entropie peut être convertie en contenu d'entropie.

Si nous répétons l'expérience avec différents volumes de liquide, le taux de variation de la température varie proportionnellement. Pour rendre les résultats indépendants de la quantité de liquide et pour obtenir une relation température-entropie qui est liée uniquement au matériau et pas à sa quantité, les mesures de l'entropie sont converties à l'unité de masse. Cette grandeur est l'*entropie spécifique* s du matériau, qui se mesure en Ct kg^{-1} (ou $\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$):

$$s = \frac{S}{m} \quad (5.25)$$

La relation entre l'entropie spécifique et la température peut être représentée dans un diagramme T - s (fig. 5.30), dans une table ou par toute autre approximation analytique.

Les résultats expérimentaux pour l'eau et l'éthylène glycol font apparaître deux caractéristiques intéressantes. Il faut moins d'entropie pour élever la température du glycol de 1K que pour l'eau. En outre, la forme de la courbe, dite *caractéristique T-s* ou *caractéristique entropie-température*, est différente pour les deux matériaux; alors qu'elle est linéaire pour le glycol, elle ne l'est pas pour l'eau.

5.5.4 Coefficient de chauffage et capacité entropique

La signification de la caractéristique T - s pour des matériaux simples est analogue à la caractéristique pression-volume pour un récipient ou tension-charge pour un condensateur. Elle peut donc être analysée de la même manière. La particularité la plus significative est la pente de la courbe $T(s)$. Elle nous indique à quelle vitesse la température augmente en fonction de l'apport d'entropie (fig. 5.31).

La pente de la caractéristique T-s d'un processus de chauffage est le coefficient de chauffage α_s . Il relie le taux de variation de la température à celui de l'entropie spécifique :

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \alpha_s \dot{s} \\ \alpha_s &= \frac{dT}{ds} \end{aligned} \quad (5.26)$$

L'inverse du facteur de chauffage est la capacité entropique spécifique κ_s :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \kappa_s \dot{T} \\ \kappa_s &= \frac{ds}{dT} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Les deux facteurs dépendent en général de la température.

Le coefficient de chauffage α_s , mesuré en K kg Ct^{-1} (ou $\text{K}^2 \text{kg J}^{-1}$) et la capacité entropie spécifique en $\text{Ct K}^{-1} \text{kg}^{-1}$ (ou $\text{J K}^{-2} \text{kg}^{-1}$).

Plus le coefficient de chauffage d'un matériau est grand, plus il est facile de le chauffer. Cette grandeur est l'équivalent de l'*élasticité* de récipients de fluide ou de condensateurs électriques. Lorsque la caractéristique T - s est linéaire, la température peut être facilement calculée au moyen de ce facteur:

$$T = T_{\text{réf}} + \alpha_s (s - s_{\text{réf}}) \quad (5.28)$$

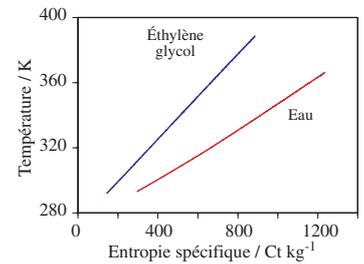


FIGURE 5.30 Diagramme T - s expérimental pour l'eau et l'éthylène glycol. La relation pour le glycol est presque linéaire, alors que celle de l'eau ressemble à une fonction exponentielle. L'entropie des matériaux a été arbitrairement fixée à zéro à $T = 273 \text{ K}$.

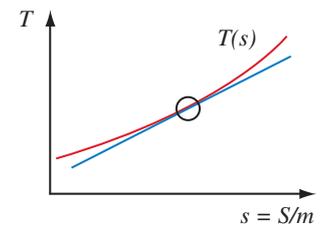


FIGURE 5.31 La pente de la courbe T - s nous indique avec quelle facilité il est possible de chauffer un corps.

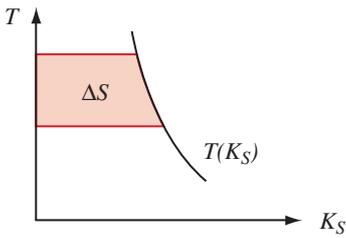


FIGURE 5.32 La température en fonction de la capacité entropique. Le diagramme peut être utilisé pour calculer la variation de l'entropie d'un corps.

La *capacité entropique*, $K_S = m\kappa_s$, a la signification usuelle d'une capacité, comme en hydraulique et en électricité. Elle se mesure en Ct K^{-1} (ou J K^{-2}). En général, la capacité entropique dépend de la température du matériau. La variation de l'entropie peut être calculée graphiquement à partir du diagramme température-capacité (fig. 5.32). Le choix inhabituel de la lettre grecque K (kappa) pour une capacité est dû au fait que la lettre C est, dans la thermodynamique traditionnelle, strictement réservée à l'énergie.

5.5.5 Énergie de matériaux simples

Nous voulons établir le lien direct entre la variation d'énergie et celle de la température dans un matériau. Pour le faire, nous introduisons dans l'équation de bilan de l'énergie la relation entre les flux d'énergie et ceux d'entropie lors du chauffage :

$$\dot{E} = m\dot{e} = I_{E,\text{th}} = TI_S = T\dot{S} = Tm\kappa_s\dot{T} \quad (5.29)$$

ce qui nous permet de formuler la relation souhaitée :

$$\dot{e} = c\dot{T} \quad (5.30)$$

où

$$c = T\kappa_s \quad (5.31)$$

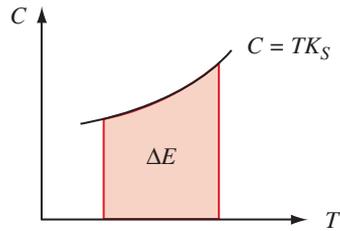


FIGURE 5.33 Coefficient de température spécifique de l'énergie (chaleur spécifique) en fonction de la température et variation de l'énergie du corps.

Le facteur c est la *coefficient de température spécifique de l'énergie* (chaleur massique²), et la grandeur $e = E/m$, l'énergie par unité de masse, est l'*énergie spécifique du matériau* (fig. 5.33). Alors que $\kappa_s = ds/dT$ est une capacité comme le sont les capacités hydraulique et électrique (les trois s'obtiennent en dérivant la grandeur extensive du domaine par rapport à son potentiel), la grandeur c n'en est pas une. Il n'y a pas de potentiel (grandeur de niveau) propre à l'énergie.

5.5.6 Matériaux à coefficients de température de l'énergie constants

Un certain nombre de matériaux, tels que l'eau et les solides à haute température, ont des chaleurs spécifiques constantes. Évaluons l'entropie et l'énergie de ces matériaux :

$$\dot{s} = \kappa_s\dot{T} = \frac{c}{T}\dot{T} \Rightarrow s(T) - s(T_{\text{réf}}) = \int_{T_{\text{réf}}}^T \frac{c}{T} \dot{T} dt = c \int_{T_{\text{réf}}}^T \frac{1}{T} dT = c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{réf}}}\right)$$

Nous en tirons :

$$s = s_{\text{réf}} + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{réf}}}\right) \quad (5.32)$$

Pour une valeur constante de c , nous obtenons :

$$e = e_{\text{réf}} + c(T - T_{\text{réf}}) \quad (5.33)$$

2. Le nom de chaleur spécifique est dérivé de l'usage en thermodynamique traditionnelle où la quantité de chaleur est mesurée en termes d'énergie.

Le tableau 5.3 donne les capacités entropiques spécifiques et les coefficients de température de l'énergie pour un certain nombre de matériaux.

TABLEAU 5.3 Capacité entropique et coefficient de température de l'énergie (chaleur massique) à 20°C.

Substances	Capacité entropique spécifique	Coefficient de température spécifique de l'énergie
	$\kappa_s / Ct \text{ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ($\text{J K}^{-2} \text{ kg}^{-1}$)	$c / Ct \text{ kg}^{-1}$ ($\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$)
Acier (moyenne)	1.57	460
Aluminium	3.06	896
Bois (moyenne)	8.53	2500
Cuivre	1.31	383
Fer	1.54	452
Glace (0°C)	7.69	2100
Plomb	0.44	129
Sable sec	2.87	840
Sodium	4.16	1220
Eau	14.26	4180
Mercure	0.47	139
Pétrole	7.30	2140

- À partir des données expérimentales (fig. 5.30), on obtient une valeur de $0.130 \text{ K kg Ct}^{-1} = 0.130 \text{ K}^2 \text{ kg J}^{-1}$ pour le coefficient de chauffage de l'éthylène glycol. Que vaut sa capacité entropique spécifique?
- Que vaut le coefficient de chauffage d'un mélange eau-glace durant le changement de phase?
- Utilisez l'équation (5.32) pour déterminer de quelle manière la capacité entropique de l'eau varie en fonction de la température.

- $\kappa_s = 1/\alpha_s = 7.67 \text{ Ct K}^{-1} \text{ kg}^{-1} = 7.67 \text{ J K}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.
- Zéro.
- En vertu de l'équation (5.27), il suffit de dériver l'équation (5.32) par rapport à la température pour trouver que la capacité entropique de l'eau varie de manière inversement proportionnelle à la température.



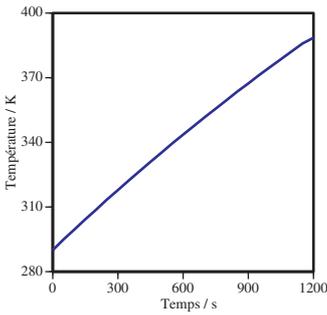


FIGURE 5.34 Évolution de la température de l'éthylène glycol lors du chauffage dans un récipient isolé.

EXEMPLE 5.3. Élaboration d'un diagramme T - s et détermination des paramètres du glycol.

Pour déterminer la relation entre l'entropie spécifique et la température d'un liquide, on chauffe le liquide au moyen d'un thermoplongeur dans un récipient bien isolé (fig. 5.35) et on mesure l'évolution de la température en fonction du temps. C'est ce qui a été fait pour l'éthylène glycol. Le résultat de cette expérience apparaît dans la figure 5.34. (a) Comment, à partir des valeurs de la température mesurées à intervalles réguliers Δt , rassemblées dans un tableur, ainsi que de la valeur de la puissance du thermoplongeur, peut-on obtenir la courbe T - s de la figure 5.30? (b) Comment obtient-on le coefficient de chauffage α_s ? (c) Sachant que le coefficient de chauffage vaut $0.130 \text{ K kg Ct}^{-1} = 0.130 \text{ K}^2 \text{ kg J}^{-1}$, déterminez la capacité entropique spécifique. d) Que vaut la chaleur massique c du glycol?

SOLUTION: Pour chaque mesure, on détermine le taux de production d'entropie en divisant la puissance du thermoplongeur par la température mesurée et on accumule ces contributions pour obtenir l'évolution de l'entropie du glycol en fonction du temps (en admettant que celle-ci est nulle au début du processus de chauffage):

$$S_{\text{prod}}(t) = S_{\text{prod}}(t - \Delta t) + \Pi_S(t) \cdot \Delta t$$

La division de ces valeurs par la masse du fluide fournit l'entropie spécifique que l'on peut reporter en fonction de la température afin d'obtenir la courbe de la figure 5.30.

(b) Le coefficient de chauffage α_s est égal à la pente de la courbe dans le diagramme T - s . Elle peut être obtenue graphiquement ou, de manière précise, au moyen d'un ajustement par la méthode des moindres carrés (qui permet par ailleurs de vérifier que la relation est linéaire).

(c) La capacité entropique spécifique est l'inverse du facteur de chauffage:

$$\kappa_s = \frac{1}{\alpha_s} = \frac{1}{0.130 \text{ K}^2 \text{ kg J}^{-1}} = 7.67 \text{ J K}^{-2} \text{ kg}^{-1} = 7.67 \text{ Ct K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

d) En vertu de l'équation (5.31), la chaleur massique du glycol croît linéairement avec la température:

$$c = 7.67 \text{ J K}^{-2} \text{ kg}^{-1} \cdot T$$

La chaleur massique du glycol varie entre $2240 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ à 20°C et $2860 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ à 100°C . ■

5.5.7 Modèle dynamique de chauffage de fluides

La température est la grandeur centrale dans tout modèle dynamique d'un processus thermique. Nous allons illustrer comment nous pouvons modéliser l'évolution de la température d'un fluide simple soumis à un chauffage ou un refroidissement en utilisant les relations énoncées dans la section précédente.

Nous chauffons dans un récipient bien isolé au moyen d'un thermoplongeur à puissance électrique constante respectivement de l'eau et du glycol (fig. 5.35) et nous recueillons les valeurs de la température du fluide en fonction du temps.

L'examen des courbes de température révèle que sa croissance est linéaire pour l'eau, ce qui n'est pas le cas pour le glycol (fig. 5.34). Selon l'équation (5.33), la température varie linéairement avec l'énergie spécifique lorsque le coefficient de température spécifique de l'énergie (la chaleur massique) est constant. Nous en déduisons donc que c'est le cas pour l'eau. Pour déterminer pour les deux fluides la manière dont évolue la capacité entropique spécifique k_s en fonction de la température, nous utilisons la procédure exposée dans l'exemple 5.3.



FIGURE 5.35 Chauffage d'un liquide dans un récipient bien isolé.

Chauffage de glycol. L'examen de ce diagramme s - T confirme que la capacité entropique spécifique du glycol est constante; elle correspond à la pente de la droite et vaut $7.67 \text{ Ct K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ (ou $\text{J K}^{-2} \text{ kg}^{-1}$).

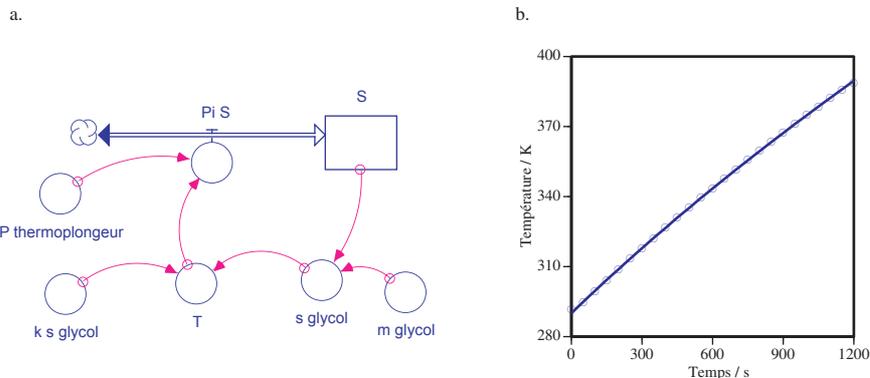


FIGURE 5.36 Chauffage de glycol: (a) modèle dynamique; (b) résultat de la simulation (les valeurs mesurées sont représentées par des petits cercles).

Le modèle dynamique permettant d'évaluer la température reproduit la démarche suivie pour déterminer l'entropie spécifique à partir de la puissance du thermoplongeur et de la température. Le quotient de l'entropie spécifique et de la capacité entropique spécifique permet de calculer la température dans le modèle. La concordance parfaite entre la température calculée au moyen du modèle et la température mesurée, illustrée par la figure 5.36, valide les hypothèses sur lesquelles repose le modèle.

Chauffage d'eau. La linéarité de la croissance de la température permet de supposer que la chaleur massique c est constante. Un graphique de l'énergie spécifique en fonction de la température permet de le confirmer et d'évaluer la valeur de c en tant que pente de la droite; on trouve $c_{\text{eau}} = 4204 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

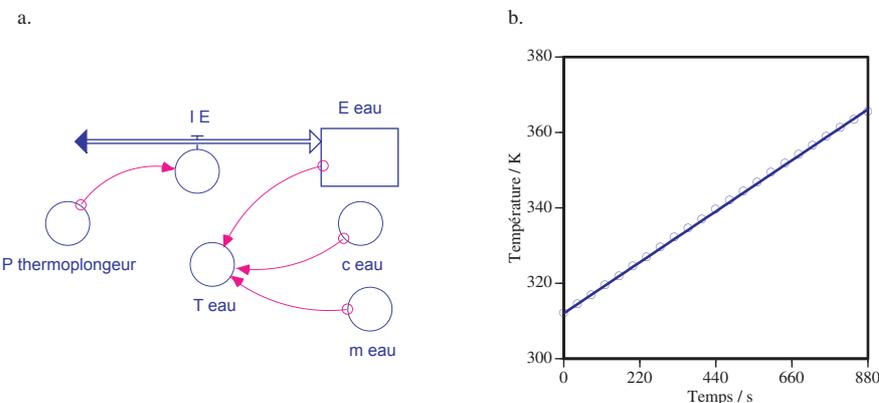


FIGURE 5.37 Chauffage d'eau: (a) modèle dynamique; (b) résultat de la simulation (les valeurs mesurées sont représentées par des petits cercles).

Le modèle dynamique du chauffage de l'eau est basé sur son contenu énergétique plutôt que sur son entropie, en suivant une démarche semblable à celle du modèle de chauffage du glycol (fig. 5.37). La légère différence entre la courbe simulée et les valeurs mesurées (quelques dixièmes de degrés) est due à la non-prise en compte de la puissance de brassage (environ 2 W) et à une surestimation de la valeur de la chaleur massique de 0.5%.

5.6 ENTROPIE ET ÉNERGIE LORS DE TRANSFERT DE CHALEUR

Pour pouvoir créer des modèles de processus thermiques, nous devons également trouver les expressions qui décrivent la transmission d'entropie à travers différentes couches lors de chauffage ou de refroidissement.

5.6.1 Transfert d'entropie à travers des couches composites

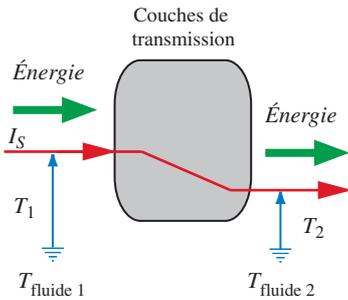


FIGURE 5.38 Transfert d'entropie et d'énergie à travers des couches d'une température élevée vers une température basse.

Nous savons que l'entropie peut s'écouler soit spontanément par conduction à travers la matière sous l'effet d'une différence de température, soit par convection, transportée par un fluide en mouvement, soit par rayonnement. Si l'un, voire plusieurs de ces processus contribuent à un écoulement d'entropie à travers une série de couches entre deux niveaux de la température (fig. 5.38 et 5.39), nous parlons d'un flux global d'entropie. Le flux d'entropie I_S est exprimé au moyen d'une conductance entropique globale G_S et de la différence de température :

$$I_S = -G_S (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.34)$$

où T_{amb} est la température de l'air ambiant et T celle du fluide. L'équation est écrite par rapport au corps qui est soumis au chauffage ou au refroidissement. La conductance G_S se mesure en $\text{Ct s}^{-1} \text{K}^{-1} (\text{W K}^{-2})$. La conductance d'une série de couche dépend naturellement de l'aire de la section à travers laquelle s'écoule l'entropie, ce qui nous permet de réécrire l'équation (5.34) sous la forme :

$$I_S = -Ah_S (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.35)$$

h_S est le *coefficient de transmission global de l'entropie* et se mesure en $\text{Ct s}^{-1} \text{K}^{-1} \text{m}^{-2} (\text{W K}^{-2} \text{m}^{-2})$. Il est important de noter que ce coefficient, et avec lui la conductance, dépendent de la température. Nous savons en outre que le processus de conduction est irréversible, donc qu'il entraîne une production d'entropie; nous y reviendrons à la section 5.7. Il est donc primordial de préciser à quel endroit (à quelle surface de transmission) nous calculons le flux d'entropie.

Le flux d'entropie à travers une surface entraîne un flux d'énergie; ils sont liés entre eux par la température T à la surface du corps :

$$I_{E, \text{therm}} = -G_E (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.36)$$

où $G_E = TG_S$ est la *conductance énergétique globale*. Le produit du coefficient de transmission d'entropie et de la température

$$h = Th_S \quad (5.37)$$

est le *coefficient de transmission de la chaleur*³ (de l'énergie), mesuré en $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$. En conséquence, le flux d'énergie accompagnant le flux d'entropie est donné par :

$$I_{E, \text{therm}} = -Ah(T - T_{\text{amb}}) \quad (5.38)$$

3. La notion de *chaleur* est utilisée, dans la thermodynamique traditionnelle, pour représenter l'énergie transférée lors de processus de chauffage ou de refroidissement. C'est la raison pour laquelle le terme de *chaleur* est associé au coefficient de transfert de l'énergie.

On a englobé dans le facteur h (et dans les facteurs de transmission en général) toute la complexité du processus de transport d'énergie à travers plusieurs couches (fig. 5.39). Si nous considérons, à titre d'exemple, le flux de chaleur à travers les parois d'un bâtiment en hiver, nous voyons que plusieurs processus entrent en œuvre. La température diminue dans la paroi en direction de l'extérieur; il y a des *gradients de température* dans les couches et l'entropie est transmise par *conduction*. Ces gradients de température ne dépendent pas que de la différence de température globale, mais également du type de matériau dont sont constituées les couches. La *loi de transmission de la chaleur* pour le courant d'énergie à travers une couche conductrice (*loi de conduction*) est donnée par:

$$I_{E, \text{therm, cond}} = -\frac{\lambda}{\delta} A (T - T_{\text{amb}}) = -Ah_{\text{cond}} (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.39)$$

Le facteur δ représente l'épaisseur de la couche traversée par la chaleur, alors que le facteur λ est la *conductivité thermique* (ou *conductivité énergétique*); λ se mesure en $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$. Leur quotient est le *coefficient de transmission par conduction* h_{cond} .

Mais la paroi à l'intérieur de la pièce est plus froide que l'air dans la pièce, ce qui implique qu'il y a une diminution de la température entre l'air ambiant et la paroi intérieure. Comme l'air à l'intérieur de la pièce est suffisamment brassé, on peut admettre que sa température est uniforme, à l'exception d'une fine couche, la *couche de transmission convective* (*couche limite*), à l'intérieur de laquelle la température diminue dans le sens du flux d'entropie. La nature du transfert d'entropie à travers cette couche est très complexe et elle est représentée schématiquement dans la figure 5.40. La loi de transmission de l'énergie à travers une *couche limite* fait intervenir un *coefficient de transmission par convection* h_{conv} :

$$I_{E, \text{therm, conv}} = -Ah_{\text{conv}} (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.40)$$

Le facteur h_{conv} se mesure en $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$.

Naturellement, on retrouve la même situation du côté extérieur de la paroi. En résumé, nous pouvons affirmer que la température diminue en plusieurs étapes à travers ces couches successives. Cette situation rappelle la chute du potentiel électrique le long d'une chaîne de résistances montées en série. Nous pouvons donc interpréter chacune des couches de la paroi comme une *résistance thermique*. Si on considère en plus les fenêtres et les portes, celles-ci sont également des résistances, mais elles sont en parallèle à celles de la paroi.

Dans la loi de transmission ((5.36), on remplace souvent la conductance par la résistance thermique (ou énergétique) R_E ; elle devient alors:

$$I_{E, \text{therm}} = -G_E (T - T_{\text{amb}}) = -\frac{1}{R_E} (T - T_{\text{amb}}) \quad (5.41)$$

La résistance thermique se mesure en K W^{-1} . Lors de la transmission de la chaleur à travers plusieurs couches successives, on peut calculer la résistance globale comme celle du montage en série de résistances électriques; la résistance totale est égale à la somme des résistances individuelles:

$$R_E = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{h_{\text{conv},1}} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{h_{\text{conv},2}} \right) \quad (5.42)$$

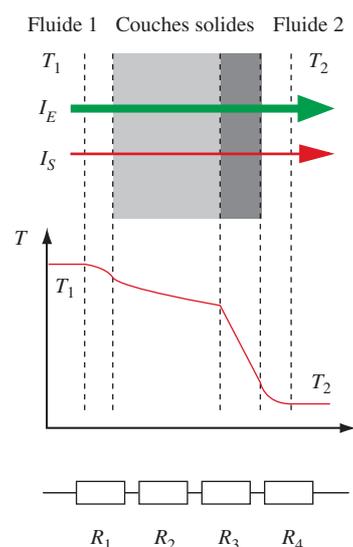


FIGURE 5.39 Assemblage en série de plusieurs couches de transmission d'entropie et d'énergie. La température diminue dans chacune des couches. Attention!, il y a production d'entropie.

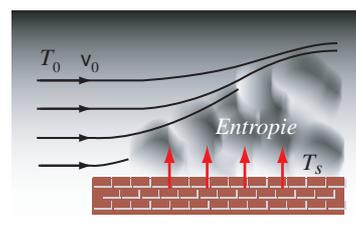


FIGURE 5.40 Transmission d'entropie d'un solide vers un fluide (comme de l'air ou de l'eau) s'écoulant sur la surface du solide.

Cette relation est encore incomplète, car elle ne tient pas compte du phénomène de dissipation lié au transfert de chaleur à travers les couches successives.

EXEMPLE 5.4. Extraction des informations à partir des données expérimentales.

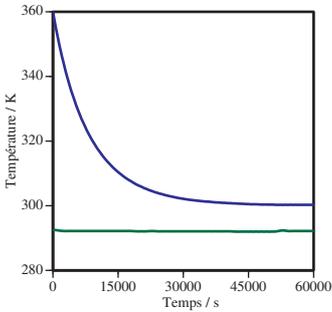


FIGURE 5.41 Évolution de la température lors du refroidissement d'eau dans une canette sans isolation.

Pour pouvoir modéliser le processus de refroidissement d'eau dans une canette sans isolation (fig. 5.4a), dont les résultats sont repris dans la figure 5.41, on doit pouvoir disposer de valeurs approximatives des paramètres intervenant dans le modèle afin de lancer les premières simulations sur des bases proches de la réalité. Sachant que la masse de l'eau contenue dans la canette est de 0.490 kg et que le coefficient de transmission de l'entropie de l'eau vers les parois de la canette est très élevé (les parois ont la même température que l'eau), déterminer une première approximation de la conductance globale G_S et de la puissance de brassage.

SOLUTION: L'équation de bilan de l'entropie doit prendre en compte le flux d'entropie de l'eau vers l'environnement et la production d'entropie due au brassage :

$$\dot{S} = I_S + \Pi_S$$

Le taux de variation de l'entropie peut être exprimé au moyen de la capacité entropique du volume d'eau :

$$\dot{S} = K_S \dot{T}$$

où K_S peut être calculé à partir de la masse du volume d'eau et une entropie spécifique moyenne dans la plage de température considérée, à savoir $\kappa_s = 13.0 \text{ Ct K}^{-1} \text{ kg}^{-1} = 13.0 \text{ J K}^{-2} \text{ kg}^{-1}$. Avec ces valeurs, nous obtenons $K_S = 6.37 \text{ Ct K}^{-1} = 6.37 \text{ J K}^{-2}$.

Les flux d'entropie et le taux de production d'entropie peuvent être calculés selon les équations (5.34) et (5.20) et substitués dans l'équation de bilan de l'entropie :

$$K_S \dot{T} = -G_S (T - T_{\text{amb}}) + \frac{\mathcal{P}_{\text{brassage}}}{T}$$

Les valeurs du taux de variation de la température peuvent être extraites des données expérimentales, particulièrement au début de l'expérience (c'est la pente de la tangente à l'origine de la courbe, elle est égale à $-6.90 \cdot 10^{-3} \text{ K s}^{-1}$) et lorsque le régime permanent est atteint (le taux de variation est alors nul). Si nous introduisons ces deux valeurs dans l'équation de bilan de l'entropie, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} -43.95 \cdot 10^{-3} \text{ Ct s}^{-1} &= -68 \text{ K} \cdot G_S + \frac{\mathcal{P}_{\text{brassage}}}{360 \text{ K}} \\ 0 \text{ Ct s}^{-1} &= -8 \text{ K} \cdot G_S + \frac{\mathcal{P}_{\text{brassage}}}{300 \text{ K}} \end{aligned}$$

La solution de ce système est $G_S = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ Ct s}^{-1} \text{ K}^{-1} = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ W K}^{-2}$ et $\mathcal{P}_{\text{brassage}} = 1.72 \text{ W}$. ■

5.6.2 Un modèle de transfert de chaleur

Refroidissement d'eau dans un récipient sans isolation. Nous voulons affiner le modèle provisoire de la section 5.1.4 concernant le refroidissement d'un volume d'eau enfermé dans une canette de 0.5 L (canette de bière) dont les parois ont été débarrassées de la couche de peinture pour laisser apparaître la surface métallique qui a été polie pour réduire au maximum les effets du rayonnement. Pour assurer une température

uniforme dans tout le volume, l'eau est brassée au moyen d'un mélangeur magnétique. Les données recueillies révèlent que la température finale de l'eau se stabilise au-dessus de la température ambiante.

Le processus peut être décrit simplement au moyen d'une conductance globale $G_S = h_s A$ telle qu'elle est introduite par l'équation (5.35). À partir du contenu en entropie du système, on calcule la température en se basant sur l'équation (5.32) pour trouver:

$$T(s) = T_{\text{réf}} \exp\left(\frac{s - s_{\text{réf}}}{c}\right) \stackrel{s_{\text{réf}}=0}{=} T_{\text{réf}} \exp\left(\frac{s}{c}\right)$$

où $T_{\text{réf}} = 273 \text{ K}$. Ce modèle donne une évolution qualitativement correcte mais avec une température finale égale à la température ambiante. La différence observée est due à la production d'entropie par le mélangeur. On peut estimer grossièrement la puissance de ce processus puisqu'elle est égale au flux d'énergie résiduel lorsque la température s'est stabilisée. Cette valeur peut être affinée dans le modèle.

On arrive à une adéquation parfaite entre les mesures et la simulation (fig. 5.42b) pour les valeurs suivantes: $G_S = 7.22 \cdot 10^{-4} \text{ Ct s}^{-1} \text{ K}^{-1} = 7.22 \cdot 10^{-4} \text{ W K}^{-2}$ et $\mathcal{P}_{\text{brassage}} = 1.75 \text{ W}$, ce qui montre que la première approximation de l'exemple 5.4 était proche de la réalité.

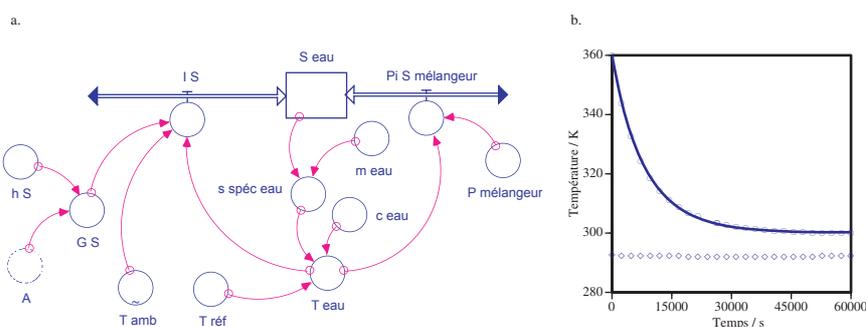


FIGURE 5.42 Refroidissement d'eau dans un récipient non isolé: (a) modèle dynamique; (b) résultat de la simulation; les données expérimentales sont représentées respectivement par des petits cercles ou losanges.

Réchauffement d'eau froide dans un environnement chaud. Nous étudions le processus inverse, à la différence près que le récipient est une gourde métallique bien isolée du point de vue thermique (fig. 5.43). Les données recueillies montrent à nouveau que la température de l'eau se stabilise légèrement au-dessus de la température ambiante, ce qui est dû au brassage destiné à assurer une température uniforme dans le volume d'eau.

Le modèle dynamique est identique à celui de la figure 5.42, et l'adéquation est à nouveau parfaite si nous utilisons les valeurs $\mathcal{P}_{\text{brassage}} = 0.26 \text{ W}$ et $h_s = 0.0102 \text{ Ct s}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ m}^{-2} (\text{W K}^{-2} \text{ m}^{-2})$. La diminution de la valeur du coefficient de transmission global de l'entropie est une conséquence de la présence de l'isolation autour de la gourde. L'entropie doit traverser une couche supplémentaire, ce qui diminue l'intensité du flux d'entropie.

Il est possible de distinguer entre les modes de transmission de l'entropie. Dans ce cas, on doit faire la distinction entre la transmission en mode convectif à l'intérieur de la gourde, en mode conductif à travers le manteau et l'isolation et à nouveau en mode convectif à l'extérieur de l'isolation. Pour le faire, on calcule les résistances thermiques (résistances au flux d'énergie) pour chacune des trois couches qui constituent le manteau de la gourde et on les additionne comme dans l'équation (5.42), vu qu'elles sont en série (fig. 5.39). On fait de même pour le fond de la gourde. Comme ces deux résistances sont montées en parallèles, la somme de leurs inverses correspond à la



FIGURE 5.43 Réchauffement d'eau dans un environnement chaud. L'eau est contenue dans une gourde isolée et est brassée continuellement au moyen d'un mélangeur magnétique.

conductance énergétique G_E . Le quotient de cette valeur et de la température instantanée de l'eau est égal à la conductance entropique G_S qui apparaît dans le modèle dynamique de la figure 5.42a. On obtient une correspondance parfaite entre les données expérimentales et les valeurs du modèle en choisissant: $\alpha_{\text{int}} = 600 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$, $\alpha_{\text{ext}} = 12 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ et $\lambda_{\text{isol}} = 0.021 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Pour compléter le modèle, il faut encore prendre en compte la dissipation liée au transfert d'entropie.

5.7 TRANSFERT DE CHALEUR ET PRODUCTION D'ENTROPIE

Nous avons découvert au chapitre 3 que les processus de transport de grandeurs extensives telles que le volume de fluide ou la charge électrique étaient dissipatifs, car ils sont toujours accompagnés d'une production de chaleur due aux frottements. L'entropie étant elle aussi une grandeur extensive, son transport doit également être dissipatif.

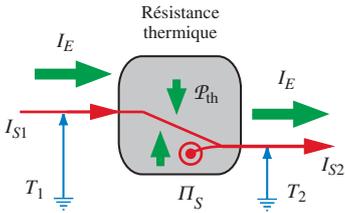


FIGURE 5.44 La transmission d'entropie due à une chute de température est dissipative: il y a production d'entropie supplémentaire.

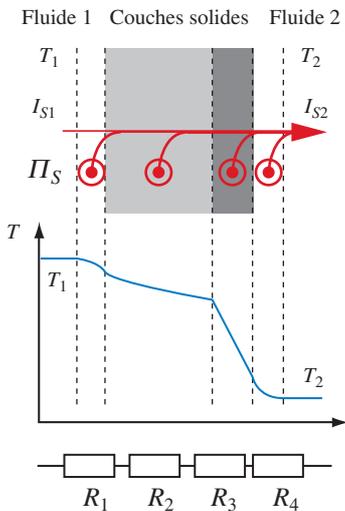


FIGURE 5.45 Transfert de chaleur à travers une série de couches. La température diminue dans chaque couche. Le processus est dissipatif (il y a production d'entropie).

5.7.1 Dissipation dans les résistances thermiques

En d'autres termes, l'écoulement d'entropie produit de l'entropie, ce qui rend le processus irréversible. Pour nous en convaincre, il suffit de réaliser par exemple que la conduction de l'entropie à travers une succession de couches est analogue à la conduction de la charge électrique qui est un processus qui produit de l'entropie. Nous l'avons vu à la section 5.6.1, un conducteur thermique est une *résistance thermique*, tout comme un conducteur électrique a des propriétés résistives.

Vu que la production d'entropie est une conséquence de la transmission de chaleur, et que cette transmission a lieu à travers des couches (fig. 5.39), nous devons modifier notre modèle d'élément(s) résistif(s). Le diagramme de processus d'une résistance thermique doit inclure une source représentant la production d'entropie (fig. 5.44 et 5.45).

Le taux de production d'entropie dans un élément résistif thermique est calculé à partir du taux de dissipation. L'énergie dissipée est l'énergie libérée par l'entropie lors de sa chute entre T_1 et T_2 (fig. 5.44). La puissance thermique du courant d'entropie entrant dans le système est

$$\mathcal{P}_{\text{therm}} = -(T_2 - T_1) I_{S1} \tag{5.43}$$

Vu que, selon l'équation (5.21), $\mathcal{P}_{\text{diss}} = -\mathcal{P}_{\text{therm}}$, et que la dissipation a lieu à la température inférieure T_2

$$\mathcal{P}_{\text{diss}} = T_2 \Pi_S \tag{5.44}$$

le taux de production d'entropie est

$$\Pi_S = \frac{1}{T_2} (T_1 - T_2) I_{S1} \tag{5.45}$$

Une représentation possible de la production d'entropie due à la transmission d'entropie dans un modèle dynamique est la suivante (fig. 5.46). Les équations de bilan d'entropie pour les deux corps échangeant de la chaleur sont représentés par des stocks. Sans la dissipation, l'échange pourrait être représenté par un flow entre les deux stocks. Nous devons ajouter un troisième stock pour symboliser l'entropie des couches de transmission entre les corps.

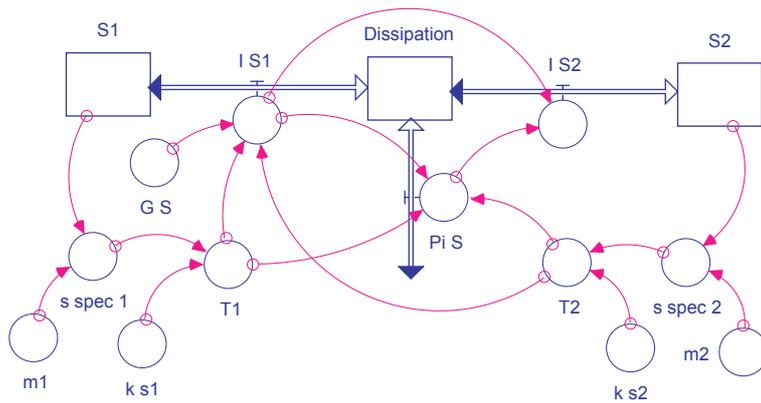


FIGURE 5.46 Modèle dynamique du transfert de chaleur entre deux corps avec prise en compte de la dissipation.

Vu que ces couches sont des résistances, elles n'accumulent pas d'entropie. C'est pourquoi le flux qui émerge de cet élément doit être égal à la somme du flux entrant et du taux de production dans l'élément :

$$I_{S2} = I_{S1} + \Pi_S \quad (5.46)$$

L'intégration de la production d'entropie due au transfert de chaleur entre deux éléments d'un système est représentée dans la figure 5.46. Le stock médian sert à modéliser l'augmentation du flux d'entropie donné par l'équation (5.46).

EXEMPLE 5.5. Conductances thermiques pour des couches composites.

L'équation (5.34) décrit le transfert d'entropie à travers des couches composites au moyen d'une conductance globale G_S . L'interface entre deux systèmes peut être imaginée comme une combinaison de conductances en parallèle (fig. 5.47a) ou en série (fig. 5.47b). Si l'on admet que les conductances ne dépendent pas de la température, que valent les conductances équivalentes (a) du montage en parallèle; (b) du montage en série?

SOLUTION: (a) Dans le cas du montage en parallèle (fig. 5.47a), la situation est la même qu'en électricité lors du montage en parallèle de conductances entre deux différences de potentiel :

$$G_{S, \text{parallèle}} = G_{S1} + G_{S2}$$

(b) Dans le cas du montage en série (fig. 5.47b), il y a une différence essentielle due à la production d'entropie dans les éléments. En vertu de l'équation (5.45), l'entropie produite dans le premier élément du montage est donnée par :

$$\Pi_S = \frac{1}{T_1} (T - T_1) I_{S1}$$

Il s'ensuit :

$$I_{S2} = I_{S1} + \Pi_S = I_{S1} \left[1 + \frac{1}{T_1} (T - T_1) \right] = I_{S1} \frac{T}{T_1}$$

Les différences de températures s'additionnent et peuvent être exprimées au moyen du quotient des flux d'entropie et des conductances respectives :

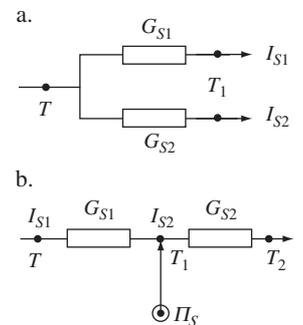


FIGURE 5.47 Conductances de couches composites: a) en parallèle b) en série.

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{I_{S1}}{G_{S1}} + \frac{I_{S2}}{G_{S2}} = I_{S1} \left(\frac{1}{G_{S1}} + \frac{T}{T_1} \frac{1}{G_{S2}} \right) = \frac{I_{S1}}{G_{S, \text{série}}}$$

En conclusion :

$$\frac{1}{G_{S, \text{série}}} = \frac{1}{G_{S1}} + \frac{T}{T_1} \frac{1}{G_{S2}}$$



5.7.2 Corps en contact thermique

Équilibrage des températures de deux volumes d'eau. Nous sommes maintenant en mesure de modéliser la dynamique du système de la section 5.1.1 illustré par la figure 5.1. Nous savons qu'il faudra prendre en compte la dissipation due au transfert de chaleur, et le modèle de la figure 5.46 constituera l'élément de base auquel nous ajouterons les particularités du système considéré.

Comme il s'agit d'eau, nous utilisons la chaleur spécifique quasi constante dans la plage de température considérée plutôt que la capacité entropique variable. La puissance du brassage est intégrée comme dans les modèles précédents. Pour obtenir la coïncidence entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées au moyen du modèle, il faut prendre en compte le fait que la conductance entropique dépend de la température. Pour le faire, on détermine dans un premier temps la conductance thermique (énergétique) G_E que l'on divise ensuite par la température du fluide pour obtenir G_S (fig. 5.48).

FIGURE 5.48 Modèle dynamique du transfert de chaleur entre deux volumes d'eau.

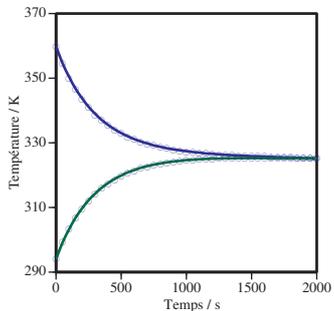
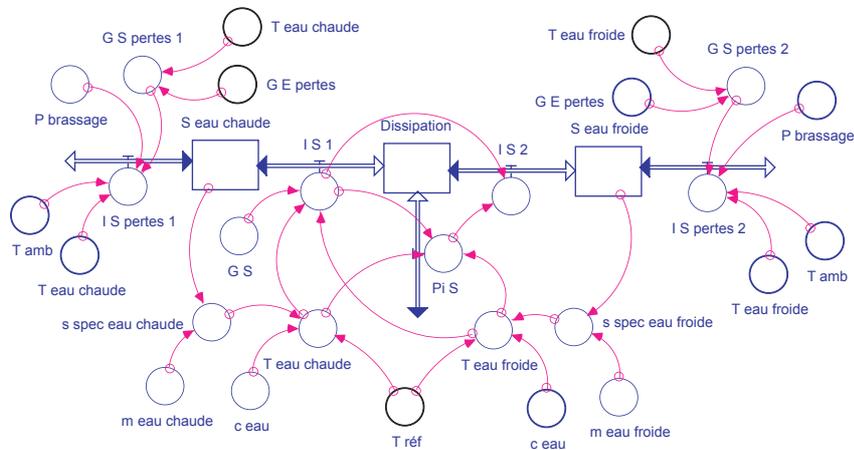


FIGURE 5.49 Équilibrage des températures de deux volumes d'eau. Les valeurs mesurées sont représentées par des cercles.

La correspondance entre les valeurs mesurées et celles du modèle (fig. 5.49) a été obtenue en choisissant $P_{\text{brassage}} = 0.50 \text{ W}$ et $\lambda_{\text{isol}} = 0.05 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. L'isolation était constituée d'une couche d'ouate de coton entre le récipient de verre et le conteneur cylindrique en aluminium. La valeur choisie correspond à celle que l'on trouve dans les tables pour le coton.

Chauffage d'un cylindre de cuivre plongé dans de l'eau chaude. Dans tous les modèles que nous avons élaborés jusqu'à présent, nous avons admis que la température était la même dans tout le volume du système considéré et que le chauffage ou le refroidissement dû à des flux d'entropie provoquait une variation de température

uniforme. Le brassage des liquides permet de réaliser pratiquement cet uniformisation de la température.

La situation n'est pas la même lors du chauffage d'un cylindre de cuivre plongé dans de l'eau chaude qui a été présenté dans la figure 5.2. Les deux températures s'équilibrent, mais lorsque l'on examine en détail l'évolution de la température du cuivre, on constate que, malgré l'excellente conductivité du métal, son taux de variation n'est pas maximal au début du processus (fig. 5.50), comme c'est le cas lors de l'équilibrage des températures de liquides (fig. 5.49). Le phénomène est facile à interpréter lorsque l'on sait que la température est mesurée près de l'axe du cylindre. L'entropie ne peut pas atteindre instantanément tout le volume du solide, elle doit migrer de l'extérieur vers l'intérieur, de manière semblable à ce qui se passe lors du transfert de chaleur dans une barre métallique étudié à la section 5.1.5 et illustré par la figure 5.7. Nous avons déjà rencontré ce phénomène lors de l'étude de l'écoulement d'un fluide à travers une chaîne de réservoirs à la section 1.8.6 et de la charge électrique à travers une chaîne de condensateurs à la section 2.8.4. Nous sommes en présence d'un phénomène de diffusion.

Le modèle à élaborer doit donc unir diffusion et dissipation en répétant l'élément de base de la figure 5.46 autant de fois que la finesse du modèle l'exige (fig. 5.51). Nous décidons de diviser le cylindre de cuivre en trois cylindres coaxiaux de rayons respectifs égaux à 3.0 cm, 2.0 cm et 1.0 cm. Nous envisageons chacun de ces éléments en tant qu'accumulateur d'entropie avec sa capacité propre et sa température (que nous associons au centre de l'élément). Le matériau entre deux centres est considéré comme un élément résistif entre deux unités de stockage de l'entropie. En outre, la transmission de la chaleur entre ces éléments est à l'origine d'un phénomène de dissipation.

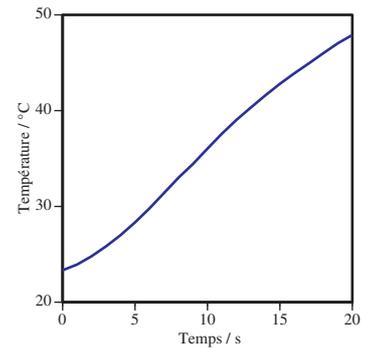


FIGURE 5.50 Chauffage d'un cylindre de cuivre dans de l'eau chaude : début de l'évolution de la température du cuivre : le taux de variation de la température n'est pas maximal au début du processus.

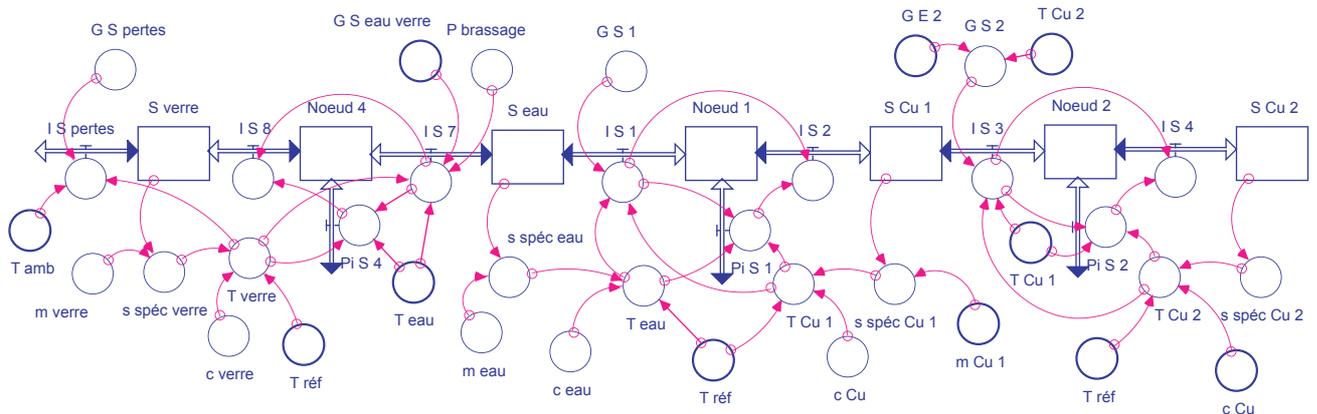
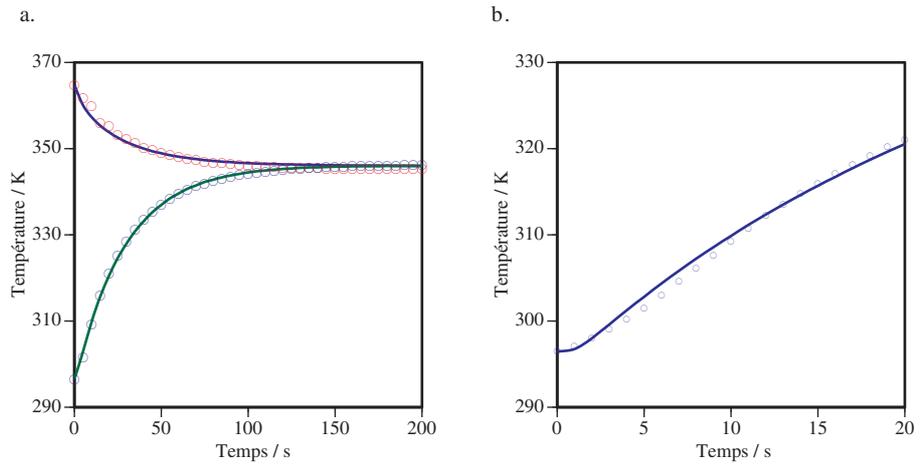


FIGURE 5.51 Modèle dynamique du chauffage d'un cylindre de cuivre dans de l'eau chaude : le cylindre de cuivre est décomposé en couches successives pour prendre en compte la diffusion de la chaleur qui n'est pas instantanée ; la figure montre les deux premiers éléments du modèle à droite du stock S eau). La partie à gauche du même stock modélise les pertes vers l'environnement.

La figure 5.52 montre les résultats de la simulation. La décomposition, dans le modèle dynamique, du cylindre de cuivre en couches permet de rendre compte du retard pris par la chaleur pour atteindre l'axe du cylindre.

FIGURE 5.52 Résultats de la simulation du modèle: a) jusqu'à l'équilibre des températures; b) variation initiale de la température du cuivre (les mesures sont représentées par des cercles).



1. Quelles observations permettent de supposer que, lors du transfert de chaleur à travers des couches, les courants d'entropie sont proportionnels à la différence de température?
2. Pourquoi le transfert de chaleur est-il un processus dissipatif?
3. De l'entropie s'écoule à travers une couche de transmission de 600 K du côté chaud à 300 K du côté froid. Dans quelle proportion le courant d'entropie a-t-il varié?
4. Pourquoi la relation pour la combinaison de conductances pour des couches en série est-elle, comme le montre l'exemple 5.5, différente de celle qui s'applique aux circuits électriques?



1. Parce que les courbes d'évolution de la température (fig. 5.4 et 5.42b) sont semblables à celles de l'évolution de la tension lors de la charge ou la décharge d'un condensateur.
2. Lors de la chute de l'entropie entre deux niveaux de la température, l'énergie libérée ne peut servir à rien d'autre qu'à produire de l'entropie.
3. Il a doublé.
4. À cause de la production d'entropie à l'intérieur des couches de transmission.



5.8 MACHINES THERMIQUES ET TEMPÉRATURE ABSOLUE

En combinant ce que nous avons appris jusqu'ici, nous allons pouvoir énoncer un certain nombre de relations générales concernant le fonctionnement des machines thermiques.

5.8.1 Machines thermiques et pompes à chaleur idéales

Rappelons d'abord que nous avons appelé « machine » un système qui sert à transborder l'énergie d'un porteur à l'autre, comme par exemple une pompe électrique qui transborde l'énergie de la charge électrique à un courant d'eau. Une machine thermique est une machine qui utilise l'énergie libérée lors de la chute de l'entropie entre la température élevée de la source chaude et celle plus basse de la source froide pour entraîner un autre processus (fig. 5.53).

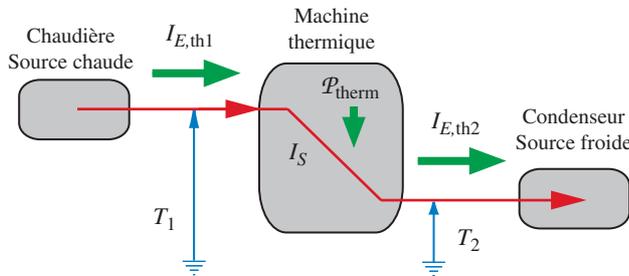


FIGURE 5.53 Diagramme de processus d'une machine thermique.

Si toute l'énergie libérée est utilisée pour entraîner le processus désiré (mécanique, électrique, etc.), la machine est dite *idéale*. Les machines idéales sont non dissipatives. Dans un tel cas, le diagramme de processus prend la forme de la figure 5.54a. Pour les pompes à chaleur et les réfrigérateurs, où l'entropie est pompée d'un niveau de température bas vers un niveau plus élevé, il suffit d'inverser les flux des grandeurs semblables à un fluide et de changer les signes des différences de potentiel (fig. 5.54b).

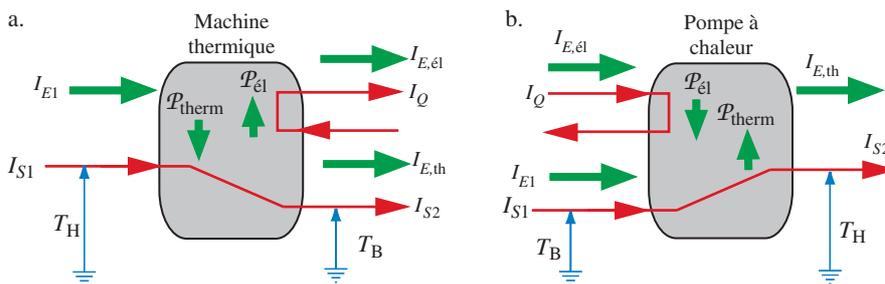


FIGURE 5.54 Diagramme de processus: a) d'une machine thermique idéale; b) d'une pompe à chaleur idéale. Idéal signifie qu'il n'y a pas de production d'entropie dans la machine.

L'analyse des performances d'une machine thermique idéale, en régime permanent, repose sur l'équation de bilan de l'entropie :

$$0 = I_{S1} + I_{S2} \tag{5.47}$$

et sur les relations qui lient l'entropie à l'énergie :

$$\begin{aligned} 0 &= I_{E1} + I_{E2} + I_{E, \text{utile}} \\ 0 &= \mathcal{P}_{\text{therm}} + \mathcal{P}_{\text{él}} \\ I_{E, \text{utile}} &= -\mathcal{P}_{\text{él}} \end{aligned} \tag{5.48}$$

Nous y ajoutons les relations entre les flux d'entropie du chauffage et du refroidissement et les flux d'énergie associés :

$$I_{E1} = T_H I_{S1} \quad , \quad I_{E2} = T_B I_{S2} \tag{5.49}$$

où T_H et T_B représentent respectivement la température haute et la température basse (source chaude et source froide).

5.8.2 Efficacité et coefficient de performance

Il est usuel d'introduire deux mesure de l'efficacité d'une machine thermique. La première est le rapport du flux d'énergie utile et de l'énergie fournie à la source chaude, que l'on appelle *efficacité* ou *rendement énergétique* ou *efficacité selon la première loi*:

$$\eta_I = \left| \frac{I_{E, \text{utile}}}{I_{E1}} \right| = \frac{T_H - T_B}{T_H} = 1 - \frac{T_B}{T_H} \quad (5.50)$$

La seconde est le rapport de la puissance utile et de la puissance thermique ; elle est appelée *rendement effectif* ou *efficacité selon la deuxième loi*:

$$\eta_{II} = \left| \frac{\mathcal{P}_{\text{él}}}{\mathcal{P}_{\text{therm}}} \right| \quad (5.51)$$

Pour une machine idéale, la deuxième mesure de l'efficacité est égale à 1. Elle semble plus naturelle et intuitive que la première. Elle nous indique ce que la machine est capable de réaliser comparé à ce que la nature permet. Nous ne pouvons utiliser que l'énergie libérée par la chute de l'entropie, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{\text{therm}}$. Si nous pouvons en disposer totalement, nous avons une machine parfaite. L'efficacité définie dans l'équation (5.51) est analogue à celle que nous avons introduite à la section 3.3.2.

L'efficacité énergétique est généralement utilisée pour quantifier la performance de machines thermiques. L'efficacité thermique d'une grande centrale nucléaire est légèrement inférieure à 30%. Pour des *machines idéales*, l'efficacité donnée par l'équation (5.50) est l'*efficacité* ou *rendement de CARNOT* η_C des machines thermiques. C'est l'efficacité maximale atteignable par une machine thermique travaillant entre une source chaude à la température T_H et une source froide à la température T_B .

Il est important de se rendre compte que l'efficacité de CARNOT est inférieure à 1, même pour une machine non dissipative, à moins que l'on soit capable de construire une source froide qui fonctionne à la température la plus basse possible, soit 0 K. La raison est simple à comprendre si l'on s'appuie sur le bilan d'entropie plutôt que sur celui de l'énergie. Vu que l'entropie fournie à la machine par la source chaude doit être évacuée par la source froide, un flux d'énergie égal à $T_B I_S$ sera émis vers l'environnement, ce qui est inévitable. L'entropie produite dans la source chaude doit tôt ou tard finir dans l'environnement.

Dans le cas des pompes à chaleur, on introduit le *coefficient de performance COP* en tant que rapport du courant d'énergie utile (celui qui accompagne le flux d'entropie émergent dans la figure 5.54b) et de la puissance du processus moteur:

$$COP = \left| \frac{I_{E, \text{therm}}}{I_{E, \text{él}}} \right| = \frac{T_H}{T_H - T_L} \quad (5.52)$$

Pour les mêmes raisons que pour les machines thermiques, on préfère comparer la puissance thermique à la puissance du processus moteur:

$$\eta_{II} = \left| \frac{\mathcal{P}_{\text{therm}}}{\mathcal{P}_{\text{él}}} \right| \quad (5.53)$$

On remarquera que, dans les deux cas, les relations sont l'inverse de celles qui ont été introduites pour les machines thermiques. C'est une conséquence du fait que, dans les

pompes à chaleur, le flux d'entropie circule «en remontant la pente». Pour une pompe à chaleur idéale, cette efficacité est égale à 1, inférieure à 1 sinon.

5.8.3 Machines et cycle de CARNOT

Les résultats obtenus ci-dessus ne sont valables que pour des appareils réversibles ou pour ce que l'on peut désigner par *machines de CARNOT*. La tâche d'une machine thermique est de transporter l'entropie de la source chaude vers la source froide; dans son ouvrage, CARNOT considère une machine qui absorbe l'entropie de la source chaude à *température constante*. Ensuite, l'entropie est abaissée à la température de la source froide d'où toute l'entropie est émise à nouveau à *température constante*. Dans notre étude, la *machine* est le fluide de travail, par exemple de l'air ou de la vapeur. Ce fluide subit un processus cyclique appelé *cycle de CARNOT* (fig. 5.55a). Ce cycle peut être décomposé en quatre étapes; nous supposons que le fluide est de l'air.

1. L'air subit une détente isotherme à la température T_H . Lors d'une détente isotherme, l'air absorbe de l'entropie à température constante.
2. La température de l'air doit être abaissée au niveau de celle de la source froide. Ce processus doit se dérouler sans aucun échange d'entropie, ce qui implique que cette étape doit être une détente adiabatique.
3. L'entropie absorbée lors de la première étape doit être réémise à température constante T_B , ce qui peut être réalisé par une compression isotherme.
4. Finalement, il faut ramener l'air à la température de la source chaude au moyen d'une compression adiabatique, vu qu'il ne doit pas y avoir d'échange d'entropie. Le cycle peut recommencer.

Notons que l'aire déterminée par le rectangle dans le diagramme T - S du cycle de CARNOT (fig. 5.55b) représente l'énergie qui a été libérée par la chute de l'entropie entre la source chaude et la source froide.

5.8.4 Machines thermiques dissipatives

Les machines thermiques et les pompes à chaleur réelles sont dissipatives (fig. 5.56). La production d'entropie peut avoir plusieurs raisons, la principale étant le transfert de chaleur (sect. 5.7). Sans entrer dans les détails, on peut ajouter un terme dissipatif dans l'équation de bilan de l'entropie, ce qui a des conséquences importantes. Une partie de l'énergie libérée par la chute de l'entropie entre les températures T_H et T_B sera utilisée pour cette production d'entropie. Cette entropie supplémentaire doit être évacuée par le condensateur avec l'entropie provenant de la source chaude, ce qui veut dire que le flux d'énergie vers l'environnement sera plus important que dans le cas réversible. L'énergie disponible pour le processus souhaitée sera inférieure à celle d'une machine réversible.

L'efficacité réelle selon la deuxième loi peut être obtenue de manière analogue aux équations (5.47) et (5.48). Celles qui changent sont:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{S1} + I_{S2} + \Pi_S \\ 0 &= \mathcal{P}_{\text{therm}} + \mathcal{P}_{\text{él}} + \mathcal{P}_{\text{diss}} \end{aligned} \tag{5.54}$$

Puissance disponible et perte de puissance. La puissance libérée par la chute de l'entropie à travers une différence de température est donnée par l'équation (5.17). Elle est souvent calculée en utilisant la température ambiante T_{amb} remplaçant la température de la source froide T_B . La puissance ainsi calculée est le maximum qui peut

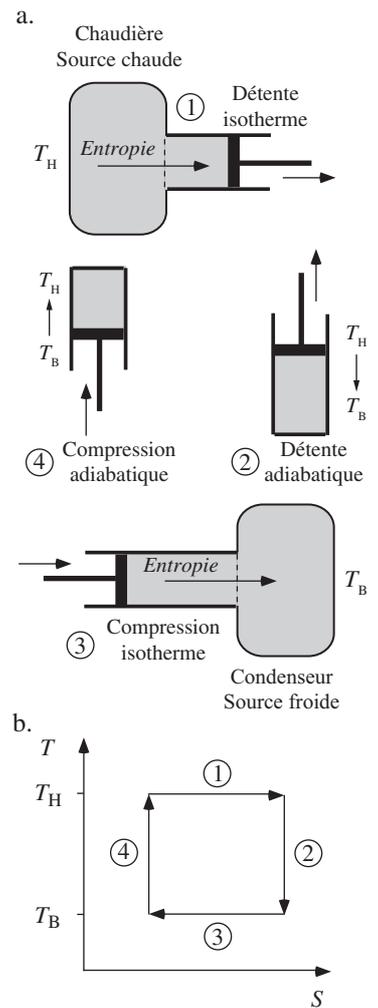


FIGURE 5.55 Cycle de CARNOT: (a) visualisation des quatre phases qui sont censées se dérouler de manière réversible. (b) diagramme T - S du cycle.

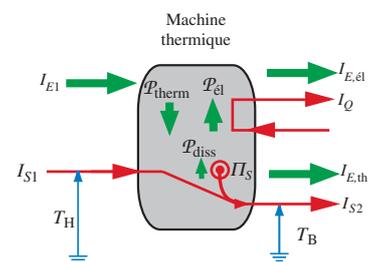


FIGURE 5.56 Diagramme de processus d'une machine thermique dissipative. L'adjonction du terme de production d'entropie modifie toutes les grandeurs à la sortie de la machine, en particulier la puissance utile.

être obtenu d'un flux d'entropie émis par un réservoir à la température T vers l'environnement. Pour cette raison, elle est appelée *puissance disponible* $\mathcal{P}_{\text{disp}}$ ou *puissance exergétique* de l'entropie :

$$\mathcal{P}_{\text{disp}} = -(T_{\text{amb}} - T) I_S \quad (5.55)$$

De la même façon, la perte de puissance due à l'irréversibilité, conséquence de la production d'entropie, est calculée par rapport à la température ambiante T_{amb} . La perte de puissance $\mathcal{P}_{\text{perdue}}$, c'est-à-dire la réduction par rapport au maximum possible est donnée par

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = T_{\text{amb}} \Pi_S \quad (5.56)$$

Nous comprenons maintenant pourquoi l'efficacité de CARNOT est inférieure à 1, même dans le cas idéal. La puissance disponible pour une machine idéale est :

$$\mathcal{P}_{\text{disp}} = (T - T_{\text{amb}}) I_S = (T - T_{\text{amb}}) \Pi_S = I_{E1} - \mathcal{P}_{\text{perdue}} \quad (5.57)$$

5.8.5 Température absolue et potentiel thermique

Lors de l'introduction de l'échelle de température du gaz parfait à la section 5.2.1, nous avons annoncé que nous apporterions la justification de son caractère de température absolue et de potentiel thermique.

Les résultats trouvés dans l'étude des machines thermiques permettent de préciser la notion de potentiel thermique. Considérons l'équation (5.50) donnant l'efficacité de CARNOT. Cette grandeur dépend uniquement des températures. Si nous souhaitons que cette grandeur prenne une valeur unique pour un cas concret de machine thermique, alors les températures apparaissant dans la formule prennent une signification indépendante de matériaux et de processus particuliers. Cela nous amène au concept de *température absolue*, c'est-à-dire indépendante d'une substance thermométrique. Nous en concluons que nous pouvons utiliser la grandeur T en tant que mesure du potentiel thermique.

Le terme «absolu» a également une seconde signification, celle de l'existence d'un zéro absolu de la température. La production d'entropie et l'efficacité de CARNOT en imposent l'existence. Si, dans l'expression de l'efficacité de CARNOT, la température T n'était pas définie sur une échelle absolue, la valeur de l'efficacité dépendrait de l'échelle choisie.

D'autre part, la relation entre l'énergie dissipée et l'entropie produite ne pourrait pas être formulée sans ambiguïté. À titre d'exemple, l'équation (5.44) prédirait des taux de production d'entropie négatifs s'il existait des températures négatives, ce qui est en contradiction avec tout ce que nous avons supposé. Les grandeurs semblables à un fluide qui peuvent être créées et/ou détruites doivent avoir un potentiel absolu. C'est par exemple le cas du volume et de la pression; le volume peut être produit ou détruit par détente ou compression, et le potentiel associé, la pression, a un zéro absolu.

5.8.6 Premier et deuxième principes de la thermodynamique

La présentation de la thermodynamique proposée dans ce chapitre est basée, comme nous l'avons exprimé au début, sur les idées de Sadi CARNOT. Elle n'est pas basée sur les concepts qui ont été développés dans la thermodynamique traditionnelle après 1850, à la suite de la découverte de la notion d'énergie.

Le premier principe apparaît sous une forme généralisée dans le bilan d'énergie formulé dans les équations (5.15) et (5.16). La forme traditionnelle du premier principe est l'équation de bilan de l'énergie pour des systèmes qui échangent de l'énergie au cours de processus thermiques et mécaniques. Il est formulé sous sa forme intégrale: la variation de l'énergie d'un système est égale à l'énergie échangée lors de chauffage et de refroidissement plus l'énergie échangée mécaniquement. Le premier terme, l'énergie du système, est appelé *énergie interne*, l'énergie échangée lors de chauffage et de refroidissement est appelée *chaleur*, et le troisième, l'énergie échangée mécaniquement est appelée *travail*.

Le cas du deuxième principe est plus complexe. Dans la littérature, on en trouve de nombreux énoncés. Il est peu probable que toutes ces formes expriment les mêmes concepts, ce qui nous amène à nous demander ce qu'est vraiment «le» deuxième principe. Ce qu'on peut en dire, c'est que ces formes sont des variations de notre équation de bilan de l'entropie (sect. 5.2) ou une relation entre l'entropie, la température et l'énergie semblable à l'équation (5.19), ou une combinaison des deux.

Pour notre propos, il suffit de savoir que le premier principe a quelque chose à voir avec le bilan d'énergie et que le deuxième principe est lié à l'entropie. Cela explique les termes d'efficacité selon le premier principe (5.50) et selon le deuxième principe (5.51) des machines thermiques.

1. Une centrale nucléaire typique est une machine thermique qui fonctionne entre deux niveaux de température qui sont respectivement de 600 K et 300 K. Quelle est l'efficacité thermique idéale? L'efficacité thermique réelle est de l'ordre de 30%; quelle est dans ce cas l'efficacité thermique selon la seconde loi?
2. Quelle est la relation entre la puissance thermique et la puissance utile d'une machine thermique idéale?
3. Pourquoi l'efficacité thermique d'une machine idéale est-elle inférieure à 1?



1. En vertu de l'équation (5.50), l'efficacité thermique idéale est de 0.5. Dans le cas idéal, elle vaudrait $0.5/0.5$, mais comme l'efficacité réelle n'est que de 0.3, elle vaut $0.3/0.5 = 0.6$.
2. Elles sont égales.
3. Parce qu'elle est définie en tant que quotient de la puissance utile et du flux d'énergie de la source chaude plutôt que comme le quotient de la puissance utile et de la puissance thermique.



EXEMPLE 5.6. Courant d'entropie à travers une machine de CARNOT idéale.

Considérons une machine de CARNOT idéale travaillant entre une source chaude à 300°C et une source froide à 40°C. Cette machine idéale est censée délivrer une puissance mécanique de 5.0 MW. (a) Quelle doit être l'intensité du courant d'entropie à travers la machine? (b) Si l'on garde le même courant d'entropie, quelle devrait être la différence de température pour une puissance mécanique de 4.0 MW?

SOLUTION: Comme il s'agit d'une machine idéale, la puissance thermique est égale à la puissance mécanique délivrée, ce qui implique:

$$I_s = \frac{P_{\text{therm}}}{\Delta T} = \frac{5.0 \text{ MW}}{573 \text{ K} - 313 \text{ K}} = 19.2 \cdot 10^3 \text{ W K}^{-1} = 19.2 \cdot 10^3 \text{ Ct s}^{-1}$$

(b) La puissance motrice de la machine est proportionnelle à la différence des températures entre les sources chaude et froide. Comme la nouvelle puissance représente les 4/5 de la puissance originelle, il suffit de réduire la différence de température dans la même rapport et la ramener à 208 K. Si l'on garde la même température pour la source froide, il suffira que la température de la source chaude soit de 248°C.

■

EXEMPLE 5.7. Chauffer de l'eau avec une pompe à chaleur.

Une pompe à chaleur nécessite un flux d'énergie de 330 W pour pouvoir fonctionner. En hiver, elle retire de l'entropie du sol à 2°C pour chauffer de l'eau. (a) Que vaut le courant d'entropie au début, lorsque l'eau est à 20°C? Comparez cette valeur avec celle d'un thermoplongeur de même puissance que la pompe à chaleur (exemple 5.2). (b) Faites les mêmes calculs lorsque la température de l'eau est de 100°C. (c) Que valent les flux d'énergie entrant dans l'eau dans les deux cas?

SOLUTION: (a) Le flux d'entropie entrant est

$$I_{s, \text{ in}} = \frac{P_{\text{el}}}{T_H - T_L} = \frac{330 \text{ W}}{18 \text{ K}} = 18.33 \text{ W K}^{-1} = 18.33 \text{ Ct s}^{-1}$$

alors que le flux d'entropie généré par le thermoplongeur n'est que de 1.13 Ct s⁻¹ (W K⁻¹). L'énorme différence est due au fait que le thermoplongeur doit élever l'entropie depuis le zéro absolu alors que la pompe à chaleur prend en charge une entropie qui est déjà au niveau 275 K.

(b) Lorsque l'eau a atteint la température de 100°C, le courant d'entropie n'est plus que de 330 W / 98 K = Ct s⁻¹ (W K⁻¹), vu que l'on dispose de la même quantité d'énergie pour franchir une différence de niveau thermique plus de 5 fois plus grande. Dans le cas du thermoplongeur, le flux d'entropie ne serait plus que de 0.89 Ct s⁻¹ (W K⁻¹).

(c) Le courant d'énergie qui émerge de la pompe à chaleur en entrant dans l'eau à 20°C est:

$$\begin{aligned} I_{E, \text{ out}} &= -(I_{E, \text{ el}} + I_{E, \text{ therm, in}}) = -(I_{E, \text{ el}} + T_L I_{s, \text{ in}}) \\ &= -(330 \text{ W} + 275 \text{ K} \cdot 18.33 \text{ W K}^{-1}) = -5041 \text{ W} \end{aligned}$$

À 100°C, ce flux d'énergie n'est plus que de 1587 W.

■

Résumé du chapitre

Les phénomènes thermiques sont liés à ce que l'on appelle communément la chaleur, grandeur familière à chacune et chacun d'entre nous. Nous lui attribuons les propriétés d'être contenue dans les corps, de les rendre chauds, de pouvoir circuler entre les corps et d'être produite lors de certains processus, comme par exemple la combustion.

Pour des raisons historiques, le vocable de chaleur a été réservé au milieu du XIX^e siècle à l'énergie échangée lors des processus thermiques, ce qui implique que, dans la thermodynamique traditionnelle, la chaleur ne peut pas être contenue dans les corps.

Pour la description des processus thermiques, la grandeur extensive fondamentale est l'entropie *S*. Elle peut être accumulée dans les corps, peut s'écouler et, particularité

importante, elle peut être produite, mais pas détruite. L'équation de bilan de l'entropie met en relation le taux de variation de l'entropie d'un système et les flux ou production d'entropie qui en sont la cause. L'intensité des flux d'entropie est symbolisée par I_S et le taux de production d'entropie par Π_S . L'entropie peut s'échanger entre les systèmes selon trois modes : par conduction (c'est l'objet de ce chapitre), par convection et par rayonnement. Si l'on ne tient pas compte de cette dernière contribution, l'équation de bilan de l'entropie est : $\dot{S} = I_{S, \text{cond, net}} + I_{S, \text{conv, net}} + \Pi_S$.

La grandeur intensive associée, servant à indiquer le niveau thermique, est la *température* T . On la mesure en utilisant des matériaux thermoscopiques, c'est-à-dire des matériaux dont certaines propriétés évoluent en fonction de leur degré de chaleur. Contrairement au potentiel électrique, qui est une grandeur relative, la température est, comme la pression, une grandeur absolue : il existe un zéro de la température.

Tout comme les flux de fluides et d'électricité, les flux d'entropie sont accompagnés de flux d'énergie. Les flux d'entropie sont « chargés » d'énergie et le taux de chargement est égal à la température T ; l'intensité d'un flux d'énergie est donc égale à $I_E = T \cdot I_S$. Lorsqu'elle s'écoule entre deux niveaux T_1 et T_2 de la température, l'entropie libère de l'énergie lorsque le processus est spontané, ou de l'énergie est liée à l'entropie si le processus est contraint. Le taux de libération ou de liaison de l'énergie est la puissance thermique du processus : $\mathcal{P}_{\text{therm}} = - (T_2 - T_1) I_S$. Tout comme lors de la circulation des fluides dans des conduites ou de la charge électrique dans des conducteurs, la conduction de l'entropie s'accompagne d'une production de chaleur (d'entropie). Il s'agit du phénomène de dissipation : une partie de l'énergie libérée est utilisée pour la production d'entropie et ne sera plus disponible pour le processus souhaité. Le taux de dissipation est donné par la relation $\mathcal{P}_{\text{diss}} = \Pi_S$.

Les processus de chauffage ou de refroidissement consistent en des apports ou retraits d'entropie. Le taux de variation de l'entropie du corps qui subit le processus est lié au taux de variation de sa température par la capacité entropique K_S . La relation est analogue à celles que nous avons énoncées pour les processus hydrauliques et électriques : $\dot{S} = K_S \dot{T}$. Mais il existe une différence importante : la capacité entropique dépend généralement de la température T . Habituellement, la capacité entropique est rapportée à l'unité de masse ; on parle alors de capacité entropique spécifique k_s . L'entropie spécifique est liée par l'intermédiaire de la température à la grandeur énergétique associée, le coefficient de température spécifique de l'énergie c que l'on appelle chaleur massique dans la thermodynamique traditionnelle : $c = T k_s$.

Nous l'avons déjà mentionné plus haut, les flux d'entropie sont des processus dissipatifs, c'est-à-dire qu'ils sont accompagnés de production de chaleur. Ce phénomène est dû au fait que les matériaux qui sont traversés par l'entropie opposent une résistance à son écoulement. On modélise ce phénomène en introduisant, comme en hydraulique et en électricité, les notions de conductance et de résistance, qui lient l'intensité des flux à la différence de température.

L'entropie est la grandeur qui est responsable des changements de phase de la matière. Un apport d'entropie peut entraîner un processus de fusion ou de vaporisation et, à l'inverse, un retrait d'entropie pourra avoir pour conséquence la condensation ou la solidification d'une substance. Lors des changements de phase, les apports ou les retraits d'entropie n'entraînent aucune variation de la température de la substance : ce processus se déroule à température constante (qui, elle, dépend de la pression ambiante).

Comme celui d'un fluide ou de l'électricité entre deux niveaux de leur potentiel associé, l'écoulement spontané de l'entropie entre deux niveaux de la température peut servir à entraîner un autre processus : on a alors affaire à une machine thermique. De même qu'un moteur électrique peut être utilisé en tant que générateur pour « pomper » de l'électricité vers un niveau plus élevé, une machine thermique peut également servir de pompe à chaleur.

Questions

- Dans quel sens la température représente-t-elle l'intensité de la chaleur? À quelles autres grandeurs physiques la température peut-elle être comparée?
- Que se passe-t-il avec tous les corps dans n'importe quelle circonstance si leur énergie augmente? Quelle genre de conclusion ne peut-on *pas* tirer du fait que l'énergie d'un corps a varié?
- Comparez des grandeurs semblables à des fluides telles que charge électrique, entropie, quantité de matière et quantité de mouvement. Quelles propriétés ont-elles en commun? Quelles sont les différences possibles?
- Qu'advient-il de l'entropie et de la température du système lors des processus suivants?
 - Fusion de glace.
 - Condensation de vapeur d'eau.
 - Chauffage d'une pierre.
 - Compression isotherme d'un volume d'air.
 - Compression adiabatique réversible d'air.
 - Refroidissement d'air à volume constant.
- Pourquoi la capacité entropique n'a-t-elle rien à voir avec les changements de phase?
- Considérez un volume d'eau chauffée par un thermoplongeur.
 - Si vous considérez le volume d'eau comme un système, comment énoncez-vous le bilan d'entropie? Admettez que l'entropie se répartit de manière réversible dans le système; que cela signifie-t-il pour la conduction de l'entropie dans le système?
 - Répondez à la question dans le cas où le système est constitué de l'eau et du thermoplongeur.

Exercices

- Formulez le(s) équation(s) de bilan de l'entropie (version instantanée et version intégrée) pour les situations suivantes:
 - Un matériau homogène est chauffé mais pas refroidi.
 - De l'eau dans un récipient ouvert est chauffée au moyen d'un thermoplongeur et brassée simultanément.
 - Un liquide dans un récipient bien isolé est brassé mécaniquement.
 - Un gaz réel est comprimé dans un cylindre bien isolé.
 - Une pierre très chaude plongée dans de l'eau froide dans un récipient bien isolé. Considérez d'abord la pierre et l'eau comme des systèmes séparés, puis comme un système unique.
 - De l'eau chaude refroidit dans un récipient à paroi épaisse dans un environnement froid (considérez l'eau et le récipient comme deux systèmes séparés).
 - De l'eau est chauffée dans une bouilloire mais sa température n'augmente plus.
- Un corps est chauffé et refroidi simultanément. L'entropie entre à l'une des extrémités au taux de 300 Ct s^{-1} (W K^{-1}). À

l'autre extrémité, on retire de l'entropie au taux de 200 Ct s^{-1} (W K^{-1}). Que vaut le flux net d'entropie? À quelle vitesse le contenu en entropie change-t-il? Supposez que l'entropie est conservée durant ce processus.

- Un corps a une capacité entropique constante entre 200°C et 500°C .
 - Esquissez l'évolution de sa capacité énergétique.
 - Comment son entropie varie-t-elle?
 - Comment son énergie varie-t-elle?
- Dans une certaine quantité d'eau, le contenu en entropie croît linéairement de 20 Ct à 60 Ct (J K^{-1}) en 100 s . Simultanément, le courant d'entropie dû aux pertes de chaleur vers l'environnement croît de 0.10 Ct s^{-1} à 0.25 Ct s^{-1} ($\text{J K}^{-1} \text{ s}^{-1}$).
 - Que vaut le taux de variation de l'entropie de l'eau?
 - Exprimez l'intensité du courant d'entropie de chauffage en fonction du temps.
- Un thermoplongeur a une température de 120°C lorsqu'il émet un courant d'énergie de 0.80 kW . (a) Quelle est l'intensité du courant d'entropie qui franchit sa surface? (b) Quelle est l'intensité du flux d'entropie entrant dans l'eau, si celle-ci a une température de 80°C ?

Problèmes

- Le filament en tungstène d'une lampe à incandescence est parcouru par un courant d'intensité égale à 10 mA lorsqu'il est branché sur une source qui délivre une tension de 1.0 V . Lorsque la tension est de 150 V , l'intensité est de 500 mA . Quelle est la température du filament pour la seconde lecture si l'expérience est effectuée à température ambiante de 20°C ? Les coefficients de température pour le filament de tungstène sont respectivement $\alpha = 4.11 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $\beta = 9.62 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-2}$.
- Un flux d'entropie constant de 200 Ct s^{-1} (W K^{-1}) émerge d'un système, alors que le flux entrant varie au taux de $-20 \text{ Ct s}^{-1} \cdot t$.
 - Combien d'entropie est respectivement absorbée et émise durant les 15 premières secondes? Associez l'entropie absorbée au courant entrant et celle émise au courant émergent.
 - Combien d'entropie a été échangée au total? Quelle est la variation du contenu en entropie du système?
- Un corps que l'on chauffe subit un processus irréversible. Le courant net d'entropie passe de -100 Ct s^{-1} (W K^{-1}) à zéro en 20 s . Pendant ce temps, le taux de production d'entropie est de 30 Ct s^{-1} (W K^{-1}).
 - Que vaut le taux de variation de l'entropie du corps?
 - Que valent l'entropie échangée et la variation de l'entropie durant ces 20 s ?
- La surface absorbante d'un collecteur solaire reçoit de l'énergie du rayonnement absorbé au taux de 1800 W .
 - Si nous admettons que le rayonnement solaire transporte relativement peu d'entropie, que vaut le taux de production

- d'entropie dans la surface absorbante, si sa température vaut 100°C .
- b) Les 40% de l'entropie produite dans la surface absorbante retournent à l'environnement à cause des pertes de chaleur. Quelle est l'intensité du flux d'entropie de la surface absorbante vers l'eau du collecteur?
 - c) Quelle est l'intensité du flux d'énergie de l'absorbeur vers l'environnement?
 - d) Quelle est l'intensité du flux d'entropie qui arrive dans l'environnement à 20°C ?
 - e) Que vaut le taux de production d'entropie entre l'absorbeur et l'environnement?
 - f) Quelles sont les intensités des courants d'énergie et d'entropie entrant dans l'eau, si celle-ci a une température moyenne de 50°C ?
5. Le rayonnement solaire transporte de l'énergie, mais relativement peu d'entropie. De 8 h à 18 h, le courant d'énergie du rayonnement solaire sur une surface varie sinusoïdalement entre 0 W et 900 W. Les 70% de cette énergie sont absorbés, ce qui provoque une variation sinusoïdale de la température entre 20°C et 50°C .
 - a) Déterminez l'évolution du taux de production d'entropie en fonction du temps.
 - b) Combien d'entropie est-elle produite en un jour?
 6. Le courant d'énergie d'une centrale thermique vers le courant de refroidissement à 30°C a une intensité de 1.5 GW.
 - a) Quelle est l'intensité du courant d'entropie de la centrale vers l'environnement?
 - b) Quelle est l'intensité du courant d'entropie de la source chaude vers l'installation, si le processus se déroule de manière réversible? Que vaut-elle dans le cas contraire?
 - c) Quelle doit être la température de chauffage si la puissance thermique doit être de 1.235 GW?
 7. On a besoin de 1520 s pour faire fondre 1 kg de glace au moyen d'un thermoplongeur branché sur le secteur à 220 V et traversé par un courant d'intensité égale à 1.0 A.
 - a) Combien d'énergie le mélange eau-glace a-t-il reçue?
 - b) Combien d'entropie a-t-il reçue?
 - c) Que vaut l'entropie spécifique de fusion de la glace?
 8. Dans un congélateur, on produit 10 kg de glace à -20°C à partir de la même quantité d'eau à 0°C . Le courant d'entropie émanant de l'eau a une valeur moyenne de 0.15 W K^{-1} .
 - a) Combien d'entropie a-t-on extrait de l'eau?
 - b) Combien de taux le processus dure-t-il?
 - c) Combien d'entropie s'écoule-t-elle dans le compartiment de refroidissement?
 - d) Quelle est l'intensité du courant d'énergie de l'eau vers le compartiment de refroidissement?
 - e) À quel taux doit-on extraire l'entropie du compartiment de refroidissement pour que la température reste constante?
 9. On fait condenser 100 kg de vapeur d'eau à 100°C par refroidissement.
 - a) Quelle est la variation totale de l'entropie du mélange de vapeur et d'eau?
 - b) Combien d'entropie la vapeur d'eau libère-t-elle?
 - c) Combien d'énergie est libérée par la vapeur d'eau?
 - d) Quelle est la variation de l'énergie du système?
 - e) Quelle est la variation de l'enthalpie du système?
 10. Un bâtiment a une conductance énergétique globale de 300 W K^{-1} . La température intérieure est maintenue constante à 20°C . La température extérieure constante vaut -10°C .
 - a) Quelle est la valeur de la conductance entropique à la température du bâtiment?
 - b) Quelles sont les valeurs des courants d'entropie et d'énergie qui s'échappent du bâtiment?
 - c) Quelle est la valeur du taux de production d'entropie entre le bâtiment et l'environnement due à la déperdition de chaleur?
 - d) Quelle doit être la puissance du chauffage à l'intérieur du bâtiment?
 11. Les radiateurs dans une pièce doivent délivrer un courant d'entropie de $3.12 \text{ Ct s}^{-1} (\text{W K}^{-2})$ provenant d'une eau à 45°C . La température de la pièce est de 20°C . Le coefficient de transfert de l'entropie de l'eau vers la pièce vaut approximativement $0.030 \text{ Ct s}^{-1} \text{ m}^{-2} (\text{W K}^{-2} \text{ m}^{-2})$.
 - a) Quelle doit être l'aire de la surface d'échange des radiateurs?
 - b) Quelle est l'intensité du courant d'entropie émanant de l'eau?
 - c) Quelle est la valeur de la conductance énergétique des radiateurs?
 - d) Quelle est la valeur du taux de production d'entropie lors du transport de chaleur de l'eau vers la pièce?
 - e) Quelle est l'intensité du courant d'entropie arrivant dans la pièce?
 12. Une centrale thermique (telle qu'une centrale nucléaire) reçoit son entropie du réacteur à une température de 600 K. L'entropie est évacuée par le condenseur à 300 K. La puissance mesurée est de 1.0 GW.
 - a) Esquissez le diagramme de processus (avec porteurs et courants d'énergie) pour le système (le système entre le réacteur et le condenseur).
 - b) Si la machine thermique pouvait fonctionner de manière idéale, quelle serait l'intensité du courant d'entropie qui la traverse?
 - c) L'efficacité thermique de la centrale n'est que de 30%. Que doit être l'intensité réelle des courants d'entropie et d'énergie du réacteur vers la machine thermique?
 - d) Quel est le taux de production d'entropie dans la machine thermique (entre le réacteur et le condenseur)?
 - e) Quel est le taux de production d'entropie dans la machine thermique (entre le réacteur et le condenseur)?
 - f) Quel est le taux de production d'entropie total (incluant celui du réacteur)?
 13. Un moteur de voiture fonctionne en régime permanent. L'essence fournit de l'énergie à un taux de 400 kW, la puissance mécanique mesurée du moteur est de 100 kW. L'entropie est fournie à une température de 900 K et le refroidissement a lieu à 300 K.
 - a) Esquissez le diagramme de processus du moteur en tant que système entre la source chaude et la source froide.

- b) Quelle est l'intensité du courant d'entropie dans le moteur?
 - c) Que vaut la puissance thermique?
 - d) Quelle serait l'intensité du courant d'entropie vers le condenseur si le moteur fonctionnait de manière idéale? Quelle serait alors l'intensité du courant d'énergie vers le condenseur?
 - e) Quelle est l'intensité réelle du courant d'énergie vers le condenseur?
 - f) Quel est le taux de production d'entropie dans le moteur?
14. On utilise une pompe à chaleur pour chauffer de l'eau à 60°C en puisant la chaleur dans le sol à 2°C. Le coefficient de performance vaut 2.2 et l'intensité du courant d'énergie durant le chauffage est de 1.0 kW.
- a) Quel est le taux de production d'entropie?
 - b) Quelle est la valeur de la puissance perdue? Montrez qu'elle est égale au produit du taux de production d'entropie et de la température de l'environnement.
 - c) Quelle est la valeur de l'efficacité de la pompe à chaleur selon la seconde loi?
15. Des mesures permettent de fixer la valeur de la capacité entropique de 1 kg de glace à $8.1 \text{ Ct K}^{-1} (\text{J K}^{-2})$ à une température de -13°C et à $7.7 \text{ Ct K}^{-1} (\text{J K}^{-2})$ à la température de 0°C.
- a) Calculez l'intensité du courant d'entropie nécessaire pour chauffer un bloc de glace de 1 kg à -13°C de telle manière que sa température augmente de 1 K par minute.
 - b) Estimez la quantité totale d'entropie transmise au bloc de glace lorsque sa température aura atteint 0°C.

CHAPITRE 6

TRANSPORT DE SUBSTANCES ET RÉACTIONS

Les processus chimiques sont ceux qui ont un rapport avec la nature et le comportement des substances. Ils ont affaire à la quantité des espèces chimiques, leur intensité les unes par rapport aux autres et leur faculté d'être la cause d'autres phénomènes. Les processus chimiques sont essentiellement de deux natures : transport et réaction. Les substances peuvent migrer d'une place à l'autre, se transformer et être produites ou détruites lors de réactions chimiques. Ce sont ces phénomènes que nous allons introduire dans ce chapitre.

6.1 OBSERVATIONS ET MODÈLES PRÉLIMINAIRES

Chaque jour, nous observons que les substances se transforment : le pain devient sec si on le laisse à l'air libre, le beurre et les graisses deviennent rances, le papier journal jaunit, les élastiques deviennent cassants, les objets en fer rouillent, les toits en cuivre verdissent. Ces observations montrent que, dans la nature inanimée, il existe des forces qui modifient la matière. Le fait que l'on ne peut pas, même en prenant des précautions, garder indéfiniment des aliments, des médicaments ou des substances chimiques montre que, même sans influence extérieure, les substances ont une tendance à se transformer.

Pour comprendre et modéliser ces transformations, nous allons, sur la base d'expériences, introduire deux nouveaux concepts fondamentaux, à savoir ceux de *quantité de matière* et de *potentiel chimique*. Le second concept est usuellement considéré comme une grandeur abstraite qui ne peut être définie que sur la base d'arguments thermodynamiques et dont on ne peut pas se faire une idée concrète. Nous montrerons que ce concept peut être appréhendé de manière tout aussi intuitive que celui de la température dans notre vie quotidienne¹.

Comme il s'agit de la paire de grandeurs extensive et intensive liée à la description des phénomènes chimiques, elles prendront un caractère très concret grâce à l'analogie avec les grandeurs correspondantes introduites dans les domaines déjà étudiés (hydraulique, électricité, chaleur).

Pour entrer dans le vif du sujet, nous allons étudier et modéliser une réaction chimique, la décomposition de la murexide en milieu acide et un exemple de transport de matière, la diffusion de sel à travers une membrane.

1. Le concept didactique derrière cette approche doit beaucoup aux travaux de Georg JOB (1972). À la connaissance des auteurs, Georg JOB a été le premier à suggérer qu'une exposition des réactions chimiques devrait se faire en introduisant, dès le départ, le potentiel chimique en tant que concept facile à saisir. Voir également JOB (1983), JOB et HERRMANN (2006), JOB et RÜFFLER 2009, D'ANNA, FUCHS et LUBINI (2008), FUCHS (2009).

6.1.1 Décomposition de la murexide en milieu acide

Recueil des données. La murexide ($C_8H_5N_5O_6$), appelée également purpurate d'ammonium, est un colorant pourpre, synthétisé à partir de l'acide urique, qui était anciennement fabriqué en grandes quantités à partir du guano. Lorsqu'on la dissout dans une solution acide, qui contient des protons H^+ , elle se décompose en deux produits, l'alloxane ($C_4H_2N_2O_4$) et l'uramile ($C_4H_5N_3O_3$). Dans l'eau pure, la murexide est de couleur pourpre, alors que l'alloxane et l'uramile sont tous deux incolores. On peut déterminer la concentration de murexide dans la solution en mesurant son absorbance, c'est-à-dire en mesurant la quantité de lumière qui passe à travers une cuvette contenant ce liquide. Les concentrations initiales respectives sont $3.00 \cdot 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}$ pour la murexide et $2.70 \cdot 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$ pour les ions H^+ . Le modèle que nous allons élaborer montrera que, comme la concentration des ions H^+ dans la solution est élevée, elle ne varie pratiquement pas et la décroissance de celle de la murexide est de type exponentiel (fig. 6.1).

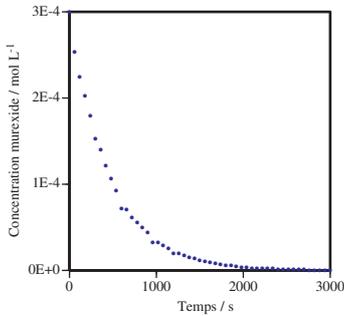


FIGURE 6.1 Le colorant murexide réagit avec les protons en solution aqueuse et se désintègre en des substances incolores. Si la concentration des protons est élevée, la décroissance de celle de la murexide est de type exponentiel.

Interprétation, hypothèses. Nous avons déjà rencontré ce type de comportement lors de la vidange d'un réservoir en régime laminaire (section 1.8.1), de la décharge d'un condensateur (section 2.8.1) et du refroidissement d'un corps chaud dans un environnement à température constante (section 5.6.2). Chacun de ces processus était entraîné par une différence de niveau de la grandeur intensive associée, la pression, le potentiel électrique et la température.

Forts de cette similitude de comportement, nous pensons qu'il doit y avoir une force d'entraînement de cette réaction, une sorte de tension chimique, une différence de chimie entre le produit de départ et les produits finaux. Ce niveau chimique est appelé *potentiel chimique*. Cette grandeur a été introduite en 1876 par le théoricien américain Josiah Willard GIBBS. Pour cette raison, nous utiliserons le gibbs, que nous abrègerons par G , pour mesurer les valeurs de cette grandeur. Nous reviendrons à la section 6.4 sur son lien avec les unités du Système international.

Modélisation du processus. La décomposition de la murexide peut être décrite au moyen d'une équation simplifiée :



où M , A et U représentent respectivement la murexide, l'alloxane et l'uramile. La réaction dépend de l'acidité de la solution, ce qui implique que les protons sont utilisés dans la réaction (ils n'ont pas un rôle de catalyseur). Toutefois, vu que leur concentration est 100 fois plus élevée que celle de la murexide, elle peut être considérée comme constante. En outre, la réaction est à sens unique, c'est-à-dire que les produits ne réagissent pas pour reformer de la murexide. Leur présence dans la solution n'a donc aucune influence sur le déroulement de la réaction.

Nous devons énoncer l'équation de bilan pour la *quantité de matière* de chacun des deux réactifs impliqués dans la réaction, ainsi que pour chacun des produits. La quantité de matière est la grandeur fondamentale extensive liée aux processus faisant intervenir des transformations (réactions, migration, etc.) de substances. Elle est représentée par le symbole n et se mesure en moles, que l'on abrège par mol. Sa définition sera précisée à la section 6.3. En vertu des constatations du paragraphe précédent, le modèle ne devra tenir compte que de la variation de la quantité de matière de la murexide, égale à son taux de production :

$$\dot{n}_{\text{murexide}} = \Pi_{n, \text{murexide}} \quad (6.2)$$

Le taux de production Π est négatif, puisque la murexide disparaît lors de la réaction.

Il s'agit maintenant de trouver le lien entre les taux de production et la force d'entraînement chimique. En nous servant de l'analogie avec les situations semblables rencontrées dans les domaines de la physique déjà étudiés, nous admettons que ces deux grandeurs sont proportionnelles :

$$\Pi_{n, \text{murexide}} \propto \mathcal{A} \quad (6.3)$$

où \mathcal{A} symbolise la force d'entraînement chimique, la *réactivité* de la murexide en présence des ions H^+ (le symbole est celui d'un des plus anciens concepts en chimie, l'*affinité chimique*). L'hypothèse la plus simple est d'imaginer qu'elle est proportionnelle à la concentration de la murexide :

$$\mathcal{A} \propto \bar{c}_{\text{murexide}}$$

où \bar{c} représente la concentration molaire de la murexide, mesurée en mol L^{-1} . Le taux de production par unité de volume, la densité du taux de production, devient alors :

$$\pi_{n, \text{murexide}} = -k_n \bar{c}_{\text{murexide}}$$

où k_n est le coefficient de vitesse de réaction. Après multiplication par le volume V de la solution (mesuré en litres), le taux de disparition de la murexide devient :

$$\Pi_{n, \text{murexide}} = V \pi_{n, \text{murexide}} = -V k_n \bar{c}_{\text{murexide}} \quad (6.4)$$

La figure 6.2 montre le modèle basé sur l'équation (6.4) et le résultat de la simulation. À partir du volume $V = 10 \text{ mL}$ et de la concentration initiale de $3 \cdot 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}$ pour la murexide, on peut calculer sa quantité de matière initiale. Le coefficient de vitesse k_n est le seul paramètre dont la valeur est encore indéterminée. L'adéquation entre le modèle et les valeurs expérimentales est obtenue pour une valeur de 0.0022 s^{-1} .

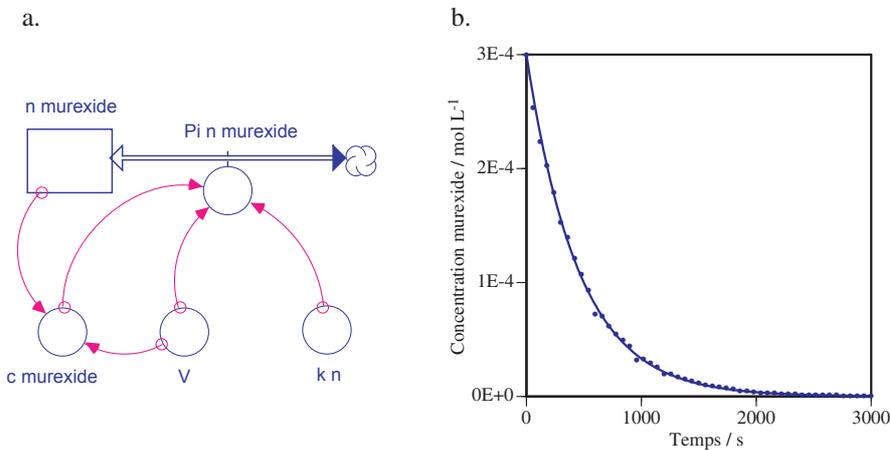


FIGURE 6.2 Décomposition de la murexide en milieu acide : (a) modèle de dynamique des systèmes ; (b) confrontation des résultats de la simulation et des données expérimentales.

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, il serait naturel d'appeler \mathcal{A} la *tension chimique*. Nous verrons plus loin qu'elle correspond, comme c'est le cas lors des processus électriques, à l'opposé de la différence des potentiels chimiques des substances participant à la réaction. Le potentiel chimique étant représenté par le symbole μ , nous pouvons écrire :

$$\mathcal{A} = -\Delta\mu_{\text{réaction}} = -(\mu_{\text{produits}} - \mu_{\text{réactifs}}) \quad (6.5)$$

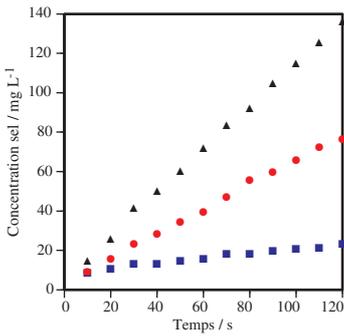


FIGURE 6.3 Diffusion de sel à travers la membrane d'un sac de dialyse. Les trois groupes correspondent à des concentrations respectives de 10 g L^{-1} , 50 g L^{-1} et 100 g L^{-1} . Données tirées d'une expérience publiée par Vernier, Biology with computers.

6.1.2 Diffusion de sel à travers une membrane

Recueil des données. Lors d'une expérience, de l'eau salée est introduite dans un tube à dialyse (boyau fait d'une membrane semi-perméable) dont les deux extrémités sont ensuite nouées ou pincées. On plonge ce tube dans un b cher contenant 300 g d'eau fraîche que l'on remue délicatement pour uniformiser sa composition. On mesure la conductivité en fonction du temps. Les données sont reportées dans le graphe de la figure 6.3 pour trois solutions diff erentes de sel de table (NaCl), à savoir 10 g L^{-1} , 50 g L^{-1} et 100 g L^{-1} . Le tube à dialyse contient à chaque fois 10 mL de solution.

Interprétation, hypothèses. La migration du sel à travers la membrane n'est possible que s'il existe une différence de niveau chimique entre le tube de dialyse et l'eau dans laquelle il est plongé. La grandeur qui varie d'un milieu à l'autre est la concentration du sel.

Modélisation du processus. Les trois expériences fournissent des résultats semblables (croissance linéaire de la concentration de sel dans le bain), ce qui nous permet de nous concentrer sur la modélisation d'une seule des trois expériences, la série médiane correspondant à une concentration initiale de 50 g L^{-1} dans le tube de dialyse.

Le taux de variation de la quantité de matière dans les deux milieux dépend du flux de sel du tube vers l'eau contenue dans le b cher, ce que nous formulons au moyen de deux équations de bilan :

$$\begin{aligned} \Pi_{n, \text{ sel, tube}} &= I_{n, \text{ sel}} \\ \Pi_{n, \text{ sel, b cher}} &= -I_{n, \text{ sel}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Nous devons formuler une loi constitutive pour le flux de sel entre les deux milieux. L'hypothèse la plus simple est de supposer une proportionnalité entre l'intensité du courant et la différence des concentrations :

$$I_{n, \text{ sel}} = -G_n (\bar{c}_{\text{b cher}} - \bar{c}_{\text{tube}}) \quad (6.7)$$

où G_n est la conductance liée au flux de quantité de matière à travers la membrane et \bar{c} la concentration molaire du sel dans chacun des milieux.

Les données expérimentales sont exprimées en termes de fraction masse-volume que nous devons convertir en concentration molaire au moyen des équations (6.16) et (6.17). Les données essentielles dont nous avons besoin pour le modèle sont, d'une part, la concentration initiale de sel dans le tube :

$$\bar{c}_{\text{sel, tube, init}} = \frac{z_{\text{sel, tube, init}}}{M_{\text{sel}}} = \frac{50 \text{ g L}^{-1}}{58.44 \text{ g mol}^{-1}} = 0.856 \text{ mol L}^{-1}$$

ainsi que la valeur de la conductance G_n . Nous pouvons la déterminer en utilisant l'équation (6.7), pour autant que nous ayons la valeur du flux de quantité de matière. Ce dernier peut être extrait des données expérimentales, vu qu'il est proportionnel au taux de variation de la concentration, soit graphiquement, soit par un ajustement au moyen de la méthode des moindres carrés. Après conversion en valeurs molaires, nous obtenons à partir des valeurs initiales :

$$G_n = -\frac{I_{n, \text{ sel, init}}}{\bar{c}_{\text{b cher, init}} - \bar{c}_{\text{tube, init}}} = -\frac{3.188 \cdot 10^{-6} \text{ mol s}^{-1}}{0 \text{ mol L}^{-1} - 0.856 \text{ mol L}^{-1}} = 3.724 \text{ L s}^{-1}$$

Le modèle basé sur ces réflexions est représenté dans la figure 6.4a et les résultats de la simulation apparaissent dans la figure 6.4b.

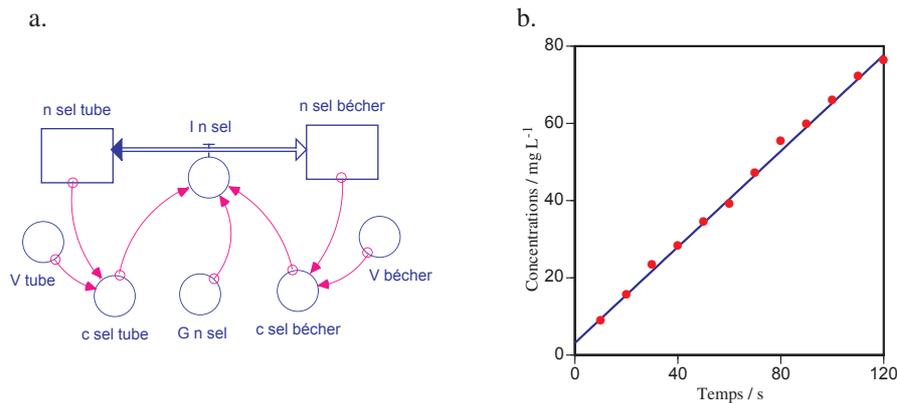


FIGURE 6.4 Diffusion de sel d'un tube de dialyse vers de l'eau pure: (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) confrontation des résultats du modèle et des données expérimentales.

Ce modèle a la même structure que celui de l'équilibrage des niveaux entre deux réservoirs communicants, de l'équilibrage des tensions de deux condensateurs ou de celui des températures de deux corps en contact thermique. Nous pouvons donc admettre que l'évolution du processus sera de type exponentiel caractérisé par une constante de temps liée à la croissance de la concentration de sel dans le bécher ou à la décroissance de celle du sel dans le tube de dialyse. Pour pouvoir la déterminer à partir des données expérimentales, il faut évaluer la concentration d'équilibre qui sera atteinte lorsque le sel sera réparti uniformément dans le volume total d'eau :

$$z_{\text{sel, équilibre}} = \frac{m_{\text{sel, tube, init}}}{V_{\text{total}}} = \frac{500 \text{ mg}}{0.310 \text{ L}} = 1612 \text{ mg L}^{-1}$$

Comme dans les autres cas, la constante de temps est liée au taux de variation initial de la concentration et à cette concentration d'équilibre par la relation :

$$\frac{z_{\text{sel, équilibre}}}{\tau} = \frac{dz_{\text{sel, équilibre}}}{dt}(t = 0 \text{ s}) = 0.621 \text{ mg L}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

On trouve ainsi

$$\tau = 2596 \text{ s}$$

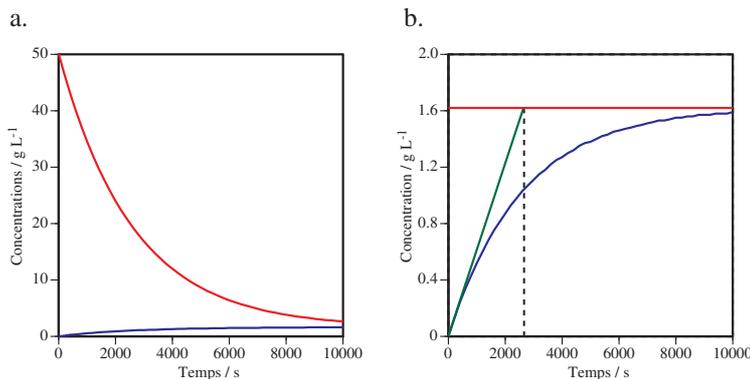


FIGURE 6.5 Diffusion du sel à travers une membrane: (a) évolution des concentrations vers l'équilibre; (b) l'interception de la tangente à l'origine et de l'asymptote permet de déterminer graphiquement la constante de temps du processus.

Si l'on prolonge la durée de la simulation du modèle, on peut représenter graphiquement l'équilibrage des concentrations de sel. La figure 6.5 montre l'évolution vers l'équilibre ainsi que la détermination graphique de la constante de temps. La tangente

à l'origine de la courbe de décroissance de la concentration dans le tube de dialyse intercepterait l'asymptote au même endroit que celle de la courbe de croissance.

6.2 MULTIPLICITÉ DES PHÉNOMÈNES CHIMIQUES

Nous allons compléter les observations de la section précédente pour illustrer le grand nombre de processus qui se manifestent lors de transformations ou de migrations de substances.

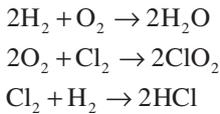


FIGURE 6.6 Exemples d'équations de réactions chimiques. Les nombres multipliant les symboles de l'hydrogène, de l'oxygène et du chlore sont appelés coefficients stœchiométriques.

6.2.1 Réactions chimiques et quantité de matière

Il est usuel d'admettre que les substances sont composées de «briques élémentaires» de matière que l'on appelle les *éléments*. Considérons quelques réactions auxquelles participent les éléments hydrogène, oxygène et chlore (fig. 6.6). Les chimistes ont découvert qu'il fallait prendre 4 g d'hydrogène pour réagir complètement avec 32 g d'oxygène afin de former 36 g d'eau. Cependant, la réaction entre l'oxygène et le chlore n'est complète que si on prend respectivement 64 g et 71 g de ces éléments. De même, une réaction complète entre le chlore et l'hydrogène nécessite de prendre 71 g de chlore et 2 g d'hydrogène.

Interprétation. Nous voyons que la masse d'une certaine quantité d'un élément ne peut pas servir de mesure naturelle de la quantité de matière impliquée dans une réaction. Il apparaît par exemple que 71 g de chlore sont chimiquement équivalents à 2 g d'hydrogène. Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle mesure de la *quantité de matière*. Si nous fixons que 2 g de gaz hydrogène (H_2) correspondent à une unité de quantité de matière, appelée 1 mole, alors 1 mole de chlore correspondra à 71 g de chlore. De même, 32 g d'oxygène (O_2) correspondront à 1 mole de cet élément. La masse d'une mole d'un élément est sa *masse molaire*.

6.2.2 Pression de gaz dilués

Les substances peuvent être amenées à l'état gazeux. Si le gaz est suffisamment dilué ou suffisamment chaud, ou les deux, toutes les substances dans cet état manifestent le même comportement, proche de celui d'un gaz parfait (chapitre 10). Si nous plaçons un tel gaz dans un récipient de volume donné à une température donnée, il faut prendre diverses masses pour des gaz différents afin d'obtenir la même pression. Par exemple, 2 g d'hydrogène, 31 g d'oxygène et 71 g de chlore à l'état gazeux ont tous la même pression si le volume et la température sont les mêmes.

Interprétation. La pression d'un gaz dépend de la quantité de matière de ce gaz, et pas de sa masse. Dans le modèle corpusculaire, il faut le même nombre de particules pour obtenir la même pression pour les mêmes volume et température.

6.2.3 Diffusion de sel dans l'eau

Lorsque l'on superpose une couche d'eau distillée sur une couche d'eau salée, en veillant à ce qu'elles ne se mélangent pas (fig. 6.7a), le sel va se propager lentement vers le haut. Finalement, il sera distribué uniformément, ce qui signifie que sa concentration est devenue uniforme dans tout le volume d'eau (fig. 6.7b). Il est possible de déterminer indirectement la concentration du sel en mesurant la conductivité de la

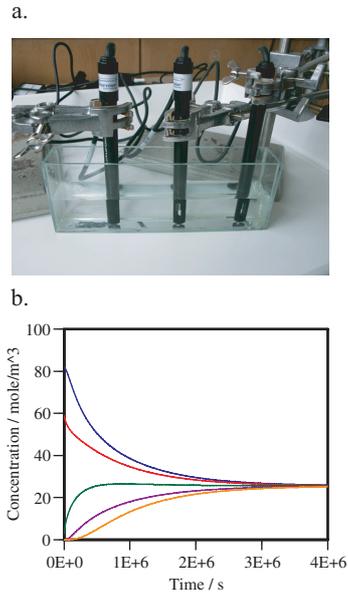


FIGURE 6.7 Simulation de la concentration de sel à différentes hauteurs: (a) dispositif expérimental ; (b) relevé des concentrations. Au début, la concentration de sel est la plus élevée dans les couches les plus basses. Pour déterminer la concentration de sel, on mesure la conductivité de la solution.

solution. Une simulation, basée sur des mesures, montre qu'il faut plus d'un mois pour qu'approximativement 1 g de sel se répande dans 1 litre d'eau distillée.

Interprétation. Le sel peut se dissoudre dans des liquides tels que l'eau en se décomposant en ions Na^+ et Cl^- , rendant la solution conductrice. Si la concentration de la substance dissoute est plus élevée en certains endroits, elle migre vers les endroits de concentration plus faible. Lorsque la concentration est devenue uniforme, ce processus appelé *diffusion* s'interrompt. Les différences de concentration sont la force d'entraînement des transports par diffusion.

6.2.4 Distribution de toluène dans l'eau et dans l'air

Dans un environnement homogène, une substance peut diffuser et occuper tout l'espace au bout d'un certain temps; les odeurs, qui ne sont rien d'autre que des substances qui activent nos cellules olfactives, en sont une illustration. Ce n'est pas le cas si la substance peut migrer à travers et se répandre dans différents matériaux en contact les uns avec les autres, comme l'eau, l'air et le sol. À titre d'exemple, le toluène diffuse de l'eau vers l'air jusqu'à ce que la concentration soit approximativement quatre fois supérieure dans l'eau que dans l'air. La figure 6.8a montre comment, à partir d'une concentration initiale élevée dans l'eau et nulle dans l'air, on assiste à une diminution de la concentration dans l'eau et une augmentation dans l'air jusqu'à ce que les concentrations atteignent ce que l'on appelle les valeurs d'équilibre.

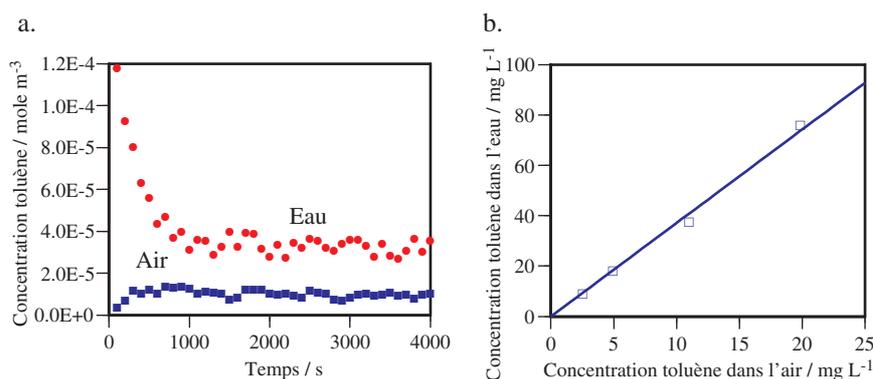


FIGURE 6.8 Diffusion du toluène dans l'eau, l'air et le sol: (a) cas dynamique: concentrations du toluène dans l'eau et dans l'air (les données du sol n'apparaissent pas); (b) concentrations à l'équilibre du toluène dans l'air et dans l'eau. Données avec l'aimable autorisation de J. HOSANG.

Interprétation. La diffusion d'une substance dissoute dans un environnement homogène est attribuée à des différences de concentration, à un gradient de concentration. Elle diffuse des endroits où la concentration est élevée vers les endroits où elle l'est moins, jusqu'à ce qu'elle soit uniforme.

Cette explication n'est pas applicable lorsqu'une substance diffuse à travers des milieux différents en contact l'un avec l'autre. Il semble que le toluène «préfère» être dans l'eau plutôt que dans l'air, ce que nous expliquons, comme à la section 6.1.1, en admettant l'existence d'une tension chimique. À concentrations égales, le potentiel chimique du toluène est plus bas dans l'eau que dans l'air. La différence des potentiels chimiques est la *force d'entraînement* du flux de toluène d'un milieu vers l'autre.

Le fait que le niveau des concentrations d'équilibre n'est pas le même dans l'eau et dans l'air est analogue à la situation que nous avons rencontrée en hydraulique lorsque l'on relie entre eux deux récipients qui contiennent des liquides de densités différentes: à l'équilibre, les niveaux libres des liquides ne sont pas égaux. Les niveaux et les densités ont leur importance, mais en fin de compte c'est la pression, en tant que potentiel hydraulique, qui permet d'expliquer ce que l'on observe.

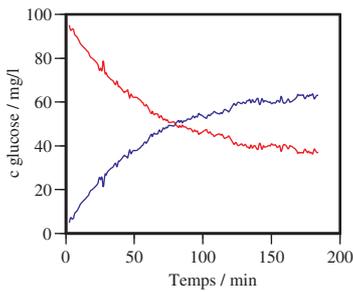


FIGURE 6.9 Concentrations d' α -glucose (courbe décroissante) et de β -glucose dans l'eau en fonction du temps. L' α -glucose se transforme en β -glucose; le phénomène est appelé mutarotation du glucose. La concentration est déterminée en mesurant la rotation du plan de polarisation de lumière polarisée linéairement passant à travers la solution de glucose. Données avec l'aimable autorisation de J. SONNLEITNER.

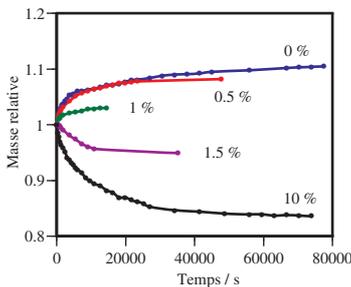


FIGURE 6.10 Masse relative de cœurs de pommes de terre en fonction du temps. Les cœurs sont placés dans de l'eau distillée contenant différentes concentrations (en pourcent de la masse) de sel de cuisine. Placés dans de l'eau pure, les cœurs croissent. Si l'on dissout plus de sel, la croissance est de moins en moins importante. Ils perdent de la masse si la concentration de sel dépasse une valeur critique.

6.2.5 Transformation du glucose

Le glucose est un sucre qui existe en deux configurations différentes, les anomères, qui se différencient dans l'arrangement spatial des atomes dans la molécule. Les deux configurations sont appelées α -glucose et β -glucose. On dissout de l' α -glucose pur dans de l'eau et on observe qu'une partie va progressivement se transformer en β -glucose (fig. 6.9); les deux anomères sont optiquement actifs et font tourner le plan de polarisation de la lumière qui traverse la solution, mais de manière différente pour chacun d'eux, ce qui permet d'observer l'évolution de la réaction.

Interprétation. Les deux configurations ont tendance à se transformer. L'intensité de cette tendance peut être exprimée en termes de potentiel chimique, comme dans le cas de la tendance d'une substance à diffuser. Pour une valeur standard de la concentration, l' α -glucose et le β -glucose ont des potentiels chimiques différents. Une telle différence est la force d'entraînement de la réaction qui dure tant que la différence existe. L'expérience montre que les potentiels chimiques de ces deux types de glucose deviennent égaux à des concentrations différentes, comme dans le cas du toluène dans l'eau et dans l'air.

La dynamique de la réaction est à nouveau semblable à celle de nombreux processus que nous avons observés dans les chapitres précédents. La différence de potentiel chimique semble jouer un rôle semblable aux différences de pression, de température, de potentiel électrique, de vitesse linéaire ou angulaire.

6.2.6 Cœurs de pommes de terre dans l'eau

Des cœurs de pommes de terre de forme sphérique et de taille approximativement égale sont plongés dans de l'eau distillée ou dans de l'eau dans laquelle on a dissous un peu de sel de cuisine. On les pèse à intervalles réguliers. Au cours du temps, la masse des cœurs change (fig. 6.10). S'il n'y a que de l'eau, ou de l'eau avec une faible concentration de sel, la masse augmente. Au-dessus d'une certaine concentration, la masse diminue. Pour une concentration particulière, dite isotonique, la masse ne change pas. Si l'on utilise du sucre à la place du sel, on observe que l'on obtient une solution isotonique si la molalité (nombre de moles du soluté par kilogramme de solvant) est approximativement deux fois celle du sel.

Interprétation. Vu que la masse varie, il faut admettre que des substances s'écoulent vers les cœurs ou hors de ceux-ci. Nous avons vu que des substances telles que le sel peuvent diffuser à travers des matériaux. Ici, la situation est différente: dans le cas de l'eau distillée ou peu salée, la seule substance qui migre dans les cœurs est l'eau. Si la concentration de sel dans la solution dépasse une certaine valeur, c'est le processus inverse qui se déroule: le cœur perd de l'eau.

Généralement, l'eau s'écoule des points de pression élevée vers les points de pression plus basse. Si nous admettons cette interprétation, nous devons conclure que, dans le cas de l'eau distillée, la pression de l'eau à l'intérieur des cœurs est plus basse qu'à l'extérieur. Or, le cœur est essentiellement constitué d'eau dans laquelle sont dissoutes un certain nombre de substances. Cela veut dire que la pression de l'eau est plus basse lorsqu'elle contient des substances dissoutes.

Si nous acceptons cette conclusion, nous pouvons expliquer les autres observations. Si l'on dissout de plus en plus de sel dans l'eau, la pression diminue, ce qui a pour conséquence que de moins en moins d'eau migre à l'intérieur des cœurs. À partir d'une certaine concentration du soluté (solution isotonique), on assiste à l'inversion du processus.

Ce type de transport de l'eau est appelé *osmose*. Il s'agit du transport de l'eau à travers des membranes semi-perméables (perméable uniquement à l'eau et pas aux solutés)

entre deux solutions aqueuses. La pression est une indication du potentiel chimique de l'eau. Les solutés diminuent la pression et par le fait même le potentiel chimique de l'eau.

6.2.7 Batteries et piles à combustible

Les batteries et les piles à combustible sont des appareils qui permettent d'utiliser des réactions spontanées pour établir une tension et entraîner un courant électrique. La tension à vide des éléments électrochimiques se situe approximativement entre 1 et 4 volts.

Interprétation. Les réactions spontanées libèrent de l'énergie. Dans les éléments électrochimiques, une partie de cette énergie est utilisée pour pomper les charges électriques, le reste servant à produire de l'entropie, les processus ne se déroulant pas de manière idéale. La puissance du processus électrique est proportionnelle à l'intensité du courant et à la tension établie. De manière analogue, la puissance des processus chimiques dépend de la force d'entraînement chimique (la tension chimique) et du taux de réaction. En mesurant les grandeurs électriques et le taux de réaction, on peut en déduire la valeur de la tension chimique.

1. Comment les réactions chimiques, la pression des gaz, ou le phénomène d'osmose nous permettent-ils de démontrer que l'on ne peut pas utiliser la masse pour mesurer la quantité de matière?
2. Dans le processus de conversion d' α -glucose en β -glucose (fig. 6.9), comment peut-on utiliser les résultats expérimentaux pour motiver le concept de potentiel chimique?
3. Expliquez pourquoi les concentrations à l'équilibre du toluène dans l'eau et dans l'air sont différentes. Pourquoi la concentration à l'équilibre du sel dans un volume d'eau est-elle la même partout?
4. Pourquoi une pomme de terre s'alourdit-elle lorsqu'on la plonge dans de l'eau distillée?
5. Expliquez comment le concept de potentiel chimique et de différences de potentiel chimique permet de donner une explication commune de phénomènes tels que réactions chimiques, fonctionnement des batteries, écoulements de substances dans l'environnement ou de drogues dans l'organisme, diffusion, modification du point d'ébullition de l'eau par adjonction de sel ou de sucre, pression de vapeur, etc.
6. Donnez un exemple d'une réaction chimique contrainte à se dérouler dans le sens opposé à celui qu'elle emprunte habituellement.



Q

1. Lors de réactions chimiques complètes (tous les réactifs sont utilisés), les masses des réactifs respectifs ne sont pas égales mais, pour une paire de substances donnée, le rapport des masses est toujours le même. Pour obtenir la même pression avec des gaz de nature différente, il faut utiliser des masses toujours plus importantes lorsque l'on monte dans le tableau périodique. Lors du phénomène d'osmose, l'eau peut migrer d'un réservoir qui ne contient que très peu d'eau (mais une forte concentration de soluté) vers un réservoir contenant une plus grande quantité d'eau, mais une plus faible concentration de soluté.
2. En comparant les résultats expérimentaux à ceux que l'on obtient lorsque l'on fait communiquer deux récipients contenant des fluides de masses volumiques différentes. Dans le cas du processus chimique, le potentiel chimique joue un rôle équivalent à celui de la pression.



R

3. À l'équilibre, le potentiel chimique du toluène dans l'air est supérieur à celui du toluène dans l'eau. Le toluène « préfère » être dans l'eau plutôt que dans l'air. Dans le cas du sel dans l'eau, il n'y a pas de changement de milieu: le sel migrera des régions où sa concentration, et donc son potentiel chimique, sont élevés, vers les régions où ils sont moindres, jusqu'à ce que sa concentration soit la même partout.
4. Parce que l'eau pure pénètre à l'intérieur de la pomme de terre pour y diminuer la concentration des substances qui y sont dissoutes.
5. Dans tous les exemples cités (et dans bien d'autres), on est en présence de processus qui se déroulent spontanément, comme c'est le cas lors de l'équilibrage des niveaux en hydraulique, celui des tensions en électricité ou celui de la température lors de processus thermiques. Dans chaque cas, nous avons pu expliquer ces phénomènes par la présence d'une différence de potentiel en tant que moteur du processus. La notion de potentiel chimique permet d'étendre cette vision dynamique des processus aux phénomènes chimiques.
6. Dans une batterie, la réaction spontanée libère l'énergie qui est utilisée pour entraîner l'écoulement des charges électriques. En inversant le sens du courant au moyen d'une source de tension, on peut inverser la réaction chimique et forcer les substances chimiques à « remonter la pente » du potentiel chimique: c'est le processus de recharge de la batterie.

6.3 QUANTITÉ DE MATIÈRE ET PARTICULES

Les systèmes physiques ont certaines propriétés fondamentales: un corps à une masse, de l'entropie, de la quantité de mouvement s'il se déplace, éventuellement de la charge électrique, pour ne citer que les plus importantes. Dans cette section, nous allons préciser les particularités de la grandeur extensive que nous avons rencontrée dans les deux sections précédentes, la *quantité de matière*. Il ne s'agit pas du tout d'une notion de remplacement pour la masse, ou d'une grandeur pratique pour les chimistes. Tout système physique, qu'il soit de la matière ou de la lumière, a cette propriété, et il y a des phénomènes physiques qui sont associés à son existence.

6.3.1 Substances, réactions chimiques et électrolyse

Substances de base. Les objets qui nous entourent sont constitués de parties assemblées. La description de la composition d'un objet au moyen de ses constituants dépendra du point de vue, de ce que sont les *briques fondamentales* qui intéressent l'observateur. Ainsi, la composition de pâte à pain pourra être décrite ainsi:

$$\text{farine}_3 \text{eau}_2 \text{levure}_{0,1} \text{sel}_{0,05}$$

où les indices représentent les quantités de chaque substance mesurées en tasses. Le granit pourrait être décrit par

$$A_{v_1} B_{v_2} C_{v_3} \dots$$

où A, B et C représentent les différents minéraux qui constituent la roche et les nombres v_1 , v_2 , et v_3 mesurent le volume relatif de chacun des constituants. Les chimistes utilisent les éléments en tant que briques fondamentales, ce qui implique que les substances chimiques, telles que l'alcool éthylique, sont écrites sous la forme



où les lettres représentent les éléments et les nombres la quantité de matière de chacun des éléments. Pour les physiciens, finalement, une unité de substance appelée hélium-4 pourrait être écrit en tant que

$$p_2 n_2 e_2$$

où p , n et e représentent les «substances» appelées protons, neutrons et électrons. En fait, il s'agit ici de particules.

Réactions chimiques et quantité de matière. L'observation de la section 6.2.1 nous a révélé que les substances chimiques pures ne réagissent complètement les unes avec les autres que si leurs quantités respectent des rapports particuliers qui ne peuvent être exprimés au moyen de la masse. Pour tenir compte de ce fait, on introduit une nouvelle grandeur extensive.

Lors de processus liés au transport de substances ou à des réactions entre elles, la grandeur extensive qui sert à la description des phénomènes est la quantité de matière n qui se mesure en mole (symbole: mol). Dans un modèle microscopique des substances, la quantité de matière correspond au nombre de particules N donné par:

$$N = N_A n \quad (6.8)$$

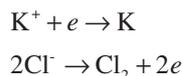
Le nombre N_A est le nombre d'AVOGADRO. Sa valeur est fixée par le Système international: $N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

La masse d'une mole de quantité de matière est la *masse molaire* M de la substance; elle est définie par:

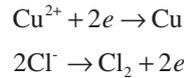
$$m = Mn \quad (6.9)$$

Ces observations et relations sont valables pour tous les éléments et les substances chimiquement pures qui sont toujours des proportions constantes, multiples des quantités de constituants participant à des réactions complètes. Une réaction complète est notre manière de définir ce que nous entendons par quantités de matière équivalentes au sens chimique du terme.

Électrolyse. La combinaison de réactions chimiques avec l'électricité fournit une autre information sur la propriété mesurée en termes de quantité de matière. Lors d'une électrolyse, le courant électrique passant à travers un fluide conducteur est responsable de transformations chimiques. Considérons l'électrolyse de chlorure de potassium (KCl) et de chlorure de cuivre (CuCl_2). Il se révèle qu'il faut une certaine quantité de charge électrique passant à travers le sel fondu de KCl pour déposer une mole de potassium sur la cathode, alors qu'il faut exactement le double de cette charge pour y déposer une mole de cuivre. Les réactions entrant en jeu sont:



pour le chlorure de potassium et



pour l'électrolyse du chlorure de cuivre. Ici, e représente à nouveau la «substance» appelée électron. Ces phénomènes peuvent être résumés au moyen de la relation

$$Q = z\mathcal{F}n \quad (6.10)$$

Pour l'électrolyse d'une quantité de matière n , il faut une quantité de charge Q qui est un (petit) multiple entier z de la *constante de FARADAY* $\mathcal{F} = 96485 \text{ C mol}^{-1}$.

Ce résultat montre une fois encore que c 'est la quantité de matière qui peut être mise dans une relation simple avec une quantité fixe de charge électrique, et non la masse.

EXEMPLE 6.1. Electrolyse du chlorure de cuivre.

Un courant électrique d'intensité égale à 10 A circule durant une heure à travers du chlorure de cuivre fondu. Quelle est la quantité de cuivre déposée sur la cathode ?

SOLUTION: La quantité de charge traversant la substance fondue est :

$$Q = I_e \Delta t = 10 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^4 \text{ C}$$

En posant, pour les ions de cuivre, $z = 2$ dans l'équation (6.10), nous obtenons :

$$n = \frac{Q}{z\mathcal{F}} = \frac{3.6 \cdot 10^4 \text{ C}}{2 \cdot 96487 \text{ C mol}^{-1}} = 0.187 \text{ mol}$$

ce qui correspond à 11.9 g de cuivre. ■

6.3.2 Quantité de matière et particules

La quantité de matière d'une substance est liée au nombre de particules qui la composent par l'intermédiaire du nombre d'AVOGADRO N_A , relation exprimée par l'équation (6.8).

Considérons, à titre d'exemple, une électrolyse. Le modèle microscopique de la charge, avec la charge élémentaire $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, nous permet d'affirmer qu'il faut un nombre entier de charges élémentaires pour chaque particule de matière déposée sur l'une des électrodes. Si nous désignons par τ un *atome de quantité de matière*, c'est-à-dire la *quantité de matière élémentaire*, alors l'équation (6.10) peut être transformée en

$$N_A e = z\mathcal{F}N_A \tau \quad (6.11)$$

Pour $z = 1$, nous obtenons

$$\tau = \frac{e}{\mathcal{F}} = \frac{1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{96485 \text{ C mol}^{-1}} = 1.661 \cdot 10^{-24} \text{ mol} \quad (6.12)$$

pour la plus petite quantité de matière possible (quantum de matière). Son inverse est le nombre d'AVOGADRO, soit le nombre de particules par mole de quantité de matière.

6.3.3 Grandeurs molaires et mesures de concentration

Les substances peuvent se diluer dans l'espace ou dans d'autres substances, elles peuvent paraître seules ou avec d'autres substances. Pour tenir compte des quantités de chacune d'elles, nous utilisons des densités, grandeurs molaires et diverses mesures de concentration, particulièrement en présence de solutions (soluté dissous dans un solvant). Nous allons énumérer quelques-unes des mesures utiles pour nos besoins.

Grandeurs molaires. Des grandeurs qui sont accumulées dans des matériaux et celles semblables à un fluide, telles que l'entropie, la masse, la charge, le volume, peuvent être mises en relation avec la quantité de matière du corps. Pour indiquer une grandeur molaire, nous surlignerons son symbole écrit en lettre minuscule. L'*entropie molaire* et le *volume molaire* sont définis par :

$$\bar{s} = \frac{S}{n}, \quad \bar{v} = \frac{V}{n} \quad (6.13)$$

La *masse molaire* est définie par l'équation (6.9).

Les mesures de concentration sont utilisées pour exprimer de manière indirecte les quantités de matière d'une espèce particulière, le soluté, dissoute dans un solvant. Il existe beaucoup de mesures appelées *concentration*.

Fraction massique et fraction molaire. La *fraction massique* w_s d'un soluté dans une solution est définie en tant que masse du soluté divisée par la masse totale de la solution (solvant f et soluté s):

$$w_s = \frac{m_s}{m_f + m_s} \quad (6.14)$$

Cette définition peut également être appliquée au solvant. La fraction molaire est définie de manière analogue :

$$\bar{x}_s = \frac{n_s}{n_f + n_s} \quad (6.15)$$

Fraction masse-volume. C'est le rapport de la masse du soluté et du volume total de la solution (à ne pas confondre avec la masse volumique du soluté):

$$z = \frac{m_s}{V_{\text{solution}}} \quad (6.16)$$

Concentration molaire (molarité), molalité et molinité. La concentration molaire est la mesure standard de la concentration utilisée le plus souvent dans ce qui va suivre. Elle est définie comme le quotient de la quantité de matière dissoute (le *soluté* s) et du volume total de la solution :

$$\bar{c}_s = \frac{n_s}{V_{\text{solution}}} \quad (6.17)$$

L'unité SI de la molarité est 1 mol m^{-3} . La valeur utilisée communément par les chimistes est 1 mol L^{-1} , souvent abrégée par M. Par exemple, si un litre d'une solution contient 0.1 mol de soluté, on dira qu'il s'agit d'une solution 0.1 M. Finalement, les termes molalité et molinité désignent les rapports de la quantité de matière de la substance et de la masse du solvant (molalité, symbole m_B), ou de la masse totale de la solution (molinité, pas de symbole); les deux se mesurent en mol kg^{-1} .

EXEMPLE 6.2. Sel de cuisine dans l'eau.

On dissout 100 g de sel de cuisine (NaCl) dans 1.0 L d'eau. (a) Déterminez la molalité et la molarité de la solution. (b) Quelle est la concentration (molaire)? (c) Quelles sont les fractions massique et molaire?

SOLUTION: Le sel de cuisine a une masse molaire de $0.0585 \text{ kg mol}^{-1}$. Il y a donc $n_{\text{sel}} = 0.100 \text{ kg} / 0.0585 \text{ kg mol}^{-1} = 1.71 \text{ mol}$ de sel. Pour l'eau, nous avons $n_{\text{eau}} = 1.0 \text{ kg} / 0.018 \text{ kg mol}^{-1} = 55.5 \text{ mol}$.

(a) La molalité est $m_B = 1.71 \text{ mol} / 1.0 \text{ kg} = 1.71 \text{ mol kg}^{-1}$. La molarité vaut $1.71 \text{ mol} / 1.100 \text{ kg} = 1.56 \text{ mol kg}^{-1}$.

(b) Sur la base de ce que nous savons, nous ne pouvons pas déterminer exactement la concentration molaire, vu que nous ne savons pas ce qui advient du volume de la solution lorsque l'on dissout 100 g de sel dans 1.0 L d'eau. En admettant que le volume ne varie pas fortement, nous pouvons estimer: $\bar{c} \approx 1.71 \text{ mol} / 1.0 \text{ L} = 1.71 \text{ mol L}^{-1} = 1.71 \text{ M}$.

(c) $w = 0.100 \text{ kg} / 1.100 \text{ kg} = 0.0909$; $\bar{x} = 1.71 \text{ mol} / (55.5 \text{ mol} + 1.71 \text{ mol}) = 0.0299$. ■

6.3.4 Bilan de quantité de matière

Vu que la quantité de matière est, parmi les grandeurs extensives que nous avons introduites jusqu'ici, l'une des plus facilement imaginables, il sera relativement simple d'énoncer l'équation de bilan qui la concerne.

Équation de bilan pour les processus de transport. Si on n'autorise que des processus de transport, les variations de la quantité de matière n accumulée dans un système ne peuvent être dues qu'à des flux de quantité de matière I_n . Il existe deux types de transport de substances, par *diffusion* lorsque les substances migrent à travers un substrat (solution, gel, solide), ou par *convection*, c'est-à-dire transportée par un fluide qui pénètre dans le système ou le quitte. La diffusion est un flux par conduction.

Lors de processus de transport de substances de ou vers un système, le taux de variation de la quantité de matière de chacune des substances (désignée par x) est égal à :

$$\dot{n}_x = I_{n,x,\text{cond}} + I_{n,x,\text{conv}} \tag{6.18}$$

Les courants de quantité de matière se mesurent en mol s^{-1} .

Équation de bilan pour les réactions. Les réactions entraînent la destruction (disparition) ou la production (apparition) d'espèces chimiques. Il en va ainsi lors de la réaction de l'hydrogène et de l'oxygène pour former de l'eau: les deux éléments disparaissent, l'eau apparaît. Un processus de production (ou destruction) est décrit en termes de taux de production Π_n , de manière analogue au taux de production d'entropie dans les processus thermiques. Le taux de variation de la quantité d'une certaine substance x est déterminé par la somme de tous les taux de production :

$$\dot{n}_x = \Pi_{n,x,\text{net}} \tag{6.19}$$

Le taux de production se mesure également en mol s^{-1} .

Équation de bilan généralisée. Si aussi bien les transports que les réactions participent à un processus, l'équation de bilan de quantité de matière pour une substance X prend en compte les deux contributions (fig. 6.11):

$$\dot{n}_x = I_{n,x,\text{cond}} + I_{n,x,\text{conv}} + \Pi_{n,x,\text{net}} \quad (6.20)$$

Relations entre les taux de production dans une réaction. Une réaction qui épuise tous les réactants peut être écrite sous forme d'équations contenant les *coefficients stœchiométriques* ν_i . Ces coefficients expriment la «conservation des éléments» qui impose des restrictions aux taux de production et de destruction concernant les différentes espèces qui réagissent. Si nous écrivons la réaction sous la forme:



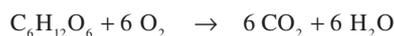
cela signifie que durant la réaction, ν_1 unités de A_1 , ν_2 unités de A_2 , etc., sont consommées alors que ν_1 unités de B_1 , ν_2 unités de B_2 , etc. sont produites. Ainsi, la relation entre le taux de destruction des A et le taux de production des B doit être

$$\frac{1}{\nu_1} \Pi_{A_1} = \frac{1}{\nu_2} \Pi_{A_2} = \dots = -\frac{1}{\nu_1} \Pi_{B_1} = -\frac{1}{\nu_2} \Pi_{B_2} = \dots \quad (6.22)$$

EXEMPLE 6.3. Combustion du glucose.

La combustion du glucose ($C_6H_{12}O_6$) produit du dioxyde de carbone et de l'eau. (a) Écrivez l'équation de la réaction en attribuant au glucose un coefficient stœchiométrique égal à l'unité. (b) Mettez en relation les taux de production respectifs.

SOLUTION: (a) En comptant le nombre d'atomes de chaque élément apparaissant des deux côtés de l'équation de réaction, nous pouvons déterminer les coefficients stœchiométriques:



(b) En vertu de l'équation (6.22), les rapports des taux de production sont:

$$\Pi_{n,\text{glucose}} = \frac{1}{6} \Pi_{n,O_2} = -\frac{1}{6} \Pi_{n,CO_2} = -\frac{1}{6} \Pi_{n,H_2O}$$

Dans cette relation, les taux des réactifs sont affectés d'un signe positif, ceux des produits d'un signe négatif. Mais en fait, les taux de production du glucose et de l'oxygène sont négatifs, puisque ces deux réactifs sont détruits, et ceux du dioxyde de carbone et de l'eau sont positifs, puisque ces deux substances sont créées. ■

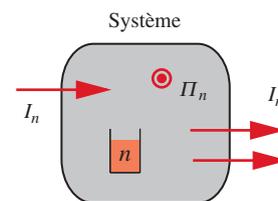


FIGURE 6.11 Représentation graphique du bilan généralisé de quantité de matière. Les substances peuvent être transportées et également être produites ou détruites.

1. Considérez une certaine quantité d'hydrogène contenu dans un récipient, à une certaine température. Qu'advient-il de la pression si on remplace l'hydrogène par la même masse d'oxygène?

Q

2. Pourquoi une des substances n'est-elle pas complètement utilisée lorsque l'on fait réagir 1 kg d'hydrogène gazeux avec 1 kg d'oxygène gazeux? Laquelle des deux substances n'est utilisée que partiellement?
3. On introduit 1 kg d'hydrogène moléculaire H_2 et 10 kg d'oxygène moléculaire O_2 dans un réacteur. Quelle quantité de chacune des substances sera utilisée dans la réaction produisant de l'eau? Quelle sera la quantité d'eau si on admet une réaction complète?
4. Quelle est la fraction massique de 100 g de sucre que l'on dissout dans 1 L d'eau?
5. Calculez les masses d'une mole des gaz néon et oxygène, de sel de table, de glucose.
6. L'eau de mer a une concentration de sel de 35 parts pour mille. À combien de moles par litre cela correspond-il?
7. Combien de particules passent dans la solution lorsque l'on dissout 10 g de sel de table?
8. La masse molaire de l'eau est $0.018 \text{ kg mol}^{-1}$. Quel est le volume molaire de l'eau?
9. On ajoute du sucre dans un bioréacteur au rythme de 2 mol min^{-1} . On constate qu'il augmente au taux de $0.70 \text{ mol min}^{-1}$. Quel est le taux de production ou de consommation de sucre?
10. On dissout 5 g de glucose dans 2 litres d'eau. Quelle est la concentration (molaire) de la solution?

1. Comme l'oxygène a une masse molaire huit fois plus grande que celle de l'hydrogène, la quantité de matière est plus faible, ce qui entraîne une diminution de la pression.
2. Pour que la réaction soit complète, il faut que le nombre de moles d'hydrogène soit le double de celui d'oxygène. Comme la masse molaire de l'oxygène est approximativement 16 fois supérieure à celle de l'hydrogène, il n'y a qu'un huitième de la masse d'hydrogène qui est utilisée lors de la réaction.
3. Les quantités correspondent respectivement à 500 mol et 625 mol d'hydrogène et d'oxygène. Les 500 mol d'hydrogène vont réagir avec 250 mol d'oxygène pour produire 500 mol d'eau. Les 375 mol d'oxygène superflu correspondent à 6 kg.



$$4. \quad w_{\text{sucre}} = \frac{m_{\text{sucre}}}{m_{\text{eau}} + m_{\text{sucre}}} = \frac{100 \text{ g}}{1100 \text{ g}} = 0.091$$

5. Une mole de substance contient toujours le même nombre de «briques élémentaires», quelle que soit la substance. C'est le nombre d'AVOGADRO. Connaissant la composition d'une telle brique élémentaire, il faut en rechercher la masse atomique dans le tableau périodique des éléments, et la multiplier par l'équivalent en kilogrammes de l'unité de masse atomique ($m_{\text{uma}} = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) et par le nombre d'AVOGADRO.

$$M_{\text{Ne}} = 20.18 \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 0.0202 \text{ kg mol}^{-1}.$$

$$M_{\text{O}_2} = 2 \cdot 16.00 \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 0.0320 \text{ kg mol}^{-1}.$$

$$M_{\text{NaCl}} = (22.99 + 35.45) \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 0.0584 \text{ kg mol}^{-1}.$$

$$M_{\text{glucose}} = (6 \cdot 12.01 + 12 \cdot 1.01 + 6 \cdot 16.00) \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 0.1802 \text{ kg mol}^{-1}.$$

6. La concentration correspond à 35 g de sel par kilogramme de solution. Nous convertissons la masse de sel en quantité de matière en la divisant par la masse molaire (Question 1) pour obtenir 0.6 mol. Le volume de la solution étant égal à un litre, la concentration vaut 0.6 M.
7. Comme le sel se dissocie lorsqu'il se dissout dans l'eau, il faut doubler le nombre de «briques élémentaires». Nous obtenons ainsi:

$$N_{\text{particules}} = 2 \frac{m}{M_{\text{NaCl}}} N_A = 2 \frac{0.010 \text{ kg}}{0.0584 \text{ kg mol}^{-1}} 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 2.0623 \cdot 10^{23}$$

$$8. \quad \bar{v}_{\text{eau}} = \frac{M_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{0.018 \text{ kg mol}^{-1}}{1000 \text{ kg m}^{-3}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \triangleq 18 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$9. \dot{n} = I_n + \Pi_n \Rightarrow \Pi_n = \dot{n} - I_n = 0.70 \text{ mol min}^{-1} - 2.0 \text{ mol min}^{-1} = -1.3 \text{ mol min}^{-1}$$

$$10. \bar{c} = \frac{n}{V_{\text{solution}}} = \frac{m/M}{V_{\text{solution}}} = \frac{0.005 \text{ kg}}{0.1802 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 2 \text{ L}} = 0.0139 \text{ mol L}^{-1} = 0.0139 \text{ M}$$

6.4 POTENTIEL CHIMIQUE ET FORCE D'ENTRAÎNEMENT CHIMIQUE

L'objectif de cette section est de formaliser le concept de potentiel chimique, de l'illustrer par des exemples et de montrer de quels facteurs il dépend.

6.4.1 Force d'entraînement de conversions chimiques simples

Dans les exemples des sections 6.1 et 6.2, nous avons à chaque fois pu interpréter les observations en postulant l'existence d'une force d'entraînement responsable de :

- la décomposition de la murexide,
- la diffusion de sel à travers une membrane,
- la diffusion de sel dans l'eau,
- la migration, la diffusion du toluène de l'eau vers l'air,
- la transformation du glucose,
- le phénomène d'osmose dans les cœurs de pommes de terre,
- et d'autres phénomènes tels que la congélation ou la fusion de l'eau.

La grandeur qui permet de mesurer la tendance des substances à réagir avec d'autres substances, à migrer d'une région vers une autre, ou à se transformer, c'est-à-dire à changer d'état d'agrégation, est le potentiel chimique μ . C'est, pour les processus envisagés, la grandeur intensive analogue à la pression, au potentiel électrique, au potentiel gravitationnel ou à la température (fig. 6.12). Les différences de potentiel chimique agissent comme force d'entraînement des processus chimiques, comme une tension chimique.

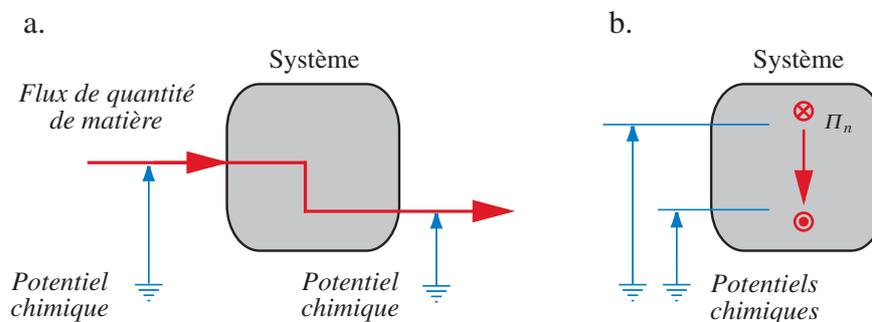


FIGURE 6.12 Diagrammes de processus : (a) pour le flux de quantité de matière ; (b) pour la destruction et la production d'espèces. Le potentiel chimique μ est assimilable au niveau de la substance. Les différences de potentiels chimiques sont les forces d'entraînement du transport d'espèces. μ_R et μ_P représentent respectivement les potentiels chimiques des réactants et des produits.

Chaque substance possède un potentiel chimique qui peut dépendre d'un certain nombre de facteurs tels que la température, la pression, la concentration, le milieu, etc. Le processus de migration d'une espèce est envisagé comme l'écoulement de points de haut potentiel chimique vers ceux où il est plus bas (fig. 6.12a), alors que la conversion d'une substance A en une substance B est visualisée en tant que disparition de la première à un haut niveau du potentiel et l'apparition de la seconde à un niveau plus bas (fig. 6.12b).

Le potentiel chimique se mesure en J mol^{-1} . Comme il s'agit de la grandeur intensive fondamentale du domaine étudié, nous lui attribuons une unité particulière, le gibbs, que nous abrégeons par G.

Transformations simples. Pour donner une description plus formelle de la force d'entraînement chimique, considérons les transformations simples d'une substance unique en une autre espèce unique :



Les exemples de telles conversions sont la fusion de la glace, la mutation de glucose, la diffusion d'un colorant d'un point vers un autre, la dissolution du sucre dans l'eau, l'évaporation du mercure dans l'air, la désintégration radioactive (sans prise en compte des particules et photons émis), etc. Nous désignons par μ_A et μ_B les potentiels chimiques des substances A et B ou des substances dans des états ou des endroits A et B. Dans ce cas, la *différence de potentiel chimique* pour la transformation est

$$[\Delta\mu]_{A \rightarrow B} = \mu_B - \mu_A \quad (6.24)$$

Tension ou affinité chimique. En analogie à ce qui se fait en électricité, où l'opposé de la différence de potentiel est la tension, nous introduisons l'opposé de la différence de potentiel chimique et le nommons *tension chimique* \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}_{A \rightarrow B} = -[\Delta\mu]_{A \rightarrow B} \quad (6.25)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, cette nouvelle grandeur correspond à ce que les chimistes appellent l'*affinité chimique*, mais pour maintenir l'analogie avec les autres domaines, particulièrement avec l'électricité, nous continuerons à la considérer comme une tension. Une valeur positive de cette grandeur est responsable de conversions chimiques spontanées, alors qu'une transformation non spontanée, forcée, est associée à une tension négative (fig. 6.13).

Équilibre chimique. Nous avons vu que certaines transformations, aussi bien les réactions que les transports, peuvent s'arrêter. Lorsqu'elles s'arrêtent, c'est le signe que l'équilibre a été atteint, comme l'équilibre de vases communicants, celui des potentiels en électricité, celui des températures pour des corps en contact thermique. Pour des réactions chimiques, la *condition d'équilibre* est

$$\mathcal{A}_{A \rightarrow B} = 0 \Leftrightarrow \Delta\mu_{A \rightarrow B} = 0 \quad (6.26)$$

Les processus peuvent démarrer de part et d'autre de l'équilibre. Des réactions peuvent être forcées à quitter l'état d'équilibre par une «intervention extérieure», comme c'est le cas d'une batterie qui peut être rechargée par l'application d'une tension extérieure.

$\mathcal{A} > 0$: transformation
spontanée
 $\mathcal{A} < 0$: transformation
contrainte

FIGURE 6.13 Le signe de la tension chimique détermine si une réaction est spontanée ou contrainte.

6.4.2 Quelques exemples

Illustrons le nouveau concept au moyen de quelques exemples concrets. Les valeurs utilisées seront introduites et justifiées à la section 6.4.4.

Désintégration radioactive. Le strontium-90 se désintègre en yttrium-90, qui lui-même se désintègre en zirconium-90 (fig. 6.14). Pourquoi les désintégrations se déroulent-elles selon cette séquence ?

TABLEAU 6.1 Potentiels chimiques absolus

Isotope	$M / \text{kg mol}^{-1}$	μ_0 / kG
^1H	0.001007825	$0.0905788 \cdot 10^{12}$
^4He	0.004002603	$0.359736 \cdot 10^{12}$
^{90}Sr	0.08990774	$8.080505 \cdot 10^{12}$
^{90}Y	0.08990716	$8.080453 \cdot 10^{12}$
^{90}Zr	0.08990470	$8.080231 \cdot 10^{12}$

Les valeurs absolues du potentiel chimique de quelques isotopes du tableau 6.1, déterminées au moyen de l'équation (6.32), à la section 6.4.4, nous permettent de calculer les différences qui sont de $-52 \cdot 10^9 \text{ G}$ pour la désintégration du strontium vers l'yttrium et de $-222 \cdot 10^9 \text{ G}$ pour celle de l'yttrium vers le zirconium. La chute de potentiel environ quatre fois supérieure pour la seconde désintégration permet de supposer que cette désintégration se déroule plus rapidement que la première, ce que l'on observe. Mais les demi-vies sont respectivement 28.8 années et 2.67 jours, d'autres facteurs doivent jouer un rôle important dans la vitesse de réaction. Les valeurs absolues du tableau sont déterminées pour la masse molaire de la substance, elles correspondent donc à l'énergie molaire.

Réactions chimiques. L'utilisation des potentiels chimiques absolus nécessiterait de connaître leur valeur avec une précision d'au moins 12 chiffres significatifs, ce qui donnerait lieu à des calculs fastidieux. Les chimistes ont choisi une voie plus simple, celle d'attribuer à la configuration stable d'une substance une valeur nulle du potentiel chimique et de déterminer les valeurs des autres configurations relativement à cette valeur de base. Nous reviendrons à la section 6.4.4 sur la manière dont sont déterminés les potentiels chimiques. Le tableau 6.3 en donne les valeurs pour quelques substances.

Considérons la formation de l'eau à partir de l'hydrogène et de l'oxygène (fig. 6.15). Les potentiels chimiques des deux molécules H_2 et O_2 sont donc nuls en vertu de la convention évoquée ci-dessus. Celui de l'eau est de -237 kG . La réaction se déroule donc de manière spontanée. Pour que ce soit le cas, la condition nécessaire est que la variation du potentiel chimique soit négative. Une réaction spontanée se déroule « en descendant la pente » du potentiel chimique.

Changement de phase. La condensation de la vapeur d'eau ou la formation de glace illustrent ce type de transformation qui fait passer une substance d'une forme particulière à une autre forme distincte de la première. À température ambiante, l'eau liquide a un potentiel chimique plus bas que la glace, ce qui entraîne la fusion de la glace. Les valeurs du tableau 6.2 confirment cette interprétation. Par contre, la situation est inversée pour les basses températures : en dessous du point de congélation, l'eau se transforme spontanément en glace (fig. 6.16).

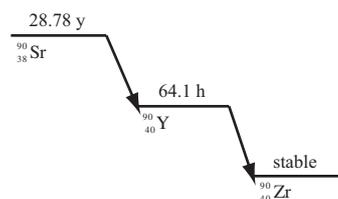


FIGURE 6.14 Schéma de désintégration du Sr-90. Les valeurs indiquées sur les niveaux énergétiques sont les demi-vies.

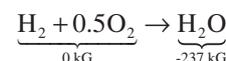
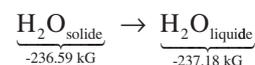


FIGURE 6.15 La réaction qui forme de l'eau à partir des éléments est spontanée : elle correspond à une diminution (variation négative) du potentiel chimique. La réaction inverse ne peut pas se dérouler spontanément.

$$T = 298 \text{ K}$$



$$T = 198 \text{ K}$$

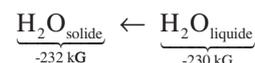


FIGURE 6.16 L'eau passe spontanément d'une phase ayant un certain potentiel à une phase dont le potentiel est moins élevé. Suivant la température, le changement de phase peut être inversé.

TABLEAU 6.2 Propriétés de l'eau aux conditions standard.

Phase	$\mu^0 / \text{kJ G}^{-1}$	$\alpha_\mu^0 / \text{G K}^{-1}$	$\beta_\mu^0 / \mu\text{G Pa}^{-1}$
Glace	-236.59	-44.77	19.7
Eau liquide	-237.18	-69.91	18.1
Vapeur d'eau	-228.60	-188.72	24465

6.4.3 Dépendance du potentiel chimique d'autres facteurs

L'exemple des changements de phase de l'eau nous amène à nous rendre compte que le potentiel chimique d'une substance dépend de la température, mais également d'autres paramètres tels que la pression, la concentration et d'autres encore.

Dépendance de la température. Pour des plages de température qui ne sont pas trop étendues, sa dépendance peut être décrite au moyen d'une approximation linéaire :

$$\mu(T, P^0) = \mu^0(T^0, P^0) + \alpha_\mu^0 (T - T^0) \quad (6.27)$$

α_μ^0 est le *coefficient de température du potentiel chimique*. Il est indiqué dans le tableau 6.2 pour les trois phases de l'eau aux conditions standard ($P^0 = 101\,325 \text{ Pa}$, $T^0 = 298.15 \text{ K}$), que nous signalons par un zéro en exposant. Ce coefficient a les dimensions de l'entropie molaire. Il peut être interprété en tant qu'*entropie molaire négative* de la substance :

$$\alpha_\mu = -\bar{s} \quad (6.28)$$

Cela signifie que le potentiel chimique décroît avec la température. Cela peut paraître surprenant à première vue, puisque l'on s'attend plutôt à ce que les transformations chimiques deviennent plus intenses lorsque la température augmente. Mais il ne faut pas oublier que la grandeur qui entraîne la réaction est la différence de potentiel chimique des réactants et des produits ; les deux côtés de l'équation de réaction sont influencés par la température.

EXEMPLE 6.4. Détermination du point de fusion de la glace.

En utilisant les valeurs des potentiels chimiques et des coefficients de température du tableau 6.2 pour l'eau et la glace, ainsi que l'idée de l'équilibre chimique, trouvez une approximation du point de fusion de la glace.

SOLUTION: Étant donné que ce changement de phase peut se dérouler dans les deux sens au point de fusion, les potentiels chimiques des deux phases doivent être égaux :

$$\mu_{\text{glace}}(T_{\text{fusion}}) = \mu_{\text{eau}}(T_{\text{fusion}})$$

Nous exprimons les potentiels chimiques de chacune des substances au moyen des potentiels standard et de la prise en compte de l'effet de la température selon la relation (6.27) :

$$\mu_{\text{glace}}^0 + \alpha_{\mu, \text{glace}}^0 (T_{\text{fusion}} - T^0) = \mu_{\text{eau}}^0 + \alpha_{\mu, \text{eau}}^0 (T_{\text{fusion}} - T^0)$$

Nous résolvons l'équation et insérons les valeurs du tableau 6.2 pour trouver :

$$\begin{aligned}
 T_{\text{fusion}} &= \frac{\mu_{\text{eau}}^0 - \mu_{\text{glace}}^0}{\alpha_{\mu, \text{glace}}^0 - \alpha_{\mu, \text{eau}}^0} + T^0 \\
 &= \frac{-237180 \text{ G} - (-236590 \text{ G})}{(-44.77 \text{ G K}^{-1} - (-69.91) \text{ G K}^{-1})} + 298.15 \text{ K} = 274.68 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Cette valeur ne dépasse que de 1.5°C la valeur mesurée, ce qui est acceptable, vu qu'il ne s'agit que d'une approximation linéaire. ■

Dépendance de la pression. Nous savons par expérience que l'eau bout à une température plus basse que 100°C en altitude, où la pression est plus basse. Cela signifie que le potentiel chimique doit dépendre de la pression. Nous pouvons à nouveau utiliser une approximation linéaire :

$$\mu(T^0, P) = \mu^0(T^0, P^0) + \beta_{\mu}^0(P - P^0) \quad (6.29)$$

Le facteur β_{μ}^0 est le *coefficient de pression du potentiel chimique*. Plus loin dans ce chapitre (section 6.6.4, exemple 6.12), nous montrerons que ce coefficient est égal au volume molaire de la substance :

$$\beta_{\mu}^0 = \bar{v} \quad (6.30)$$

EXEMPLE 6.5. Variation du point de fusion de la glace par modification de la pression.

Déterminez de combien la température de fusion de la glace varie si la pression est modifiée. Pourquoi la température de fusion diminue-t-elle lorsque la pression augmente ? Cela est-il vrai pour tous les types de substances ?

SOLUTION: Les arguments sont les mêmes que dans l'exemple 6.4, à la différence près que nous devons prendre en compte l'influence de la pression :

$$\mu_{\text{glace}}^0 + \alpha_{\mu, \text{glace}}(T - T_0) + \beta_{\mu, \text{glace}}(P - P^0) = \mu_{\text{eau}}^0 + \alpha_{\mu, \text{eau}}(T - T_0) + \beta_{\mu, \text{eau}}(P - P^0)$$

Si nous choisissons la température de fusion de la glace (à pression normale P^0) comme température de référence T_0 , les potentiels de référence de la glace et de l'eau sont les mêmes. Donc :

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = -\frac{\beta_{\mu, \text{glace}} - \beta_{\mu, \text{eau}}}{\alpha_{\mu, \text{glace}} - \alpha_{\mu, \text{eau}}}$$

Nous devons insérer les valeurs de ces paramètres à la température de congélation 0°C. Les coefficients de pression du potentiel chimique, qui correspondent aux volumes molaires respectifs, étant très peu affectés par ce changement de température de référence, nous pouvons reprendre les valeurs du tableau 6.2. Par contre, nous devons convertir les valeurs des coefficients de température qui correspondent à l'opposé de l'entropie molaire. Nous utilisons l'équation (5.32), développée à la section 5.5.6, ainsi que les valeurs du tableau 5.3 pour procéder à la conversion :

$$\bar{s}(T_{\text{fusion}}) = \bar{s}^0 + \bar{c} \ln\left(\frac{T_{\text{fusion}}}{T^0}\right)$$

Pour la glace, nous obtenons :

$$\bar{v}(0^\circ\text{C}) = 44.8 \text{ Ct mol}^{-1} + 2100 \text{ Ct kg}^{-1} \cdot 0.018 \text{ kg mol}^{-1} \cdot \ln\left(\frac{273.15 \text{ K}}{298.15 \text{ K}}\right) = 41.5 \text{ Ct mol}^{-1}$$

et pour l'eau liquide 63.3 Ct mol^{-1} .

Avec ces valeurs, le taux d'abaissement de température est égal à $-7.34 \cdot 10^{-8} \text{ K Pa}^{-1}$, ce qui équivaut à un abaissement de la température de fusion de 0.73 K pour une pression de 100 bar .

Ce résultat remarquable, qui n'est valable que pour l'eau et peut-être pour une ou deux autres substances, est dû au fait que le coefficient de pression de la glace est plus grand que celui de l'eau. En effet, la température de fusion augmente généralement avec la pression car, si la phase solide a une plus grande densité, le volume molaire et le coefficient de pression sont plus petits. ■

Dépendance de la concentration. Il est clair que le potentiel chimique de substances doit dépendre de leur concentration. Cela devient évident dans les processus de transport où des substances diffusent dans un milieu, mais c'est également visible dans la mutarotation du glucose (fig. 6.9). Les concentrations des deux espèces évoluent durant la réaction, ce qui entraîne une évolution conjointe de la vitesse de réaction jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint.

Pour des variations de concentration molaire qui ne sont pas trop importantes, nous pouvons à nouveau utiliser une approximation linéaire :

$$\mu(T^0, P^0, \bar{c}) = \mu^0(T^0, P^0, \bar{c}^0) + \gamma_\mu^0 (\bar{c} - \bar{c}^0) \quad (6.31)$$

Il est intéressant de noter que le *coefficient de concentration du potentiel chimique* γ_μ^0 est le même pour toutes les substances diluées. Il vaut $\gamma_\mu^0 = 2.47 \text{ G m}^3 \text{ mol}^{-1}$ pour des conditions standard.

6.4.4 Valeurs du potentiel chimique

Comme les potentiels chimiques dépendent de l'environnement, de la température, de la pression, des concentrations, etc., il existe une foule de méthodes pour obtenir les valeurs des potentiels chimiques. La théorie permet de relier les mesures à la valeur que l'on souhaite obtenir. L'exemple 6.13 illustre une manière de déterminer le potentiel chimique de l'eau au moyen de mesures électriques.

Le potentiel chimique est un potentiel absolu, comme le sont la température et la pression, contrairement aux potentiels associés à la gravité, au mouvement et à l'électricité². Aux conditions qui règnent sur la Terre, le potentiel chimique d'une espèce est donné par sa masse (son énergie) divisée par sa quantité de matière :

$$\mu \approx \frac{mc^2}{n} = Mc^2 \quad (6.32)$$

où c est la vitesse de la lumière. Les valeurs pour quelques isotopes sont données dans le tableau 6.1. Ces valeurs sont énormes et sont pratiquement indépendantes de la tem-

2. Les potentiels associés à des grandeurs non conservées (entropie et volume) sont absolus. Si ce n'était pas le cas, les quantités d'énergie associées aux processus de production et/ou de destruction ne pourraient pas être correctement définies. Les potentiels gravitationnel et électrique, la vitesse et la vitesse angulaire sont associés aux grandeurs conservées masse, charge, quantité de mouvement et moment cinétique. Leur niveau de référence (auquel on associe la valeur nulle) peut être fixé de manière arbitraire.

pérature et de la pression, sauf dans les conditions extrêmes qui règnent à l'intérieur des étoiles, on peut donc les considérer comme constantes. Ce fait est à l'origine du caractère exponentiel de la désintégration radioactive que nous étudierons à la section 6.8.4.

EXEMPLE 6.6. Énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de ^{90}Sr .

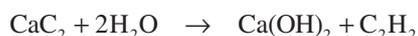
Calculez l'énergie libérée lorsqu'un noyau de ^{90}Sr se désintègre en un noyau de ^{90}Y .

SOLUTION: La valeur absolue du potentiel chimique d'une espèce est approximée, selon l'équation (6.32), par son énergie totale par unité de quantité de matière. Dans cette approximation, l'énergie libérée est liée à la variation du potentiel chimique lors de la réaction:

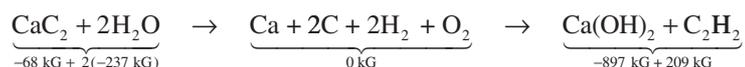
$$\begin{aligned} E_{\text{libérée}} &= -\Delta\mu_{\text{réaction}} \cdot \tau = -(\mu_{^{90}\text{Y}} - \mu_{^{90}\text{Sr}}) \tau \\ &= -(8.080453 \cdot 10^{15} \text{ G} - 8.080505 \cdot 10^{15} \text{ G}) \cdot 1.661 \cdot 10^{-24} \text{ mol} \\ &= 8.64 \cdot 10^{-14} \text{ J} \triangleq 0.54 \text{ MeV} \end{aligned}$$

où τ représente l'unité de quantité de matière calculée selon l'équation (6.12). Les valeurs ont été extraites du tableau 6.1. La valeur obtenue correspond à celle que l'on enregistre lors de la désintégration. ■

L'utilisation des potentiels absolus se révèle impossible dans la pratique: les différences des valeurs absolues sont tellement faibles par rapport à ces valeurs absolues qu'il faudrait en connaître au moins douze chiffres significatifs. Les chimistes ont choisi une approche différente: ils attribuent une valeur nulle au potentiel chimique de la forme la plus stable des éléments du tableau périodique. Par conséquent, les valeurs des potentiels chimiques de substances composées représentent la différence entre leur valeur absolue propre et celles des éléments dont elles sont composées. Ainsi, la réaction



peut être comprise comme



Les réactifs se décomposent en leurs éléments et les produits sont formés à partir de ces éléments. En calculant ainsi la force d'entraînement des réactions (la tension chimique), il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs absolues des potentiels.

Le tableau 6.3 donne les valeurs des potentiels chimiques de quelques substances dont certaines apparaissent dans ce chapitre. On remarquera que beaucoup de substances ont un potentiel chimique négatif. Cela signifie qu'elles se forment de manière spontanée à partir de leurs éléments et qu'elles ne se décomposent pas spontanément en leurs éléments: elles sont stables. Par contre, les substances qui ont un potentiel chimique positif sont difficiles à synthétiser et ont tendance à se décomposer en leurs éléments.

TABLEAU 6.3 Potentiels chimiques de quelques substances^a.

Formule	Substance	$\mu^0 / \text{kJ mol}^{-1}$ ^b	$\alpha_{\mu}^0 / \text{K}^{-1}$	$\beta_{\mu}^0 / \mu\text{G Pa}^{-1}$
C (s) ^c	Carbone (graphite)	0	- 5.69	5.4
C ₂ H ₂ (g)	Acétylène	209.20	- 200.83	
CH ₄ (g)	Méthane	- 50.89	- 186.10	24 465
CH ₄ O (l)	Méthanol	-166.35	- 126.74	
C ₆ H ₁₂ O ₆ (aq)	Glucose	- 917.44		
C ₇ H ₈ (g)	Toluène	122.39	- 319.70	
C ₇ H ₈ (l)		110.61	- 219.00	
CO (g)	Monoxyde de carbone	- 137.15	- 197.56	
CO ₂ (g)	Dioxyde de carbone	- 394.40	- 213.68	24 465
CO ₂ (aq)		- 385.99	- 113.00	
CaCO ₃ (s)	Carbonate de calcium	- 1128.76	- 92.88	36.92
CaC ₂ (s)	Carbure de calcium	- 67.78	- 70.29	28.9
Ca(OH) ₂ (s)	Hydroxyde de calcium	- 896.76	- 76.15	33.2
Cl ⁻ (aq)	Ion de chlorure	- 131.26	- 56.48	18.0
Cu ²⁺ (aq)	Ion cuivrique	65.52	99.58	
Fe (s)	Fer	0	- 27.32	7.1
Fe ₂ O ₃ (s)	Oxyde de fer	- 734.58	- 87.4	30.4
H ₂ (g)	Hydrogène	0	- 131	24 465
H ₂ O (g)	Eau	- 228.60	- 188.72	24 465
H ₂ O (l)		- 237.18	- 69.91	18.1
H ₂ O (s)		- 236.59	- 44.77	19.7
Hg (l)	Mercure	0	-76.02	14.1
Hf (g)		31.84	-174.87	24 465
N ₂ (g)	Azote	0	- 191.50	24 465
NH ₃ (g)	Ammoniaque	- 16.40	- 192.50	
Na ⁺ (aq)	Ion sodium	- 261.89	- 58.99	- 1.6
NaCl (s)	Sel de cuisine	- 384.03	- 72.13	27.02
O ₂ (g)	Oxygène	0	- 205.02	24 465
O ₂ (aq)		16.44		
PbO ₂ (s)	Dioxyde de plomb	- 212.42	- 76.57	
PbSO ₄ (s)	Sulfate de plomb	- 813.20	- 148.57	48.2
SO ₄ ²⁻ (aq)	Ion sulfate	- 744.63	- 20.08	15.0
SiO ₂ (s)	Dioxyde de silicium	- 856.48	- 41.46	22.6
Zn ²⁺ (aq)	Ion zinc	- 147.03	112.13	-26

a. G. JOB : Chemische Potenziale ausgewählter Stoffe (www.job-stiftung.de).

b. Aux conditions standard: 298.15 K, 101 325 Pa, pur ou 1 mol L⁻¹.

c. (s) solide, (l) liquide, (g) gazeux, (aq) en solution aqueuse.

1. Comment le processus de destruction ou de production d'une substance peut-il être utilisé pour justifier le fait que le potentiel chimique est une grandeur absolue?
2. Lorsque le toluène est présent à des concentrations égales dans l'eau et dans l'air (fig. 6.8a), dans lequel de ces deux environnements a-t-il le potentiel chimique le plus élevé? Pourquoi?
3. Vu que, selon l'équation (6.28), les coefficients de température du potentiel chimique de substances sont négatifs, comment est-il possible qu'une réaction qui n'a pas lieu à température ambiante puisse se dérouler à des températures plus élevées?
4. Pourquoi la force d'entraînement d'une réaction spontanée doit-elle être positive? Y a-t-il une règle semblable pour d'autres processus, tels que hydrauliques ou électriques?
5. Quel est le lien entre le concept d'équilibre chimique et ceux de potentiel chimique et de force d'entraînement chimique?
6. Qu'advient-il de la température de vaporisation de l'eau si la pression diminue? Comment peut-on l'interpréter en termes de potentiel chimique?
7. Quel est le rôle de l'énergie lors de transformations spontanées? Lors de réactions entraînées? Donnez des exemples de réactions chimiques non spontanées.
8. Quelle est la différence de potentiel associée à la réaction du carbone et de l'oxygène pour former du dioxyde de carbone?
9. Pourquoi la glace fond-elle à 25°C?
10. L'or peut-il s'oxyder?
11. Est-il possible d'obtenir une solution 1 M de sel?
12. Quelle est la différence de potentiel lors de la combustion de méthane ($\text{CH}_4 + 2 \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$)?
13. La réaction des gaz hydrogène et oxygène est-elle spontanée, ou se déroule-t-elle plutôt dans le sens inverse?
14. L'acétylène (C_2H_2) est produit à partir de carbure de calcium et d'eau ($\text{CaC}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Ca}(\text{OH})_2 + \text{C}_2\text{H}_2$). Il a un potentiel chimique bien plus élevé que ses constituants. Comment cela est-il possible?
15. Le sel de table se dissout-il plus facilement à 45°C qu'à 25°C?
16. De combien le point de fusion de la glace change-t-il si l'on augmente la pression à 10 bar?



1. Si le potentiel chimique n'était pas une valeur absolue, la puissance d'une réaction chimique ne pourrait pas être définie.
2. Le potentiel chimique du toluène est plus élevé dans l'air. Le toluène va migrer vers l'eau, vu qu'elle en accueille quatre fois plus que l'air à l'équilibre.
3. Les variations de *tous* les potentiels doivent être prises en considérations pour déterminer la différence de potentiel à une température plus élevée.
4. La force d'entraînement est égale à l'opposé de la différence de potentiel, ce qui est également le cas de la tension électrique.
5. La différence de potentiel chimique associée à une transformation chimique doit être nulle à l'équilibre.
6. Le point de vaporisation est abaissé. Le potentiel chimique de l'air diminue.
7. De l'énergie est libérée lors de réactions spontanées, alors qu'elle est utilisée pour entraîner une réaction non spontanée, telle que la charge d'une batterie.



8. Le potentiel chimique des deux constituants est nul (ils sont dans leur état le plus stable). La différence de potentiel correspond donc au potentiel chimique du dioxyde de carbone, soit -394.40 G.
9. Parce que le potentiel chimique de la glace à 25°C est supérieur (moins négatif) à celui de l'eau à la même température. À cette température (et à cette pression), l'eau « préfère » être à l'état liquide.
10. Non, car le potentiel chimique de son oxyde (Au_2O_3) est positif, il vaut 164.0 G, alors que celui des éléments est nul. La variation du potentiel chimique est positive, ce qui implique que la réaction ne peut pas se dérouler spontanément.
11. Oui, la consultation du tableau 6.3 permet de calculer que la variation du potentiel chimique est égale à -9.12 kG.
12. Le tableau 6.3 indique que le potentiel chimique des réactifs est égal à -50.89 kG alors que celui des produits vaut -394.40 kG $- 2 \cdot 228.60$ kG = -881.60 kG. La variation du potentiel chimique est donc de -800.71 kG.
13. Le potentiel chimique des réactifs est nul, celui de l'eau vaut -457.60 kG, la réaction est spontanée et pratiquement à sens unique.
14. En consultant les tables, on trouve que la somme des potentiels chimiques des réactifs est égale à -67.78 kG $- 237.18$ kG = -304.96 kG, alors que celui de l'acétylène vaut 209.20 kG. Ce qui rend la réaction possible, c'est le fait que le potentiel chimique de l'hydroxyde de calcium vaut -896.76 kG, La variation du potentiel chimique est donc de -382.60 kG, ce qui rend la réaction possible.
15. Oui. Il faut recalculer les potentiels chimiques respectifs à partir de l'équation (6.27) et des valeurs du tableau 6.3. La différence de potentiel passe de -9.12 kG à -9.99 kG.
16. En reprenant les résultats trouvés dans l'exemple 6.5, on trouve que le point de fusion est abaissé de 0.066 K.

6.5 GAZ PARFAIT ET SOLUTIONS DILUÉES

Dans la section précédente, nous avons exprimé comment le potentiel chimique dépend de la température et de la pression au moyen d'une approximation linéaire, parce que nous n'avons pas de modèle du comportement des substances par rapport à ces paramètres. Par contre, après avoir élaboré un modèle du gaz parfait, nous allons pouvoir exprimer la manière dont son potentiel chimique dépend de la pression à température constante et étendre les résultats obtenus aux solutions diluées.

6.5.1 Modèle du gaz parfait

À la section 5.2.1, nous avons observé de manière expérimentale que, lorsqu'elle est suffisamment basse, la température des gaz à volume constant est proportionnelle à la température, ce qui nous a permis d'introduire le concept de température des *gaz parfaits*, dont nous avons démontré qu'elle pouvait être utilisée en tant que température absolue.

La première mention de cette observation est due à AMONTONS en 1702. Mais d'autres faits expérimentaux relatifs aux gaz ont été découverts, à savoir :

- BOYLE (1662) et MARIOTTE (1676) ont découvert pratiquement simultanément qu'à température et quantité de matière constantes, le volume d'un gaz est inversement proportionnel à sa pression (fig. 6.17) :

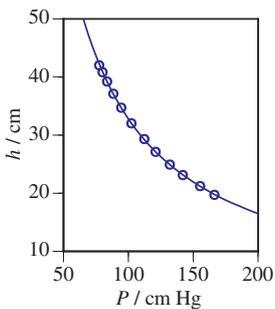


FIGURE 6.17 Relation entre le volume et la pression de l'air à température constante. L'air est emprisonné dans un cylindre avec un piston de mercure. h est la hauteur de la colonne d'air (proportionnelle à son volume) et la pression P est mesurée en cm de la colonne de mercure. La fonction ajustée aux points mesurés est l'hyperbole décrite par l'équation (6.33).

$$V \propto \frac{1}{P} \Rightarrow V = \frac{k}{P} \quad (T, n \text{ constants}) \quad (6.33)$$

- GAY-LUSSAC énonce en 1802 qu'à pression et quantités de matière constantes, le volume d'un gaz est proportionnel à sa température:

$$V \propto T \Rightarrow V = aT \quad (P, n \text{ constants}) \quad (6.34)$$

- AVOGADRO découvre en 1811 qu'à température et pression constantes, le volume d'un gaz est proportionnel à sa quantité de matière:

$$V \propto n \Rightarrow V = bn \quad (T, P \text{ constants}) \quad (6.35)$$

Le volume est donc proportionnel au produit de ces grandeurs proportionnelles. La valeur du produit kab des coefficients de proportionnalité doit être déterminée par l'expérience. Il s'agit d'une constante universelle, la *constante universelle des gaz parfaits* $R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = 8.314 \text{ G K}^{-1}$.

Loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT \quad (6.36)$$

Cette relation est applicable à des gaz réels pour autant qu'ils soient suffisamment dilués (loin du point de liquéfaction), à température suffisamment élevée et à pression basse. Dans des conditions normales ou standard de température et de pression, ce modèle décrit bien la réalité.

6.5.2 Mélanges de gaz

Très souvent, les substances sont des mélanges de substances pures, ce qui peut engendrer de nouveaux effets. Dans cette section, nous allons examiner des mélanges de gaz parfaits, ce qui nous permettra d'introduire un certain nombre de concepts utiles pour la suite.

Fraction molaire. Lors d'un mélange de N substances pures, chacune contribue pour une part n_i à la quantité de matière totale :

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad (6.37)$$

La quantité relative

$$\bar{x}_i = \frac{n_i}{n} \quad (6.38)$$

est la *fraction molaire* du composant i . Il s'agit d'une généralisation de la relation (6.15). Si M_i représente la masse molaire du i^{e} composant, la masse molaire du mélange est donnée par :

$$M = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i M_i \quad (6.39)$$

Pression partielle d'un composant d'un mélange. Si nous envisageons un mélange de gaz tel que l'air, nous pouvons le traiter comme un gaz parfait. Si nous écrivons l'équation d'état de cette substance au moyen des quantités de matière de ses constituants, nous obtenons:

$$PV = nRT = \left(\sum_{i=1}^N n_i \right) RT \tag{6.40}$$

Nous pouvons réécrire le membre de droite de cette relation en utilisant les fractions molaires:

$$nRT = \left(\sum_{i=1}^N n_i \right) RT = \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i \right) nRT = \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i \right) PV = \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i P \right) V$$

Le terme

$$P_i = \bar{x}_i P \tag{6.41}$$

est la *pression partielle* du composant *i*. La somme des pressions partielles est égale à la pression totale du mélange:

$$P = \sum_{i=1}^N P_i \tag{6.42}$$

Dans un mélange de gaz parfaits, chaque composant se comporte de manière indépendante des autres, remplissant le volume total *V* à la température *T* du mélange, et chaque constituant est régi par la loi des gaz parfaits:

$$P_i V = n_i RT \tag{6.43}$$

La composition de l'air sec donnée dans le tableau 6.4 va nous permettre d'illustrer ces notions.

TABLEAU 6.4 Composition de l'atmosphère sèche.

Gaz	Symbole	Fraction massique
Azote	N ₂	0.7552
Oxygène	O ₂	0.2314
Argon	Ar	0.0128
Dioxyde de carbone	CO ₂	0.00058
Néon	Ne	0.000013

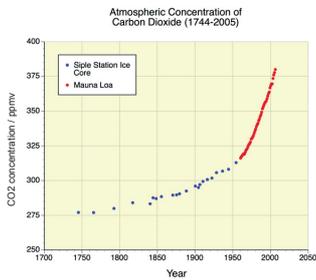


FIGURE 6.18 Évolution séculaire de la concentration de dioxyde de carbone (en ppmv : parties par million en volume) dans l'atmosphère terrestre.

EXEMPLE 6.7. Quelques particularités de l'atmosphère terrestre.

Le tableau 6.4 énumère les fractions massiques des composants les plus importants de l'atmosphère sèche. (a) Déterminez ou recherchez les masses molaires des substances apparaissant dans le tableau et calculez la masse molaire du mélange de gaz constituant l'air atmosphérique. (b) Déterminez la fraction volumique de ces composants et comparez le résultat obtenu pour le dioxyde de carbone avec le graphique de la figure 6.18. (c) Déterminez les fractions molaires

des gaz apparaissant dans le tableau. (d) Considérez 1.0 m^3 d'air à une pression de 0.97 bar et une température de 20°C ; quelles sont les pressions partielles des constituants? Votre réponse dépend-elle du volume considéré? (e) Calculez la masse de l'atmosphère de la Terre. (f) Déterminez les quantités de matière des gaz mentionnés dans le tableau, ainsi que le masse de dioxyde de carbone dans l'atmosphère. (g) Quelle quantité de dioxyde de carbone y avait-il dans l'atmosphère en 1750 et en 2005? Quel a été le taux de variation de la quantité de matière et de la masse du dioxyde de carbone dans l'atmosphère? (h) À partir de la variation saisonnière du dioxyde de carbone (fig. 6.19), déterminez quelle quantité est liée par la biomasse en une année. (i) On peut lire qu'en 1980, le taux de production de carbone (pas de dioxyde de carbone) par combustion de carburants fossiles était d'environ 6000 millions de tonnes par année. Comment cela peut-il être comparé avec le taux de croissance du dioxyde de carbone dans l'atmosphère?

SOLUTION: (a) Les masses molaires, dans l'ordre des substances donné par le tableau 6.4, sont respectivement de $28.0134 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $31.999 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $39.948 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $44.010 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $20.1804 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$. Comme nous n'avons pas tous les composants de l'air, nous devons adapter l'équation (6.39):

$$M_{\text{air}} = \frac{\sum_{i=1}^5 w_i M_i}{\sum_{i=1}^5 w_i}$$

où les w_i sont les fractions massiques respectives. L'introduction des valeurs des masses molaires permet de trouver que:

$$M_{\text{air}} = 29.098 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$$

(b) Étant donné que la même quantité de matière gazeuse occupe le même volume, les fractions volumiques et molaires sont égales. On obtient la fraction molaire (et la fraction volumique) de la substance i en multipliant par sa fraction massique le quotient de la masse molaire de l'air et de sa masse molaire:

$$\bar{x}_i = w_i \frac{M_{\text{air}}}{M_i}$$

À partir des données, on trouve dans l'ordre du tableau 6.4, les valeurs 0.7844, 0.2104, 0.00932, 0.000383 et 0.000019.

(c) Les fractions molaires ont été calculées en (b).

(d) La pression totale de 0.97 bar est la somme des pressions partielles, qui sont, en vertu de l'équation (6.41), le produit de cette pression et de la fraction molaire: on trouve ainsi, à nouveau dans l'ordre du tableau 6.4, les valeurs 761 mbar, 204 mbar, 9 mbar, 372 μbar , 18 μbar .

(e) La pression de l'atmosphère au niveau du sol est due au poids de la masse d'air qui la constitue. Ainsi:

$$m_{\text{air}} = \frac{P_{\text{atm}} A_{\text{Terre}}}{g} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 4\pi \cdot (6.378 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{9.81 \text{ N m}^{-2}} = 5.28 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

(f) Nous obtenons les quantités de matière respectives en divisant la part massique de la masse totale de l'air par la masse molaire:

$$n_i = \frac{w_i M_{\text{air}}}{M_i}$$

La répartition, dans l'ordre du tableau, est: $142.3 \cdot 10^{18} \text{ mol}$, $38.2 \cdot 10^{18} \text{ mol}$, $1.7 \cdot 10^{18} \text{ mol}$, $69.6 \cdot 10^{15} \text{ mol}$, $3.4 \cdot 10^{15} \text{ mol}$.

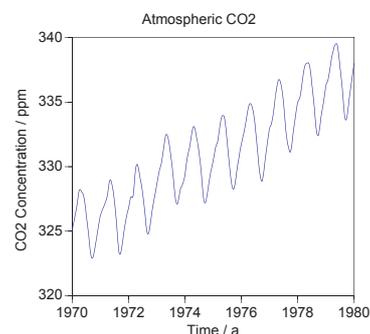


FIGURE 6.19 Évolution saisonnière de la concentration de dioxyde de carbone (en ppmv) dans l'atmosphère terrestre entre 1970 et 1980.

Nous obtenons la masse du dioxyde de carbone en multipliant la masse totale par sa fraction massique, ce qui donne $3.06 \cdot 10^{15}$ kg.

(g) Les valeurs pour les années envisagées sont 278 ppmv et 382 ppmv, que nous convertissons en fractions massiques en les multipliant par le quotient des masses molaires du dioxyde de carbone et de l'air, soit 1.51, ce qui donne 420 ppmm et 578 ppmm (parts par million en masse). De la même manière qu'au point (f), nous trouvons respectivement $2.22 \cdot 10^{15}$ kg et $3.05 \cdot 10^{15}$ kg.

En divisant la différence des deux valeurs par les 255 années écoulées, nous obtenons un taux de variation moyen de $3.26 \cdot 10^{12}$ kg a⁻¹, ce qui correspond à $74.1 \cdot 10^{12}$ mol a⁻¹.

(h) En consultant la figure 6.19, nous observons que l'apport moyen annuel de dioxyde de carbone est d'approximativement de 7 ppmv, alors que la part liée par la biomasse est d'approximativement 6 ppmv, soit 9.1 ppmm, ce qui équivaut à $48.1 \cdot 10^{12}$ kg de dioxyde de carbone liés par l'assimilation chlorophyllienne.

(i) Nous obtenons la masse de dioxyde de carbone produite par combustion en multipliant la masse du carbone par le quotient des masses molaires, soit 44/12, ce qui donne $22.0 \cdot 10^{12}$ kg. À partir de là, nous pouvons calculer un taux de croissance de 1.2 ppmv a⁻¹, ce qui correspond à 1.8 ppmm a⁻¹, soit $9.50 \cdot 10^{12}$ kg a⁻¹. Cette valeur correspond à moins de la moitié de la production annuelle de dioxyde de carbone. La différence est essentiellement due à l'absorption de ce gaz par les océans.



6.5.3 Potentiel chimique du gaz parfait

Pour déterminer comment le potentiel chimique d'un tel gaz dépend de la pression (à température constante), nous réécrivons l'équation (6.29) de manière différente :

$$\Delta\mu = \beta_{\mu} \Delta P$$

Si nous remplaçons β_{μ} par le volume molaire, en vertu de l'équation (6.30), et que nous exprimons ce volume à partir de l'équation (6.43), nous obtenons :

$$\Delta\mu = \bar{v} \cdot \Delta P = \frac{RT}{P} \Delta P$$

Nous effectuons le passage à la limite de variations infinitésimales de chacune des deux grandeurs et intégrons :

$$\int_{\mu^0}^{\mu} d\tilde{\mu} = RT \int_{P^0}^P \frac{d\tilde{P}}{P}$$

ce qui donne :

$$\mu = \mu^0 + RT \ln\left(\frac{P}{P^0}\right) \tag{6.44}$$

Cette relation donne le potentiel chimique du gaz parfait à température constante. Elle donne des approximations acceptables dans un large domaine de pressions allant de proches de zéro à dix fois supérieures à la pression atmosphérique. Elle va nous servir pour décrire le comportement des solutions diluées.

6.5.4 Solutions diluées

Lorsqu'elles sont dissoutes dans des fluides, les substances ont tendance à se comporter comme un gaz parfait, pour autant que la concentration du soluté soit suffisamment

faible (inférieure à 0.1 M pour des substances neutres, inférieure à 0.001 M pour des ions). Dans ce cas, sa pression est liée à la température absolue de la même manière que celle du gaz parfait :

$$P_s = \frac{n_s}{V_{\text{solution}}} RT = \bar{c}_s RT \quad (6.45)$$

Cette relation est confirmée par les observations qui révèlent également qu'elle ne dépend pas de l'espèce de la substance dissoute : il peut s'agir de sel, de macromolécules ou même de particules macroscopiques.

À la section 6.2.6, pour comprendre la variation du poids des coeurs de pommes de terre, nous avons supposé que la présence du soluté diminue la pression du solvant :

$$P_f = P_{f,0} - P_s \quad (6.46)$$

où $P_{f,0}$ représente la pression du solvant pur (fluide sans aucun soluté). Les termes P_f et P_s de l'équation (6.46) sont des pressions partielles, telles que celles que nous avons introduites par l'équation (6.41). Elles correspondent aux pressions que chacune des deux composantes exercerait si elle occupait tout le volume à disposition.

Une des manifestations de l'influence d'un soluté sur le solvant est le phénomène d'*osmose*. Lorsque deux cellules contenant l'une un solvant pur, l'autre une solution, sont séparées par une membrane semi-perméable (perméable uniquement pour le solvant), le solvant est « attiré » dans la solution pour la diluer. La conséquence est que le niveau de fluide augmente dans la cellule qui contient la solution (fig. 6.20). La différence de pression indiquée par les niveaux est la *pression osmotique* du soluté. Ce phénomène sera illustré par un exemple à la section 6.7.4.

Le soluté se comportant comme un gaz parfait, nous pouvons conclure que son potentiel chimique doit se conformer à la relation :

$$\mu_s(T, \bar{c}) = \mu_s(T, \bar{c}^0) + RT \ln\left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}^0}\right) \quad (6.47)$$

Cette relation est également valable pour des substances dissoutes dans des gels ou des solides, ce qui permet de comprendre la diffusion de substances à travers de la matière au repos.

Afin d'établir la relation correspondante pour le solvant (fluide), nous le traitons comme un fluide incompressible et utilisons le résultat de l'exemple 6.12 :

$$\mu_f(T, P_f) = \mu_f(T, P_{f,0}) - \bar{v}_f (P_f - P_{f,0})$$

Vu que la différence des pressions du solvant est due à la présence du soluté, la relation (6.46) nous permet d'écrire :

$$\mu_f(T, P_f) = \mu_f(T, P_{f,0}) - \bar{v}_f P_s \quad (6.48)$$

pour le potentiel chimique du solvant dans la solution. Il est usuel d'introduire la fraction molaire du soluté dans cette équation. Vu que la quantité de matière dissoute est supposée être faible par rapport à celle du solvant, cette grandeur est approximée par

$$\bar{x}_s = \frac{n_s}{n_f + n_s} \approx \frac{n_s}{n_f}$$

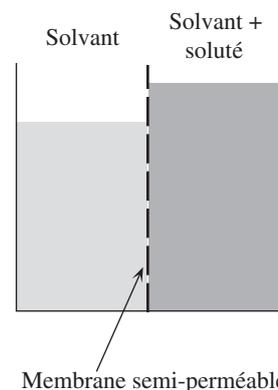


FIGURE 6.20 Le phénomène d'osmose a lieu lorsque deux cellules séparées par une membrane semi-perméable contiennent l'une un solvant pur, l'autre une solution. Le solvant traverse la membrane pour diminuer la concentration de la solution.

En prenant en compte l'équation (6.45), nous obtenons :

$$\mu_f(T, P_f) = \mu_f(T, P_{f,0}) - RT\bar{x}_s \quad (6.49)$$

pour la dépendance du potentiel chimique du solvant par rapport à la concentration du soluté. C'est ce dont nous avons besoin pour obtenir des résultats quantitatifs lors de l'osmose ou d'autres processus tels que les variations de la pression de vapeur ou des points d'ébullition ou de congélation.

EXEMPLE 6.8. Température de congélation de l'eau de mer.

À quelle température l'eau de mer, avec une concentration de 35 parts pour mille de sel, se met-elle à geler ?

SOLUTION: En l'absence de sel, l'eau gèle à 0°C, les potentiels chimiques des substances pures sont alors égaux (exemple 6.4). La présence du sel et le changement de température entraînent une variation du potentiel chimique de l'eau. Celui de la glace n'est influencé que par la variation de température. Avec l'adjonction de sel, à la nouvelle température, les potentiels chimiques sont à nouveau égaux. Si nous utilisons 0°C et l'absence de sel comme référence, la condition d'équilibre devient :

$$\mu_{\text{eau}}(T = 0^\circ\text{C}, P_0, \bar{c}_{\text{sel}} = 0 \text{ mol L}^{-1}) - RT \frac{2n_{\text{sel}}}{n_{\text{eau}}} + \alpha_{\mu, \text{eau}} \Delta T = \mu_{\text{glace}}(T = 0^\circ\text{C}, P_0) + \alpha_{\mu, \text{glace}} \Delta T$$

Le facteur 2 précédant la quantité de sel est dû au fait que le sel dissocie. Comme les potentiels de l'eau et de la glace sont égaux à 0°C, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{\alpha_{\mu, \text{eau}} - \alpha_{\mu, \text{glace}}} RT \frac{2n_{\text{sel}}}{n_{\text{eau}}} = \frac{2 \cdot 8.314 \text{ G K}^{-1} \cdot 273.15 \text{ K}}{-69.9 \text{ G K}^{-1} + 44.8 \text{ G K}^{-1}} \frac{n_{\text{sel}}}{n_{\text{eau}}} = -181 \text{ K} \frac{n_{\text{sel}}}{n_{\text{eau}}} \\ &= -181 \text{ K} \frac{M_{\text{eau}}}{M_{\text{sel}}} \frac{n_{\text{sel}}}{n_{\text{eau}}} = -55.7 \text{ K} \frac{m_{\text{sel}}}{m_{\text{eau}}} \end{aligned}$$

Pour la concentration donnée, le point de congélation est abaissé d'environ 2°C. ■

1. De combien la pression de l'eau change-t-elle si l'on dissout 1.0 mol de sel de table dans 1.0 L d'eau ?
2. Pourquoi le doublement de la pression d'un gaz ou de la concentration d'une substance dissoute augmente-t-il toujours le potentiel chimique de la même valeur, indépendamment des valeurs initiales de la pression ou de la concentration ?
3. Lorsque de l'air contenant du dioxyde de carbone est en contact avec de l'eau, une partie du CO₂ migre dans l'eau. Pourquoi ? Comment peut-on utiliser les potentiels chimiques et l'idée de la force d'entraînement chimique pour déterminer quelle quantité de CO₂ va migrer dans l'eau ? De quelle information doit-on disposer pour pouvoir effectuer les calculs ?
4. De quoi la pression partielle d'une composante d'un mélange de gaz parfaits dépend-elle ?
5. Quelle est la différence dans le déplacement du point d'ébullition si l'on dissout 1 mol de sucre ou 1 mol de sel ?



6. Quelle est la variation du potentiel chimique de l'air lorsque sa pression est multipliée par 10?
7. Quelle est la variation du potentiel chimique d'un sel dissous s'il est dilué 10 fois plus?

1. La diminution correspond à la pression du soluté, donnée par l'équation (6.45), soit 2481 Pa.
2. Dans les deux cas, le potentiel chimique varie suivant le logarithme du quotient des pressions et des concentrations. Le soluté se comporte comme un gaz parfait.
3. Le potentiel chimique du dioxyde de carbone est plus faible dans l'eau que dans l'air. Il faut considérer l'équilibre entre le CO₂ dans l'air et le CO₂ dissous dans l'eau. Il faut connaître la pression partielle du CO₂ dans l'air.
4. Elle dépend de sa fraction molaire \bar{x} .
5. L'effet du sel est double (dissociation du NaCl).
6. À partir de l'équation (6.44), on obtient une augmentation de 5.71 kG.
7. À partir de l'équation (6.47), on obtient une augmentation de 5.71 kG.



6.6 ÉNERGIE ET ENTROPIE DANS LES PROCESSUS CHIMIQUES

Les processus chimiques se déroulent entre deux niveaux du potentiel chimique, Or, nous savons que les différences de potentiel sont associées à une libération ou une utilisation d'énergie; dans tous les processus physiques, le taux auquel les grandeurs s'écoulent à travers une différence de potentiel est lié à la puissance du processus. Nous allons étendre ce constat aux processus chimiques.

6.6.1 Puissance des processus chimiques et transfert d'énergie

Lorsqu'une substance s'écoule d'une valeur élevée vers une valeur plus basse du potentiel chimique, il y a libération d'énergie (fig. 6.21a). Mais les substances peuvent réagir, donc apparaître ou disparaître. Ainsi, lorsqu'une substance est consommée (fig. 6.21b), de l'énergie est libérée.

Le taux auquel l'énergie est libérée ou liée lors de transport ou de réaction de substance est la puissance chimique. Lors de processus de transport, la puissance chimique est proportionnelle à la variation du potentiel

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = -\Delta\mu I_n \quad (6.50)$$

Lors d'une réaction, la puissance est proportionnelle au taux de production ou de destruction de la substance impliquée:

$$\mathcal{P}_{\text{chim}} = -\mu\Pi_n \quad (6.51)$$

La seconde relation nécessite un bref commentaire. Nous considérons ici le «processus unité» de la disparition ou apparition d'une substance sans considérer

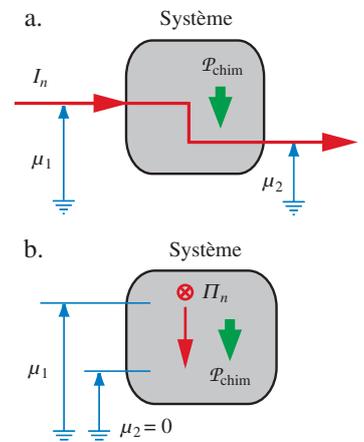


FIGURE 6.21 Flux d'énergie dans les processus chimiques: (a) lorsqu'une substance s'écoule d'un potentiel chimique élevé vers un potentiel plus bas, de l'énergie est libérée: (b) si une substance est consommée dans une réaction chimique, il y a également libération d'énergie.

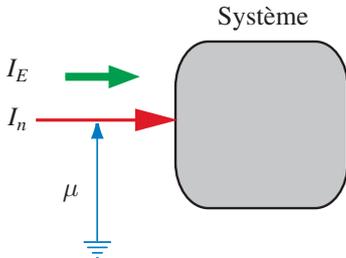


FIGURE 6.22 Lorsqu'une substance entre dans un système ou en sort, il y a un transfert d'énergie associé.

d'autres substances qui pourraient être impliquées dans une réaction complète. Lors de la disparition d'une substance, que l'on peut considérer comme détruite, son énergie est libérée. Pour la création d'une certaine quantité de matière, nous avons besoin d'une quantité bien définie d'énergie. C'est la raison pour laquelle, dans l'équation (6.51), c'est le potentiel chimique, et pas sa différence, qui est utilisé. Ce cas nous est familier en thermodynamique (section 5.4.3). Lors de la production d'une unité d'entropie, une quantité bien définie d'énergie est nécessaire. Cela est assuré par le fait que la température, le potentiel thermique, est absolue, qu'elle a un point zéro. Il doit en aller de même pour le potentiel chimique; dans l'équation (6.51), μ est la valeur absolue du potentiel chimique de la substance consommée ou créée.

Pour compléter l'image du rôle de l'énergie dans les processus chimiques, rappelons que les substances peuvent être transportées. Lorsqu'elles entrent dans un système ou le quittent à une certaine valeur du potentiel chimique, elles entraînent un courant d'énergie associé au transport (fig. 6.22):

$$I_{E, \text{chim}} = \mu I_n \quad (6.52)$$

Les relations que nous venons d'introduire peuvent servir à la détermination des valeurs du potentiel chimique. Si nous pouvons mesurer la puissance d'un processus chimique et le taux de conversion de la quantité de matière impliquée, nous pouvons déterminer le potentiel chimique.

6.6.2 Énergie et force d'entraînement des réactions chimiques

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la différence de potentiel chimique, c'est-à-dire la force d'entraînement, d'une réaction complète. Considérons une réaction impliquant plusieurs réactants A_i et plusieurs produits B_j telle qu'elle est exprimée dans l'équation (6.21).

La puissance totale de la réaction chimique, déterminée dans l'exemple 6.9, est égale à:

$$\mathcal{P}_{\text{réaction}} = \frac{1}{V_i} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \Pi_{n,i} \quad (6.53)$$

où le terme entre crochets, la variation de potentiel chimique, est évalué par:

$$[\Delta\mu]_{\text{réaction}} = v_1\mu_{B1} + v_2\mu_{B2} + \dots - (v_1\mu_{A1} + v_2\mu_{A2} + \dots) \quad (6.54)$$

Ainsi, la force d'entraînement de la réaction décrite par l'équation (6.21) sera donc:

$$\mathcal{A}_{\text{réaction}} = -[\Delta\mu]_{\text{réaction}} \quad (6.55)$$

Si $[\Delta\mu]_{\text{réaction}} < 0$, la réaction se déroule de la gauche vers la droite, c'est-à-dire qu'elle favorise la production des substances désignées par B, alors que si $[\Delta\mu]_{\text{réaction}} > 0$, elle se déroule en sens inverse, favorisant la production des substances désignées par A.

EXEMPLE 6.9. Détermination de la puissance d'une réaction chimique.

Déterminez la puissance d'une réaction chimique décrite par l'équation (6.21).

SOLUTION: Nous généralisons l'équation (6.51) en prenant en compte toutes les substances participant à la réaction:

$$\mathcal{P}_{\text{réaction}} = -\sum_i \mu_i \Pi_{n,i}$$

Nous amplifions le membre de droite par le facteur v_i pour pouvoir utiliser la relation entre les taux de production et de destruction exprimée par l'équation (6.22):

$$\mathcal{P}_{\text{réaction}} = -\sum_i \frac{v_i}{v_i} \mu_i \Pi_{n,i} = -\sum_i v_i \mu_i \frac{\Pi_{n,i}}{v_i} = -\frac{1}{v_i} \Pi_{n,i} \sum_i v_i \mu_i$$

La somme apparaissant dans le dernier membre est égale à l'opposé de la variation du potentiel chimique, équation (6.54), ce qui nous permet de conclure:

$$\mathcal{P}_{\text{réaction}} = \frac{1}{v_i} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \Pi_{n,i}$$

relation valable pour n'importe quel indice i , en vertu de l'équation (6.22). ■

6.6.3 Production d'entropie lors de processus chimiques

L'énergie libérée lors de processus chimiques est souvent complètement dissipée. Des exemples typiques sont la combustion de carburants; le tableau 6.5 donne les quantités d'énergie échangées avec l'entropie, appelées *pouvoir énergétique* ou *chaleur de combustion*. Le tableau donne les valeurs du pouvoir énergétique supérieur, c'est-à-dire la quantité d'énergie dégagée par la combustion complète d'une unité de combustible, la vapeur d'eau étant supposée condensée et l'énergie récupérée.

TABLEAU 6.5 Pouvoir énergétique supérieur de quelques carburants.

Carburant	Formule	Pouvoir énergétique / kJ kg ⁻¹
Charbon	C	32 800
Hydrogène	H ₂	141 800
Méthane	CH ₄	55 530
Éthanol	C ₂ H ₆ O	29 670
Propane	C ₃ H ₈	50 330
Essence	C _n H _{1.87n}	47 300
Gaz naturel	C _n H _{3.8n} N _{0.1n}	50 000

L'entropie est produite à un taux qui dépend de la puissance du processus chimique et de la température à laquelle la production d'entropie a lieu (fig. 6.23). Dans le cas d'une réaction chimique, cela donne:

$$\Pi_S = \frac{\mathcal{P}_{\text{réaction}}}{T} = \frac{1}{T} \frac{1}{v_i} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \Pi_{n,i} \quad (6.56)$$

Bilan d'entropie: réactions exothermiques et endothermiques. Qu'advient-il de l'entropie produite lors de la réaction? Pour le savoir, il faut calculer, au moyen des tables du coefficient de température du potentiel chimique, les entropies des réactants

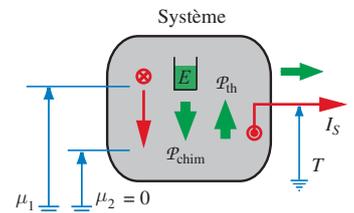


FIGURE 6.23 De l'entropie est produite lors de processus chimiques dissipatifs. Le diagramme n'indique pas ce qu'il advient de l'entropie produite.

**Réactions exothermiques
(Émission d'entropie)**

a. $\Delta S < 0 \Rightarrow$

$$S_{\text{éch}} = \Delta S - S_{\text{prod}} < 0$$

b. $\Delta S > 0, S_{\text{prod}} > \Delta S \Rightarrow$

$$S_{\text{éch}} = \Delta S - S_{\text{prod}} < 0$$

**Réactions endothermiques
(Absorption d'entropie)**

$$\Delta S > 0, S_{\text{prod}} < \Delta S \Rightarrow$$

$$S_{\text{éch}} = \Delta S - S_{\text{prod}} > 0$$

FIGURE 6.24 Le caractère exothermique ou endothermique d'une réaction dépend de la variation de l'entropie des systèmes et de l'entropie produite. Les cas envisagés incluent également la possibilité de réactions non dissipatives ($S_{\text{prod}}=0$)

et des produits, ce qui permet de calculer la variation de l'entropie du système par rapport à la situation de départ, c'est-à-dire des conditions standard de température et de pression. Il faut également tenir compte de l'entropie accumulée dans le système dans lequel a lieu la réaction.

Il y a trois issues possibles (fig. 6.24):

- La variation ΔS de l'entropie des réactifs est *négative*, le système émet de l'entropie à laquelle vient s'ajouter l'entropie produite par la réaction. La réaction est *exothermique*.
- La variation de l'entropie du système est *positive*, il faut amener de l'entropie qui sera stockée par les produits. Si l'entropie produite par la réaction est supérieure à celle qui est nécessaire pour le stockage, la réaction est *exothermique*.
- La variation de l'entropie du système est *positive*, il faut amener de l'entropie. Si l'entropie produite par la réaction ne suffit pas pour couvrir le déficit, l'entropie manquante doit être puisée dans l'environnement, la réaction est dite *endothermique*.

Notons que l'environnement peut être un liquide dans lequel des substances dissoutes réagissent entre elles. Dans ce cas, l'effet de réactions exothermiques ou endothermiques est une augmentation ou une diminution respective de la température du solvant.

EXEMPLE 6.10. Bilan d'entropie lors de la dissolution du sel de table.

On dissout une mole de sel de table dans l'eau. (a) Quelle est la variation de l'entropie? (b) Déterminez l'entropie produite lors de la réaction? Le processus est-il exothermique ou endothermique?

SOLUTION: (a) Comme il s'agit d'une mole, il suffit de calculer la variation des entropies molaires. Or, en vertu de l'équation (6.28), les entropies molaires sont, au signe près, égales aux coefficients de température du potentiel chimique que nous trouvons dans le tableau 6.3:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{s} &= \bar{s}_{\text{Na}^+} + \bar{s}_{\text{Cl}^-} - \bar{s}_{\text{NaCl}} \\ &= 58.99 \text{ Ct mol}^{-1} + 56.48 \text{ Ct mol}^{-1} - 72.13 \text{ Ct mol}^{-1} = 43.34 \text{ Ct mol}^{-1} \end{aligned}$$

(b) La quantité d'entropie produite correspond à l'énergie dissipée divisée par la température à laquelle a lieu la réaction, comme l'indique l'équation (6.56):

$$\begin{aligned} \bar{s}_{\text{prod}} &= -\frac{1}{T} [\Delta \mu]_{\text{réaction}} = -\frac{1}{T} (\mu_{\text{Na}^+} + \mu_{\text{Cl}^-} - \mu_{\text{NaCl}}) \\ &= -\frac{1}{298.15 \text{ K}} (-261.89 \cdot 10^3 \text{ G} - 131.26 \cdot 10^3 \text{ G} + 384.03 \cdot 10^3 \text{ G}) = 30.60 \text{ Ct mol}^{-1} \end{aligned}$$

La quantité d'entropie produite est inférieure à la variation d'entropie due à la dissolution. Le processus est endothermique; l'entropie manquante est puisée dans l'eau dont la température diminue. ■

EXEMPLE 6.11. Entropie et énergie échangées lors de la formation de l'eau.

Considérez la formation de l'eau à partir d'hydrogène et d'oxygène. (a) Combien d'entropie est produite lors de la formation d'une mole d'eau? (b) Déterminez la variation d'entropie engendrée par la réaction. (c) Déterminez l'entropie échangée avec l'environnement; la réaction est-

elle exothermique ou endothermique? (d) Évaluez l'énergie échangée avec l'environnement et utilisez le résultat pour déterminer le pouvoir énergétique de l'hydrogène gazeux. Admettez que la réaction se déroule aux conditions standard.

SOLUTION: (a) L'entropie produite par la réaction est donnée par l'équation (6.56):

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\text{prod}} &= -\frac{1}{T} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} = -\frac{1}{T} (\mu_{\text{H}_2\text{O}} - \mu_{\text{H}_2} - 0.5\mu_{\text{O}_2}) \\ &= -\frac{1}{298.15 \text{ K}} (-237.18 \cdot 10^3 \text{ G} - 1 \cdot 0 \text{ G} - 0.5 \cdot 0 \text{ G}) = 795.50 \text{ Ct mol}^{-1}\end{aligned}$$

(b) La variation de l'entropie des substances entrant dans la réaction est égale à:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{s} &= \bar{s}_{\text{H}_2\text{O}} - \bar{s}_{\text{H}_2} - 0.5\bar{s}_{\text{O}_2} \\ &= 69.91 \text{ Ct mol}^{-1} - 131.0 \text{ Ct mol}^{-1} - 102.50 \text{ Ct mol}^{-1} = -163.59 \text{ Ct mol}^{-1}\end{aligned}$$

(c) Lors de la formation d'une mole d'eau, l'entropie échangée avec l'environnement est:

$$\bar{s}_{\text{éch}} = \Delta\bar{s} - \bar{s}_{\text{prod}} = -795.50 \text{ Ct mol}^{-1} - 163.59 \text{ Ct mol}^{-1} = -959.09 \text{ Ct mol}^{-1}$$

La réaction est exothermique, il y a émission d'entropie vers l'environnement.

Le produit de l'entropie échangée et de la température est égal à l'énergie échangée:

$$\bar{e}_{\text{éch}} = T \cdot \bar{s}_{\text{éch}} = 298.15 \text{ K} \cdot (-959.09 \text{ Ct mol}^{-1}) = -285.95 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}$$

(d) En divisant le dernier résultat par la masse molaire de l'hydrogène, nous obtenons l'énergie libérée par la réaction d'un kilogramme d'hydrogène:

$$E_{\text{éch}} = \frac{\bar{e}_{\text{éch}}}{M_{\text{H}_2}} = \frac{-285.95 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = -142.98 \text{ MJ mol}^{-1}$$

Cette valeur correspond au pouvoir énergétique supérieur qui apparaît dans le tableau 6.5. ■

6.6.4 Potentiels combinés

Les substances peuvent participer à des réactions chimiques, mais elles peuvent également être soumises à des processus gravitationnels et électriques, vu qu'elles ont une masse et peuvent être électriquement chargées. Lors de processus d'écoulement, les substances peuvent de ce fait être soumises simultanément à plusieurs forces d'entraînement. Pour pouvoir décrire de façon pratique des écoulements dans des champs gravitationnels ou électriques, les potentiels gravitationnels et électriques sont combinés avec le potentiel chimique de l'espèce. Ainsi, plusieurs processus pourront être considérés comme étant la conséquence de forces d'entraînement électrochimiques ou gravitochimiques.

Dans cette section, nous allons déterminer le potentiel gravitochimique et nous ferons de même à la section 6.9 pour le potentiel électrochimique.

Potentiel gravitochimique. Lorsque des substances s'écoulent dans le champ gravitationnel, elles sont soumises simultanément à deux processus, chimique et gravitationnel. Le phénomène devra donc être décrit au moyen d'un potentiel combiné, dit *potentiel gravitochimique*.

Pour pouvoir l'exprimer, nous considérons une substance qui s'écoule verticalement entre deux régions, entraînée par une différence de potentiel chimique. Le flux d'énergie associé à cet écoulement est la somme du flux d'énergie chimique et du flux d'énergie gravitationnelle :

$$I_E = \mu I_n + \varphi_{\text{grav}} I_m = \mu I_n + M \varphi_{\text{grav}} I_n = (\mu + M \varphi_{\text{grav}}) I_n \quad (6.57)$$

Les termes de la parenthèse :

$$\mu_{\text{GC}} = \mu + M \varphi_{\text{grav}} \quad (6.58)$$

représentent le potentiel gravitochimique. μ est le potentiel chimique standard, M la masse molaire et φ_{grav} le potentiel gravitationnel (qui est égal à gh à la surface de la Terre).

EXEMPLE 6.12. Potentiel chimique des fluides incompressibles.

Comme la pression des fluides incompressibles ne dépend pas de la température, leur potentiel chimique sera une fonction de la pression uniquement. Déterminez leur potentiel chimique en considérant un volume de fluide placé dans le champ de pesanteur de la Terre.

SOLUTION : Dans le champ de pesanteur, la pression d'un fluide incompressible de masse volumique ρ varie de manière linéaire :

$$P - P_0 = -\rho g (h - h_0)$$

L'indice 0 indique un point de référence dans le fluide. Comme le fluide est immobile, nous devons conclure que le potentiel gravitochimique μ_{GC} ne varie pas dans la direction verticale :

$$\mu + Mgh = \mu_0 + Mgh_0$$

En combinant les deux équations, nous obtenons la relation entre le potentiel gravitationnel et la pression :

$$\mu = \mu_0 + \bar{v} (P - P_0)$$

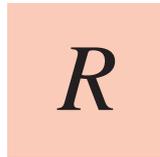
où \bar{v} est le volume molaire du fluide incompressible. Cette relation justifie notre affirmation de la section 6.4.3. ■

1. Lorsque l'on dissout de l'acide citrique dans l'eau, la température de la solution diminue de manière notable. Que cela implique-t-il au sujet de la relation entre la variation de l'entropie de la substance et de l'entropie produite?
2. Une mole de la substance A et deux moles de B sont converties en une mole de C. Comment peut-on utiliser l'équation (6.51) pour justifier le fait que les potentiels chimiques des substances doivent être affectés des coefficients stœchiométriques, puis additionnés, pour obtenir la force d'entraînement de la réaction?



3. Les réactifs sont introduits dans une pile à combustible et les produits en émergent. Comment l'expression des flux d'énergie liés à ces transports de substances peut-elle être utilisée pour justifier l'expression de la puissance d'une réaction chimique?
4. Quelle est la signification des termes exothermique et endothermique?
5. Combien d'entropie est produite lors de la production d'un kilogramme d'eau par combustion d'hydrogène et d'oxygène? Admettez que la réaction se déroule aux conditions standard.
6. La combustion du méthane avec l'oxygène produit du dioxyde de carbone et de l'eau. En admettant des conditions standard: (a) formulez l'équation de réaction; (b) déterminez la quantité d'entropie produite par mole de méthane; (c) déterminez la variation de l'entropie par mole de méthane; (d) déterminez la quantité d'entropie émise ou absorbée par l'environnement par mole de méthane; (e) déterminez la quantité d'énergie transférée avec l'entropie échangée; (f) déterminez à combien d'énergie par kilogramme de méthane cela correspond et comparez ce résultat avec la valeur du tableau 6.5.

1. La réaction est endothermique, ce qui signifie que la substance a absorbé de l'entropie, mais que l'entropie produite lors de la réaction était insuffisante pour fournir l'entropie absorbée. Cette situation est semblable à celle de l'exemple 6.10.
2. Les substances A et B sont détruites et libèrent de l'énergie proportionnellement à leurs quantités; cette énergie est utilisée pour la création de C, également de manière proportionnelle à sa quantité.
3. La puissance d'un processus est égale à la différence de tous les flux d'énergie entrants et de tous les flux d'énergie émergents.
4. Lors d'un processus exothermique, il y a émission d'entropie; lors d'un processus endothermique, il y a absorption d'entropie.
5. En appliquant l'équation (6.56) comme dans l'exemple 6.10, on obtient une production de 44 222 Ct.
6. (a) $\text{CH}_4 + 2 \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$; (b) 2743.14 Ct mol⁻¹; (c) -242.64 Ct mol⁻¹; (d) -2985.79 Ct mol⁻¹; (e) -890.2 kJ mol⁻¹, émis vers l'environnement; (f) -55.5 MJ mol⁻¹, correspond à la valeur du tableau 6.5.



6.7 TRANSPORT DE SUBSTANCES: DIFFUSION ET OSMOSE

Dans cette section, nous allons formuler quelques modèles simples pour appliquer et mettre à l'épreuve les relations mathématiques que nous avons développées dans ce chapitre. Nous nous limiterons à des phénomènes de transport, à l'exclusion de réactions chimiques.

Rappelons que les substances peuvent s'écouler ou être transportées de deux manières différentes: elles peuvent migrer *à travers* les matériaux, ce que l'on appelle *diffusion*, ou elles peuvent être transportés *avec* d'autres matériaux, ce que l'on appelle *convection*. Aussi bien la diffusion que le transport d'une «substance porteuse» dans la convection sont entraînés par des différences de potentiel chimique.

6.7.1 Bilans et modèles dynamiques

Vu que nous excluons les réactions chimiques, l'équation de bilan pour une espèce unique est:

$$\dot{n} = I_{n, \text{cond}} + I_{n, \text{conv}} \quad (6.59)$$

On obtient les modèles dynamiques en introduisant les flux d'une espèce dans son équation de bilan.

6.7.2 Diffusion

Diffusion dans un milieu uniforme. Imaginons des particules de concentration \bar{c} dans un milieu uniforme (par exemple un gel ou un solvant liquide). La force chimique pousse ou tire les particules qui, vu qu'elles se déplacent dans un milieu résistif, atteignent rapidement une certaine vitesse de drift. Le flux de quantité de matière dû à la diffusion est égal au produit de la section A , de la concentration \bar{c} et de la vitesse de drift v_d (fig. 6.25):

$$I_n = A\bar{c}v_d \quad (6.60)$$

Nous modélisons la vitesse de drift comme résultant de l'action d'une force chimique $\Delta\mu = \mu(x_2) - \mu(x_1)$, équilibrée par une force due à la viscosité. L'application du bilan d'énergie nous indique que $n\Delta\mu = nF_d\Delta x$, ce qui implique que la force sur une particule et par conséquent la vitesse de drift doivent être proportionnelles à la force par unité de longueur: $v_d = k_D\Delta\mu/\Delta x$, où k_D est le facteur de diffusion. Ainsi:

$$I_n = -k_D A\bar{c} \frac{\Delta\mu}{\Delta x} \quad (6.61)$$

$\Delta\mu/\Delta x$ est le *gradient du potentiel chimique*. Le signe négatif indique que le flux est positif dans la direction de décroissance du potentiel chimique de la substance qui migre. En général, le gradient diminue d'un endroit à l'autre (fig. 6.25). Dans le cas unidimensionnel, il correspond à la pente de la courbe et peut être écrit en tant que dérivée par rapport à la position:

$$I_n = -k_D A\bar{c} \frac{d\mu}{dx} \quad (6.62)$$

On peut admettre que le potentiel chimique de la substance qui migre est gouverné par la relation logarithmique (6.47). Sa substitution dans l'équation (6.62) donne:

$$I_n = -k_D A\bar{c} \frac{d}{dx} \left(\mu(T, \bar{c}^0) + RT \ln \left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}^0} \right) \right) = -k_D ART \frac{d\bar{c}}{dx}$$

Si nous divisons le courant par la section A à travers laquelle il s'écoule, nous obtenons la *densité de courant* de quantité de matière. La relation qui en découle est la forme usuelle de la loi de diffusion de Fick:

$$j_n = -D \frac{d\bar{c}}{dx} \quad (6.63)$$

$D = k_D RT$ est le *coefficient de diffusion*, alors que le terme $d\bar{c}/dx$ est le *gradient de concentration*. L'équation (6.63) est analogue à la loi d'OHM énoncée au moyen de l'équation (2.22).

Nous avons déjà eu l'occasion de modéliser ce phénomène de diffusion dans les systèmes dynamiques spatialement uniformes, à savoir lorsque nous avons traité la chaîne

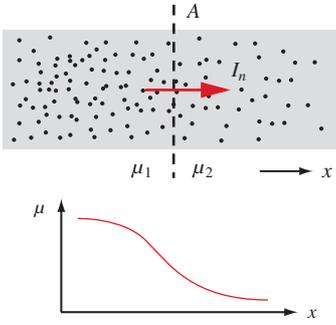


FIGURE 6.25 Les substances diffusent des endroits où le potentiel chimique est élevé (dû à une concentration élevée) vers les endroits où le potentiel est plus bas.

de réservoirs à la section 1.8.6, la chaîne de condensateurs à la section 2.8.4 et la migration de l'entropie vers le centre d'un cylindre de cuivre plongé dans l'eau chaude à la section 5.7.2. Les flux entre deux éléments capacitifs successifs sont déterminés par les différences de potentiel entre ces deux éléments. C'est exactement ce qui se passe lors du processus de diffusion : les éléments du substrat à travers lequel migrent les substances dissoutes servent d'éléments de stockage. La quantité de substance contenue dans un tel élément détermine le potentiel chimique dont la différence est responsable du flux entre les éléments. Cette manière d'envisager le processus définit la structure de modèles dynamiques simples consistant à découper le système en parties couplées entre elles (fig. 6.26).

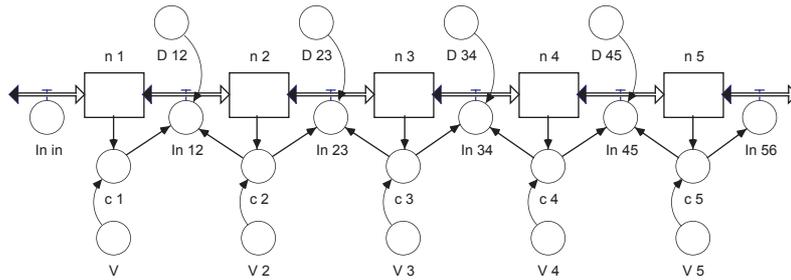


FIGURE 6.26 Diagramme du modèle dynamique de la diffusion dans une seule direction spatiale. Le système a été divisé en plusieurs éléments, chacun étant traité comme uniforme.

Influence de la concentration. Pourquoi, comme l'indique la relation (6.62), le transport de substances doit-il être proportionnel à la concentration de la substance qui migre ? Ne suffit-il pas que le potentiel chimique dépende de la concentration ? En fait, la force d'entraînement, la tension chimique, c'est-à-dire les différences des potentiels, dépendent du (logarithme du) rapport des concentrations en deux points 1 et 2 situés sur le chemin des substances qui migrent :

$$[\Delta\mu]_{1\rightarrow 2} = \left(\mu^0 + RT \ln \left(\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}^0} \right) \right) - \left(\mu^0 + RT \ln \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}^0} \right) \right) = RT \ln \left(\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \right)$$

Peu importe que $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1$, ou que $\mu_1 = 0.002$ et $\mu_2 = 0.001$, la force d'entraînement est la même, mais le courant de diffusion de la substance sera 1000 plus fort dans le premier cas, ce qui nous oblige à le rendre dépendant de la concentration des espèces dissoutes.

6.7.3 Migration d'espèces entre deux environnements différents

Les substances peuvent s'écouler d'un environnement à un autre tant qu'il existe une différence de leurs potentiels chimiques dans les milieux considérés. En analogie avec ce qui précède, admettons que le flux de substance entre les environnements I et II (fig. 6.27) est donné par :

$$I_{n, I \rightarrow II} = -k' A \bar{c}_I [\Delta\mu]_{I \rightarrow II} \tag{6.64}$$

Si la substance est dissoute, son potentiel chimique est une fonction logarithmique du quotient de sa concentration et d'une concentration de référence qui sera différente d'un milieu à l'autre (équation (6.47)). Les concentrations qui s'établissent lorsque l'équilibre est atteint s'imposent comme valeurs de référence pour le calcul des potentiels :

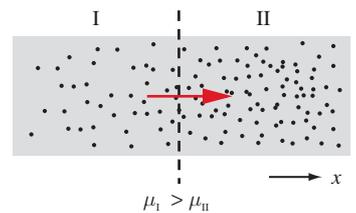


FIGURE 6.27 Le transport par diffusion d'une substance d'un environnement dans un environnement différent (par exemple de l'eau à l'air) est dû à une différence de potentiel chimique. La substance peut diffuser d'un environnement où la concentration est basse vers un autre où elle est élevée.

$$[\Delta\mu]_{I \rightarrow II} = \mu_{II}^{\text{éq}} - \mu_I^{\text{éq}} + RT \ln\left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}}\right) - RT \ln\left(\frac{\bar{c}_I}{\bar{c}_I^{\text{éq}}}\right)$$

Comme les valeurs du potentiel dans les milieux I et II sont les mêmes à l'équilibre, la force d'entraînement de la diffusion se réduit à :

$$[\Delta\mu]_{I \rightarrow II} = RT \ln\left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}} \frac{\bar{c}_I^{\text{éq}}}{\bar{c}_I}\right) \quad (6.65)$$

ce qui nous permet de calculer le courant de substance par substitution dans la relation (6.64) :

$$I_{n, I \rightarrow II} = -k' A \bar{c}_I RT \ln\left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}} \frac{\bar{c}_I^{\text{éq}}}{\bar{c}_I}\right) \quad (6.66)$$

Conditions proches de l'équilibre. À l'équilibre, la différence des potentiels chimiques (6.65) s'annule. Pour de faibles déviations de l'équilibre, $\ln(x)$ peut être remplacé par $x - 1$. Ainsi :

$$I_{n, I \rightarrow II} \approx -k' A RT \bar{c}_I \left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}} \frac{\bar{c}_I^{\text{éq}}}{\bar{c}_I} - 1\right) = -k' A RT \left(\frac{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}}{\bar{c}_I^{\text{éq}}} \bar{c}_{II} - \bar{c}_I\right)$$

Si nous introduisons le rapport des concentrations à l'équilibre dans les milieux I et II respectivement, la *constante d'équilibre* \mathcal{K} :

$$\mathcal{K} = \frac{\bar{c}_{II}^{\text{éq}}}{\bar{c}_I^{\text{éq}}} \quad (6.67)$$

et la substituons dans cette dernière relation :

$$I_{n, I \rightarrow II} = -k' A RT \left(\frac{1}{\mathcal{K}} \bar{c}_{II} - \bar{c}_I\right) = -\frac{k' A RT}{\mathcal{K}} (\bar{c}_{II} - \mathcal{K} \bar{c}_I)$$

nous obtenons finalement :

$$I_{n, I \rightarrow II} = -G_{n, c, I \rightarrow II} (\bar{c}_{II} - \mathcal{K} \bar{c}_I) \quad (6.68)$$

où le coefficient $G_{n, c, I \rightarrow II} = k' RT A \mathcal{K}^{-1}$ peut être interprété comme une sorte de conductance. On constate que la force d'entraînement du processus n'est plus simplement due à la différence des concentrations mais à la différence de concentrations pondérées.

Cette relation est valable lorsque le rapport des concentrations à l'équilibre est constant, comme c'est le cas pour le toluène dans l'eau et dans l'air (fig. 6.8b). En revanche, si ce rapport n'est pas constant, ce que montre la figure 6.28 pour le cas de l'eau et du sol, la relation entre parenthèses doit être modifiée. Elle prend alors la forme $(\bar{c}_{\text{eau}} - \mathcal{K} \bar{c}_{\text{sol}}^\alpha)$, où α est un paramètre ajustable.

Ces deux contributions doivent être prises en compte dans le modèle de diffusion du toluène de l'eau (milieu I) vers l'air et le sol (milieu II), vu qu'elles ont pratiquement la même intensité. Le modèle et le résultat de la simulation sont présentés dans la figure 6.29. Seules les concentrations du toluène dans l'eau et dans l'air ont été

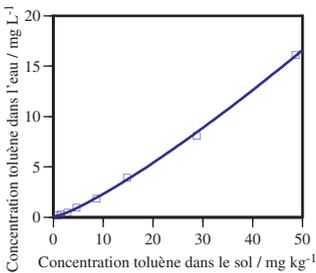


FIGURE 6.28 Rapport des concentrations d'équilibre du toluène dans l'eau et dans le sol. Il est clairement non linéaire. Les unités de mesure des concentrations ne sont pas les mêmes pour les deux substances.

représentées dans le graphique, vu que celle du toluène dans le sol est, à l'équilibre, environ dix fois plus importante que les deux autres.

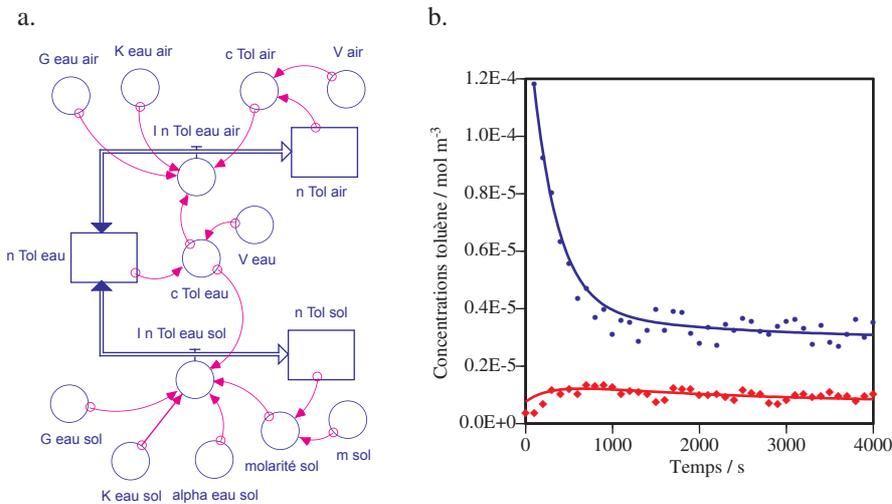


FIGURE 6.29 Diffusion du toluène de l'eau vers l'air et le sol : (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) confrontation des résultats de la simulation et des données expérimentales. Les résultats sont présentés uniquement pour l'eau et l'air, la concentration à l'équilibre du toluène dans le sol étant environ 10 fois plus importante que dans l'eau et dans l'air.

6.7.4 Osmose : perméabilité des globules rouges

Des globules rouges sont placés dans un bain isotonique dont le soluté a une concentration de 300 mol m^{-3} . On ajoute rapidement du soluté afin de doubler sa concentration. Cette substance peut traverser la membrane cellulaire. Les globules rouges, dont le volume individuel initial est de $87 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3$, rétrécissent en l'espace de 0.25 s, d'environ 10% de leur volume, puis retournent plus lentement vers leur volume originel (fig. 6.30).

Le soluté augmente la concentration des substances dissoutes dans le bain relativement à l'intérieur des cellules. Deux processus se succèdent: le soluté migre dans la cellule (diffusion) et de l'eau s'écoule de la cellule vers le bain (osmose). Vu que seule la quantité d'eau dans la cellule détermine son volume, celui-ci diminue.

À un certain point, le flux d'eau vers l'extérieur de la cellule s'interrompt parce que les potentiels chimiques à l'intérieur et à l'extérieur sont égaux. Cependant, le soluté continue à diffuser vers l'intérieur des cellules, vu qu'il n'est sensible qu'au gradient de sa propre espèce. Comme la concentration du soluté augmente dans les cellules, le flux d'eau change de sens, ce qui entraîne leur croissance.

Lors de la modélisation du processus, nous devons considérer les deux substances qui peuvent pénétrer à l'intérieur des globules rouges ou en sortir: l'eau et le soluté. Les équations de bilan respectives de l'eau et du soluté à l'intérieur d'une cellule sont:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{eau}} = I_{V, \text{eau}} &\Leftrightarrow \dot{n}_{\text{eau}} = I_{n, \text{eau}} \\ \dot{n}_s = I_{n, s} & \end{aligned} \quad (6.69)$$

Le transport de l'eau est un processus d'osmose alors que celui de la substance dissoute est une diffusion.

Le flux d'eau entrant ou émergeant d'un globule rouge est dû à la différence de potentiel chimique de l'eau à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule:

$$I_{n, \text{eau}} = -k_{n, \text{eau}} A (\mu_{\text{eau, int}} - \mu_{\text{eau, ext}})$$

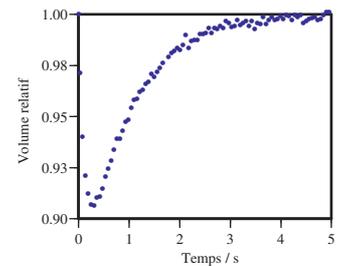


FIGURE 6.30 Lors de l'introduction d'un soluté dans une solution isotonique, les globules rouges qui s'y trouvent commencent par rétrécir, pour revenir lentement à leur volume originel. Données de MACEY and OSTER (UC Berkeley).

où A représente l'aire de l'enveloppe des globules rouges, considérés comme des disques d'environ $7.5 \mu\text{m}$ de diamètre et $2 \mu\text{m}$ d'épaisseur, soit une aire de $140 \cdot 10^{-12} \text{m}^2$. Les indices «int» et «ext» se réfèrent respectivement à l'intérieur et à l'extérieur d'un globule rouge. Le produit $k_{n, \text{eau}} \cdot A$ peut être considéré comme une conductance chimique.

Les potentiels chimiques dépendent des concentrations du soluté dans chacun des deux milieux. Nous devons faire la différence entre la concentration du soluté dans le bain isotonique, que nous désignerons par \bar{c}_{isot} , et celle qui est due à l'adjonction du soluté, que nous désignerons par \bar{c}_s . À l'intérieur de la cellule, la variation de \bar{c}_{isot} est due à la variation du volume de la cellule (effet de l'osmose) et celle du soluté ajouté varie à cause de la diffusion à travers les parois. En nous basant sur les équations (6.45) et (6.48), nous pouvons écrire:

$$\mu_{\text{eau, int}} = (P_0 - RT(\bar{c}_{\text{isot, int}} + \bar{c}_{s, \text{int}}))\bar{v}_{\text{eau}}$$

À l'extérieur de la cellule, dans le bain, ces deux concentrations ne varient que très peu et peuvent être remplacées par leurs valeurs initiales:

$$\mu_{\text{eau, ext}} = (P_0 - RT(\bar{c}_{\text{isot, init}} + \bar{c}_{s, 0}))\bar{v}_{\text{eau}}$$

La diffusion du soluté à travers les parois des globules rouges est entraînée par les différences de concentration entre l'intérieur des cellules et le bain:

$$I_{n, s} = -k_{n, s} A(\bar{c}_{s, \text{int}} - \bar{c}_{s, 0})$$

À l'intérieur de la cellule, les différentes concentrations varient en fonction de son volume, que nous admettons égal au volume de l'eau qu'elle contient:

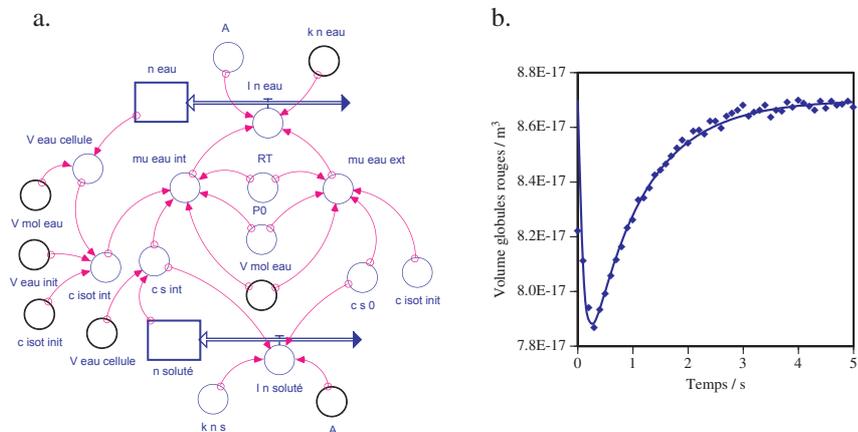
$$V_{\text{eau, cellule}} = \frac{M_{\text{eau}} n_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} = n_{\text{eau}} \bar{v}_{\text{eau}}$$

Les concentrations sont donc égales à:

$$\bar{c}_{\text{isot, int}} = \bar{c}_{\text{isot, init}} \frac{V_{\text{eau, init}}}{V_{\text{eau, cellule}}} \quad \text{et} \quad \bar{c}_{s, \text{int}} = \frac{n_s}{V_{\text{eau, cellule}}}$$

où $V_{\text{eau, init}}$ correspond au volume initial d'un globule rouge.

FIGURE 6.31 Perméabilité des globules rouges: (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) résultat de la simulation. Les deux processus, osmose et diffusion, sont liés entre eux par la concentration du soluté à la fois dans le bain et à l'intérieur de la cellule.



Le modèle est établi sur la base de ces relations et des valeurs initiales des concentrations respectives. L'ajustement aux données expérimentales se fait en variant les valeurs des deux paramètres, $k_{n,\text{eau}}$ et $k_{n,s}$.

1. Pourquoi, lors de la diffusion, l'intensité des flux des substances est-elle proportionnelle à la concentration des espèces?
2. Considérez une substance qui « préfère » être dans un environnement I plutôt que dans un environnement II. La constante d'équilibre est-elle supérieure ou inférieure à 1?
3. Qu'advient-il du flux de quantité de matière entre deux environnements différents en présence de la condition $c_{\text{II}} = \mathcal{K}c_{\text{I}}$?



1. Pour une force d'entraînement $\Delta\mu$ donnée, l'intensité du courant dépend de la quantité de substance à transporter.
2. Inférieure à 1, en vertu de l'équation (6.47).
3. Le flux net est nul.



6.8 RÉACTIONS CHIMIQUES

Si nous voulons décrire la dynamique des réactions chimiques, nous devons pouvoir exprimer dans les équations de bilan les *taux de production* des substances impliquées. Ces taux sont aussi appelés *vitesse de réaction*. Les facteurs les plus importants qui influencent ces taux sont les potentiels chimiques qui dépendent essentiellement des concentrations. Nous admettons que les autres facteurs qui influencent le déroulement d'une réaction, tels que la pression, la température, la mobilité des particules, etc., peuvent être considérés comme constants.

6.8.1 Bilans de quantité de matière lors d'une réaction

En général, les substances s'écoulent et réagissent entre elles. Si nous ne prenons pas en compte les flux, qui ont été traités à la section 6.7, nous pouvons nous limiter à ne considérer que les destructions (taux de production négatifs) et les créations de substances (taux de production positifs). Ainsi, l'équation de bilan pour une substance i se résume à :

$$\dot{n}_i = \Pi_{n_i, \text{production}} + \Pi_{n_i, \text{destruction}} \quad (6.70)$$

Cette équation de bilan devra être énoncée par chacune des espèces participant à la réaction.

6.8.2 Vitesse de réaction pour une réaction de type $A \rightarrow B$

Lors d'une simple réaction de type $A \rightleftharpoons B$ (telle que la transformation du glucose mentionnée à la section 6.2.5), nous devons connaître le taux de destruction Π_{n_A} du

réactif A. Vu que le doublement du volume, toutes autres choses étant égales par ailleurs, provoquera un doublement du taux de production, nous considérerons la densité de destruction π_{nA} que nous supposons proportionnelle à la différence des potentiels chimiques, à la concentration de A et à la constante de vitesse k' :

$$\pi_{nA} = k' \bar{c}_A [\Delta\mu]_{A \rightleftharpoons B} \quad (6.71)$$

Si nous admettons que les substances sont des gaz ou des solutions diluées, nous pouvons exprimer la différence des potentiels chimiques en tant que:

$$[\Delta\mu]_{A \rightleftharpoons B} = \mu_B^{\text{éq}} - \mu_A^{\text{éq}} + RT \ln \left(\frac{\bar{c}_B}{\bar{c}_B^{\text{éq}}} \right) - RT \ln \left(\frac{\bar{c}_A}{\bar{c}_A^{\text{éq}}} \right)$$

Comme lors de l'étude de processus de transport, nous avons choisi les valeurs d'équilibre de chaque espèce comme valeur de référence. À l'équilibre, μ_A et μ_B sont égaux, ce qui nous permet d'écrire:

$$[\Delta\mu]_{A \rightleftharpoons B} = RT \ln \left(\frac{\bar{c}_B}{\bar{c}_B^{\text{éq}}} \frac{\bar{c}_A^{\text{éq}}}{\bar{c}_A} \right) \quad (6.72)$$

Après substitution dans l'équation (6.71) et multiplication par le volume V , nous obtenons la vitesse de réaction:

$$\Pi_{nA} = V k' RT \bar{c}_A \ln \left(\frac{\bar{c}_B}{\bar{c}_B^{\text{éq}}} \frac{\bar{c}_A^{\text{éq}}}{\bar{c}_A} \right) \quad (6.73)$$

Ce taux de production est négatif si la réaction va de A vers B, comme nous nous y attendions.

Comme lors de l'étude des processus de transport, nous introduisons la constante d'équilibre:

$$\mathcal{K} = \frac{\bar{c}_B^{\text{éq}}}{\bar{c}_A^{\text{éq}}} \quad (6.74)$$

ce qui nous permet d'écrire:

$$\Pi_{nA} = V k' RT \bar{c}_A \ln \left(\frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\bar{c}_B}{\bar{c}_A} \right) \quad (6.75)$$

6.8.3 Mutarotation du glucose

Nous allons appliquer le résultat de la section précédente à la modélisation de la transformation d' α -glucose en β -glucose décrite à la section 6.2.5.

La modélisation au moyen de l'équation (6.75) donne un résultat qui s'approche des données expérimentales, mais doit être amélioré.

En procédant de la même manière qu'à la section 6.7.3 dans le cas de conditions proches de l'équilibre, nous remplaçons $\ln(x)$ par $x - 1$ et obtenons:

$$\Pi_{nA} = V k (\bar{c}_B - \mathcal{K} \bar{c}_A) \quad (6.76)$$

où $k = k'RT\mathcal{K}^{-1}$ est la constante de vitesse de la réaction.

Les équations de bilan respectives deviennent ainsi :

$$\begin{aligned}\dot{n}_{\text{alpha}} &= \Pi_{n, \text{alpha}} = Vk(\bar{c}_{\text{beta}} - \mathcal{K}\bar{c}_{\text{alpha}}) \\ \dot{n}_{\text{beta}} &= \Pi_{n, \text{beta}} = -Vk(\bar{c}_{\text{beta}} - \mathcal{K}\bar{c}_{\text{alpha}})\end{aligned}$$

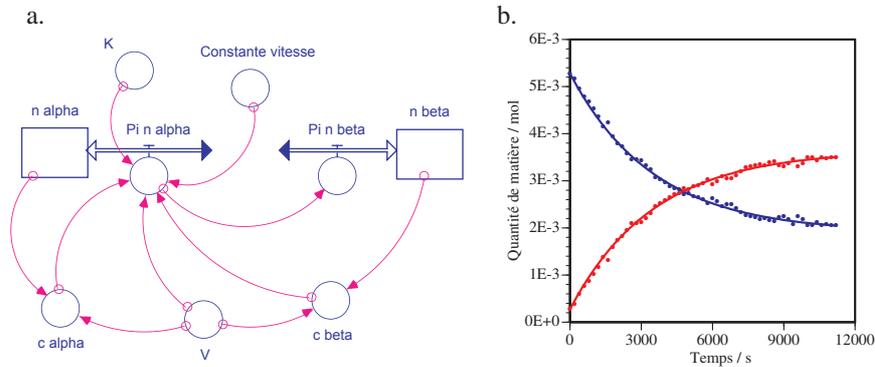


FIGURE 6.32 Mutarotation du glucose: (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) résultat de la simulation.

La constante d'équilibre \mathcal{K} peut être estimée à partir des données expérimentales. Toutefois, l'examen des graphiques révèle que l'équilibre n'est pas encore atteint lorsque les mesures ont été interrompues, ce qui implique que la valeur que l'on obtient est une première approximation qu'il faut affiner lors de la simulation. Nous obtenons la meilleure adéquation aux données expérimentales avec les valeurs $\mathcal{K} = 1.91$ et une constante de vitesse $k = 9.77 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

6.8.4 Désintégration radioactive

Les réactions nucléaires en général, et la désintégration radioactive en particulier, peuvent être considérées comme une sorte de réaction chimique. Alors que les réactions chimiques laissent inchangée la nature des éléments, les réactions nucléaires aboutissent usuellement à un changement des éléments impliqués, à une transmutation. Contrairement à la décomposition de la murexide, ce processus ne nécessite pas la présence d'une autre substance.

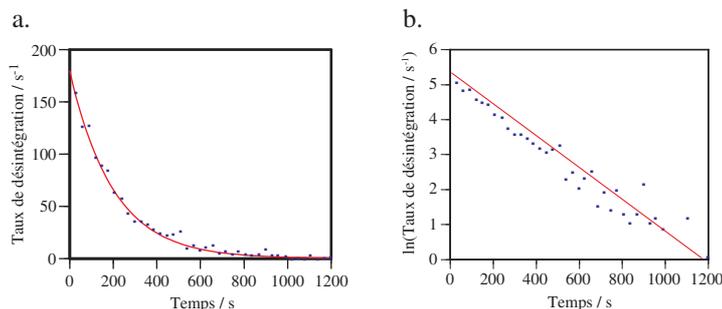
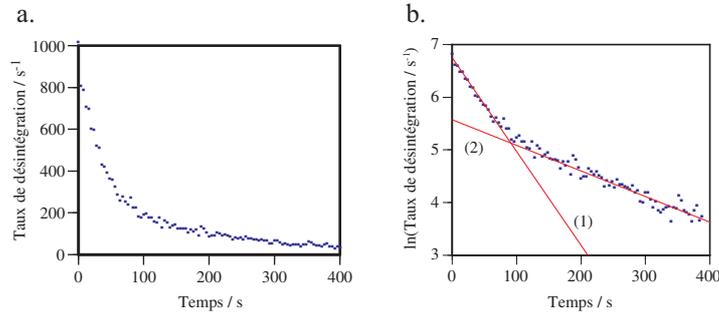


FIGURE 6.33 Évolution temporelle de la désintégration de l'isotope Ba-137 (données: E.B. Norman et al.). (a) Une courbe exponentielle a pu être ajustée aux données expérimentales, ce qui implique que le taux de désintégration est proportionnel à la quantité d'isotopes encore actifs. (b) La linéarité de la courbe logarithmique du taux de désintégration confirme le caractère exponentiel de ce processus.

Nous considérons tout d'abord la désintégration de l'isotope Ba-137 (fig. 6.33a). Une courbe de décroissance exponentielle a été ajustée aux données expérimentales. L'adéquation parfaite, confirmée par la linéarité de la courbe logarithmique du taux de désintégration (fig. 6.33b), nous indique que la désintégration d'un seul isotope est semblable à la vidange d'un réservoir d'huile ou à la décharge d'un condensateur, ce

qui implique que le taux de désintégration est proportionnel à la quantité de substance présente.

FIGURE 6.34 (a) Évolution temporelle de la désintégration des isotopes Ag-108 et Ag-110 (données: L. Wickham). Cette évolution résulte de la superposition de deux décroissances de type exponentiel. (b) La courbe logarithmique révèle la présence de deux portions linéaires, ce qui confirme la superposition de deux décroissances de type exponentiel.



Dans la figure 6.34, nous sommes confrontés à un exemple moins simple, vu que deux isotopes se désintègrent simultanément. Il s'agit des isotopes Ag-108 et Ag-110, qui ont été obtenus artificiellement par bombardement d'argent au moyen de neutrons lents.

En vertu de la similitude des comportements, nous supposons que les processus radioactifs peuvent être décrits de la même manière que les processus chimiques. Nous énonçons donc une équation de bilan pour chacune des deux substances :

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\text{Ag-108}} &= \Pi_{n, \text{Ag-108}} \\ \dot{n}_{\text{Ag-110}} &= \Pi_{n, \text{Ag-110}} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Nous basant sur l'équation (6.71) et sur ce que nous apprend la physique nucléaire, à savoir que la force d'entraînement pour la désintégration de A en B est virtuellement constante, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\text{Ag-108}} &= \Pi_{n, \text{Ag-108}} = -k'_{n, \text{Ag-108}} V \bar{c}_{\text{Ag-108}} \Delta \mu_{\text{Ag-108} \rightarrow \text{Cd-108}} = -k_{n, \text{Ag-108}} V \bar{c}_{\text{Ag-108}} \\ \dot{n}_{\text{Ag-110}} &= \Pi_{n, \text{Ag-110}} = -k'_{n, \text{Ag-110}} V \bar{c}_{\text{Ag-110}} \Delta \mu_{\text{Ag-110} \rightarrow \text{Cd-110}} = -k_{n, \text{Ag-110}} V \bar{c}_{\text{Ag-110}} \end{aligned} \quad (6.78)$$

Toutefois, dans ce contexte, les notions de quantité de matière, de concentration et de volume ne sont pas usuelles. Nous multiplions les deux membres des équations par le nombre d'AVOGADRO N_A :

$$\begin{aligned} N_A \dot{n}_{\text{Ag-108}} &= \dot{N}_{\text{Ag-108}} = -\lambda_{\text{Ag-108}} (N_A V \bar{c}_{\text{Ag-108}}) = -\lambda_{\text{Ag-108}} N_{\text{Ag-108}} \\ N_A \dot{n}_{\text{Ag-110}} &= \dot{N}_{\text{Ag-110}} = -\lambda_{\text{Ag-110}} (N_A V \bar{c}_{\text{Ag-110}}) = -\lambda_{\text{Ag-110}} N_{\text{Ag-110}} \end{aligned} \quad (6.79)$$

pour obtenir une relation qui montre que le taux de variation du nombre N de noyaux radioactifs de chacun des isotopes est proportionnel au nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon. Le paramètre λ qui a remplacé le coefficient de vitesse k_n est la *constante de désintégration*.

La figure 6.35 montre le modèle élaboré sur la base des réflexions et la confrontation du résultat de la simulation et des données expérimentales. La meilleure adéquation a été obtenue pour $\lambda_{\text{Ag-108}} = 4.75 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $\lambda_{\text{Ag-110}} = 27.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, ce qui correspond à des demi-vies respectives de 146 s et 25.2 s, alors que les valeurs de la littérature sont de 144 s et 24.6 s. Il est possible que le bruit de fond dû à la radioactivité naturelle n'ait pas été retranché des valeurs utilisées pour la simulation, ce qui pourrait expliquer que les valeurs obtenues sont supérieures à celles de la littérature.

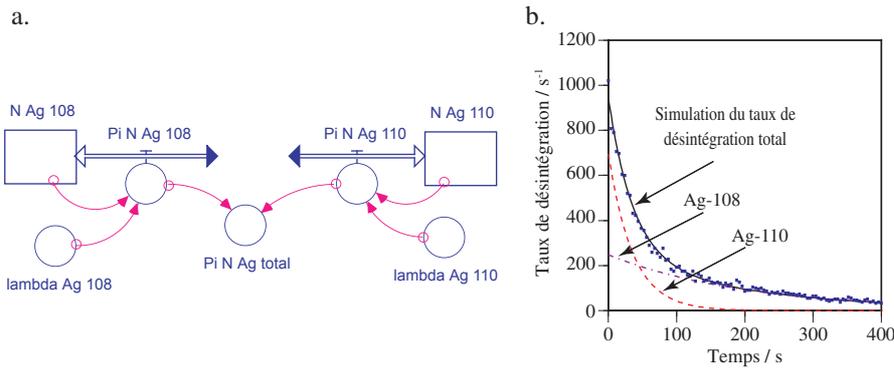


FIGURE 6.35 Désintégration simultanée de deux isotopes de l'argent: (a) modèle de dynamique des systèmes; (b) confrontation des résultats de la simulation et des données expérimentales et courbes simulées de la désintégration des deux isotopes.

1. En quoi le transport d'une substance vers un environnement chimiquement différent et la transformation d'une substance A en une substance B sont-ils des processus comparables?
2. Que peut-on conclure lorsque la valeur de la constante d'équilibre est faible? Grande? Égale à 1? Donnez un exemple de processus pour lequel $\mathcal{K} = 1$.
3. Pour la conversion d' α -glucose en β -glucose, la meilleure adéquation a été obtenue pour la valeur $\mathcal{K} = 1.91$. Que vaut la différence des potentiels chimiques?

Q

1. Pour les deux phénomènes, la différence des potentiels chimiques respectifs a la même forme, comme le montrent les équations et (6.76).
2. La concentration des produits (par rapport à celle des réactifs) est faible. La concentration des produits est grande. Les concentrations des réactifs et des produits sont comparables. Le transport d'une substance entre deux environnements identiques.
3. À partir de la relation $RT \ln(\mathcal{K}) = -[\Delta\mu]_{\text{réaction}}$, on trouve une différence des potentiels chimiques standard égale à -1605 G .

R

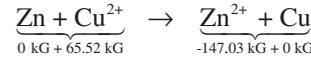
6.9 PROCESSUS ÉLECTROCHIMIQUES

Nous l'avons déjà observé, les substances ne sont pas seulement le siège de réactions chimiques, elles peuvent également être soumises à des processus gravitationnels et électriques, vu qu'elles ont une masse et peuvent être électriquement chargées. Ainsi, en présence d'un champ électrique, les processus qui se déroulent pourront être considérés comme étant la conséquence de forces d'entraînement électrochimiques décrites par un potentiel électrochimique.

6.9.1 Exemple d'appareil électrochimique

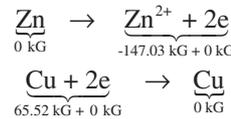
Nous commençons par l'observation qu'une tige de zinc est attaquée dans une solution de sulfate de cuivre et qu'il y a une déposition de cuivre métallique sur la tige de zinc. Le

caractère spontané de la réaction peut être expliqué par la différence de potentiel chimique :



et peut être interprété comme le transfert de deux électrons d'un atome de zinc vers un atome de cuivre. Le résultat de la réaction est la disparition progressive du zinc qui part en solution, la déposition du cuivre et la production d'entropie.

Si nous voulons tirer bénéfice du transfert d'électrons, c'est-à-dire si nous voulons transformer la cellule dans laquelle se déroule la réaction en une batterie, nous devons réussir à séparer les ions cuivriques de la tige de zinc et permettre aux électrons de passer par un conducteur externe (fig. 6.36). Cet objectif est réalisé au moyen d'une cellule comportant deux compartiments séparés par une barrière poreuse, qui est perméable aux ions mais empêche le mélange des solutions (CuSO₄ dans le compartiment de la cathode, ZnSO₄ dans celui de l'anode). Comme les ions cuivriques chargés positivement ne diffusent pas vers l'électrode de zinc positive, ils sont confinés dans le compartiment contenant l'électrode de cuivre. Nous avons maintenant deux réactions séparées qui se déroulent dans chacun des compartiments :



Le transfert des électrons d'un compartiment à l'autre s'effectue, comme souhaité, par l'intermédiaire d'un fil conducteur externe.

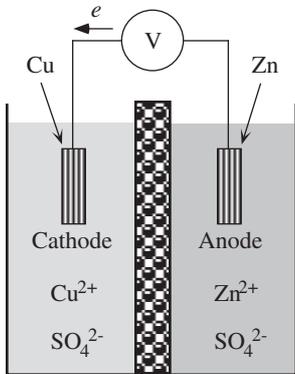


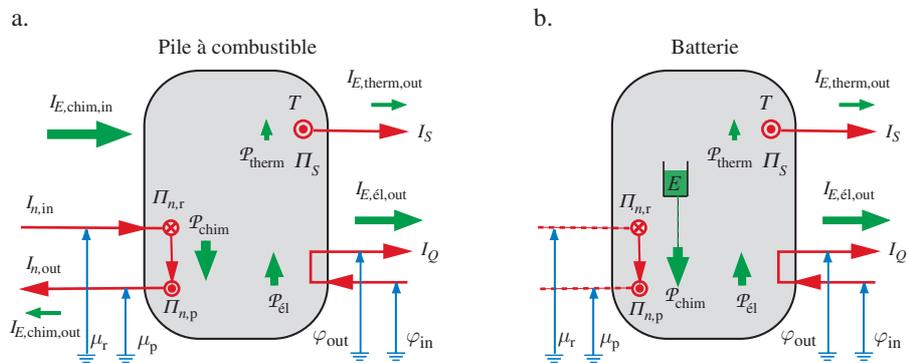
FIGURE 6.36 Cellule électrochimique consistant en deux compartiments au sein desquels se déroulent deux réactions, chacune impliquant un échange d'électrons. Les électrons migrent à travers un dispositif externe.

6.9.2 Pompes à électricité et pompes chimiques

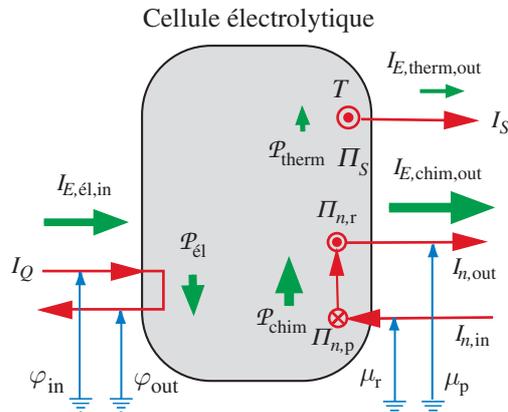
De manière semblable à d'autres phénomènes, les processus électrochimiques peuvent être divisés en deux catégories, une première dans laquelle des réactions chimiques entraînent l'écoulement de l'électricité et une seconde dans laquelle un courant électrique est utilisé pour entraîner une réaction qui ne se déroulerait pas spontanément dans ce sens.

Dans le premier cas, nous sommes en présence d'une «pompe à électricité» (fig. 6.37), alors que dans le second, il s'agit d'une «pompe chimique» (fig. 6.38). Dans une pompe à électricité, l'électricité s'écoule d'un niveau bas vers un niveau élevé du potentiel électrique, alors que dans une pompe chimique, ce sont les substances qui sont pompées vers une valeur plus élevée de leur potentiel.

FIGURE 6.37 Des réactions chimiques entraînent l'écoulement de la charge électrique dans des «pompes à électricité». L'énergie nécessaire pour le faire est libérée lors des réactions qui se déroulent (a) dans la pile à combustible ou (b) dans la batterie. Les diagrammes de processus représentent le cas irréversible, accompagné de production d'entropie. Les indices r et p représentent respectivement les réactifs et les produits.



Les piles à combustible et les divers types de batteries sont des exemples de pompes à électricité. La différence essentielle entre ces deux catégories réside dans le fait que dans les piles à combustible, les réactifs sont introduits en continu dans le système et les produits en sont extraits. Par contre, dans les batteries, les réactifs sont stockés dans le système et s'épuisent progressivement. Ces différences ont une influence sur l'énoncé des équations de bilan mais n'affectent pas le mode de fonctionnement des dispositifs.



Lors d'une électrolyse ou de la recharge d'une batterie, nous forçons les processus que nous venons de décrire à se dérouler en sens inverse: le courant électrique sert à entraîner une réaction chimique (fig. 6.38). L'énergie libérée par la chute du courant électrique entre deux niveaux du potentiel est utilisée pour entraîner une réaction chimique. Citons à titre d'exemples l'électrolyse de l'eau, la réduction électrolytique de l'alumine (Al_2O_3) dans les fours à induction pour obtenir l'aluminium métallique et l'affinage industriel du cuivre.

6.9.3 Potentiel électrochimique

L'interaction entre des processus chimiques et électriques est un phénomène largement répandu. Elle n'a pas seulement lieu dans les appareils électrochimiques, mais elle est tout aussi importante en biologie. Le système nerveux et les muscles dépendent de manière cruciale de cette interaction. Pour pouvoir modéliser ce type de processus, nous devons pouvoir disposer d'un potentiel combiné, le potentiel électrochimique.

Imaginons deux régions séparées par une membrane (fig. 6.39) et admettons que les milieux I et II soient différents et qu'une substance dissoute «préfère» être dans le milieu II. Il s'ensuit que la concentration de cette substance est plus élevée dans le milieu II que dans le milieu I, comme l'était celle du toluène dans l'eau (fig. 6.8a). Tant que l'équilibre n'a pas été atteint, la force chimique «attirera» de la substance vers le milieu II. Si la substance est constituée d'ions, il y a apparition dans le système d'un champ électrique qui va exercer une force sur ces particules. Si nous partons de la distribution d'équilibre (plus grande concentration dans le milieu II), les ions auront tendance à être repoussés vers le milieu I, changeant de ce fait à la fois la distribution d'équilibre chimique et le champ électrique. Ce processus durera jusqu'à ce que la force nette due aux deux effets —électrique et chimique— soit égale à zéro: le système a atteint l'équilibre électrochimique. La substance dissoute est en équilibre si les concentrations sont telles que la différence du *potentiel électrochimique* μ_{EC} de part et d'autre de la membrane est nulle:

FIGURE 6.38 Dans une cellule électrolytique, c'est le passage du courant électrique qui entraîne les réactions chimiques. Des substances (telles que de l'eau) entrent dans la cellule à un potentiel chimique bas et sont détruites, alors que de nouvelles espèces (telles que l'hydrogène et l'oxygène) sont produites et émergent de la cellule à un potentiel chimique plus élevé. Une partie de l'énergie fournie sert à produire de l'entropie, ce qui rend le processus irréversible.

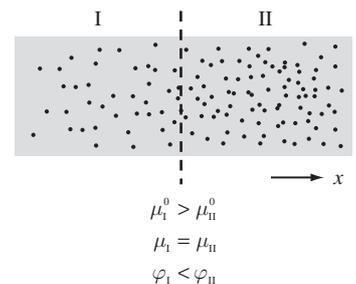


FIGURE 6.39 Une substance est dissoute dans les milieux I et II. Le potentiel chimique standard de la substance est plus élevé en I qu'en II. La figure montre la condition de l'équilibre chimique (concentration plus élevée en II). Si les particules sont chargées, il existe une force électrique qui les entraîne de II vers I. À l'équilibre électrochimique, la distribution des concentrations sera différente.

$$\mu_{\text{EC}}(\text{I}) = \mu_{\text{EC}}(\text{II}) \quad (6.80)$$

Des considérations liées à l'énergie vont nous permettre de combiner les deux potentiels. Le flux d'énergie dû au transfert simultané de substance et de charge est égal à :

$$I_E = I_{E, \text{chim}} + I_{E, \text{él}} = \mu I_n + \varphi I_Q \quad (6.81)$$

Il est important de noter que les substances et les charges électriques sont couplées. Les particules d'une espèce chimique portent une charge électrique, ce qui permet de faire correspondre au courant électrique un courant équivalent de quantité de matière, qui doit être multiplié par la charge molaire pour obtenir le courant électrique. Si e est la charge élémentaire (positive), z le nombre de charges élémentaires du ion, et N_A le nombre de particules par mole, alors :

$$I_Q = zeN_A I_n = z \mathcal{F} I_n \quad (6.82)$$

où \mathcal{F} est la constante de FARADAY. La substitution de cette dernière relation dans l'équation (6.81) permet d'exprimer le *potentiel électrochimique* combiné :

$$\mu_{\text{EC}} = \mu + z \mathcal{F} \varphi \quad (6.83)$$

où μ est le potentiel chimique simple.

6.9.4 Réactions électrochimiques

Dans un élément électrochimique (pile à combustible ou batterie), des réactions chimiques qui se déroulent spontanément libèrent de l'énergie qui est utilisée pour entraîner un courant électrique à travers une différence de potentiel (fig. 6.40). En d'autres termes, la réaction chimique crée une tension électrique. Un petit nombre entier de charges élémentaires sont séparées pour chaque unité de conversion chimique. Si le processus pouvait se dérouler de manière réversible, l'équation de bilan de la puissance deviendrait :

$$0 = \frac{1}{v_1} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \Pi_{A1} - \Delta\varphi I_Q$$

Si nous utilisons l'équation (6.82) et remplaçons le courant de quantité de matière par le taux (néгатif) de conversion Π_{A1} , nous obtenons :

$$\frac{1}{v_1} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \Pi_{A1} = \Delta\varphi z \mathcal{F} (-\Pi_{A1})$$

ou

$$U = -\Delta\varphi = \frac{1}{v_1 z \mathcal{F}} [\Delta\mu]_{\text{réaction}} \quad (6.84)$$

U est la tension à vide de l'élément. Nous avons ainsi établi une méthode relativement simple pour déterminer la force chimique des réactions ou, alternativement, un moyen de prévoir les performances d'un élément électrochimique à partir de données chimiques.

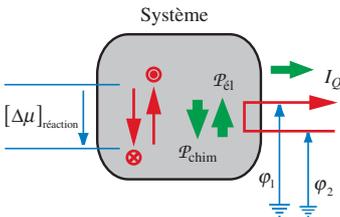
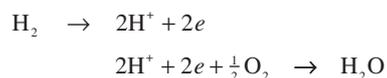


FIGURE 6.40 Diagramme de processus d'un élément électrochimique (batterie ou appareil similaire). L'énergie libérée par la réaction chimique est utilisée pour entraîner un courant électrique.

EXEMPLE 6.13. Potentiel chimique de l'eau déterminé à partir de mesures électriques.

Aux conditions standard, la tension mesurée aux bornes d'une pile à combustible, qui produit de l'eau à partir d'oxygène et d'hydrogène, prend une valeur maximale de 1.23 V. Déterminez le potentiel chimique de l'eau.

SOLUTION: Nous devons formuler les réactions qui se déroulent aux électrodes de la pile à combustible. La molécule H_2 dissocie en $2H^+$ et deux électrons. Sur l'autre électrode, les molécules d'oxygène réagissent avec les H^+ et les électrons pour former des molécules d'eau :



Il y a donc 2 moles d'électrons utilisées lors de la réaction d'une mole d'hydrogène gazeux. En vertu de l'équation (6.84), le potentiel chimique de la réaction est :

$$|\Delta\mu| = |zFU| = 2 \cdot 96487 \text{ C mol}^{-1} \cdot 1.23 \text{ J C}^{-1} = 237.3 \text{ kJ}$$

Vu que les potentiels chimiques des gaz d'hydrogène et d'oxygène sont fixés à zéro, cette valeur représente le potentiel chimique de l'eau. ■

EXEMPLE 6.14. Transfert d'ions à travers une membrane.

Un grand nombre de fonctions biologiques, incluant notamment celles des cellules nerveuses et la propagation des signaux nerveux, impliquent le transfert sélectif d'ions à travers les membranes cellulaires.

Admettez que la même sorte d'ions est en solution de part et d'autre d'une membrane, comme le montre la figure 6.39. Le liquide dans lequel ils sont dissous est le même dans les deux environnements et les concentrations des ions sont respectivement c_I et c_{II} . Quelle est la valeur de la tension engendrée par cette différence de concentration ?

SOLUTION: Si la distribution des ions dans les deux environnements a atteint l'équilibre électrochimique :

$$\mu_{EC}(I) = \mu_{EC}(II)$$

alors, en vertu des équations (6.83) et (6.47), nous avons :

$$\mu(T, \bar{c}^0) + RT \ln\left(\frac{\bar{c}_I}{\bar{c}^0}\right) + zF\varphi_I = \mu(T, \bar{c}^0) + RT \ln\left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}^0}\right) + zF\varphi_{II}$$

Nous obtenons une différence de potentiel égale à :

$$U = \varphi_I - \varphi_{II} = \frac{RT}{zF} \ln\left(\frac{\bar{c}_{II}}{\bar{c}_I}\right)$$

Cette expression est le *potentiel de Nernst*. ■

Résumé du chapitre

Les processus chimiques sont la manifestation de l'interaction entre des substances. Ils sont essentiellement de deux natures : transport et réaction. Les substances peuvent migrer d'une place à l'autre, se transformer et être produites ou détruites lors de réactions chimiques.

La grandeur extensive servant à la description quantitative des substances est la *quantité de matière* n qui se mesure en mole. Cette grandeur n'est pas réservée à la mesure de substances matérielles, elle peut également être appliquée à la lumière dont le caractère granulaire a été révélé au début du XX^e siècle. Une mole de substance contient un nombre d'entités individuelles égal au nombre d'Avogadro $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

La forme générale de l'équation de bilan : $\dot{n} = I_{n, \text{cond}} + I_{n, \text{conv}} + \Pi_{n, \text{net}}$ prend en compte les différents processus qui font évoluer la quantité de matière d'un système. Les termes du membre de droite sont respectivement les flux conductifs liés à la diffusion ou à la migration de la substance, les flux convectifs qui décrivent les processus de transport vers ou hors du système et le taux de production ou destruction associé aux réactions qui se déroulent à l'intérieur du système.

Les grandeurs qui caractérisent une substance, telles que sa masse, son entropie, sa concentration, sont généralement exprimées sous forme molaire en tant que quotient de la grandeur et de la quantité de matière n .

La grandeur intensive associée à la quantité de matière est le *potentiel chimique* μ . Il se mesure en gibbs abrégé par G, unité qui équivaut à 1 J mol^{-1} . Le potentiel chimique mesure la tendance des substances à réagir avec d'autres substances, à migrer d'une région vers une autre ou à se transformer, c'est-à-dire à changer d'état d'agrégation. Les différences de potentiel chimique agissent comme force d'entraînement des processus chimiques, elles sont comparables à une tension chimique. Le potentiel chimique dépend à la fois de la température, de la pression et de la concentration des substances. En première approximation, il décroît proportionnellement à la température, croît proportionnellement à la pression et à la concentration. Les coefficients de proportionnalité sont respectivement l'entropie molaire et le volume molaire pour la température et la pression, alors que celui qui est associé à la concentration est le même pour toutes les substances.

Le potentiel chimique est un potentiel absolu, vu qu'il est associé à une grandeur non conservée, la quantité de matière. Pour des raisons pratiques, les tables donnent les valeurs des potentiels chimiques de substances composées en tant que différence entre leur valeur absolue propre et celles des éléments dont elles sont composées. On attribue la valeur nulle du potentiel chimique à la forme la plus stable des éléments du tableau périodique.

Les processus chimiques entraînent des échanges d'énergie. La puissance d'un processus est donnée par $\mathcal{P}_{\text{chim}} = -\Delta\mu I_n$ s'il s'agit d'un processus de migration à l'intérieur du système et $\mathcal{P}_{\text{chim}} = -\mu \Pi_n$ s'il s'agit d'une réaction entraînant l'apparition ou la disparition d'une substance. Lorsque des substances entrent dans un système ou le quittent, elles transportent de l'énergie dont l'intensité du courant est $I_{E, \text{chim}} = \mu I_n$.

Les réactions chimiques sont accompagnées de production d'entropie. Si la somme de l'entropie produite par la réaction et de la variation de l'entropie des réactifs est positive, la réaction est dite *exothermique*, de l'entropie est émise vers l'environnement. Si cette somme est négative, la réaction est *endothermique*, l'environnement fournit de l'entropie au système.

À température constante, le potentiel chimique du gaz parfait est donné par la relation $\mu = \mu_0 + RT \ln(P/P_0)$. Lorsqu'elles sont suffisamment diluées, les substances se comportent comme un gaz parfait. On utilise la relation en remplaçant la pression par la

concentration en tant que base à la modélisation des processus de diffusion d'une substance dans un milieu uniforme, de migration entre deux environnements différents. C'est également le cas pour la modélisation de l'osmose, qui est le phénomène de transport de solvant et de soluté à travers une membrane semi-perméable.

La description de la dynamique des réactions chimiques fait intervenir les taux de production des substances impliquées, taux qui sont aussi appelés vitesse de réaction. Les différences de potentiels chimiques, eux-même dépendant de la concentration comme dans le cas des phénomènes de transport, exercent une influence prépondérante sur cette vitesse de réaction.

Les processus électrochimiques sont des réactions qui libèrent des électrons, permettant ainsi le transfert d'énergie d'un porteur chimique vers un porteur électrique (pile à combustible ou batterie). Le processus peut être inversé, par exemple dans une cellule électrolytique. Ces processus font intervenir un potentiel combiné, le potentiel électrochimique.

Exercices et problèmes

1. Considérez du fructose et du dextrose (qui sont deux formes de sucre simple) en solution aqueuse. (a) Laquelle des deux formes va-t-elle, aux conditions standard, se convertir dans l'autre forme? (tab. 6.1); (b) Que vaut la constante d'équilibre de la réaction?
2. Montrez que le potentiel chimique de l'eau varie de $-RTx$ lorsque l'on y dissout une substance. x est la fraction molaire du soluté dans la solution.
3. Démontrez que le déplacement du point d'ébullition d'un solvant est donné par $RTx/\Delta s_{\text{vap}}$, où Δs_{vap} est l'entropie molaire de vaporisation du solvant.
4. Estimez la température de vaporisation de l'éthanol.
5. Calculez les valeurs du potentiel chimique de H_2O dans ses phases gazeuse, liquide et solide pour les températures 200 K, 300 K et 400 K. Déterminez à partir des résultats quelle est la forme stable pour chacune de ces trois températures.
6. La combustion du méthane produit du dioxyde de carbone et de l'eau. Admettez que les substances initiales et les produits sont tous dans leur état standard. Utilisez les valeurs des potentiels chimiques et des entropies molaires trouvées dans les tables. (a) Formulez l'équation de réactions. (b) Déterminez l'entropie produite par mole de méthane. (c) Déterminez la variation d'entropie par mole de méthane pendant cette réaction. (d) Combien d'entropie par mole de méthane est émise vers ou absorbée de l'environnement? (e) Quelle quantité d'énergie est transférée par l'intermédiaire de l'entropie échangée? (f) À quoi correspond cette énergie par kilo de méthane? Comparez ce résultat à la valeur du pouvoir énergétique supérieur du tableau 6.5.
7. Calculez l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de ^{90}Sr en un noyau de ^{90}Y .
8. De combien la pression de l'eau varie-t-elle si l'on dissout 1.0 mole de sel de cuisine dans 1.0 litre d'eau?
9. Le coefficient de partage est le rapport à l'équilibre des concentrations d'une substance dans deux environnements différents. Que vaut le coefficient de partage du toluène dans l'eau et l'air?
10. Deux grammes de CO_2 sont dissous dans un litre d'eau en bouteille. Si l'on admet qu'il n'y a que du dioxyde de carbone dans le volume au-dessus de l'eau, que vaut la pression du gaz?
11. Calculez les valeurs à l'équilibre CO_2 dans de l'eau pure dans une atmosphère contenant respectivement 280 ppmv et 380 ppmv de dioxyde de carbone.
12. Dans de l'eau pure, quelques molécules de H_2O se dissocient en H^+ et OH^- . Utilisez les valeurs des potentiels chimiques standard pour calculer la concentration de H^+ à l'équilibre.
13. Il y a approximativement 30 g de sel (NaCl) dissous dans 1 litre d'eau de mer. (a) Calculez la pression osmotique du sel par rapport au solvant (eau pure) à la température de 300 K. (b) De combien la solution d'élèverait-elle dans une cellule idéale avec une membrane semi-perméable la séparant du solvant?
14. Une centrale basée sur l'osmose à pression retardée utilise la différence de pression entre l'eau de mer et l'eau douce. Si une telle centrale est placée à l'embouchure d'un fleuve charriant $1000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, quelle en serait la puissance dans le cas idéal?
15. Comment le mélange à l'équilibre d'azote, d'hydrogène et d'ammoniac varie-t-il lorsque la pression passe de P_0 à P , sachant que l'équation de la synthèse est $\text{N}_2 + 3 \text{H}_2 \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3$.
16. Les vapeurs de mercure sont toxiques. Une concentration de 0.1 mg m^{-3} dans l'air est tolérable durant une semaine de travail (40 h). (a) Aux conditions standard, et dans une atmosphère de mercure pure, le liquide s'évapore-t-il ou, au contraire, sa vapeur condense-t-elle? (b) Déterminez la pression de vapeur du mercure dans l'air (considérez la vapeur de mercure comme un gaz parfait). (c) Quelle est la concentration d'équilibre en mg m^{-3} ? La masse molaire du mercure est de 200 g mol^{-1} . Durant combien de temps par semaine serait-on autorisé à travailler dans une telle atmosphère? (d) Dans quelle proportion la vapeur de mercure est-elle plus grande ou plus faible à 35°C ?
17. Donnez des raisons qui montrent que la diffusion d'une substance à travers la matière est un processus complètement dissipatif. En admettant que cette affirmation est correcte, déterminez le taux de production d'entropie pour la diffusion.
18. Une réaction de type $\text{A} + 2\text{B} \rightarrow \text{C}$ se déroule dans un réacteur d'un volume de 5 litres. Tous les réactifs et produits sont distribués uniformément durant la réaction. Au début, le réacteur contient 2 moles de A, 1 mole de B et pas de C. Le taux de réaction est proportionnel à la concentration de A et au carré de la concentration de B. Admettez que la réaction se déroule complètement dans la direction indiquée. (a) Esquissez graphiquement l'évolution de la concentration des substances en fonction du temps. Indiquez les quantités de matière initiales et finales de chacune des substances. (b) Admettez que le réacteur fonctionne en régime stationnaire, c'est-à-dire que les substances A et B sont introduites et C extraite de manière continue. Formulez les équations différentielles pour les quantités de matière de chacune des substances. Les membres de droite de ces équations sont supposés ne contenir que les concentrations, le volume du réacteur, la constante de réaction et les flux constants I_{nA} , I_{nB} et I_{nC} . (c) On admet que la régime stationnaire a les particularités suivantes: (1) La valeur de I_{nC} est fixée de telle manière que toute la quantité de C produite peut être extraite instantanément, soit $I_{nC} = 1.0 \text{ mol h}^{-1}$; (2) La concentration de A est constante à 4.0 mol L^{-1} . Quelles sont les valeurs de I_{nA} et I_{nB} qui permettent de maintenir le système dans cet état? Que valent les quantités de matière n_A et n_B en régime stationnaire? Admettez que la constante de réaction est $k = 0.10 \text{ L}^2 \text{ mol}^{-2} \text{ h}^{-1}$.

INTERLUDE III

POMPES À CHALEUR ET GÉNÉRATEURS THERMOÉLECTRIQUES

La thermoélectricité est un phénomène fascinant : dans certains matériaux, le transport de la charge électrique et celui de la chaleur (entropie) sont couplés de telle manière que ce couplage engendre des processus qui peuvent être utilisés pour développer des générateurs thermoélectriques et des pompes à chaleur électrothermiques. La recherche actuelle est dirigée vers le développement de nouveaux matériaux et d'appareils thermoélectriques, vu qu'ils sont porteurs d'applications nouvelles très utiles.

Les applications pratiques sont par exemple des générateurs pour les vols dans l'espace, loin du Soleil, où la source de chaleur est un matériau radioactif, de simples alimentations électriques dans des régions privées de réseau électrique ou des alimentations dans des véhicules afin de récupérer de grandes quantités d'énergie, qui serait autrement dissipée avec la chaleur produite par les moteurs.

Les pompes à chaleur thermoélectriques sont utilisées pour refroidir les puces des ordinateurs ; en médecine, on a étudié leur engagement pour le contrôle d'aires du cerveau touchées lors d'une attaque cérébrale. Leur avantage est qu'elles peuvent être contrôlées de manière très précise et qu'elle réagissent très rapidement, ce qui permet de contrôler les températures en médecine et dans des échantillons biologiques très petits. Une telle application est un appareil dont on peut varier la température de surface très rapidement et très finement afin d'étudier le sens du toucher chez des patients victimes d'une maladie particulière.

Dans l'étude de cas qui suit, nous étudierons le fonctionnement de modules PELTIER utilisés en tant que refroidisseur ou de générateur. Nous effectuerons des expériences et analyserons les données recueillies afin d'acquérir une meilleure connaissance des phénomènes, ce qui nous permettra d'élaborer des modèles de ces dispositifs. Enfin, les modèles pourront être utilisés pour étudier les propriétés et le comportement de ces appareils par l'intermédiaire de simulations.

III.1 MODULE PELTIER EN TANT QUE REFROIDISSEUR ET GÉNÉRATEUR

Les modules PELTIER modernes (fig. III.1) sont constitués de deux types différents de semiconducteurs qui transportent l'entropie et la charge de manières différentes : dans l'un, l'entropie circule dans le même sens que la charge, dans l'autre, elle circule dans le sens opposé.

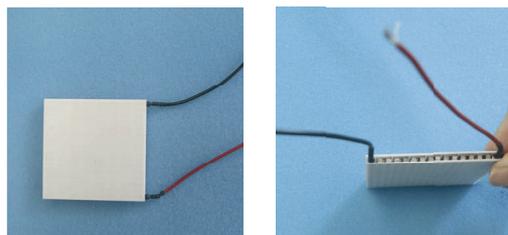


FIGURE III.1 Module PELTIER : le module a une surface de 6x6 cm et une épaisseur de quelques millimètres. 254 courts segments de matériaux semi-conducteurs sont connectés de manière alternée, créant une séquence de conducteur pour la charge électrique et de ponts pour transporter l'entropie d'une surface vers l'autre. La figure III.6 contient les détails de cette structure.

Lorsqu'ils sont combinés, ces éléments permettent soit d'utiliser le transport de la charge électrique pour forcer l'entropie à circuler d'endroits froids vers des endroits chauds, en mode pompe à chaleur, soit d'utiliser le transport de l'entropie pour forcer la charge à remonter le potentiel électrique, en mode générateur. Dans ce qui va suivre, nous jetons un premier regard sur deux expériences qui lèvent le voile sur ce qui se passe.

III.1.1 Refroidisseur PELTIER

Si nous connectons les câbles d'un module PELTIER aux bornes d'une batterie, nous observons que, très rapidement, les faces opposées changent de température: l'une devient chaude alors que l'autre se refroidit, ce qui suggère que nous pouvons utiliser ce dispositif en tant que pompe à chaleur. Deux volumes d'eau dans un récipient bien isolé sont séparés par un module PELTIER connecté à une alimentation électrique (fig. III.2a). Si nous établissons une tension constante aux bornes du dispositif, nous observons que l'un des volumes d'eau se refroidit alors que l'autre se réchauffe (fig. III.2b). La température globale augmente si le système est isolé thermiquement sur tous les côtés, fond et couvercle compris.

FIGURE III.2 Refroidisseur PELTIER: (a) deux volumes d'eau sont séparés par un module PELTIER. Un couvercle isolé thermiquement est traversé par deux thermomètres n'apparaissant pas dans la photo qui enregistrent les températures respectives; (b) enregistrement des températures de chacun des bains.

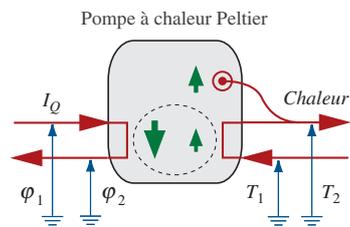
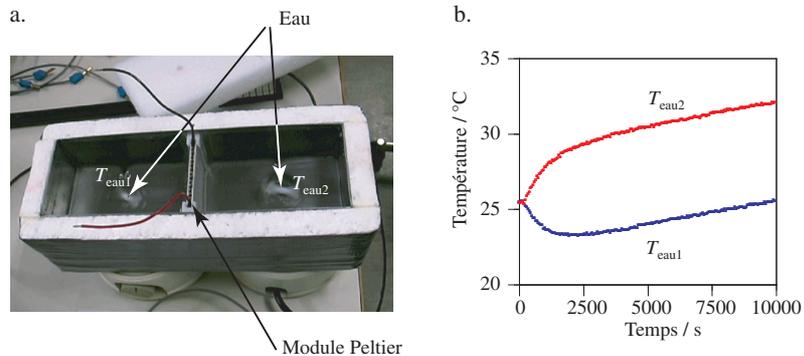


FIGURE III.3 Module PELTIER utilisé en mode pompe à chaleur: la charge électrique circule d'un potentiel élevé vers un potentiel inférieur en libérant de l'énergie. Cette énergie est utilisée pour pomper la chaleur (l'entropie) vers le haut et, simultanément, pour produire de l'entropie supplémentaire.

Le module PELTIER en tant que pompe à chaleur (entropie). Le volume d'eau qui se réchauffe reçoit de la chaleur, celui qui se refroidit en perd. Il est sensé d'admettre que la chaleur acquise par le premier volume vient du second. Vu que la chaleur circule ici d'un corps froid vers un corps chaud, elle ne le fait pas spontanément, comme dans un processus de conduction. La chaleur est *pompée* par le dispositif thermoélectrique. Comme pour n'importe quel autre type de pompe, un tel processus a besoin d'énergie pour réaliser sa tâche (fig. III.3).

Conduction d'entropie. Le pompage d'entropie semble s'interrompre après approximativement 2000 s dans l'expérience qui fait l'objet de la figure III.2a: la température du côté froid cesse de diminuer.

Mais le processus doit certainement se poursuivre, vu que le courant électrique continue de circuler à travers l'appareil. La raison du comportement observé est simplement le résultat de l'écoulement d'entropie à travers la barrière entre les volumes d'eau chaude et froide. Cet écoulement se déroule en mode conductif, vu qu'il existe la différence de température nécessaire et que le dispositif n'est pas parfaitement isolé. Le transport en mode conductif a lieu dans la direction opposée au transport thermoélectrique. Lorsque les deux courants d'entropie deviennent égaux, la température du volume froid cessera de diminuer.

Production d'entropie. Le module PELTIER produit également de la chaleur; le matériau à travers lequel s'écoule la charge électrique a une certaine résistance, et de la chaleur (de l'entropie) est produite par effet Joule. En conséquence, la chaleur

(l'entropie) des deux volumes d'eau croît globalement, tout comme la température moyenne; c'est ce qui apparaît dans le diagramme de la figure III.2b. Si nous souhaitons que le module PELTIER fonctionne correctement comme refroidisseur de l'un des volumes d'eau, nous devons extraire l'entropie du système.

Résumé. Un dispositif thermoélectrique est un matériau qui transporte de la charge électrique et de la chaleur de telle manière que les deux flux sont couplés. Il n'y a ni parties mobiles, ni fluides caloporteurs. Par conséquent, il semble que, dans une pompe à chaleur thermoélectrique, la charge électrique transporte de l'entropie.

III.1.2 Générateur thermoélectrique

Un module PELTIER peut être amené à fonctionner à l'envers, auquel cas il fonctionne en tant que machine thermique, c'est-à-dire comme générateur électrique. Lorsque le module est placé entre un volume d'eau chaude et un volume d'eau froide, comme dans la figure III.2a, une tension U_{MP} apparaît aux bornes du module PELTIER (fig. III.4a); si aucune charge n'est connectée, la tension mesurée est la tension à vide. Comme de l'entropie s'écoule du volume chaud vers le volume froid, la température élevée T_H diminue alors que la température basse T_B augmente. En conséquence, la tension à vide $U_{MP, \text{vide}}$ diminue de plus en plus. Lorsque les températures des volumes d'eau se sont équilibrées, la tension s'annule.

La tension s'ajuste quasi parfaitement à une fonction linéaire de la différence de température $T_H - T_B$. Il s'ensuit que nous pourrions utiliser un dispositif thermoélectrique en tant que thermomètre, et pas seulement en tant que générateur ou pompe à chaleur.

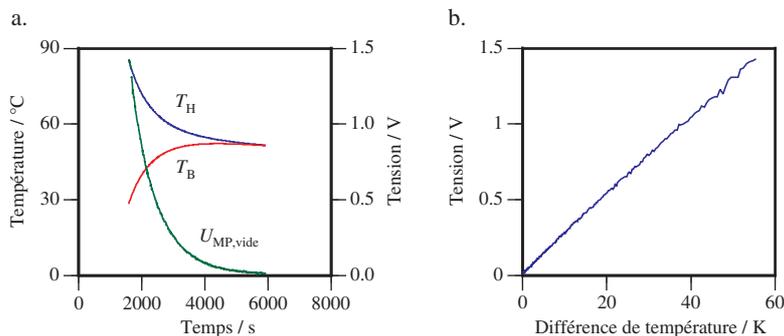


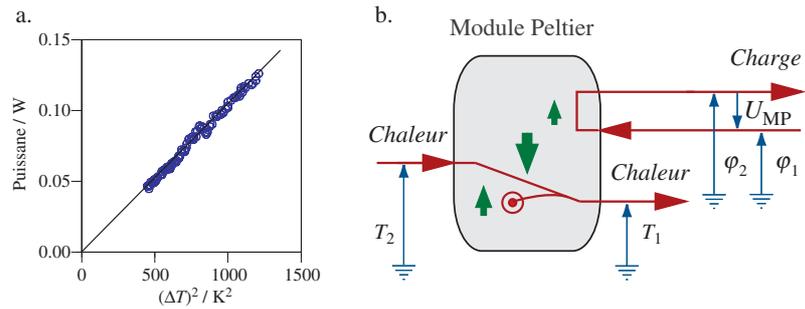
FIGURE III.4 Module PELTIER en tant que générateur électrique: (a) évolution de la température de deux volumes d'eau séparés par un module PELTIER dans un récipient bien isolé, ainsi que de la tension à vide aux bornes du dispositif; (b) diagramme de l'ajustement linéaire de la tension en fonction de la différence de température des volumes d'eau.

Si nous connectons une charge telle qu'une résistance ohmique aux bornes du dispositif, celui-ci entraîne un processus électrique dont la puissance peut être évaluée à partir des mesures de la tension et de l'intensité du courant (fig. III.5a). L'efficacité est inférieure à celle de CARNOT (chapitre 5, section 5.8.2, équation (5.50)), ce qui signifie que, comme toutes les autres machines thermiques, un générateur PELTIER produit de l'entropie au cours de son fonctionnement.

Le diagramme de processus (fig. III.5b) explique le fonctionnement de la machine thermique PELTIER. Nous remarquons qu'il est semblable à celui d'un moteur de STIRLING ou de n'importe quelle autre machine thermique (chapitre 5, section 5.8.4, fig. 5.56). Lorsque la chaleur tombe d'un niveau élevé vers un niveau bas, elle libère de l'énergie qui est utilisée pour entraîner d'autres processus, par exemple l'écoulement de charges électriques d'un potentiel bas vers un potentiel plus élevé. Cependant, dans ce cas particulier, il est parfaitement clair que seule une fraction de l'énergie libérée est utilisée pour entraîner le courant électrique. Une bonne partie est utilisée pour produire de la chaleur.

La puissance de sortie mesurée est proportionnelle au carré de la différence de température entre l'eau chaude et l'eau froide (fig. III.5a). Cela est analogue à ce que nous savons de la puissance dissipée dans une résistance qui est proportionnelle au carré de la tension (chapitre 3, section 3.3.3, exemple 3.2). Nous pouvons expliquer qualitativement ce résultat. Admettons que l'énergie libérée lors de la chute de la chaleur de T_H à T_B est proportionnelle à la différence de température. Si le flux d'entropie est aussi proportionnel à la différence de température, la puissance thermique doit être proportionnelle au carré de la différence de température. Si, d'autre part, nous admettons qu'une partie fixe de l'énergie libérée lors de la chute de la chaleur est utilisée pour entraîner le courant électrique, nous obtenons ce que montre la figure III.5b. Dans la section III.2, nous procéderons à une analyse numérique de cette observation.

FIGURE III.5 Module PELTIER utilisé en mode générateur électrique: (a) la puissance délivrée par un module PELTIER entre deux réservoirs de températures différentes est proportionnel au carré de la différence de température; (b) diagramme de processus du générateur PELTIER.



Résumé. Lorsque le module PELTIER est utilisé en mode pompe à chaleur, notre interprétation est que l'électricité qui s'écoule à travers le matériau entraîne de l'entropie dans son mouvement. Il semble raisonnable d'admettre que le principe du générateur thermoélectrique consiste dans le processus inverse, celui de l'entropie entraînant de la charge électrique dans son écoulement. Nous pouvons en conclure que les transports de charge et d'entropie sont couplés par le matériau.

III.1.3 Thermocouple et structure d'un module PELTIER

Le dispositif thermoélectrique le plus simple est un thermocouple qui est un élément constitué de deux matériaux conducteurs différents qui couplent les transports de charge et d'entropie de différentes manières (fig. III.6a). Des segments de ces deux matériaux sont connectés électriquement à l'une de leurs extrémités et exposés à un environnement ayant une température T_H (fig. III.6a).

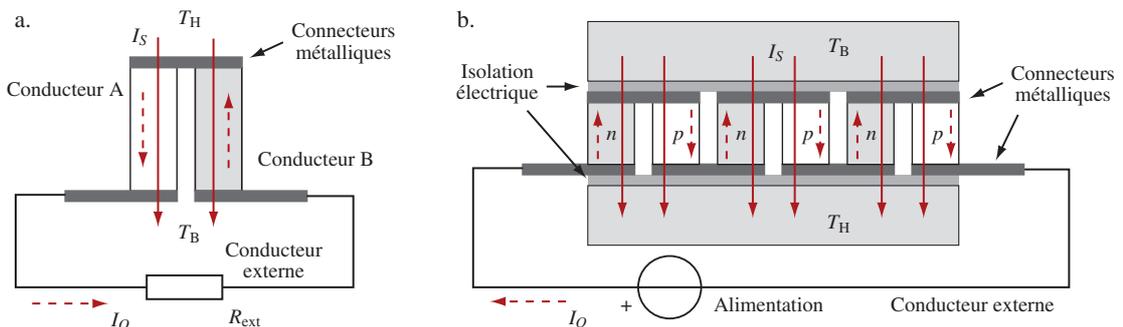


FIGURE III.6 Thermocouple et module PELTIER: (a) thermocouple constitué de deux matériaux conducteurs différents; entre deux environnements aux températures respectives T_H et T_B , il peut fonctionner comme générateur ou comme thermomètre; les sources et les puits d'entropie doivent être isolés électriquement du thermocouple; (b) une combinaison de thermocouples constitués de semi-conducteurs de type n et de type p peut servir de pompe à chaleur PELTIER: les flèches continues représentent les flux d'entropie, les flèches discontinues les flux de charge électrique; le flux conductif d'entropie qui s'établirait entre les extrémités chaude et froide n'apparaît pas dans la figure.

Si les deux autres extrémités ouvertes sont exposées à un environnement ayant une autre température T_B , une tension apparaît entre ces deux extrémités. L'utilisation d'un thermocouple de cette manière en fait un thermomètre permettant de déduire la température à partir de la tension mesurée. Si nous branchons une charge entre ces deux extrémités, ce dispositif devient un générateur thermoélectrique capable d'entraîner un processus.

Dans la figure III.6, il est clair que nous devons avoir deux matériaux différents pour obtenir un thermocouple. Même si chacun des conducteurs A ou B couple les transports d'entropie et de charge, nous n'enregistrerions aucun effet, vu que les courants d'entropie ou de charge se compenseraient si les deux matériaux étaient identiques. Il n'est pas nécessaire d'utiliser des semi-conducteurs (de type p ou n), comme c'est le cas dans la figure III.6b, où les flux de charge et d'entropie sont soit parallèles, soit anti-parallèles; pour obtenir l'effet thermoélectrique, il suffit d'utiliser deux métaux différents tels que le cuivre et le constantan pour lesquels l'intensité du couplage thermoélectrique des flux est différent. La différence de ces intensités est responsable de l'effet thermoélectrique observé. L'intensité du couplage est mesurée au moyen du *coefficient SEEBECK* du matériau; les valeurs des coefficients SEEBECK de quelques matériaux sont reportées dans le tableau III.1.

L'effet est plus prononcé si des matériaux ayant des coefficients de SEEBECK positifs et négatifs peuvent être utilisés comme dans le cas de semi-conducteurs de type p et n. La combinaison de deux matériaux qui diffèrent fortement est essentielle si l'on désire construire des refroidisseurs thermoélectriques, car dans le cas contraire, l'effet est trop faible. La figure III.6a montre que, pour de tels matériaux, le flux d'entropie est soit parallèle, soit antiparallèle au flux de charge électrique.

Les refroidisseurs PELTIER modernes sont construits à partir de semi-conducteurs dont l'une des branches du thermocouple est de type p et l'autre de type n. Si plusieurs, voire un grand nombre de ces couples peuvent être combinés électriquement en série et thermiquement en parallèle, on obtient des solutions efficaces pour des refroidisseurs thermoélectriques (fig. III.6b).

TABLEAU III.1 Coefficients SEEBECK à 0°C (relativement au platine)^a

Métaux	Coefficient SEEBECK	Semi-conducteurs	Coefficient SEEBECK
	$\epsilon / \mu\text{V K}^{-1}$		$\epsilon / \mu\text{V K}^{-1}$
Aluminium	3.5	Ge	300
Bismuth	-72	Se	900
Constantan	-35	Si	440
Cuivre	6.5	Te	500
Or	6.5	PbTe	-180
Nichrome	25	Bi ₂ Te ₃ (n-type)	-230
Nickel	-15	Sb ₂ Te ₃ (p-type)	185
Platine	0		
Argent	6.5		
Tungstène	7.5		

a. Le coefficient SEEBECK absolu du platine vaut approximativement $5 \mu\text{V K}^{-1}$

Le module PELTIER utilisé dans cette étude de cas (Melcor CP-127-06L) utilise 127 couples de semi-conducteurs Bi_2Te_3 (de type n) et Sb_2Te_3 (de type p); nous avons donc 254 conducteurs entre les deux faces du dispositif. Selon le tableau III.1, la différence des coefficients SEEBECK pour un couple unique est de $415 \mu\text{V K}^{-1}$. Au total, le coefficient SEEBECK du module PELTIER Melcor doit être de 530 mV K^{-1} .

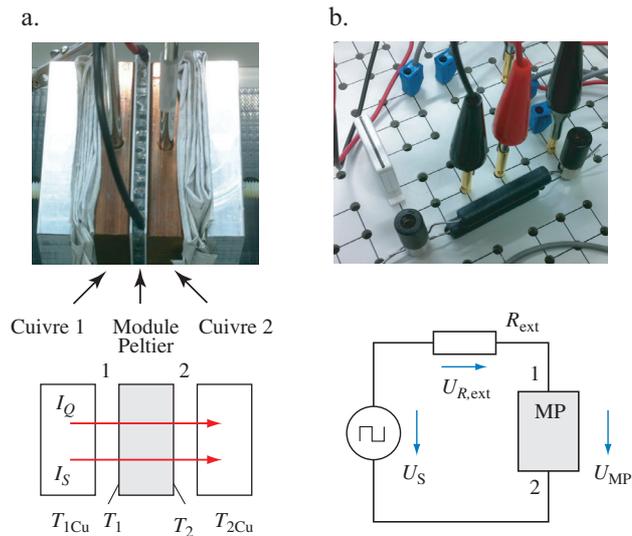
III.2 ANALYSE DE QUELQUES EXPÉRIENCES

Dans cette section, nous allons discuter les résultats de quelques expériences utilisant un module PELTIER. Les données recueillies seront analysées au moyen des outils conceptuels qui ont été développés dans les chapitres 1 à 6.

III.2.1 Observations initiales

Nous allons effectuer plusieurs expériences simples. Un module PELTIER (Melcor CP-127-06L) est pris en sandwich entre deux plaques de cuivre ayant la même surface de $6 \times 6 \text{ cm}^2$ que le module et de 1.0 cm d'épaisseur, dont on peut mesurer la température; les plaques de cuivre sont assez bien isolées de l'environnement (fig. III.7a). On connecte ce module à un circuit électrique simple comprenant une résistance externe et une alimentation qui peut être enclenchée et déclenchée (fig. III.7b).

FIGURE III.7 Expérience avec un module PELTIER: (a) le module PELTIER est pris en sandwich entre deux plaques de cuivre dont on peut mesurer la température; (b) le dispositif est intégré dans un circuit équipé d'une alimentation et d'une résistance externe. Les blocs de cuivre sont isolés thermiquement avec du papier et deux plaques métalliques maintiennent l'ensemble en place.



La figure III.8 montre deux réalisations typiques de l'expérience. Au début de l'expérience, les températures des plaques de cuivre sont égales. L'alimentation est enclenchée pendant 100 s et le module fonctionne en tant que pompe à chaleur, ce qui entraîne une évolution de la température des plaques. Après 100 s, l'alimentation est déclenchée et les températures des plaques peuvent se rapprocher de l'équilibre. La tension de la source U_S , celle du module PELTIER U_{MP} et celle de la résistance externe $U_{R,\text{ext}}$ sont enregistrées (fig. III.8b et d). Dans la première expérience (fig. III.8a et b), le circuit reste fermé après le déclenchement de l'alimentation; la tension U_{MP} est égale à la tension négative aux bornes de la résistance externe qui fonctionne alors comme charge pour le générateur thermoélectrique. Dans la seconde réalisation de l'expérience (fig. III.8c et d), le circuit est ouvert après le déclenchement de l'alimentation; dans ce cas, la tension $U_{R,\text{ext}}$ est nulle (fig. III.8c et d).

Les températures des plaques de cuivre ($T_{1\text{Cu}}$ et $T_{2\text{Cu}}$ dans les figures III.8a et c) nous servent d'estimations des températures de surface T_1 et T_2 du module PELTIER (fig. III.7b).

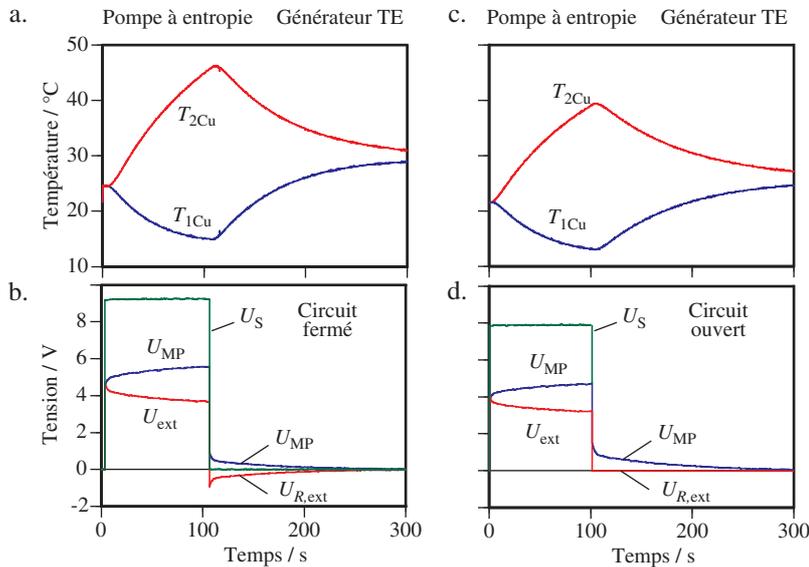


FIGURE III.8 Deux expériences avec un module PELTIER pris en sandwich entre deux plaques de cuivre et fonctionnant d'abord comme pompe à chaleur, puis comme générateur: (a) évolution des températures avant et après la fermeture du circuit; (b) évolution des tensions avant et après la fermeture du circuit; (c) évolution des températures en circuit ouvert; (d) évolution des tensions en circuit ouvert.

Quelques conclusions générales simples peuvent déjà être tirées de l'inspection des mesures. (1) Le dispositif fonctionne comme une pompe à entropie entraînée par l'électricité durant les 100 premières secondes. (2) Lorsque l'alimentation est coupée et que les températures des faces sont différentes, la tension aux bornes de l'élément thermoélectrique fait fonctionner le module comme générateur ($t > 100$ s). Le flux d'entropie entre les deux plaques doit être à l'origine du processus électrique.

III.2.2 Mode pompe à chaleur: module PELTIER en tant que refroidisseur

Si nous commençons toujours l'expérience avec les plaques de cuivre à températures égales, le processus (2) ne peut pas avoir lieu. Nous avons alors une situation qui nous permet d'étudier l'effet du flux d'électricité (entraîné par l'alimentation) sur le flux d'entropie. Nous mesurons les grandeurs électriques, en particulier $U_{R,ext}$ (fig. III.7d), ce qui nous fournit l'intensité du courant électrique si nous connaissons la valeur R_{ext} de la résistance externe:

$$I_Q = \frac{1}{R_{ext}} U_{ext} \quad (\text{III.1})$$

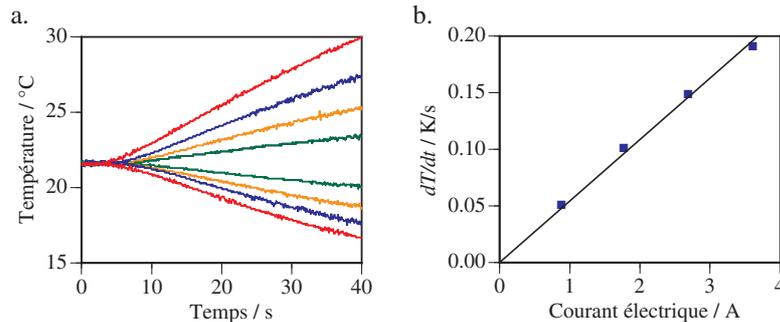
Nous mesurons les températures des plaques de cuivre sur une courte période pour voir à quelle vitesse elles s'écartent l'une de l'autre; cette vitesse est une indication de l'intensité du courant d'entropie pompée par le module PELTIER. Nous le faisons pour différentes valeurs de la tension U_S de l'alimentation et obtenons le diagramme de la figure III.9a.

Le taux initial auquel $T_{1\text{Cu}}$ et $T_{2\text{Cu}}$ s'écartent se révèle être proportionnel à l'intensité du courant (fig. III.9b). Vu que le taux de variation des températures des plaques de cuivre indique le taux auquel elles perdent ou gagnent de l'entropie, nous pouvons formuler l'hypothèse que la charge électrique entraîne avec elle de l'entropie avec une intensité proportionnelle à celle du courant:

$$I_{S,TE} = \alpha I_Q \quad \text{si } T_1 = T_2 \quad (\text{III.2})$$

Le facteur de proportionnalité α est appelé *coefficient PELTIER* du module¹. Il indique la force du couplage entre les flux de charge et d'entropie; sa valeur dépend des matériaux utilisés et de la structure géométrique (longueur et section des conducteurs). T_1 et T_2 sont les températures des surfaces du module PELTIER. Lorsque nous serons amenés à faire des calculs, nous devons nous souvenir que T_{1Cu} et T_{2Cu} ne sont pas exactement égales aux précédentes mais, pour l'instant, nous les utiliserons comme indication des températures du module.

FIGURE III.9 Taux de variation des températures du module PELTIER: (a) le module fonctionne comme pompe à chaleur pour différentes valeurs du courant électrique et la figure montre les variations initiales des températures des plaques de cuivre en contact avec les surfaces du module; (b) évolution du taux de variation de la température en fonction de l'intensité du courant électrique.



En outre, le fait que la première plaque refroidit moins vite que la seconde s'échauffe nous permet de conclure que de l'entropie est produite par le module PELTIER, très probablement comme conséquence de la conduction de charge électrique à travers le dispositif. La différence des pentes de température pour une expérience particulière doit être proportionnelle à la différence des courants d'entropie quittant la première plaque et entrant dans la seconde, et doit être égale au taux global de production d'entropie.

Estimation du coefficient PELTIER. Nous allons utiliser les résultats présentés dans la figure III.9a pour obtenir une première approximation de la valeur du coefficient PELTIER. Expliquons d'abord comment le graphe III.9b a été obtenu. Pour déterminer le taux de variation de la température, nous utilisons les valeurs des températures de la figure III.9a pour l'intervalle allant de 15 à 30 s pour l'une des expériences. Comme il y a deux valeurs, une pour chacune des plaques de cuivre, nous utilisons la moyenne des valeurs absolues. Comme nous le voyons dans la figure III.8b, la valeur de $U_{R,ext}$ varie durant cet intervalle; nous prenons ici aussi la valeur moyenne pour calculer les intensités des courants électriques au moyen de l'équation (III.1).

Nous devons convertir le taux de variation de la température d'une plaque de cuivre en taux de variation de l'entropie. Nous admettons que cette grandeur est égale au flux d'entropie entrant et traversant le module PELTIER. Le taux de variation de l'entropie est donné par :

$$\dot{S} = \frac{(mc)_{\text{cuivre}}}{T_B} \dot{T}_B \quad (\text{III.3})$$

Les valeurs pour la masse et le coefficient de température de l'énergie (chaleur massique) sont respectivement de 0.31 kg et $400 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Si, pour la température, nous choisissons $T_B = 300 \text{ K}$, la pente de la courbe qui s'ajuste aux points de la figure III.9b

1. Dans la présentation traditionnelle, basée sur l'énergie, c'est le produit $T\alpha$ qui est appelé coefficient PELTIER.

peut être convertie de manière à obtenir le coefficient PELTIER. En vertu de l'équation (III.2):

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{I_s}{I_Q} = \frac{(mc)_{\text{cuivre}}}{T_B} \frac{1}{I_Q} \dot{T}_B \\ &= \frac{0.31 \text{ kg} \cdot 400 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}}{300 \text{ K}} \frac{1}{4.0 \text{ A}} 0.22 \text{ K s}^{-1} = 0.023 \text{ W K}^{-1} \text{ A}^{-1}\end{aligned}$$

Le fabricant indique pour le coefficient PELTIER de son produit une valeur de $0.053 \text{ W K}^{-1} \text{ A}^{-1}$, soit plus du double de celle que nous avons trouvée. Ce n'est pas une surprise, vu que les données utilisées ne répondent pas à la condition de températures égales de part et d'autre du module. Comme $T_2 > T_1$, nous devons nous attendre à ce que de l'entropie s'écoule en mode conductif du point 2 vers le point 1, dans le sens opposé au transport d'entropie emportée par la charge qui circule du point 1 vers le point 2. Il s'ensuit que, si nous n'avons pas des conditions isothermes, il a deux écoulements opposés de chaleur (entropie) à travers le module. C'est pour cette raison que l'intensité I_S du courant d'entropie émanant de la plaque de cuivre gauche représente de manière très insuffisante le courant d'entropie thermoélectrique entraîné de gauche à droite par le courant électrique.

III.2.3 Module PELTIER en tant que générateur électrique

La seconde partie des données apparaissant dans les figures III.8c et d, après le déclenchement de l'alimentation, peut être utilisée pour étudier le fonctionnement du module comme générateur. Dans le cas présent, le changement consiste à laisser le circuit ouvert après le déclenchement de l'alimentation.

Tension thermoélectrique. Dans ce cas, la tension U_{MP} mesurée aux bornes du module PELTIER doit être égale à la tension du générateur, la tension *thermoélectrique* U_{TE} pour la phase 2 de l'expérience (fig. III.10a).

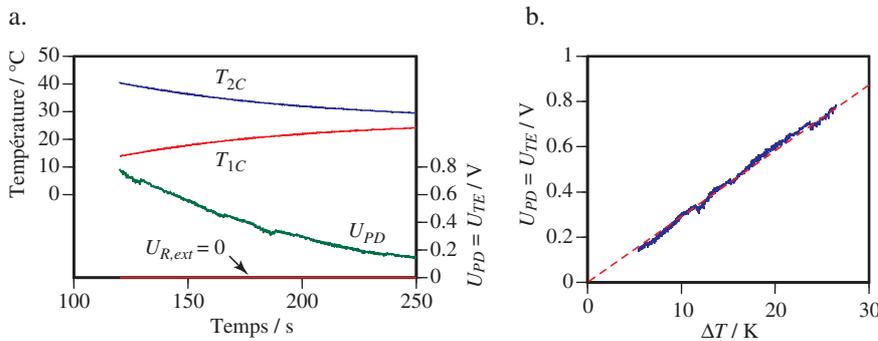


FIGURE III.10 Module PELTIER en tant que générateur: (a) tension à vide d'un module PELTIER Melcor CP2-127-06L; le module est pris en sandwich entre deux plaques de cuivre dont on mesure les températures; (b) tension thermoélectrique en fonction de la différence de température.

Si nous reportons la tension à vide du circuit ($U_{MP} = U_{TE}$) en fonction de la différence de température $T_2 - T_1$, pour laquelle nous prenons $T_{2Cu} - T_{1Cu}$, nous observons que la première est proportionnelle à la seconde (fig. III.10b): une différence de température entre les faces d'un module PELTIER entraîne l'apparition d'une tension qui permet d'utiliser le module comme générateur:

$$U_{TE} = \varepsilon(T_2 - T_1) \quad (\text{III.4})$$

Le facteur de proportionnalité ε qui relie la tension thermoélectrique à la différence de température est appelé *coefficient SEEBECK*. Si nous utilisons les résultats reportés dans la figure III.10a, nous obtenons :

$$\varepsilon = \frac{U_{TE}}{T_2 - T_1} = \frac{0.83 \text{ V}}{30 \text{ K}} = 0.028 \text{ V K}^{-1}$$

Cette nouvelle estimation n'est pas fiable, vu que nous n'avons pas les valeurs des températures T_1 et T_2 sur les faces du module PELTIER. Étant donné que la différence de température du module est certainement plus faible que la valeur que nous avons utilisée, une valeur fiable de ε doit être supérieure à 0.028 V K^{-1} . Il se révèle qu'elle doit être égale à 0.053 V K^{-1} , valeur égale à celle du coefficient PELTIER. Cela est un constat important que nous confirmerons sur des bases théoriques à la section III.4.

Conductance entropique du module PELTIER. Nos observations nous permettent d'évaluer une autre propriété importante du module, à savoir comment il conduit l'entropie. Nous utilisons l'évolution des températures en fonction du temps (fig. III.10a) et calculons le taux de variation de la température la plus élevée. Nous utilisons cette valeur pour calculer le taux de variation de l'entropie de la plaque de cuivre la plus chaude au moyen de l'équation (III.3). Si nous négligeons d'éventuelles pertes d'entropie vers l'environnement, cette grandeur est égale au courant d'entropie à travers le générateur PELTIER. Il s'agit du seul processus de transport, vu que le dispositif fonctionne en circuit ouvert, et ce transport est de type conductif. Si nous reportons I_S en fonction de la différence de température, nous obtenons une relation linéaire quasi parfaite (fig. III.11), ce qui nous permet de calculer la *conductance entropique globale* du module :

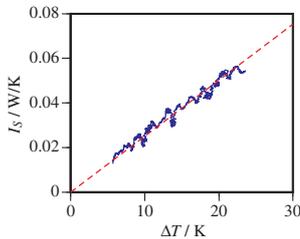


FIGURE III.11 Flux d'entropie en fonction de la différence de température. La caractéristique conductive est quasi linéaire avec une pente de $2.5 \cdot 10^{-3} \text{ W K}^{-2}$.

$$I_S = -G_S (T_2 - T_1) \quad (\text{III.5})$$

Puisque nous n'avons pas les températures T_1 et T_2 , nous les remplaçons par les températures des plaques de cuivre T_{1Cu} et T_{2Cu} :

$$G_S = -\frac{I_S}{T_{2Cu} - T_{1Cu}} = -\frac{-0.075 \text{ W K}^{-1}}{30 \text{ K}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ W K}^{-2}$$

Comme la différence de température utilisée ici est trop élevée, une meilleure valeur de la conductance entropique sera plus élevée (proche de $3.7 \cdot 10^{-3} \text{ W K}^{-2}$).

Puissance et diagramme caractéristique du module PELTIER comme générateur. Jusqu'ici, nous avons utilisé les données de l'expérience qui se déroulait avec le circuit électrique ouvert. Lorsque les deux faces du module PELTIER sont à des températures différentes, une tension apparaît à ses bornes. Comme cette tension est mesurée en circuit ouvert, elle doit correspondre à la tension d'un générateur interne, comme c'est le cas lors de la mesure de la tension à vide d'une batterie.

Pour pouvoir étudier plus en détail les propriétés électriques du générateur, nous allons utiliser une variante de l'expérience décrite plus haut. Lorsque le module PELTIER est pris en sandwich entre deux plaques métalliques (ou deux volumes d'eau) à des températures différentes et fonctionne en tant que générateur, nous varions successivement la valeur de la résistance ohmique de charge et relevons les tensions $U_{R, \text{ext}}$ et U_{MP} (qui doivent être égales). Le module est la paroi qui sépare les deux volumes d'eau de la figure III.2a. Les résultats de l'expérience sont reportés dans la figure III.12a.

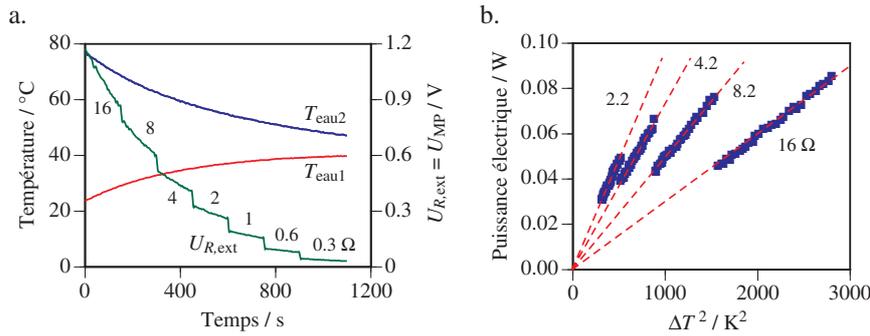


FIGURE III.12 Module PELTIER utilisé comme générateur: (a) le module fonctionne entre deux volumes d'eau de températures respectives T_{eau1} et T_{eau2} . Les valeurs sur la courbe représentant $U_{R,ext}$ sont celles de la résistance de charge utilisée pour la durée suivante de l'expérience; (b) puissance électrique en fonction du carré de la différence de température.

Comme les propriétés du générateur PELTIER évoluent avec la différence de température, nous ne pouvons pas utiliser directement les données expérimentales. Nous devons essayer de rapporter tous les calculs à la même différence de température, qui peut être arbitraire.

Nous savons sur la base d'observations précédentes (fig. III.5a) que la puissance électrique est proportionnelle au carré de la différence de température. Le calcul de la puissance est simple, vu que nous connaissons la tension $U_{R,ext}$ et la valeur de la résistance externe utilisée :

$$P_{el} = \frac{1}{R_{ext}} U_{R,ext}^2 \tag{III.6}$$

La puissance électrique doit être calculée séparément pour chacune des phases de l'expérience de la figure III.12a. Les résultats sont représentés dans la figure III.12b en fonction du carré de la différence de température pour les quatre premières valeurs de la résistance externe. Chaque jeu de données peut être ajusté par une relation linéaire. À partir de ces relations, nous pouvons calculer la puissance pour chacune des charges pour la même différence de température, par exemple 50 K. Ces valeurs ont été calculées pour chacune des phases et la puissance a été représentée dans la figure III.13a en fonction de la résistance sur une échelle logarithmique. Le résultat est le même que celui que l'on obtient lors de l'étude des éléments galvaniques (batteries) : la puissance atteint un maximum pour une valeur particulière de la résistance.

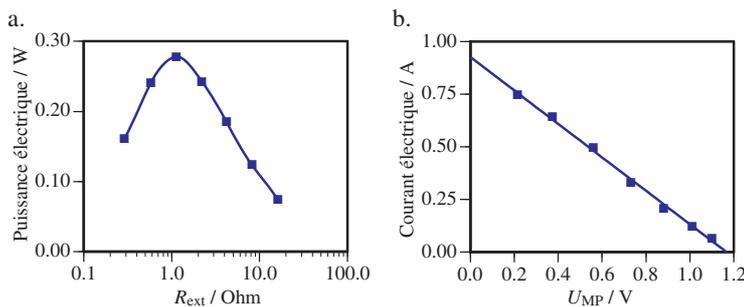
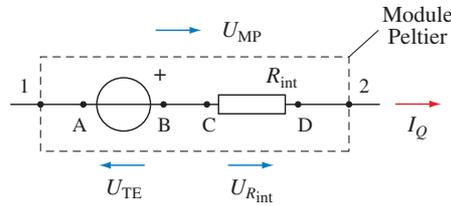


FIGURE III.13 Caractéristiques d'un module PELTIER: (a) puissance du module entre deux volumes d'eau en fonction de la résistance de la charge; les valeurs ont été calculées ou extrapolées pour une différence de température de 50 K; (b) caractéristiques du module PELTIER, pour la même différence de température.

Nous approchons du but. Connaissant la puissance électrique d'une charge et sa résistance, nous pouvons calculer l'intensité du courant qui s'écoule à travers la charge :

$$I_Q = \sqrt{\frac{P_{el}}{R_{ext}}} \tag{III.7}$$

FIGURE III.14 Modèle du fonctionnement d'un module PELTIER. Un générateur électrique idéal, qui établit une tension entre les points A et B, est la force d'entraînement du module en mode générateur. Le module est en outre caractérisé par une résistance interne R_{int} . La tension du module U_{MP} , entre les points 1 et 2, est la somme de U_{TE} et $U_{R,\text{int}}$. Elle est négative, si le courant circule vers la droite, lorsque le module fonctionne en mode générateur thermoélectrique.



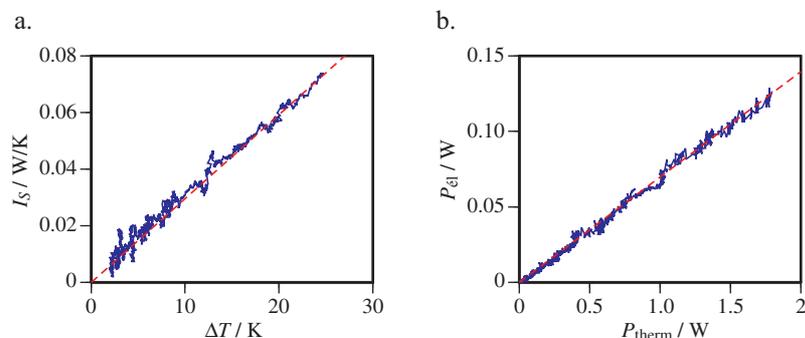
Nous pouvons calculer la résistance interne de notre modèle de deux manières différentes. À partir de la caractéristique de la figure III.13b, nous obtenons une valeur d'approximativement 1.2Ω . Mais, si nous regardons attentivement les données recueillies au début de l'expérience, nous voyons que la tension U_{MP} aux bornes du module et $U_{R,\text{ext}}$ sur la résistance externe sont pratiquement égales (fig. III.8b), ce qui démontre que le module possède une résistance interne. La tension fournie par l'alimentation est répartie de manière égale sur le module PELTIER et la résistance externe, ce qui suggère que la résistance interne R_{int} est pratiquement égale à celle de la résistance externe, qui était de 1.0Ω lors de l'expérience.

Enfin, nous pouvons comprendre pourquoi la tension sur le module PELTIER augmente durant la première phase de l'expérience (fig. III.8b), alors que $U_{R,\text{ext}}$ diminue. Dès qu'une différence de température s'établit entre les deux faces du module, la tension thermoélectrique apparaît également alors même que le module est en mode pompe à chaleur. Les résultats indiquent que U_{TE} doit être positive: nous avons donc trois tensions positives qui se partagent celle de l'alimentation. Il s'ensuit que $U_{R,\text{ext}}$ et le courant électrique diminuent, laissant une tension plus élevée pour U_{MP} .

III.2.4 Comparaison des puissances électrique et thermique

Les données obtenues lors de l'expérience nous permettent de dériver encore d'autres résultats. Examinons les résultats de la phase 2, durant laquelle le module fonctionne comme générateur (fig. III.8, $t > 100$ s). Nous allons utiliser les taux de variation des températures $T_{1\text{Cu}}$ et $T_{2\text{Cu}}$ pour obtenir ceux de l'entropie. Il nous faut pour pouvoir estimer le flux d'entropie qui s'écoule à travers le module, comme dans le diagramme de processus de la figure III.5b. Le résultat de cette évaluation apparaît dans la figure III.15a.

FIGURE III.15 (a) Courant d'entropie à travers le générateur en fonction de la différence de température (les températures utilisées sont celles des blocs de cuivre). (b) Relation entre les puissances électrique et thermique.



Le courant d'entropie et la différence de température peuvent être utilisés pour calculer la puissance thermique du module; de manière analogue, nous utilisons la tension sur la résistance de charge et l'intensité du courant électrique pour calculer la puissance électrique:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{therm}} &= (T_{2\text{Cu}} - T_{1\text{Cu}}) I_S \\ \mathcal{P}_{\text{él}} &= U_{R,\text{ext}} I_Q \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Les résultats de ces calculs sont présentés dans la figure III.15b, où la puissance électrique est reportée en fonction de la puissance thermique. Le résultat le plus important est que la relation entre les deux grandeurs est linéaire: une fraction constante de l'énergie libérée dans le processus thermique, c'est-à-dire la chute de l'entropie entre deux niveaux de la température, est utilisée pour entraîner la charge électrique d'un niveau bas vers un niveau plus élevé du potentiel électrique. Cette fraction représente la mesure naturelle de l'efficacité du module, appelée *efficacité selon la deuxième loi* (chapitre 5, section 5.8.2, équation (5.51)):

$$\eta_{\text{II}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{él}}}{\mathcal{P}_{\text{therm}}} \quad (\text{III.9})$$

Les résultats de nos expériences montrent que cette efficacité est d'environ 7%. C'est approximativement la moitié de la valeur prédite par la théorie. La différence est facile à expliquer. Nous avons effectué les calculs à partir de la seule différence de température qui nous est accessible, celle des plaques de cuivre. Cette différence $T_{2\text{Cu}} - T_{1\text{Cu}}$ est nettement plus élevée que la différence de température $T_2 - T_1$ entre les deux faces du module PELTIER. Nous devons admettre qu'il existe une résistance de contact thermique entre les plaques de cuivre et le module qui cause un saut de température aux surfaces de contact (fig. III.16).

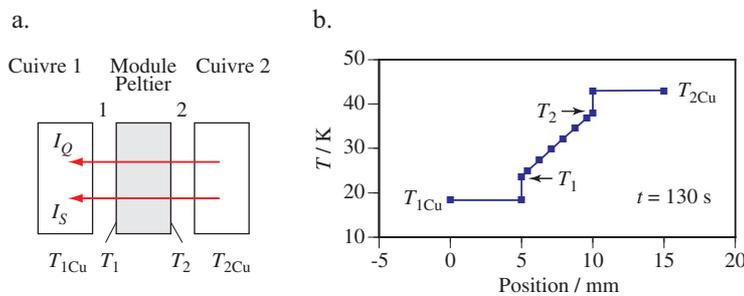


FIGURE III.16 Saut de température aux surfaces de contact: (a) schéma du dispositif expérimental (les plaques de cuivre ont une épaisseur de 5 mm); (b) évolution de la température; les données sont tirées de la simulation d'un modèle dynamique pris à un point fixe dans le temps, à savoir $t = 130$ s. L'entropie circule si facilement dans les plaques de cuivre qu'elles sont presque isothermes. La simulation montre le saut de température à la jointure entre les plaques de cuivre et le module PELTIER.

III.3 MODÈLES DYNAMIQUES D'UN MODULE PELTIER

Nous avons réussi à glaner une grande quantité d'informations par une analyse des données recueillies lors des expériences décrites plus haut. Nous devrions être en mesure de comprendre les processus de transport d'entropie et de charge électrique, et nous savons comment introduire les paramètres matériels, coefficients SEEBECK et PELTIER, résistance électrique interne, conductance entropique, qui permettent de quantifier les effets. Cependant, pour ces quatre coefficients, nous n'avons pour l'instant qu'une seule estimation fiable, celle de la résistance interne du module, proche de 1.0Ω . Les trois autres estimations numériques souffrent d'une connaissance insuffisante des températures du module, vu que nous n'avons pu mesurer que les températures

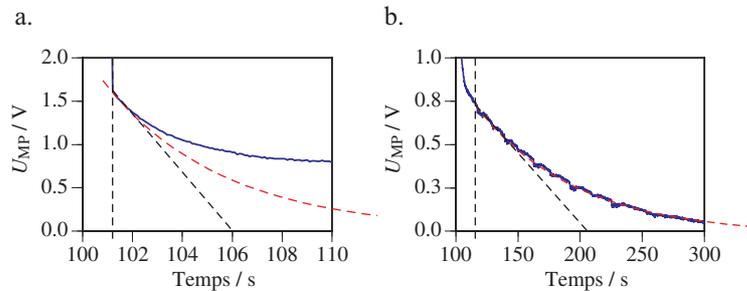
des plaques de cuivre ou des volumes d'eau entre lesquels le module PELTIER était pris en sandwich. Les températures réelles mais inobservables ne peuvent être obtenues qu'à partir de simulations, comme par exemple le résultat représenté dans la figure III.16b.

En outre, il est assez difficile d'aborder les effets dynamiques si l'on n'a que des données et des concepts simples. Prenons, à titre d'exemple, la mesure de la tension aux bornes du module PELTIER en mode circuit ouvert (fig. III.8d). Juste après la coupure de l'alimentation, un agrandissement du graphique fait apparaître deux temps caractéristiques pour l'évolution de la tension (fig. III.17).

La plus courte de ces constantes de temps est liée à la capacité entropique du module PELTIER. Nous pouvons certainement essayer d'estimer cette grandeur sans recourir à un modèle dynamique élaboré, mais il sera plus simple de cerner cette valeur si nous pouvons ajuster des séries temporelles expérimentales à des simulations de la dynamique des systèmes étudiés jusqu'ici.

En résumé, les modèles dynamiques vont nous permettre d'effectuer des simulations de situations dont l'étude expérimentale, destinée à développer de nouveaux systèmes thermoélectriques, coûterait beaucoup trop de temps.

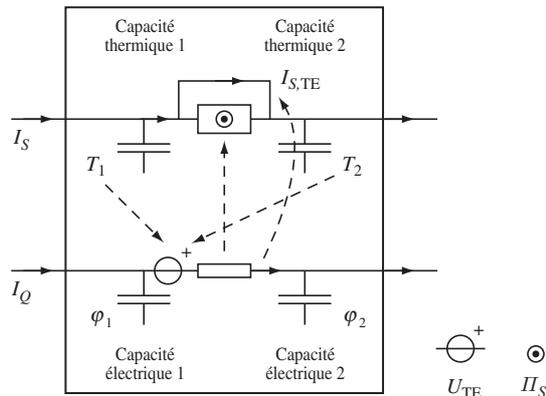
FIGURE III.17 Tension sur le module PELTIER après coupure de l'alimentation: (a) décroissance initiale de la tension avec une constante de temps d'environ 5 s; (b) décroissance lente de la tension avec une constante de temps d'environ 90 s.



III.3.1 Idée pour un modèle dynamique de base

Le point de départ pour un modèle dynamique qui englobe tous les aspects discutés jusqu'ici est l'observation qu'un module PELTIER ressemble à un panneau qui a un côté chaud et un côté froid. Simultanément, un côté est à un potentiel électrique élevé, le côté opposé à un potentiel moindre.

FIGURE III.18 Modèle dynamique d'un module thermoélectrique composé de deux éléments de stockage de l'entropie qui définissent les températures des côtés chaud et froid, et de deux condensateurs qui définissent les potentiels haut et bas. Les éléments comprennent également un générateur idéal, un flux couplé de charge et d'entropie et des flux conductifs d'entropie et de charge.



Cela suggère le modèle suivant (fig. III.18). Le module consiste en deux éléments de stockage de l'entropie, pour le côté froid et le côté chaud respectivement, l'entropie

accumulée déterminant la température, et deux condensateurs, pour le potentiel élevé et le potentiel bas respectivement, la charge du condensateur déterminant leur potentiel. Les températures associées aux capacités thermiques représentent les températures des faces respectives et la différence des potentiels des condensateurs est égale à la tension aux bornes du module PELTIER.

Une représentation graphique de ces idées est présentée dans la fig. III.18. Un générateur parfait responsable de la tension U_{TE} et une résistance pour le transport conductif de la charge sont placés entre les deux condensateurs, de manière analogue à une batterie, comme dans la figure III.14. La tension thermoélectrique est créée par la différence de température des capacités thermiques.

De même, une résistance thermique pour le flux conductif d'entropie est placée entre les capacités thermiques. Les flux couplés d'entropie et de charge qui sont responsables de l'effet thermoélectrique sont comme un pontage de cette résistance thermique. Il existe un *transport non dissipatif* d'entropie qui est directement couplé au courant électrique.

Dans ce modèle, la résistance thermique est la seule source de dissipation, c'est-à-dire de production d'entropie. Toute l'entropie produite s'ajoute au transport d'entropie entre les capacités thermiques. Le taux de production d'entropie est la conséquence de deux processus: le flux conductif de charge à travers la résistance électrique et le flux conductif d'entropie à travers la résistance entropique.

III.3.2 Un premier modèle dynamique concret

La transposition des idées relatives au fonctionnement du module PELTIER, illustrées dans la fig. III.18, en un modèle dynamique n'est pas difficile du tout. Elle est même rendue plus simple si nous traitons d'abord le cas d'un module isolé thermiquement de son environnement, ce qui nous permet d'ignorer les afflux et déflux d'entropie I_S de et vers les éléments thermoélectriques. Les quatre éléments capacitifs représentés par des réservoirs ainsi que les flux d'entropie et de charge constituent l'ossature de notre modèle (fig. III.19).

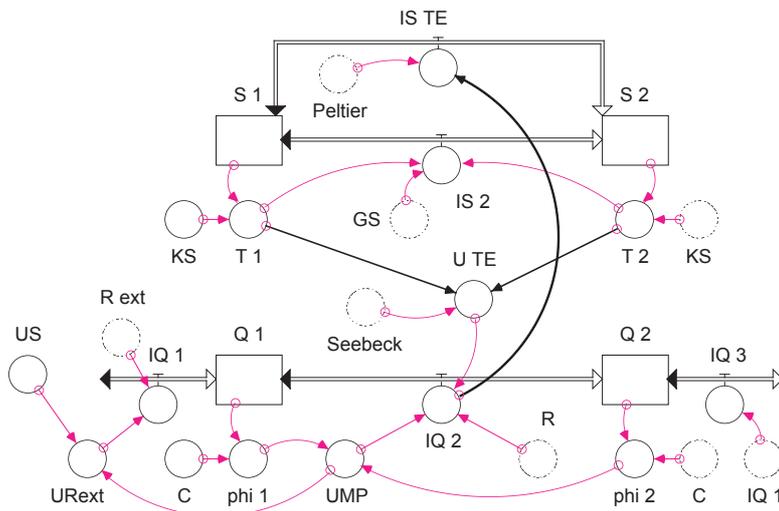


FIGURE III.19 Diagramme du modèle dynamique représentant les idées esquissées dans la fig. III.18. Les flux d'entropie de et vers l'environnement, ainsi que la production d'entropie dans le module ont été négligés. Les rétroactions entre les processus thermique et électrique sont représentées par des flèches épaisses.

Il existe deux types de transport d'entropie entre les capacités entropiques: l'un qui est couplé avec le courant de charge $I_{S, TE}$ entre les condensateurs, et le transport conductif I_{S2} causé par la différence de température $T_2 - T_1$. Ce dernier a déjà été modélisé au chapitre 5, section 5.6.1 :

$$I_{S2} = -2G_S(T_2 - T_1) \quad (\text{III.10})$$

Si G_S est censé représenter la conductance entropique totale du module, le facteur 2 prend en compte le fait que les centres des deux éléments capacitifs thermiques ne sont séparés que par la moitié de l'épaisseur du module. Le transfert thermoélectrique d'entropie est formulé comme dans la section (III.2), ce qui nous donne la première des deux relations de rétroaction entre les processus électrique et thermique. L'irréversibilité (production d'entropie dans le module) n'a pas été prise en compte.

La charge électrique s'écoule entre les condensateurs, entraînée par la tension sur la résistance interne R_{int} (fig. III.14). C'est la conséquence de l'interaction entre la tension U_{MP} aux bornes du module qui est égale à la différence des potentiels électriques des deux faces du module PELTIER et de la tension thermoélectrique U_{TE} :

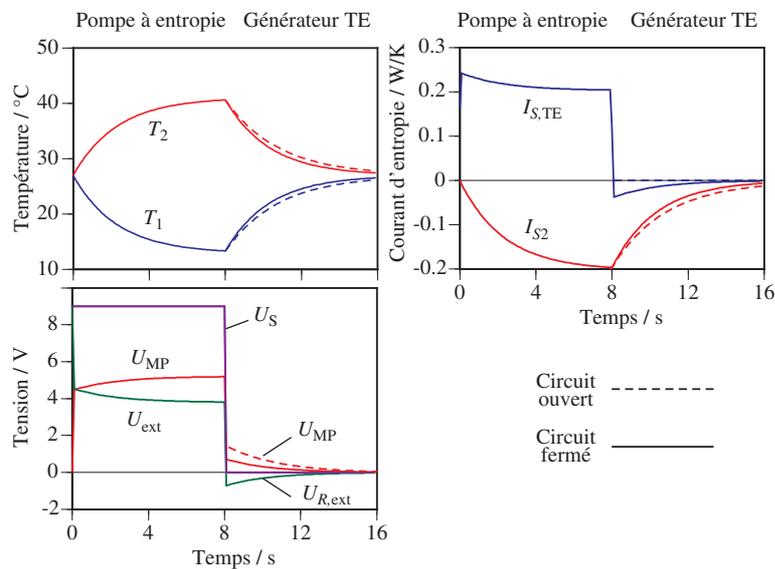
$$U_{R,\text{int}} = -(\varphi_2 - \varphi_1) - U_{\text{TE}} \quad (\text{III.11})$$

Finalement, la tension U_{TE} est calculée à partir de la différence de température $T_2 - T_1$, comme dans l'équation (III.4), ce qui conclut la seconde rétroaction entre les processus thermique et électrique. Il ne reste plus qu'à déterminer l'intensité du courant électrique dans la partie externe du circuit: I_{Q1} dépend de $U_{R,\text{ext}}$ qui est égal à la différence de U_S et U_{MP} . Notons que I_{Q3} est égal à I_{Q1} , ce qui ferme le circuit.

III.3.3 Simulation du modèle non dissipatif

Si nous attribuons aux paramètres les valeurs déterminées et discutées dans notre analyse de l'expérience à la section III.2 et que nous utilisons une fonction en marche d'escalier pour la tension U_S de l'alimentation, la simulation donne des résultats qui s'ajustent déjà assez bien aux fonctions mesurées (fig. III.20).

FIGURE III.20 Résultats de la simulation du modèle de la figure III.19. Les paramètres utilisés sont ceux qui sont fournis par le fabricant, avec la valeur de G_S doublée, vu que la distance entre les centres des capacités thermiques est seulement égale à la moitié de l'épaisseur du module. Les résultats pour le circuit ouvert après déclenchement de l'alimentation apparaissent en lignes discontinues.



Il y a deux différences principales entre la simulation et l'expérience. Tout d'abord, les processus se déroulent plus vite dans la simulation, de l'ordre de 10 fois plus rapidement. La raison en est simple: dans l'expérience, les plaques de cuivre ralentissent les processus à cause de leur très grande capacité entropique, alors que dans le modèle, le seul corps impliqué est le module PELTIER. Sa capacité entropique a été choisie de

manière à obtenir, pour les variations, une constante de temps semblable à la constante de temps courte observée lors de l'expérience (fig. III.17a).

La seconde différence est due au fait que nous avons négligé l'irréversibilité. Vu qu'il n'y a pas d'entropie produite dans le module isolé de l'environnement, les températures tendent vers une température d'équilibre qui est celle de départ : l'entropie du système est conservée.

Comme on pouvait s'y attendre, il y a des différences dans la seconde phase de la simulation (module en mode générateur) lorsque le circuit est laissé ouvert (lignes discontinues dans la figure III.20). La tension U_{MP} doit être plus élevée dans le circuit ouvert, vu qu'il n'y a pas de courant électrique et donc pas de tension résistive dans le module PELTIER ; les températures vont s'équilibrer plus rapidement si le circuit est fermé, étant donné que nous avons simultanément des courants d'entropie thermoélectrique et conductif, alors que le courant d'entropie thermoélectrique est nul si le circuit est ouvert. Cependant, le courant d'entropie conductif a une intensité plus grande dans le circuit ouvert, puisque les températures s'équilibrent plus lentement.

Capacités et problèmes numériques. Nos études antérieures de systèmes dynamiques RC simples nous ont appris que le produit des résistances et des capacités détermine les échelles de temps (constantes de temps) liées à l'évolution des variables. La constante de temps du système RC thermique est de quelques secondes, mais qu'en est-il de celle du système RC électrique ? Un module PELTIER n'est pas un condensateur dans le sens usuel du terme, et quelle que soit la valeur de la capacité, elle est très faible. En conséquence, la constante de temps électrique est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle de temps thermique. Dans un tel cas, on doit avoir recours à des méthodes mathématiques particulières pour la simulation du modèle, méthodes adaptées à l'intégration numérique d'équations différentielles raides (*stiff differential equations*). Ce sujet est abordé à l'Interlude II.

III.3.4 Récapitulation des lois constitutives

Les observations qui avaient été résumées par les équations (III.2) et (III.4) concernent les «effets purs» : entropie pompée à une différence de température nulle et tension thermoélectrique pour un courant électrique nul. Le modèle que nous avons élaboré ici présente le cas général, ce qui implique que nous devons prendre en compte les effets conductifs des flux d'entropie et de charge électrique. Cela suggère les relations constitutives générales pour le transport d'entropie à travers le module thermoélectrique et la tension à ses bornes.

S'il n'y a pas de transport conductif d'entropie, c'est-à-dire si la différence de température entre les extrémités du module PELTIER est nulle, il n'y a qu'un seul courant d'entropie, celui qui est donné par l'équation (III.2). Cependant, en général, le courant d'entropie est la somme de courants thermoélectrique et conductif :

$$I_s = \alpha I_Q - G_S (T_2 - T_1) \quad (\text{III.12})$$

où G_S est la conductance entropique du module. D'autre part, la tension thermoélectrique de l'équation (III.4) est la seule différence de potentiel entre les condensateurs s'il n'y a pas de flux de charge dans le circuit électrique. C'est le cas lorsque le circuit est ouvert. Autrement dit, la différence de potentiel est la somme des parties thermoélectrique et résistive, c'est-à-dire, selon l'équation (III.11) : $U_{MP} = U_{TE} + U_{R, \text{int}}$, ce qui donne :

$$U_{MP} = \varepsilon (T_2 - T_1) + R_{Q, \text{int}} I_Q \quad (\text{III.13})$$

Les deux dernières équations sont les formes intégrées de la représentation des processus thermoélectriques qui inclut les variations spatiales (chapitre 12, section 12.7).

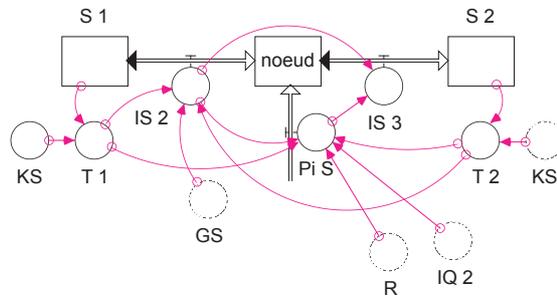
Le modèle est complété par les relations constitutives de type capacitif pour l'entropie et la charge électrique. Si nous admettons que ces capacités sont constantes, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} S &= K_s T \\ Q &= C_Q \phi \end{aligned} \tag{III.14}$$

III.3.5 Modèle incluant la dissipation

L'adjonction des effets de la dissipation, autant électrique que thermique, est assez simple. Nous calculons les taux de dissipation pour les flux conductifs d'entropie et de charge et les divisons par la température (fig. III.21). Les taux de dissipation sont égaux aux puissances électriques et thermiques associées aux transports conductifs et se calculent de la manière usuelle.

FIGURE III.21 Diagramme du segment du modèle dynamique de la figure III.19 qui sert à intégrer l'évaluation des taux de production d'entropie causés par les dissipations électrique et thermique.



L'expression pour le taux total de production d'entropie est la somme des contributions thermique et électrique :

$$\Pi_s = \frac{1}{T} \left[G_s (T_2 - T_1)^2 + R_{Q,int} I_Q^2 \right] \tag{III.15}$$

En fait, l'expression dépend plus précisément du sens du flux conductif d'entropie, c'est-à-dire de la localisation du côté le plus chaud. En fonction de la situation, nous utilisons soit T_1 , soit T_2 pour T dans l'équation (III.15). Si les différences de température sont faibles par rapport aux valeurs actuelles de la température, la valeur que nous prenons pour T n'a pas grande importance. Dans le modèle, nous avons choisi T_2 , et les résultats de la simulation sont montrés dans la figure III.22. Nous constatons que, maintenant, les températures croissent en moyenne, tout comme l'avaient révélé les expériences. Les tensions exhibent le comportement typique et n'ont pas beaucoup évolué. Les taux de production d'entropie sont une fraction de l'intensité du courant d'entropie conductif. En mode pompe à chaleur, l'intensité de la dissipation électrique est relativement élevée; en mode générateur, la dissipation électrique est plus faible que celle qui est due au flux conductif d'entropie.

III.3.6 Coefficients SEEBECK et PELTIER

Lorsque nous avons calculé des valeurs numériques à partir des expériences, nous avons observé que les coefficients SEEBECK et PELTIER devraient être égaux. Notre analyse relativement grossière ne l'a pas confirmé directement, les valeurs obtenues

pour les coefficients PELTIER et SEEBECK étant respectivement de 0.023 V K^{-1} et 0.028 V K^{-1} , alors que le fabricant donne une valeur de 0.053 V K^{-1} .

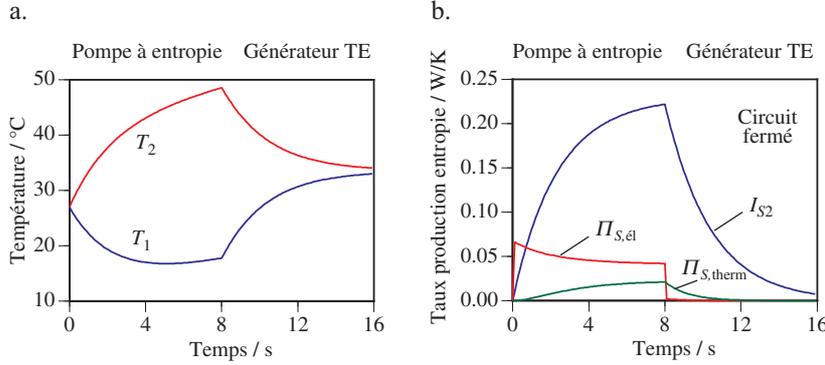


FIGURE III.22 Résultats de la simulation du modèle de la figure III.19 incluant les effets dissipatifs pris en compte dans la figure III.21 et l'équation (III.15): (a) températures associées aux éléments capacitifs du modèle; (b) taux de production et flux d'entropie.

Une démonstration élégante de l'égalité des deux coefficients doit attendre une analyse détaillée des relations énergétiques dans un module PELTIER (section III.4). Mais en nous appuyant sur des résultats simulés, nous pouvons d'ores et déjà montrer que la loi de conservation de l'énergie ne serait pas respectée si les deux coefficients n'étaient pas égaux.

Notre modèle peut être utilisé pour évaluer des grandeurs énergétiques. Le bilan global d'énergie se présente comme suit. Considérons la phase initiale lorsque le module fonctionne comme une pompe à entropie. De l'énergie est injectée par l'alimentation externe. Ce flux d'énergie dans le système est divisé en trois parties. Une part va être accumulée dans le système capacitif thermique, la deuxième partie est stockée dans le système capacitif électrique et la troisième partie quitte le système par l'intermédiaire de la résistance externe. Les intensités de flux et les taux de variation des quantités accumulées se calculent de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 I_{E,in} &= U_S I_{Q1} \\
 \dot{E}_{TC} &= T_1 \dot{S}_1 + T_2 \dot{S}_2 \\
 &= T_1 (-I_{S,TE} - I_{S2}) + T_2 (-I_{S,TE} + I_{S3}) \\
 \dot{E}_{EC} &= \varphi_1 \dot{Q}_1 + \varphi_2 \dot{Q}_2 \\
 &= \varphi_1 (I_{Q1} - I_{Q2}) + \varphi_2 (I_{Q2} - I_{Q3}) \\
 I_{E,R,ext} &= R_{ext} I_{Q1}^2
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

La signification de ces grandeurs peut être lue dans les diagrammes de modèle dynamique des figures III.19 et III.21. Le bilan de ces grandeurs exige que:

$$0 = I_{E,in} + \dot{E}_{TC} + \dot{E}_{EC} + I_{E,R,ext} \tag{III.17}$$

Lors de la simulation du modèle, cette relation n'est satisfaite que si $\alpha = \varepsilon$.

III.3.7 Intégration des deux plaques de cuivre dans le modèle

Il ne nous reste plus qu'à montrer comment modéliser le transfert d'entropie de et vers l'environnement. Nos expériences (fig. III.8) nous suggèrent ce à quoi il faut s'attendre.

Extension du modèle. L'adjonction des éléments de la figure III.7 dans le modèle existant du module PELTIER est assez simple. Nous devons ajouter les éléments qui représentent les deux plaques de cuivre en y incluant les transports d'entropie associés, tous les processus additionnels étant de caractère uniquement thermique.

Chaque plaque de cuivre est représentée en tant que réservoir d'entropie ; un réservoir unique par plaque est suffisant, vu que le cuivre conduit l'entropie tellement bien que nous pouvons admettre que ces éléments ont une température unique. L'entropie est transférée d'une plaque vers le module PELTIER, mais également vers l'environnement ; ce processus doit être pris en compte, vu que l'isolation thermique était relativement simple lors de l'expérience. La figure III.23 explicite la partie thermique du modèle.

Chacun de ces modes de transfert est de type conductif. Il nous faut les températures des plaques de cuivre, des deux faces du module PELTIER et la température ambiante. Les courants d'entropie peuvent être modélisés en termes de différences de température et de conductances entropiques appropriées.

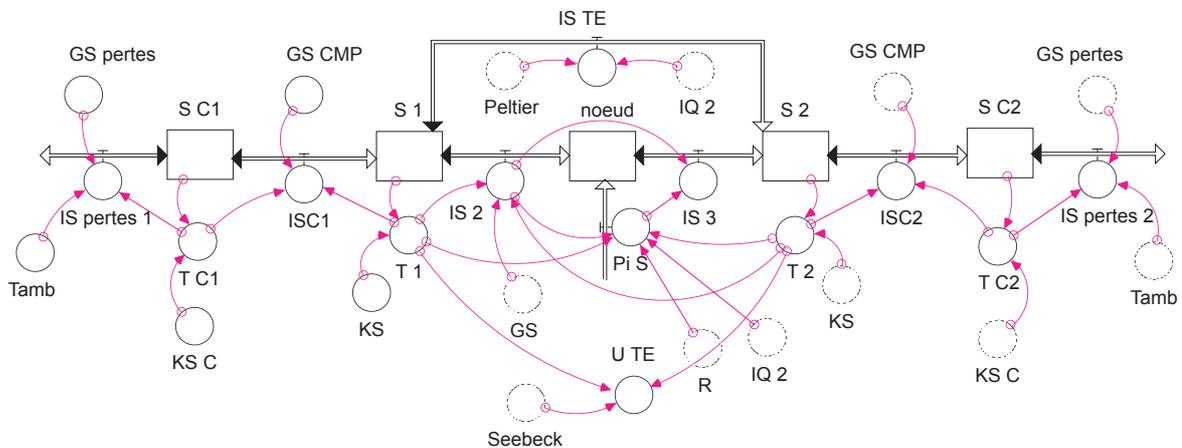


FIGURE III.23 Partie thermique du modèle relatif à l'interaction du module PELTIER avec les deux plaques de cuivre entre lesquelles il est enserré. Ces blocs de cuivre peuvent perdre ou recevoir de l'entropie vers ou de l'environnement à une température T_{amb} . Il manque ici les expressions pour la production d'entropie résultant du transfert d'entropie entre le cuivre et le module PELTIER.

La conductance $G_{S, pertes}$ est déterminée par l'interface convective entre le cuivre et l'air. Une estimation pour une valeur minimale donne :

$$G_{S, pertes} \approx 4\Delta x L h_s$$

$$= 4 \cdot 0.010 \text{ m} \cdot 0.060 \text{ m} \cdot \frac{20 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}}{300 \text{ K}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ W K}^{-2}$$

Le coefficient de transfert $G_{S, CMP}$ prend en compte la conduction à travers la moitié de l'épaisseur du bloc de cuivre, un quart de l'épaisseur du module PELTIER et une résistance de contact entre les surfaces du cuivre et du module. Le troisième de ces effets se révèle être le facteur majeur dans ce cas. Le premier peut être complètement négligé et le deuxième est quantifié en termes de conductance du module PELTIER.

Les deux conductances entropiques seront déterminées par approximations successives en ajustant les résultats des simulations du modèle aux données expérimentales. Le résultat pour la conductance de l'interstice entre le cuivre et le module est d'approximativement 0.015 W K^{-2} . Si nous utilisons la valeur de la conductance entropique globale d'une plaque de cuivre à l'autre à travers le module PELTIER, valeur que

nous avons déterminée à partir des données de la figure III.11, la conductance de l'interstice nous permet d'évaluer à 0.0035 W K^{-2} celle du module PELTIER, ce qui correspond à la valeur donnée par le fabricant.

Afin de compléter le modèle, nous devons introduire les capacités entropiques des deux blocs de cuivre. Nous connaissons le coefficient de température de l'énergie du cuivre qui est d'approximativement $400 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Si nous acceptons une température moyenne de 310 K , une estimation de la capacité entropique d'un bloc unique de cuivre de masse égale à 0.31 kg est approximativement égale à 0.40 J K^{-2} .

Simulations. Lorsque le modèle est simulé en utilisant des paramètres proches des valeurs que nous avons utilisées jusqu'ici, nous obtenons des résultats très satisfaisants, si nous considérons la simplicité du modèle (fig. III.24). La comparaison avec les données expérimentales nous permet d'ajuster les paramètres inconnus, tels que ceux de la perte d'entropie vers l'environnement, du transfert d'entropie du cuivre vers le module, de la capacité entropique du module et de la conductance entropique du module. Si nous utilisons les valeurs données par le fabricant pour le coefficient SEEBECK (et PELTIER) et la résistance interne électrique, seul l'ajustement de la conductance du module n'est pas totalement satisfaisante. Cependant, la précision du résultat s'améliore considérablement si le module PELTIER est modélisé en utilisant plus que seulement deux éléments capacitifs thermiques.

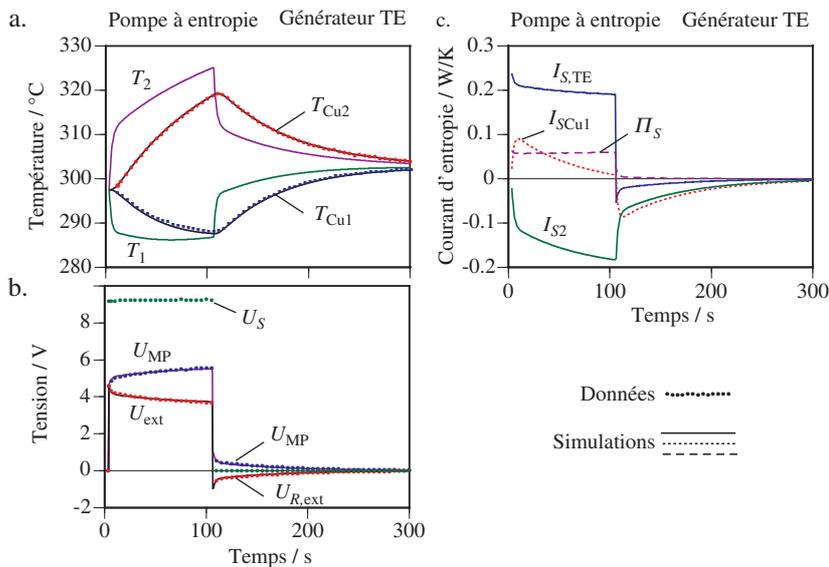


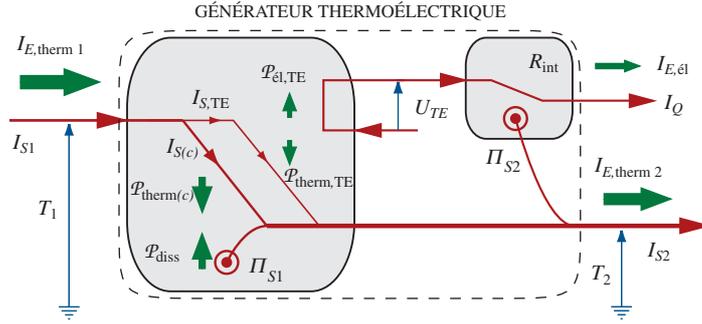
FIGURE III.24 Résultats des simulations du modèle de la figure III.23 comparés aux données de l'expérience de la fig. III.8a : (a) températures des éléments en cuivre et des éléments capacitifs thermiques ; (b) tensions ; (c) quelques courants d'entropie et taux total de production d'entropie.

III.4 RÔLE DE L'ÉNERGIE DANS LES PROCESSUS THERMOÉLECTRIQUES

Jusqu'ici, nous avons réussi à analyser le fonctionnement d'un module thermoélectrique sans avoir recours à des considérations énergétiques. Nous espérons en obtenir une meilleure compréhension en faisant appel à la loi de conservation de l'énergie. En fait, nous pourrions en dériver l'égalité des coefficients de couplage thermoélectrique, les coefficients SEEBECK et PELTIER : Cette relation est la *relation de réciprocité*.

Considérons un module PELTIER fonctionnant en mode générateur entre deux températures T_1 et T_2 (fig. III.25). Nous admettons que la production d'entropie due au transfert de et vers le module se déroule à l'extérieur du système analysé, et la production d'entropie due à la conduction électrique a été symbolisée séparément pour clarifier le rôle de la tension U_{TE} en tant que conséquence directe de l'effet thermoélectrique.

FIGURE III.25 Diagramme de processus d'un générateur thermoélectrique. La résistance interne électrique a été dessinée séparément afin de clarifier le rôle de la tension U_{TE} . Il faut noter que $I_{E,\epsilon 1} < P_{\epsilon 1,TE}$. $P_{\text{therm,cond}}$ est la puissance du courant conductif d'entropie, alors que $P_{\text{therm,TE}}$ est associé au courant d'entropie couplé au flux de charge électrique.



L'entropie s'écoule à travers le module entraînée par la différence de température. Il faut faire la distinction entre deux composantes de ce flux d'entropie : le courant conductif $I_{S,\text{cond}}$ et le courant thermoélectrique $I_{S,\text{TE}}$; ce dernier est couplé au courant électrique d'après l'équation (III.2). Le courant conductif est purement dissipatif, l'énergie libérée lors de sa chute de T_1 à T_2 est utilisée pour produire de l'entropie. La chose est différente pour $I_{S,\text{TE}}$: sa chute est non dissipative, l'énergie libérée est utilisée pour entraîner le courant électrique à travers la différence de potentiel U_{TE} .

Égalité des coefficients PELTIER et SEEBECK. Pour conclure la conceptualisation du rôle de l'énergie dans un processus thermoélectrique, nous allons maintenant donner une démonstration simple de l'égalité des coefficients de couplage thermoélectrique α et ϵ . Les puissances thermique et électrique lors du processus thermoélectrique sont données par :

$$\begin{aligned} P_{\text{therm,TE}} &= (T_1 - T_2) I_{S,\text{TE}} \\ P_{\epsilon 1,TE} &= U_{TE} I_Q \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Vu que ces deux puissances sont égales, et que les équations (III.4) et (III.2) nous donnent respectivement U_{TE} et $I_{S,\text{TE}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2) I_{S,\text{TE}} &= U_{TE} I_Q \\ (T_1 - T_2) \alpha I_Q &= \epsilon (T_1 - T_2) I_Q \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

ce qui démontre l'égalité des coefficients PELTIER et SEEBECK.

Efficacité des modules thermoélectriques selon la deuxième loi. Au chapitre 5, section 5.8.2, l'efficacité selon la deuxième loi a été introduite en tant que mesure naturelle de la manière dont fonctionne une machine thermique. Pour une machine simple, elle est égale au quotient de la puissance utile au déroulement du processus et de la puissance due à la chute de l'entropie entraînant la machine thermique. Cette idée peut être utilisée dans le cas des générateurs thermoélectriques (fig. III.25) et des refroidisseurs (fig. III.26).

Pour un générateur, la définition est évidente. L'efficacité selon la deuxième loi est égale à la puissance électrique utile (puissance thermoélectrique moins puissance du processus électrique résistif) divisée par la puissance due à la chute du courant d'entropie I_{S1} de T_1 à T_2 :

$$\eta_{II} = \frac{P_{\epsilon 1,TE} - R_{\text{int}} I_Q^2}{(T_1 - T_2) I_{S1}} = \frac{\epsilon^2 R_{\text{ext}} / (R_{\text{ext}} + R_{\text{int}})}{(R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}) G_S + \epsilon^2} \quad (\text{III.20})$$

C'est le résultat que l'on obtient pour une charge ohmique connectée aux bornes du générateur thermoélectrique. R_{ext} est la résistance de la charge externe, R_{int} , G_s et ε sont les trois paramètres du module, à savoir la résistance interne, la conductance entropique et le coefficient SEEBECK. Pour le module Melcor CP-127-06L, l'efficacité est de 14%, comme mentionné plus haut.

Ce résultat nous permet de discuter comment il serait possible d'améliorer l'efficacité en certaines circonstances. Pour un générateur donné, nous souhaiterions trouver la valeur de la charge qui optimise l'efficacité selon la deuxième loi. Ou encore, en fonction de l'objectif caractérisé par la charge, nous souhaitons adapter les caractéristiques du générateur pour améliorer les performances du système.

Le cas du refroidisseur thermoélectrique est semblable. L'efficacité selon la deuxième loi peut être définie en tant que quotient de la puissance utile de pompage du courant d'entropie I_{S1} de T_1 à T_2 et de la puissance électrique d'entraînement $U_{\text{ext}}I_Q$ (fig. III.26):

$$\eta_{\text{II}} = \frac{(T_2 - T_1)I_{S1}}{U_{\text{ext}}I_Q} \quad (\text{III.21})$$

Après substitution des relations constitutives, nous obtenons une expression pour η_{II} pour une valeur donnée de I_Q :

$$\eta_{\text{II}} = \frac{\varepsilon I_Q - G_s (T_2 - T_1)}{\varepsilon (T_2 - T_1) I_Q + R_{\text{int}} I_Q^2} (T_2 - T_1) \quad (\text{III.22})$$

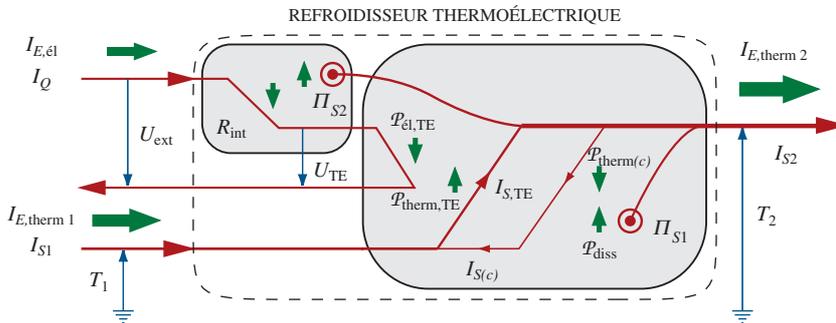


FIGURE III.26 Diagramme de processus d'une pompe à chaleur PELTIER. La résistance interne électrique a été dessinée séparément afin de clarifier le rôle de la tension U_{TE} . Il faut noter que $U_{\text{ext}} > U_{\text{TE}}$. $P_{\text{therm, cond}}$ est la puissance du courant conductif d'entropie, alors que $P_{\text{therm, TE}}$ est associé au courant d'entropie couplé au flux de charge électrique.

Il est important de noter que les équations utilisées pour calculer l'efficacité selon la deuxième loi pour le générateur thermoélectrique et le refroidisseur ne prennent pas en compte les transferts d'entropie de et vers les modules. Si nous incluons ces transferts, les résultats sont considérablement plus faibles.

III.5 PHÉNOMÈNES THERMOÉLECTRIQUES EN TANT QUE PROCESSUS CHIMIQUES

Au chapitre 6, section 6.3.1, équation (6.10), nous avons découvert que la charge électrique est couplée aux substances de base impliquées dans les transports de charge, tels que électrons et trous. Lors de l'étude des processus électrochimiques, nous avons appris qu'il existe une quantité fixe de charge électrique par quantité de substance, par exemple, les 96485 As de charge par mole d'électrons.

Mais les substances stockent également de l'entropie et nous pouvons rapporter sa quantité à la quantité de matière. Contrairement à la charge électrique, la quantité d'entropie transportée par les porteurs de charge (électrons, trous) dépend des caractéristiques thermoélectriques du matériau.

L'image de substances transportant à la fois de la charge et de l'entropie nous permet d'interpréter les grandeurs thermoélectriques fondamentales, les coefficients PELTIER et SEEBECK, en tant que quotient de l'entropie par quantité de matière et de la charge par quantité de matière :

$$\alpha \equiv \varepsilon = \frac{S/n}{Q/n} = \frac{\bar{s}}{\bar{q}} = \frac{\bar{s}}{\mathcal{F}} \quad (\text{III.23})$$

où \bar{s} est l'entropie molaire de la substance porteuse de charge et \bar{q} la charge molaire, à savoir la constante de FARADAY mentionnée plus haut. La première dépend du matériau, la seconde est une constante universelle. Les coefficients thermoélectriques sont donc dépendants du matériau.

Références

ALFREY A. J. (2002-2006): Cooling System Design for Scientific Applications Using Thermoelectric Coolers: A Case Study in Cooling Large Laser Diodes. Spin One, Woodside, CA.

FUCHS H. U. (2010): *The Dynamics of Heat. A Unified Approach to Thermodynamics and Heat Transfer*. Springer, New York. Chapter 4.

FUCHS H. U. (2014): A Direct Entropic Approach to Uniform and Spatially Continuous Dynamical Models of Thermoelectric Devices. *Energy Harvesting Systems*, **1**, 3-4.

LAU P. G., BUIST R. J. (1996): Temperature and Time Dependent Finite-Element Model of a Thermoelectric Couple. TE Technology Inc., Traverse City, MI.

Melcor: CP Series TECs.

Melcor: Application Notes for Thermoelectric Devices.

CHAPITRE 7

MOMENT CINÉTIQUE ET ÉNERGIE

Dans ce chapitre, nous allons découvrir de quelle manière les structures communes à l'hydraulique, l'électricité, la thermodynamique et aux processus chimiques sont transposables aux processus mécaniques, pour commencer à ceux qui traitent du mouvement de rotation. Nous verrons dans le chapitre suivant comment elles sont applicables au processus de translation.

Nous introduirons une nouvelle grandeur extensive caractéristique pour ce type de processus, le moment cinétique. Comme nous l'avons fait pour la charge électrique, l'entropie ou la quantité de matière, nous n'essaierons pas de définir cette grandeur, mais nous la considérerons comme fondamentale et étudierons ses propriétés. C'est ainsi que nous découvrirons qu'elles sont les mêmes que celles des grandeurs extensives déjà rencontrées, ce qui entraînera l'apparition de phénomènes semblables.

7.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Les objets en rotation font partie de notre vie quotidienne. On en trouve dans les moteurs de nos appareils ménagers, dans ceux des véhicules, dans nos horloges et nos montres, dans les usines, les centrales électriques, et la liste n'est pas exhaustive. Dans cette première section, nous allons découvrir quelques exemples, passés ou présents, de machines comportant des éléments tournants, ainsi que la présence du phénomène de rotation dans la nature.

7.1.1 Exemples de machines utilisant la rotation

Pratiquement toutes les machines que nous utilisons ou qui ont été utilisées dans le passé comportent des éléments tournants.

- Le moulin à vent (fig. 7.1) a déjà été utilisé dans l'Antiquité; la première mention de son existence date du VII^e siècle avant Jésus-Christ, en Perse. Il s'agissait d'un type de moulin à arbre vertical, non orientable. Ils étaient utilisés pour l'irrigation et pour moudre le grain. En Europe, le moulin à vent s'est généralisé à partir du XII^e siècle, probablement à partir du moment où l'on a retrouvé la maîtrise de la construction des engrenages servant à transférer le mouvement de rotation.
- L'éolienne est une version actuelle du moulin à vent, servant à transborder l'énergie du vent au courant électrique.
- La noria, mot d'origine arabe, désigne originellement une machine hydraulique permettant d'élever l'eau en utilisant l'énergie amenée par le courant (fig. 7.2). C'est l'ancêtre des moulins à eau dont l'existence est déjà attestée par l'architecte romain VITRUVÉ au premier siècle avant Jésus-Christ.
- La machine à vapeur est en quelque sorte un perfectionnement du moulin à eau, et le moteur à combustion un avatar supplémentaire.



FIGURE 7.1 Moulin à vent à galerie. La calotte supérieure, qui supporte les ailes, est orientable et la galerie permet au meunier d'orienter les ailes face au vent. (Photo: Chris Nyborg (CC)).

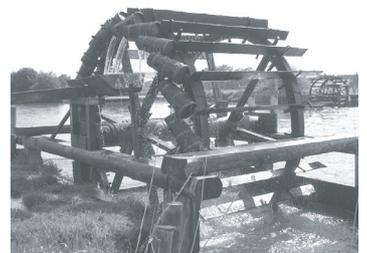


FIGURE 7.2 Noria servant à puiser l'eau nécessaire à l'irrigation. (Photo: Möhrendorf (CC)).

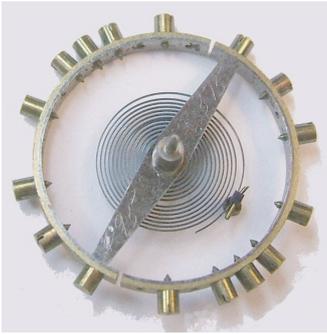


FIGURE 7.3 Balancier spiral d'une montre mécanique.



FIGURE 7.4 Galaxie du Tourbillon (Messier 51).

FIGURE 7.5 Collision de deux disques: (a) les deux disques identiques en plexiglas tournent autour d'un axe vertical commun et peuvent interagir. Le disque supérieur est mis en mouvement au moyen d'un ressort et tombe sur le disque inférieur qu'il entraîne; (b) l'élongation angulaire instantanée est calculée à partir des abscisses et ordonnées respectives des repères blancs sur chacun des disques.

- Les volants d'inertie (exemple 7.2) servent à stocker temporairement de l'énergie.
- Dans une montre mécanique, un balancier oscillant (fig. 7.3) sert à diviser le temps grâce à ses mouvements de va-et-vient entraînés par un ressort spiral. Lorsqu'il est abandonné à lui-même après avoir été déplacé de sa position d'équilibre, le système se met à osciller avec une amplitude qui diminue progressivement.

7.1.2 Exemples de mouvements de rotation dans la nature

La nature offre également de beaux exemples de systèmes en rotation.

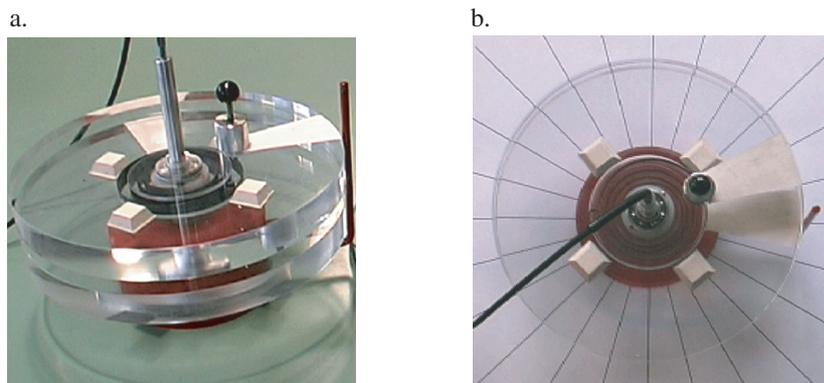
- La Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil qui, lui-même tourne autour du centre de la Voie lactée.
- Les galaxies ont un mouvement de rotation propre (fig. 7.4) et tournent généralement autour du centre de l'amas dont elles font partie .

7.2 ÉTUDE DE CAS: COLLISION DE DEUX DISQUES

Pour nous familiariser avec les processus de rotation, nous allons étudier la collision de deux disques.

7.2.1 Expérience, recueil et exploitation des données

Expérience. L'expérience est réalisée au moyen de deux disques identiques en plexiglas, montés sur un axe commun (fig. 7.5a). Ils sont fixés à l'axe de rotation au moyen de roulements à billes, ce qui leur permet de tourner presque librement. Le disque supérieur peut être légèrement rehaussé par rapport au disque inférieur. Il est mis en rotation au moyen d'un ressort spiral tendu, alors que le disque inférieur est immobile. Lorsque l'on laisse tomber le disque supérieur sur le second, les deux interagissent de telle manière que le premier ralentit alors que le second accélère. Le processus est filmé au moyen d'une caméra vidéo.



Détermination de la vitesse angulaire. L'élongation angulaire est calculée à partir des abscisses et ordonnées respectives des repères blancs sur la figure 7.5b. Pour obtenir la vitesse angulaire, on divise la différence de deux valeurs successives par l'intervalle de temps qui les sépare.

Le graphique de la figure 7.6 montre l'évolution des vitesses angulaires. Nous notons que, malgré l'utilisation de roulements à billes, la vitesse angulaire du disque supérieur

n'est pas constante avant l'interaction mais décroît légèrement. Il en va de même de la vitesse angulaire commune. Les fluctuations que nous observons sont la conséquence du fait que l'intervalle de temps est de 0.04 s. La division par cette valeur amplifie d'un facteur 25 les imprécisions dues à la méthode de mesure.

7.2.2 Vitesse angulaire et moment cinétique

L'examen de la figure 7.6 révèle que l'évolution des vitesses angulaires respectives à partir du début de l'interaction est semblable à celle des niveaux de deux réservoirs communicants munis chacun d'un écoulement supplémentaire ou de deux condensateurs couplés qui peuvent également se décharger par une résistance montée entre leurs électrodes. Ce constat va nous permettre de conceptualiser les processus de rotation.

Vitesse angulaire en tant qu'indicateur du niveau de rotation. La vitesse angulaire, que l'on désigne par le symbole ω (oméga), s'est imposée de manière naturelle pour la description du mouvement de rotation. Lorsque les disques interagissent, leurs vitesses angulaires respectives varient jusqu'à ce qu'elles atteignent une valeur commune, tout comme le font la pression en hydraulique et la tension en électricité lors de l'équilibrage des niveaux hydrauliques ou électriques. Nous pouvons donc conclure par analogie que *la vitesse angulaire indique le niveau de rotation et représente donc le potentiel associé au mouvement de rotation*. C'est la grandeur intensive qui sert à la caractérisation du mouvement de rotation.

Moment cinétique. Également en vertu de l'analogie avec les processus observés dans les autres domaines de la physique, nous devons conclure que, lors de l'interaction entre les deux disques, il y a eu un échange d'une grandeur extensive. Tout corps en rotation possède une certaine « quantité de mouvement de rotation » dont la dénomination officielle est le *moment cinétique*, désigné par le symbole L . Cette grandeur a les mêmes caractéristiques que les grandeurs extensives que nous avons introduites dans les chapitres précédents, à savoir qu'elle peut être accumulée dans les objets en rotation, qu'elle peut être transportée et transférée entre des systèmes en interaction.

7.2.3 Relation entre moment cinétique et vitesse angulaire

Le moment cinétique accumulé par un objet doit être d'autant plus grand que sa vitesse angulaire est élevée. La relation la plus simple qui peut être proposée est :

$$L = J\omega \quad (7.1)$$

La grandeur J est le *moment d'inertie*. L'analogie avec les processus étudiés dans les chapitres précédents nous permet de conclure qu'il s'agit d'une capacité qui mesure quelle quantité de moment cinétique un objet tournant à la vitesse angulaire ω est capable d'accumuler. Nous reviendrons en détail sur les particularités de cette grandeur à la section 7.7.

7.2.4 Modèle de la collision de deux disques

Les processus hydrauliques, électriques et thermiques sont expliqués en termes de transfert (et éventuellement de production) de grandeurs assimilables à un fluide qui sont représentées par des réservoirs dans les modèles de dynamique des systèmes. Nous allons appliquer ce mode de conceptualisation des processus physiques aux phénomènes de rotation, ce qui veut dire que nous admettons que les interactions mécaniques

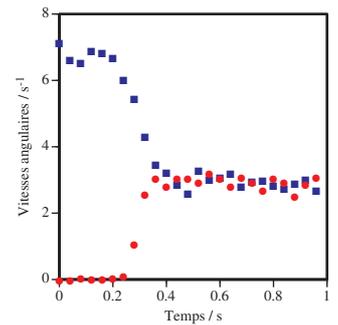


FIGURE 7.6 Évolution des vitesses angulaires respectives lors de la collision de deux disques en rotation.

peuvent être représentées, dans les processus de rotation, en tant que transfert de moment cinétique vers ou hors des corps qui participent à ces interactions.

Nous énonçons donc un bilan pour le moment cinétique de chacun des disques de l'expérience. Dans un premier temps, nous ne tenons pas compte des pertes dues aux frottements :

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= -I_{L, \text{collision}} \\ \dot{L}_2 &= I_{L, \text{collision}} \end{aligned} \tag{7.2}$$

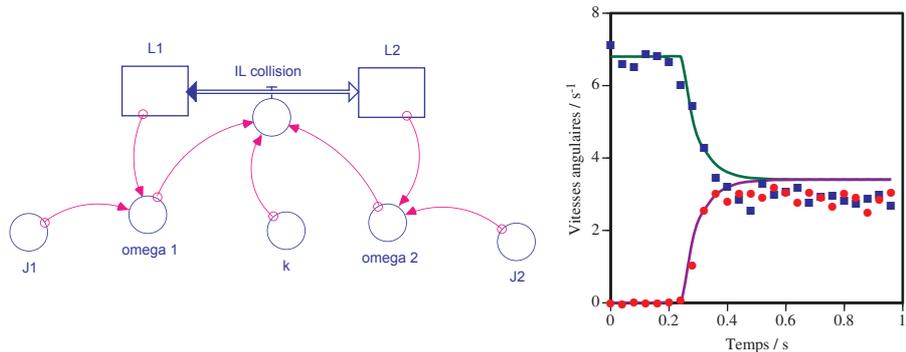
L'équation (7.1) permet de calculer les vitesses angulaires respectives.

Nous devons encore formuler des idées pour les flux de moment cinétique. En nous appuyant sur ce que nous avons fait dans les chapitres précédents, nous pouvons commencer par une relation linéaire entre le flux et la différence des vitesses angulaires :

$$I_{L, \text{collision}} = -k(\omega_2 - \omega_1) \tag{7.3}$$

Dans le modèle, ce flux de moment cinétique n'est activé que pour $t > 0.24$ s. Les valeurs initiales du moment cinétique de chaque disque sont déterminées à partir des valeurs mesurées des vitesses angulaires respectives. Les valeurs égales du moment d'inertie J sont choisies arbitrairement, vu que nous n'avons pas suffisamment d'informations pour les évaluer. Nous procédons à la simulation en ajustant la valeur de k dans l'équation (7.3). La figure 7.7 montre le résultat de cette première simulation.

FIGURE 7.7 Modèle de la collision entre les deux disques sans prise en compte des frottements et résultats de la simulation effectuée avec cette option.



Le choix de la valeur de k a permis un ajustement acceptable pour la phase d'interaction entre les deux disques. Il faut encore tenir compte des pertes dues aux frottements, ce que nous faisons en admettant qu'elles sont proportionnelles à la vitesse angulaire de chacun des disques :

$$\begin{aligned} I_{L1, \text{pertes}} &= -k_{\text{pertes}} \omega_1 \\ I_{L2, \text{pertes}} &= -k_{\text{pertes}} \omega_2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Nous varions la valeurs de k_{pertes} pour obtenir le meilleur ajustement possible.

L'accord entre le modèle et l'expérience (fig. 7.8) nous permet d'admettre que nos idées sur la modélisation du mouvement de rotation vont dans la bonne direction. Nous devons cependant nous souvenir que nous devons découvrir les caractéristiques du moment d'inertie J et de la constante de flux k , vu que les deux valeurs ont été choisies arbitrairement et que la variation de l'une entraîne une variation correspondante de l'autre.

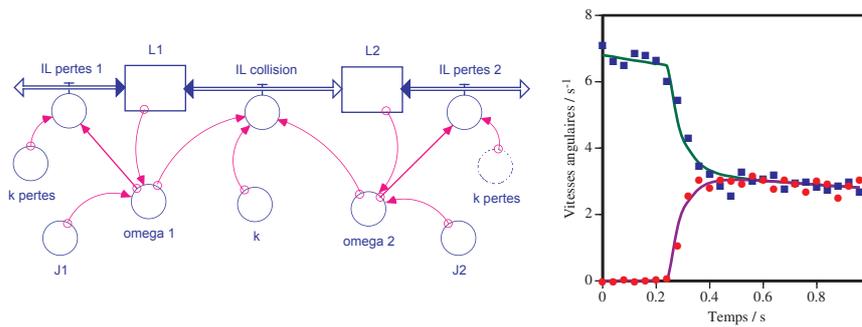


FIGURE 7.8 Modèle de la collision entre les deux disques avec prise en compte des frottements et résultats de la simulation.

1. Que révèle l'équilibrage des vitesses angulaires dans l'expérience de la section 7.2.1?
2. L'expérience présentée à la section 7.2.1 permet-elle d'affirmer que le moment cinétique n'est pas conservé?

Q

1. Il révèle que, lors du contact entre des objets en rotation, une grandeur extensive, une charge rotatoire, le moment cinétique, s'écoule de l'un vers l'autre et que la vitesse angulaire est la grandeur indicatrice du niveau de rotation.
2. Non, la diminution du moment cinétique est due à la présence de frottements qui provoquent une « fuite » vers l'environnement. Tout comme la charge électrique, le moment cinétique est une grandeur conservée.

R

7.3 GRANDEURS FONDAMENTALES

Les observations de la section précédente révèlent que les processus de rotation peuvent être caractérisés par l'accumulation et le transfert d'une grandeur que nous avons appelée moment cinétique. Les flux de cette grandeur ont toujours lieu entre deux niveaux de la vitesse de rotation des objets entre lesquels elle s'écoule.

7.3.1 Moment cinétique ou moment angulaire

Comme le moment cinétique est une grandeur primitive, nous la mesurerons en euler, abrégé par Eu. La correspondance avec les unités SI est : $1 \text{ Eu} = 1 \text{ N m s}$. Cette correspondance sera justifiée à la section 9.5.3.

Deux « espèces » de moment cinétique. Une expérience met en évidence un phénomène remarquable. Les disques de la figure 7.5a peuvent être assemblés et reliés entre eux par un ressort spiral tendu. Lors de la libération du ressort, les deux disques se mettent à tourner en sens opposé. Les vitesses de rotation respectives dépendent de la masse et du rayon de chacun des disques. Si les deux disques sont identiques, les valeurs des vitesses sont les mêmes, les sens opposés.

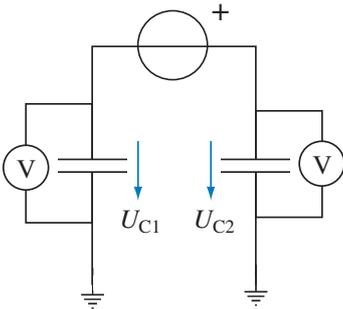
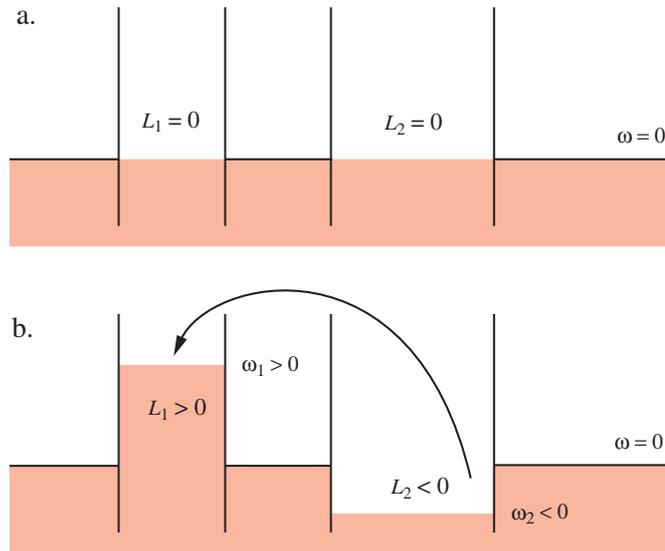


FIGURE 7.9 Analogie électrique du phénomène de séparation des deux «espèces» de moment cinétique. La source (le ressort) fournit l'énergie nécessaire pour séparer les charges (les deux espèces de moment cinétique).

Cette expérience révèle que, pour une direction donnée (par exemple la direction verticale), il existe deux «espèces» de moment cinétique, déterminées par le sens de rotation. Tout aussi arbitrairement qu'en électricité, nous pouvons décider d'attribuer un signe positif à l'une de ces espèces et le signe négatif à l'autre. Il est usuel d'attribuer un signe positif au moment cinétique lorsqu'il correspond à une rotation dans le sens horaire, c'est-à-dire à un sens de vissage positif. À partir du moment où cette affectation des signes a été effectuée, il est clair qu'il faut s'y tenir et qu'elle ne peut plus être modifiée; mais, contrairement à ce qui a été fait en électricité, où l'on a attribué une fois pour toutes le signe positif à l'«électricité vitreuse» et le signe négatif à l'«électricité résineuse», l'attribution du signe au moment cinétique a lieu chaque fois que l'on aborde une nouvelle situation.

L'analogie électrique peut être poussée encore plus loin, si l'on assimile chacune des deux parties du système décrit ci-dessus à deux condensateurs connectés aux bornes d'une source d'énergie (fig. 7.9): la source (le ressort) fournit l'énergie nécessaire pour transférer la charge d'un des condensateurs vers l'autre (le moment cinétique d'une des parties du système vers l'autre).

FIGURE 7.10 Analogie hydraulique du phénomène de séparation des deux «espèces» de moment cinétique. Le niveau de moment cinétique est indiqué par la vitesse angulaire.



Il est également possible d'utiliser une analogie hydraulique du phénomène, en assimilant chacune des parties du système à des réservoirs de moment cinétique qui plongent dans un gigantesque lac de moment cinétique. Au début de l'expérience (fig. 7.10a), les deux réservoirs sont «vides», c'est-à-dire que leur niveau correspond à celui du lac. À la fin de l'expérience (fig. 7.10b), le niveau d'un des réservoirs est plus élevé que le niveau de référence, celui de l'autre est en dessous de ce même niveau de référence.

Conservation du moment cinétique. Nos observations révèlent une autre propriété fondamentale du moment cinétique: c'est une grandeur conservée, c'est-à-dire qu'elle ne peut ni être créée, ni être détruite, mais seulement accumulée ou transférée d'un système à l'autre.

L'observation de la section 7.2.1 semble être en contradiction avec l'affirmation précédente. Il n'en est rien; comme nous le verrons à la section 7.8, les frottements sont ici responsables du transfert du moment cinétique du disque en mouvement vers le disque immobile.

Caractère vectoriel du moment cinétique. Nous avons découvert que le sens de rotation permettait de distinguer deux sortes de moment cinétique. Cette particularité,

liée à l'orientation dans l'espace, implique que, contrairement aux grandeurs extensives que nous avons introduites dans les chapitres précédents (volume, charge électrique, énergie, entropie, quantité de matière), le moment cinétique n'est pas une grandeur scalaire (quantifiée par un seul nombre), mais vectorielle.

La grandeur extensive (semblable à un fluide) associée au mouvement de rotation est le moment cinétique L . C'est un vecteur caractérisé par trois composantes indépendantes les unes des autres, une pour chaque direction de l'espace :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Dans ce chapitre, pour des raisons de simplicité, nous ne considérerons que des processus de rotation autour d'un axe fixe ou d'un axe de direction constante.

Le moment cinétique dans le monde microscopique. Comme celle de la charge électrique, la notion de moment cinétique n'est pas réservée au monde macroscopique. En effet, on associe notamment aux particules dites élémentaires leur charge électrique ($+e$ pour le proton, $-e$ pour l'électron, 0 pour le neutron, 0 pour le photon, etc.) et leur moment cinétique propre que l'on appelle le *spin* ($\frac{1}{2}\hbar$, $\frac{3}{2}\hbar$... pour les particules appelées fermions, comme les électrons, protons et neutrons, 0 , \hbar , $2\hbar$... pour les particules appelées bosons, comme les photons). Il est important de noter que le spin de ces particules ne caractérise pas une rotation propre. La notion de rotation propre perd son sens au niveau microscopique. Le spin de l'électron, par l'intermédiaire du principe d'exclusion de Pauli, est à l'origine de la structure des atomes et de la matière ordinaire. En spectroscopie, le spin joue un rôle primordial pour aider les chimistes à décrypter la structure des molécules. En médecine, c'est encore une fois le spin des noyaux d'hydrogène qui permet l'imagerie par résonance magnétique (IRM). La liste des exemples est loin d'être exhaustive.

7.3.2 Flux de moment cinétique

L'expérience de la section 7.2 révèle l'existence d'écoulements de moment cinétique entre des systèmes ou entre les composants d'un système, écoulements qui, grâce à l'analogie électrique ou hydraulique peuvent être caractérisés de la même manière. Nous représentons les flux de moment cinétique par le symbole I_L et ils sont mesurés en Eu s^{-1} .

Pour une direction donnée (par exemple la verticale dans l'expérience de la section 7.3.1), le moment cinétique peut s'écouler dans un sens ou dans l'autre. On attribue arbitrairement une valeur positive à l'un des deux sens d'écoulement (par exemple vers le haut) et le sens négatif à l'autre. Toutefois, ce choix est lié, pour des raisons de cohérence, à celui de signe positif du moment cinétique. Si l'on adopte la convention usuelle qui attribue un signe positif au moment cinétique lorsque le sens de vissage est positif, un flux positif entraînera une augmentation de la vitesse angulaire positive.

En tant que flux d'une grandeur vectorielle, les flux de moment cinétique ont aussi un caractère vectoriel, chacune de ses trois composantes étant liée à la composante correspondante du moment cinétique :

$$\mathbf{I}_L = \begin{pmatrix} I_{L_x} \\ I_{L_y} \\ I_{L_z} \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

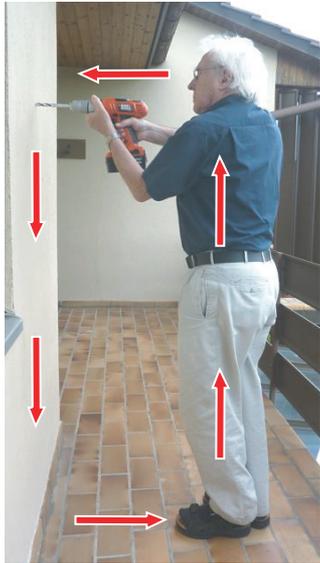


FIGURE 7.11 Les écoulements de moment cinétique ne sont possibles que si le circuit est fermé. Le moteur de la perceuse «pompe» le moment cinétique dans le circuit.

En mécanique, un flux de moment cinétique est appelé un *couple*. Son nom est dû au fait qu’il résulte souvent de l’application d’une paire de forces opposées, ce qui sera illustré à la section 9.5.3. Les différents types d’interaction entre un corps et son environnement entraînent différentes formes d’écoulement du moment cinétique. Imaginons par exemple un disque tournant autour d’un axe fixe. Le transfert de moment cinétique peut résulter de l’action de quelqu’un qui exerce une force à sa périphérie, de frottement entre le disque et l’axe de rotation, de frottement de l’air, de l’interaction entre un disque métallique et un champ magnétique (frein à induction), de l’action d’un ressort de torsion, et de maintes autres manières. Le lien entre les forces et les flux de moment cinétique sera traité au chapitre 9, à partir de la section 9.5.

Un flux stationnaire de moment cinétique n’est possible que si le circuit est fermé, comme en électricité. La figure 7.11 illustre ce fait: le moment cinétique passe de la perceuse dans le mur par l’intermédiaire de la mèche, circule dans la paroi et le sol et remonte à travers la personne, pompée par le moteur de la perceuse. Par contre, l’énergie transportée par le moment cinétique est «déposée» dans le récepteur, la paroi, où elle sert à forer le trou et à produire de l’entropie. Nous reviendrons sur ce sujet lorsque nous parlerons du lien entre le moment cinétique et l’énergie.

La situation mentionnée ici est semblable à celle que l’on rencontre en électricité lorsque le retour du courant ne se fait pas au moyen d’un fil conducteur mais est assuré, par exemple, par la carrosserie de la voiture, par le cadre du vélo, par les rails du train, voire par la terre. Notons que le moment cinétique peut également migrer à travers l’air, par exemple lors de la mise en mouvement de rotation d’un disque immobile par un disque parallèle situé à une distance suffisamment faible du disque immobile. Le champ de pesanteur (les champs en général) peut également transporter et accumuler du moment cinétique. Dans un moteur électrique, le moment cinétique est transporté du stator vers le rotor par l’intermédiaire du champ magnétique.

7.3.3 Vitesse angulaire et potentiel rotatoire

Les observations de la section 7.2.2, ainsi que l’analogie hydraulique (fig. 7.10) nous permettent d’affirmer:

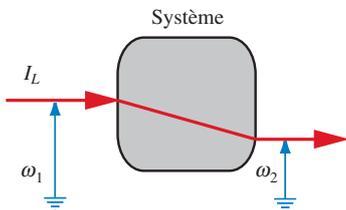


FIGURE 7.12 Diagramme d’un processus de rotation. Le moment cinétique s’écoule entre deux niveaux de la vitesse angulaire qui est le potentiel rotatoire.

Le taux de chargement en moment cinétique d’un objet est indiqué par la vitesse à laquelle il tourne, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Comme le moment cinétique, la vitesse angulaire est un vecteur:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

C’est toujours entre deux niveaux de cette grandeur qu’ont lieu les transferts de moment cinétique. La vitesse angulaire est donc le potentiel lié aux processus de rotation (fig. 7.12).

1. Quelles sont les caractéristiques et les particularités du moment cinétique?
2. Quelles sont les caractéristiques et les particularités de la vitesse angulaire?



1. Le moment cinétique L est la grandeur extensive qui sert à mesurer la quantité de mouvement rotatoire. En tant que grandeur extensive (assimilable à un fluide), il peut s'accumuler dans les objets et s'écouler entre des systèmes en rotation. C'est une grandeur vectorielle qui peut prendre des valeurs positives ou négatives par rapport à un axe de rotation ou une direction donnée. Le moment cinétique est une grandeur conservée.



2. La vitesse angulaire est la grandeur intensive qui sert à mesurer le niveau de rotation d'un système. C'est une grandeur vectorielle, comme le moment cinétique. Le moment cinétique s'écoule toujours entre deux niveaux de la vitesse angulaire.

7.4 ANALYSE DE SYSTÈME I: BILANS DE MOMENT CINÉTIQUE

Vu sa qualité de grandeur extensive, nous pouvons formuler une équation de bilan pour le moment cinétique d'un système donné (ici, pour une de ses composantes):

Le taux de variation d'une composante du moment cinétique est égale au flux net de moment cinétique dans la direction de cette composante:

$$\dot{L} = I_{l, \text{net}} \quad (7.8)$$

La variation de cette composante du moment cinétique s'obtient par intégration:

$$\Delta L_{(t_1 \rightarrow t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{L}(t) dt \quad (7.9)$$

L'intégrale des courants de moment cinétique sur un intervalle de temps représente le moment cinétique transporté ou échangé $L_{\text{éch}}$:

$$L_{\text{éch } (t_1 \rightarrow t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} I_L(t) dt \quad (7.10)$$

Les deux dernières équations nous livrent la forme intégrée de l'équation de bilan:

$$\Delta L_{(t_1 \rightarrow t_2)} = L_{\text{éch } (t_1 \rightarrow t_2)} \quad (7.11)$$

Il existe plusieurs manières de transférer du moment cinétique d'un système à l'autre ou entre les divers éléments d'un système :

- au moyen d'un arbre de transmission soumis à une torsion; dans ce cas, le transfert se fait en mode supraconducteur;
- au moyen d'un embrayage à friction, comme par exemple dans les automobiles;
- par des engrenages comme dans une boîte à vitesses ou dans une montre;
- au moyen d'un ressort spiral, comme dans les montres mécaniques;
- par l'intermédiaire d'un champ, par exemple le champ gravitationnel ou le champ électrique ou magnétique.

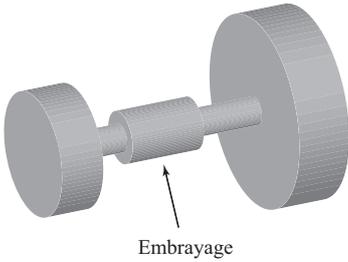


FIGURE 7.13 Deux disques couplés par un embrayage.

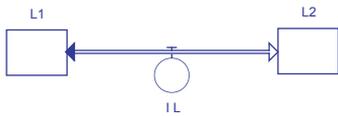


FIGURE 7.14 Bilan pour le système de deux disques couplés par un embrayage.

Nous allons modéliser le comportement de deux disques couplés par un embrayage (fig. 7.13). Nous considérerons à la section 7.8 plusieurs cas de figure afin d'illustrer différentes réponses du système.

Nous considérons chacun des deux disques comme un système; l'équation de bilan correspondante sera donc :

$$\dot{L}_1 = -I_L$$

$$\dot{L}_2 = I_L$$

La figure 7.14 montre le diagramme de dynamique des systèmes correspondant à cette équation de bilan. On notera l'analogie avec celui de deux réservoirs reliés par une conduite ou de deux condensateurs reliés par un conducteur.

1. Quels sont les modes de transfert du moment cinétique ?
2. Quelles sont les particularités des éléments qui transmettent le moment cinétique dans les modes de transfert du moment cinétique ?

1. Le moment cinétique peut être transmis par un arbre de transmission, par un engrenage, un embrayage à friction, un ressort spiral, un fluide, un champ (gravitationnel, électrique, magnétique).
2. Un arbre rigide est un supraconducteur du moment cinétique. Un engrenage transmet l'énergie, tout en variant la vitesse angulaire et le moment cinétique. Dans un embrayage à friction, c'est le fluide qui conduit le moment cinétique; il le fait d'autant mieux que sa viscosité est importante. Un ressort stockera l'énergie apportée par le moment cinétique entrant et utilisera cette énergie pour restituer le moment cinétique. Un champ transmet le moment cinétique sans dissipation d'énergie; dans un générateur, une dynamo, le champ magnétique transmet le moment cinétique entre le rotor et le stator.



7.5 ANALYSE DE SYSTÈME II : CINÉMATIQUE DE LA ROTATION

Comme nous l'avons affirmé à la section 7.3.3, la vitesse angulaire est le potentiel associé au moment cinétique : ce dernier s'écoule toujours entre deux niveaux de la vitesse angulaire. Mais la vitesse angulaire est une des grandeurs cinématiques servant à décrire le mouvement de rotation. Il est donc nécessaire de préciser quelles sont ces grandeurs et comment elles sont liées entre elles.

7.5.1 Élongation, vitesse et accélération angulaire

La description du mouvement de rotation se fera naturellement au moyen de coordonnées polaires (fig. 7.15), à savoir du rayon r de la trajectoire et de l'angle φ mesuré à partir d'une origine fixée arbitrairement ; cet angle est l'*élongation angulaire* et se mesure en radians (rappelons qu'il s'agit d'une unité fantôme, puisqu'elle est définie en tant que rapport de deux longueurs).

Le taux de variation de l'élongation angulaire φ , défini par :

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (7.12)$$

représente le module ou une composante de la *vitesse angulaire*. Son signe est lié au choix qui a été fait au sujet de celui de l'élongation angulaire φ . L'unité de mesure est la s^{-1} .

Réciproquement, on passera du module de la vitesse angulaire à l'élongation angulaire par intégration (fig. 7.16) :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (7.13)$$

Si nous considérons un objet en rotation autour d'un axe fixe (donc dans un plan), à une vitesse angulaire instantanée de module égal à ω , tout point de l'objet distant de r de l'axe de rotation se meut à une vitesse de module égal à $v = \omega \cdot r$. Or, la vitesse est une grandeur vectorielle \mathbf{v} , tout comme le vecteur position (ou rayon vecteur) \mathbf{r} . Pour faire apparaître le caractère vectoriel de la relation $v = \omega \cdot r$, on définit un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ au moyen de :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.14)$$

Le vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est simultanément perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{v} , donc au plan dans lequel a lieu le mouvement de rotation du point considéré (fig. 7.17). Son sens correspond au sens de vissage positif défini par la rotation.

Il est rare que la vitesse angulaire soit constante (aussi bien en module qu'en direction). Son taux de variation, défini par :

$$\dot{\omega} = \dot{\varphi} = \alpha \quad (7.15)$$

représente une composante de l'*accélération angulaire* (fig. 7.18). Son unité de mesure est la s^{-2} .

De la même manière que pour la vitesse angulaire, on lui donne un caractère vectoriel en la liant à l'accélération linéaire par :

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (7.16)$$

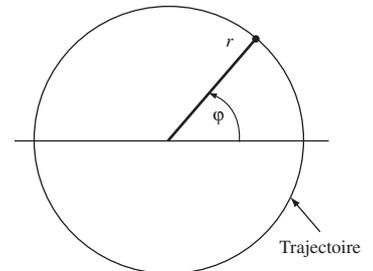


FIGURE 7.15 Description du mouvement circulaire au moyen de coordonnées polaires r et φ .

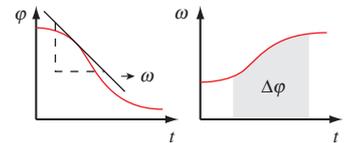


FIGURE 7.16 Relation entre l'élongation angulaire φ et le module de la vitesse angulaire ω .

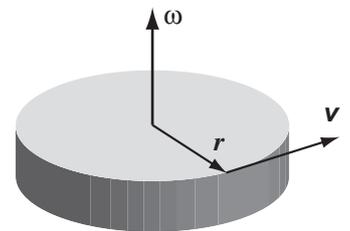


FIGURE 7.17 Relation entre le vecteur de vitesse linéaire et celui de vitesse angulaire.

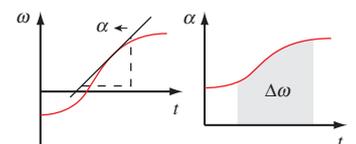


FIGURE 7.18 Relation entre le module de la vitesse angulaire ω et celui de l'accélération angulaire α .

7.5.2 Fréquence et vitesse angulaire

Il arrive souvent que les paramètres cinématiques d'un processus de rotation ne soient pas donnés par la vitesse angulaire, mais par le nombre de tours par unité de temps (le compte-tours sur le tableau de bord d'une automobile est calibré en milliers de tours par minute que l'on abrège par tr min^{-1} ou rpm en anglais).

On appelle *fréquence* la grandeur qui mesure le nombre de tours par unité de temps. Elle est désignée par le symbole f ou la lettre grecque ν (nu):

$$f = \nu = \frac{\Delta n}{\Delta t} \quad (7.17)$$

où Δn représente le nombre de révolutions durant l'intervalle Δt . L'unité de mesure de la fréquence est le hertz (Hz).

On appelle *période* T le temps nécessaire pour une seule révolution. Il s'ensuit que:

$$f = \nu = \frac{1}{T} \quad (7.18)$$

L'angle balayé durant une période vaut 2π . On en déduit une relation entre la vitesse angulaire ω et la fréquence:

$$\omega T = \frac{\omega}{f} = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi\nu \quad (7.19)$$

En vertu de cette dernière relation, la grandeur ω est également appelée *fréquence angulaire*, particulièrement lorsqu'elle sert à décrire les phénomènes oscillatoires.

EXEMPLE 7.1. Cinématique d'un objet en rotation.

Un volant d'inertie tel que celui de la figure 7.23a un diamètre de 20 cm. Il peut atteindre une vitesse de rotation de $60\,000 \text{ tr min}^{-1}$. Quelles sont: (a) la vitesse angulaire; (b) la vitesse linéaire à la périphérie du volant; (c) l'accélération angulaire constante et l'accélération linéaire à la périphérie du volant, si l'on admet qu'il atteint ce régime en 10 s; (d) l'angle balayé et la distance parcourue par un point de la périphérie durant ces 10 secondes?

SOLUTION: (a) La donnée correspond à la fréquence f ; donc:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{60 \cdot 10^3 \text{ tr min}^{-1}}{60 \text{ s min}^{-1}} = 6.28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (E.7.1)$$

(b) La vitesse linéaire à la périphérie:

$$v = \omega \cdot r = 6.28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 0.1 \text{ m} = 628 \text{ m s}^{-1} \quad (E.3)$$

ce qui n'est pas loin de deux fois la vitesse du son.

(c) Puisque l'accélération angulaire est constante, on peut la calculer par:

$$\alpha = \frac{\omega}{\Delta t} = \frac{6.28 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{10 \text{ s}} = 628 \text{ s}^{-2}$$

et l'accélération linéaire à la périphérie est:

$$a = a \cdot r = 628 \text{ s}^{-2} \cdot 0.1 \text{ m} = 62.8 \text{ m s}^{-2}$$

(d) L'angle balayé s'obtient par intégration de la vitesse angulaire

$$\varphi_{\text{balayé}} = \int_{0 \text{ s}}^{10 \text{ s}} \omega(t) dt = \int_{0 \text{ s}}^{10 \text{ s}} \alpha \cdot t \cdot dt = \left[\frac{\alpha}{2} t^2 \right]_{0 \text{ s}}^{10 \text{ s}} = 3140 \text{ rad}$$

et la distance parcourue par un point de la périphérie:

$$s = r \cdot \varphi_{\text{balayé}} = 314 \text{ m}$$

7.5.3 Intégration du potentiel dans le modèle dynamique

Nous poursuivons l'élaboration du modèle en y intégrant la vitesse angulaire de chacun des disques (fig. 7.19). Cette vitesse angulaire est liée à leur moment cinétique par l'intermédiaire de la capacité dont il sera question à la section 7.7.

7.6 ÉNERGIE ET MOUVEMENT DE ROTATION

Chaque fois que le moment cinétique s'écoule entre deux niveaux de la vitesse angulaire (par exemple dans un embrayage à friction), il libère de l'énergie si le niveau initial est plus élevé que le niveau final, il en lie dans le cas contraire.

Lorsque le moment cinétique s'écoule entre deux niveaux de son potentiel, la vitesse angulaire ω , de l'énergie est libérée ou liée (fig. 7.20). Le taux de libération ou de liaison de l'énergie est la puissance du processus rotatoire:

$$\mathcal{P}_{\text{rot}} = -\Delta\omega |I_L| \quad (7.2)$$

Le flux d'énergie transportée par le moment cinétique lorsqu'il pénètre dans ou quitte un système en un point où la vitesse angulaire est égale à ω (fig. 7.21) est:

$$I_{E,L} = \omega I_L \quad (7.3)$$

L'énergie accumulée sous forme capacitive par un solide rigide de capacité rotatoire constante $C_L = J$, en rotation à une vitesse angulaire de module égal à ω , qui a donc accumulé un moment cinétique égal à $L = C_L \omega$, (fig. 7.22) est égale à:

$$E_{C,L} = \int I_{E,L} d\omega = \frac{1}{2} C_L \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (7.4)$$

Nous verrons à la section 7.9 que l'énergie peut également être emmagasinée de manière dynamique lors d'un processus de rotation .

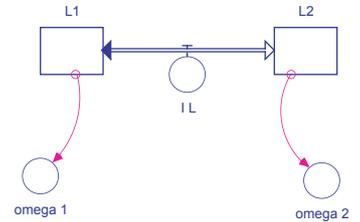


FIGURE 7.19 Introduction du potentiel (vitesse angulaire ω) dans le modèle de deux disques couplés.

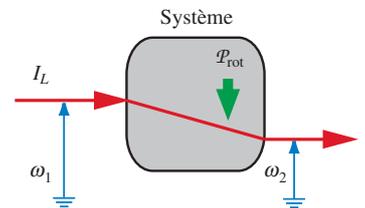


FIGURE 7.20 Puissance d'un processus de rotation: de l'énergie est libérée à un certain taux lorsque du moment cinétique s'écoule de lieux de vitesse angulaire élevée vers des lieux de vitesse angulaire moindre.

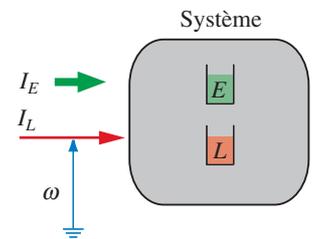


FIGURE 7.21 L'énergie transférée par un flux de moment cinétique dépend de la vitesse angulaire à laquelle est transféré le moment cinétique.

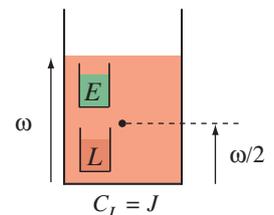


FIGURE 7.22 Image hydraulique de l'accumulation d'énergie dans un système en rotation.



FIGURE 7.23 Volant d’inertie (KERS) développé par la firme Flybrid pour la Formule 1. (Photo: Geni (CC)).

EXEMPLE 7.2. Stockage d’énergie dans un volant d’inertie.

Lors du freinage des véhicules (automobiles, bus, métro, train), l’énergie cinétique est dissipée dans les freins. Une méthode pour éviter ce gaspillage consiste à récupérer l’énergie au moyen d’un volant d’inertie relié à l’essieu moteur. Cette méthode est utilisée entre autres en Formule 1 au moyen du système KERS (Kinetic Energy Recuperation System, fig. 7.23). Durant la phase de freinage, le volant est couplé au moyeu et l’énergie y est accumulée. Elle est restituée au moment du redémarrage. On embarque toujours sur le véhicule un nombre pair de volants d’inertie tournant en sens inverse pour éviter que le véhicule soit déséquilibré lors des changements de direction. En admettant que le volant est un anneau de rayons respectifs de 6 cm et 10 cm, de masse égale à 5 kg, évaluer, en tenant compte de 20% de pertes dues aux frottements: (a) l’énergie emmagasinée pour une vitesse de rotation de 60 000 tr min⁻¹; (b) la puissance moyenne délivrée par le système si le démarrage dure 10 s.

SOLUTION: (a) Le moment d’inertie d’un anneau est donné dans le tableau 7.1:

$$\begin{aligned}
 E_c &= 0.8 \cdot \frac{1}{2} J \omega^2 = 0.8 \cdot \frac{1}{2} m \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} (2\pi f)^2 \\
 &= 0.8 \cdot \frac{1}{2} 5 \text{ kg} \frac{(0.06 \text{ m})^2 + (0.10 \text{ m})^2}{2} \left(2\pi \frac{60000}{60 \text{ s}} \right)^2 = 536.9 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

(b) La puissance délivrée est de 53.7 kW. ■

1. Quelle est la relation entre les flux de moment cinétique et les flux d’énergie dans un engrenage idéal?
2. Quels sont les problèmes à résoudre lors de la conception d’un volant d’inertie tel que celui de la figure 7.23?



1. Un engrenage transmet l’énergie pour différentes valeurs du couple. Le flux d’énergie est proportionnel à la fois au couple et à la vitesse angulaire, ce qui implique que, pour un flux d’énergie donné, la vitesse angulaire sera inversement proportionnelle au couple. Un engrenage est l’équivalent mécanique d’un transformateur électrique qui transmet une certaine quantité d’énergie à des intensités et des tensions différentes.
2. Comme ils doivent atteindre des vitesses de rotation très élevées, il faut minimiser les frottements; ce but est atteint en l’enfermant dans une enceinte évacuée et, pour certains, au moyen d’une suspension magnétique. Les flux de moment cinétique sont accompagnés de flux de quantité de mouvement qui, comme nous le verrons à la section 8.4.1, entraînent l’apparition de contraintes importantes aux vitesses considérées. Le volant doit donc être enfermé dans une enceinte de protection très résistante.



7.7 LOI DE CAPACITÉ: LE MOMENT D’INERTIE

Nous avons observé que des systèmes sont susceptibles d’accumuler du moment cinétique, ce qui implique qu’ils doivent posséder une capacité à emmagasiner cette grandeur. L’objectif de cette section est de déterminer comment cette capacité dépend des propriétés du système.

7.7.1 Énoncé de la loi de capacité

Dans trois des domaines que nous avons abordés jusqu'ici, nous avons énoncé une loi de capacité qui lie entre elles les variations de la grandeur extensive caractéristique du domaine considéré et celles de son potentiel associé :

$$\dot{V} = C_v \dot{P}; \quad \dot{Q} = C_Q \dot{U}; \quad \dot{S} = K_s \dot{T} \quad (7.5)$$

Comme nous l'ont déjà suggéré les observations de la section 7.2, ainsi que l'analogie des comportements des systèmes dans le domaine que nous étudions et ceux qui ont précédé, nous pouvons énoncer la loi de capacité pour le moment cinétique :

La loi de capacité établit le lien entre le taux de variation du moment cinétique d'un objet en rotation et de celui de sa vitesse angulaire au moyen de la capacité C_L :

$$\dot{L} = C_L \dot{\omega} \quad (7.6)$$

Cette relation implique que le moment cinétique est :

$$L = C_L \omega \quad (7.7)$$

7.7.2 Centre de masse d'un objet

Comme la notion du centre de masse va jouer un rôle important dans ce qui va suivre, nous allons la préciser, dans un premier temps pour un système de particules.

Considérons un système de n particules de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n , situées dans l'espace dans des positions repérées par les vecteurs $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ (fig. 7.24). Le centre de masse de ce système est un point CM repéré par un vecteur \mathbf{r}_{CM} défini en tant que moyenne pondérée des vecteurs position de chacune des masses, les masses jouant le rôle de coefficient de pondération :

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_i^n m_i \mathbf{r}_i \quad (7.8)$$

où M représente la masse totale du système de particules. Comme l'expression ci-dessus fait intervenir des vecteurs, le calcul concret devra être effectué sur chacune des composantes du vecteur \mathbf{r}_{CM} .

Dans le cas d'un solide rigide homogène (objet qui ne se déforme pas lorsqu'il est soumis à des contraintes), on subdivise l'objet en éléments Δm_i choisis de manière adéquate, auxquels on associe leurs vecteurs position \mathbf{r}_i . Lorsque l'on fait tendre les Δm_i vers zéro, les sommes ci-dessus deviennent des intégrales :

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{Corps}} \mathbf{r} \cdot dm \quad (7.9)$$

Ici aussi, les intégrales devront être calculées pour chacune des composantes du vecteur \mathbf{r}_{CM} .

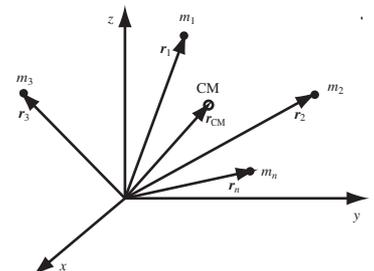


FIGURE 7.24 Définition du centre de masse d'un système discret.

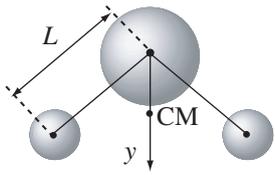


FIGURE 7.25 Représentation schématique d’une molécule d’eau. Les nuages électroniques ne sont pas disjoints, et la distance L est celle entre les centres de ces nuages.

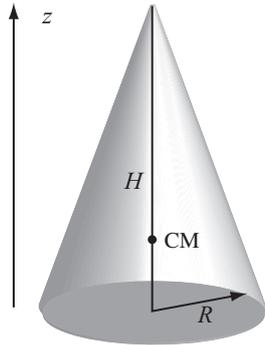


FIGURE 7.26 Pour déterminer la position du centre de masse d’un cône, on le décompose en disques parallèles au plan de base, d’épaisseur infinitésimale dz et de rayon variable.

EXEMPLE 7.3. Calcul du centre de masse d’un objet symétrique.

Calculer la position du centre de masse: (a) d’un cône de révolution de hauteur H et de rayon de la base R ; (b) d’une molécule d’eau (fig. 7.25), sachant qu’il s’agit d’une molécule planaire, que la longueur L de la liaison entre l’atome d’oxygène et un atome d’hydrogène est de $96 \cdot 10^{-12}$ m, que l’angle α formé par ces deux liaisons vaut 105° et que la masse de l’oxygène correspond à 16 fois celle de l’hydrogène.

SOLUTION: (a) Vu la symétrie de l’objet, il est clair que le centre de masse est situé sur son axe (fig. 7.26). La masse du cône est égale au produit de sa masse volumique et de son volume. Pour obtenir z_{CM} l’ordonnée du centre de masse, nous appliquons la relation (7.9) où les éléments infinitésimaux de masse dm sont des disques de rayon variable $r(z)$ et d’épaisseur dz :

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^H z \cdot dm = \frac{3}{\pi R^2 H \rho} \int_0^H \rho z \cdot dV = \frac{3}{\pi R^2 H} \int_0^H z \cdot \pi r^2 dz$$

On trouve le rayon en fonction de la hauteur en appliquant le théorème de Thalès:

$$r(z) = \frac{R}{H}(H - z)$$

Après substitution dans l’intégrale, on obtient:

$$z_{CM} = \frac{3}{R^2 H} \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z(H - z)^2 dz = \frac{3}{H^3} \left[\frac{1}{2} z^2 H^2 - \frac{2}{3} z^3 H + \frac{1}{4} z^4 \right]_0^H = \frac{H}{4}$$

(b) Ici aussi, le centre de masse se situe sur l’axe de symétrie. Nous choisissons le noyau de l’atome d’oxygène comme origine du repère. L’ordonnée du centre de masse est:

$$y_{CM} = \frac{2m_H L \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{m_O + 2m_H} \approx \frac{2m_H L \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{16m_H + 2m_H} = \frac{L \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{9} = 6.53 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Cette distance est légèrement plus grande que le rayon du nuage électronique de l’atome d’oxygène isolé. ■

7.7.3 Approche expérimentale de la capacité en moment cinétique

La relation entre la capacité d’un objet à accumuler du moment cinétique et ses propriétés doit être déterminée de manière expérimentale. On ne commence pas les expériences avant d’avoir émis un certain nombre d’hypothèses sur les propriétés que l’on veut découvrir. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, il est sensé de supposer que la capacité en moment cinétique dépendra de la masse de l’objet (plus la masse est grande, plus il pourra accumuler de moment cinétique) et de la répartition de cette masse. Pour tester ces hypothèses et pour rendre l’analyse des résultats aussi simple que possible, nous effectuerons les expériences avec des objets de forme cylindrique tournant autour d’un axe fixe et dont la masse est répartie de manière homogène autour de l’axe.

Dans une première expérience, nous observons un transfert de moment cinétique entre deux disques que l’on couple au moyen d’un embrayage (fig. 7.27). Avant le couplage, le disque de gauche a une certaine vitesse angulaire ω_1 , le disque de droite, de même rayon mais de masse double, a une vitesse angulaire nulle. Après le couplage, la vitesse commune des deux disques correspond au tiers de la vitesse initiale du premier disque.

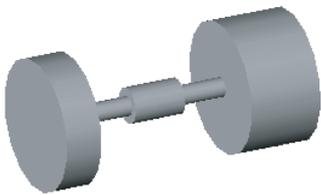


FIGURE 7.27 Transfert de moment cinétique entre deux disques au moyen d’un embrayage. Le second disque a le même rayon, mais une masse double de celle du premier.

Lors de cette expérience, le moment cinétique n'a pas varié, il s'est réparti sur un système de masse trois fois supérieure, ce qui a réduit la vitesse angulaire d'un facteur trois. Or, le moment cinétique, égal au produit de la capacité et de la vitesse angulaire, est inchangé, ce qui implique que la capacité a été multipliée par trois, tout comme la masse. Nous en concluons que la capacité est proportionnelle à la masse, ce que confirment toutes les expériences que l'on peut encore réaliser.

$$C_L \propto m \quad (7.10)$$

Pour étudier la manière dont la géométrie influence la capacité, nous procédons à une expérience analogue dans laquelle le second disque a la même masse que le premier, mais un rayon diminué de moitié (fig. 7.28). Après couplage, la vitesse angulaire commune est égale aux quatre cinquièmes de la vitesse initiale du disque de gauche.

La capacité du système après couplage est égale aux cinq quarts de la capacité du disque de gauche, ce qui veut dire que celle du disque de droite vaut un quart de celle du disque de gauche, pour une masse égale et un rayon réduit de moitié. L'hypothèse la plus simple est d'admettre que la capacité est proportionnelle à une fonction du carré du rayon :

$$C_L \propto f(R^2) \quad (7.11)$$

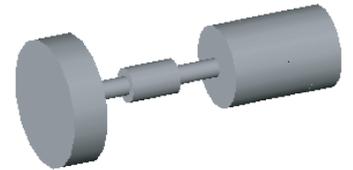


FIGURE 7.28 Transfert de moment cinétique entre deux disques au moyen d'un embrayage. Le second disque a la même masse, mais un rayon égal à la moitié du celui du premier.

7.7.4 Moment d'inertie de solides rigides

Une analyse plus poussée (autant expérimentale que théorique) permet d'énoncer :

La capacité en moment cinétique C_L d'un solide rigide en rotation, que l'on appelle son moment d'inertie J , est une grandeur proportionnelle à la masse m du solide et à une combinaison particulière du carré de ses dimensions linéaires. Le moment d'inertie peut être mesuré ou, pour autant que cela soit possible, calculé par intégration :

$$C_L = J = \int_{\text{Corps}} r^2 dm = \int_{\text{Volume}} \rho \cdot r^2 dV \quad (7.12)$$

EXEMPLE 7.4. Moments d'inertie d'un cône et d'une molécule d'eau.

En reprenant les données de l'exemple 7.3, calculer le moment d'inertie (a) d'un cône de révolution par rapport à son axe; (b) d'une molécule d'eau par rapport à son axe de symétrie et aux deux autres axes perpendiculaires à celui-ci passant par le centre de masse (axes principaux).

SOLUTION: (a) Nous devons décomposer le cône en éléments infinitésimaux situés à une distance r de l'axe de rotation. Ce sont des anneaux de basse $2\pi r$, de hauteur infinitésimale dr et d'épaisseur infinitésimale dz .

$$\begin{aligned} J_z &= \rho \int_{\text{Cône}} r^2 dV = \frac{3m}{\pi R^2 H} 2\pi \int_{\text{Cône}} r^3 dr dz = \frac{6m}{R^2 H} \int_0^{\frac{R}{H}(H-z)} r^3 dr \int_0^H dz = \frac{6m}{R^2 H} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{R}{H}(H-z)} \int_0^H dz \\ &= \frac{6m}{R^2 H} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{R}{H}(H-z)} \int_0^H dz = \frac{6m}{R^2 H} \frac{R^4}{4H^4} \int_0^H (H-z)^4 dz = \frac{3mR^2}{2H^5} \left[\frac{1}{5}(H-z)^5 \right]_0^H = \frac{3}{10} mR^2 \end{aligned}$$

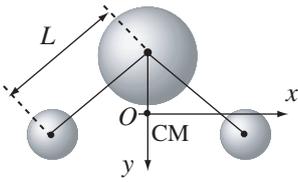


FIGURE 7.29 Axes principaux de la molécule d'eau. Le troisième axe est perpendiculaire au plan de la molécule et passe par le centre de masse.

(b) Nous faisons coïncider l'origine O du repère avec le centre de masse (fig. 7.29).

Rotation autour de Ox :

$$\begin{aligned} J_x &= m_O y_{CM}^2 + 2m_H \left(L \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - y_{CM} \right)^2 \\ &\approx 16m_H \frac{L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{81} + 2m_H \frac{64L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{81} \\ &= \frac{144}{81} m_H L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 9.06 \cdot 10^{-48} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Rotation autour de Oy :

$$J_y = 2m_H L^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 17.41 \cdot 10^{-48} \text{ kg m}^2$$

Rotation autour de Oz :

$$\begin{aligned} J_z &= m_O y_{CM}^2 + 2m_H \left[L^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(L \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - y_{CM} \right)^2 \right] \\ &\approx 16m_H \frac{L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{81} + 2m_H \left[L^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{64}{81} L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{81} m_H \left(72L^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 81L^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{9} m_H L^2 \left(8 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 9 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = 26.52 \cdot 10^{-48} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

■

Il est usuel de désigner par K^2 la combinaison linéaire du carré des dimensions du solide; dans le cas du cône de révolution, K^2 est égal à $3/10 R^2$. La racine K de ce carré est le *rayon de giration*.

$$C_L = J = mK^2 \quad (7.13)$$

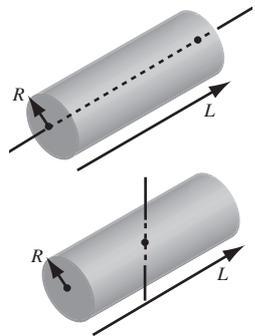
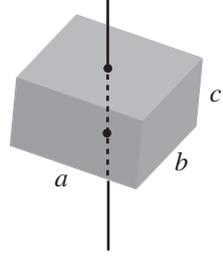
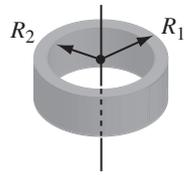
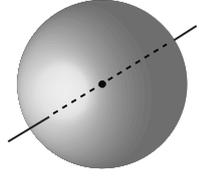
Le rayon de giration représente la distance de l'axe à laquelle toute la masse de l'objet pourrait être concentrée sans changer son moment d'inertie J .

Le tableau 7.1 donne les rayons de giration d'un certain nombre de solides homogènes pour une rotation autour d'un axe de symétrie (qui est un axe principal comme nous allons le voir plus bas). Lorsque la rotation d'un objet a lieu autour d'un axe de symétrie, le vecteur de moment cinétique \mathbf{L} et celui de la vitesse $\boldsymbol{\omega}$ sont parallèles.

Par contre, si la répartition de la masse n'est plus symétrique, les deux vecteurs ne sont plus parallèles, ce qui entraîne l'apparition de vibrations lors de la rotation. Ce phénomène se manifeste lorsque les roues avant d'une voiture sont mal équilibrées: le volant se met à vibrer parce que la masse n'est pas répartie de manière uniforme autour de l'axe de rotation, l'axe de symétrie et celui de rotation ne sont plus confondus. On voit donc que l'inertie d'un objet en rotation ne peut pas être représentée par un seul nombre, comme la masse qui est une grandeur scalaire, ni même par un vecteur comme le moment cinétique ou la vitesse angulaire, mais par une matrice, la *matrice d'inertie*:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

TABLEAU 7.1 Carré du rayon de giration de quelques solides homogènes.

Solide et axe de rotation	K^2	Solide et axe de rotation	K^2
Cylindre 	$\frac{R^2}{2}$ $\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$	Parallélépipède 	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
Anneau 	$\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$	Sphère 	$\frac{2R^2}{5}$

Il faut toutefois noter que pour tout solide rigide, quelle que soit sa forme, il existe au moins trois axes, mutuellement perpendiculaires, passant par le centre de masse, pour lesquels les deux vecteurs en question sont parallèles. Ce sont les axes principaux du solide rigide. Le garagiste qui équilibre une roue de voiture ne fait rien d'autre que de répartir la masse de telle manière que la rotation de la roue ait lieu autour d'un de ses axes principaux. Lorsque la rotation a lieu autour d'un axe principal, la matrice d'inertie n'a plus que trois éléments non nuls, les moments d'inertie principaux qui se trouvent sur la diagonale de la matrice :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Les moments d'inertie principaux des objets les plus courants sont répertoriés dans le tableau 7.1.

En définitive, nous pouvons maintenant rassembler les résultats des lignes qui précèdent et indiquer de quelle manière se calcule le moment cinétique d'un solide rigide en rotation.

Le moment cinétique d'un solide rigide en rotation à la vitesse angulaire ω est donné par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (7.14)$$

La grandeur \mathbf{J} est la matrice d'inertie du solide rigide. Lorsque la rotation a lieu autour d'un axe principal, la matrice en question est diagonale, et les vecteurs \mathbf{L} et $\boldsymbol{\omega}$ sont alors parallèles :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}\omega_x \\ J_{yy}\omega_y \\ J_{zz}\omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x\omega_x \\ J_y\omega_y \\ J_z\omega_z \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

7.7.5 Théorème de Huygens-Steiner (théorème de l'axe parallèle)

Usuellement, les tables numériques, comme le tableau 7.1, donnent les moments d'inertie principaux J_{CM} , c'est-à-dire relatifs à un axe qui passe par le centre de masse. Lorsque la rotation a lieu autour d'un axe a parallèle à un axe principal, situé à une distance d de l'axe principal, le nouveau moment d'inertie peut être calculé de manière simple au moyen du théorème de Huygens-Steiner, qui stipule que le nouveau moment d'inertie J_a s'obtient à partir de l'ancien en y ajoutant le produit de la masse m de l'objet (ou du système) et du carré de la distance d :

$$J_a = J_{CM} + md^2 \quad (7.16)$$

EXEMPLE 7.5. Évaluation de moments d'inertie.

En utilisant les valeurs du tableau 7.1 et/ou le théorème de Huygens-Steiner, évaluer les moments d'inertie : (a) d'une tige mince de longueur L par rapport à un axe principal perpendiculaire à la tige ; (b) de la même tige par rapport à un axe perpendiculaire à la tige passant par une des ses extrémités ; (c) d'une plaque rectangulaire mince ; (d) d'un anneau d'épaisseur négligeable.

SOLUTION : (a) La tige mince est considérée comme un cylindre de rayon négligeable ; en se basant sur la deuxième ligne du tableau 7.1, on obtient :

$$J_{CM, \text{ tige}} = \frac{mL^2}{12}$$

(b) La distance entre l'axe principal et nouvel axe a est égale à $L/2$. Le nouveau moment d'inertie sera donc :

$$J_a = J_{CM} + md^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

(c) Une plaque rectangulaire mince est un parallélogramme dont une des dimensions est négligeable (par exemple $c = 0$). Pour un axe de rotation autour de l'axe principal perpendiculaire au côté de longueur a , nous trouvons à partir du tableau 7.1 :

$$J_{\text{ plaque rectangulaire}} = \frac{ma^2}{12}$$

(d) L'épaisseur négligeable entraîne que $R_1 = R_2 = R$. Ainsi :

$$J_{\text{ anneau mince}} = \frac{m(R^2 + R^2)}{2} = mR^2$$

ce qui est un résultat évident, vu que toute la masse est située à une distance R de l'axe de rotation.

EXEMPLE 7.6. Conservation du moment cinétique : la pirouette en patinage.

Pour effectuer une pirouette debout, le patineur amorce le mouvement de rotation avec les bras écartés du corps et une jambe relevée, puis il ramène ses membres près de l'axe du corps, les bras contre la poitrine ou au-dessus de la tête (fig. 7.30a).

Nous établissons un modèle fortement simplifié : le corps de l'athlète est modélisé par un cylindre d'axe vertical, de masse $M = 50$ kg, de rayon $R = 18$ cm. Chaque bras est représenté par un cylindre de rayon moyen $r = 4$ cm, de longueur $L = 60$ cm et de masse $m = 3$ kg. Au début de la pirouette, les bras sont écartés (fig. 7.30b), puis ramenés à la verticale au-dessus de la tête (fig. 7.30c). Quelle sera la vitesse de rotation du patineur lors de la pirouette si, au début, il lui faut 1.2 s pour un tour complet ?

SOLUTION : Si l'on admet que les frottements entre la glace et les patins sont négligeables durant la préparation de la pirouette, nous pouvons appliquer la loi de conservation du moment cinétique qui n'a qu'une composante verticale :

$$J_1 v_1 = J_2 v_2$$

Lors de l'évaluation des moments d'inertie, il faut tenir compte que la rotation des bras a lieu autour d'un axe parallèle à un axe principal en appliquant le théorème de Huygens-Steiner ; dans les calculs, a et b représentent respectivement la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse des bras dans la position écartée et relevée :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} MR^2 + 2m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) + 2ma^2 \\ &= \frac{1}{2} 50 \text{ kg } (0.18 \text{ m})^2 + 2 \cdot 3 \text{ kg } \left(\frac{(0.04 \text{ m})^2}{4} + \frac{(0.6 \text{ m})^2}{12} \right) + 2 \cdot 3 \text{ kg } (0.48 \text{ m})^2 = 2.223 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} MR^2 + 2m \frac{r^2}{2} + 2mb^2 \\ &= \frac{1}{2} 50 \text{ kg } (0.18 \text{ m})^2 + 2 \cdot 3 \text{ kg } \frac{(0.04 \text{ m})^2}{2} + 2 \cdot 3 \text{ kg } (0.16 \text{ m})^2 = 0.9684 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

La vitesse de rotation de la pirouette sera :

$$v_2 = \frac{J_1}{J_2} v_1 = \frac{2.223 \text{ kg m}^2}{0.9684 \text{ kg m}^2} \frac{1 \text{ tr}}{1.2 \text{ s}} = 1.91 \text{ tr s}^{-1}$$

Cette valeur est en dessous des valeurs que l'on observe dans la réalité, vu que nous n'avons pas pris en compte la contribution de la jambe écartée dans le calcul du moment d'inertie lors de la phase d'amorce de la pirouette.

EXEMPLE 7.7. Valeurs de quelques moments cinétiques et de flux de moment cinétique.

Calculer : (a) le moment cinétique propre du Soleil et de la Terre en admettant que ces deux corps célestes sont des sphères homogènes ; la période de rotation moyenne du Soleil est de

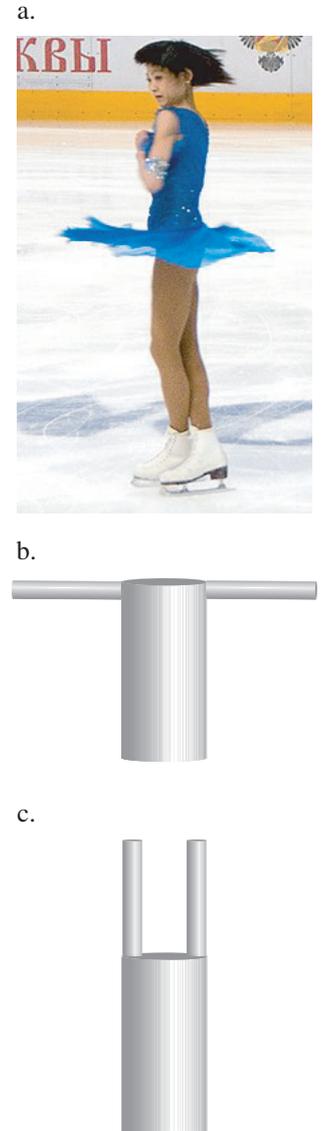


FIGURE 7.30 Pirouette debout : (a) attitude de la patineuse pendant la phase de rotation rapide ; (b) modèle simplifié de l'athlète à l'amorce de la rotation ; (c) modèle simplifié de l'athlète durant la phase de rotation rapide.

27 jours; (b) le moment cinétique orbital de la Terre autour du Soleil; (c) le moment cinétique orbital de la Lune; (d) le couple (flux de moment cinétique) exercé par un moteur d'automobile qui développe une puissance de 75 kW lorsque le régime est de 4400 tr min⁻¹.

SOLUTION: (a) Moment cinétique du Soleil

$$L_{\text{Soleil}} = J_{\text{Soleil}} \omega_{\text{Soleil}} = \frac{2}{5} m_{\text{Soleil}} R_{\text{Soleil}}^2 \frac{2\pi}{T_{\text{Soleil}}} \\ = \frac{2}{5} 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg} (6.95 \cdot 10^8 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{27 \text{ j} \cdot 86400 \text{ s j}^{-1}} = 1.0 \cdot 10^{42} \text{ Eu}$$

Moment cinétique de la Terre:

$$L_{\text{Terre}} = J_{\text{Terre}} \omega_{\text{Terre}} = \frac{2}{5} m_{\text{Terre}} R_{\text{Terre}}^2 \frac{2\pi}{T_{\text{Terre}}} \\ = \frac{2}{5} 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7.05 \cdot 10^{33} \text{ Eu}$$

Dans les deux cas, le moment cinétique est surévalué, parce que la densité de ces deux corps augmente de la surface vers le centre.

(b) La Terre effectue une révolution complète autour du centre de masse du système en une année terrestre (fig. 7.31). À partir de l'équation (7.8), on détermine que le centre de masse du système est à 4.50 · 10⁵ m du centre du Soleil, ce qui représente 0.7% du rayon solaire. Nous pouvons donc admettre que la révolution de la Terre a lieu autour du centre du Soleil. Le moment d'inertie de la Terre doit être corrigé au moyen de la relation de Huygens-Steiner (7.16). Le moment cinétique orbital de la Terre dans sa révolution autour du Soleil est donc:

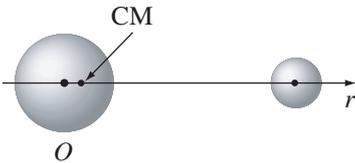


FIGURE 7.31 Système Soleil-Terre. Les échelles sont incorrectes, autant en ce qui concerne les dimensions des corps célestes que la distance qui les sépare. Le centre de masse du système n'est éloigné du centre du Soleil que de 0.7% du rayon solaire.

$$L_{\text{orbital Terre}} = (J_{\text{CM Terre}} + m_{\text{Terre}} d_{\text{Soleil-Terre}}^2) \omega \\ = \left(9.69 \cdot 10^{37} \text{ Eu s} + 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (1.50 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \right) \frac{2\pi}{365.4 \text{ j} \cdot 86400 \text{ s j}^{-1}} \\ = 2.68 \cdot 10^{40} \text{ Eu}$$

ce qui représente 2.7% de moment cinétique propre du Soleil. En calculant de la même manière le moment cinétique orbital de chacune des planètes du système solaire, on se rend compte que le moment cinétique du Soleil représente moins de 4% du moment cinétique total du système solaire.

(c) Le moment cinétique orbital de la Lune, calculé de manière analogue à la partie (b) est égal à 2.9 · 10³⁴ Eu, ce qui représente 4 fois celui de la Terre (celui de la Lune, soit 2.4 · 10²⁹ Eu, est négligeable). Le moment cinétique orbital important du système Terre-Lune a un effet stabilisateur sans lequel on suppose que l'axe de rotation de la Terre ne garderait pas son inclinaison autour de 23.5° par rapport au plan de l'écliptique.

(d) L'équation (7.2) indique que la puissance du processus est proportionnelle au couple et à la variation de la vitesse angulaire. Comme la vitesse angulaire des roues est négligeable par rapport au régime du moteur, c'est cette dernière valeur qui apparaît dans les calculs:

$$I_L = \frac{P_{\text{moteur}}}{\omega_{\text{moteur}}} = \frac{75 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s min}^{-1}}{2\pi \cdot 4400 \text{ min}^{-1}} = 162.8 \text{ Eu s}^{-1}$$



7.7.6 Intégration de la capacité dans le modèle

La loi de capacité permet de déterminer la vitesse angulaire à partir du moment cinétique et du moment d'inertie des éléments du système envisagé.

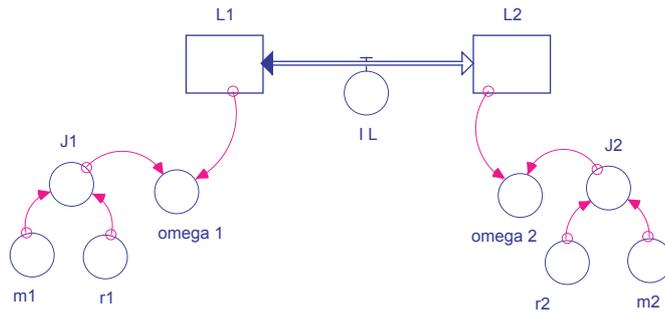


FIGURE 7.32 Insertion de la loi de capacité dans le modèle des deux disques couplés par un embrayage. La connaissance du moment d'inertie de chacun des disques permet de calculer leur vitesse angulaire à partir de leur moment cinétique.

Comme nous envisageons de modéliser le couplage de deux disques (fig. 7.32), la connaissance de leurs dimensions et de leurs masses permettra de calculer leurs moments d'inertie respectifs. Au cas où il ne s'agit pas d'objets de géométrie simple, le moment d'inertie doit être déterminé par l'expérience.

1. Quelle est la particularité de l'inertie en rotation ?
2. Comment calcule-t-on le moment d'inertie d'un système de corps solides en rotation autour d'un axe ?

1. La particularité est qu'elle ne dépend pas que de la masse inerte, mais également de sa répartition autour de l'axe de rotation. C'est de cette particularité (et de la conservation du moment cinétique) que le patineur fait usage lorsqu'il amorce sa pirouette avec les bras écartés, puis les ramène rapidement contre son corps pour diminuer son moment d'inertie, ce qui provoque une augmentation de sa vitesse de rotation.
2. Pour chacun des solides du système, il faut tenir compte de deux contributions : le moment d'inertie propre, auquel il faut ajouter le moment cinétique orbital que l'on obtient au moyen du théorème de Huygens-Steiner. La distance d qui apparaît dans ce calcul est celle qui sépare le centre de masse de l'axe de rotation de chaque solide.

Q

R

7.8 LOI DE RÉSTANCE

Nous avons vu en hydraulique, en électricité et lors de l'étude des processus thermiques que tout transfert d'une grandeur extensive (volume, charge, entropie) rencontre généralement une résistance à l'écoulement entraînant une dissipation d'énergie. Lors des processus de rotation, ce sont les frottements qui sont à l'origine de la dissipation. Dans ce qui suit, nous désignerons par $I_{L,R}$ les flux de moment cinétique engendrés par les frottements.

7.8.1 Transmission par un arbre rigide (supraconduction)

Un arbre rigide transmet le moment cinétique sans en limiter le flux ; c'est un supraconducteur du moment cinétique. Mais cette transmission du moment cinétique n'a lieu que s'il est soumis à une torsion (qui n'est pas nécessairement visible).

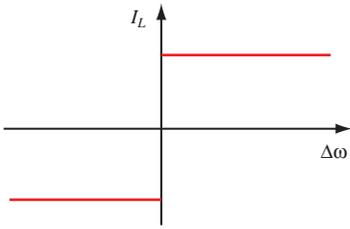


FIGURE 7.33 Frottement de COULOMB: le flux de moment cinétique (le couple dû au frottement) est indépendant de la différence de vitesse entre les deux corps en interaction.

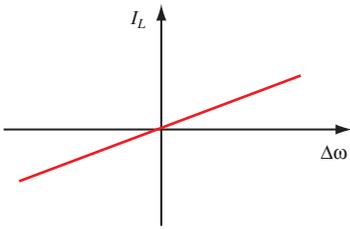


FIGURE 7.34 Frottement visqueux: le flux de moment cinétique (le couple dû au frottement) est proportionnel à la différence de vitesse entre les deux corps en interaction.

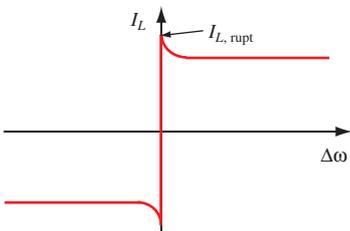


FIGURE 7.35 Caractéristique d'un embrayage à friction: la transmission du moment cinétique en mode supraconducteur cesse au-delà d'une valeur de rupture; après la rupture, le couple dû au frottement est constant (après une phase de réduction).

7.8.2 Frottement constant (frottement de COULOMB)

Le flux de moment cinétique (le moment, le couple) est constant (fig. 7.33), quelle que soit la valeur de la vitesse angulaire, mais son signe dépend de celui de la vitesse angulaire, c'est-à-dire du sens de rotation:

$$I_{L,R} = -\text{sgn}(\omega) I_{L,\text{Coulomb}} \tag{7.17}$$

Les frottements dans les appuis des pièces en mouvement de rotation peuvent également contribuer à la conductance et donc à des flux de moment cinétique.

7.8.3 Frottement de type ohmique (frottement visqueux)

Le module du couple dû au frottement peut dépendre de la vitesse relative des deux corps en interaction. Si l'on dépose un film d'huile entre les surfaces des deux corps, l'effet est proportionnel à la différence des vitesses angulaires:

$$I_{L,R} = -k \cdot \Delta\omega \tag{7.18}$$

La caractéristique de ce type de frottement est linéaire (fig. 7.34), comme celle de la loi d'OHM en électricité. C'est la viscosité du fluide qui détermine la valeur du coefficient de proportionnalité k .

7.8.4 Embrayage à friction

Un embrayage à friction (comme celui des voitures) oppose une résistance dont la caractéristique est assez particulière. Il transmet le moment cinétique jusqu'à une certaine valeur maximale de l'intensité $I_{L,\text{rupture}}$; en régime stationnaire, cette transmission se fait sans dissipation d'énergie (en mode supraconducteur, avec une conductance infinie). Il n'est pas possible de dépasser cette valeur limite, quelle que soit la différence des vitesses angulaires entre les deux parties de l'embrayage: il se met à patiner. Le flux de moment cinétique diminue avant de devenir constant (frottement de COULOMB). La valeur du couple où a lieu la rupture dépend de la pression exercée sur les disques d'embrayage (fig. 7.35).

Il est important de noter que, dans le cas de la transmission du moment cinétique, les frottements (par exemple les frottement dans les appuis ou ceux que l'on utilise sciemment dans les freins à disque pour ralentir le mouvement de rotation) ne s'opposent pas aux flux de moment cinétique mais, au contraire, les favorisent. Lors de la transmission par conduction du moment cinétique, les frottements contribuent à la conduction.

7.8.5 Intégration des flux résistifs dans le modèle

Nous sommes maintenant en mesure de compléter le modèle des deux disques.

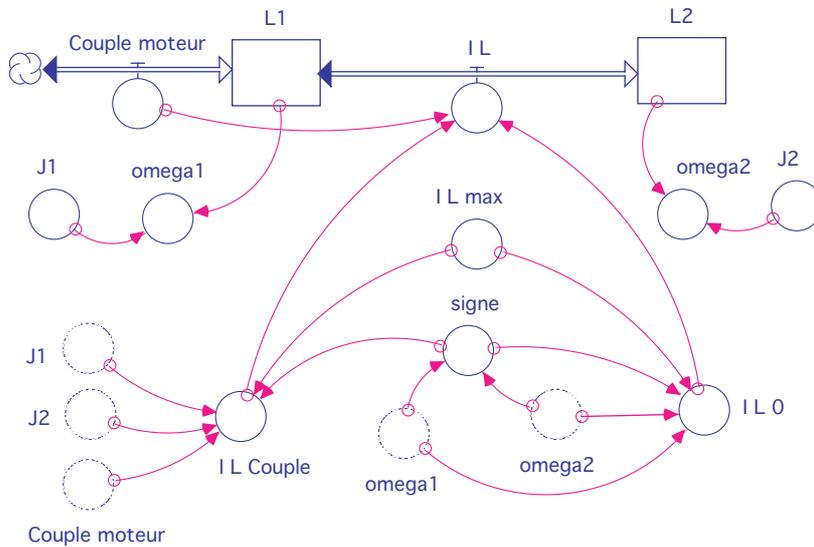


FIGURE 7.36 Modèle du couplage de deux disques au moyen d'un embrayage à friction.

Nous y ajoutons les particularités du transfert de moment cinétique par un embrayage à friction. Un couple moteur variable entraîne le disque 1 qui est couplé au disque 2 par un embrayage à friction équipé d'un limiteur de couple. Le couple moteur croît linéairement de 0 Eu s^{-1} à 150 Eu s^{-1} durant les 4 premières secondes, est nul durant les 4 secondes suivantes, puis est inversé et exerce un couple négatif de module égal à 100 Eu s^{-1} . Le limiteur de couple ne laisse passer entre les deux disques qu'un flux de moment cinétique de module inférieur ou égal à 50 Eu s^{-1} . Les moments d'inertie des disques valent respectivement 25 Eu s et 50 Eu s .

Dans le modèle, le paramètre «signe» prend les valeurs 1 ou -1 en fonction des valeurs des vitesses angulaires respectives et détermine si le moment cinétique s'écoule du disque 1 vers le disque 2 ou en sens inverse. Le flux de moment cinétique est calculé séparément et il est désigné par I_{L0} lorsque le couple moteur est nul et par $I_{L\text{couple}}$ lorsque celui-ci est enclenché.

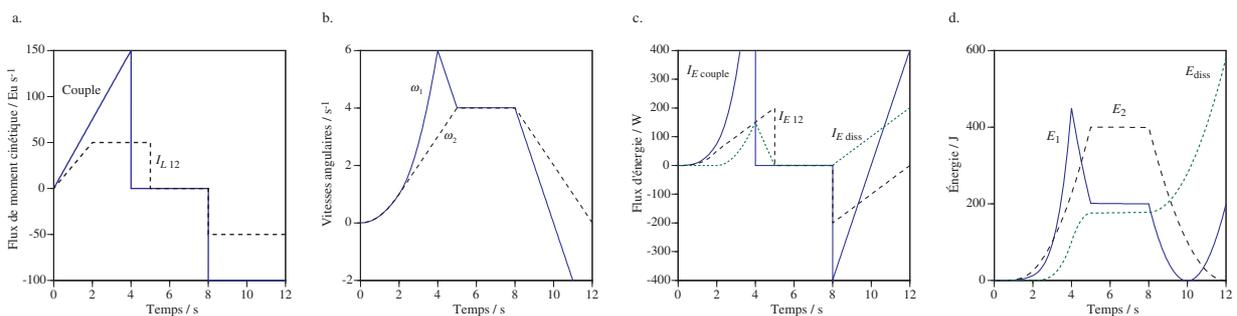


FIGURE 7.37 Simulation du modèle de la figure 7.36: (a) flux de moment cinétique; (b) vitesse angulaire des disques; (c) flux d'énergie; (d) énergie accumulée dans les disques et énergie dissipée dans l'embrayage.

La figure 7.37a montre l'évolution du couple moteur et celle du flux de moment cinétique entre les deux disques et la figure 7.37b celle des vitesses angulaires respectives. Les figures 7.37c et 7.37d montrent l'évolution des flux d'énergie et de l'énergie elle-même. Un flux d'énergie sera considéré comme positif s'il va vers le second disque, comme négatif dans le cas contraire. Au début du processus, les deux vitesses

angulaires croissent conjointement, le moment cinétique se répartit proportionnellement aux moment d’inertie de chacun des disques. Lorsque le flux de moment cinétique entre les deux disques atteint la valeur limite de 50 Eu s^{-1} , ce qui se produit après 2 secondes, l’embrayage se met à patiner, le flux entre les deux disques ne varie plus et la vitesse angulaire du second disque continue de croître au taux acquis, alors que celle du premier disque croît plus rapidement, à cause de l’apport plus important de moment cinétique. Le flux d’énergie injectée par le couple moteur est positif durant les 4 premières secondes.

Les figures 7.38, 7.39 et 7.40 visualisent les flux de moment cinétique, d’entropie et d’énergie entre les différents éléments du système.

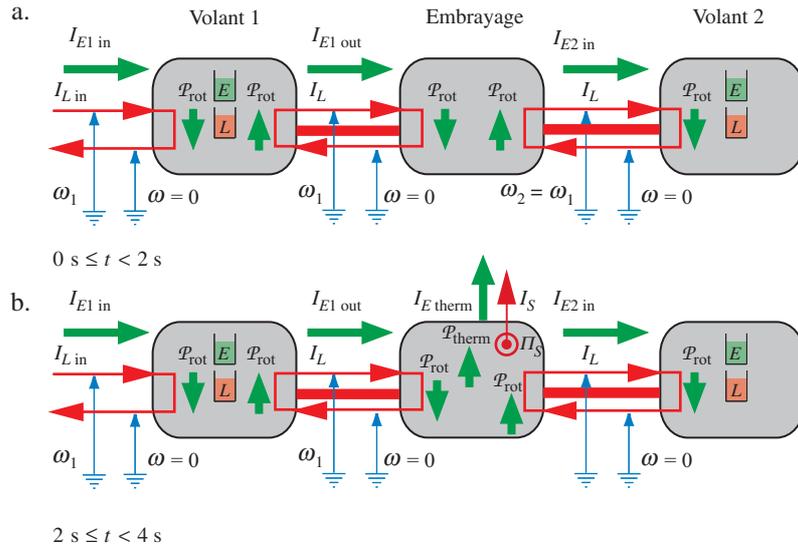


FIGURE 7.38 Diagrammes de processus illustrant les flux de moment cinétique, d’entropie et d’énergie durant les différentes phases du processus: (a) $0 \text{ s} \leq t < 2 \text{ s}$; (b) $2 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s}$.

Lorsque le couple moteur s’annule après 4 secondes, le flux de moment cinétique entre les deux disques conserve sa valeur de 50 Eu s^{-1} , ce qui entraîne une diminution du moment cinétique et de la vitesse angulaire du premier disque et une augmentation des mêmes grandeurs du second disque jusqu’à ce que leurs vitesses angulaires atteignent la même valeur, ce qui se produit 1 seconde plus tard.

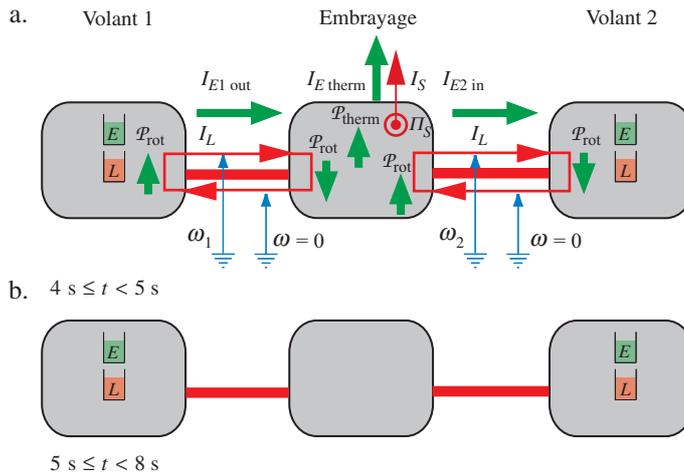


FIGURE 7.39 Diagrammes de processus illustrant les flux de moment cinétique, d’entropie et d’énergie durant les différentes phases du processus: (a) $4 \text{ s} \leq t < 5 \text{ s}$; (b) $5 \text{ s} \leq t < 8 \text{ s}$.

À partir de cet instant, les vitesses angulaires ne varient plus, vu que le couple moteur est nul et que nous avons admis qu’il n’y avait pas de frottement.

Lorsque le moteur exerce un couple négatif de 100 Eu s^{-1} sur le premier disque, le sens du flux de moment cinétique entre les deux disques s'inverse, mais reste limité à 50 Eu s^{-1} , ce qui entraîne une diminution plus rapide de la vitesse angulaire du premier disque; l'embrayage patine à nouveau. Au bout de 10 secondes, la vitesse angulaire du premier disque s'inverse, celle du second disque s'inversera après 12 secondes si le couple négatif continue à agir. À partir de l'instant où le couple a été inversé, l'embrayage patine, vu que le flux de moment cinétique dépasse la limitation de couple.

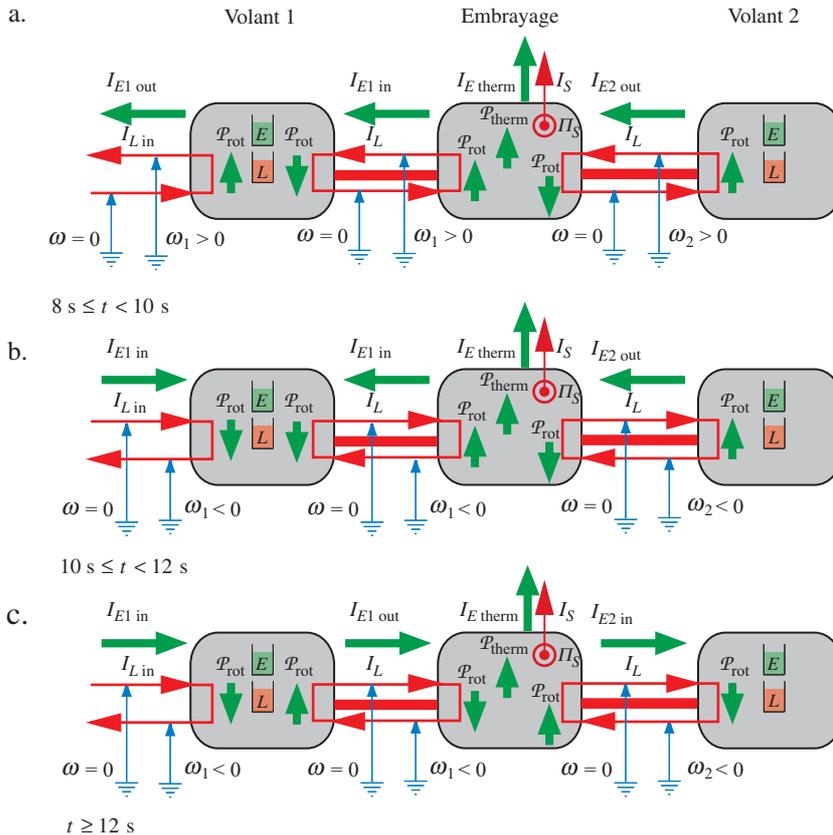


FIGURE 7.40 Diagrammes de processus illustrant les flux de moment cinétique, d'entropie et d'énergie durant les différentes phases du processus: (a) $8 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}$; (b) $10 \text{ s} \leq t < 12 \text{ s}$; (c) $t \geq 12 \text{ s}$.

Les flux d'énergie s'inversent lors de l'inversion du couple moteur, ce qui veut dire que le couple moteur soutire de l'énergie au système des deux disques. Lorsque le sens de rotation du premier disque s'inverse, le couple moteur injecte à nouveau de l'énergie dans le système. Durant les 4 premières secondes, le flux d'énergie entre les deux disques est plus faible que celui du couple moteur, parce qu'une partie de l'énergie est déposée dans le premier disque et que, à partir du moment où l'embrayage se met à patiner, une partie de l'énergie injectée est dissipée par la production d'entropie. À partir du moment où les vitesses angulaires des deux disques sont égales, tous les flux d'énergie s'annulent, jusqu'à l'instant de l'enclenchement du couple moteur inversé. Les flux d'énergie s'inversent jusqu'à ce que le premier disque inverse son sens de rotation (le flux d'énergie du couple moteur devient positif) et que, plus tard, le sens de rotation du second disque s'inverse lui aussi (le flux entre les deux disques devient à nouveau positif). On remarquera que les flux d'énergie n'ont pas toujours le même sens que les flux de moment cinétique.

1. Comment les frottements influencent-ils le processus de rotation ?

1. Les frottements sont des conducteurs de moment cinétique, que ce soit pour en apporter au système, comme par exemple dans un embrayage à friction, ou pour en extraire du système, par exemple dans les freins. Dans le cas de frottements de type visqueux, la conductance en moment cinétique du fluide est d'autant plus grande que la viscosité est importante.

Q

R

7.9 INDUCTION LORS DE FLUX DE MOMENT CINÉTIQUE

Le phénomène d'induction se manifeste lorsque la transmission se fait au moyen d'une pièce susceptible de se tordre élastiquement, par exemple lorsque la transmission du moment cinétique est assurée par un ressort (comme le ressort spiral d'une montre mécanique).

7.9.1 Énoncé de la loi d'induction

La loi d'induction a la même forme qu'en hydraulique et en électricité, à savoir :

$$\Delta\omega_L = -L_L \dot{I}_L \tag{7.19}$$

ce qui implique que l'inductance en rotation se mesure en $Eu^{-1} s$ ou $N^{-1} m^{-1}$.

7.9.2 Oscillations amorties du pendule de POHL

Le pendule de POHL (fig. 7.41) est un système destiné à montrer les particularités d'un mouvement de rotation oscillatoire. Il consiste en un disque (une roue à rayons) métallique (en général du cuivre) couplé au support par un ressort spiral. La partie inférieure du disque passe entre les deux pôles d'un électroaimant, ce qui permet de contrôler l'amortissement au moyen des courants de FOUCAULT, que l'on pilote par l'alimentation en courant de l'électroaimant. Il est de type visqueux, donc proportionnel à la vitesse angulaire.

Il y a deux contributions à la variation du moment cinétique du pendule, à savoir le flux de moment cinétique dû à l'action du ressort, qui sera décrit par la loi d'induction, et celui qui est dû à l'action de l'électroaimant, décrit par la loi de résistance.

Nous pouvons donc énoncer cette loi de variation au moyen de l'équation de bilan :

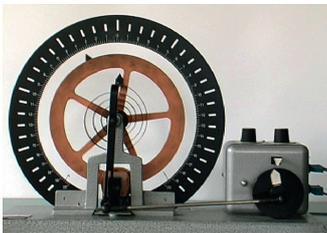


FIGURE 7.41 Pendule de POHL : il s'agit d'une roue en cuivre entraînée par un ressort spiral. Un électroaimant alimenté permet de contrôler l'amortissement par l'intermédiaire de courants de FOUCAULT.

$$\dot{L} = \sum I_L = I_{L, \text{ressort}} + I_{L, \text{amortissement}} \quad (7.20)$$

Le flux de moment cinétique dû à l'action du ressort est décrit par la loi d'induction; dans ce cas particulier, nous pouvons écrire $\Delta\omega_L = \omega_L = \omega$, vu qu'ici nous mesurons la différence des vitesses angulaires entre le pendule et son support immobile. Pour éviter la confusion avec la fréquence angulaire, nous exprimerons la vitesse angulaire au moyen de la dérivée temporelle de l'élongation angulaire φ :

$$\dot{\varphi} = -L_L \dot{I}_{L, \text{ressort}} \quad (7.21)$$

Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, le phénomène d'induction est une conséquence de l'élasticité du ressort (et de l'inertie du pendule). La caractéristique élastique d'un tel ressort est décrite par la constante de torsion D qui met en relation l'élongation angulaire φ et le flux de moment cinétique (le moment ou couple exercé par le ressort):

$$I_{L, \text{ressort}} = -D\varphi \quad (7.22)$$

La dérivation de dernière relation par rapport à la variable t et la comparaison du résultat obtenu avec la loi d'induction montrent que l'inductance du ressort est égale à l'inverse de sa constante de torsion:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{I}_{L, \text{ressort}} = -D\dot{\varphi} \\ \dot{I}_{L, \text{ressort}} = -\frac{1}{L_L}\dot{\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow L_L = \frac{1}{D} \quad (7.23)$$

L'influence de l'aimant servant à amortir le mouvement oscillatoire se manifeste par un flux de moment cinétique (un couple) proportionnel à la vitesse angulaire (les courants de FOUCAULT sont un effet inductif qui se manifeste dans les matériaux conducteurs qui se déplacent dans un champ magnétique). Il s'agit donc d'un frottement de type ohmique donné par l'équation (7.18):

$$I_{L, \text{amortissement}} = -k\dot{\varphi} \quad (7.24)$$

Notons que, dans ce cas, le moment cinétique est transporté vers le châssis du dispositif par le champ magnétique de l'aimant.

Pour lier le membre de gauche de notre équation de bilan aux caractéristiques du système étudié, nous devons encore appliquer la loi de capacité qui donne la relation entre le moment cinétique du pendule et son moment d'inertie J :

$$L = J\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{L} = J\ddot{\varphi} \quad (7.25)$$

Substituons ces trois lois dans l'équation de bilan:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi - k\dot{\varphi} \quad (7.26)$$

Divisons les deux membres par J et rassemblons tous les termes dans le membre de gauche:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J}\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \quad (7.27)$$

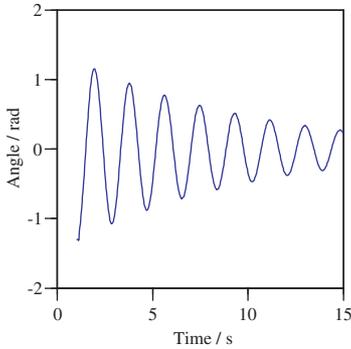


FIGURE 7.42 Enregistrement des oscillations amorties du pendule de POHL.

Cette équation différentielle a exactement la même forme que celle que nous avons rencontrée à la section 4.8 lors de l'étude des oscillations d'un fluide entre deux réservoirs communicants. Nous pouvons donc reprendre la solution que nous avons trouvée en tenant compte des correspondances :

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} e^{-\lambda t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \tag{7.28}$$

où $\lambda = k/2J$ est la constante d'amortissement (mesurée en s^{-1}) et ω_d la fréquence angulaire de l'oscillation amortie (fig. 7.42). Cette fréquence angulaire est donnée par :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_L C_L}} = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{7.29}$$

où ω_0 représente la fréquence angulaire de l'oscillation non amortie ou fréquence propre (cas hypothétique, non réalisable). La fréquence angulaire de l'oscillation amortie est généralement très proche de la fréquence propre.

Si nous nous étions intéressés à la vitesse angulaire ω au lieu de l'élongation angulaire φ , nous aurions trouvé une équation différentielle analogue, et sa solution aurait été formellement la même, à savoir :

$$\omega(t) = \hat{\omega} e^{-\lambda t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \tag{7.30}$$

Nous voyons donc que la vitesse angulaire ω (à ne pas confondre avec la fréquence angulaire ω_d qui apparaît dans l'argument du sinus) diminue progressivement dans le temps à cause des frottements caractérisés par le coefficient d'amortissement λ .

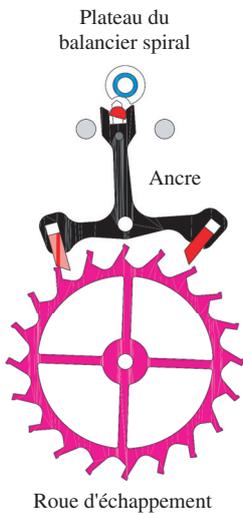


FIGURE 7.43 Mécanisme d'échappement servant à injecter dans le ressort du balancier spiral l'énergie dissipée dans le cycle précédent. (Figure: Scharf82 (CC)).

7.9.3 Oscillations entretenues et phénomène de résonance

Il est possible de compenser la dissipation due aux frottements en réinjectant de l'énergie dans le système. C'est ce que font par exemple le mécanisme d'échappement dans une horloge ou une montre (fig. 7.43) qui réinjecte l'énergie dissipée à chaque oscillation du pendule en la prenant soit dans un ressort «remonté», soit dans le poids «remonté», ou un enfant sur une balançoire qui entretient le mouvement en se faisant pousser par ses parents ou en projetant ses jambes vers l'avant. Dans les deux cas, la compensation des pertes énergétiques ne se fait pas pendant tout le cycle, mais à un moment précis de ce cycle et, en quelque sorte, par paquets.

Une autre manière de procéder consiste à injecter l'énergie durant tout le cycle, par une excitation extérieure dont le comportement doit être similaire à celui du système oscillant, donc sinusoïdal.

Pour le pendule de POHL, il s'agit de réinjecter cette énergie en l'y amenant par les flux de moment cinétique. Pour ce faire, on «excite» le pendule de POHL par un système de bielle-manivelle qui exerce un couple variant sinusoïdalement dans le temps, imprimant ainsi un mouvement sinusoïdal à l'extrémité du ressort. On peut varier la fréquence de cette excitation extérieure donnée par :

$$I_{L,ext}(t) = \hat{I}_{ext} \sin(\omega_{ext} t) \tag{7.31}$$

Pour résoudre ce problème mathématiquement, il suffit d'ajouter cette contribution à l'équation de bilan du moment cinétique que nous avons formulée à la section 5.4.

Avant de donner la solution, réfléchissons à la manière dont va réagir le système. Tout d'abord, nous nous rendons compte que, au bout d'un certain temps, il ne pourra pas

faire autre chose que d'osciller à la fréquence qui lui est imposée par l'excitation extérieure. Mais avant de pouvoir le faire, il devra «oublier» soit sa fréquence propre, soit celle à laquelle il était en train d'osciller, comme le révèle l'expérience illustrée par la figure 7.44 (les changements de fréquence sont indiqués par des flèches).

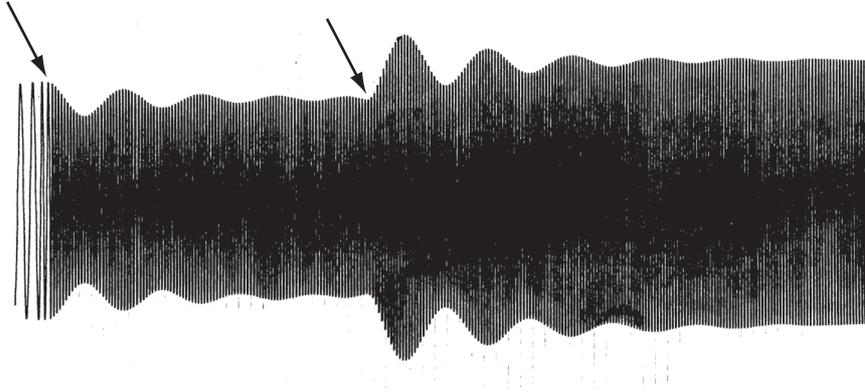


FIGURE 7.44 Mise en évidence du double effet du changement de fréquence de l'excitation extérieure (indiqué par des flèches). Le système met un certain temps pour s'y adapter, et l'amplitude de la réponse varie.

D'autre part, nous pouvons assez facilement imaginer que la réponse du système sera déphasée par rapport à l'excitation (il y a par exemple un déphasage entre le mouvement d'une balançoire et celui des jambes de l'enfant qui s'y trouve ou l'impulsion qui lui est donnée par la poussée des parents).

Finalement, nous réalisons également que l'amplitude du mouvement oscillatoire dépendra de la fréquence de l'excitation extérieure. Par exemple, si cette fréquence est beaucoup plus grande que la fréquence propre du pendule, celui-ci ne pourra plus suivre à cause de son inertie et il n'effectuera que des oscillations de très faible amplitude.

Le traitement de l'équation différentielle dans laquelle on tient compte de l'excitation extérieure permet de trouver la solution suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \hat{\varphi} e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\hat{I}_{\text{ext}}}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2)^2 + (2\lambda\omega_{\text{ext}})^2}} \sin(\omega_{\text{ext}} t + \delta) \\ &= \varphi_{\text{trans}}(t) + \varphi_{\text{stat}}(t, \omega_{\text{ext}}) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Examinons cette solution. Le premier terme n'est rien d'autre que la solution de l'équation différentielle décrivant le mouvement non excité dont il est question au début de cette section (en termes techniques, il s'agit de la solution de l'équation différentielle homogène, ou sans second membre). Comme nous l'avons vu à la fois au chapitre 4 et à la section 7.9.2, cette partie de la solution décroît exponentiellement et «s'éteint» au bout d'un certain temps. Il est usuel d'appeler *phase transitoire* (les électroniciens parlent de *transient*) la durée pendant laquelle cette partie de la solution est non négligeable. Elle représente le temps que met le système pour «oublier» sa fréquence propre ou la fréquence qu'on lui avait imposée avant le changement de la fréquence extérieure.

Le second terme représente la réponse du système à l'excitation extérieure. C'est une oscillation qui se déroule à la fréquence imposée par l'excitation avec un déphasage qui dépend des propriétés physiques du système oscillant. En termes techniques, cette partie de la solution, qui prend en compte le terme inhomogène de l'équation différentielle, est appelée solution particulière par les mathématiciens, ou *réponse stationnaire* du système par les physiciens.

Il est important de noter que cette réponse stationnaire dépend de l'amplitude de l'excitation extérieure (ce qui est en fait une banalité), mais également de l'écart entre la fréquence propre du système et celle de l'excitation extérieure et, finalement, du

coefficient d'amortissement (ce qui est à nouveau presque évident). De même, le déphasage δ dépend lui aussi de cet écart et du facteur d'amortissement. La résolution mathématique du problème permet de trouver que :

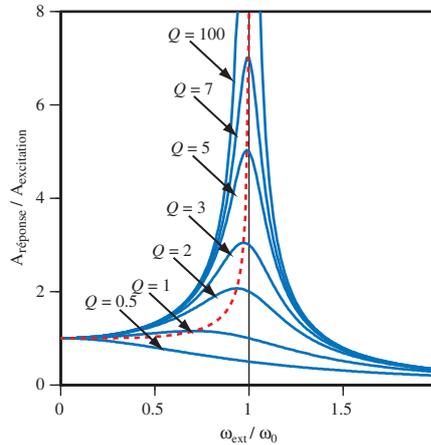
$$\tan(\delta) = \frac{1}{J} \frac{k\omega_{\text{ext}}}{\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2} = \frac{2\lambda\omega_{\text{ext}}}{\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2} \quad (7.33)$$

Mais ce qu'il est beaucoup plus important de noter, c'est que la partie stationnaire de la réponse du système dépend également de la fréquence de l'excitation. En effet, la partie stationnaire de la réponse est donnée par :

$$\varphi_{\text{stat}}(t, \omega_{\text{ext}}) = \frac{\hat{I}_{\text{ext}}}{J\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2)^2 + (2\lambda\omega_{\text{ext}})^2}} \sin(\omega_{\text{ext}}t + \delta) \quad (7.34)$$

Une analyse sommaire du facteur du sinus montre qu'il doit passer par un maximum, vu que le dénominateur passe par un minimum pour une certaine valeur de la fréquence d'excitation, minimum que l'on obtient en exigeant la nullité de la dérivée du radican-

FIGURE 7.45 Évolution de l'amplitude de la réponse du système en fonction de la fréquence de l'excitation et mise en évidence du phénomène de résonance. Le paramètre Q , le facteur de qualité, est inversement proportionnel au facteur d'amortissement λ . La courbe discontinue est le lieu des maxima de résonance ; elle montre comment la fréquence de résonance diminue lorsque l'amortissement augmente.



Cette variation de l'amplitude de la réponse du système à une excitation extérieure et son passage par un maximum est appelé *phénomène de résonance*. La courbe de réponse est la *courbe de résonance* (fig. 7.45), et la fréquence qui correspond au maximum de cette courbe est la *fréquence de résonance*. Selon les critères énoncés ci-dessus, celle-ci est donnée par :

$$\omega_{\text{ext, rés}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (7.35)$$

ce qui implique qu'elle s'éloigne de plus en plus vers des fréquences inférieures à celles de la fréquence propre du système lorsque l'amortissement augmente, ce qui n'est pas le cas pour un oscillateur électrique dont la fréquence de résonance correspond exactement à sa fréquence propre.

Dans la figure 7.45, les courbes de résonance sont données en fonction d'un paramètre Q , le *facteur de qualité*. Il est défini par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{Quantité d'énergie accumulée en une période}}{\text{Quantité d'énergie dissipée en une période}} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \quad (7.36)$$

Que nous apprend cette analyse sommaire de la réponse à une excitation extérieure d'un système oscillant ?

Essentiellement, que cette réponse dépend de la fréquence extérieure et qu'elle passe par un maximum pour une fréquence égale ou proche de la fréquence propre du système. Les conséquences peuvent être soit nuisibles, soit au contraire souhaitées.

L'exemple de conséquences nuisibles est essentiellement lié au fonctionnement des machines qui comportent presque toutes des parties tournantes, qui ont donc un comportement cyclique caractérisé par une fréquence. Certaines parties de la machine peuvent entrer en résonance suivant le régime de travail et, comme nous l'avons vu ci-dessus, l'amplitude des oscillations ainsi engendrées peut devenir tellement importante qu'elles provoquent la destruction du système (rupture d'un pont lors du passage d'une troupe au pas cadencé en 1850, à Angers, causant la mort de plus de 220 soldats, etc.).

Par contre, il arrive souvent que le phénomène de résonance soit souhaité. C'est le cas dans un récepteur radio, dont on accorde la fréquence de réception à celle de l'émetteur en variant la capacité du circuit oscillant et par le fait même la fréquence propre du système (en anglais, to «tune» veut dire «accorder»).

Pour sonder la structure de la matière et des molécules, les physiciens et les chimistes utilisent notamment des méthodes spectroscopiques dont la majorité sont basées sur le phénomène de résonance et consistent à injecter de l'énergie dans le système étudié au moyen d'ondes électromagnétiques et à observer à quelles fréquences l'échantillon absorbe cette énergie. Or, comme nous l'avons découvert, cette absorption sélective de l'énergie est une conséquence du phénomène de résonance. Les ondes électromagnétiques utilisées couvrent tout le spectre allant des ondes radio (pour la résonance magnétique nucléaire) aux rayons X et rayons gamma. La résonance magnétique nucléaire est utilisée en médecine pour l'imagerie médicale (IRM: Imagerie par résonance magnétique).

7.9.4 Stockage d'énergie lors de processus inductifs

En nous basant sur les résultats énoncés à la section 4.6, plus particulièrement sur l'équation (4.15), nous pouvons affirmer que l'énergie accumulée lors d'un processus de rotation faisant intervenir un élément inductif est donnée par :

$$E_{L,L} = \frac{1}{2} L_L I_L^2 \quad (7.37)$$

Dans le cas d'un ressort de torsion de constante D déplacé d'un angle φ par rapport à sa position d'équilibre, l'énergie accumulée devient, en vertu des équations (7.22) et (7.23):

$$E_{L,L} = \frac{1}{2} L_L I_L^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{D} I_L^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{D} (D\varphi)^2 = \frac{1}{2} D\varphi^2 \quad (7.38)$$

EXEMPLE 7.8. Modélisation du pendule de POHL.

Modéliser le comportement du pendule de POHL, comparer les résultats de la simulation avec ceux de la mesure illustrés par la figure 7.42 et simuler la manière dont l'énergie se répartit durant le processus.

SOLUTION: Le modèle contient trois éléments essentiels: le stock représentant la quantité de moment cinétique du pendule injectée par le ressort spiral et perdue à cause des frottements de

type visqueux. Le deuxième élément est un intégrateur qui sert à déterminer le flux de moment cinétique du ressort à partir de son taux de variation et le troisième un intégrateur qui calcule l'élongation angulaire à partir de la vitesse angulaire instantanée (fig. 7.46).

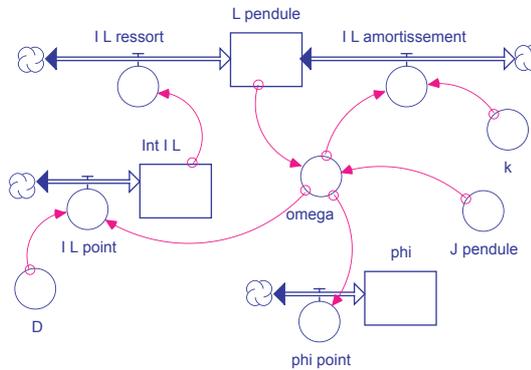


FIGURE 7.46 Modélisation du comportement dynamique du pendule de POHL.

Lors de la simulation, on peut introduire la valeur mesurée de la constante de torsion D du ressort ($1.75 \cdot 10^{-2} \text{ Eu s}^{-1}$) et ajuster les valeurs de J ($1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$) et k ($0.33 \cdot 10^{-3} \text{ Eu s}^{-1}$) après avoir déterminé la période T (1.84 s) et le facteur d'amortissement λ (0.11 Eu) à partir des données mesurées.

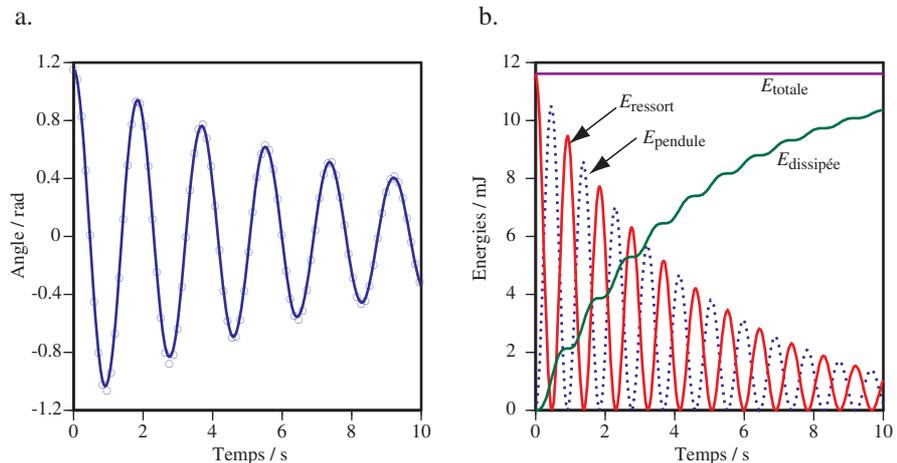


FIGURE 7.47 Évolution des grandeurs dynamiques du pendule de POHL : (a) élongation angulaire ; (b) énergie emmagasinée dans le ressort et dans le pendule, énergie dissipée et énergie totale.

La figure 7.47 montre le résultat de la simulation et la manière dont l'énergie totale constante du système se répartit au cours du processus : la partie qui n'est pas dissipée va et vient entre le ressort, dans lequel elle est stockée grâce au processus inductif, et le pendule en mouvement.

1. Quelles sont les particularités d'un système tel que le pendule de POHL qui rendent possible un comportement oscillatoire ?



1. C'est la présence simultanée dans le système d'un élément inductif (le ressort spiral) et d'un élément capacitif (le disque). Les deux peuvent emmagasiner alternativement l'énergie et l'échanger au cours d'un cycle.



Résumé du chapitre

La description des processus de rotation se fait au moyen de deux grandeurs fondamentales, le moment cinétique et la vitesse angulaire.

Le *moment cinétique* L est la grandeur extensive liée au mouvement de rotation; on l'appelle parfois moment angulaire. Il peut être accumulé dans les objets en rotation, peut s'écouler entre les systèmes et ses variations sont décrites par une équation de bilan. Sa particularité est d'être une grandeur vectorielle. De ce fait, les flux I_L de moment cinétique sont aussi une grandeur vectorielle. Les flux de moment cinétique sont usuellement appelés couple. L'équation de bilan est: $\dot{L} = I_{L1} + I_{L2} + \dots$

La grandeur extensive, le potentiel associé au moment cinétique, est la *vitesse angulaire* ω . C'est également une grandeur vectorielle. Les flux de moment cinétique ont toujours lieu entre deux niveaux de ce potentiel. À côté de la vitesse angulaire, on peut utiliser d'autres grandeurs telles que la fréquence f (ou ν) ou la période T pour la description cinématique du mouvement de rotation.

Les flux de moment cinétique sont accompagnés de flux d'énergie. Le taux de chargement en énergie est proportionnel à la vitesse angulaire, ce qui implique qu'un flux d'énergie sera égal à $I_E = \omega \cdot I_L$. Lorsque le processus est spontané, il y a libération d'énergie, alors que de l'énergie est liée au flux de moment cinétique si le processus est contraint. Le taux de libération ou de liaison de l'énergie est la puissance du processus: $\mathcal{P}_{\text{rot}} = -(\omega_2 - \omega_1)I_L = -\Delta\omega I_L$. L'énergie accumulée dans un objet en rotation, son énergie cinétique de rotation, est égale à $E_{\text{rot}} = 1/2 J\omega^2$.

La capacité d'un système à emmagasiner du moment cinétique et de l'énergie est son moment d'inertie J . Cette grandeur est proportionnelle à la masse inerte du système et à la répartition de cette masse autour de l'axe de rotation, répartition que l'on quantifie au moyen d'une combinaison linéaire de carrés des dimensions du système.

Le moment cinétique peut passer d'un système à l'autre de différentes manières: par l'intermédiaire d'un arbre rigide (en mode supraconducteur), par des embrayages qui entraînent généralement une dissipation de l'énergie à cause des frottements, par des éléments inductifs tels que des ressorts ou par l'intermédiaire de champs. La présence d'éléments inductifs dans un système est à l'origine de phénomènes d'oscillations (balancier de montre).

Questions

- Comment se présente la combinaison de diagrammes de processus représentant l'éolienne et le générateur apparaissant dans la figure sur la page de titre de ce chapitre?
- D'où vient le moment cinétique qui circule à travers la mèche d'une perceuse électrique? Quel est le rôle de l'énergie dans ce cas?
- Considérez deux disques avec un axe commun comme dans la figure 7.48. Si l'un des deux reçoit initialement une certaine quantité de moment cinétique, qu'advient-il de ce moment cinétique et de l'énergie emmagasinés dans ce disque? Supposez que le système est isolé de son environnement.

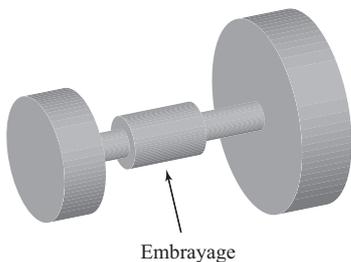


FIGURE 7.48
Question 3

- Considérez deux verres, pas nécessairement identiques; le premier est plein. Versez l'eau du premier dans le second jusqu'à ce que les niveaux soient les mêmes. Dans quelle mesure cet exemple démontre-t-il les rôles du moment cinétique et de l'énergie des disques de la question 3?
- Si la masse de la Terre était distribuée de manière homogène au lieu d'être plutôt concentrée autour du centre, son moment d'inertie serait-il plus grand ou plus petit qu'il n'est en réalité? Comment sa période de rotation changerait-elle si l'on pouvait redistribuer sa masse de manière uniforme?

Exercices

- Le flux d'énergie entre une grosse turbine et un générateur vaut 200 MW. La turbine effectue 3000 tours par minute. Déterminez la valeur du courant de moment cinétique circulant à travers l'arbre.
- Un générateur a une efficacité de 93%, et sa puissance électrique vaut 5.0 kW. (a) Esquissez le diagramme de processus du dispositif. (b) Déterminez la puissance rotatoire. (c) La mesure du courant de moment cinétique à travers l'arbre donne 600 Eu s^{-1} . Quelle est la vitesse de rotation de l'arbre?
- Le flux de moment cinétique du courant d'air entraînant une éolienne vaut 250 Eu s^{-1} , alors que celui qui est transporté par l'arbre allant de la turbine au générateur vaut 150 Eu s^{-1} . (a) Déterminez le taux de variation du moment cinétique des pales de la turbine. (b) Si le moment d'inertie des pales de la turbine vaut 2000 kg m^2 , quelle est la valeur du taux de variation de la vitesse angulaire? (c) Que vaut le moment cinétique après 10 s en admettant que le courant de moment cinétique

est constant et que la turbine était immobile au début? (d) Que vaut la vitesse angulaire des pales après 10 s?

- On envisage un objet en rotation dont le moment d'inertie vaut 100 kg m^2 . À un certain moment, sa vitesse angulaire vaut 3.0 s^{-1} et l'accélération angulaire 0.20 s^{-2} . (a) Quel est le taux de variation du moment cinétique de l'objet? (b) Quel est le taux de variation de l'énergie de l'objet?
- Dans l'Exercice 1, l'arbre a une longueur de 8 m et un diamètre de 40 cm. Il est en acier dont le module de torsion est de $8.0 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$. Déterminez l'angle de torsion.
- Dans l'embrayage à friction de la figure 7.48, le courant de moment cinétique vaut 20 Eu s^{-1} lorsque les disques tournent à des vitesses angulaires respectives de 3.0 s^{-1} et 1.5 s^{-1} . Déterminez la coefficient de frottement de l'embrayage.

Problèmes

- Une automobile qui roule à la vitesse de 100 km h^{-1} utilise 4.7 litres d'essence pour une distance de 100 km. La combustion d'un litre d'essence libère 38 MJ d'énergie. Le régime du moteur, dont l'efficacité mécanique est de 20%, est de 3000 tours par minute. Déterminez la valeur du flux de moment cinétique à travers l'arbre.
- Un cheval de bois est fixé sur un manège à 4 m de l'axe. L'évolution temporelle de la vitesse angulaire est donnée par la figure 7.49. (a) Quel est l'angle parcouru par le cheval de bois durant les premières 25 s? (b) Déterminez son accélération angulaire en fonction du temps.

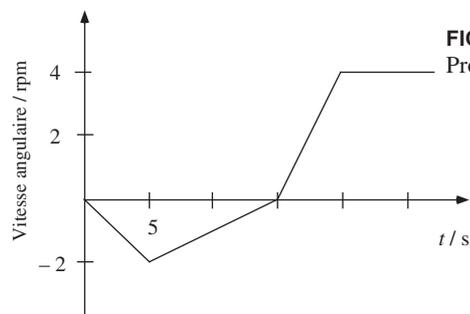


FIGURE 7.49
Problème 2

- L'accélération angulaire d'un disque évolue comme le montre la figure 7.50. Déterminez la valeur de la vitesse angulaire à l'instant $t = 30 \text{ s}$, en admettant qu'elle valait 20 s^{-1} à l'instant $t = 5 \text{ s}$.

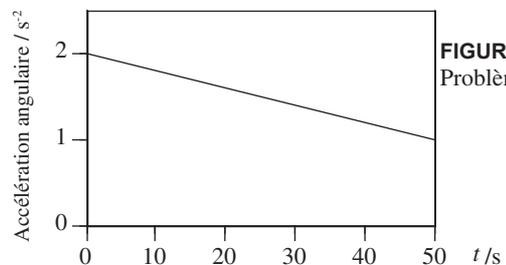


FIGURE 7.50
Problème 3

- La vitesse angulaire d'un disque dont le moment d'inertie vaut 150 kg m^2 évolue comme le montre la figure 7.51.

Déterminez de quelle manière évolue le flux d'énergie émanant du disque.

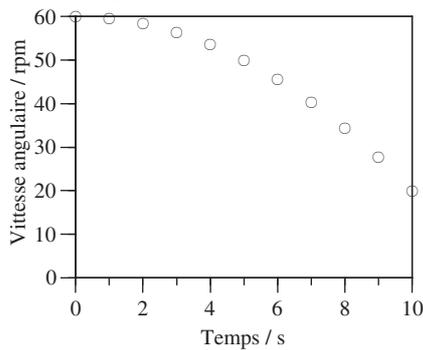


FIGURE 7.51
Problème 4

- Un manège a un moment d'inertie de 15000 kg m^2 . Sa vitesse angulaire augmente à un taux constant, et elle est de 12 tours par minute après 4 s. Quelle doit être la puissance minimale du moteur entraînant le manège après 2.0 s ?
- Deux disques tournant sur un axe commun sont reliés entre eux par un embrayage à friction (fig. 7.48). La caractéristique de l'embrayage est de type ohmique (le courant de moment cinétique à travers l'embrayage est proportionnel à la différence des vitesses angulaires) et le facteur de proportionnalité vaut 2.0 N m s . Au début, le petit disque (moment d'inertie de 40 kg m^2) tourne avec une vitesse angulaire de 100 s^{-1} , alors que le second disque (moment d'inertie de 80 kg m^2) est immobile. Un moteur entraîne le petit disque, fournissant un courant de moment cinétique constant de 40 Nm . Le comportement du système apparaît dans la figure 7.52.

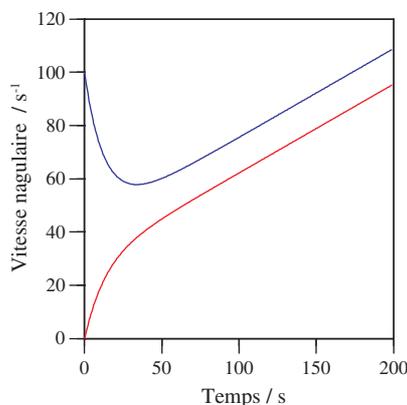


FIGURE 7.52
Problème 6

- A l'instant $t = 20 \text{ s}$, la vitesse angulaire du petit disque vaut 61.04 s^{-1} . Calculez la vitesse angulaire du second disque au même instant et comparez cette valeur avec celle du graphique.
 - Déterminez la différence des vitesses angulaires après un très long temps et comparez votre valeur avec celle du graphique.
- Deux disques tournent sur le même axe (fig. 7.48). Initialement, les deux disques sont immobiles, les moments d'inertie sont respectivement de 45 kg m^2 et 90 kg m^2 . Durant 5.0 s, un moment de 150 N m est appliqué depuis la gauche au petit disque. L'embrayage à friction peut transmettre un moment maximal de 50 N m . (a) Esquissez l'image hydraulique du processus. (b) Que vaut la vitesse angulaire de chacun des disques après 5 s ? (c) Que vaut la vitesse angulaire des disques après un très long moment ?

- La figure 7.53a montre un disque couplé par un embrayage à friction à un axe élastique (ressort de torsion). La partie b de la figure 7.53 montre l'évolution de la vitesse angulaire aux deux extrémités de l'axe élastique, ainsi que celle du disque. Le système est entraîné par un moteur qui applique un moment tel que la vitesse angulaire ω_1 à l'entrée varie de manière périodique. Le moment d'inertie du disque est de 10.0 kg m^2 , la constante de torsion du ressort spiral est de 0.10 Nm , la résistance de l'embrayage de 1.0 (Nm s)^{-1} .

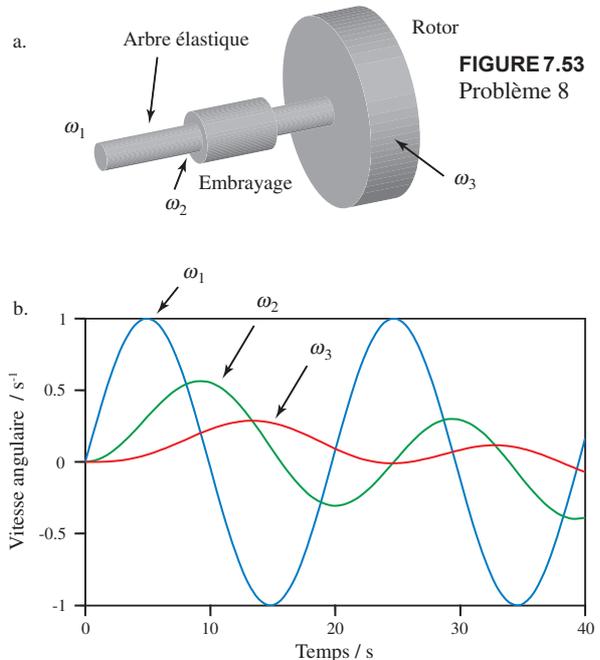


FIGURE 7.53
Problème 8

- Esquissez le diagramme du modèle dynamique du processus se déroulant dans le système.
 - Écrivez l'équation du bilan de moment cinétique du disque.
 - Comment se présente l'équation décrivant le comportement inductif de l'axe élastique ?
 - Dans la figure 7.53b, la vitesse angulaire à l'entrée de l'embrayage et celle du disque sont indiquées pour un cas particulier. Déterminez le courant de moment cinétique à travers l'arbre en fonction du temps.
 - Déterminez la puissance rotatoire du moteur qui entraîne le système en fonction du temps.
 - Déterminez le taux de libération d'énergie dans l'embrayage à l'instant $t = 10 \text{ s}$.
- Deux disques tournant sur le même axe sont couplés par un embrayage à friction (fig. 7.48). La caractéristique de l'embrayage est de type ohmique (le courant de moment cinétique à travers l'embrayage est proportionnel à la différence des vitesses angulaires). Initialement, le petit disque, de moment d'inertie égal à 40 kg m^2 tourne à raison de 1200 tours par minute, le grand disque (moment d'inertie de 80 kg m^2) est immobile. Après 100 s, la vitesse angulaire du petit disque a été réduite de moitié. (a) Que vaut la vitesse angulaire du grand disque à l'instant $t = 100 \text{ s}$? (b) Combien d'énergie a été dissipée dans l'embrayage jusqu'à cet instant ? (c) Combien de temps faut-il pour que le grand disque atteigne 90% de sa vitesse angulaire finale ?

CHAPITRE 8

QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE

Nous l'avons vu au chapitre précédent, les processus mécaniques peuvent être expliqués de la même manière que les phénomènes électriques ou thermiques: ils sont la conséquence du stockage et du transfert d'une grandeur extensive entre deux niveaux d'une grandeur intensive associée. Nous découvrirons ici que les phénomènes de translation résultent du stockage, du transport et du transfert de quantité de mouvement. En fait, on dit qu'un processus mécanique a lieu dès que de la quantité de mouvement (ou du moment cinétique) est transférée d'un corps à un autre. Le côté géométrique du mouvement – le fait que des corps changent de position – n'est pas une caractéristique fondamentale d'un processus mécanique.

8.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES: COLLISIONS

Les collisions illustrent la propriété fondamentale des corps en mouvement: ils contiennent de l'élan que l'on appelle *quantité de mouvement* lorsqu'ils se déplacent. Ils la transfèrent lorsqu'ils interagissent mécaniquement avec d'autres corps. Nous le remarquons si une personne nous bouscule, si on nous lance une balle ou que nous la frappons, ou si nous buttons contre une paroi. De toute évidence, un corps en mouvement transporte une quantité de mouvement d'autant plus grande qu'il se meut vite et qu'il est gros. Lors de collisions, il y a transfert de quantité de mouvement d'un corps à l'autre.

8.1.1 Exemples de collisions et de chocs

Les chocs ont lieu à toutes les échelles, grandes ou petites, rapides ou lentes. Quelques exemples:

- Dans la vie quotidienne, la collision avec d'autres personnes lors de bousculades ou l'accrochage de voitures lors d'un accident de la circulation.
- Dans tous les sports de balle, la trajectoire de la balle est essentiellement modifiée lors de chocs. C'est le cas de tous les sports de raquette et, entre autres, du football. La figure 8.1 montre l'interaction entre la tête du footballeur et le ballon lors d'un renvoi de la tête. Dans le jeu de billard, la trajectoire de la boule est modifiée par les collisions avec d'autres boules ou avec les bandes. Notons que la rotation des balles ou des boules permet également de modifier la trajectoire.
- En physique, on utilise des projectiles pour sonder la structure intime de la matière. Ce procédé a été inventé par RUTHERFORD au cours d'une série d'expériences qui lui ont permis de découvrir l'existence du noyau atomique en 1911. Dans ce type de collisions, les particules qui se rencontrent ne se touchent pas mais échangent de la quantité de mouvement par l'intermédiaire de champs, dans le cas particulier, le champ électrique. On continue à utiliser



FIGURE 8.1 Choc entre la tête d'un footballeur et le ballon.

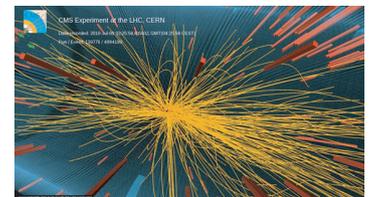


FIGURE 8.2 Collision proton-proton à 7 TeV produisant plus d'une centaine de particules chargées dans le détecteur CMS au CERN.



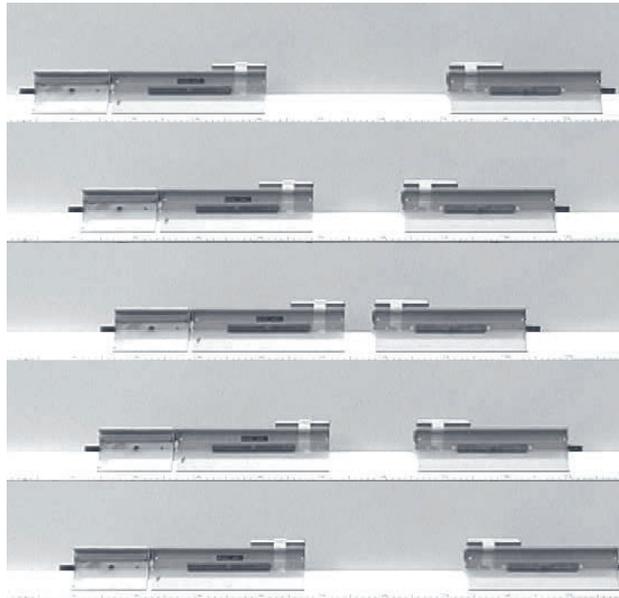
FIGURE 8.3 NGC 4038 et NGC 4039, dites les galaxies des Antennes, photographiées par le télescope spatial Hubble, de la NASA. Ces deux galaxies sont en train de fusionner, et cette fusion engendre la formation de nombreux amas d'étoiles. Les galaxies des Antennes ont commencé à interagir il y a quelques centaines de millions d'années (Photo: ESA/Hubble (CC)).

FIGURE 8.4 Quelques séquences de l'enregistrement de la collision de deux glisseurs sur un rail à coussin d'air. La répulsion est assurée par des aimants montés à l'avant de chacun des glisseurs.

cette méthode, mais avec des énergies des millions de fois supérieures, dans tous les accélérateurs de particules, et en particulier au CERN pour sonder la structure interne des nucléons (fig. 8.2).

- À l'autre extrémité de l'échelle, on peut observer des collisions de planètes et de comètes, mais aussi de galaxies (fig. 8.3). Lors de telles collisions, il est rare que des étoiles elles-mêmes entrent en collision, mais le gaz et les poussières interagissent et sont localement comprimés, ce qui les réchauffe et peut provoquer la naissance de nouvelles étoiles (starburst ou sursaut de formation d'étoiles). Une autre application en astronautique est l'assistance gravitationnelle (ou fronde gravitationnelle), qui consiste à utiliser les planètes du système solaire pour modifier la trajectoire d'une sonde et augmenter sa vitesse lorsqu'on l'envoie dans des missions lointaines. Ici aussi, la «collision» se fait sans contact entre les deux corps; ils échangent de la quantité de mouvement par l'intermédiaire du champ gravitationnel.

8.2 ÉTUDE DE CAS: COLLISION ENTRE DEUX GLISSEURS



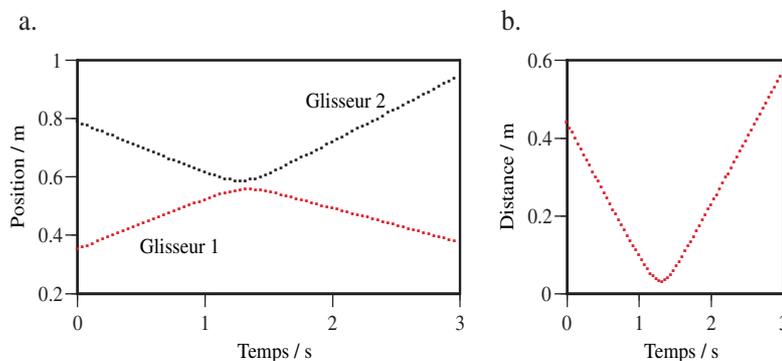
Pour nous familiariser avec le mouvement de translation et les nouvelles notions qui y sont rattachées, nous allons étudier la collision de deux glisseurs munis d'aimants fixés de telle manière qu'ils se repoussent. Les glisseurs sont montés sur un rail à coussin d'air et se déplacent dans une seule dimension. Les données relatives à la position sont extraites d'un enregistrement vidéo. Nous allons construire un modèle dynamique avec plusieurs objectifs en vue. En premier lieu, nous voulons montrer que des concepts simples suffisent pour construire une compréhension élémentaire des phénomènes de translation. Ensuite, nous serons en mesure de déduire une loi des interactions mécaniques sans devoir l'emprunter à la littérature existante. Troisièmement, nous comparerons les simulations obtenues à partir du modèle et les données expérimentales pour déterminer les valeurs des paramètres du modèle. Dans une section ultérieure, les valeurs de l'énergie seront intégrées au modèle pour nous permettre de comprendre son rôle dans les systèmes mécaniques. Cette première partie a pour

objectif de révéler les points importants, sans s'attarder sur le formalisme. Les résultats trouvés seront formalisés dans les sections suivantes.

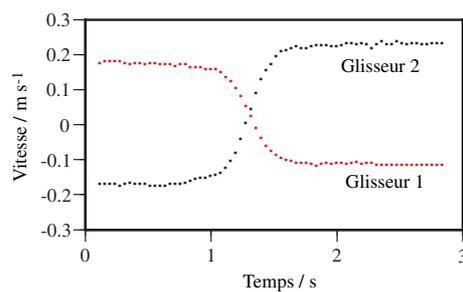
8.2.1 Expérience, recueil et exploitation des données

Expérience. Les deux glisseurs se déplacent sur un rail à coussin d'air horizontal, donc pratiquement sans frottement. Le premier glisseur est de taille standard, on a accouplé un glisseur plus petit au second glisseur. Deux aimants sont fixés sur chacun des glisseurs (fig. 8.5) de telle manière qu'ils se repoussent lorsqu'ils s'approchent l'un de l'autre. La masse d'un glisseur standard est de 503 g, celle d'un petit glisseur de 250 g et celle d'un aimant de 115 g. Chaque aimant a une longueur de 9.1 cm. Le mouvement des glisseurs est enregistré par une caméra vidéo

Recueil des données expérimentales. Les positions respectives des glisseurs sont déterminées à partir des images successives de la séquence vidéo (fig. 8.5). La figure 8.6 indique la position de la face antérieure de chacun des glisseurs ainsi que leur distance en fonction du temps.



Détermination de la vitesse à partir de la position. Lorsque l'on connaît la position d'un objet en fonction du temps, le module de sa vitesse peut être aisément déterminé en tant que taux de variation de la position. Si nous le faisons à partir des données de la figure 8.6, nous obtenons les composantes des vitesses en fonction du temps, représentées dans la figure 8.7. Le signe positif est attribué au mouvement vers la droite.



On notera que les deux glisseurs inversent le sens de leur mouvement durant la collision, ce qui se manifeste par un inversion du signe de la composante des vitesses respectives. D'autre part, lorsqu'ils sont suffisamment éloignés l'un de l'autre, les vitesses sont pratiquement constantes. La variation de la vitesse du glisseur 1 est plus importante que celle du glisseur 2.

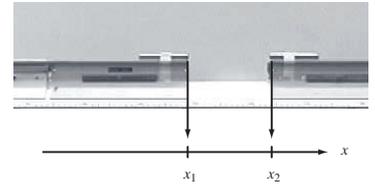


FIGURE 8.5 Mesure de la position lors de la collision de deux glisseurs équipés d'aimants sur un rail à coussin d'air. La position en fonction du temps est mesurée à partir des images successives d'une séquence vidéo.

FIGURE 8.6 Collision de glisseurs: (a) positions respectives des faces antérieures des glisseurs; (b) distance des faces antérieures en fonction du temps.

FIGURE 8.7 Composante de la vitesse des deux glisseurs obtenue à partir des données de la figure 8.6. On mesure le taux de variation moyen de la position entre deux intervalles de temps ($dt = 0.04$ s) et les valeurs sont lissées en utilisant une moyenne mobile centrée portant sur 5 points.

8.2.2 Vitesse et quantité de mouvement

Comme pour les autres domaines de la physique, nous avons besoin de deux grandeurs fondamentales pour la description du mouvement de translation, l'une intensive pour indiquer le niveau de mouvement, l'autre extensive pour indiquer la quantité du mouvement; ce seront la *vitesse* et la *quantité de mouvement*.

Vitesse en tant qu'indicateur du niveau de mouvement. La vitesse est une grandeur qui s'offre de manière évidente pour la description du mouvement de translation. Nous observons que cette grandeur varie lors de la collision des deux glisseurs, mais qu'il n'y a pas échange des vitesses, puisque les variations ne sont pas les mêmes pour chacun des glisseurs.

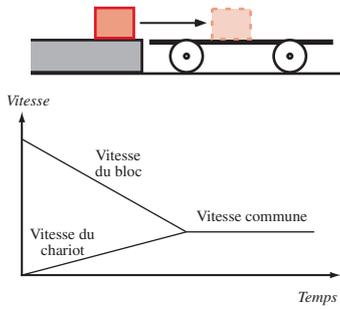


FIGURE 8.8 Un bloc lancé sur un chariot initialement immobile glisse et le met en mouvement. Le processus de glissement dure jusqu'à ce que les deux objets aient acquis une vitesse commune.

Pour révéler le rôle de la vitesse dans les phénomènes de mouvement, nous observons ce qui se passe lorsqu'un bloc est lancé sur un chariot immobile (fig. 8.8). Le bloc se met à glisser sur le chariot et le met en mouvement à cause du frottement. On observe que la vitesse du bloc par rapport au chariot diminue alors que celle du chariot par rapport au sol augmente. Finalement, le bloc cesse de se mouvoir par rapport au chariot et se déplace en commun avec le chariot: *les deux corps ont atteint une vitesse commune*.

Nous avons observé ce comportement dans d'autres phénomènes de caractère complètement différent: des éléments en interaction atteignent le même niveau ou *potentiel* si nous attendons suffisamment longtemps pour que l'équilibre puisse s'établir. Nous en concluons donc, par analogie, que *la vitesse est le niveau ou le potentiel du mouvement de translation*.

Quantité de mouvement. Le bloc lancé sur le chariot y apporte une certaine *quantité de mouvement* dont il cède une partie jusqu'à ce que les deux objets aient atteint leur vitesse commune. La quantité de mouvement perdue par le bloc a été transférée au chariot, ce qui nous permet de supposer que la quantité de mouvement totale du bloc et du chariot est restée constante durant l'interaction.

La quantité de mouvement est la grandeur extensive liée au mouvement de translation. Elle a les mêmes propriétés que les grandeurs extensives qui nous ont servi à la description d'autres phénomènes: le volume dans les processus hydrauliques, la charge en électricité, l'entropie dans les processus thermiques, etc. La quantité de mouvement est accumulée dans des objets en mouvement, et elle peut être transférée d'un corps vers un autre lorsqu'ils interagissent mécaniquement. À défaut d'une connaissance plus détaillée, nous allons commencer notre étude en admettant que la quantité de mouvement ne peut être ni créée, ni détruite, que c'est une grandeur conservée. Nos observations quotidiennes semblent contredire cette hypothèse; si nous voulons continuer à la considérer comme correcte, nous devons assumer que la quantité de mouvement perdue est transférée au support et, finalement, à la Terre.

La notion de quantité de mouvement a été introduite en 1687 en tant que définition par Isaac NEWTON dans son ouvrage fondateur, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Elle est désignée par le symbole *p*.

8.2.3 Relation entre quantité de mouvement et vitesse

Intuitivement, on se rend compte que la quantité de mouvement d'un objet sera d'autant plus grande qu'il se meut rapidement. Mais ce constat ne nous permet pas de conclure que les notions de vitesse et de quantité de mouvement sont interchangeables. Pour nous en convaincre, il suffit d'imaginer que nous sommes frappés par une balle de ping-pong, une balle de golf ou un ballon de football arrivant tous à la même vitesse. Ce n'est pas le volume, mais une autre caractéristique de l'objet qui détermine la valeur de sa quantité de mouvement.

L'analyse de la collision inélastique de deux glisseurs identiques (fig. 8.9), le second immobile avant le choc, révèle que leur vitesse commune est égale à la moitié de celle du premier glisseur. Vu que la quantité de mouvement a été répartie en parts égales sur chacun des glisseurs, cette observation nous permet de conclure que la quantité de mouvement et la vitesse sont proportionnelles :

$$p \propto V \tag{8.1}$$

Comme nous l'avons fait remarquer ci-dessus, ce n'est pas le volume, mais l'inertie de l'objet qui détermine, à vitesse égale, la quantité de mouvement qu'il est en mesure d'emmagasiner. La grandeur qui mesure l'inertie d'un objet est sa *masse inerte* m :

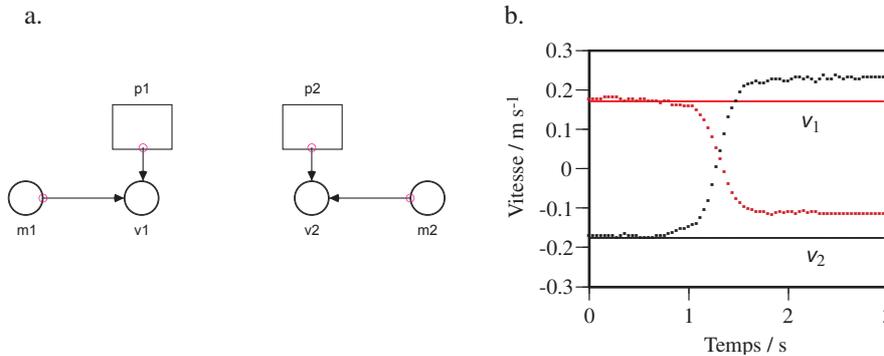
$$p = m_i V \tag{8.2}$$

La masse inerte d'un objet est strictement proportionnelle à sa masse grave, ou masse pesante. C'est la raison pour laquelle on mesure la masse inerte au moyen d'une balance qui mesure le poids (c'est-à-dire l'intensité de l'interaction entre l'objet et la Terre).

En tant que quotient de la quantité de mouvement et de la vitesse, la masse d'un objet n'est rien d'autre que sa capacité à accueillir de la quantité de mouvement (la capacité électrique est aussi le quotient de la grandeur extensive, la charge, et de la grandeur intensive associée, le potentiel électrique).

8.2.4 Un premier modèle de la collision entre deux glisseurs

Comme la quantité de mouvement est la grandeur extensive, semblable à un fluide, associée au mouvement de translation, nous la représenterons au moyen d'un réservoir dans un modèle de dynamique des systèmes (fig. 8.10). Nous calculons la vitesse, en tant que niveau du mouvement, à partir de la quantité de mouvement en la divisant par la masse.



Dans ce modèle, nous n'avons pas tenu compte de la présence des aimants, responsables de l'interaction entre les deux glisseurs. Comme il n'y a aucun écoulement de quantité de mouvement d'un réservoir vers l'autre, cette grandeur reste constante, ce qui entraîne que la vitesse de chacun des glisseurs l'est aussi dans cette version préliminaire du modèle. Les vitesses calculées par le modèle sont les vitesses initiales des deux glisseurs.

Ce que nous apprenons de ce premier modèle, c'est que : *S'il n'est soumis à aucune interaction, c'est-à-dire en l'absence de flux de quantité de mouvement, la vitesse d'un objet reste constante.*

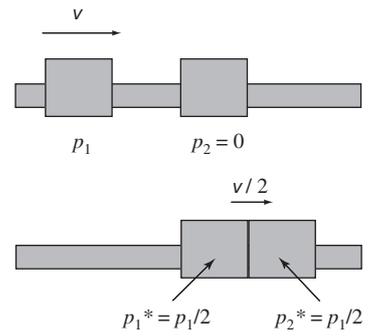


FIGURE 8.9 Deux glisseurs identiques entrent en collision sur un rail à coussin d'air. Le premier est en mouvement, le second immobile. Après le choc inélastique, la quantité de mouvement est répartie sur les deux corps. Les mesures indiquent que la vitesse commune est égale à la moitié de la vitesse du glisseur incident avant le choc.

FIGURE 8.10 Premier modèle du mouvement des glisseurs. (a) Chacun des glisseurs a une certaine quantité de mouvement, représentée par un réservoir. Dans ce modèle, il n'y a aucune interaction qui pourrait entraîner un transfert de quantité de mouvement; (b) en conséquence, quantité de mouvement et vitesse restent constantes.

8.2.5 Transfert de quantité de mouvement lors de collisions

Lors de la modélisation de la collision entre deux disques en rotation à la section 7.2.4, nous avons modélisé un processus mécanique de la même manière que les processus étudiés précédemment. Nous pouvons donc admettre que les interactions mécaniques lors du mouvement de translation peuvent être représentées en tant que transfert de quantité de mouvement vers ou hors des corps qui participent à ces interactions.

Accroissement et diminution de quantité de mouvement. Un objet peut perdre ou gagner de la quantité de mouvement lorsqu’il interagit mécaniquement avec son environnement (d’autres objets font partie de l’environnement). Dans l’expérience que nous étudions ici, un glisseur peut interagir avec le rail, avec l’air environnant et avec l’autre glisseur par l’intermédiaire des aimants.

Si nous admettons que toutes les interactions sont négligeables, à l’exception de celle qui est engendrée par les aimants, il ne subsiste que le transfert de quantité de mouvement d’un glisseur vers l’autre. Nous devons donc prendre en compte un transfert de quantité de mouvement du glisseur 1 vers le glisseur 2, ce qui est représenté par un flux entre les deux réservoirs du modèle de la figure 8.11.

FIGURE 8.11 Deuxième modèle du mouvement des glisseurs. (a) Introduction d’une interaction d’intensité constante durant la période allant approximativement de 0.75 s à 1.85 s. (b) Durant cet intervalle, la quantité de mouvement et la vitesse évoluent à un taux constant, produisant un résultat modestement satisfaisant. Notons que les vitesses initiales et finales sont calculées correctement. La quantité de mouvement totale des glisseurs est conservée.

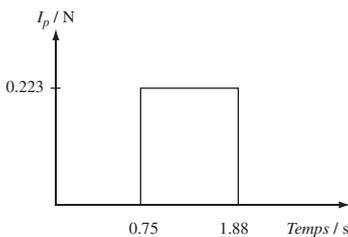
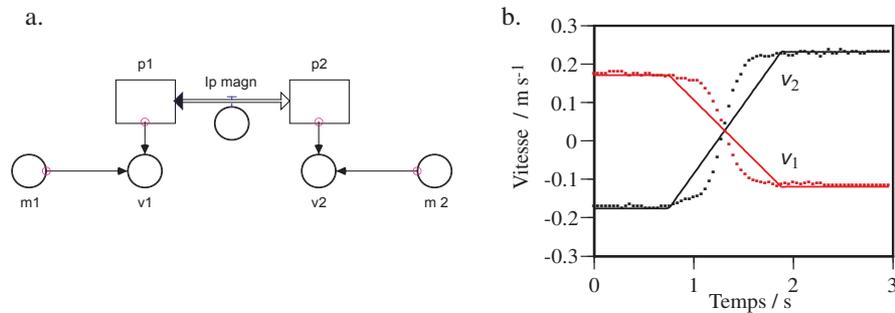


FIGURE 8.12 Flux de quantité de mouvement entre les deux aimants utilisé dans le modèle de la figure 8.11.

Les vitesses mesurées lors de l’expérience indiquent que l’interaction mécanique dure approximativement de 0.75 s à un peu plus de 1.85 s. En dehors de cet intervalle de temps, les vitesses et les quantités de mouvement des glisseurs sont (presque) constantes, ce qui veut dire que les transferts de quantité de mouvement sont négligeables.

Il reste une question importante à régler: comment le transfert de quantité de mouvement évolue-t-il dans le temps? Commençons par l’hypothèse la plus simple en admettant que le flux de quantité de mouvement est constant durant l’intervalle au cours duquel les vitesses et les quantités de mouvement varient, ce qui sera programmé par:

$$I_{p_magn} = \text{IF} (\text{TIME} > 0.75 \text{ AND } \text{TIME} < 1.88) \text{ THEN } 0.223 \text{ ELSE } 0$$

où I_{p_magn} représente le flux de quantité de mouvement entre les deux glisseurs par l’intermédiaire du champ magnétique (fig. 8.12). Les valeurs numériques des paramètres (début et fin de l’intervalle et intensité du courant) ont été déterminées de telle manière que les vitesses calculées par la simulation s’approchent au plus près possible des vitesses mesurées (partie droite de la figure 8.11).

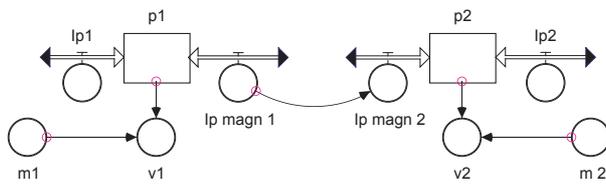
Il est clair que notre hypothèse simplificatrice ne permet pas de représenter correctement les détails de l’interaction entre les deux glisseurs. Cependant, le fait que le modèle reproduit correctement les vitesses finales des glisseurs indique que nous avons les valeurs correctes des quantités de mouvement respectives avant et après la collision. En outre, vu que le seul processus mécanique est le transfert de quantité de mouvement entre les deux glisseurs, nous pouvons conclure que la quantité de mouvement totale est conservée dans le modèle (et dans la nature). Le modèle nous apprend que *la quantité de mouvement perdue par le glisseur 1 est gagnée par le glisseur 2*, ce qui est un cas particulier de l’équation de bilan de la quantité de mouvement d’un corps:

$$\dot{p} = I_{p1} + I_{p2} + \dots \tag{8.3}$$

Dans notre cas, où deux corps échangent de la quantité de mouvement par ailleurs conservée, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -I_{p, \text{magn}} \\ \dot{p}_2 &= I_{p, \text{magn}} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Il existe une formulation alternative intéressante du modèle que nous avons élaboré (fig. 8.13). Au lieu de représenter l'interaction par un flux unique entre les deux réservoirs, nous attribuons un flux à chacun des réservoirs. Cela signifie que la quantité de mouvement s'écoule hors du (ou vers le) glisseur 1 et vers le (ou hors du) glisseur 2.



Comme nous admettons la conservation de la quantité de mouvement, les deux flux doivent être égaux au signe près :

$$I_{p, \text{magn}, 1} = -I_{p, \text{magn}, 2} \tag{8.5}$$

Voilà un exemple de la relation communément appelée *principe d'action et de réaction* en mécanique, mais qui peut être appliquée à d'autres processus, puisqu'elle ne fait qu'exprimer une loi de conservation.

8.2.6 Calcul de la position des glisseurs

La prochaine étape dans la construction du modèle concerne le calcul de la position des mobiles à partir de leurs vitesses respectives. D'une part, nous nous intéressons à cette grandeur parce qu'elle est facilement observable. D'autre part, nous verrons que nous pouvons faire usage de l'information contenue dans les positions pour créer un modèle plus réaliste de l'interaction entre les aimants (section 8.2.7).

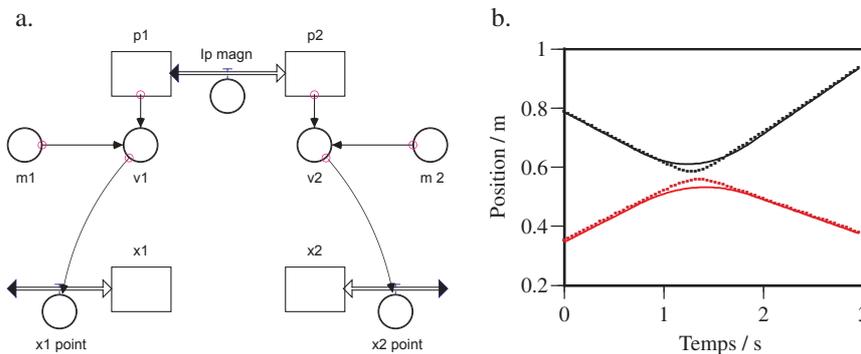


FIGURE 8.13 Formulation alternative du modèle de la figure 8.10: l'interaction est représentée par deux flux. Des flux additionnels qui pourraient être utilisés pour représenter des frottements ou d'autres interactions mécaniques ont été ajoutés. Dans le cas particulier, ils ont été mis à zéro.

FIGURE 8.14 Calcul de la position par intégration à partir des vitesses. (a) La grandeur à intégrer est représentée par un flux connecté à un réservoir qui représente l'intégrale de cette grandeur. (b) Comparaison de la simulation et des données expérimentales.

Le calcul de la position consiste en une intégration de la vitesse par rapport au temps après spécification de la position initiale. Dans un logiciel de dynamique des systèmes, on le réalise en représentant la vitesse au moyen d'un flux et la position au moyen d'un réservoir connecté à ce flux (fig. 8.14a).

8.2.7 Modèle de l'interaction entre les aimants

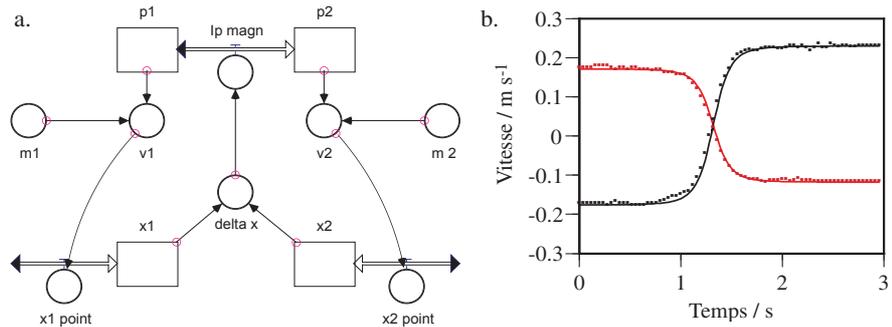
Le modèle que nous avons construit saisit les aspects les plus importants de la collision entre les deux glisseurs. Ce qui manque encore est un modèle adéquat du flux de quantité de mouvement entre les deux aimants lorsqu'ils s'approchent l'un de l'autre.

Notre expérience nous enseigne que la répulsion entre des aimants, donc l'intensité de l'interaction, augmente lorsque les extrémités des aimants se rapprochent. Il est donc sensé d'admettre que le courant de quantité de mouvement entre les deux glisseurs dans les figures 8.11 et 8.14 mesure l'intensité de l'interaction et doit donc augmenter lorsque la distance entre les deux aimants diminue. Une relation mathématique qui exprime cette particularité est un courant de quantité de mouvement dont l'intensité est inversement proportionnelle à une puissance de la distance entre les deux aimants :

$$I_{pM} = k \frac{1}{\Delta x^n} \tag{8.6}$$

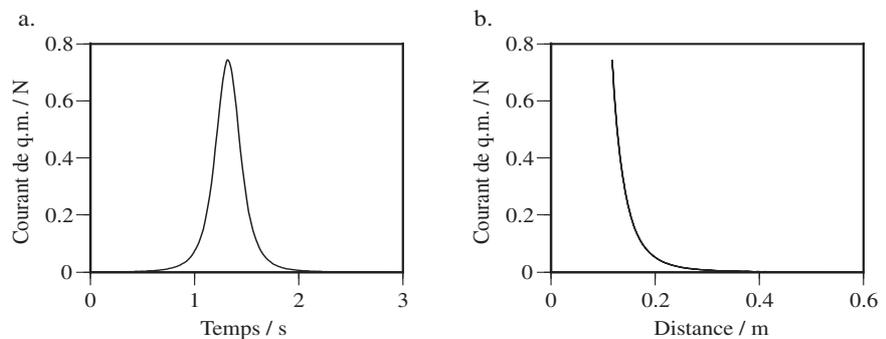
Un point de détail important concerne la manière de définir la distance entre les deux aimants, vu qu'ils ont une extension dans la direction du mouvement. Deux possibilités s'offrent spontanément à nous : soit nous prenons la distance entre les extrémités antérieures des aimants, soit nous prenons en compte la distance entre les milieux des aimants. Quelle que soit la décision, nous avons à déterminer la valeur de trois paramètres pour pouvoir compléter le modèle (fig. 8.15).

FIGURE 8.15 Modèle complet. (a) Le flux de quantité de mouvement entre les deux glisseurs est rendu dépendant de la distance entre les aimants. (b) On obtient un excellent accord entre les données expérimentales et la simulation pour le choix particulier de l'interaction représentée par la figure 8.16.



Si nous optons pour la distance entre les centres des aimants, il ne subsiste que deux paramètres, k et n , dans la relation exprimée par l'équation (8.6). L'adéquation entre les valeurs expérimentales et la simulation est la meilleure pour $n = 5$ et $k = 1.65 \cdot 10^{-5}$ unités SI. L'exposant n détermine la forme de la relation interaction-distance alors que k mesure l'intensité intrinsèque des aimants utilisés dans cette expérience. Avec ces valeurs, le courant de quantité de mouvement en fonction du temps, ainsi qu'en fonction de la distance entre les centres des aimants, est représenté dans la figure 8.16.

FIGURE 8.16 Intensité du courant de quantité de mouvement utilisée pour le modèle de la figure 8.15 et calculée selon l'équation (8.6) (a) en fonction du temps (b) et de la distance entre les centres des aimants.



8.2.8 Les lois d'interaction mécanique

Dans le préambule de cette section, nous avons annoncé que l'étude du cas allait nous permettre de découvrir les lois de l'interaction mécanique. Résumons :

S'il n'est soumis à aucune interaction, c'est-à-dire en l'absence de flux de quantité de mouvement, la vitesse d'un objet reste constante (section 8.2.4).

Le taux de variation de la quantité de mouvement d'un corps est égal à la somme des flux de quantité de mouvement (équation (8.3)).

Lorsque deux corps entrent en interaction, les quantités de mouvement échangées sont égales et de signes opposés (équation (8.5)).

Ces trois énoncés ne sont rien d'autre qu'une version préliminaire des lois fondamentales de la dynamique, connues sous la dénomination des lois de NEWTON. Nous reviendrons de manière approfondie sur ces résultats à la section 9.1.1. Nous verrons entre autres que les flux de quantité de mouvement sont équivalents au concept de force qui sera alors précisé.

Les sections suivantes vont nous permettre de formaliser et de généraliser ce que nous avons découvert lors de cette étude de cas et d'intégrer l'énergie dans le contexte mécanique.

1. Quel est le rôle de la vitesse dans la description du mouvement de translation ?
2. Que représente la quantité de mouvement ?

1. La vitesse est la grandeur qui sert à indiquer le niveau de mouvement d'un objet. Elle est la grandeur intensive dans la paire de grandeurs qui servent à caractériser le processus de translation. Elle indique l'intensité du mouvement.
2. La quantité de mouvement est la grandeur extensive qui est transportée par les objets en mouvement et qui est échangée lorsque des objets interagissent.




8.3 GRANDEURS FONDAMENTALES

L'étude de la section 8.2 a révélé que les processus de translation peuvent être caractérisés par l'accumulation et le transfert d'une grandeur que nous avons appelée la quantité de mouvement. Les flux de cette grandeur ont toujours lieu entre deux niveaux de la vitesse des objets entre lesquels elle s'écoule.

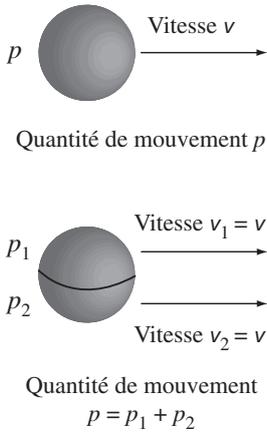
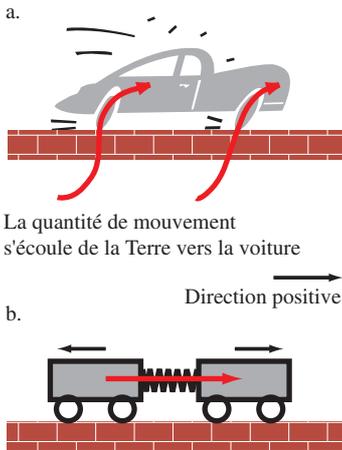


FIGURE 8.17 Si un objet en mouvement est divisé en deux parties égales, chacune des parties se meut à la même vitesse. En revanche, chaque partie ne contient que la moitié de la quantité de mouvement.



La quantité de mouvement s'écoule du véhicule de gauche vers celui de droite

FIGURE 8.18 (a) Un véhicule en train d'accélérer reçoit sa quantité de mouvement de la terre. (b) Lorsque deux chariots sont catapultés dans des directions opposées par un ressort, celui-ci sépare la quantité de mouvement en deux parties positive et négative. La quantité de mouvement s'écoule du chariot de gauche vers celui de droite.

8.3.1 Quantité de mouvement

En tant que grandeur mécanique, la quantité de mouvement a des propriétés qui ressemblent à celles que nous avons découvertes au sujet du moment cinétique.

Quantité de mouvement en tant que grandeur extensive. Nous allons nous servir d'une image pour justifier le caractère extensif de la quantité de mouvement d'un objet qui se déplace. Si nous divisons l'objet en deux parties égales, il est évident que les deux parties se meuvent à la même vitesse : la vitesse n'est pas divisée en deux parties égales (fig. 8.17). En revanche, nous sommes obligés d'admettre que la «quantité de mouvement» de l'objet a dû être divisée en deux parties égales. Il est deux fois plus facile d'immobiliser la moitié de l'objet que tout l'objet.

Deux «espèces» de quantité de mouvement. Les observations de la section 8.2 révèlent que, pour une direction donnée, il existe deux «espèces» de quantité de mouvement, déterminées par le sens du mouvement. Tout aussi arbitrairement qu'en électricité, nous pouvons décider d'attribuer un signe positif à l'une de ces espèces et le signe négatif à l'autre. À partir du moment où cette affectation des signes a été effectuée, il est clair qu'il faut s'y tenir et qu'elle ne peut plus être modifiée; mais, contrairement à ce qui a été fait en électricité, où l'on a attribué une fois pour toutes le signe positif à l'«électricité vitreuse» et le signe négatif à l'«électricité résineuse», l'attribution du signe à la quantité de mouvement a lieu chaque fois que l'on aborde une nouvelle situation (nous y reviendrons ci-dessous).

Conservation de la quantité de mouvement. Les phénomènes mécaniques que nous observons quotidiennement peuvent nous donner l'impression que le mouvement doit être entretenu si on veut éviter qu'il cesse. Une bille qui roule s'arrête au bout d'un certain temps, et nous devons la pousser si nous voulons qu'elle poursuive sa course. Afin de savoir si la quantité de mouvement peut être créée ou détruite, nous devons expliquer un certain nombre de phénomènes de la vie quotidienne :

- Lorsqu'une voiture accélère (fig. 8.18a), sa quantité de mouvement augmente. Y a-t-il eu création de quantité de mouvement ?
- Un objet qui glisse sur une surface ralentit et s'arrête. Y a-t-il eu destruction de quantité de mouvement ?
- Deux corps identiques se dirigent l'un vers l'autre avec des vitesses égales. Lors de la collision, ils ne se séparent pas et s'immobilisent totalement. Y a-t-il eu destruction de quantité de mouvement ?
- Deux glisseurs sur un rail à coussin d'air sont catapultés dans des directions opposées par la détente d'un ressort (fig. 8.18b). Y a-t-il eu création de quantité de mouvement lors de ce processus ?

Dans les deux premiers exemples, la quantité de mouvement n'a été ni créée, ni détruite, mais elle vient de la Terre ou s'écoule vers elle, ce qui entraîne une modification du mouvement de notre planète, mais tellement ténue qu'elle ne peut en aucun cas être perçue. Le troisième et le quatrième exemple montrent que, lors de collisions, la quantité de mouvement ne disparaît pas, mais est échangée. Dans le troisième exemple, les quantités de mouvement égales, mais de signes opposés, se compensent. Le ressort qui pousse les deux glisseurs sert de dispositif pour séparer de la quantité de mouvement en une partie positive et une partie négative.

Dans chacun des cas, la conclusion doit être que la quantité de mouvement ne peut être ni créée, ni détruite, mais uniquement transférée d'un système vers un autre.

Caractère vectoriel de la quantité de mouvement. Il est important de noter que, contrairement aux grandeurs extensives que nous avons introduites dans les chapitres précédents (volume, charge électrique, énergie, entropie, quantité de matière), la quantité de mouvement, tout comme le moment cinétique, n'est pas une grandeur scalaire

mais une grandeur vectorielle, caractérisée par trois composantes indépendantes les unes des autres, une pour chaque direction de l'espace.

La grandeur extensive (semblable à un fluide) associée au mouvement de translation est la quantité de mouvement \mathbf{p} . C'est un vecteur caractérisé par trois composantes indépendantes les unes des autres, une pour chaque direction de l'espace :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

La quantité de mouvement est une grandeur conservée.

Toutefois, dans ce chapitre, nous ne considérerons que des processus de translation dans une seule direction.

Unité de la quantité de mouvement. Comme il s'agit d'une grandeur fondamentale, nous attribuons une nouvelle unité à la quantité de mouvement, le huygens, abrégé par Hy. Dans le Système international, le huygens correspond au newton seconde: $1 \text{ Hy} = 1 \text{ N s}$.

La quantité de mouvement dans le monde microscopique. Comme celle de charge électrique et de moment cinétique, la notion de quantité de mouvement n'est pas réservée au monde macroscopique. En effet, toutes les particules matérielles (molécules, atomes, particules élémentaires) transportent et accumulent de la quantité de mouvement. Il en va de même pour des entités immatérielles telles que les champs électriques et magnétiques ainsi que le champ gravitationnel et la lumière. La quantité de mouvement (tout comme le moment cinétique et l'énergie) est une grandeur omniprésente dans la nature.

8.3.2 Écoulements de quantité de mouvement

Nos observations révèlent l'existence d'écoulements de quantité de mouvement entre des systèmes ou entre les composants d'un système, écoulements qui, grâce à l'analogie électrique (ou hydraulique), peuvent être caractérisés de la même manière. Les flux de quantité de mouvement seront représentés par le symbole I_p .

Pour une direction donnée (par exemple l'horizontale dans l'expérience de la section 8.2), la quantité de mouvement peut s'écouler dans un sens ou dans l'autre. On attribue arbitrairement une valeur positive à l'un des deux sens d'écoulement (par exemple vers la droite) et le sens négatif à l'autre. Toutefois, ce choix est lié, pour des raisons de cohérence, à celui de signe de la quantité de mouvement.

Comme la quantité de mouvement, les flux de quantité de mouvement sont des vecteurs dont chacune des trois composantes est liée à la composante correspondante de la quantité de mouvement :

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} I_{p_x} \\ I_{p_y} \\ I_{p_z} \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Les flux de quantité de mouvement se mesurent en huygens par seconde (Hy s^{-1}), ce qui correspond, dans le Système international, au newton: $1 \text{ Hy s}^{-1} = 1 \text{ N}$.

8.3.3 Vitesse en tant que potentiel

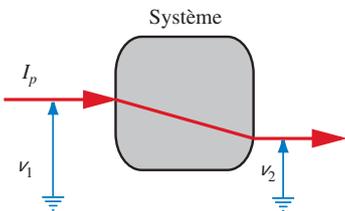


FIGURE 8.19 Diagramme de processus d'un processus de translation. La quantité de mouvement s'écoule entre deux niveaux de la vitesse linéaire qui est le potentiel associé à la quantité de mouvement.

Le taux de chargement en quantité de mouvement d'un objet est indiqué par la vitesse à laquelle il se déplace, la vitesse (linéaire) \mathbf{v} . Comme la quantité de mouvement, la vitesse est un vecteur :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

C'est toujours entre deux niveaux de cette grandeur qu'ont lieu les transferts de quantité de mouvement. La vitesse est donc le potentiel lié aux processus de translation (fig. 8.19).

8.3.4 Récapitulation et comparaison

Nous voyons donc que la paire de grandeurs extensive et intensive liée au mouvement de translation doit être la quantité de mouvement et la vitesse. Elle va jouer le même rôle que les paires que nous avons introduites pour la description des autres phénomènes physiques. Le tableau 8.1 en dresse la liste.

TABLEAU 8.1 Paires de grandeurs extensives et intensives.

Phénomène	Grandeur extensive	Grandeur intensive
Hydraulique	Volume	Pression
Électricité	Charge	Potentiel électrique
Gravité	Masse gravitationnelle	Potentiel gravitationnel
Thermique	Entropie	Température
Chimie	Quantité de matière	Potentiel chimique
Mouvement (rotation)	Moment cinétique	Vitesse angulaire
Mouvement (translation)	Quantité de mouvement	Vitesse

1. Quelles sont les caractéristiques de la quantité de mouvement?
2. Quelles sont les caractéristiques des flux de quantité de mouvement?

 Q R

1. La quantité de mouvement est la grandeur extensive qui sert à la description des processus de translation. Pour une direction donnée, elle peut prendre des valeurs positives ou négatives. C'est une grandeur vectorielle. Elle ne peut être ni créée, ni détruite, mais seulement échangée entre les systèmes qui interagissent, ce qui en fait une grandeur conservée.
2. Les flux de quantité de mouvement ont toujours lieu entre deux niveaux de la vitesse qui est la grandeur intensive liée aux processus de translation. Comme la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, ses flux le sont aussi.

8.4 MODES DE TRANSFERT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Lors de chocs, les corps perdent ou reçoivent de la quantité de mouvement. Les mécanismes de transfert peuvent prendre trois formes différentes.

8.4.1 Transfert de quantité de mouvement par contact entre les corps

Lors de collisions, ou lorsque des corps sont tirés ou poussés – avec des cordes, les mains, des tiges, des ressorts, etc. –, les corps impliqués dans le processus sont en contact direct. De ce fait, la quantité de mouvement doit être transférée à *travers les surfaces* des corps en contact et à *travers les corps*. Dans un tel cas, on parle de *transfert par conduction* de la quantité de mouvement. Un exemple qui illustre très bien ce type de transfert de la quantité de mouvement est celui du choc d'une chaîne de billes suspendues à un châssis commun (fig. 8.20).

Le transfert de quantité de mouvement par conduction provoque l'apparition de contraintes mécaniques dans les corps à travers lesquels elle s'écoule. C'est ce que nous ressentons lors d'interactions mécaniques.

Courants de quantité de mouvement et contraintes. Pour quantifier le phénomène d'écoulement de quantité de mouvement, nous avons introduit la notion de *courant de quantité de mouvement* ou *flux de quantité de mouvement*, que nous symbolisons par I_p . Cette grandeur nous indique combien de quantité de mouvement s'écoule à travers les limites du système par unité de temps.

Considérons par exemple un bloc de bois qui est poussé sur une surface horizontale au moyen d'une tige (fig. 8.21). Le bloc accélère parce qu'il reçoit de la quantité de mouvement qui doit s'écouler de la tige vers le bloc. Les deux objets sont soumis à des contraintes mécaniques de compression. L'intensité de la contrainte que subit le matériel est mesurée par la densité du courant qui traverse la surface. Plus la tige est mince pour la même charge, plus la contrainte est importante, vu que l'écoulement doit avoir lieu à travers une section plus faible (ce que l'on constate lorsqu'un parquet est abîmé par des talons aiguilles). La contrainte mécanique est quantifiée au moyen d'une nouvelle

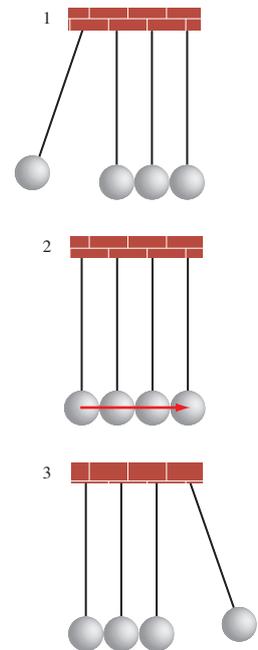


FIGURE 8.20 Toutes les billes sont identiques et la collision est centrale. Lorsque la bille de gauche frappe les trois billes immobiles, elle s'immobilise et seule la bille de l'extrême droite est propulsée avec une vitesse qui est égale à celle de la bille incidente avant l'impact. Durant la collision, de la quantité de mouvement doit s'écouler à travers les deux billes qui restent immobiles.

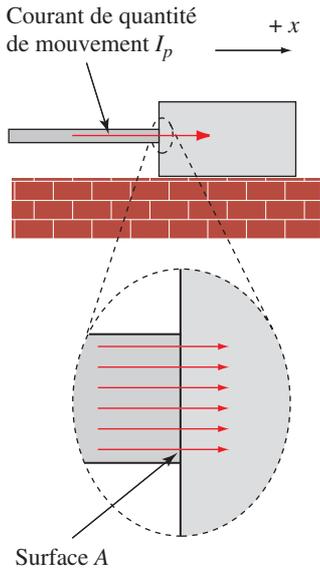


FIGURE 8.21 Lorsque des corps interagissent mécaniquement par contact, de la quantité de mouvement s'écoule dans les corps et à travers les surfaces. La densité surfacique du flux de quantité de mouvement mesure la contrainte mécanique.

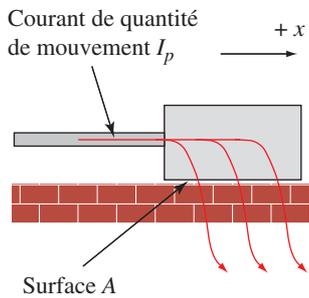


FIGURE 8.22 Une contrainte de cisaillement est la conséquence de l'écoulement latéral de la quantité de mouvement.

grandeur, la *densité de flux de quantité de mouvement* j_p , dont la mesure est liée à celle du flux de quantité de mouvement par la relation :

$$I_p = A j_p \tag{8.10}$$

L'unité SI pour la densité de flux de quantité de mouvement est $[j_p] = \text{N m}^{-2}$. En d'autres termes, la densité de flux de quantité de mouvement nous indique comment le courant est distribué sur la surface au travers de laquelle il s'écoule. Cette distribution est fondamentale en mécanique: elle permet de décrire l'état de contrainte d'un matériau (c'est sur elle que reposent toutes les théories établies sur la résistance des matériaux).

Dans un matériau soumis à une contrainte en compression, la quantité de mouvement positive, déterminée par le repère choisi, s'écoule dans le sens positif par rapport à ce repère (fig. 8.21). Si le matériau est soumis à une contrainte en traction (tension), la quantité de mouvement positive s'écoule dans le sens négatif. Les contraintes en traction ou en compression sont également appelées contraintes normales parce qu'elles sont dues à des flux de quantité de mouvement perpendiculaires à la surface traversée.

Imaginons maintenant que nous poussons le bloc au moyen d'une tige sur une surface de telle manière qu'il glisse à vitesse constante dans le sens positif. La tige est soumise à une contrainte en compression, et il y a transfert de quantité de mouvement vers l'objet. Comme sa vitesse ne varie pas, cette quantité de mouvement doit s'écouler immédiatement, à un taux égal à celui de l'apport; elle le fait latéralement à travers la surface de contact entre l'objet et le support sur lequel il se meut. Dans un tel cas, on dit que l'objet est soumis à des contraintes de cisaillement qui le déforment obliquement par rapport à la direction de référence (fig. 8.22).

Lorsque la quantité de mouvement s'écoule latéralement à travers un matériau, celui-ci est soumis à des contraintes de cisaillement, que l'on appelle également contraintes tangentielles.

Pression et contrainte normale. Nous connaissons déjà un cas particulier de contrainte mécanique: il s'agit de la *pression dans les fluides*. Si nous isolons en pensée une certaine portion d'un fluide, nous constatons que cet élément exerce une pression sur le matériel environnant, qui peut être une autre portion du fluide ou une partie de la paroi du récipient. Dans tous les cas, la situation est la même que dans la figure 8.21 où la tige pousse le bloc; nous aurions pu utiliser un jet de fluide sous pression pour le pousser.

Cependant, il faut mentionner une différence essentielle. Alors qu'un objet solide peut être utilisé pour engendrer une contrainte de cisaillement à la surface d'un autre corps, ce n'est pas possible avec un fluide, à moins qu'il soit visqueux. Mais même un fluide visqueux ne peut pas transmettre de la quantité de mouvement obliquement à une surface s'il est immobile. Dans tous les cas, la composante normale du flux de quantité de mouvement à travers une surface de fluide est la pression du fluide. L'unité de la pression est la même que celle de la densité de flux de quantité de mouvement. Par conséquent, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$.

8.4.2 Mouvement dans un champ : transfert par rayonnement

La mise en mouvement des corps peut se faire sans contact direct avec un autre objet, comme nous l'avons observé dans l'expérience de la section 8.2 où le transfert de quantité de mouvement avait lieu par l'intermédiaire du champ magnétique engendré par les aimants. C'est également le cas d'un objet tombant à la surface de la Terre. Vu que le corps est accéléré, sa quantité de mouvement doit augmenter. Nous affirmons qu'il reçoit cette quantité de mouvement de la Terre (qui, de ce fait, se meut dans le sens opposé, à la rencontre de l'objet) par l'intermédiaire de son *champ gravitationnel* (fig. 8.23).

Ce mode de transfert a des propriétés complètement différentes du transfert par conduction. Les objets ne se touchent pas ; la quantité de mouvement ne s'écoule pas à travers les corps, elle s'écoule directement dans (ou hors de) chaque partie de l'objet, sans influencer les autres parties. L'absence de contraintes, que peuvent par exemple expérimenter les astronautes qui flottent librement dans leur satellite, indique que cet apport de quantité de mouvement se fait sans écoulement à travers les corps. Contrairement au processus de conduction qui se déroule à travers la surface de l'objet, celui-ci se déroule à l'intérieur du volume. Ce processus a beaucoup de points communs avec le *transfert par rayonnement* de l'entropie dans ou hors des corps (chapitre 5).

Ce processus se déroule comme s'il existait dans l'objet des sources (ou des puits) de quantité de mouvement. C'est pourquoi, en lieu et place des courants de quantité de mouvement, on utilise ici un *taux de source de quantité de mouvement* Σ_p pour indiquer combien de quantité de mouvement l'objet reçoit par unité de temps. On lui attribue la même unité de mesure que le flux de quantité de mouvement, à savoir le newton.

Le transfert par rayonnement de quantité de mouvement ne provoque pas de contraintes à l'intérieur de l'objet. Pour que des contraintes apparaissent, il faut que la quantité de mouvement doive s'écouler à travers le corps pour une raison ou pour une autre. Par exemple, un objet posé sur un plan horizontal (fig. 8.24) est soumis à un double transfert de quantité de mouvement : il en reçoit du champ gravitationnel terrestre en mode radiatif ; comme il est immobile, cette quantité de mouvement est immédiatement évacuée vers la terre par conduction à travers la base de l'objet. Nous pouvons ressentir les contraintes engendrées par ces flux de quantité de mouvement, en tant que compression dans nos pieds si nous sommes debout sur le sol ou en tant que traction dans nos mains si nous nous suspendons à une barre horizontale.

Ce que nous avons décrit dans cette section est la conséquence de l'interaction entre des corps et des champs. Il existe d'autres exemples de tels processus. Des corps chargés électriquement sont soumis à l'action des champs électriques, et des corps chargés en mouvement ou des matériaux magnétiques reçoivent de la quantité de mouvement par l'intermédiaire du champ magnétique (section 8.2). Tout comme un objet doit être chargé électriquement pour être sensible au champ électrique, il doit être «chargé gravitationnellement» pour être influencé par le champ gravitationnel. La charge gravitationnelle est la masse gravitationnelle, et l'interaction d'un objet avec le champ gravitationnel de la Terre est responsable de son poids.

8.4.3 Transfert de quantité de mouvement par convection

La quantité de mouvement peut pénétrer dans ou quitter un système transportée par un fluide en mouvement. Le fluide qui s'écoule contient de la quantité de mouvement. S'il entre dans un système ou en émerge, il y amène ou en emporte de la quantité de mouvement, produisant ainsi un courant de quantité de mouvement par rapport au système. Un tel système est un système ouvert.

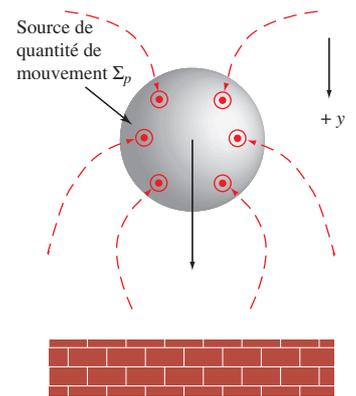


FIGURE 8.23 La quantité de mouvement atteint directement chaque partie de l'objet par l'intermédiaire du champ gravitationnel terrestre, sans passer à travers la surface. Au lieu de courants, nous avons des sources de quantité de mouvement qui sont représentées par les points cerclés. Les lignes discontinues sont censées représenter l'apport de quantité de mouvement par l'intermédiaire du champ gravitationnel. Elles ne correspondent pas à une réalité concrète.

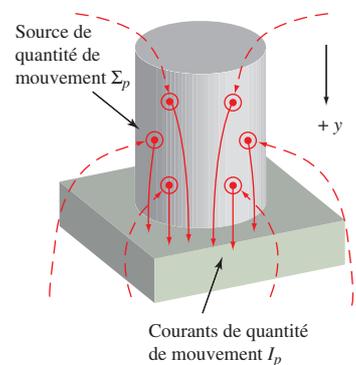


FIGURE 8.24 Dans un corps au repos à la surface de la Terre, la quantité de mouvement apportée par le champ gravitationnel (sources à l'intérieur du corps) s'écoule à travers sa base. Les courants s'écoulent à travers le matériel (conduction), et le corps est soumis à une contrainte en compression.

Les flux de quantité de mouvement par conduction ou par rayonnement n'influencent pas l'intégrité matérielle d'un système; ils n'en modifient pas la masse. Ce n'est pas le cas lors du transfert par les fluides, que l'on appelle *convection*. Les fusées sont un exemple de système ouvert dans lequel les échanges de quantité de mouvement se font par convection. Les processus de convection et les systèmes ouverts seront traités au chapitre 11.

8.4.4 Énoncé de l'équation de bilan de quantité de mouvement

Nous pouvons résumer les observations qui précèdent par l'énoncé de l'équation de bilan de la quantité de mouvement.

Lorsque l'on prend en compte les trois modes de transfert de quantité de mouvement, l'équation de bilan qui établit le lien entre le taux de variation de la quantité de mouvement et les transferts de cette grandeur devient :

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{p, \text{cond}} + \Sigma_p + \mathbf{I}_{p, \text{conv}} \quad (8.11)$$

où $\mathbf{I}_{p, \text{cond}}$, Σ_p et $\mathbf{I}_{p, \text{conv}}$ représentent respectivement la somme des flux de quantité de mouvement par conduction, la somme des apports en mode radiatif et la somme des flux convectifs.

Nous n'aborderons les flux convectifs qu'à la section 11.6.2.

EXEMPLE 8.1. Inductance hydraulique d'un fluide dans une conduite cylindrique.



FIGURE 8.25 Les variations de l'intensité d'un courant sont liées à une différence de pression inductive.

Justifier la relation (4.11) qui donne l'inductance d'un fluide de masse volumique ρ dans une conduite cylindrique de section A et de longueur l (fig. 8.25).

SOLUTION: Pour éviter toute confusion avec la quantité de mouvement, la pression est désignée par un P majuscule. Sachant que le flux volumique I_V est égal au produit AV de la section et de la vitesse d'écoulement, la loi d'induction hydraulique devient :

$$\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V = -L_V A \dot{V} \quad (E.8.1)$$

La différence de pression inductive sert à accélérer le fluide, donc à engendrer une variation de sa quantité de mouvement. En vertu de l'équation (8.10), cette variation de quantité de mouvement est égale au produit de la différence de pression et de la section de la conduite, et l'équation de bilan devient :

$$\dot{p} = -A \Delta P_L = AL_V A \dot{V} = m \dot{V} = \rho A l \dot{V} \quad (E.8.2)$$

En comparant le troisième et le cinquième termes de la suite d'égalités on voit que :

$$L_V = \frac{\rho l}{A}$$



EXEMPLE 8.2. Phénomène de marée.

Expliquer le phénomène de marée auquel est soumis un corps plongé dans un champ gravitationnel inhomogène (c'est le cas de celui de la Lune).

SOLUTION: Comme le champ est inhomogène, l'apport de quantité de mouvement par rayonnement diminue dans le sens opposé à l'attraction (fig. 8.26a).

Afin que l'accélération de toutes les parties du corps soit la même, ce déséquilibre dans la distribution de la quantité de mouvement doit être corrigé. Il ne peut l'être que par des flux de quantité de mouvement qui vont de la partie où elle est excédentaire vers la partie où elle est déficitaire. L'intensité de ce flux n'est pas constante, mais elle croît dans le sens opposé à l'attraction jusqu'à la partie centrale du corps pour décroître ensuite (fig. 8.26b). Cette variation de l'intensité du flux est due au fait que le flux émanant des régions où l'intensité du champ est la plus importante doit franchir la région centrale du corps.

Ce flux de quantité de mouvement dans la direction négative engendre une contrainte en traction, une tension, qui a tendance à déformer le corps. Si le corps est recouvert d'une partie fluide, comme c'est le cas pour la Terre, cette déformation entraîne l'apparition de deux bourrelets d'eau diamétralement opposés. Ces deux bourrelets sont toujours dans la direction du centre d'attraction alors que la Terre tourne une fois sur elle-même en 24 h, ce qui engendre deux marées quotidiennes.

Le frottement engendré par la rotation de la Terre sous le bourrelet de marée ralentit sa rotation de 2 millisecondes par siècle. C'est ce phénomène qui a ralenti la rotation propre de la Lune jusqu'à ce que sa période propre soit égale à sa période de révolution, raison pour laquelle elle nous présente toujours la même face.

L'effet de marée n'est pas réservé au seul système Terre-Lune (le Soleil intervient également, mais de manière moindre), mais se manifeste partout dans l'Univers. Un exemple remarquable est celui de Io, une lune de Jupiter. C'est la lune la plus proche et les effets de marée sont tellement importants que le bourrelet s'élève à une centaine de mètres (il n'est que de quelques dizaines de centimètres en moyenne sur la Terre). À cause de son interaction avec Europe et Ganymède, deux autres lunes de Jupiter, Io vacille légèrement, ce qui provoque un déplacement du bourrelet. Les frottements engendrés par ce phénomène sont tels qu'ils provoquent la fusion de la roche, ce qui explique l'activité volcanique très intense qui règne à la surface de Io.

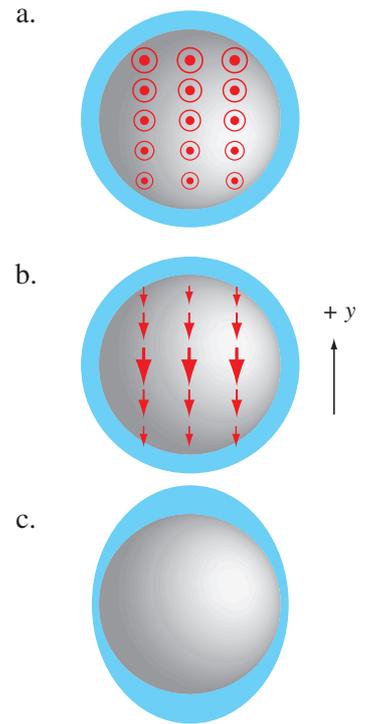


FIGURE 8.26 Corps dans un champ gravitationnel inhomogène, dont l'intensité diminue dans le sens négatif: (a) les apports de quantité de mouvement par rayonnement diminuent dans le sens opposé à l'attraction; (b) la quantité de mouvement se redistribue par conduction à l'intérieur du corps; (c) la redistribution par conduction engendre une contrainte en traction qui provoque une déformation des parties fluides du corps soumis à cette contrainte. Les effets ont été exagérés.

1. Quels sont les modes de transfert de la quantité de mouvement?
2. Un objet est poussé au moyen d'une tige au travers de laquelle un courant de quantité de mouvement de 120 Hy s^{-1} s'écoule durant 10 s. Combien de quantité de mouvement la tige transmet-elle? Si, dans le même temps, une quantité de mouvement de 700 Hy s'échappe de l'objet, de combien sa quantité de mouvement a-t-elle varié?
3. La tige de la Question 2 a une section de 0.0050 m^2 . Que vaut la contrainte mécanique dans la tige? Dans quel sens la quantité de mouvement s'écoule-t-elle?
4. Si, dans la figure 8.23, le sens positif est défini vers le haut, d'où vient la quantité de mouvement et où va-t-elle?
5. Dans la figure 8.24, définissez le sens positif vers le haut. Le flux conductif de quantité de mouvement à travers le cylindre change-t-il de sens? Cela change-t-il la contrainte?

Q

1. La quantité de mouvement peut être transférée par contact entre les objets qui interagissent. Dans ce cas, les flux de quantité de mouvement engendrent des contraintes (traction, compression, cisaillement) à l'intérieur des objets qu'ils traversent. Ces flux de quantité de mouvement entrent dans ou émergent de l'objet par la surface de celui-ci.

R

Lorsque la quantité de mouvement est transférée par l'intermédiaire d'un champ (gravitationnel, électrique ou magnétique), on parle de transfert par rayonnement. Dans ce cas, la quantité de mouvement est échangée à l'intérieur du volume de l'objet, sans passer par la surface. La quantité de mouvement peut également être transférée par un objet ou un fluide en mouvement; on parle de transfert par convection.

2. Un courant de 120 Hy s^{-1} s'écoulant de manière constante durant 10 s amène une quantité de mouvement de $120 \text{ Hy s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} = 1200 \text{ Hy}$ à l'objet. Comme la quantité de mouvement est conservée, sa variation dans le système doit être $\Delta p = 1200 \text{ Hy} - 700 \text{ Hy} = 500 \text{ Hy}$.
3. Si le flux de quantité de mouvement est constant sur toute la section de la tige, la densité de flux de quantité de mouvement (qui est la contrainte) est $j_p = I_p/A = 120 \text{ N} / 0.0050 \text{ m}^2 = 24 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2}$. La tige est comprimée, ce qui veut dire que la quantité de mouvement s'écoule dans le sens positif.
4. Dans ce cas, l'objet se meut dans le sens négatif. Sa vitesse devient de plus en plus négative au cours du temps. De ce fait, le corps doit perdre de la quantité de mouvement (positive). Il doit donc y avoir des puits de quantité de mouvement plutôt que des sources, et la quantité de mouvement s'écoule vers la terre à travers le champ gravitationnel.
5. Comme nous avons des puits de quantité de mouvement par rapport à l'objet, de la quantité de mouvement doit lui être amenée par sa section inférieure qui repose sur le sol. Elle est transportée par conduction à travers le cylindre, de bas en haut. Naturellement, la contrainte restera une compression.

8.5 CAPACITÉ EN QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Nous l'avons découvert à la section 8.2.2, la quantité de mouvement des corps dépend de deux facteurs. Tout d'abord, pour un objet donné, la quantité de mouvement sera d'autant plus importante que sa vitesse est grande. D'autre part, des objets différents se déplaçant tous à la même vitesse contiennent des quantités de mouvement différentes. Il suffit, pour s'en persuader, d'imaginer être frappé par une balle de ping-pong ou un ballon de football se déplaçant tous deux à la même vitesse. Ce qui différencie les deux objets, c'est leur masse.

8.5.1 Capacité en quantité de mouvement

Dans chacun des domaines de la physique que nous avons étudié jusqu'ici, la capacité mesure le rapport entre la variation de la grandeur extensive caractéristique à ce domaine et celle de la grandeur intensive associée. Ainsi, la capacité en quantité de mouvement mesure quelle quantité de mouvement il faut ajouter à un corps pour obtenir une augmentation donnée de sa vitesse. Comme il est plus difficile de mettre en mouvement un objet qui a une grande capacité, ce facteur mesure l'*inertie* du corps.

La capacité en quantité de mouvement est communément appelée masse inerte m_i du corps. En d'autres termes, $m_i = p/V$, ou

$$p = m_i V \tag{8.12}$$

La masse inerte a la même unité que la masse pesante, le kilogramme. La justification sera donnée à la section 8.5.4. Les capacités en quantité de mouvement des corps

peuvent être obtenues à partir de mesures effectuées lors de chocs ou, comme nous allons le voir, à partir de la mesure de leur masse gravitationnelle.

TABLEAU 8.2 Capacités de systèmes physiques.

Domaine	Capacité
Hydraulique	$C_V = dV/dp$
Électricité	$C_Q = Q/U$
Thermique	$K_S = dS/dT$
Mouvement (rotation)	$C_L = J = L/\omega$
Mouvement (translation)	$C_p = m_i = p/v$

Il faut veiller à ne pas identifier masse et quantité de matière. En effet, nous montrons que la masse (la capacité à accumuler de la quantité de mouvement) n'est pas une grandeur constante, mais qu'elle croît en fonction de la vitesse de l'objet en mouvement, sans que la quantité de matière ait augmenté pour autant. Nous aborderons ce phénomène de variation de la masse en fonction de la vitesse à la section 8.9, où nous parlerons du mouvement d'objet à vitesse élevée (proche de celle de la lumière).

Une conséquence de la variation de la masse en fonction de la vitesse est que la proportionnalité entre la quantité de mouvement et la vitesse n'est valable qu'aux vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Les effets ne se manifestant que pour de très grandes vitesses, nous pourrions, en tant que « piétons de la physique », les utiliser sans craindre d'obtenir des résultats aberrants.

EXEMPLE 8.3. Quelques valeurs de quantité de mouvement.

Déterminer la valeur de la quantité de mouvement: (a) d'un moustique ($m = 2.5 \text{ mg}$) volant à la vitesse de 1 m s^{-1} ; (b) d'une balle de pistolet ($m = 5 \text{ g}$) propulsée à la vitesse de 500 m s^{-1} ; (c) d'une automobile ($m = 1000 \text{ kg}$) roulant à la vitesse de 72 km par heure ; (d) de la Terre dans sa course autour du Soleil.

SOLUTION:

- a) $p = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 1 \text{ m s}^{-1} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ Hy}$
 b) $p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 500 \text{ m s}^{-1} = 2.5 \text{ Hy}$
 c) $p = 1000 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m s}^{-1} = 20 \cdot 10^3 \text{ Hy}$
 d) $p = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1} = 18 \cdot 10^{28} \text{ Hy}$

8.5.2 Analogie hydraulique de la quantité de mouvement

La relation entre la quantité de mouvement, la vitesse et la masse inerte d'un corps peut être représentée par une image déjà utilisée dans les chapitres précédents (fig. 8.27). Un corps est représenté par un réservoir à parois verticales dont la section représente la capacité en quantité de mouvement, c'est-à-dire sa masse inerte. Le fluide contenu dans ce réservoir imaginaire représente la quantité de mouvement stockée, et le niveau du fluide correspond à la vitesse du corps.

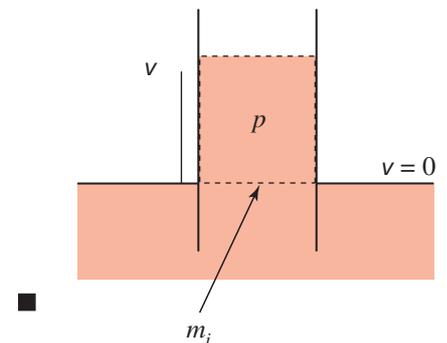


FIGURE 8.27 Analogie hydraulique de la quantité de mouvement. La quantité de mouvement d'un corps est semblable à une quantité de fluide dans un réservoir. Le niveau du fluide et la section du réservoir représentent respectivement la vitesse et la masse inerte du corps.

Cette image est analogue à celle que nous avons utilisée pour les processus de rotation (chapitre 7), et très semblable à l’analogie hydraulique d’autres grandeurs. Le dessin de la figure 8.27 fait apparaître la vitesse mesurée par rapport à un niveau zéro. Pour l’étude de mouvement à la surface de notre planète, nous pouvons associer ce niveau particulier à la vitesse de la Terre. La Terre elle-même peut être considérée comme un réservoir de quantité de mouvement géant qui fournit ou reçoit des quantités de mouvement lors de processus mécaniques entre objets ordinaires sans en être affecté. La vitesse d’un corps, et par le fait même sa quantité de mouvement, peuvent être positifs ou négatifs par rapport au niveau de ce réservoir.

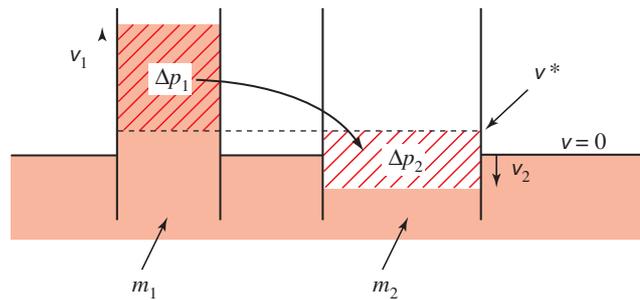
8.5.3 Analogie hydraulique lors de chocs

L’analogie hydraulique peut être utilisée pour visualiser des chocs dans une dimension entre deux corps (fig. 8.28). La quantité de mouvement des deux corps est mesurée par rapport au même observateur (qui peut être admis comme immobile par rapport à la Terre). Il est usuel d’admettre que – tout au moins durant le bref instant que dure le choc – le système des deux corps est isolé du reste du monde, ce qui laisse inchangée la quantité de mouvement totale. Avec $p_1 + p_2 = \text{constant}$, nous avons

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \tag{8.13}$$

Cette relation est représentée par l’analogie hydraulique de la collision, qui peut même être utilisée pour résoudre le problème graphiquement.

FIGURE 8.28 Analogie hydraulique du choc totalement inélastique de deux corps. Le second corps se meut initialement dans le sens négatif. La ligne discontinue à $v = v^*$ indique la valeur de la vitesse commune finale du corps combiné.



8.5.4 Masse inerte et masse pesante

Des corps qui ont une grande inertie sont également plus pesants. En fait, il s’agit là d’une proportionnalité stricte et ce fait représente l’une des plus remarquables lois de la nature :

$$m_{\text{inerte}} \sim m_{\text{pesante}} \tag{8.14}$$

Elle est communément appelée *principe d’équivalence de la masse inerte et de la masse pesante*. Elle a été vérifiée avec une très grande précision dans un grand nombre d’expériences différentes, et c’est sur elle que repose toute la théorie de la relativité générale. Même si les phénomènes dus à la gravité et à l’inertie sont superficiellement assez différents, on donne à la grandeur qui les mesure la même unité, à savoir le kilogramme. Une conséquence pratique de cette proportionnalité est que nous pouvons utiliser des balances pour mesurer la masse inerte des corps.

EXEMPLE 8.4. Mesure de la masse inerte de corps au moyen de chocs.

(a) Un glisseur qui a une unité de masse inerte et une vitesse de 0.90 m s^{-1} entre en collision avec un autre glisseur immobile sur le même rail à coussin d'air. Les deux corps restent accrochés après le choc, et on mesure une vitesse commune de 0.65 m s^{-1} . Déterminer la masse inerte du second glisseur. (b) Deux astronautes flottent dans une station orbitale. L'un des deux pousse l'autre et ils se séparent, le premier ayant acquis une vitesse de 0.50 m s^{-1} , le second de 0.60 m s^{-1} dans le sens opposé. Sachant que le premier a une masse de 80 kg , déterminer la masse du second.

SOLUTION: (a) Pour résoudre le problème, nous pouvons utiliser la figure 8.28, avec $v_2 = 0$. La section du second réservoir est inconnue, mais nous connaissons la vitesse commune finale. À partir de l'équation (8.13), nous pouvons écrire

$$m_1 (v^* - v_1) = -m_2 (v^* - 0)$$

ou

$$m_2 = -\frac{v^* - v_1}{v^*} m_1 = -\frac{0.65 \text{ m/s} - 0.90 \text{ m/s}}{0.65 \text{ m/s}} 1.0 \text{ kg} = 0.385 \text{ kg}$$

(b) Le processus est à l'opposé d'un choc totalement inélastique (les astronautes se déplacent tout d'abord en commun, puis sont séparés après l'événement). Avant la séparation, les deux sont immobiles par rapport à l'observateur, ce qui signifie que les deux réservoirs de la figure 8.28 sont vides. L'événement a pour conséquence que l'un des réservoirs se remplit aux dépens de l'autre. En d'autres termes, de la quantité de mouvement est pompée d'un réservoir vers l'autre. Nous utilisons à nouveau l'équation (8.13):

$$m_1 (v^* - v_1) = -m_2 (v^* - 0)$$

$$m_1 (v^* - v_1) = -m_2 (v^* - 0)$$

ce qui entraîne $m_2 = -v_1^*/v_2^* m_1 = -0.50 \text{ m s}^{-1} / (-0.60) \text{ m s}^{-1} \cdot 80 \text{ kg} = 66.7 \text{ kg}$. ■

1. Quelle est la grandeur qui représente la capacité en quantité de mouvement?

2. La masse est-elle égale à la quantité de matière?

1. La masse d'un objet est la grandeur qui indique la capacité d'un objet à accueillir de la quantité de mouvement. On fait la distinction entre la masse inerte qui limite les variations de quantité de mouvement et la masse pesante qui est responsable du poids des objets. L'égalité de ces deux masses est à la base de la théorie de la relativité générale.

2. Non, elle n'est que proportionnelle à la quantité de matière. La masse inerte d'un objet dépend de sa vitesse, mais cet effet ne se manifeste qu'à des vitesses qui sont proches de celle de la lumière.



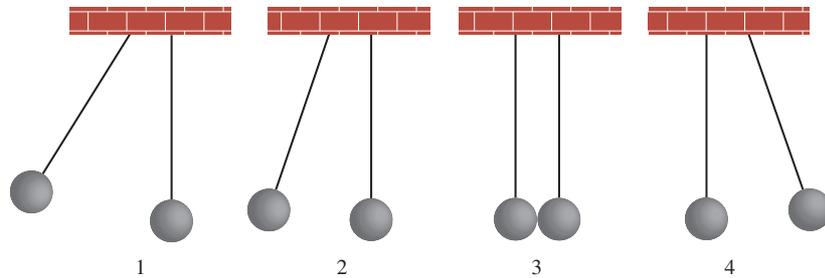

8.6 QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE

Les seules équations de bilan de quantité de mouvement ne suffisent pas pour prévoir l'issue des phénomènes de collision, sauf si l'on connaît l'évolution temporelle des flux de quantité de mouvement, ce qui n'est en général pas facile à obtenir. Nous avons réussi à le faire dans l'exemple de la section 8.2, parce que la géométrie du système était simple. Mais si nous pouvons déterminer l'énergie accumulée dans les objets en mouvement, il nous sera possible d'obtenir les caractéristiques de l'état final à partir de celles de l'état initial.

8.6.1 Conservation et dissipation de l'énergie lors de transferts de quantité de mouvement

Lors de transferts de quantité de mouvement, on fait face à deux situations extrêmes en ce qui concerne l'énergie.

FIGURE 8.29 Collision de deux billes métalliques identiques. Si une première bille, abandonnée à partir d'une certaine hauteur, entre en collision avec une seconde bille immobile, cette dernière se met en mouvement avec la vitesse finale de la première, alors que la première s'immobilise. C'est un exemple de choc parfaitement élastique.



L'examen du choc des deux billes suspendues (fig. 8.29) révèle que la première bille transfère intégralement sa quantité de mouvement à la seconde. Nous verrons que, dans ce cas, l'énergie est conservée. Un tel choc est dit totalement *élastique*. L'autre issue extrême, lors de chocs, est réalisée lorsque les deux objets qui entrent en collision forment un objet unique (accrochage de deux wagons); lors d'un tel choc, une partie de l'énergie incidente est dissipée. Dans ce cas (vitesse commune après la collision), le choc est dit totalement *inélastique*. Presque toutes les collisions que l'on peut observer dans la pratique se situent entre ces deux extrêmes.

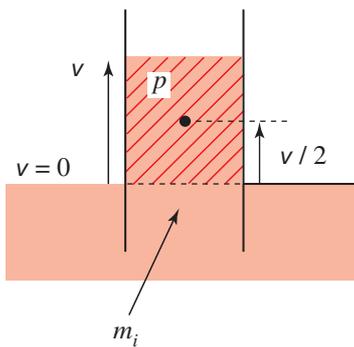


FIGURE 8.30 L'énergie d'un objet associée à son mouvement (son énergie cinétique) correspond, dans l'analogie hydraulique, à l'énergie accumulée par un fluide dans un réservoir.

8.6.2 Énergie d'un corps en mouvement

Comme pour tous les autres phénomènes, l'énergie apparaît également dans les processus de translation. Ainsi, un corps en mouvement stocke de l'énergie, tout comme le fait un corps chaud. À nouveau, l'analogie hydraulique nous permet de visualiser l'énergie associée au mouvement. Vu que nous assimilons le « contenu » d'un réservoir à la quantité de mouvement du corps, et vu que ce contenu doit être amené dans le réservoir – un processus qui nécessite un apport d'énergie –, l'énergie stockée est égale au produit du niveau du centre du contenu (qui est $v/2$) et du contenu (fig. 8.30).

Parce qu'elle est transportée par la quantité de mouvement, l'énergie d'un corps en mouvement est appelée énergie cinétique :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} V p = \frac{1}{2} m_i v^2 \tag{8.15}$$

8.6.3 Libération et liaison d'énergie lors de chocs

Le flux d'énergie transportée par la quantité de mouvement lorsqu'elle pénètre dans (ou quitte) un système en un point où la vitesse est égale à v (fig. 8.31) est, pour une direction particulière, donné par :

$$I_{E,p} = \dot{E} = v I_p = v \dot{p} \quad (8.16)$$

Il est important de remarquer que le flux d'énergie n'a pas nécessairement le même sens que le flux de quantité de mouvement auquel il est associé (fig. 8.32). Le sens du flux d'énergie par rapport à celui de la quantité de mouvement dépend du choix du référentiel.

À titre d'exemple, considérons les flux dans la chaîne d'un vélo qui se déplace de gauche à droite : aussi bien la quantité de mouvement que l'énergie sont conduites par la partie supérieure de la chaîne (la partie inférieure n'est soumise à aucune contrainte, elle ne transporte pas de quantité de mouvement et, par conséquent, aucune énergie). Comme la partie supérieure de la chaîne est soumise à une contrainte en traction, le flux de quantité de mouvement est négatif, il est dirigé de l'avant vers l'arrière (du pédalier vers le pignon) dans le repère choisi dans la figure 8.32a. Le flux d'énergie va aussi dans le sens négatif, ce que confirme le calcul effectué au moyen de l'équation (8.16), les deux facteurs, v et I_p , sont de signes opposés. Si nous choisissons le sens positif de droite à gauche (fig. 8.32b), les deux flux, quantité de mouvement et énergie, ont des sens opposés. L'énergie s'écoule dans le même sens que la quantité de mouvement si la vitesse est positive dans le repère choisi.

Les flux conductifs ne sont pas seuls responsables de la variation de la quantité de mouvement lors d'un processus. Il faut également prendre en compte les contributions des champs, particulièrement celle du champ gravitationnel dans notre vie quotidienne. Comme nous l'avons énoncé aux sections 8.4.2 et 8.4.4, ces contributions sont représentées par leur taux de source Σ_p . Pour tenir compte du caractère vectoriel à la fois de la vitesse, du flux de quantité de mouvement et du taux de source, il y a lieu de généraliser la relation qui donne le flux d'énergie transportée par la quantité de mouvement en formant le produit scalaire de ces vecteurs.

La variation de l'énergie d'un système en mouvement de translation à la vitesse \mathbf{v} est due aux flux d'énergie entraînés par les flux et les sources de quantité de mouvement :

$$\dot{E} = I_{E,p} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{I}_p + \Sigma_p) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} \quad (8.17)$$

La puissance ou taux de libération d'énergie d'un processus entraîné par un flux de quantité de mouvement et/ou un taux de source entre deux niveaux de vitesse (fig. 8.33), est égal à :

$$\mathcal{P}_{\text{transl}} = -\Delta v \left| I_p + \Sigma_p \right| \quad (8.18)$$

Les grandeurs sont les modules des vecteurs apparaissant dans l'équation.

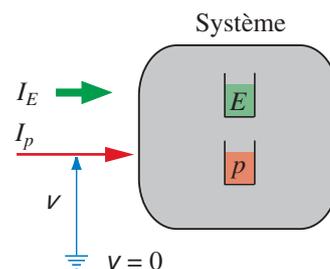


FIGURE 8.31 L'énergie transférée par un flux de quantité de mouvement dépend de la vitesse à laquelle est transférée la quantité de mouvement.

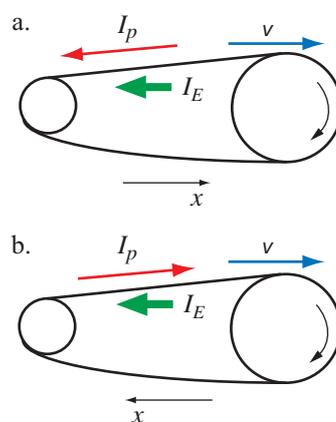


FIGURE 8.32 Flux de quantité de mouvement et d'énergie dans une chaîne de vélo : le flux d'énergie n'a pas nécessairement le même sens que celui de la quantité de mouvement. C'est le choix du référentiel qui détermine l'orientation réciproque des deux flux.

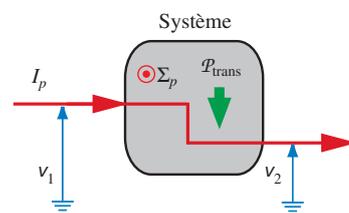
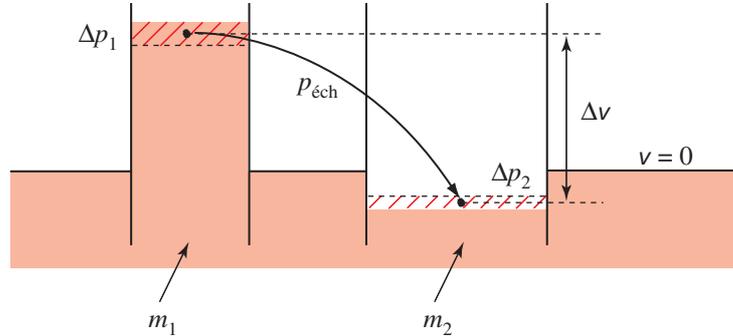


FIGURE 8.33 Puissance d'un processus de translation : le taux de libération de l'énergie est proportionnel à la chute de niveau.

L'énergie libérée par l'un des objets lors d'une collision (fig. 8.34) peut être liée en proportions variables suivant le caractère de la collision : dans une collision totalement élastique, il n'y a aucune dissipation, alors qu'une partie non négligeable peut être dissipée lors d'un choc inélastique.

FIGURE 8.34 L'énergie libérée par la « chute » de quantité de mouvement est représentée dans l'analogie hydraulique d'une collision. La figure montre un bref intervalle en début de collision.



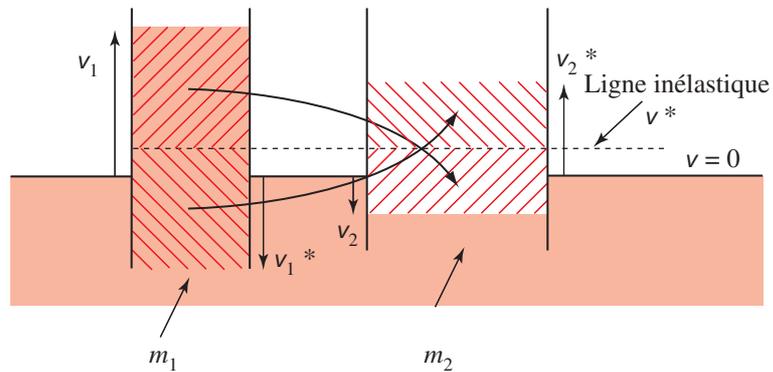
Cette énergie libérée (ou liée) lors d'un processus se calcule par intégration de la relation (8.8) ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{libérée}} &= -\Delta V \left| \int_{p_1}^{p_2} (I_p + \Sigma_p) \cdot dt \right| \\
 &= -\Delta V |p_{\text{éch}}|
 \end{aligned}
 \tag{8.19}$$

Dans les deux dernières relations, la grandeur ΔV représente la chute moyenne de niveau de la quantité de mouvement échangée.

Illustrons cette situation en appliquant l'image hydraulique à un choc complètement élastique dans une dimension (fig. 8.35). La quantité de mouvement franchit une différence de potentiel «de haut en bas» jusqu'à ce que la vitesse commune du choc inélastique soit atteinte. Vu que l'énergie n'est pas dissipée, l'énergie libérée est liée lorsqu'elle pompe, dans la seconde phase de la collision, la même quantité de mou-

FIGURE 8.35 Analogie hydraulique d'un choc totalement élastique entre deux objets. Le second se mouvait initialement dans la direction négative. L'énergie libérée durant la première phase de la collision (jusqu'au moment où les deux objets ont une vitesse commune indiquée par la ligne inélastique) est utilisée pour «pomper» encore autant d'énergie du premier objet vers le second.



vement «de bas en haut». Dans l'image hydraulique, l'état final est symétrique de l'état initial par rapport à la ligne inélastique.

8.6.4 Intégration de l'énergie dans les modèles

L'équation (8.7) nous permet d'ajouter tout ce qui concerne l'évolution de l'énergie dans un modèle. Nous allons le faire pour le processus étudié à la section 8.2. Les flux d'énergie respectifs peuvent être calculés à partir de la vitesse instantanée de chacun

des glisseurs et du flux de quantité de mouvement. Chacun de ces flux d'énergie alimente un réservoir (stock) qui représente l'énergie cinétique de chacun des glisseurs. La paire constituée d'un réservoir et d'un flux associé représente le bilan d'énergie pour un glisseur.

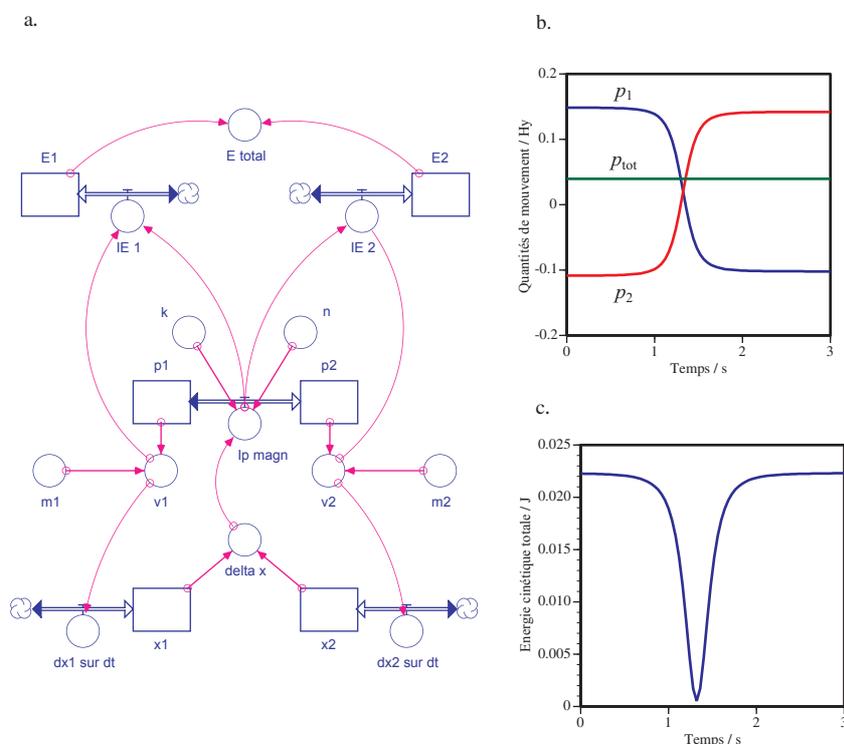


FIGURE 8.36 Modèle de collision entre deux glisseurs: (a) intégration de l'énergie dans le modèle; les flux d'énergie sont calculés à partir des flux de quantité de mouvement et de la vitesse instantanée. L'énergie est accumulée ou libérée par l'intermédiaire de ces flux; (b) évolution des quantités de mouvement respectives et de la quantité de mouvement totale; (c) évolution de l'énergie cinétique totale.

La figure 8.36a montre le modèle de la collision après intégration des flux et des variations respectives de l'énergie. Dans la partie (b) de la figure, l'évolution des quantités de mouvement de chacun des glisseurs est représentée, ainsi que celle de la quantité de mouvement totale du système. On observe que celle-ci ne varie pas, ce qui est une conséquence de la conservation de la quantité de mouvement.

Le graphique représentant l'énergie cinétique totale (fig. 8.36c) semble contredire la loi de conservation de l'énergie, ce qui n'est pas le cas. On observe tout d'abord que l'énergie totale après la fin de l'interaction, lorsque les deux glisseurs sont à nouveau suffisamment éloignés l'un de l'autre, est la même qu'avant la collision. On en conclut que l'énergie a été accumulée dans un autre système que les deux glisseurs durant la phase d'interaction. La seule explication possible, c'est que le champ magnétique engendré par les deux aimants sert de réservoir d'énergie; il emmagasine l'énergie durant la phase de rapprochement des glisseurs, puis la restitue durant la phase d'éloignement. Le minimum de la courbe correspond à l'instant où les deux glisseurs atteignent la vitesse qui est indiquée par la ligne inélastique dans la figure 8.35.

EXEMPLE 8.5. Choc partiellement élastique.

Une camionnette entre en collision par l'arrière avec une voiture. La camionnette et la voiture roulaient à des vitesses de modules respectifs de 108 km h^{-1} et 72 km h^{-1} , leurs masses sont de 1500 kg et 800 kg . Si la moitié de l'énergie libérée est dissipée, que valent les vitesses des deux véhicules après le choc?

SOLUTION: Nous commençons par calculer la ligne inélastique (la vitesse commune qu'auraient atteinte les deux véhicules si le choc avait été totalement inélastique). En appliquant la loi de conservation de la quantité de mouvement (8.13), nous trouvons :

$$m_1(v^* - v_1) = -m_2(v^* - 0)$$

ou

$$v^* = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1500 \text{ kg} \cdot 30.0 \text{ m s}^{-1} + 800 \text{ kg} \cdot 20.0 \text{ m s}^{-1}}{1500 \text{ kg} + 800 \text{ kg}} = 26.52 \text{ m s}^{-1}$$

À partir de cette valeur, nous pouvons évaluer la quantité d'énergie qui aurait été libérée. Jusqu'à cet instant, la quantité de mouvement transférée est

$$|p_{\text{éch}}| = |m_1(v^* - v_1)| = |1500 \text{ kg} (26.52 \text{ m s}^{-1} - 30.00 \text{ m s}^{-1})| = 5.22 \cdot 10^3 \text{ Hy}$$

Ne sachant rien de la manière dont évoluent les vitesses respectives durant la première phase de la collision, nous choisissons l'option la plus simple, à savoir une variation linéaire. Cela nous permet de calculer les grandeurs cherchées en nous servant des vitesses moyennes. Pour la camionnette, nous obtenons $0.5 \cdot (30.00 \text{ m s}^{-1} + 26.52 \text{ m s}^{-1}) = 28.26 \text{ m s}^{-1}$ et, pour la voiture $0.5 \cdot (20.00 \text{ m s}^{-1} + 26.52 \text{ m s}^{-1}) = 23.26 \text{ m s}^{-1}$. Avec une variation de vitesse $\Delta v = 23.26 \text{ m s}^{-1} - 28.26 \text{ m s}^{-1} = -5.00 \text{ m s}^{-1}$, nous obtenons pour l'énergie qui aurait été libérée :

$$E_{\text{libérée}} = -\Delta v |p_{\text{éch}}| = -(-5.00 \text{ m s}^{-1}) \cdot 5.22 \cdot 10^3 \text{ Hy} = 26.10 \cdot 10^3 \text{ J}$$

La moitié de cette énergie est utilisée pour pomper de la quantité de mouvement supplémentaire de la camionnette vers la voiture. Ce qui nous fournit un système de deux équations :

$$m_1(v_1^* - v^*) = -m_2(v_2^* - v^*)$$

$$E_{\text{libérée}} / 2 = [0.5(v_2^* + v^*) - 0.5(v_1^* - v^*)] m_2(v_2^* - v^*)$$

dont la solution est $v_1^* = 24.06 \text{ m s}^{-1}$ et $v_2^* = 31.13 \text{ m s}^{-1}$. Si la collision avait été parfaitement élastique, la voiture aurait eu une vitesse finale de module égal à 33.04 m s^{-1} , alors que la camionnette aurait décéléré à 23.04 m s^{-1} . ■

EXEMPLE 8.6. Équation de BERNOULLI.

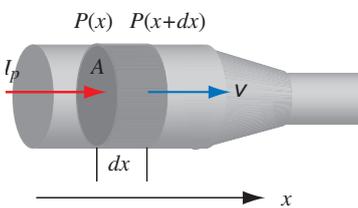


FIGURE 8.37 Écoulement dans une conduite horizontale de section variable.

On considère un fluide incompressible, sans viscosité, de densité ρ , qui s'écoule à travers une conduite de section variable (fig. 8.37). (a) En admettant que la conduite est horizontale, appliquer le bilan de la quantité de mouvement à un volume infinitésimal de fluide qui se déplace sous l'effet de la différence de pression et en déduire la répartition de la densité d'énergie. (b) En admettant que la conduite comporte des segments à des altitudes différentes, appliquer la loi de conservation de l'énergie à un volume de fluide qui se déplace sous l'effet de la différence de pression. (c) Utiliser le résultat pour justifier celui relatif à la perte de charge énoncé à la section 1.7.3.

SOLUTION: (a) Rappelons que nous désignons la pression par P majuscule. Le volume infinitésimal de fluide de section A et de longueur dx se déplace grâce à la différence de pression entre ses extrémités :

$$I_p = \dot{p} = m\dot{v} = \rho A dx \dot{v} = -AdP \Rightarrow \rho \dot{v} = -\frac{dP}{dx}$$

Mais la vitesse V varie en fonction de la position, c'est-à-dire que $v = v(x)$. Nous devons tenir compte de ce fait lors de l'évaluation de sa dérivée par rapport au temps :

$$\dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Après substitution dans l'équation de bilan, nous obtenons :

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{dP}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P \right) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P = \text{const}$$

Ce résultat signifie que, dans une conduite horizontale, la densité d'énergie est constante le long d'une ligne de courant. Cette densité d'énergie se répartit sur un terme dynamique qui est la densité d'énergie cinétique, que l'on appelle pression dynamique, et sur la pression interne du fluide, que l'on appelle pression statique. Lorsque la section de la conduite varie, le débit ne change pas, vu que le fluide est incompressible, et la vitesse varie de manière inversement proportionnelle à la section. Si par exemple la section diminue, la vitesse augmente et la pression dynamique elle aussi, aux dépens de la pression statique. Cet effet est mis en pratique dans la trompe à eau qui sert à créer un vide relativement modeste dans de petits récipients.

(b)

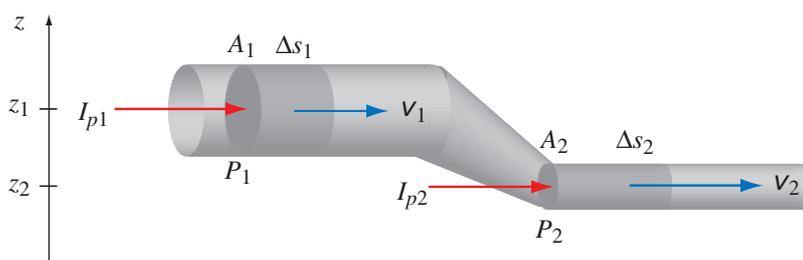


FIGURE 8.38 Écoulement dans une conduite dont les segments ont des sections et des altitudes différentes.

Nous considérons le volume de fluide compris entre les sections A_1 et A_2 à la hauteur desquelles règnent respectivement les pressions P_1 et P_2 (fig. 8.38). Durant l'intervalle de temps Δt , les éléments de fluide initialement à la hauteur de la section A_1 se déplacent sur une distance $\Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t$, alors que ceux qui se trouvaient à la hauteur de la section A_2 se sont déplacés sur une distance $\Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t$. Comme le fluide est incompressible, les volumes déplacés sont les mêmes : $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta s_1 = \Delta V_2 = A_2 \cdot \Delta s_2 = \Delta V$. Les masses déplacées sont aussi égales, à savoir $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$.

Afin de pouvoir évaluer la quantité d'énergie échangée au cours de ce processus, qui correspond à la variation de l'énergie mécanique du système, nous calculons d'abord la variation de la quantité de mouvement engendrée par la différence de pression :

$$\Delta p = I_p = -(A_2 P_2 - A_1 P_1)$$

Le flux d'énergie associé à ce flux de quantité de mouvement est :

$$I_E = -(A_2 P_2 v_2 - A_1 P_1 v_1)$$

et la quantité d'énergie échangée devient

$$E_{\text{éch}} = I_E \cdot \Delta t = -(A_2 P_2 v_2 - A_1 P_1 v_1) \Delta t = (P_1 - P_2) \Delta V$$

Cette énergie échangée est égale à la variation de l'énergie mécanique, à savoir de l'énergie cinétique et de l'énergie gravitationnelle :

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{méc}} &= \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{grav}} = \Delta m \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + \Delta m (gz_2 - gz_1) \\ &= \rho \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) \Delta V + \rho (gz_2 - gz_1) \Delta V \end{aligned}$$

Après avoir égalé l'énergie échangée et la variation de l'énergie mécanique, divisé tous les termes par ΔV et rassemblé les termes de même indice dans le même membre, nous obtenons :

$$\rho \frac{V_1^2}{2} + \rho gz_1 + P_1 = \rho \frac{V_2^2}{2} + \rho gz_2 + P_2$$

Ce résultat généralise celui que nous avons trouvé au point (a) : le long d'une ligne de courant d'un fluide incompressible et sans viscosité, la densité d'énergie totale est constante :

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho gz + P = \text{const}$$

Le terme ρgz représente la densité d'énergie gravitationnelle. Cette expression est l'équation de BERNOULLI.

(c) Nous appliquons l'équation de BERNOULLI aux points A et B (fig. 8.39), en tenant compte du fait que $z = 0$:

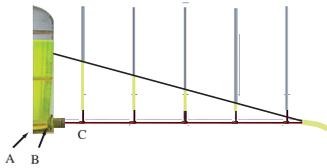


FIGURE 8.39 Effet BERNOULLI: la variation linéaire de la pression ne débute pas à la surface du liquide.

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho gz + P = \text{const}$$

La vitesse au point A est négligeable. La différence de pression est donc :

$$\Delta P_{AB} = P_B - P_A = -\rho \frac{V_B^2}{2}$$

ce qui justifie théoriquement le résultat expérimental de la section 1.7.3. ■

EXEMPLE 8.7. Découverte du neutron.

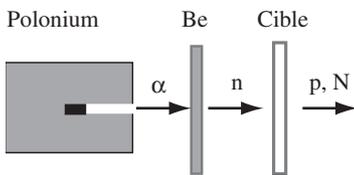


FIGURE 8.40 Représentation schématique de l'expérience de Chadwick qui a révélé l'existence du neutron.

Des expériences de bombardement de béryllium au moyen de particules α provenant de polonium radioactif, réalisées en 1930 par Bothe et Becker, et en 1931 par le couple JOLIOT-CURIE, révélèrent l'émission d'un « rayonnement » qui fut tout d'abord interprété comme des rayons γ . James Chadwick, un disciple de RUTHERFORD qui, en 1920, avait déjà émis l'idée de l'existence d'une particule neutre dans le noyau, refit ces expériences en admettant que le rayonnement émis par le béryllium était une particule. Il bombarda notamment des noyaux d'hydrogène (contenus dans une feuille de paraffine) et d'azote et mesura la vitesse des noyaux éjectés lors de chocs élastiques (fig. 8.40). Pour ceux qui avaient subi une collision frontale (qui étaient donc éjectés dans la même direction que la particule incidente), il trouva que le rapport des vitesses respectives des protons et des noyaux d'azote valait 7.5. En admettant que la masse du noyau d'azote vaut 14 fois celle du proton, déterminer la masse de la particule incidente en fonction de celle du proton.

SOLUTION : Nous désignons par n la particule incidente, par p et N les protons et les noyaux d'azote. Nous appliquons la loi de conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie aux deux types de collision.

Collision avec les protons:

$$\begin{aligned} m_n v_n - m_n v'_n &= m_p v_p \\ \frac{1}{2} m_n v_n^2 - \frac{1}{2} m_n v'^2_n &= \frac{1}{2} m_p v_p^2 \end{aligned}$$

Collision avec les noyaux d'azote:

$$\begin{aligned} m_n v_n - m_n v''_n &= m_N v_N \\ \frac{1}{2} m_n v_n^2 - \frac{1}{2} m_n v''^2_n &= \frac{1}{2} m_N v_N^2 \end{aligned}$$

Dans les deux paires d'équations, nous isolons dans le membre de droite les termes concernant les protons et les noyaux d'azote et divisons membre à membre les équations ainsi obtenues:

$$\left. \begin{aligned} m_n v_n - m_n v'_n &= m_p v_p \\ m_n v_n^2 - m_n v'^2_n &= m_p v_p^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_n + v'_n = v_p$$

$$\left. \begin{aligned} m_n v_n - m_n v''_n &= m_N v_N \\ m_n v_n^2 - m_n v''^2_n &= m_N v_N^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_n + v''_n = v_N$$

Ces relations nous permettent d'éliminer la vitesse de la particule incidente après la collision et d'exprimer la vitesse des protons et des noyaux d'azote éjectés, après avoir remplacé la masse de l'azote par 14 fois celle du proton:

$$v_p = \frac{2m_n v_n}{m_n + m_p} \quad \text{et} \quad v_N = \frac{2m_n v_n}{m_n + 14m_p}$$

En prenant en compte le fait que le rapport de ces deux vitesses est égal à 7.5, on trouve après quelques manipulations algébriques:

$$m_n = m_p$$

■

1. Quelle est l'utilité de la loi de conservation de l'énergie lors de l'étude de collisions?
2. Lors du choc des deux glisseurs sur le rail à coussin d'air, les deux vitesses sont, à un moment donné, proches de zéro (fig. 8.7). Cela signifie-t-il que l'énergie n'est pas conservée?

Q

1. Lors de la majorité des chocs, on n'a pas accès aux détails de l'interaction des corps qui entrent en collision. La seule loi de la conservation de la quantité de mouvement ne suffit pas pour prévoir l'issue de la collision. Par contre, si l'on sait que le choc est parfaitement élastique, la loi de conservation de l'énergie, couplée avec celle de la conservation de la quantité de mouvement, permet de déterminer l'état du système après la collision. Dans le cas d'une collision parfaitement inélastique, la loi de conservation de la quantité de mouvement suffit pour déterminer la vitesse commune des corps entrant en collision. Dans le cas intermédiaire, si l'on connaît ou si l'on peut évaluer le taux de dissipation de l'énergie, il est possible de déterminer l'état final du système.

R

2. Non, les deux glisseurs repartent en sens inverse et, lorsque l'on étudie l'évolution de l'énergie totale du système, on observe que celle-ci est la même à fin de l'interaction (fig. 8.36c). Durant la phase d'interaction, l'énergie est stockée dans le champ magnétique, puis restituée.

8.7 LOI DE RÉSISTANCE

Lorsque deux systèmes qui échangent de la quantité de mouvement sont en contact, le transfert se fait par conduction et l'intensité des flux dépend de particularités que l'on énonce au moyen d'une loi constitutive, la loi de résistance. Dans ce qui suit, nous désignerons par $I_{p,R}$ les flux de quantité de mouvement engendrés par les frottements.

8.7.1 Frottement constant (frottement de COULOMB)

Le flux de quantité de mouvement est constant (fig. 8.41), quelle que soit la valeur de la vitesse linéaire, mais son signe dépend de celui de la vitesse linéaire dans le repère choisi :

$$I_{p,R} = -\text{sgn}(v) I_{p,\text{Coulomb}} \quad (8.20)$$

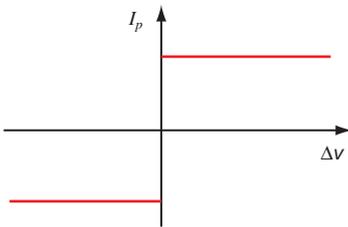


FIGURE 8.41 Frottement de COULOMB : le flux de quantité de mouvement est indépendant de la différence de vitesse entre les deux corps en interaction.

8.7.2 Frottement visqueux

Dans ce cas, le module des flux de quantité de mouvement dépend de la vitesse relative des deux systèmes en interaction.

Frottement visqueux de type ohmique. Si la différence de vitesse est suffisamment faible, l'effet est proportionnel à cette différence :

$$I_{p,R} = -k \cdot \Delta v \quad (8.21)$$

La caractéristique de ce type de frottement est linéaire (fig. 8.42), comme celle de la loi d'OHM en électricité. C'est la viscosité du fluide dans lequel se déplace l'objet qui détermine la valeur du coefficient de proportionnalité k .

Frottement visqueux de type turbulent. Lorsque la vitesse dépasse une certaine limite, on passe du régime laminaire (ohmique) au régime turbulent (comme en hydraulique). La résistance devient proportionnelle au carré de la différences des vitesses :

$$I_{p,R} = -k \cdot \Delta v^2 \quad (8.22)$$

Il est important de noter que, dans le cas de la transmission de la quantité de mouvement, les frottements ne s'opposent pas aux flux de quantité de mouvement mais, au contraire, les rendent possibles.

EXEMPLE 8.8. Chute de caissettes à cupcakes.

Modéliser la chute de caissettes à cupcakes et comparer la simulation avec les données recueillies à partir d'un film de leur chute.

SOLUTION: Deux contributions font varier la quantité de mouvement des caissettes, celle de la pesanteur qui la fait augmenter et celle du frottement de l'air qui la réduit.

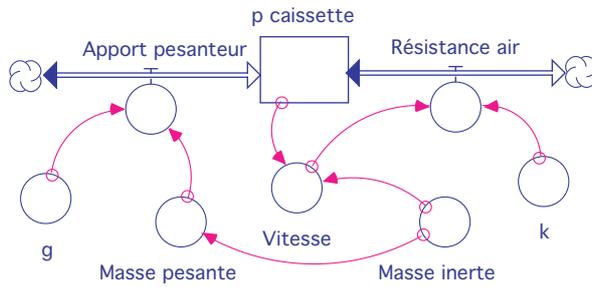


FIGURE 8.43 Modèle de la chute de caissettes à cupcakes.

Les deux manières dont se manifeste la masse ont été séparées dans le modèle (fig. 8.43), même si ces masses sont égales. Le frottement de l'air est de type turbulent, décrit par l'équation (8.22). La meilleure adéquation est obtenue pour $k = 0.001 \text{ Hy s m}^{-2}$.

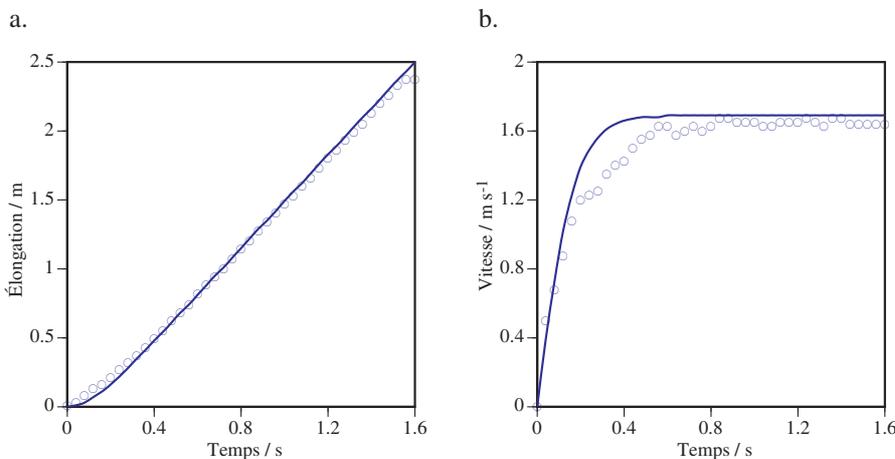


FIGURE 8.44 Simulation de la chute de caissettes à cupcakes: (a) élongation en fonction du temps; (b) vitesse en fonction du temps.

Les graphiques de la figure 8.44 montrent que l'hypothèse d'un frottement visqueux turbulent permet une description suffisante du processus. Les données expérimentales relatives à la vitesse ont été extraites du film de la chute libre, raison pour laquelle elles fluctuent fortement. Elles ont été lissées en utilisant une moyenne mobile centrée calculée sur cinq points.

8.8 MODÈLE CORPUSCULAIRE DU GAZ PARFAIT MONOATOMIQUE

Les processus physiques sont la conséquence de l'accumulation et du transfert de quelques grandeurs physiques fondamentales telles que la charge, l'entropie ou la quantité de mouvement. Nous avons combiné cette vision avec une image particulière qui veut que ces quantités et les systèmes à travers lesquels elles s'écoulent sont spatialement continus. C'est l'hypothèse fondamentale sur laquelle repose ce que l'on appelle la physique des milieux continus. Elle nous a servi jusqu'ici pour éclairer et comprendre les phénomènes macroscopiques, et elle continuera à nous guider dans la plupart de nos investigations.

Il existe une vue complémentaire qui interprète les phénomènes physiques comme le résultat d'innombrables processus microscopiques qui ont lieu entre les constituants microscopiques de la matière et du rayonnement. En termes un peu sommaires, on affirme quelquefois que les processus sont la conséquence du mouvement de petites particules dont est fait le monde.

Deux théories – la *théorie cinétique* et la *mécanique statistique* – ont été développées avec pour objectif d'éclairer et de comprendre les propriétés de la matière et du rayonnement en considérant le mouvement de beaucoup de particules, ou les propriétés moyennes d'un très grand nombre de molécules, atomes, photons, voire de constituants encore plus petits des systèmes physiques, pour tenter de déduire le comportement macroscopique des objets en tant que « somme » de ces comportements microscopiques. De pair avec la *physique quantique*, qui modélise le comportement des particules microscopiques, ces deux théories ont permis d'accroître considérablement notre connaissance du monde qui nous entoure.

Toutefois, malgré leur importance et leur indéniable succès, ces théories ne remplacent pas la vision d'une nature continue et se prêtent mal à la résolution des problèmes que tente de résoudre l'ingénieur. Ce ne sont pas les bonnes théories pour affronter les phénomènes macroscopiques d'un point de vue pratique. Toutefois, elles permettent d'obtenir des informations importantes sur certaines propriétés particulières de la matière et du rayonnement, informations qui peuvent être intégrées dans les modèles macroscopiques. On peut dire que les théories microscopiques d'une part, et la physique des milieux continus d'autre part, offrent des visions complémentaires de la manière dont fonctionne la nature.

La théorie cinétique et la mécanique statistique doivent faire face à un très sérieux problème dans un cours de physique élémentaire : à l'exception d'un très petit nombre d'applications, elles sont beaucoup trop compliquées. Mais il est important de comprendre dans quel sens la vision microscopique de la nature peut nous aider à concevoir ses aspects macroscopiques.

La théorie des chocs, étudiée dans ce chapitre, peut servir de présentation des méthodes et de l'utilité de la théorie cinétique. En considérant un gaz parfait monoatomique tel qu l'hélium comme un ensemble de corpuscules élastiques, on peut mettre en évidence des relations entre la pression du gaz et l'énergie des particules, ou entre leur énergie cinétique moyenne et la température du gaz. La dernière relation fournit également une dérivation du coefficient de température de l'énergie du gaz parfait monoatomique qui coïncide extrêmement bien avec l'observation.

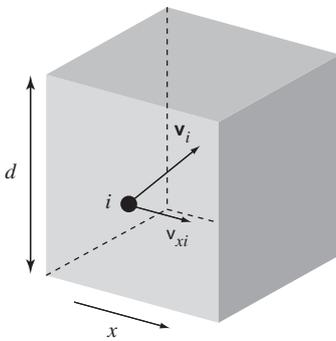


FIGURE 8.45 Des particules enfermées dans une enceinte entrent en collision avec les parois. Le transfert de quantité de mouvement aux parois engendre la pression du gaz sur son récipient.

8.8.1 Pression d'un ensemble de particules élastiques indépendantes

Dans n mol d'un gaz, il y a $N = nN_A$ particules, où $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ particules/mol est le nombre d'AVOGADRO (chapitre 6). Nous considérons un ensemble de N particules enfermées dans un boîte cubique d'arête de longueur d (fig. 8.45). Ces particules frappent une certaine paroi à des intervalles $\Delta t_i = 2d/v_{xi}$. L'indice i sert à numéroter les particules, et nous considérons la composante selon l'axe x du mouvement des particules qui viennent frapper la paroi droite du récipient dans la figure 8.45. Lors de chaque collision, une particule de masse m transfère à la paroi une quantité de mouvement

$$p_{\text{éch}i} = 2m v_{xi}$$

Ce transfert de quantité de mouvement fait apparaître des contraintes dans la paroi, qui ne sont rien d'autre que la pression (section 8.4); selon la définition, cette pression est égale à la quantité de mouvement transférée par unité de temps et de surface. Pour N particules, elle vaut

$$P = \sum_{i=1}^N \frac{p_{\text{éch}i}}{d^2 \Delta t_i} = \sum_{i=1}^N \frac{2m v_{xi} v_{xi}}{d^2 2d} = \frac{2}{V} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_{xi}^2$$

où V représente le volume du récipient. Vu que, pour la particule i ,

$$v_i^2 = v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2$$

et, vu que les directions dans lesquelles se meuvent les particules sont indépendantes les unes des autres, nous nous attendons à avoir en moyenne

$$v_{x,i}^2 = v_{y,i}^2 = v_{z,i}^2 \Rightarrow v_{x,i}^2 = \frac{1}{3} v_i^2$$

De ce fait, la pression du gaz devient

$$P = \frac{2}{3V} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{2}{3V} E = \frac{2}{3} \rho_E \quad (8.23)$$

où E représente l'énergie totale du gaz. C'est ainsi parce que les particules n'ont que l'énergie due à leur mouvement; elles n'ont aucune autre propriété (aucun autre degré de liberté) qui leur permettrait d'accumuler de l'énergie supplémentaire. La relation (8.23) révèle que la pression d'un gaz est proportionnelle à sa densité d'énergie.

8.8.2 Énergie et température

Si nous combinons les résultats du modèle corpusculaire avec l'équation d'état du gaz parfait, $PV = nRT$ (section 6.5.1), nous obtenons

$$\frac{2}{3V} EV = nRT \Rightarrow E = \frac{3}{2} NkT$$

où k est la constante de BOLTZMANN

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (8.24)$$

qui est également appelée constante des gaz pour une particule unique. Par conséquent, l'énergie (cinétique) moyenne pour une particule unique est $3/2kT$, ce qui signifie que

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (8.25)$$

Il s'ensuit que, pour un gaz monoatomique, la vitesse quadratique moyenne (moyenne du carré de la vitesse) d'une particule et la température du gaz sont directement proportionnelles.

Nous pouvons maintenant dériver la valeur du *coefficient de température de l'énergie* («chaleur spécifique») d'un gaz monoatomique. Par définition, $C_V = \partial E / \partial T$. Pour notre gaz, nous obtenons

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} nRT \right) = \frac{3}{2} nR \quad (8.26)$$

ce qui montre que le coefficient de température de l'énergie molaire est $3/2R$. Ce résultat sera généralisé à la section 10.3.6.

8.9 MOUVEMENT À TRÈS GRANDE VITESSE

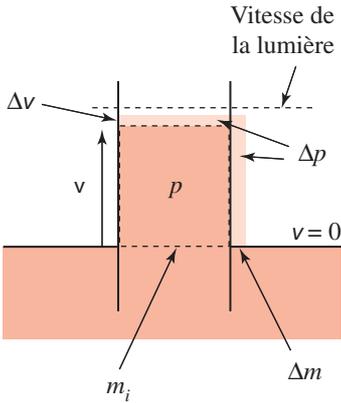


FIGURE 8.46 L'accroissement de la quantité de mouvement n'entraîne que partiellement à une augmentation de la vitesse. La masse augmente également, particulièrement à des vitesses proches de celle de la lumière. Vu que l'énergie augmente conjointement, nous en déduisons une relation fondamentale entre l'énergie et la masse.

Qu'advient-il lorsque l'on fournit à un objet une quantité de mouvement de plus en plus grande? En vertu des lois que nous avons découvertes jusqu'ici, sa vitesse devrait croître de plus en plus. Dans l'analogie hydraulique (fig. 8.27), le niveau du fluide ne cesserait d'augmenter.

Mais il se trouve que le mouvement à très grande vitesse révèle des particularités qui ne se manifestent pas à des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. En effet, on sait depuis 1905 grâce à EINSTEIN et à sa théorie de la relativité que la vitesse de la lumière ne peut pas être dépassée (ni même atteinte) par un corps matériel. Vu qu'il est toujours possible de poursuivre l'apport de quantité de mouvement, il faut conclure que l'augmentation de la quantité de mouvement entraîne une augmentation de la capacité en quantité de mouvement d'un objet, c'est-à-dire de sa masse (fig. 8.46).

L'apport de quantité de mouvement s'accompagne d'un apport d'énergie. Il s'ensuit qu'il doit y avoir une relation étroite entre l'énergie et la masse d'un système physique, relation que nous voulons découvrir. Ce fait est connu, en théorie de la relativité, sous la dénomination de *l'équivalence de la masse et de l'énergie*.

8.9.1 Quantité de mouvement transportée par la lumière

Une des observations les plus importantes au sujet de la lumière est qu'elle se comporte comme si elle était constituée d'un jet de particules, les photons, dont certaines propriétés physiques sont, sous certains aspects, semblables à celles de la matière ordinaire. Les photons transportent de la quantité de mouvement, tout comme les corps matériels, mais ils ne peuvent se déplacer à aucune autre vitesse que celle de la lumière. Une expérience (réalisée pour la première fois en 1886 par Michelson et Morley) révèle que des observateurs se déplaçant à des vitesses totalement différentes les uns des autres mesurent tous la même vitesse de propagation de la lumière. Cette particularité, élevée au rang de postulat, sert de base à la théorie de la relativité restreinte d'EINSTEIN.

Comme les photons transportent de la quantité de mouvement, nous introduisons sa capacité en quantité de mouvement m et écrivons

$$p = mc \tag{8.27}$$

où c représente la vitesse de la lumière ($c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$). Soulignons que m ne représente pas une quantité de matière (la lumière est immatérielle), mais la capacité d'accumuler de la quantité de mouvement.

Vu que les photons ne peuvent exister qu'à la vitesse de la lumière, l'apport de quantité de mouvement n'entraîne qu'une augmentation de l'énergie, selon la relation:

$$E = c p \tag{8.28}$$

(fig. 8.47). Si nous combinons les équations (8.27) et (8.28), nous devons conclure que

$$E = mc^2 \tag{8.29}$$

En d'autres termes, la capacité en quantité de mouvement et l'énergie de la lumière sont directement liées. Le facteur de conversion est le carré de la vitesse de la lumière.

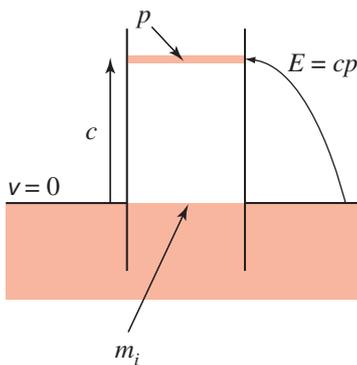


FIGURE 8.47 La «création» d'un photon ayant une quantité de mouvement p nécessite une quantité d'énergie égale à cp (pour «soulever» la quantité de mouvement à la vitesse c).

8.9.2 Quantité de mouvement, masse et énergie de corps matériels

Passons maintenant à la discussion du comportement d'un objet « ordinaire ». Nous avons vu qu'un tel objet ne peut ni atteindre, ni dépasser la vitesse de la lumière. Cependant, lorsque sa vitesse approche celle de la lumière, il a de plus en plus tendance à se comporter comme un photon. En particulier, tout apport supplémentaire de quantité de mouvement s'accompagne d'un apport d'énergie calculé selon l'équation (8.28) pour les photons et comme on peut le voir dans les figures 8.46 ou 8.47.

Que deviennent les propriétés des objets s'ils se mettent à se comporter de manière semblable aux photons lorsqu'ils se meuvent à très haute vitesse ? La relation vitesse – quantité de mouvement, qui introduit la capacité en quantité de mouvement, est primordiale. Si nous utilisons l'équation (8.29) pour la masse et écrivons

$$p = \frac{E}{c^2} v \quad (8.30)$$

alors cette relation tend vers celle qui est valable pour les photons lorsque la vitesse du corps s'approche de celle de la lumière. Elle est équivalente à l'équation (8.28) si nous remplaçons v par c .

Considérons maintenant le processus consistant à ajouter une petite portion de quantité de mouvement Δp à un corps qui se meut à la vitesse v . Cela nécessite une quantité d'énergie $\Delta E = v \cdot \Delta p$. Vu que, selon l'équation (8.29), nous avons également $\Delta E = c^2 \Delta m$, nous pouvons conclure que :

$$\Delta m = \frac{1}{c^2} v \cdot \Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{p}{m} \cdot \Delta p \Rightarrow c^2 m \cdot \Delta m = p \cdot \Delta p$$

L'intégration de cette équation (après passage à la limite)

$$c^2 \int_{m_0}^m \tilde{m} \cdot d\tilde{m} = \int_0^p \tilde{p} \cdot d\tilde{p}$$

donne

$$c^2(m^2 - m_0^2) = p^2 \quad (8.31)$$

Ici, m_0 représente la *masse au repos*, c'est-à-dire la masse de l'objet lorsqu'il est immobile (dans le référentiel considéré). Comme nous avons pu le constater dans la figure 8.46, la masse d'un corps augmente lorsqu'on lui ajoute de la quantité de mouvement, et notre résultat nous indique de quelle manière se produit ce phénomène. Cette relation peut également s'exprimer au moyen de l'énergie de l'objet :

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (8.32)$$

C'est un résultat extrêmement intéressant, comme nous pouvons le constater en considérant la limite pour un objet au repos ; dans ce cas, la quantité de mouvement est réduite à zéro, et il reste :

$$E(v = 0) = m_0 c^2 \quad (8.33)$$

En d'autres termes, un objet au repos possède encore une énergie égale au produit de sa *masse au repos* m_0 et du carré de la vitesse de la lumière. Cette énergie est l'*énergie au repos* E_0 . C'est sur ce résultat qu'est basée l'interprétation qui veut que l'énergie et

la masse sont une seule et même grandeur physique qui est conservée. L'apport d'énergie à un objet le rend plus pesant et plus inerte, ce qui se produit également si nous lui ajoutons de la masse. C'est en basant notre argument sur cette propriété que nous avons pu affirmer, au chapitre 5, que la grandeur qui rendait un objet chaud ne pouvait pas être de l'énergie.

Aussi bien pour des objets matériels que pour la lumière, et pour toutes les vitesses allant de zéro à celle de la lumière, l'énergie et la masse du système représentent la même grandeur. Leurs valeurs sont liées par la relation

$$E = mc^2 \tag{8.34}$$

Nous pouvons montrer que la masse d'un objet dépend de sa vitesse. Posons $p = m v$ dans la relation entre la quantité de mouvement et la masse, c'est-à-dire dans l'équation (8.31), résolvons-la par rapport à m :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{8.35}$$

(fig. 8.49b). Cela montre que la masse d'un corps matériel deviendrait infinie s'il se mouvait à la vitesse de la lumière ce qui, par conséquent, est impossible.

8.9.3 Mouvement relativiste

Vérifions au moyen d'un modèle ce que l'adjonction à la mécanique newtonienne de la relation masse-énergie (8.34) entraîne comme modification du comportement dynamique des corps matériels.

Nous envisageons le mouvement d'un corps de masse au repos m_0 soumis à une force constante. Comme nous l'avons mentionné à la section 8.2.8, la notion de force correspond à un flux de quantité de mouvement I_p . Le cœur de notre modèle est le bilan de quantité de mouvement duquel nous déduisons le module v de la vitesse instantanée à partir de l'équation (8.12) toujours valable dans le cas relativiste. Le module de la vitesse et celui du flux de quantité de mouvement déterminent le flux d'énergie I_E vers le corps, donné par l'équation (8.17) valable autant pour les vitesses faibles que dans le cas relativiste. Nous obtenons l'énergie instantanée, ce qui nous permet de calculer la masse instantanée donnée par l'équation (8.34), la relation qui fait intervenir la théorie de la relativité dans le modèle qui est représenté dans la figure 8.48.

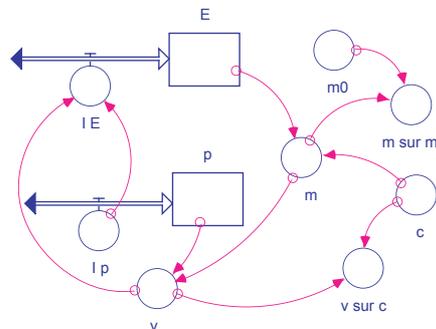


FIGURE 8.48 Modèle du mouvement relativiste d'un objet.

La simulation a été effectuée pour un corps de masse au repos égale à 1 kg soumis à une force de module constant de 100 N. La figure 8.49a montre que la vitesse s'approche de celle de la lumière, qui est une limite inatteignable pour un corps matériel. Cela est dû au fait que l'apport de quantité de mouvement, et donc d'énergie, contribue essentiellement à accroître la masse lorsque l'on s'approche de cette limite (fig. 8.49b).

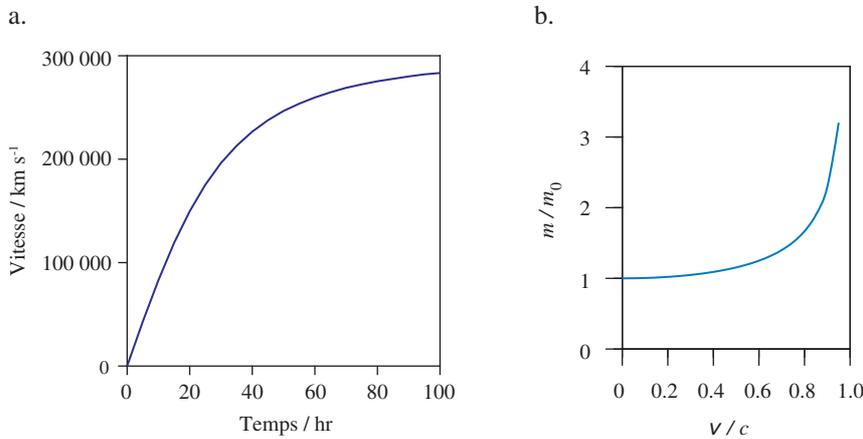


FIGURE 8.49 Mouvement relativiste d'un objet: (a) évolution de la vitesse en fonction du temps sous l'effet d'une force constante; (b) évolution de la masse en fonction de la vitesse; la masse tend asymptotiquement vers l'infini.

8.9.4 Conséquences géométriques

Les propriétés du mouvement à très grande vitesse ont quelques conséquences géométriques fascinantes. Étant donné que la lumière a la même vitesse par rapport à n'importe quel système de référence, et vu que les corps matériels ne peuvent ni atteindre, ni dépasser cette vitesse, les règles pour les additions des vitesses doivent être différentes de celles que nous utilisons usuellement. Pour des vitesses ordinaires, deux véhicules qui roulent l'un vers l'autre se croiseront avec une vitesse relative qui est la somme des valeurs individuelles. Cela n'est plus le cas pour des vitesses proches de celle de la lumière. Par exemple, si une particule du rayonnement cosmique se meut en direction de la Terre à une vitesse approchant celle de la lumière, un observateur se déplaçant vers la particule à très haute vitesse par rapport à la Terre mesurera toujours une vitesse de la particule inférieure à celle de la lumière.

En outre, l'espace et le temps ont des propriétés inattendues par rapport à notre expérience quotidienne. En particulier, des mesures de distances et d'intervalles de temps dépendent du mouvement de l'observateur, différents observateurs obtenant différents intervalles de temps et de distances. Ces propriétés qui vont à l'encontre de notre intuition sont confirmées quotidiennement dans les laboratoires de physique des hautes énergies où des particules élémentaires sont amenées à entrer en collision à des vitesses très proches de c . L'espace et le temps ne sont vraiment pas ce qu'ils semblent être à première vue. C'est pourquoi il est encore plus surprenant de voir jusqu'où nous pouvons aller avec notre vision simplifiée de la vie quotidienne.

Résumé du chapitre

La description des processus de translation se fait au moyen de deux grandeurs fondamentales, la quantité de mouvement et la vitesse linéaire.

La *quantité de mouvement* \mathbf{p} est la grandeur extensive liée au mouvement de translation. Elle peut être accumulée dans les objets en mouvement, peut s'écouler entre les

systèmes et ses variations sont décrites par une équation de bilan. Sa particularité est d'être une grandeur vectorielle. De ce fait, les flux I_p de quantité de mouvement sont aussi une grandeur vectorielle. La quantité de mouvement peut entrer ou sortir d'un système de différentes manières. Tout d'abord par conduction, c'est-à-dire lors du contact entre les objets qui entrent en interaction. Dans ce cas, les flux de quantité de mouvement pénètrent dans les corps à travers leur surface, s'y répartissent et engendrent des contraintes (de traction, de compression ou de cisaillement). Mais les corps peuvent également échanger de la quantité de mouvement avec les champs (gravitationnel, électrique, magnétique). Ces échanges de quantité de mouvement ne se font pas par l'intermédiaire de flux, mais par rayonnement, c'est-à-dire que les échanges ont lieu à l'intérieur du volume, sans passer par la surface. On les décrit au moyen d'un taux de source Σ_p . Si le champ est uniforme, les corps ne sont pas soumis à des contraintes; dans le cas contraire, il y a effet de marée. La forme générale de l'équation de bilan de la quantité de mouvement est: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{I}_{p, \text{cond}} + \Sigma_p$. Les flux de quantité de mouvement et les taux de source correspondent au concept de force.

La grandeur extensive, le potentiel, est la *vitesse linéaire* \mathbf{v} . C'est également une grandeur vectorielle. Les flux de quantité de mouvement ont toujours lieu entre deux niveaux de ce potentiel.

Les échanges de quantité de mouvement sont accompagnés de flux d'énergie. Le taux de chargement en énergie est proportionnel à la vitesse linéaire, ce qui implique qu'un flux d'énergie sera égal à $I_E = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{I}_p + \Sigma_p)$ où \mathbf{I}_p et Σ_p représentent les apports de quantité de mouvement respectivement en mode conducteur et radiatif. Lorsque le processus est spontané, il y a libération d'énergie, alors que de l'énergie est liée au flux de moment cinétique si le processus est contraint. Le taux de libération ou de liaison de l'énergie est la puissance du processus: $\mathcal{P}_{\text{trans}} = -\Delta v / |\mathbf{I}_p + \Sigma_p|$. L'énergie accumulée dans un objet en mouvement, son énergie cinétique, est égale à $E_{\text{cin}} = 1/2 m v^2$.

La capacité d'un système à emmagasiner de la quantité de mouvement et de l'énergie est sa masse inerte m .

La quantité de mouvement peut être transférée d'un système à l'autre de différentes manières: lors de chocs, en mode conducteur, par l'intermédiaire des frottements, par des éléments inductifs tels que des ressorts ou par l'intermédiaire de champs en mode radiatif. La présence d'éléments inductifs dans un système est à l'origine de phénomènes d'oscillations.

Questions

- Si l'on admet qu'un corps peut se mouvoir de manière complexe – combinant rotation et translation –, comment pourriez-vous définir le mouvement de translation? Qu'est-ce qui caractérise la translation?
- Comment pourriez-vous détecter si un certain corps a violé la loi d'équivalence de la masse inerte et de la masse pesante?
- Deux pièces de monnaie de même masse, posées l'une sur l'autre, tombent en chute libre. Y a-t-il un flux de quantité de mouvement à travers la surface de contact entre les deux pièces? Votre réponse changerait-elle si la pièce supérieure avait une masse gravitationnelle du double de sa masse inerte? Même question si la masse gravitationnelle de la pièce inférieure était le double de sa masse inerte?
- Une balle lancée perpendiculairement contre une paroi rebondit élastiquement après l'impact. Quelle est, exprimée au moyen de la quantité de mouvement avant l'impact, la quantité de mouvement transmise à la paroi? Que fait la paroi avec cette quantité de mouvement? Qu'advient-il de l'énergie de la balle?
- Durant un choc frontal, deux véhicules perdent de la quantité de mouvement à cause des frottements. Comment l'équation (8.13) est-elle modifiée?
- Comment une fusée fonctionne-t-elle?
- Dans une explosion, les fragments d'un corps partent dans toutes les directions. Comment, et d'où reçoivent-ils leur quantité de mouvement?
- Pourquoi la masse d'un corps doit-elle augmenter lorsque sa vitesse s'approche de celle de la lumière?
- Dans un écran d'ordinateur, les électrons sont accélérés par une tension de 2.0 kV. Quelle est l'énergie, le module de la vitesse et de la quantité de mouvement d'un électron individuel? La masse d'un électron est de $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg. Négligez les effets relativistes.
- Une balle lancée perpendiculairement contre une paroi rebondit de manière parfaitement élastique. Sa masse et le module de sa vitesse avant le rebond sont respectivement de 0.40 kg et 10.0 m s^{-1} . Déterminez la variation de la quantité de mouvement de la balle. Quelle est la quantité de mouvement transférée à la paroi?
- Une balle de pâte à modeler de 0.25 kg est lancée contre une paroi à une vitesse de module égal à 5.0 m s^{-1} et y reste collée. Quelle est la quantité d'énergie libérée lors de ce processus? Qu'advient-il de cette énergie? À quoi est-elle utilisée?
- Un joueur de football frappe la balle qui acquiert une vitesse de module égal à 9.0 m s^{-1} . La balle a une masse de 400 g. Le contact entre le pied du joueur et la balle dure approximativement 0.10 s. (a) Déterminez l'intensité moyenne du flux de quantité de mouvement du pied vers la balle. (b) Usuellement, la balle se met également à tourner. Ce fait change-t-il la réponse à la première question?
- Le diagramme de dynamique des systèmes de l'ancien modèle (éliminé) modélise le choc inélastique de deux corps dans une dimension. Admettez pour ces objets des masses de 2.0 kg et 1.0 kg et des vitesses respectives de 7.5 m s^{-1} et 0 m s^{-1} . Admettez un flux constant de quantité de mouvement de 50 N durant le choc. (a) Déterminez la valeur de la quantité de mouvement échangée. (b) Combien de temps dure le choc? (c) Déterminez les vitesses en fonction du temps. (d) Déterminez le taux de libération d'énergie en fonction du temps.
- Les électrons ont une masse de $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg. (a) Déterminez leur énergie au repos. (b) Si l'énergie d'un électron vaut 1.2 fois son énergie au repos, que vaut alors sa masse? Que vaut sa quantité de mouvement?

Exercices

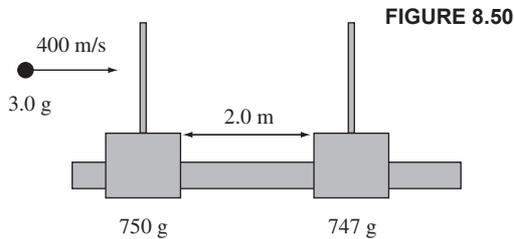
- Un glisseur, sur un rail à coussin d'air, de masse égale à 2.0 kg, est tiré par une ficelle, à partir de l'immobilité, pendant 3.0 s. Le flux de quantité de mouvement à travers la ficelle a une intensité de 0.50 N. (a) Déterminez la tension qui règne dans la ficelle dont le diamètre est de 1.0 mm. (b) Quelle est la quantité de mouvement qui a été injectée dans le glisseur? (c) Déterminez le changement de la quantité de mouvement du glisseur. (d) Quel sera le module de la vitesse finale du glisseur?
- La tension dans une corde de 2.0 cm de diamètre vaut $4.0 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Déterminez la valeur de l'intensité du flux de quantité de mouvement qui s'écoule à travers la corde.
- Un bloc est posé sur une table. Le champ gravitationnel transfère de la quantité de mouvement au taux de 200 N dans le bloc et au même taux dans la table. (a) Déterminez l'intensité du flux de quantité de mouvement entre le bloc et la table. (b) Déterminez l'intensité du flux de quantité de mouvement entre la table et le sol. (c) Les pieds de la table ont une forme cylindrique de rayon égal à 1.5 cm. Quelle est la valeur de la tension dans chacun des quatre pieds?

Problèmes

- Un véhicule à fond plat, de masse égale à 1000 kg, se déplace horizontalement sans frottement à une vitesse de module égal à 3.0 m s^{-1} . Une personne de masse égale à 100 kg saute d'un arbre sur l'arrière du véhicule. Puis elle court vers l'avant et saute du véhicule à une vitesse de 5.0 m s^{-1} par rapport au véhicule. (a) Quelle sera la vitesse du véhicule après que la personne l'a quitté? (Indication: résolvez le problème en deux étapes.) (b) De combien d'énergie cinétique a-t-elle diminué lorsque la personne a sauté sur le véhicule? (Négligez l'énergie du mouvement vertical.) (c) Combien d'énergie la personne a-t-elle libérée en augmentant sa vitesse pour sauter du véhicule?
- Une balle de mastic de masse égale à 0.20 kg est jetée horizontalement contre un bloc de bois immobile de masse égale à 1.0 kg. La balle reste collée sur le bloc et les deux

corps se déplacent en commun avec une vitesse de 4.0 m s^{-1} .
 (a) Dessinez l'analogie hydraulique du processus et calculez la vitesse de la balle avant le choc. (b) Refaites le problème pour un observateur se déplaçant à une vitesse de 10.0 m s^{-1} dans le même sens que la balle.

3. Une balle de pistolet de masse égale à 3.0 g se déplaçant à une vitesse de module égal à 400 m s^{-1} traverse une planchette de bois montée sur un glisseur sur un rail à coussin d'air (fig. 8.50). Finalement, elle s'enfonce dans une autre planchette montée sur un second glisseur. Les masses respectives des glisseurs (planchettes incluses) sont de 750 g et 747 g . Ils étaient initialement immobiles et entrent en collision après avoir parcouru respectivement 3.0 m et 1.0 m . (a) Déterminez les modules des vitesses des glisseurs après l'impact de la balle. (b) Déterminez l'énergie dissipée et le taux de dissipation d'énergie lorsque la balle traverse la première planchette.



4. Déterminez le module de la vitesse du centre de masse des trois corps du Problème 3 avant que la balle percute la première planchette, après la traversée de cette planchette et après qu'elle s'est fichée dans la seconde planchette.
5. Des électrons sont accélérés par une différence de potentiel de 240 kV . Déterminez l'énergie et la vitesse d'un électron en utilisant la relation classique pour l'énergie cinétique. Étant donné que la vitesse des électrons est relativement proche de celle de la lumière, déterminez la masse, la quantité de mouvement et la vitesse en accord avec les relations relativistes. La masse de l'électron est de $9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

CHAPITRE 9

EXEMPLES DE LOIS CONSTITUTIVES MÉCANIQUES

L'objectif de ce chapitre est, en premier lieu d'introduire et de préciser la notion de force et de l'appliquer à quelques situations particulières. Nous montrerons que la notion de force apparaît lorsque l'on rapporte un flux de quantité de mouvement à un objet. Une force sert à mesurer l'intensité du flux de quantité de mouvement à travers la surface d'un objet ou son apport ou retrait par rayonnement à l'intérieur de tout le volume d'un corps. On introduit des forces lorsque l'on isole un système du reste du monde avec lequel il échange de la quantité de mouvement. Ensuite, nous introduirons la notion de moment d'une force lié aux flux de moment cinétique qui apparaissent dans des systèmes en rotation. Nous consacrerons les dernières sections à la mécanique des fluides.

9.1 DYNAMIQUE DU MOUVEMENT DE TRANSLATION ET LOIS DE NEWTON

Dans cette section, nous montrons qu'une partie des résultats trouvés et formulés au chapitre 8 énoncent, sous une forme un peu différente, les lois fondamentales de la dynamique de translation formulées par NEWTON dans son ouvrage de 1687, *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (fig. 9.1).

9.1.1 Flux de quantité de mouvement et lois de NEWTON

Durant l'étude de cas de la section 8.2, nous avons découvert trois résultats particuliers que nous avons récapitulés en fin de paragraphe, à la section 8.2.4. Dans le tableau 9.1, nous comparons ces résultats avec l'énoncé des trois lois fondamentales de NEWTON.

Nous avons repris la formulation de la traduction du latin en français d'ÉMILIE MARQUISE DU CHÂTELET qui, incitée et encouragée par VOLTAIRE, donna cette traduction cinquante ans après la parution de l'original en tenant compte des progrès réalisés entre-temps en analyse. Alors que NEWTON utilise essentiellement des concepts géométriques, MADAME DU CHÂTELET utilise l'analyse avec la notation de LEIBNIZ. La comparaison des deux formulations révèle que, lorsque nous parlons de *flux de quantité de mouvement*, NEWTON utilise les termes de *force* ou d'*action*.

Pour établir le lien entre ces deux formulations, nous nous appuyons sur la deuxième loi de NEWTON et la formulation de la dynamique du mouvement de translation, à savoir l'équation de bilan de quantité de mouvement énoncée à la section 8.4.4, en ne prenant en compte que les contributions par conduction et par rayonnement et en laissant de côté les flux convectifs de quantité de mouvement.

Nous montrerons à la section 9.1.2 que la notion de force apparaît lorsque les flux de quantité de mouvement sont rapportés aux éléments d'un système que l'on a isolés les uns des autres, comme le montrent les figures 9.2 et 9.3. Les forces mesurent l'intensité des flux de quantité de mouvement à travers la surface du système ou les apports ou retraits par rayonnement à l'intérieur du volume de ce système.

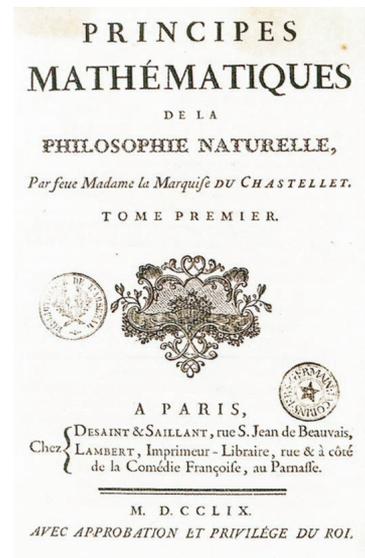
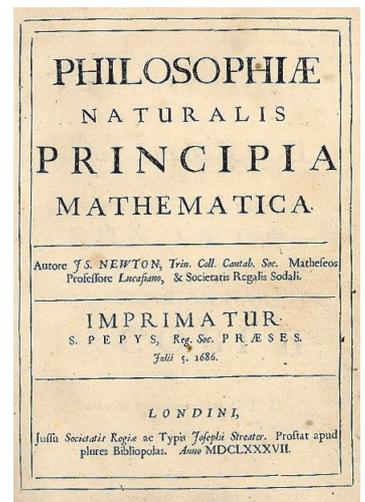


FIGURE 9.1 Couverture de l'édition originale des Principia en 1687 et de la traduction française de la MARQUISE DU CHÂTELET, parue en 1759.

TABEAU 9.1 Comparaison NEWTON - dynamique du mouvement de translation.

Énoncés de la section 8.2	Formulation de NEWTON
S'il n'est soumis à aucune interaction, c'est-à-dire en l'absence de flux de quantité de mouvement, la vitesse d'un objet reste constante (section 8.2.4).	Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.
Le taux de variation de la quantité de mouvement d'un corps est égal à la somme des flux de quantité de mouvement (équation (8.3)).	Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.
Lorsque deux corps entrent en interaction, les quantités de mouvement échangées sont égales et de signes opposés (équation (8.5)).	L'action est toujours égale et opposée à la réaction; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dans des directions contraires.

Le taux de variation de la quantité de mouvement d'un corps est donné par la relation :

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{p, \text{cond}} + \Sigma_p \tag{9.1}$$

où $\mathbf{I}_{p, \text{cond}}$ et Σ_p représentent respectivement la somme des flux de quantité de mouvement par conduction et la somme des apports en mode radiatif.

Puisque nous faisons une distinction entre les flux par conduction ou par rayonnement, nous devons établir la correspondance. À la somme $\mathbf{I}_{p, \text{cond}}$ des flux de quantité de mouvement par conduction, c'est-à-dire par contact entre les corps, correspond la somme des forces dues au contact, représentée par le symbole \mathbf{F} :

$$\mathbf{I}_{p, \text{cond}} = \mathbf{F} \tag{9.2}$$

Ces forces s'exercent à la surface des corps en contact.

Si nous admettons, pour des raisons de simplification, que le seul champ transmettant de la quantité de mouvement par rayonnement est celui de pesanteur omniprésent, le second terme du membre de droite devient :

$$\Sigma_p = m\mathbf{g} \tag{9.3}$$

Notons que ce terme peut être négligé si les autres forces ont une intensité beaucoup plus importante, ce qui est par exemple le cas en présence de charges plongées dans des champs électriques. L'adaptation de l'équation de bilan de quantité de mouvement à la formulation de la deuxième loi de NEWTON donne :

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} \tag{9.4}$$

Si l'on prend en compte le fait que :

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{V}} = m\mathbf{a} \tag{9.5}$$

nous retrouvons la formulation usuelle de cette loi :

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{9.6}$$

qui est la loi fondamentale de la dynamique non relativiste.

Examinons maintenant les deux autres lois. Dans notre vision de la dynamique du mouvement de translation, elles expriment des évidences.

La première loi, connue sous la dénomination de loi d'inertie, est un cas particulier de la deuxième. Elle exprime le fait qu'en l'absence d'interaction, la quantité de mouvement d'un objet ne change pas, ce qui entraîne la constance de sa vitesse. Cette loi avait été énoncée par Galilée quatre-vingts ans avant que NEWTON la reprenne dans son ouvrage. C'est une des découvertes fondamentales qui ont provoqué l'abandon de la physique d'ARISTOTE que l'on appliquait depuis près de deux mille ans. Dans sa vision, le mouvement devait être entretenu par l'application d'une force, et l'absence de force entraînait la cessation du mouvement. Ce qu'il n'avait pas réalisé, c'est que cet apport de quantité de mouvement servait à compenser les pertes dues aux frottements.

Nous ne devons pas chercher à trouver un énoncé équivalent à celui de la troisième loi car, dans notre vision de la dynamique du mouvement, lorsqu'il y a transfert de quantité de mouvement entre deux systèmes, l'intensité du flux entrant dans le second système est égale mais de signe opposé à celle du flux sortant du premier système (ou réciproquement). Mais cette loi est nécessaire dans la vision de NEWTON, parce que les interactions entre des systèmes sont formulées au moyen des forces attribuées à chacun des systèmes considérés isolément. Dans la section 9.1.2, nous allons établir le lien entre la notion de force et celle de flux de quantité de mouvement, ce qui nous permettra de comprendre pourquoi NEWTON devait impérativement énoncer cette troisième loi.

9.1.2 Correspondance entre forces et flux de quantité de mouvement

Rappelons que le choix du référentiel détermine le signe des flux de quantité de mouvement. Ce choix est en général adapté au problème étudié. Nous avons constaté que la quantité de mouvement positive – par rapport au système de référence choisi – qui s'écoule à travers un objet a lieu dans le sens positif si l'objet est soumis à une contrainte en compression, dans le sens négatif s'il est soumis à une contrainte en traction.

Examinons l'exemple concret d'un objet suspendu au moyen d'une corde (fig. 9.2). Nous choisissons un axe vertical orienté vers le bas, séparons le système en ses éléments, l'objet et la corde, et considérons isolément chacun de ces éléments. Comme nous l'avons dit plus haut, le champ de pesanteur de la Terre apporte de la quantité de mouvement en mode radiatif, apport quantifié par le taux de source Σ_p . Nous associons à cette contribution une force dirigée vers le bas, la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, dont le module correspond à celui du taux de source Σ_p . Comme l'objet est immobile, il élimine la quantité de mouvement qu'il reçoit du champ de gravité à travers la corde soumise à une traction, donc à un flux de quantité de mouvement dans le sens négatif. Nous associons à ce flux de quantité de mouvement une force dirigée vers le haut, la force de traction exercée par la corde, que nous désignons par $\mathbf{F}_{\text{traction}}$ et dont le module correspond à l'intensité du flux sortant de l'objet. L'extrémité inférieure de

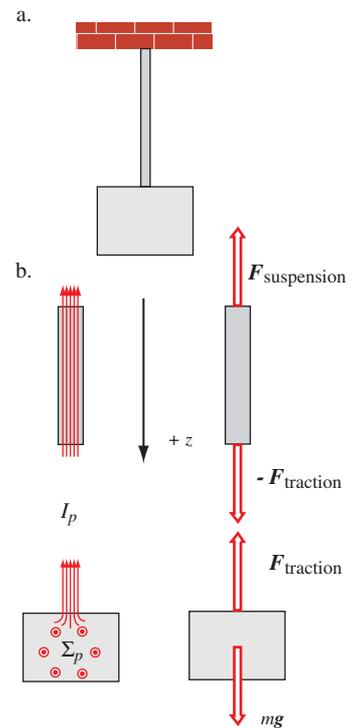


FIGURE 9.2 Illustration du lien entre les flux de quantité de mouvement et les forces: (a) système envisagé; (b) séparation du système en ses éléments et introduction des forces.

la corde est tirée vers le bas par une force dont le module doit être égal à celui de la force s'exerçant sur l'objet, vu qu'elle correspond au flux émergeant de l'objet et entrant dans la corde. Nous désignons cette force par $-F_{\text{traction}}$. Ces deux forces constituent la paire de forces opposées qui apparaissent dans la troisième loi de NEWTON. Comme le flux de quantité de mouvement ne varie pas à l'intérieur de la corde – ce qui est le cas parce que nous avons négligé son propre poids –, nous introduisons une force dirigée vers le haut, de même module que les deux précédentes, que nous appelons $F_{\text{suspension}}$. Il est important de noter que les deux forces qui s'exercent sur la corde ne sont pas des paires d'action et de réaction.

Nous constatons que les forces n'apparaissent qu'à partir du moment où nous isolons un élément d'un système de tous ceux avec lesquels il entre en interaction. L'examen attentif de l'exemple nous permet d'énoncer la règle de correspondance suivante :

À un flux de quantité de mouvement entrant dans un élément d'un système ou à un taux de source positif correspond une force dirigée dans le sens de référence positif; à un flux sortant de cet élément du système ou à un taux de source négatif une force de sens opposé au sens de référence positif.

Le module de la force est égal à l'intensité du flux de quantité de mouvement auquel elle est associée:

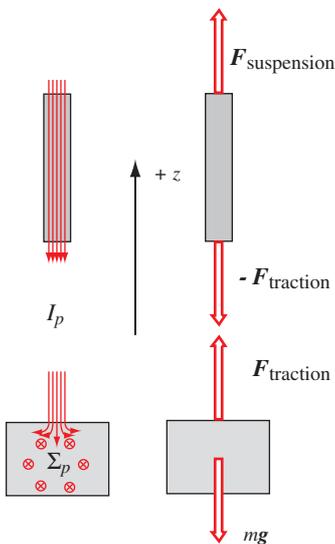
$$F = I_{p, \text{cond}} \tag{9.7}$$


FIGURE 9.3 Illustration de l'effet de l'inversion du sens de référence: les flux et les taux de source de quantité de mouvement sont inversés, mais les sens des forces restent identiques.

Cette règle donne toujours des résultats corrects, quel que soit le sens positif choisi. Si, dans notre exemple, nous inversons le sens de référence (fig. 9.3), les flux de quantité de mouvement sont inversés et le taux de source change de signe: la quantité de mouvement positive – dirigée vers le haut – est amenée dans l'objet par la corde et éliminée – aspirée – par le champ de gravité. En revanche, le sens des flèches qui représentent les forces n'est pas influencé par ce changement de sens de référence positif.

9.1.3 Lien entre les phénomènes inductifs et les forces

Nous avons vu au chapitre 4 que les phénomènes inductifs étaient très souvent responsables de l'apparition d'oscillations du système (oscillations d'un fluide entre deux réservoirs, oscillations électriques en présence d'un condensateur et d'une self, etc.). Quel est l'élément mécanique dont la présence pourra engendrer des oscillations d'un système? C'est, bien évidemment, le ressort.

Loi de HOOKE pour un ressort. Si on étudie le comportement d'un ressort soumis à une contrainte (en traction ou en compression), on constate que, pour autant que l'on reste dans le domaine d'élasticité (domaine dans lequel la déformation est réversible), la force qu'exerce le ressort est proportionnelle à son élongation x par rapport à sa position d'équilibre (fig. 9.4). Ce fait est énoncé en tant que loi.

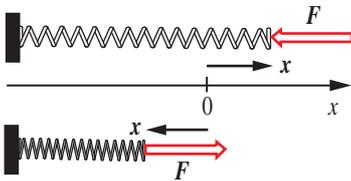


FIGURE 9.4 Lorsque l'on allonge ou comprime un ressort, en restant dans le domaine d'élasticité, la force F exercée par le ressort est proportionnelle à l'élongation x mesurée par rapport à la position d'équilibre.

Pour de petits allongements ou compressions (c'est-à-dire pour autant que l'on reste dans le domaine d'élasticité), la force exercée par un ressort peut être exprimée par:

$$F(x) = -k \cdot x \tag{9.8}$$

La constante positive k est appelée *constante de rigidité* du ressort et se mesure en N m^{-1} ou kg s^{-1} . x représente le vecteur d'élongation mesuré depuis la position d'équilibre du ressort (position correspondant à une déformation nulle). Le signe négatif indique que la force est toujours dirigée vers la position d'équilibre, raison pour laquelle on l'appelle *force de rappel*.

Quel lien y a-t-il entre l'énoncé ci-dessus et ce que nous avons écrit au sujet des phénomènes inductifs, à savoir :

$$\Delta\phi_{x,L} = -L_x \cdot \dot{I}_x \tag{9.9}$$

Appliquée à la quantité de mouvement, la relation ci-dessus devient :

$$\Delta\mathbf{V} = -L_p \cdot \dot{I}_p$$

Si, dans la loi de HOOKE, nous identifions la force au flux de quantité de mouvement et dérivons cette relation par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{I}_p = -k \frac{d(\Delta x)}{dt} = -k \cdot \Delta\mathbf{V} = -\frac{1}{L_p} \cdot \Delta\mathbf{V}$$

Les deux énoncés sont équivalents si nous interprétons la constante de rigidité d'un ressort comme l'inverse de son inductance.

$$L_p = \frac{1}{k} \tag{9.10}$$

Loi de HOOKE locale. Les matériaux solides possèdent tous une certaine élasticité et leur comportement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte peut être décrit, en première approximation, par la version locale de la loi de Hooke. Pour l'obtenir, nous envisageons par exemple une barre cylindrique de section A soumise à une traction de module F (fig. 9.5). Si l'on reste dans les limites du domaine d'élasticité, l'allongement dx d'un élément de longueur Δx est directement proportionnel à la longueur originelle, à l'intensité de la force de traction, et inversement proportionnel à la section :

$$dx \propto \frac{\Delta x \cdot F}{A}$$

Nous introduisons l'allongement relatif ε :

$$\varepsilon = \frac{dx}{\Delta x} \propto \frac{F}{A} = \frac{I_p}{A} = j_p = \sigma$$

où σ représente la tension normale, en traction ou en compression, introduite au moyen de l'équation (8.10) à la section 8.4.1. On tient compte de la particularité de chaque matériau en introduisant la *constante d'élasticité* E ou *module de Young*.

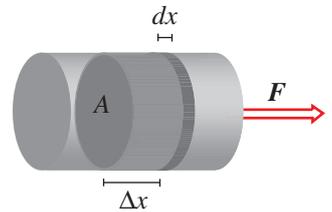


FIGURE 9.5 Loi de HOOKE locale: sous l'effet d'une traction, un élément de longueur Δx d'un barreau cylindrique est allongé d'une longueur dx .

Dans un matériau élastique soumis à des contraintes en traction ou en compression, l'allongement relatif ε est proportionnel à la tension σ :

$$\sigma = E\varepsilon \tag{9.11}$$

La tension et le module de Young se mesurent en pascal.

Lorsque le matériau est soumis à un cisaillement, on désigne par τ la contrainte de cisaillement. La déformation est décrite par un angle de cisaillement γ et le matériau est caractérisé par une grandeur appelée module de cisaillement G . Dans ce cas, le modèle devient :

$$\tau = G\gamma \quad (9.12)$$

1. Qu'est-ce qui détermine le sens des flux de quantité de mouvement?
2. Quel est le lien entre les contraintes et le sens des flux de quantité de mouvement?
3. Quel est le lien entre les flux de quantité de mouvement et les forces?
4. Comment détermine-t-on l'orientation des forces à partir des flux de quantité de mouvement?
5. Est-ce que, dans la figure 9.2, les deux forces qui agissent sur le corps suspendu correspondent à la paire action-réaction au sens de la troisième loi de NEWTON?
6. Quel est l'élément mécanique qui a des propriétés inductives?

Q

1. Le sens des flux de quantité de mouvement est déterminé par les contraintes engendrées par ces flux et par le choix du système de référence.
2. Lorsqu'un objet est soumis à une contrainte en compression dans une certaine direction, la composante de la quantité de mouvement s'écoule dans le sens positif déterminé par l'axe correspondant du repère, dans le sens négatif lorsqu'il est soumis à une traction.
3. Une force représente l'intensité du flux de quantité de mouvement à travers la surface d'un corps.
4. À une composante donnée d'un flux entrant de quantité de mouvement correspond une force orientée dans le sens positif par rapport à l'axe correspondant du repère. La flèche associée à un flux sortant est orientée dans le sens négatif.
5. Non, les paires action-réaction correspondant à des flux de quantité de mouvement entre deux corps. Chacune des deux forces est associée à l'un des deux corps en interaction, par exemple l'objet suspendu et la corde à laquelle il est suspendu.
6. Le ressort est l'élément mécanique à caractère inductif. Son inductance est égale à l'inverse de sa constante de rigidité.

R

9.2 LIEN ENTRE FORCES, ÉNERGIE ET PUISSANCE DU PROCESSUS

Une force est équivalente à un flux de quantité de mouvement entrant ou émergeant d'un système, elle doit donc être également à l'origine d'un flux d'énergie.

9.2.1 Puissance d'un processus entraîné par l'action d'une force

Rappelons tout d'abord que la variation de l'énergie est énoncée au moyen d'une équation de bilan :

$$\dot{E} = \sum_i I_{E,i} \quad (9.13)$$

où les $I_{E,i}$ représentent les intensités des flux d'énergie entrant dans le système ou en sortant en compagnie des flux des grandeurs extensives propres aux phénomènes impliqués. Un flux d'énergie est égal au produit du flux de la grandeur extensive X et de la valeur du potentiel associé :

$$I_{E,X} = \varphi_X \cdot I_X \quad (9.14)$$

L'intensité d'un flux d'énergie transportée par le flux de quantité de mouvement I_p en un point du système se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} sera donc égale à :

$$I_{E,p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_p = v_x I_{px} + v_y I_{py} + v_z I_{pz} \quad (9.15)$$

Notons que cette intensité du flux d'énergie dépend du choix du repère, la valeur de la vitesse étant déterminée par ce choix. En revanche, en tant que produit scalaire, cette grandeur n'est pas influencée par l'orientation des axes du repère.

Lorsque le flux de quantité de mouvement entre dans ou émerge d'un corps, on le représente par une force. Dans ce cas, on remplace les composantes du flux de quantité de mouvement par les composantes de la force, et la relation (9.15) devient :

$$\mathcal{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z \quad (9.16)$$

notion que l'on appelle la puissance de la force \mathbf{F} .

La puissance du processus lié au flux de quantité de mouvement entre deux niveaux de la vitesse \mathbf{v} , toujours associé à un transbordement d'énergie, est définie sans ambiguïté par :

$$\mathcal{P}_{\text{proc}} = -\Delta v \cdot |\mathbf{I}_p| \quad (9.17)$$

La puissance du processus sera positive si le processus libère de l'énergie (c'est le cas si le processus est spontané, c'est-à-dire lorsque la vitesse décroît), négative si le processus lie (absorbe) de l'énergie (ce qui est le cas lorsque le processus est contraint et entraîne une augmentation de la vitesse).

Peut-on affirmer que la puissance d'une force et la puissance du processus sont identiques ? La réponse doit être différenciée.

- C'est le cas si la quantité de mouvement est échangée avec le système de référence (en général la Terre). À titre d'exemple, nous pouvons dire que la puissance de la force de frottement qui sert à immobiliser un objet en mouvement est égale à la puissance du processus de freinage.
- Ce n'est pas le cas si la quantité de mouvement est échangée entre deux systèmes en mouvement. Illustrons ce cas par un exemple.

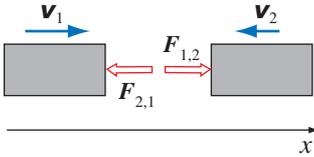


FIGURE 9.6 Instantané de la collision entre deux glisseurs. Les deux forces forment une paire d'action-réaction au sens de la troisième loi de NEWTON.

EXEMPLE 9.1. Puissance des forces agissant lors d'une collision.

Un glisseur sur rail à coussin d'air entre en collision avec un second glisseur qui se déplace en sens opposé (fig. 9.6). Au moment de la collision, le premier se déplace dans le sens positif avec une vitesse de module égal à 5 m s^{-1} , le second en sens opposé à une vitesse de module égal à 3 m s^{-1} . Le flux de quantité de mouvement du glisseur rapide vers le glisseur lent a, à cet instant, une intensité de 25 N . Quel est la puissance libérée dans la zone d'impact lors de cette collision?

SOLUTION: Désignons par $F_{1,2}$ la force attribuée au flux de quantité de mouvement entrant dans le second glisseur et par $F_{2,1}$ celle qui correspond au flux émergeant du premier glisseur (fig. 9.6). Ces deux forces sont une paire d'action-réaction au sens de la troisième loi de NEWTON. Les puissances respectives de ces deux forces sont:

$$\mathcal{P}(F_{2,1}) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{F}_{2,1} = 5 \text{ m s}^{-1} \cdot (-25 \text{ N}) = -125 \text{ W}$$

$$\mathcal{P}(F_{1,2}) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{F}_{1,2} = -3 \text{ m s}^{-1} \cdot 25 \text{ N} = -75 \text{ W}$$

Les puissances sont négatives, car les vecteurs force et vitesse sont de sens opposé dans chaque cas.

Au moyen du bilan d'énergie, on peut égaler la puissance de chacune des forces avec la variation de l'énergie cinétique de chacun des glisseurs (à l'instant considéré, l'énergie cinétique du premier diminue au taux de $125 \text{ W} = 125 \text{ J s}^{-1}$, celle du second au taux de 75 W). Pour le premier glisseur, l'énergie s'écoule dans le même sens que la quantité de mouvement vers la zone d'impact, alors que pour le second glisseur, elle s'écoule vers la zone d'impact dans le sens opposé à celui de la quantité de mouvement. Les flux d'énergie associés (puissances des deux forces considérées) et les taux de variation de l'énergie cinétique correspondants sont, dans cet exemple, totalement différents de la puissance du processus libérée à cet instant dans la zone d'impact, à savoir

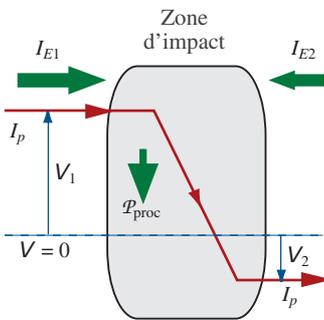


FIGURE 9.7 Diagramme de processus de la collision des deux glisseurs. L'énergie libérée par le processus peut être accumulée dans un champ lors d'une collision parfaitement élastique ou, lors d'un choc totalement inélastique, être en partie utilisée pour la déformation, le reste étant dissipé par la production d'entropie.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p &= -\Delta v_x \cdot |I_{p,x}| = -\Delta v_x \cdot |F_x| = -(v_{2,x} - v_{1,x}) \cdot |F_x| \\ &= -(-3 \text{ m s}^{-1} - 5 \text{ m s}^{-1}) \cdot 25 \text{ N} = 200 \text{ W} \end{aligned}$$

Le diagramme de processus de la figure 9.7 met en évidence les flux d'énergie et la puissance du processus. L'énergie libérée pourrait, dans le cas d'un choc parfaitement élastique, être temporairement accumulée, par exemple dans un ressort ou dans un champ magnétique. Dans le cas d'un choc parfaitement inélastique, une partie serait utilisée pour la déformation et le reste dissipé par la production d'entropie. ■

9.2.2 Lien avec la notion de travail d'une force

Il est usuel d'appeler travail W produit par la force F la variation de l'énergie d'un objet engendrée par l'action de la force F . La variation de l'énergie se calcule à partir de la puissance de la force, vu que la puissance représente le flux d'énergie. Nous pouvons donc écrire :

$$W(F) = \int \mathcal{P}(F) \cdot dt = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \cdot dt \tag{9.18}$$

Cette définition est tout à fait générale et permet de calculer le travail total, pour autant que l'on connaisse l'évolution des deux facteurs vitesse et force au cours du temps. Le travail, qui mesure l'énergie échangée lors du processus, est positif lorsque l'énergie pénètre dans le système, négatif lorsqu'elle en émerge.

Pour le cas particulier d'une force et d'une vitesse constantes, nous obtenons :

$$W(\mathbf{F}) = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \cdot dt = \mathbf{F} \cdot \int \mathbf{v} \cdot dt = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

où $\Delta \mathbf{r}$ représente le vecteur déplacement. Nous retrouvons donc la définition usuelle du travail produit par une force constante \mathbf{F} , à savoir qu'il correspond au produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement.

9.2.3 Accumulation d'énergie dans les éléments capacitifs et inductifs

Rappelons que la masse représente la capacité d'un objet à accumuler de la quantité de mouvement et que l'énergie accumulée par un objet en mouvement est son énergie cinétique :

$$E_C = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Au chapitre 4, nous avons découvert qu'un élément inductif était susceptible d'accumuler de l'énergie et nous avons déduit que cette énergie valait :

$$E_L = \frac{1}{2} L_x \cdot I_x^2$$

Pour un ressort, l'inductance est égale à l'inverse de la constante de rigidité, et le flux de quantité de mouvement est identifiable à la force de rappel $\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$. L'introduction de ces égalités dans la relation permet de montrer qu'un ressort comprimé ou étendu de \mathbf{x} par rapport à sa position d'équilibre accumule une énergie égale à :

$$E_L = \frac{1}{2} L_p I_p^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{k} (kx)^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

1. Que représente la puissance de la force \mathbf{F} ?
2. Que représente la puissance du processus ?
3. Qu'entend-on par le «travail d'une force» ?
4. Quelles sont les possibilités d'accumulation d'énergie dans des systèmes soumis à des processus mécaniques ?
5. Qu'entend-on par énergie potentielle ?



1. La puissance associée à l'action d'une force \mathbf{F} correspond au flux d'énergie engendré par son action.
2. Alors que la puissance associée à l'action d'une force dépend du choix du repère, la puissance du processus n'en dépend pas : elle est positive si le processus est spontanée et libère de l'énergie, négative si le processus est contraint et lie de l'énergie.
3. Ce qu'il est usuel d'appeler le travail d'une force correspond à la variation de l'énergie d'un système engendrée par l'action de cette force.



4. L'énergie peut s'accumuler sous forme capacitive, il s'agit alors de l'énergie cinétique proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse, et sous forme inductive, par exemple dans un ressort tendu ou comprimé, l'énergie qui est proportionnelle au carré de l'élongation et à la caractéristique élastique.
5. Ce qu'il est usuel d'appeler l'énergie potentielle est celle qui est associée à l'interaction d'un système avec un champ, donc sous forme de rayonnement. Cette énergie n'est pas accumulée dans l'objet qui est en interaction avec le champ, mais dans le champ. Au sens large du terme, l'énergie potentielle est l'énergie accumulée dans un système, par exemple l'énergie accumulée dans un ressort comprimé ou étendu. Cette énergie est aussi accumulée dans un champ, par exemple le champ électrique de l'interaction entre les atomes du ressort.

9.3 GRANDEURS CINÉMATIQUES

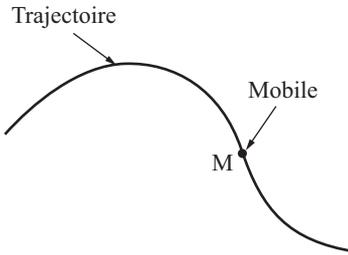


FIGURE 9.8 L'ensemble des points atteints successivement par un objet en mouvement, ou mobile M, est sa trajectoire.

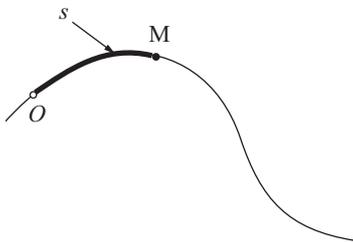


FIGURE 9.9 Repérage au moyen de l'abscisse curviligne s .

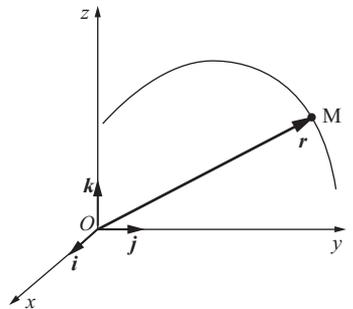


FIGURE 9.10 Repérage au moyen d'un vecteur position r dans un repère orthonormé $Oxyz$.

La *cinématique* est la partie de la mécanique qui traite de la description géométrique du mouvement, sans se préoccuper des causes de ce mouvement. La cinématique crée le lien entre l'espace et le temps. La *dynamique* relie les causes et les effets.

9.3.1 Système de référence et trajectoire

Imaginons une tasse de café posée sur une tablette dans un compartiment d'un train. La tasse est-elle en mouvement ou immobile? Du point de vue du voyageur qui va boire ce café, la tasse est immobile. En revanche, pour une personne qui regarde passer le train sur un quai de gare, la tasse de café est en mouvement.

On doit conclure de cette observation que *les notions physiques de mouvement et d'immobilité sont des notions relatives*. Elles n'ont de sens que si l'on définit précisément par rapport à quel système de référence, ou référentiel, on veut décrire le mouvement.

On appelle *trajectoire* l'ensemble des points de l'espace atteints successivement par un objet en mouvement ou *mobile* que nous désignerons par M (fig. 9.8). Il existe deux manières de décrire géométriquement le mouvement d'un mobile.

Si la trajectoire est connue, on fixe sur la trajectoire une origine O et un sens arbitraire. Il est usuel de désigner par s (spatium) la longueur d'arc de courbe comptée à partir de l'origine O (fig. 9.9). Cette longueur est appelée *abscisse curviligne* ou *élongation* du mobile. Le mouvement est alors décrit par une *équation horaire* (ou brièvement horaire) qui donne l'élongation du mobile en fonction du temps :

$$s = s(t) \tag{9.19}$$

Lorsque la trajectoire n'est pas connue, ce qui est majoritairement le cas (on cherche à déterminer la trajectoire à partir des causes du mouvement), on fixe la position du mobile dans un *repère*, auquel on associe un système de coordonnées, à partir d'une origine arbitraire O au moyen d'un *vecteur position* r qui varie en fonction du temps (fig. 9.10). L'équation horaire prend la forme :

$$r = r(t) \tag{9.20}$$

Si, par exemple, on choisit un repère orthonormé, l'horaire sera :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Notons que cette seconde méthode peut également être utilisée lorsque la trajectoire est connue.

9.3.2 Vitesse et accélération

Lorsque le mobile se déplace sur sa trajectoire, le vecteur position varie à la fois en grandeur et en direction. Si l'on considère deux positions successives, à deux instants séparés par un intervalle Δt , le vecteur qui relie ces deux positions est le *vecteur déplacement* $\Delta \mathbf{r}$ égal à la différence des vecteurs positions respectifs (fig. 9.11):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (9.21)$$

Notons que le module (ou la norme) du vecteur déplacement n'est pas égal à la variation de l'abscisse curviligne:

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s \text{ généralement}$$

Ces deux grandeurs ne sont égales que si la trajectoire est rectiligne.

Vecteur vitesse. Le *vecteur \mathbf{v} de la vitesse instantanée* indique à la fois le taux de variation du vecteur position et la direction dans laquelle a lieu cette variation. On l'obtient en déterminant la limite vers laquelle tend le quotient du vecteur déplacement $\Delta \mathbf{r}$ et de l'intervalle Δt considéré lorsque cette intervalle tend vers zéro:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (9.22)$$

En examinant la figure 9.11, on se rend compte que lors du passage à la limite, la direction du vecteur déplacement $\Delta \mathbf{r}$ se rapproche de celle de la tangente à la trajectoire. Nous en concluons que le vecteur de la vitesse instantanée est tangent à la trajectoire (fig. 9.12).

Vitesse scalaire. Dans la vie quotidienne, lorsque l'on parle de vitesse, on pense généralement au quotient de la distance parcourue et de la durée qui a été nécessaire pour parcourir cette distance, qui n'est rien d'autre que la différence des abscisses curvilignes finale et initiale. Il s'agit alors d'une «vitesse» moyenne. Pour obtenir la valeur instantanée de cette vitesse particulière, que l'on appelle *vitesse scalaire*, il suffit d'effectuer le passage à la limite, comme pour le cas du vecteur vitesse. La *vitesse scalaire*, dont nous allons montrer qu'elle est le module du vecteur vitesse, est égale à la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps:

$$|\mathbf{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (9.23)$$

La figure 9.11 montre que, lorsque Δt tend vers zéro, le module du vecteur déplacement $\Delta \mathbf{r}$ et l'accroissement de l'abscisse curviligne Δs tendent à se rapprocher, ce qui nous permet de conclure que:

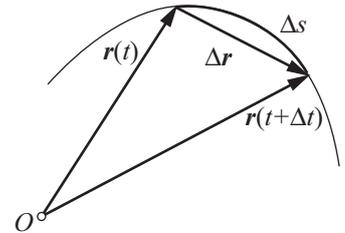


FIGURE 9.11 Vecteur déplacement $\Delta \mathbf{r}$ et accroissement correspondant de l'abscisse curviligne Δs .

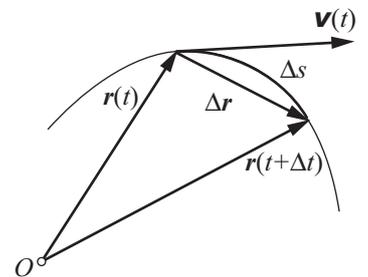


FIGURE 9.12 Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1 \quad (9.24)$$

Sachant que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, il est possible de donner une signification géométrique au vecteur de module 1 qui apparaît dans l'équation (9.24). Il s'agit d'un vecteur unitaire tangent à la trajectoire que nous désignons par \mathbf{u}_{tang} :

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}_{\text{tang}}$$

Grâce à ce vecteur unitaire, nous pouvons écrire le vecteur vitesse en tant que produit de la vitesse scalaire, qui n'est rien d'autre que le module du vecteur vitesse, et de ce vecteur unitaire (fig. 9.13):

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_{\text{tang}} \quad (9.25)$$

Vecteur accélération. Le vecteur vitesse peut varier de plusieurs manières: son module peut varier, sa direction peut changer, le cas le plus courant étant la combinaison de ces deux variations. Le taux de variation du vecteur vitesse, appelé *vecteur accélération*, est défini en tant que limite du taux de variation du vecteur vitesse lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers zéro (fig. 9.14):

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (9.26)$$

Il est usuel de décomposer le vecteur accélération en deux composantes, l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire. Ces deux composantes apparaissent naturellement si nous appliquons la règle de dérivation du produit à l'expression (9.25) du vecteur vitesse:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(v \mathbf{u}_{\text{tang}}) = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_{\text{tang}} + v \frac{d\mathbf{u}_{\text{tang}}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_{\text{tang}} + v \frac{d\mathbf{u}_{\text{tang}}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_{\text{tang}} + v^2 \frac{d\mathbf{u}_{\text{tang}}}{ds} \end{aligned}$$

La variation $\Delta \mathbf{u}_{\text{tang}}$ du vecteur unitaire doit être perpendiculaire à ce dernier, car si ce n'était pas le cas, son module varierait. Cela signifie que le deuxième terme du vecteur accélération est normal à la trajectoire, raison pour laquelle on l'appelle *accélération normale*. Nous introduisons un second vecteur unitaire lié à cette accélération, le vecteur \mathbf{u}_{norm} qui, avec le vecteur \mathbf{u}_{tang} détermine un plan appelé plan osculateur. Dans ce plan, nous considérons ces deux vecteurs unitaires à deux instants successifs (fig. 9.15). La variation du vecteur \mathbf{u}_{tang} est proportionnelle à celle de l'angle $\Delta \varphi$. Comme il s'agit d'un vecteur unitaire, nous pouvons écrire:

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{tang}} = \Delta \varphi \cdot \mathbf{u}_{\text{norm}}$$

D'autre part, nous voyons dans la figure 9.15 que $\Delta s = \rho \Delta \varphi$, où ρ est le rayon de courbure du cercle osculateur (le cercle qui approxime la trajectoire sur le segment considéré), ce qui entraîne:

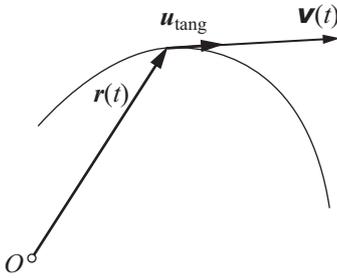


FIGURE 9.13 Expression du vecteur vitesse en tant que produit de la vitesse scalaire et du vecteur unitaire \mathbf{u}_{tang} .

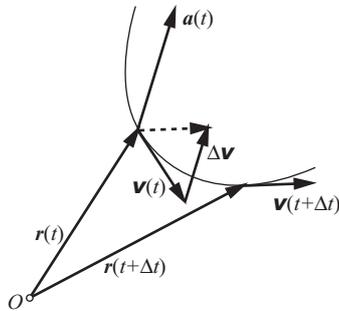


FIGURE 9.14 Le vecteur accélération exprime le taux de variation du vecteur vitesse.

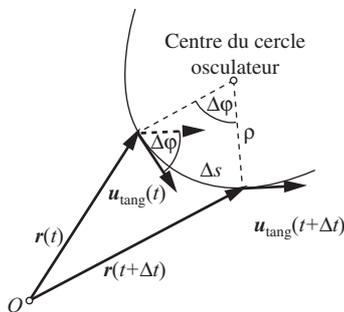


FIGURE 9.15 La variation du vecteur \mathbf{u}_{tang} peut être évaluée dans le plan osculateur.

$$\frac{\Delta \mathbf{u}_{\text{tang}}}{\Delta s} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \mathbf{u}_{\text{norm}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\text{norm}}$$

Après le passage à la limite, nous obtenons :

$$\frac{d\mathbf{u}_{\text{tang}}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_{\text{norm}}$$

Le vecteur accélération est donc donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dV}{dt} \mathbf{u}_{\text{tang}} + \frac{V^2}{\rho} \mathbf{u}_{\text{norm}} \\ &= a_{\text{tang}} \mathbf{u}_{\text{tang}} + a_{\text{norm}} \mathbf{u}_{\text{norm}} \end{aligned} \tag{9.27}$$

Cette relation est indépendante du repère choisi et de la trajectoire envisagée ; elle révèle que, sur une trajectoire incurvée, un mobile est soumis à une accélération normale dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

9.3.3 Mouvement circulaire et coordonnées polaires

Lorsqu'un mobile se déplace sur une trajectoire circulaire, la manière la plus adéquate pour décrire son mouvement est d'utiliser des coordonnées polaires r et φ (fig. 9.16). Avant de considérer le cas particulier du mouvement circulaire, nous allons traiter le cas général d'un mouvement plan décrit au moyen de coordonnées polaires.

Nous repérons la position du mobile au moyen d'un vecteur position \mathbf{r} que nous décomposons dans un repère orthonormé :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous introduisons deux vecteurs unitaires liés aux coordonnées polaires (fig. 9.17), à savoir :

$$\mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons exprimer les grandeurs cinématiques au moyen de ces deux vecteurs unitaires. Le vecteur position est naturellement :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = r \mathbf{u}_r$$

Le vecteur vitesse devient :

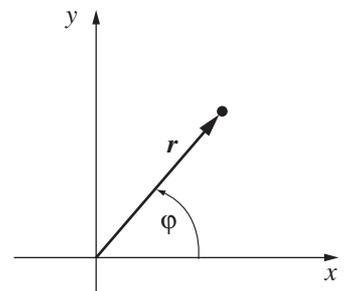


FIGURE 9.16 Coordonnées polaires r et φ et leur relation avec des coordonnées cartésiennes.

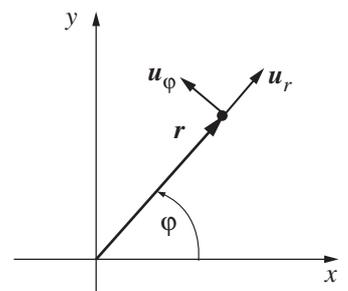


FIGURE 9.17 Vecteurs unitaires liés aux coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dr}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + r \frac{d\varphi}{dt} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_\varphi = v_r \mathbf{u}_r + v_\varphi \mathbf{u}_\varphi \end{aligned} \quad (9.28)$$

alors que le vecteur accélération est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d^2r}{dt^2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &\quad + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{u}_\varphi = a_r \mathbf{u}_r + a_\varphi \mathbf{u}_\varphi \end{aligned} \quad (9.29)$$

Trajectoire circulaire. Dans ce cas, $r = R = \text{const.}$ D'autre part, on introduit un symbole particulier pour le taux de variation de l'angle φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

où ω est appelé *vitesse angulaire*. Si la vitesse angulaire n'est pas constante, il est nécessaire d'introduire une *accélération angulaire* qu'il est usuel de désigner par α :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

Vu que le rayon de la trajectoire est constant, la composante radiale de la vitesse est nulle alors que sa composante tangentielle est égale à :

$$v_{\text{tang}} = v_\varphi = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Cette vitesse n'est rien d'autre que la vitesse scalaire du mobile sur sa trajectoire circulaire (fig. 9.18).

La composante radiale de l'accélération est :

$$a_{\text{rad}} = -R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R} \quad (9.30)$$

Cette accélération est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire, raison pour laquelle on l'appelle *accélération centripète*. Cette accélération correspond à l'accélération normale de l'équation (9.27).

Au cas où la vitesse angulaire n'est pas constante (fig. 9.19), la composante tangentielle de l'accélération vaut :

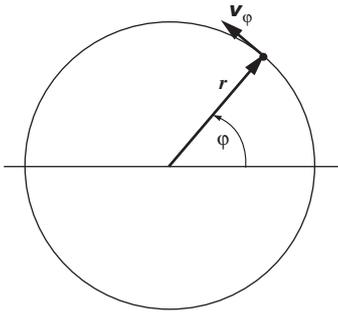


FIGURE 9.18 Dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

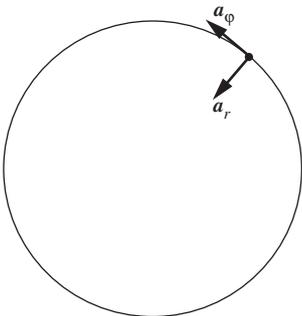


FIGURE 9.19 Le vecteur accélération a toujours une composante radiale. Une composante tangentielle n'apparaît que si la vitesse angulaire n'est pas constante.

$$a_{\text{tang}} = a_{\varphi} = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad (9.31)$$

Autant la vitesse angulaire ω que l'accélération angulaire α sont des vecteurs qui ont été définis au chapitre 7 par les équations (7.14) et (7.16).

9.4 FORCES DE CONTACT

Lorsque deux systèmes sont en contact, ils peuvent échanger de la quantité de mouvement par conduction. Les contraintes qui apparaissent permettent de déterminer le sens des flux de quantité de mouvement et, par conséquent, le sens des forces qui se manifestent.

Dans ce qui va suivre, nous étudierons le comportement dynamique d'objets étendus. Comme nous limiterons notre étude à des situations où ils n'effectuent que des mouvements de translation, sans rotation, nous pourrons faire abstraction de leur extension spatiale. Nous montrerons à la section 9.5 que le théorème du centre de masse permet de traiter des objets uniquement en translation comme des points matériels.

9.4.1 Objet sur un plan horizontal

Au chapitre 8, nous avons établi que, si le sens positif va de haut en bas, le champ gravitationnel transfère de la quantité de mouvement en mode radiatif au taux de source Σ_p et que l'objet évacue cette quantité de mouvement vers la Terre par conduction au moyen d'un flux positif I_p (fig. 9.20a), car la conduction se fait à travers un milieu soumis à une contrainte de compression.

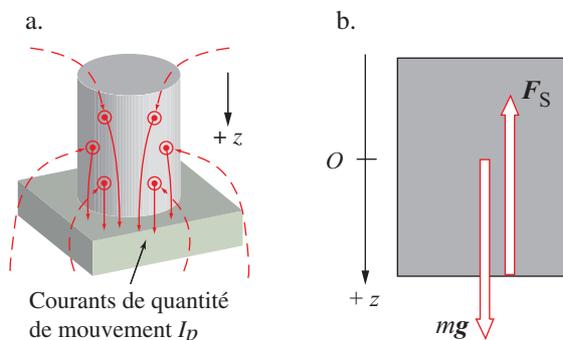


FIGURE 9.20 Objet sur un plan horizontal: (a) la quantité de mouvement apportée par le champ gravitationnel (source à l'intérieur du corps) s'écoule à travers sa base. Les courants s'écoulent à travers le matériel (conduction) et le corps est soumis à une contrainte en compression; (b) représentation de flux et de taux de source de quantité de mouvement au moyen de deux forces.

Au taux de source du champ de pesanteur correspond une force que nous symbolisons par un vecteur qui est appliqué au centre de masse de l'objet. Au flux de quantité de mouvement vers la Terre correspond une force dirigée vers le haut qu'il est usuel d'appeler force de soutien F_S . Les deux flux (les deux forces) se compensent, s'équilibrent. Nous pouvons donc énoncer un principe:

Un objet est en équilibre lorsque la somme vectorielle de tous les flux et de tous les taux de source de quantité de mouvement (de toutes les forces qui agissent sur l'objet) est nulle:

$$\dot{p} = \Sigma_p + I_p = mg + F_S = \mathbf{0} \quad (9.32)$$

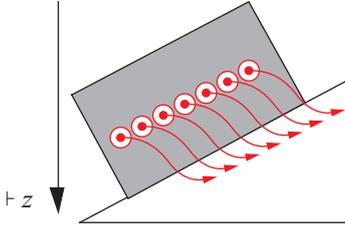


FIGURE 9.21 Plan de situation d'un objet posé sur un plan incliné. La quantité de mouvement apportée par le champ de pesanteur doit s'écouler latéralement à travers la base, ce qui provoque l'apparition de contraintes de cisaillement.

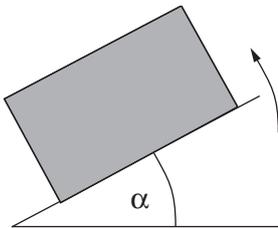


FIGURE 9.22 Expérience destinée à révéler la différence entre l'adhérence et le frottement de glissement. L'objet se met à glisser lorsque l'angle d'inclinaison devient trop important.

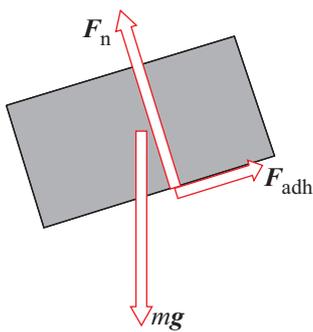


FIGURE 9.24 Dans le cas statique, la force de soutien est décomposée en une composante normale et une composante tangentielle qui est la force d'adhérence.

Usuellement, on ne travaille pas directement avec les vecteurs, mais avec leurs composantes que l'on obtient en projetant les vecteurs sur les axes d'un repère. Ici, seul un axe vertical est nécessaire; si nous l'orientons de haut en bas et l'appelons Oz (fig. 9.20b), l'équation vectorielle ci-dessus devient une équation sur les composantes :

$$\dot{p}_z = mg - F_S = 0 \tag{9.33}$$

On en conclut que la quantité de mouvement verticale est constante. Comme elle était nulle à l'instant $t = 0$ s, elle le reste.

9.4.2 Objet sur un plan incliné

La situation est la même que dans l'exemple précédent, à la différence près qu'une partie de la quantité de mouvement qui s'écoule de l'objet vers la Terre le fait latéralement, ce qui entraîne l'apparition de contraintes de cisaillement (fig. 9.21). C'est la raison pour laquelle il est assez usuel de décomposer la force de soutien F_S en deux composantes (ce ne sont pas des projections), l'une perpendiculaire au plan incliné appelée *force normale* F_n , l'autre parallèle au plan incliné, F_{par} (fig. 9.23).

La signification de cette composante parallèle dépend de la situation envisagée. Pour la découvrir, on peut effectuer une expérience qui consiste à poser un objet sur un support (par exemple une planche), dont on augmente progressivement l'inclinaison par rapport à l'horizontale (fig. 9.22). On observe que l'objet reste immobile tant que l'inclinaison est faible et qu'il se met à glisser si l'angle d'inclinaison devient supérieur à une certaine limite.

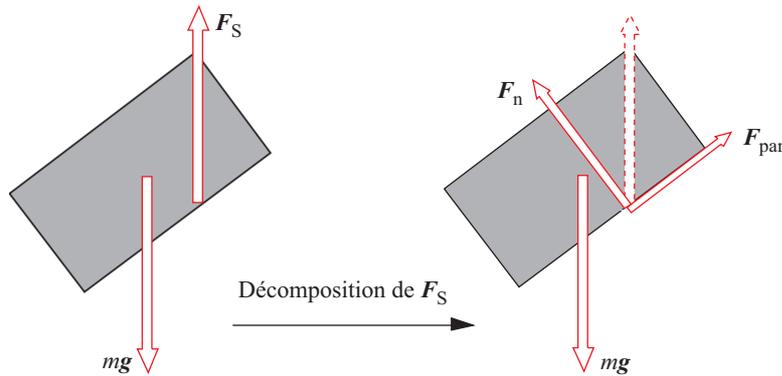


FIGURE 9.23 Décomposition de la force de soutien exercée sur l'objet par le plan incliné en une force normale et une force parallèle au plan incliné.

Interprétation. Si l'objet reste immobile sur le plan incliné, la composante parallèle au plan incliné doit être interprétée comme une *force d'adhérence* F_{adh} (fig. 9.24). L'expérience permet de constater que cette force s'adapte à la situation: lorsque le plan est horizontal, elle est nulle; si l'on incline le plan de plus en plus, elle croît progressivement jusqu'à une valeur maximale de l'angle au-delà de laquelle l'objet se met à glisser. Nous pouvons donc énoncer que le module de la force d'adhérence évolue entre les deux limites suivantes :

$$0 \leq F_{adh} \leq F_{adh, max} = \mu_{adh} F_n \tag{9.34}$$

La dernière égalité exprime le fait que la force d'adhérence maximale est proportionnelle à la force normale (si on presse sur l'objet, on pourra augmenter l'angle à partir

duquel il glisse). Le *coefficient d'adhérence* μ_{adh} tient compte de la texture des surfaces en contact. On trouve une liste de valeurs dans les tables, où il est appelé *coefficient de frottement statique* et est généralement désigné par μ_0 .

Lorsque l'objet glisse, la composante parallèle au plan doit être interprétée comme une force de frottement sec F_{fr} (fig. 9.25).

Pour découvrir les propriétés de cette interaction, nous mesurons, au moyen d'un dynamomètre la force nécessaire pour entretenir le mouvement à vitesse constante d'un objet qui glisse sur un plan horizontal en variant la grandeur des surfaces en contact, la force normale, la vitesse et la nature des surfaces en contact. Cette expérience permet de montrer que, en première approximation, la force de frottement sec ne dépend que de la pression que l'objet exerce sur son support, donc de la force normale, et de la texture des matériaux en contact; elle ne dépend ni de l'aire des surfaces en contact, ni de la vitesse relative de l'objet et du support.

$$F_{fr} = \mu \cdot F_n \tag{9.35}$$

Le coefficient μ est le *coefficient de frottement sec* (ou *coefficient de frottement dynamique*). Les premières recherches sur les propriétés des frottements (tribologie), dont le modèle ci-dessus est une version simplifiée, furent réalisées vers 1780 par Charles Augustin COULOMB, que nous retrouverons dans les processus liés à l'interaction entre charges électriques.

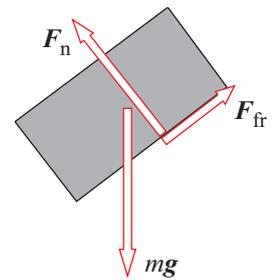


FIGURE 9.25 Dans le cas dynamique, la force parallèle au plan incliné est la force de frottement de glissement. Elle ne suffit plus à retenir l'objet.

Lorsqu'un objet est posé sur un plan incliné, la force de soutien F_S est décomposée en deux forces:

une force normale F_n , exercée par le plan sur lequel repose l'objet, perpendiculaire à la surface de contact (correspond à la composante perpendiculaire du flux de quantité de mouvement);

une force parallèle au plan incliné qui est:

dans le cas dynamique:

la force de frottement dynamique ou frottement de glissement F_{fr} qui, en première approximation, peut être exprimée par:

$$F_{fr} = \mu \cdot F_n \tag{9.36}$$

dans le cas statique:

la force d'adhérence F_{adh} , ou force de frottement statique, qui est une force variable:

$$0 \leq F_{adh} \leq F_{adh, max} = \mu_{adh} F_n \tag{9.37}$$

Lorsque le plan est horizontal, la décomposition est la même.

EXEMPLE 9.2. Mouvement sur un plan horizontal.

Une plaque de masse égale à 50 kg et de 1.0 m de longueur est posée, centrée, sur un bloc immobile de masse double et de même longueur. On pousse la plaque avec une force de module égal à 350 N, dirigée vers le bas sous un angle de 15° par rapport à l'horizontale (fig. 9.26). Le coefficient de frottement de glissement entre la plaque et le bloc est de 0.50, entre le bloc et le sol de 0.16. (a) À quelle distance du point de départ la plaque supérieure bascule-t-elle du bloc? (b) Déterminer comment l'énergie se répartit dans le système. (c) Représenter les flux de quantité de mouvement et d'énergie au moyen de diagrammes de processus.

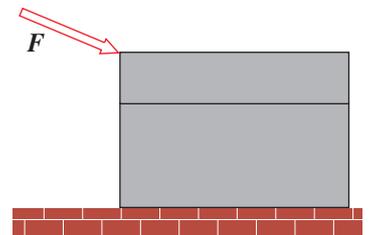


FIGURE 9.26 Représentation du système de l'exemple 9.2.

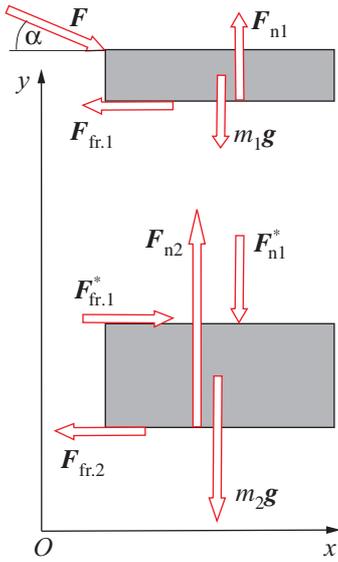


FIGURE 9.27 Séparation du système en ses composants et introduction des forces agissant sur chacun de ceux-ci.

SOLUTION: (a) Nous isolons chacun des corps du système et introduisons les forces qui agissent sur chacun de ces éléments (fig. 9.27). La plaque supérieure est l'élément numéro 1, le bloc l'élément numéro 2.

L'équation de bilan de la quantité de mouvement de la plaque supérieure est décomposée suivant les directions horizontale et verticale :

$$\dot{p}_{1x} = \sum F_{1x} = F \cos(\alpha) - F_{\text{fr.1}} = m_1 a_{x1} \quad (\text{E.9.1})$$

$$\dot{p}_{1y} = \sum F_{1y} = F_{n1} - F \sin(\alpha) - m_1 g = m_1 a_{y1} = 0 \quad (\text{E.9.2})$$

Les forces agissant dans la direction verticale s'équilibrent, l'accélération verticale est nulle.

Pour le bloc, les équations de bilan de la quantité de mouvement sont :

$$\dot{p}_x = \sum F_{2x} = F_{\text{fr.1}}^* - F_{\text{fr.2}} = m_2 a_{x2} \quad (\text{E.9.3})$$

$$\dot{p}_{2y} = \sum F_{2y} = F_{n2} - F_{n1}^* - m_2 g = m_2 a_{y2} = 0 \quad (\text{E.9.4})$$

L'interaction entre les deux éléments du système est exprimée par deux paires de forces qui sont des couples d'action et réaction au sens de la troisième loi de NEWTON; leurs modules sont égaux :

$$F_{\text{fr.1}}^* = F_{\text{fr.1}} \quad (\text{E.9.5})$$

$$F_{n1}^* = F_{n1} \quad (\text{E.9.6})$$

Finalement, les forces de frottement s'expriment au moyen de l'équation (9.36) :

$$F_{\text{fr.1}} = \mu_1 F_{n1} \quad (\text{E.9.7})$$

$$F_{\text{fr.2}} = \mu_2 F_{n2} \quad (\text{E.9.8})$$

Exprimons encore la relation entre les masses :

$$m_2 = 2m_1 \quad (\text{E.9.9})$$

Nous manipulons algébriquement ces équations afin d'obtenir les accélérations respectives de chacun des deux corps. À partir de l'équation (E.9.2) :

$$F_{n1} = F \sin(\alpha) + m_1 g \quad (\text{E.9.10})$$

que nous substituons dans l'équation (E.9.7) :

$$F_{\text{fr.1}} = \mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g) \quad (\text{E.9.11})$$

en tenant compte des relations (E.9.1) et (E.9.11), nous obtenons pour l'accélération de la plaque supérieure :

$$a_{x1} = \frac{1}{m_1} [F \cos(\alpha) - \mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g)] = 0.95 \text{ m s}^{-2}$$

De même, en combinant les relations (E.9.4), (E.9.5), (E.9.6), (E.9.10) ainsi que (E.9.9), nous obtenons:

$$F_{n_2} = F \sin(\alpha) + m_1 g + m_2 g = F \sin(\alpha) + 3m_1 g$$

Ainsi, en vertu de l'équation (E.9.8):

$$F_{fr_2} = \mu_2 (F \sin(\alpha) + 3m_1 g)$$

ce qui donne finalement:

$$\begin{aligned} a_{x_2} &= \frac{1}{2m_1} [\mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g) - \mu_2 (F \sin(\alpha) + 3m_1 g)] \\ &= \frac{1}{2m_1} [(\mu_1 - \mu_2) F \sin(\alpha) + (\mu_1 - 3\mu_2) m_1 g] = 0.41 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

La plaque supérieure basculera lorsque la différence des distances parcourues Δx_{12} sera égale à 0.5 m. Or:

$$\Delta x_{12} = \Delta x_1 - \Delta x_2 = \frac{1}{2} (a_{x_1} - a_{x_2}) \Delta t^2$$

L'intervalle de temps jusqu'au basculement vaut donc:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta x_{12}}{a_{x_1} - a_{x_2}}} = 1.36 \text{ s}$$

Durant cet intervalle, le bloc inférieur parcourt:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_{x_2} \Delta t^2 = 0.37 \text{ m}$$

On peut vérifier que le bloc supérieur parcourt une distance de 0.87 m par rapport au sol.

(b) En vertu de l'équation (9.16), l'énergie injectée dans le système correspond à la puissance de la force appliquée. Cette puissance est variable, vu qu'elle est proportionnelle à la vitesse:

$$I_{E, \text{in } 1} = \mathcal{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = v_1 F \cos(\alpha) = a_{x_1} \cdot t \cdot F \cos(\alpha) = 321.38 \text{ W s}^{-1} \cdot t$$

Une partie de ce flux d'énergie sert à injecter la quantité de mouvement dans la plaque supérieure. En vertu de l'équation (9.17), la puissance du processus de glissement de la plaque est:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{gliss } 1} &= -\Delta v |I_{p1, \text{net}}| = -(v_1 - 0)(F \cos(\alpha) - F_{fr,1}) \\ &= -a_{x_1} [F \cos(\alpha) - \mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g)] t = -45.18 \text{ W s}^{-1} \cdot t \end{aligned}$$

L'énergie et la quantité de mouvement sont accumulées dans la plaque supérieure. Le flux d'énergie restant $I_{E, \text{in}, \text{IF } 1,2}$ pénètre dans l'interface entre les deux éléments; il est égal à $276.20 \text{ W s}^{-1} \cdot t$. La puissance du processus de frottement qui se déroule dans cette interface vaut:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{fr,1,2} &= -\Delta v |I_{p1,2, \text{net}}| = -(v_2 - v_1) F_{fr,1} \\ &= -(a_{x_2} - a_{x_1}) \cdot t \cdot F_{fr,1} = -(a_{x_2} - a_{x_1}) \mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g) t = 158.21 \text{ W s}^{-1} \cdot t \end{aligned}$$

L'énergie libérée par ce processus est dissipée et émerge du système avec l'entropie produite. À la sortie de l'interface, le flux d'énergie entrant dans le bloc est réduit à $117.99 \text{ W s}^{-1} \cdot t$. Une partie du flux de quantité de mouvement et d'énergie sert à faire glisser le bloc. La puissance de ce processus est:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{gliss } 2} &= -\Delta V |I_{p2, \text{net}}| = -(v_2 - 0)(F_{\text{fr}1}^* - F_{\text{fr}2}) \\ &= -a_{x2} [\mu_1 (F \sin(\alpha) + m_1 g) - \mu_2 (F \sin(\alpha) + 3m_1 g)] t = -16.49 \text{ W s}^{-1} \cdot t \end{aligned}$$

Le flux d'énergie $I_{E, \text{in}, 2, \text{sol}}$ à travers l'interface entre le bloc inférieur et le sol est réduit à $101.50 \text{ W s}^{-1} t$, ce qui correspond à la puissance du processus de frottement:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{fr}2, \text{sol}} &= -\Delta V |I_{p2, \text{sol net}}| = -(0 - v_2) F_{\text{fr}2} \\ &= a_{x2} \cdot t \cdot F_{\text{fr}2} = a_{x2} \mu_2 (F \sin(\alpha) + 3m_1 g) t = 101.50 \text{ W s}^{-1} \cdot t \end{aligned}$$

À nouveau, l'énergie libérée est dissipée avec l'entropie produite.

On obtient les quantités d'énergie impliquées durant les processus par intégration:

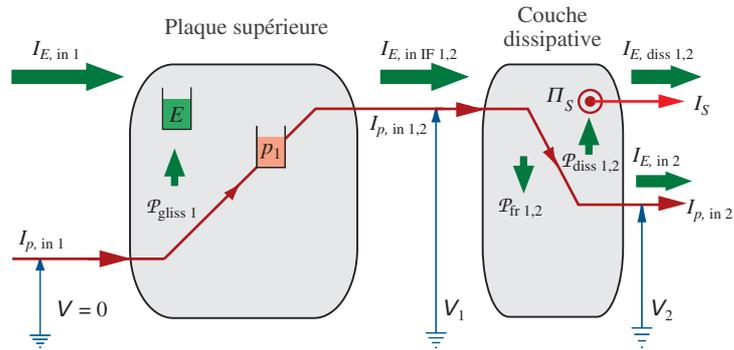
$$\Delta E_{\text{in}, 1} = \int_0^{\Delta t} I_{E, \text{in}} \cdot dt = 321.38 \text{ W s}^{-1} \int_0^{\Delta t} t \cdot dt = 321.38 \text{ W s}^{-1} \frac{\Delta t^2}{2} = 295.10 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{cin}1} = 41.49 \text{ J}; \quad \Delta E_{\text{diss}1,2} = 145.27 \text{ J}; \quad \Delta E_{\text{cin}2} = 15.14 \text{ J}; \quad \Delta E_{\text{diss}2, \text{sol}} = 93.20 \text{ J}$$

On vérifie que la somme des énergies dissipées et des variations d'énergie cinétique est égale à l'énergie injectée dans le système par la force appliquée.

(c) Les diagrammes de processus de la figure 9.28 montrent les flux de quantité de mouvement et d'énergie, ainsi que les puissances relatives aux processus qui se déroulent dans la plaque supérieure et dans l'interface entre la plaque et le bloc inférieur.

FIGURE 9.28 Diagrammes de processus relatifs aux flux de quantité de mouvement et d'énergie pour la plaque supérieure et l'interface entre la plaque et le bloc. Les flèches représentant les flux d'énergie et les puissances ne sont pas à l'échelle.



Les diagrammes de processus pour le bloc inférieur et l'interface entre celui-ci et le sol sont analogues. ■

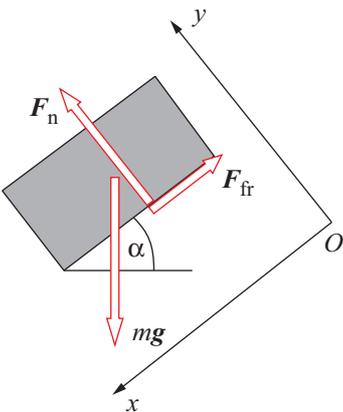


FIGURE 9.29 Traitement analytique du problème par projection des forces sur les axes d'un repère Oxy .

EXEMPLE 9.3. Glissement sur un plan incliné à vitesse constante.

Pour quel angle d'inclinaison α un objet sur un plan incliné glisse-t-il vers le bas à vitesse constante?

SOLUTION: Nous isolons l'objet et projetons les forces auxquelles il est soumis sur un repère Oxy choisi de telle manière que l'un des axes (par exemple Ox) soit parallèle au plan incliné et pointe vers le bas, afin que le mouvement ait lieu dans le sens positif (fig. 9.29). Pour chacune des composantes, nous établissons l'équation de bilan de la quantité de mouvement:

$$\dot{p}_x = 0 = \sum F_x = mg \sin(\alpha) - F_{\text{fr}} \tag{E.9.12}$$

$$\dot{p}_y = 0 = \sum F_y = F_n - mg \cos(\alpha) \quad (\text{E.9.13})$$

Dans l'équation (E.9.12), la variation de la quantité de mouvement selon Ox est nulle, vu que nous exigeons que la vitesse de glissement soit constante, et dans l'équation (E.9.13), la composante de la quantité de mouvement perpendiculaire au plan ne varie pas. Le système ci-dessus contient trois inconnues. L'équation manquante est la loi constitutive du frottement sec :

$$F_{\text{fr}} = \mu \cdot F_n \quad (\text{E.9.14})$$

Nous calculons F_{fr} à partir de l'équation (E.9.12) et F_n à partir de l'équation (E.9.13) et substituons ces valeurs dans l'équation (E.9.14) pour obtenir :

$$F_{\text{fr}} = mg \sin(\alpha) = \mu \cdot F_n = \mu mg \cos(\alpha)$$

d'où :

$$\tan(\alpha) = \mu$$

■

EXEMPLE 9.4. Vitesse maximale dans un virage.

Déterminer la vitesse maximale de franchissement d'un virage en arc de cercle de rayon R , sur une route inclinée vers l'intérieur d'un angle α par rapport à l'horizontale, en fonction du coefficient d'adhérence μ_{adh} .

SOLUTION: Le virage se déroule dans un plan horizontal, raison pour laquelle nous optons pour un repère Oxy dont l'axe Ox est horizontal (fig. 9.30). En vertu de l'équation (9.30), les composantes horizontales des forces en présence doivent produire l'accélération centripète qui maintient le véhicule sur sa trajectoire. La vitesse maximale est atteinte lorsque la force d'adhérence prend sa valeur maximale. Les projections des forces sur les axes donnent :

$$F_{\text{adh, max}} \cos(\alpha) + F_n \sin(\alpha) = m \frac{v_{\text{max}}^2}{R} = F_n [\mu_{\text{adh}} \cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$$

$$F_n \cos(\alpha) - F_{\text{adh, max}} \sin(\alpha) - mg = 0 = F_n [\cos(\alpha) - \mu_{\text{adh}} \sin(\alpha)] - mg$$

La résolution de ce système aboutit à :

$$v_{\text{max}} = \sqrt{gR \frac{\sin(\alpha) + \mu_{\text{adh}} \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu_{\text{adh}} \sin(\alpha)}}$$

■

9.4.3 Objet attaché à un ressort horizontal

Comme nous l'avons vu à la section 9.1.3, la présence d'un ressort dans un système introduit un élément inductif qui est à l'origine d'un comportement oscillatoire. Illustrons ce cas par l'exemple d'un objet qui effectue des oscillations horizontales, accroché à l'extrémité d'un ressort (lorsqu'il est suspendu, la pesanteur ne fait que déplacer la position d'équilibre autour de laquelle oscille l'objet).

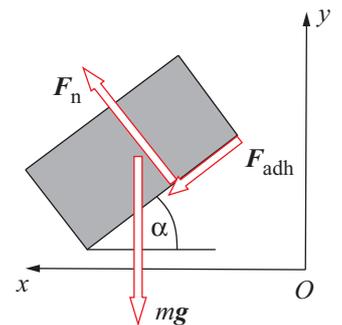


FIGURE 9.30 Forces agissant sur un véhicule dans un virage incliné vers l'intérieur.

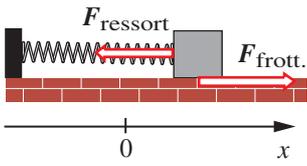


FIGURE 9.31 Un objet attaché à un ressort et posé sur un plan horizontal est soumis à deux forces: à celle du ressort et aux frottements.

EXEMPLE 9.5. Comportement d'un objet attaché à un ressort sur un plan horizontal.

Analyser le comportement d'un objet de masse m , posé sur une surface horizontale et accroché à l'extrémité d'un ressort: (a) en admettant un frottement nul; (b) en admettant un frottement proportionnel à la vitesse; (c) en admettant un frottement sec.

SOLUTION: Nous commençons par énoncer les parties du modèle communes à chacun des trois cas. Le modèle repose sur l'équation de bilan (fig. 9.31), énoncée pour la composante horizontale:

$$\dot{p} = I_{p, \text{ressort}} + I_{p, \text{frottement}} = F_{\text{ressort}} + F_{\text{frottement}} \tag{E.9.15}$$

complétée par la loi de capacité:

$$p = m\dot{v}$$

Le ressort est l'élément inductif du système, et son action est donnée par la loi de HOOKE énoncée à la section 9.1.3:

$$F_{\text{ressort}} = -kx$$

La loi de résistance varie selon le cas envisagé.

(a) Comme il n'y a pas de frottement, le second terme du membre de droite de l'équation de bilan (E.9.15) disparaît. Nous exprimons le modèle en termes d'élongation instantanée, vu que c'est la grandeur la plus facilement observable:

$$\dot{p} = m\dot{v} = m\ddot{x} = -kx$$

ou, après division par m et rassemblement des termes dans le membre de gauche:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

À la section 4.8.2, nous avons montré que cette équation différentielle est celle de l'oscillation libre dont la solution est une fonction sinusoïdale:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

où \hat{x} est l'amplitude de l'oscillation libre dont la fréquence angulaire est donnée par:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'amplitude et la constante de phase sont déterminées par les conditions initiales.

(b) Si le frottement est proportionnel à la vitesse, nous pouvons l'exprimer sous la forme:

$$F_{\text{frottement}} = -r\dot{v}$$

L'équation différentielle devient:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Sa solution est une oscillation amortie représentée par l'équation:

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{-\lambda t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

Comme nous l'avons montré à la section 4.8.3, la fréquence angulaire ω_d de l'oscillation amortie (damped) et le coefficient d'amortissement λ sont respectivement donnés par :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{r}{2m}$$

(c) La force de frottement sec, introduite à la section 9.4.2, est constante et son module est égal à μmg . Mais le sens de cette force est toujours opposé à celui de la vitesse; il s'inverse donc à la fin de chaque demi-oscillation, ce que nous pouvons exprimer par :

$$F_{\text{frottement}} = -\text{sgn}(v) \cdot \mu mg$$

L'équation différentielle à résoudre devient :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\text{sgn}(v) \cdot \mu g$$

Cette équation doit être résolue par tronçons en veillant à la continuité de l'élongation entre chaque tronçon. Plutôt que de le faire analytiquement, nous confions cette tâche à un logiciel de modélisation des systèmes dynamiques.

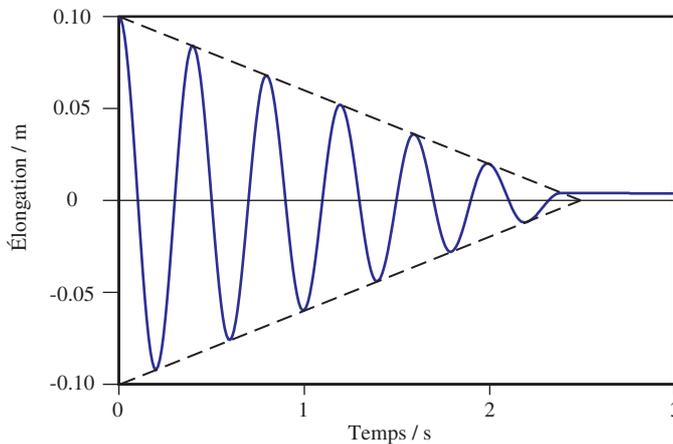


FIGURE 9.32 Oscillations avec frottement sec : l'amplitude décroît linéairement et la fréquence angulaire n'est pas affectée par le frottement. L'immobilisation se produit toujours à la fin d'une demi-période.

La figure 9.32 montre l'évolution d'un système constitué d'une masse de 0.2 kg, accrochée à un ressort dont la constante de rigidité est de 50 N m^{-1} , pour un coefficient de frottement sec de 0.1. La décroissance de l'amplitude n'est plus exponentielle, mais linéaire, et l'objet s'immobilise au bout d'un certain temps. Pour déterminer cet instant, nous nous basons sur le fait que l'objet ne peut être mis en mouvement à partir de l'immobilité que si la force de rappel du ressort est supérieure à la force de frottement, c'est-à-dire si

$$kx > \mu mg$$

Or, à la fin de chaque demi-période, la vitesse s'annule. Si à cet instant, l'élongation est inférieure à la valeur limite donnée par la relation ci-dessus, l'objet s'immobilise. L'arrêt se produira donc toujours à la fin d'une demi-période, ce que confirme le graphique de la figure 9.32 obtenu par simulation : le point d'arrêt est situé à l'intersection d'une des droites enveloppantes et de la courbe de l'élongation en fonction du temps.

■

1. Quand peut-on traiter le mouvement d'objets étendus comme s'ils étaient des points matériels?
2. Quelle est la marche à suivre pour analyser le mouvement de translation?
3. Qu'est-ce qui différencie ce que l'on appelle le frottement statique de celui que l'on appelle frottement dynamique?
4. Pourquoi doit-on éviter d'utiliser la notion de «force centripète»?



1. Lorsqu'ils effectuent uniquement des mouvements de translation, sans entrer en rotation. Lorsqu'ils entrent en rotation, la répartition de la masse influence le mouvement.
2. Il faut tout d'abord isoler chacun des composants du système étudié, puis introduire les forces qui s'exercent sur chacun de ces éléments. Les contraintes auxquelles sont soumis les corps peuvent permettre de déterminer la direction et le sens des forces qui entrent en jeu.
3. Le frottement dynamique est, en première approximation, une force de module constant, indépendante de la vitesse, due à l'interaction entre les surfaces de deux corps en contact qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. Ce que l'on appelle le frottement statique, ou mieux, la force d'adhérence, est aussi due à l'interaction entre les surfaces des deux corps en contact, mais cette force varie de telle manière que les deux corps ne se déplacent pas l'un par rapport à l'autre. Cette force est variable et limitée vers le haut. Lorsque la limite est atteinte, on passe au régime de frottement dynamique.
4. Pour qu'un corps puisse effectuer un mouvement périodique autour d'un centre, il est nécessaire qu'il soit soumis à une force qui est dirigée vers ce centre. Cette force peut avoir de multiples origines: il peut s'agir de la force de traction exercée par une ficelle à laquelle est attaché un objet que l'on fait tourner, l'adhérence des pneus sur la route, la gravitation, l'interaction électrique dans les atomes, etc. Ces forces engendrent une accélération dirigée vers l'intérieur de la trajectoire, que l'on qualifie de centripète. Mais il est abusif de donner le même qualificatif à la force qui est à son origine.

9.5 MOUVEMENT DU SOLIDE RIGIDE

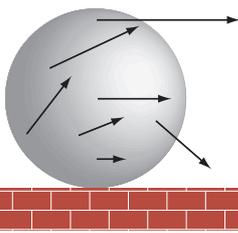


FIGURE 9.33 Différents points d'une sphère qui roule ont des vitesses différentes. Mais il existe un point particulier du corps que nous pouvons prendre pour représenter le mouvement de translation.

Dans la section 9.4, nous avons admis que les objets envisagés n'effectuaient que des mouvements de translation sans rotation, ce qui nous a permis de les traiter comme des points matériels, sans tenir compte de leur extension. En revanche, lorsque les objets peuvent effectuer un mouvement de rotation, il est nécessaire d'en tenir compte.

La quantité de mouvement d'un corps peut être exprimée au moyen de sa masse et de sa vitesse. Mais comment définir la vitesse d'un corps étendu? Lors d'un mouvement quelconque, chaque point d'un corps a une vitesse différente. Imaginons une sphère roulant sur une surface plane (fig. 9.33), ou un ressort que l'on étend, et le problème devient manifeste. C'est pourquoi nous devons d'abord trouver un point qui représente le mouvement de translation d'un corps étendu

9.5.1 Centre de masse et ses caractéristiques

À la section 7.7.2, nous avons introduit le centre de masse d'un système discret en tant que moyenne pondérée des vecteurs position de ses composants, les masses de ceux-ci jouant le rôle des coefficients de pondération:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (9.38)$$

ou, pour un solide rigide:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_{\text{Corps}} \mathbf{r} \cdot dm \quad (9.39)$$

De manière analogue, nous définissons la vitesse représentative d'un corps en tant que moyenne pondérée des vitesses de ses parties. Cette vitesse correspond à la vitesse du centre de masse, comme le montre le développement pour un système discret:

$$\frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}}$$

Lors de la dérivation du produit, la dérivée temporelle des masses est nulle, vu que nous nous plaçons dans un contexte non relativiste. Pour un solide rigide, nous avons:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_{\text{Corps}} \mathbf{v} \cdot dm$$

Grâce à l'introduction du centre de masse et de sa vitesse, la quantité de mouvement d'un solide rigide peut être déterminée de la même manière que pour un point matériel. Il faut y ajouter le moment cinétique pour tenir compte de la quantité de mouvement due au mouvement de rotation. Rappelons que vitesse et quantité de mouvement sont des grandeurs relatives dont la valeur dépend du référentiel dans lequel on les mesure.

De manière analogue, on obtient pour l'accélération du centre de masse d'un système discret:

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

ou, pour un solide rigide:

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_{\text{Corps}} \mathbf{a} \cdot dm$$

9.5.2 Théorème du centre de masse

Considérons un système constitué de points matériels qui sont soumis à des forces extérieures. Pour chacun des composants de ce système, nous pouvons écrire:

$$\mathbf{F}_{i,\text{ext}} = m_i \mathbf{a}_i$$

La somme des forces extérieures agissant sur le système est:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = M \mathbf{a}_{\text{CM}}$$

Le centre de masse d'un système (ou d'un solide rigide) se déplace comme s'il était un point matériel de masse égale à la masse totale M du système (ou du solide rigide) soumis à la somme des forces extérieures.

$$\dot{\mathbf{p}}_{\text{CM}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = M\mathbf{a}_{\text{CM}} \quad (9.40)$$

EXEMPLE 9.6. Centre de masse du système Terre-Lune.

Où se trouve le centre de masse du système composé de la Terre et de la Lune? La distance moyenne entre la Terre et la Lune est de 384 000 km, les masses des deux corps sont respectivement de $6.0 \cdot 10^{24}$ kg et $7.4 \cdot 10^{22}$ kg. Admettez un observateur pour lequel le centre de masse du système se déplace à une vitesse de 30 km s^{-1} . Que vaut la quantité de mouvement du système?

SOLUTION: Le centre de masse du système se situe sur la ligne reliant les centres de la Terre et de la Lune. Introduisons un système de coordonnées (axes des x) coïncidant avec cette ligne et ayant son origine au centre de la Terre. Nous avons donc $x_1 = 0 \text{ m}$ et $x_2 = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$. À partir de l'équation (9.38), nous trouvons que

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 0 \text{ m} + 7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}}{6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg} + 7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg}} = 4680 \text{ km}$$

Vu que le rayon de la Terre est d'approximativement 6400 km, le centre de masse du système Terre-Lune est situé à l'intérieur de la Terre.

Pour cet observateur, la quantité de mouvement du système Terre-Lune est égale au produit de sa masse totale et de la vitesse de son centre de masse (mesurée par rapport à cet observateur). On obtient $182.2 \cdot 10^{27} \text{ N}\cdot\text{s}$.



9.5.3 Lien entre force et flux de moment cinétique

Comme nous l'avons déjà mentionné à la section 7.3.2, les transferts de moment cinétique sont souvent liés à l'action d'une force. Pour établir le lien entre une force et le flux de moment cinétique, nous envisageons un disque susceptible de tourner autour d'un axe fixe vertical et appliquons une force dont la ligne d'action ne passe pas par l'axe. Comme l'objet ne peut pas se déplacer, la quantité de mouvement doit être évacuée, et elle ne peut l'être que par l'axe de rotation qui assure le lien avec la terre. Ce flux de quantité de mouvement fait apparaître des contraintes dans l'objet qui, ainsi que nous l'avons appris à la section 8.4.1, sont des contraintes de cisaillement, vu que la quantité de mouvement doit s'écouler latéralement. Ce sont ces contraintes qui sont à l'origine de flux de moment cinétique. L'étude détaillée de ce processus révèle que l'intensité du flux de moment cinétique est égale au produit du flux de quantité de mouvement, donc de la force, et de la distance parcourue par ce flux.

Le produit du module de la force et de la distance entre l'axe de rotation et la ligne d'action de la force, le *bras de levier*, est appelé module du *moment M de la force F* . Il correspond au flux de moment cinétique engendré par l'action de la force (fig. 9.34):

$$I_L = M = r_{\perp} F \quad (9.41)$$

Le flux de moment cinétique engendré par l'action d'une force \mathbf{F} sur un objet susceptible d'entrer en rotation autour d'un axe (ou d'un point) est appelé le moment \mathbf{M} de cette force. Le moment \mathbf{M} (identique au flux de moment cinétique) est un vecteur défini en tant que produit vectoriel du vecteur \mathbf{r} qui relie l'axe (ou du point) de rotation au point d'attaque de la force et de cette force \mathbf{F} :

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (9.42)$$

Comme la force se mesure en newton (N), les relations (9.41) et (9.42) impliquent que le flux de moment cinétique se mesure en N m et que le moment cinétique lui-même se mesure en N m s. Nous avons donc la correspondance: $[I_L] = \text{Eu s}^{-1} = \text{N m}$ et $[L] = \text{Eu} = \text{N m s}$. L'introduction d'une unité particulière pour le moment cinétique, grandeur primitive servant à la description des processus rotatoires, s'impose d'autant plus que du point de vue dimensionnel, elle est la même que celle de la puissance, et que celle de ses flux correspond à celle de l'énergie.

Notons que le calcul de \mathbf{M} à partir de sa définition n'est possible que si \mathbf{F} et \mathbf{r} sont connus; or, ces informations sont rarement disponibles dans un cas concret. Considérons par exemple un embrayage à friction; il est impossible de déterminer une force \mathbf{F} et un vecteur \mathbf{r} uniques, ces deux grandeurs variant de manière continue sur toute la surface de contact. De ce fait, il n'est pas possible de calculer le moment (le flux de moment cinétique), on doit le mesurer.

La mesure du moment (de l'intensité du flux de moment cinétique) peut se faire au moyen d'appareils dans lesquels on mesure l'ampleur de la torsion d'une tige soumise au moment que l'on veut mesurer.

Dans la pratique, il est souvent question du *couple* (par exemple le couple exercé par le moteur d'une voiture). D'où vient cette notion? Lorsque l'on veut faire tourner un objet autour d'un axe, les forces que l'on applique pour le faire apparaissent toujours par paires de sens opposé. Dans un certain nombre de situations, les deux forces du couple sont exercées par la personne qui veut faire tourner l'objet autour de son axe (robinet, vis à ailettes, comme dans la figure 9.35, etc.). Dans les autres cas (poignée de porte, la plupart des leviers, etc.), la personne applique l'une des forces du couple, l'autre force étant fournie par les appuis qui empêchent l'objet de s'échapper. Ainsi, dans la situation illustrée par la figure 9.34, la seconde force du couple (qui n'apparaît pas dans la figure) est exercée par l'axe de rotation pour maintenir le disque en place.

9.5.4 Mouvement quelconque d'un solide rigide

Le mouvement général d'un corps peut toujours être considéré comme la combinaison d'une translation de son centre de masse et d'une rotation autour d'un axe instantané passant par le centre de masse (fig. 9.36). Le mouvement général d'un solide est exprimé au moyen de deux équations de bilan énoncées sous forme vectorielle:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{I}_p = \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{I}_L = \mathbf{M} \end{aligned} \quad (9.43)$$

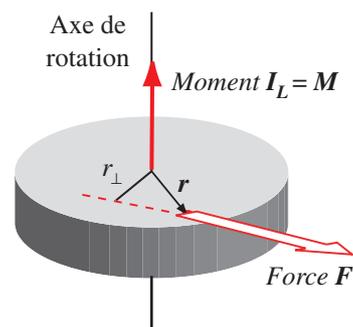


FIGURE 9.34 Relation entre une force unique et le flux de moment cinétique correspondant, appelé également moment de la force.

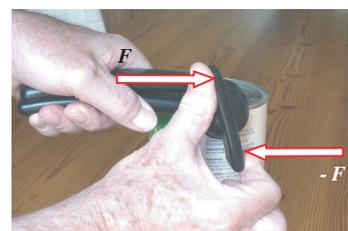


FIGURE 9.35 Pour faire tourner les ailettes d'un ouvre-boîte, il faut appliquer un couple de forces.

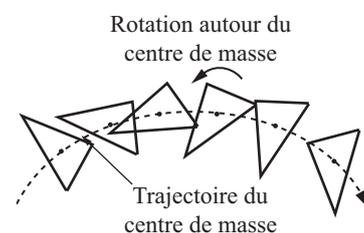


FIGURE 9.36 Décomposition du mouvement général d'un corps en une translation du centre de masse et une rotation autour du centre de masse.

Dans ces équations de bilan, \mathbf{F} représente la somme des forces extérieures responsables de la variation de la quantité de mouvement, et \mathbf{M} est la somme des moments extérieurs responsables de la variation du moment cinétique.

9.5.5 Puissance d'un processus entraîné par l'action d'un moment

De manière analogue à ce qui a été fait à la section 9.2.1, nous pouvons introduire les grandeurs liées à l'énergie lors de processus de rotation. L'intensité d'un flux d'énergie entraînée par un flux de moment cinétique en un point du système se déplaçant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ sera donc égale à :

$$I_{E,L} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_L = \omega_x I_{Lx} + \omega_y I_{Ly} + \omega_z I_{Lz} \quad (9.44)$$

Si l'on mesure le flux de moment cinétique par rapport à la surface d'un corps, ce flux est représenté par un moment \mathbf{M} dont les composantes se substituent à celles du flux de moment cinétique, et l'on obtient la *puissance du moment* \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} = \omega_x M_x + \omega_y M_y + \omega_z M_z \quad (9.45)$$

À nouveau, la *puissance du processus* lié au flux de moment cinétique entre deux niveaux de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est définie sans ambiguïté par :

$$\mathcal{P}_{\text{proc}} = -\Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_L \quad (9.46)$$

9.5.6 Rotation d'un solide autour d'un axe de direction constante

Nous allons illustrer différents cas au moyen d'exemples. Les deux premiers traiteront le cas d'une rotation autour d'un axe fixe. Dans les exemples suivants, la rotation aura lieu autour d'un axe mobile, mais de direction constante. Ces exemples mettent en évidence la relation entre les mouvements de translation et de rotation.

EXEMPLE 9.7. Disque dont la rotation est entraînée par une cordelette enroulée.

Un disque de rayon $R = 0.5$ m et de masse $M = 20$ kg peut tourner autour d'un axe horizontal fixe passant par son centre. On applique sur une cordelette de masse négligeable enroulée autour du disque une force de traction verticale, dirigée vers le bas, de module $T = 9.81$ N (fig. 9.37). Déterminer : (a) l'accélération angulaire du disque ; (b) le module des forces d'appui.

SOLUTION : (a) Les forces agissant sur le système sont la force de pesanteur que nous considérons comme agissant sur le centre de masse, les forces d'appui F_{appui} qui s'exercent sur l'axe et la traction appliquée sur la cordelette. Comme l'axe du disque est fixe, la variation de la quantité du mouvement est nulle :

$$T + Mg - 2F_{\text{appui}} = 0 \quad (E.9.16)$$

L'équation de bilan du moment cinétique exprime la variation du moment cinétique due au moment engendré par la traction T :

$$M_z = RT = J_z \alpha_z = \frac{MR^2}{2} \alpha_z$$

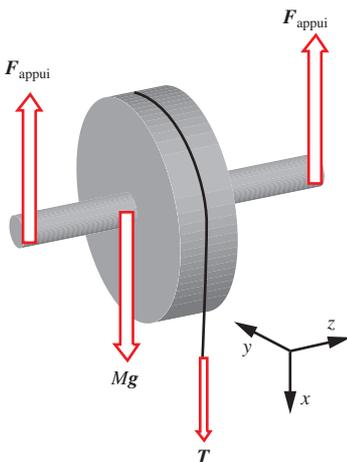


FIGURE 9.37 La rotation d'un disque dont l'axe repose sur des supports est entraînée par une cordelette sur laquelle on exerce une traction.

Nous avons remplacé le moment d'inertie du disque par son expression trouvée à la section 7.7.4 et avons admis que le moment d'inertie de l'axe est négligeable. L'accélération angulaire devient :

$$\alpha_z = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \cdot 9.81 \text{ N}}{20 \text{ kg} \cdot 0.5 \text{ m}} = 1.96 \text{ s}^{-2}$$

(b) Le module des forces d'appui s'obtient à partir de l'équation (E.9.16) :

$$F_{\text{appui}} = \frac{T + Mg}{2} = 103 \text{ N}$$

■

EXEMPLE 9.8. Disque dont la rotation est entraînée par une masse fixée à la cordelette.

On considère le même système que dans l'exemple 9.7, à la différence près que la force d'entraînement est produite par la force de pesanteur agissant sur une masse $m = 1 \text{ kg}$ (fig. 9.38). Déterminer : (a) l'accélération angulaire du disque ; (b) l'accélération linéaire de la masse ; (c) le module de la force de traction.

SOLUTION : (a) À l'équation de bilan de la quantité de mouvement du disque, il faut ajouter celle de la masse m :

$$mg - T = ma_x \quad (\text{E.9.17})$$

Pour le disque, nous reprenons les équations de l'exemple 9.7 :

$$T + Mg - 2F_{\text{appui}} = 0$$

$$M_z = RT = J_z \alpha_z = \frac{MR^2}{2} \alpha_z \quad (\text{E.9.18})$$

D'autre part, les accélérations linéaire et angulaire sont liées par la relation

$$a_x = R\alpha_z \quad (\text{E.9.19})$$

En combinant les équations (E.9.17), (E.9.18) et (E.9.19), nous obtenons :

$$\alpha_z = \frac{mg}{\left(m + \frac{M}{2}\right) R} = 1.78 \text{ s}^{-2}$$

L'accélération angulaire du disque a diminué, parce que la force de pesanteur, dont le module est égal à celui de la force qui était appliquée dans l'exemple 9.7, doit également entraîner la masse m dont l'inertie s'ajoute à celle du disque. Cette augmentation de l'inertie du système apparaît dans le dénominateur de l'expression servant à calculer l'accélération angulaire.

(b) L'accélération linéaire est donnée par :

$$a_x = R\alpha_z = 0.89 \text{ m s}^{-2}$$

(c) Le module de la force de traction devient :

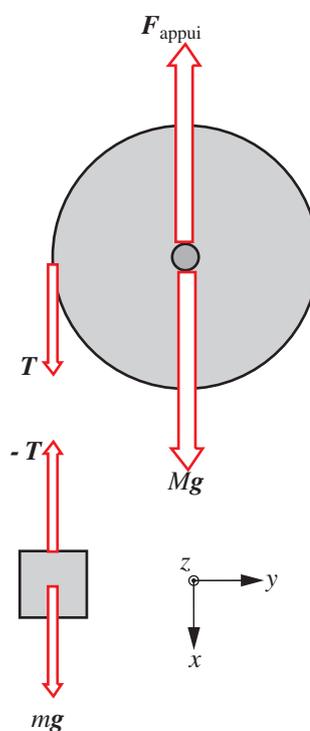


FIGURE 9.38 La rotation du disque de la figure 9.37 est entraînée par une masse attachée à la cordelette.

$$T = m(g - a_x) = 8.92 \text{ N}$$

La partie manquante du flux de quantité de mouvement dû à la pesanteur est emmagasinée dans la masse suspendue à la cordelette.



EXEMPLE 9.9. Mouvement du yoyo.

Un yoyo (fig. 9.39) est constitué d'un disque central de rayon $r = 5 \text{ cm}$ et de masse $m = 0.5 \text{ kg}$ auquel sont accolés deux disques de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de masses respectives $M = 2 \text{ kg}$. Déterminer son accélération verticale lorsqu'il est abandonné à lui-même.

SOLUTION: La variation de la quantité de mouvement selon l'axe Ox est:

$$(2M + m)g - T = (2M + m)a_x \tag{E.9.20}$$

alors que celle du moment cinétique est:

$$rT = \left(2 \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \right) \alpha_z \tag{E.9.21}$$

Les accélérations angulaire et linéaire sont liées par la relation:

$$a_x = r\alpha_z \tag{E.9.22}$$

Nous exprimons le module de la traction T à partir de l'équation (E.9.21), tout en passant à l'accélération linéaire au moyen de la relation (E.9.22):

$$T = \left(M \frac{R^2}{r^2} + \frac{m}{2} \right) a_x$$

Après substitution dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement (E.9.20), nous obtenons pour l'accélération linéaire du yoyo:

$$a_x = \frac{(2M + m)}{2M + m + M \frac{R^2}{r^2} + \frac{m}{2}} g = \frac{(2M + m)}{\left(2 + \frac{R^2}{r^2} \right) M + \frac{3}{2} m} g = 3.46 \text{ m s}^{-2}$$

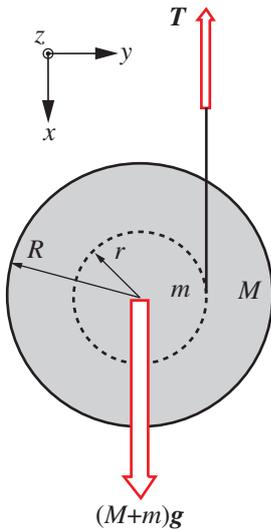


FIGURE 9.39 Yoyo constitué d'un disque central de masse m autour duquel est enroulée la ficelle et auquel sont accolés deux disques de masse M .

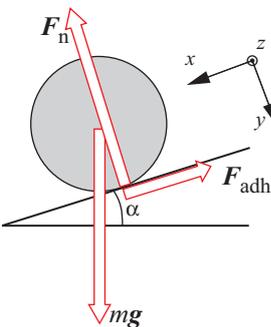


FIGURE 9.40 Sphère sur un plan incliné. Elle ne peut rouler sans glisser que si la force d'adhérence est suffisante. Celle-ci dépend implicitement de l'angle d'inclinaison.

EXEMPLE 9.10. Sphère dévalant un plan incliné.

À partir de quel angle limite α_0 une sphère de rayon R et de masse m dévalant un plan incliné se mettra-t-elle à glisser au lieu de rouler si le coefficient d'adhérence vaut μ_{adh} ?

SOLUTION: Dans un référentiel dont l'axe Ox est parallèle au plan incliné et orienté vers le bas (fig. 9.40), l'équation de bilan des composantes de la quantité de mouvement s'obtient par projection des forces sur les axes:

$$mg \sin(\alpha) - F_{adh} = ma \tag{E.9.23}$$

$$mg \cos(\alpha) - F_n = 0$$

Seule la force d'adhérence produit un moment par rapport à un axe imaginaire passant par le centre de masse:

$$M_z = RF_{adh} = J_z \alpha_z = \frac{2mR^2}{5} \alpha_z \quad (\text{E.9.24})$$

En vertu de l'équation (9.34), nous savons que:

$$F_{adh} \leq \mu_{adh} F_n \quad (\text{E.9.25})$$

Si la sphère doit rouler sans glisser, les accélérations linéaire et angulaire sont liées par:

$$a_x = R\alpha_z \quad (\text{E.9.26})$$

En combinant les relations (E.9.23), (E.9.24) et (E.9.26), nous obtenons:

$$a_x = \frac{5}{7} g \sin(\alpha)$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (E.9.23) et la prise en compte de (E.9.25) donnent:

$$F_{adh} = \frac{2}{7} mg \sin(\alpha) \leq \mu_{adh} mg \cos(\alpha)$$

ce qui entraîne:

$$\tan(\alpha) \leq \frac{7}{2} \mu_{adh}$$

L'angle limite est donné par:

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{7}{2} \mu_{adh}\right)$$

Au-dessus de cette limite, la sphère roulera et glissera simultanément, vu que la force d'adhérence ne suffira plus pour engendrer le moment permettant de rouler sans glisser. ■

EXEMPLE 9.11. Bobine récalcitrante.

Une bobine de fil repose sur une surface horizontale. On tire sur le fil qui forme un angle α avec l'horizontale (fig. 9.41). Analyser le mouvement de la bobine en fonction de cet angle.

SOLUTION: Si nous désignons par T le module de la force de traction sur le fil, l'équation de bilan pour les deux composantes de la quantité de mouvement devient:

$$T \cos(\alpha) - F_{adh} = Ma_x \quad (\text{E.9.27})$$

$$F_n + T \sin(\alpha) - Mg = 0$$

Deux forces contribuent à la variation du moment cinétique:

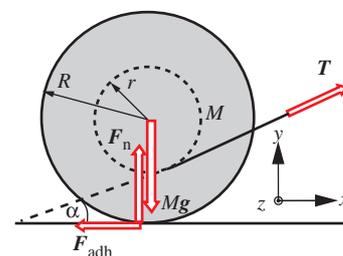


FIGURE 9.41 Lorsque l'on tire sur le fil d'une bobine posée sur un plan horizontal, son comportement dépend de l'angle que le fil forme avec l'horizontale.

$$R_2 F_{\text{adh}} - rT = J_z \alpha_z \tag{E.9.28}$$

Si la bobine doit rouler sans glisser, alors :

$$a_x = R_2 \alpha_z \tag{E.9.29}$$

En combinant les relations (E.9.27), (E.9.28) et (E.9.29), nous obtenons :

$$F_{\text{adh}} = \frac{J_z}{R} \alpha_z + \frac{r}{R} T$$

$$T \cos(\alpha) - \frac{J_z}{R} \alpha_z - \frac{r}{R} T = MR \alpha_z$$

ce qui permet d'évaluer l'accélération angulaire :

$$\alpha_z = \frac{T \left(\cos(\alpha) - \frac{r}{R} \right)}{M + \frac{J_z}{R}}$$

Il y a trois situations possibles, en fonction du signe du numérateur :

$\cos(\alpha) > \frac{r}{R}$ l'accélération angulaire et l'accélération linéaire sont positives ; la bobine roule vers la droite.

$\cos(\alpha) < \frac{r}{R}$ l'accélération angulaire et l'accélération linéaire sont négatives ; la bobine roule vers la gauche.

$\cos(\alpha) = \frac{r}{R}$ l'accélération angulaire est nulle ; la ligne d'action de la force de traction T passe par le point de contact de la bobine avec le sol ; la bobine glisse sans rouler.

Ce résultat peut être interprété en admettant que l'axe de rotation momentané passe par le point de contact de la bobine sur le sol. Par rapport à ce point, le moment de la force de traction T est positif, négatif ou nul, suivant que l'angle α satisfait, dans l'ordre, les conditions ci-dessus. ■

1. Pourquoi le mouvement du centre de masse est-il représentatif pour le mouvement d'un système étendu ou d'un solide rigide ?
2. Que peut-on dire de la vitesse du centre de masse d'un système isolé du point de vue mécanique ? Quelle genre de mouvement le centre de masse d'un tel système peut-il effectuer ?
3. Comment doit-on traiter le mouvement quelconque d'un solide rigide ?



1. Parce que le centre de masse d'un système (ou d'un solide rigide) se déplace comme s'il était un point matériel de masse égale à la masse totale du système (ou du solide rigide) soumis à la somme des forces extérieures.
2. Être isolé du point de vue mécanique signifie qu'il n'y a aucun transfert de quantité de mouvement de ou vers le système. Vu que la quantité de mouvement ne peut être ni créée ni détruite (elle est conservée), celle



du système demeure constante. Le mouvement d'un tel système est soit un mouvement rectiligne à vitesse constante, soit le corps est immobile par rapport à l'observateur.

3. Ce mouvement peut être décomposé en un mouvement de translation du centre de masse soumis à l'action de la somme des forces extérieures (flux de quantité de mouvement extérieurs) et en un mouvement de rotation engendré par la somme des moments extérieurs (flux de moment cinétique extérieurs). La combinaison des deux mouvements est exprimée par la relation qui lie la vitesse de translation à celle de rotation.

9.6 ÉTUDE DU MOUVEMENT DE ROULEMENT

Dans cette section, nous étudions le mouvement de roulement sans glissement de cylindres sur des supports plus ou moins mous. Contrairement au roulement sur des surfaces dures, l'objet s'enfonce dans le support, ce qui entraîne un décalage vers l'avant du point de contact entre le support et l'objet en mouvement.

9.6.1 Expériences

Le modèle que nous allons développer est basé sur quatre versions d'une expérience effectuée avec un cylindre plein (C) ou un segment de tuyau cylindrique (T) qui roulent sur une surface horizontale sans glisser. Les objets sont mis en mouvement manuellement et roulent vers un capteur de mouvement (PASCO motion sensor PS-2103A, fig. 9.42a) qui enregistre leurs vitesses en fonction du temps (fig. 9.42b).

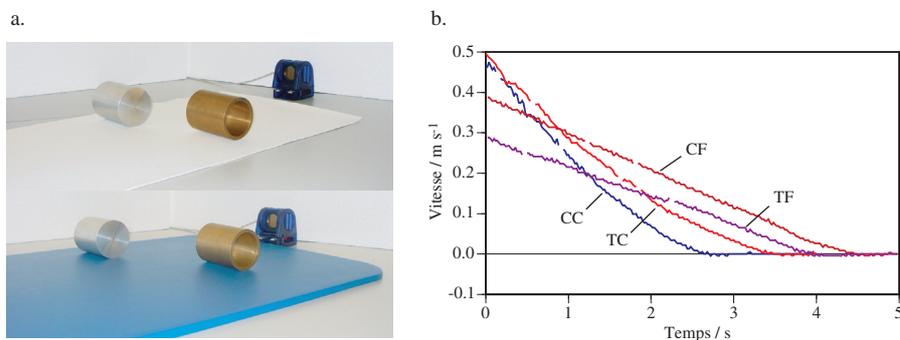


FIGURE 9.42 Roulement sur des surfaces déformables: (a) réalisation de l'expérience: un cylindre (C) ou un segment de tuyau cylindrique (T) roulent sur un tapis en feutre (F) ou sur un tapis caoutchouté (C); (b) vitesses mesurées en fonction du temps.

Les objets ont des masses égales ($m = 1.375 \text{ kg}$) et des rayons identiques ($R = 0.04 \text{ m}$), mais leurs moments d'inertie sont différents. Nous représentons ce moment d'inertie par $J = fmR^2$, où f est un facteur de forme que nous pouvons déterminer par une expérience qui consiste à monter les cylindres de manière à ce qu'ils puissent tourner autour d'un axe fixe. On leur applique un couple connu et on mesure l'accélération angulaire. À partir des résultats obtenus, on peut évaluer les moments d'inertie. Les facteurs de forme sont respectivement $f_C = 0.50$ et $f_T = 0.83$. Les tapis sont en feutre (F) ou caoutchoutés (C). La combinaison des objets et des supports débouche sur quatre expériences CF, CC, TF et TT.

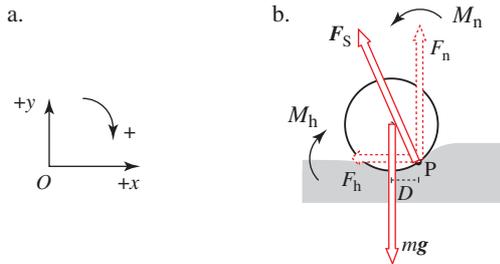
Les enregistrements des vitesses des centres de masse effectués lors de l'expérience apparaissent dans la figure 9.42b. Les comportements varient selon le type de surface. Dans le cas du feutre (F), la vitesse décroît de manière quasi linéaire, alors que cette décroissance est notablement non linéaire pour la surface caoutchoutée (C). Les données montrent également que les objets roulent brièvement vers l'arrière juste avant de

s’immobiliser. Cette observation suggère que les objets en mouvement poussent devant eux un renflement de la matière plus ou moins molle dont est constitué le support. Il s’ensuit que le contact entre le cylindre et la surface de roulement n’est pas symétrique, ce dont il faudra tenir compte lors de l’élaboration du modèle.

9.6.2 Modélisation du mouvement de translation et de rotation

Pour l’élaboration du modèle, nous devons tout d’abord introduire les forces et les couples qui se manifestent pendant le mouvement des objets (fig. 9.43).

FIGURE 9.43 Forces et moments : (a) détermination des axes et des sens positifs pour les forces et les moments ; (b) deux forces agissent sur l’objet, la force de pesanteur mg et la force de soutien F_S exercée par la surface. Cette dernière est projetée sur les axes du repère.



Deux forces agissent sur l’objet, la force de pesanteur mg et la force de soutien F_S exercée par la surface. Cette dernière est dissociée en une composante verticale F_n qui équilibre la force de pesanteur et une horizontale F_h responsable du freinage des objets en mouvement. La déformation asymétrique du support déplace le point d’attaque P de F_S vers l’avant et vers le haut. Nous en tiendrons compte en introduisant dans le modèle un paramètre D qui mesure le déplacement vers l’avant du point P.

Le mouvement de roulement est influencé par les moments M_n et M_h engendrés par les composantes correspondantes de F_S . Pour que le mouvement de rotation soit ralenti, il faut que $|M_n| > |M_h|$.

Le premier élément à prendre en compte lors de l’élaboration du modèle est que les objets roulent sans glisser, ce qui peut être exprimé par la proportionnalité de la vitesse du centre de masse v_{CM} et de la vitesse angulaire ω :

$$v_{CM} = R\omega \tag{9.47}$$

Vu que $p_x = mv_{CM}$ et $L = J\omega$, où

$$J = fmR^2 \tag{9.48}$$

est le moment d’inertie et f le facteur de forme du corps en rotation, l’équation (9.47) débouche sur

$$L = \frac{Jp_x}{mR} \quad \text{ou} \quad L = fRp_x$$

La seconde égalité est aussi valable pour les taux de variation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, ce qui nous procure une relation indépendante du temps :

$$\frac{\dot{L}}{\dot{p}_x} = fR \tag{9.49}$$

Les équations de mouvement ne sont rien d’autre que les équations de bilan de la quantité de mouvement et du moment cinétique du corps en mouvement de roulement :

$$\dot{p}_x = m\dot{v}_{CM} = F_h \quad (9.50)$$

$$\dot{L} = M_n + M_h \quad (9.51)$$

Les signes de ces moments apparaissent dans la figure 9.43b. Leurs composantes perpendiculaires au plan vertical dans lequel a lieu le mouvement de translation sont respectivement :

$$M_n = -DF_n \quad (9.52)$$

$$M_h = -ARF_h \quad (9.53)$$

où

$$A = \frac{\sqrt{R^2 - D^2}}{R} \quad (9.54)$$

est le cosinus de l'angle β qui apparaît dans la figure 9.44. Dans notre expérience, A est pratiquement égal à l'unité, il n'en dévie que pour moins de un pour mille.

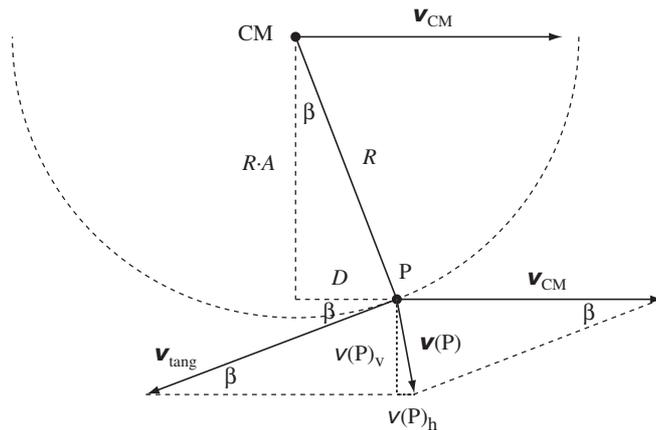


FIGURE 9.44 Relations géométriques et mouvement du point de contact de la force F_S relativement à un observateur stationnaire. Le module de la vitesse tangentielle V_{tang} est égal à celui de la vitesse du centre de masse V_{CM} .

À première vue, il semble que nous soyons en présence de deux paramètres indépendants, la composante horizontale F_h de la force de contact F_S et le déplacement D . Mais si nous substituons les relations (9.49), (9.52) et (9.53) dans l'équation (9.51), le couplage entre la translation et la rotation entraîne :

$$\frac{F_h}{F_n} = -\frac{D}{(f + A)R} \quad (9.55)$$

ce qui nous laisse avec un seul paramètre libre, qui sera D .

Une relation équivalente qui décrit l'échange de moment cinétique, avec $|M_n| > |M_h|$, peut être obtenue en introduisant (9.52) et (9.53) dans l'équation (9.55) :

$$\frac{M_n}{M_h} = -\left(\frac{f}{A} + 1\right) \quad (9.56)$$

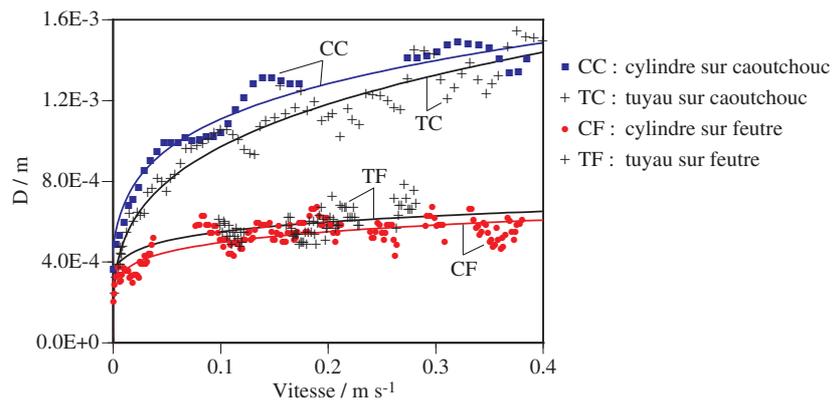
Étant donné que le module de F_n est égal à mg et que $F_h = m\dot{v}_{CM}$, nous pouvons utiliser l'équation (9.55) pour déterminer le paramètre D à partir des relevés de la vitesse des objets (fig. 9.42b). Vu que A est très proche de l'unité, nous obtenons :

$$D = -(f + A)R \frac{m\dot{v}_{CM}}{mg} \approx -\frac{(f + 1)R}{g} \dot{v}_{CM} \tag{9.57}$$

Si notre modèle doit correctement rendre compte des observations, nous devons en attendre un certain nombre de prédictions. Tout d'abord, la valeur de D doit être la même pour le cylindre plein (C) et le segment de tuyau cylindrique (T) roulant sur la même surface, vu que les rayons et les masses des deux objets sont identiques. Ensuite, la relation entre D et la vitesse doit être non linéaire dans le cas de la surface caoutchoutée (C) et quasi linéaire pour le feutre (F), si l'on tient compte de la manière dont évoluent les vitesses. Enfin, on s'attend à ce que D ait une valeur notablement plus faible pour le feutre que pour le caoutchouc, vu que le feutre se déforme moins fortement que le caoutchouc.

La figure 9.45 illustre les résultats de l'analyse des données de la figure 9.42b. Nous constatons que les trois prévisions sont réalisées, ce qui nous permettra d'exprimer les relations constitutives décrivant le mouvement sur une surface donnée en tant que fonction particulière de $D(v_{CM})$.

FIGURE 9.45 Détermination du paramètre D en fonction de v_{CM} à partir des données expérimentales de la figure 9.42b. L'analyse est basée sur l'équation (9.57). Les jeux de données originaux ont été lissés au moyen de la technique de la moyenne mobile pour obtenir les valeurs qui apparaissent dans la figure. Les résultats pour D sont très proches pour les expériences CC et TC d'une part, et pour CF et TF d'autre part. Les fonctions utilisées pour l'ajustement sont des fonctions puissance.



L'ajustement aux données de la figure 9.45 par la méthode des moindres carrés au moyen d'une fonction puissance $D(v_{CM}) = av_{CM}^b$ donne les valeurs suivantes pour les paramètres a et b :

TABLEAU 9.2 Paramètres pour le roulement sur différentes surfaces

$D(v_{CM}) = av_{CM}^b$	a / s	b
Tapis caoutchouté, tuyau	$1.78 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-1}$
Tapis caoutchouté, cylindre	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$2.15 \cdot 10^{-1}$
Tapis en feutre	$5.75 \cdot 10^{-4}$	$2.44 \cdot 10^{-2}$

Nous sommes maintenant en mesure de formuler l'équation différentielle qui modélise le mouvement horizontal au moyen du taux de variation de la vitesse du centre de masse et de la relation constitutive $D(v_{CM})$. Il suffit de substituer la relation (9.57) dans l'équation de bilan (9.50) :

$$\dot{v}_{CM} = -\frac{g}{(f+1)R} D(v_{CM}) \tag{9.58}$$

Nous avons utilisé l'approximation $A = 1$. Cette équation différentielle peut être intégrée numériquement, par exemple en utilisant STELLA en tant qu'intégrateur de cette relation cinématique. La figure 9.46 permet de se rendre compte que le modèle que nous avons obtenu donne des résultats très satisfaisants.

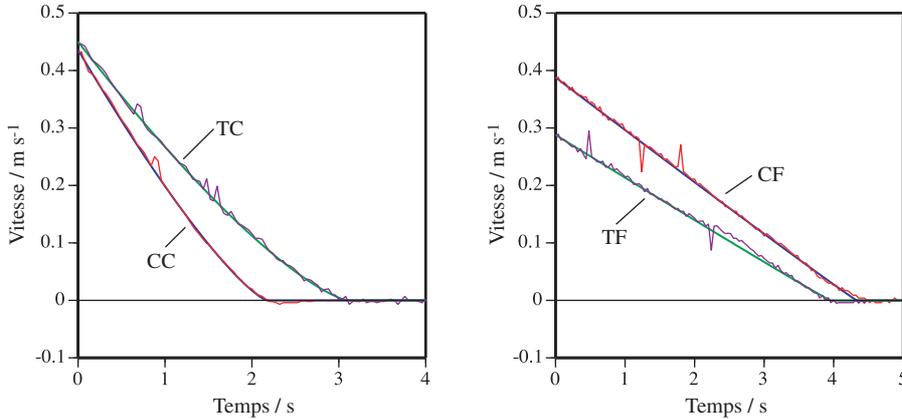


FIGURE 9.46 Résultats de la simulation du modèle de roulement sur des surface plus ou moins molles: (a) roulement sur une surface caoutchoutée; (b) roulement sur une surface feutrée.

Mentionnons que l'équation différentielle (9.58) peut être intégrée analytiquement. La solution est:

$$v_{CM}(t) = \left[v_{CM,0}^{1-b} - a(1-b) \frac{g}{(f+1)R} t \right]^{\frac{1}{1-b}} \tag{9.59}$$

9.6.3 Transferts et dissipation d'énergie

Nous voulons maintenant étudier le rôle de l'énergie lors de processus qui couplent les mouvements de translation et de rotation. Pour ce faire, nous utilisons les relations de la section 9.5.5.

La figure 9.47 est une représentation graphique des interactions, transfert et dissipation d'énergie pour l'exemple considéré.

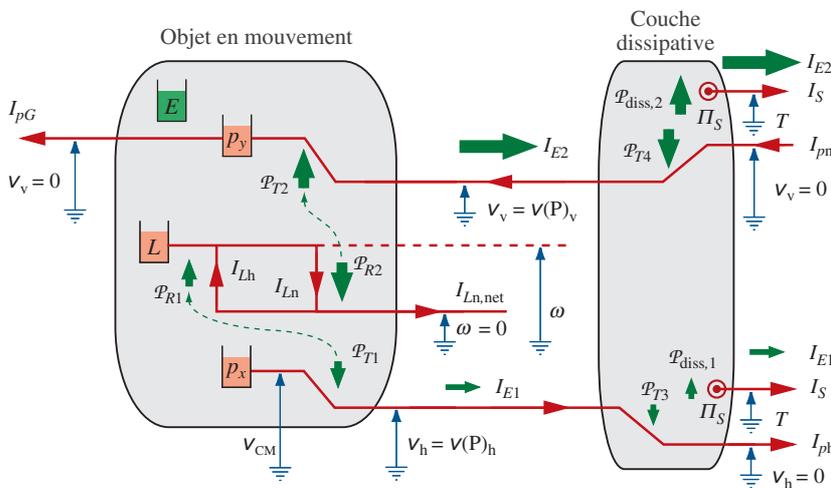


FIGURE 9.47 Diagramme de processus relatif à l'objet en mouvement et à la couche dissipative (couche déformée par le passage de l'objet). La composante horizontale de la quantité de mouvement quitte le corps, sa composante verticale y entre. Les deux composantes du moment cinétique entrent puis sortent du corps en mouvement. Les flèches pleines verticales représentent la puissance des processus. Les flèches pleines horizontales représentent les flux d'énergie emportés par les flux de quantité de mouvement. Cette énergie est dissipée dans la couche dissipative par une production d'entropie.

Nous commençons l'analyse par la composante horizontale de la quantité de mouvement. Nous voyons dans la figure 9.44 qu'elle quitte le corps au point P. La composante horizontale de la vitesse de ce point P est :

$$\mathbf{v}(P)_h = (1-A)\mathbf{v}_{CM} \quad (9.60)$$

En vertu de l'équation (9.15), le flux d'énergie qui quitte le corps est donné par :

$$I_{E1} = \mathbf{v}(P)_h I_{p,h} \quad (9.61)$$

où $I_{p,h}$ correspond à la composante horizontale de F_S , à savoir F_h . Ce n'est qu'une toute petite fraction du taux de variation de l'énergie du corps en conséquence de la variation de p_x . Ce résultat doit être interprété de la manière suivante : lorsque la quantité de mouvement p_x s'écoule à travers le corps vers la surface, elle le fait entre des valeurs élevées et des valeurs faibles de la composante horizontale de la vitesse ; il y a libération d'énergie et, selon l'équation (9.17), la puissance due à ce processus de translation est égale à :

$$\mathcal{P}_{T1} = -\Delta v_h |I_{p,h}| = -(\mathbf{v}(P)_h - \mathbf{v}_{CM}) |I_{p,h}|$$

Concrètement

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{T1} &= -(\mathbf{v}(P)_h - \mathbf{v}_{CM}) |I_{p,h}| \\ &= -[(1-A)\mathbf{v}_{CM} - \mathbf{v}_{CM}] \frac{Dmg}{R(f+A)} \\ &= A\mathbf{v}_{CM} \frac{Dmg}{R(f+A)} \end{aligned}$$

Cette énergie est utilisée pour pomper du moment cinétique dans le corps à un taux égal au moment M_h correspondant au flux de moment cinétique $I_{L,h}$. En d'autres termes, la puissance du processus de rotation \mathcal{P}_{R1} doit être égale et opposée à \mathcal{P}_{T1} , ce que confirme le calcul effectué à partir de l'équation (9.46) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{R1} &= -\Delta\omega |I_{L,h}| = -(\omega - 0) |I_{L,h}| \\ &= -\frac{\mathbf{v}_{CM}}{R} RA |F_h| = -A\mathbf{v}_{CM} \frac{Dmg}{R(f+A)} \end{aligned}$$

Mais d'autre part, du moment cinétique s'échappe du corps à un taux égal au moment M_n correspondant au flux de moment cinétique $I_{L,n}$. Dans ce processus, le moment cinétique tombe du niveau ω au niveau zéro de la vitesse angulaire, ce qui libère de l'énergie à un taux égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{R2} &= -\Delta\omega |I_{L,n}| = -(0 - \omega) |I_{L,n}| \\ &= \frac{\mathbf{v}_{CM}}{R} D |F_n| = \frac{\mathbf{v}_{CM}}{R} Dmg \end{aligned}$$

Cette énergie n'est pas libérée dans l'environnement, mais est utilisée pour pomper dans le corps de la quantité de mouvement verticale à un taux donné par $I_{pn} = F_n$; la quantité de mouvement passe du niveau négatif de la vitesse verticale au point P :

$$v(P)_v = -\frac{D}{R}v_{CM} \quad (9.62)$$

au niveau zéro. La puissance de ce processus de translation doit être égale et opposée à \mathcal{P}_{R2} :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{T2} &= -\Delta v_v |I_{p,v}| = -(0 - v(P)_v) |F_n| \\ &= -\frac{D}{R}v_{CM}mg \end{aligned}$$

Nous voyons que le couplage entre les transports de quantité de mouvement et de moment cinétique déplace de l'énergie d'un processus de translation vers un processus de rotation et vice versa. Des transferts d'énergie du corps de ou vers l'environnement n'ont lieu que lors de transferts de quantité de mouvement de ou vers l'environnement, représentés par I_{E1} et I_{E2} dans la figure 9.47. Ils se produisent au point P qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v}(P)$. La première contribution a déjà été évaluée par l'équation (9.61), et la seconde est égale à :

$$I_{E2} = v(P)_v I_{p,n} \quad (9.63)$$

La somme de ces deux flux d'énergie est égale à :

$$\begin{aligned} I_{E1} + I_{E2} &= v(P)_h I_{p,h} + v(P)_v I_{p,n} \\ &= (1-A)v_{CM}F_h + \left(-\frac{D}{R}v_{CM}\right) \left(-\frac{R(f+A)}{D}F_h\right) \\ &= (f+1)v_{CM}F_h \end{aligned}$$

ou, étant donné que $F_h = \dot{p}_x = m\dot{v}_{CM}$:

$$I_{E,\text{total}} = -(f+1)m v_{CM} \dot{v}_{CM} \quad (9.64)$$

Si nous intégrons ce flux d'énergie sur toute la durée du processus de roulement, nous obtenons :

$$E_{\text{total}} = -\frac{1}{2}(f+1)m v_{CM}^2 \quad (9.65)$$

ce qui correspond à l'énergie totale, de translation et de rotation, que l'objet possédait lors de sa mise en mouvement. Cette énergie est dissipée dans la couche de dissipation introduite dans le modèle de la figure 9.47. Concrètement, cette couche de dissipation est constituée par les supports plus ou moins mous sur lesquels se déplacent les objets. Pour que l'énergie libérée soit dissipée, les matériaux dont sont constitués les supports doivent réagir à l'apport de quantité de mouvement comme matériau viscoplastique : le frottement interne entraîne la production d'entropie.

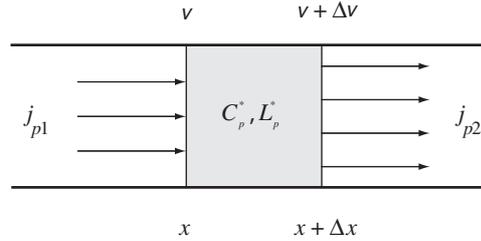
9.7 ÉLABORATION DE L'ÉQUATION D'ONDE

Abordons un exemple intéressant qui débouche sur le modèle du transport de quantité de mouvement sous forme d'onde. On entend par onde une perturbation d'un milieu qui se transmet de proche en proche dans l'espace, comme par exemple l'onde qui se forme à la surface de l'eau lorsqu'on y jette un objet. Comme dans le cas des oscillations, ce

transport sous forme d'onde est la conséquence de l'interaction entre l'accumulation et le transport de la quantité de mouvement, où la relation constitutive pour le transport est donnée par une inductance, alors que l'accumulation est décrite par la capacité en quantité de mouvement du système. Le but de cette section est de décrire, au moyen d'une équation différentielle, la dynamique du phénomène ondulatoire.

Pour simplifier l'analyse, nous envisageons un problème unidimensionnel, par exemple une onde sonore qui se transmet dans un barreau métallique dont on a frappé une des extrémités ou dans un fluide enfermé dans un long tuyau.

FIGURE 9.48 Un fluide, par exemple un gaz, est enfermé dans un long tuyau. Chaque partie du fluide possède de une certaine capacité en quantité de mouvement et une inductance (c'est également le cas pour un barreau solide). L'interaction de ces deux propriétés fait qu'une perturbation du milieu entraîne un transport de quantité de mouvement sous forme d'onde.



Établissons tout d'abord l'équation de bilan de la quantité de mouvement pour un élément du fluide (fig. 9.48) en négligeant la variation locale de la masse volumique due au passage de la perturbation :

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dV}{dt} = I_{p1} - I_{p2} = A(j_{p1} - j_{p2}) = -A(j_{p2} - j_{p1})$$

où Δx et A sont respectivement la longueur et la section de l'élément de fluide. Pour assurer le passage au continu, nous divisons l'équation ci-dessus par la longueur Δx de l'élément considéré et désignons par C_p^* la masse par unité de longueur :

$$C_p^* \frac{dV}{dt} = -A(j_{p2} - j_{p1}) \frac{1}{\Delta x} \quad (9.66)$$

Il faut prendre en compte des caractéristiques du milieu dans lequel se propage la perturbation, à savoir sa résistance et son inductance. La résistance a pour conséquence une atténuation de l'onde, et nous la négligeons pour simplifier l'analyse. En revanche, nous l'avons vu lors de l'étude des oscillations, c'est l'inductance, couplée à la capacité, qui est responsable de l'apparition des oscillations. La loi d'induction s'énonce :

$$\Delta V = -L_p \frac{dI_p}{dt} = -L_p^* \cdot \Delta x \cdot A \frac{dj_p}{dt}$$

L_p^* est l'inductance linéique. Effectuons également la division par Δx :

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -L_p \frac{dI_p}{dt} = -L_p^* \cdot A \frac{dj_p}{dt} \quad (9.67)$$

et faisons tendre Δx vers 0 dans les équations (9.66) et (9.67) qui deviennent, de ce fait, des équations aux dérivées partielles :

$$C_p^* \frac{\partial V}{\partial t} = -A \frac{\partial j_p}{\partial x} \quad (9.68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L_p^* \cdot A \frac{\partial j_p}{\partial t} \quad (9.69)$$

Si nous dérivons respectivement (9.68) et (9.69) par rapport à t et par rapport à x , nous obtenons :

$$C_p^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -A \frac{\partial^2 j_p}{\partial x \cdot \partial t} \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 j_p}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{C_p^*}{A} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (9.70)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L_p^* \cdot A \frac{\partial^2 j_p}{\partial x \cdot \partial t} \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 j_p}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{1}{L_p^* \cdot A} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (9.71)$$

La comparaison de (9.70) et (9.71) nous permet de poser :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{C_p^* L_p^*} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (9.72)$$

La grandeur C_p^* se mesure en kg m^{-1} , et L_p^* en $\text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-1}$. L'inverse de leur produit se mesure donc en $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ et représente le carré de la vitesse de propagation de l'onde que nous désignerons dorénavant par c .

En conclusion :

Si nous désignons par $\xi(x,t)$ la fonction qui décrit la forme d'une perturbation qui se propage (la grandeur en question peut représenter une pression, une tension électrique, etc.), celle-ci est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (9.73)$$

que l'on appelle l'équation d'onde à une dimension. La vitesse de propagation de l'onde est égale à :

$$c = \frac{1}{\sqrt{C_p^* L_p^*}} \quad (9.74)$$

Si nous réussissons à déterminer l'inductance du milieu à travers lequel se propage la perturbation, nous sommes en mesure de déterminer la vitesse de propagation de cette onde.

EXEMPLE 9.12. Vitesse du son dans un solide.

En utilisant les lois constitutives et les particularités matérielles d'un solide élastique, déterminez la vitesse de propagation du son dans ce milieu.

SOLUTION: Dans un barreau cylindrique de section A , nous envisageons un élément de longueur Δx dont la longueur varie de dx au passage de la perturbation (fig. 9.5). Pour pouvoir

déterminer l'inductance par unité de longueur L_p^* , nous partons de la version locale de la loi de HOOKE (9.11):

$$\varepsilon = \frac{dx}{\Delta x} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{AE}$$

ce qui entraîne, en vertu de la version globale de la loi de HOOKE (9.8) et de la relation (9.10):

$$\frac{AE}{\Delta x} = \frac{F}{dx} = k = \frac{1}{L_p}$$

Il s'ensuit, pour l'inverse de l'inductance par unité de longueur:

$$\frac{1}{L_p^*} = \frac{\Delta x}{L_p} = AE$$

Pour l'inverse de la masse par unité de longueur C_p^* nous trouvons:

$$\frac{1}{C_p^*} = \frac{\Delta x}{m} = \frac{\Delta x}{\rho \cdot \Delta x \cdot A} = \frac{1}{\rho A}$$

À partir de l'équation (9.74), nous obtenons:

$$c = \frac{1}{\sqrt{C_p^* L_p^*}} = \frac{\sqrt{EA}}{\sqrt{\rho A}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cette vitesse est celle d'une onde caractérisée par le fait que la perturbation a lieu dans la même direction que celle de la propagation de l'onde. De telles ondes sont dites *longitudinales*.

Si la perturbation est telle que le matériau est soumis à des contraintes de cisaillement, la perturbation a lieu dans une direction perpendiculaire à sa direction de propagation. On parle alors d'ondes *transversales*. Dans ce cas, la vitesse de propagation dépend du module de cisaillement:

$$c = \frac{1}{\sqrt{C_p^* L_p^*}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

À titre d'exemple, le module d'élasticité et le module de cisaillement de l'acier valent respectivement $21 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ et $8 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, alors que la masse volumique vaut $7.7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. À partir de ces données, on obtient:

$$c_{\text{long, acier}} = 5.2 \text{ km s}^{-1} \text{ et } c_{\text{transv, acier}} = 3.2 \text{ km s}^{-1}$$

C'est de cette particularité des ondes dans les milieux solides que font usage les sismologues pour localiser l'épicentre d'un tremblement de terre. Ils le font en mesurant, à différents endroits du globe, le retard pris par la composante transversale de l'onde sismique. Ce retard permet de déterminer la distance entre l'observatoire et l'épicentre. À partir des mesures d'au moins trois observatoires, on peut localiser l'épicentre par triangulation. ■

Nous déterminerons la vitesse du son dans un gaz à la section 10.3 lorsque nous aurons étudié la thermodynamique des gaz parfaits.

9.8 STATIQUE DES FLUIDES

Ce qui distingue un fluide d'un solide, c'est qu'il ne peut pas maintenir une contrainte de cisaillement pour une longue durée. Il échappe à la contrainte. Les liquides plus épais, tels que le miel, se déplacent moins facilement que l'eau ou l'air, ce qui est dû à leur viscosité prononcée. Il est usuel, dans un premier temps, d'idéaliser les fluides en admettant qu'ils n'ont pas de viscosité, ce qui implique que les frottements internes et avec l'environnement sont nuls. On les appelle des *fluides parfaits*. Dans ce cas, l'absence de dissipation entraîne la conservation de l'énergie véhiculée par le fluide.

9.8.1 Équilibre hydrostatique

Lorsque les liquides sont immobiles, ils ne sont soumis à aucune contrainte de cisaillement, même s'ils sont visqueux. Il s'ensuit que les contraintes sont toujours perpendiculaires à n'importe quelle surface envisagée à l'intérieur du fluide: cette contrainte est la *pression* P . Elle est la manifestation d'un flux de quantité de mouvement.

Nous avons appris, à la section 1.5.1, qu'à la surface de la Terre la pression dans les liquides variait de manière proportionnelle à la profondeur dans le liquide (fig. 9.49), ce que l'on peut exprimer par:

$$P(z) = P_0 - \rho g z \tag{9.75}$$

où g représente l'intensité du champ de pesanteur. Cette équation est un cas particulier d'une relation plus générale que nous allons développer.

Nous évaluons la force pressante nette sur un petit cube d'eau (fig. 9.50), force due à la variation locale de la pression. Si nous introduisons un repère dont les axes sont parallèles aux arêtes du cube, la pression P engendre une force (un flux de quantité de mouvement) de module égal à $F_x(x) = P \cdot \Delta y \Delta z$ sur la face positionnée à l'abscisse x . La pression à l'abscisse $x + \Delta x$ est

$$P + \Delta P = P + \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta x \approx P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

et la composante de la force pressante sur cette face est égale à

$$F_x(x + \Delta x) = - \left[P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

La composante de la force résultante selon Ox est donc égale à

$$F_x = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta V$$

En procédant de la même manière pour les autres faces du cube, nous obtenons les composantes $F_y = - (\partial P / \partial y) \Delta V$ dans la direction de l'axe Oy et $F_z = - (\partial P / \partial z) \Delta V$ dans la direction de l'axe Oz .

Nous introduisons la force par unité de volume ou *densité volumique de force*:

$$f = \frac{F}{\Delta V} \tag{9.76}$$

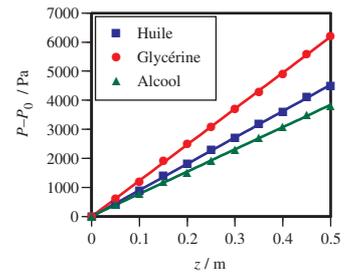


FIGURE 9.49 Pression dans les fluides. Elle est proportionnelle à la profondeur et dépend de la masse volumique.

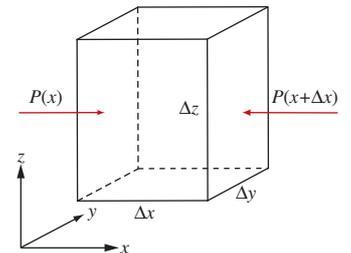


FIGURE 9.50 Détermination de l'évolution locale de la pression.

Dans un fluide, la densité volumique de force \mathbf{f} est l'opposée du gradient de pression:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{grad}(P) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (9.77)$$

Si d'autres forces sont présentes, par exemple la gravité, la force pressante les compense pour assurer l'équilibre. Si cette force additionnelle peut être dérivée d'un potentiel, c'est-à-dire si elle est conservative comme c'est le cas de la gravité, et que nous désignons par φ le potentiel par unité de masse, alors la force par unité de masse est égale à $-\mathbf{grad}(\varphi)$. Si ρ est la masse volumique, alors $-\rho\mathbf{grad}(\varphi)$ représente la densité volumique de force, et la condition d'équilibre s'exprime par:

$$\mathbf{grad}(P) = -\rho\mathbf{grad}(\varphi) \quad (9.78)$$

Cette équation est celle de l'équilibre hydrostatique. Si la densité varie de manière arbitraire, l'équilibre ne peut pas s'établir et des courants de convection vont apparaître. Au cas où la masse volumique ρ est une constante, c'est-à-dire si le fluide est incompressible, l'équation (9.78) a pour solution:

$$P + \rho\varphi = \text{const}$$

Dans le cas de la gravité, $\varphi = gz$, ce qui correspond à l'équation (9.75). Une autre situation qui aboutit à un équilibre est donnée lorsque la masse volumique ρ dépend uniquement de la pression P . C'est le cas de la pression dans une atmosphère isotherme.

EXEMPLE 9.13. Variation de la pression dans une atmosphère isotherme.

Déterminer de quelle manière évolue la pression dans une atmosphère supposée isotherme, de température T .

SOLUTION: Nous appliquons la loi des gaz parfaits ; $P = \rho RT$ et substituons cette valeur de ρ ainsi que le potentiel gravitationnel spécifique $\varphi = gz$ dans l'équation (9.78). La pression ne variant que selon la direction verticale Oz , nous obtenons l'équation différentielle:

$$\frac{dP}{dz} = -P \frac{g}{RT}$$

dont la solution:

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{TR}z}$$

est la diminution exponentielle de la pression que nous avons annoncée dans l'équation (1.23). ■

9.8.2 Poussée d'ARCHIMÈDE

Un objet plongé dans un fluide échange de la quantité de mouvement d'une part avec le champ gravitationnel en mode radiatif et avec le fluide environnant par conduction. Les forces pressantes s'exercent perpendiculairement à la surface du corps plongé dans le fluide, et leur module augmente proportionnellement à la profondeur. Les composantes horizontales de ces forces s'équilibrent. Mais les composantes verticales dirigées vers le haut sont supérieures à celles qui sont dirigées vers le bas et leur résultante est dirigée vers le haut: c'est la poussée d'ARCHIMÈDE.

La détermination du module de la poussée d'ARCHIMÈDE est basée sur la réflexion suivante: on isole en pensée un volume V du fluide. Ce volume est en équilibre dans le fluide, ce que l'on interprète comme un équilibre entre la force de pesanteur d'une part et la poussée d'ARCHIMÈDE d'autre part. La masse du volume isolé s'exprime à partir de la masse volumique du fluide, ce qui permet de trouver le module de la poussée d'ARCHIMÈDE.

Tout corps plongé dans un fluide est soumis à une poussée verticale ascendante égale au poids du volume de fluide déplacé:

$$\mathbf{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{déplacé}} \mathbf{g} \quad (9.79)$$

Cette poussée s'applique au centre de poussée, c'est-à-dire au centre de masse du volume de fluide déplacé.

EXEMPLE 9.14. Centrifugation.

Montrer qu'une centrifugeuse crée l'équivalent d'un champ de pesanteur horizontal et déterminer de quelle manière évolue la pression.

SOLUTION: Les particules du fluide sont maintenues sur leur trajectoire circulaire horizontale par une force horizontale. L'accélération centripète, donnée par l'équation (9.30), est équivalente à la constante g du champ de pesanteur terrestre et son produit avec le rayon variable est égal au potentiel par unité de masse de ce champ de pesanteur horizontal:

$$\varphi = r a_{\text{centripète}} = r(r\omega^2) = r^2(2\pi f)^2 = 4\pi^2 r^2 f^2$$

Le module de la pression est égal au produit de ce potentiel et de la masse volumique du fluide:

$$P = \rho\varphi = 4\pi^2 \rho r^2 f^2$$

Cette pression varie avec le carré du rayon et de la fréquence de rotation. Au fond d'une éprouvette de 10 cm de longueur tournant à raison de 1000 tours par minute, les accélérations et pression valent respectivement 112 g et 3.9 kbar.

Pour des centrifugeuses de laboratoire, les accélérations varient entre 400 et 2000 g pour des vitesses de rotation variant entre 2000 et 10 000 tours par minute suivant le rayon de l'appareil. ■

1. Une personne dans une barque photographie les berges du lac. Que fait le niveau du lac si elle laisse tomber son appareil dans l'eau ?
2. Comment les poissons font-ils pour flotter sans effort, quelle que soit la profondeur à laquelle ils se trouvent ?

Q

1. Le niveau baisse. Dans la barque, l'appareil photo, dont la masse volumique est plus importante que celle de l'eau, doit déplacer un volume d'eau plus important que son volume propre pour rester en surface.
2. Ils peuvent influencer leur masse volumique grâce à un organe appelé vessie natatoire. Il s'agit d'une sorte de poche dont ils peuvent contrôler le volume en variant la quantité de gaz qu'elle contient. De cette manière, ils peuvent adapter leur densité à celle de l'eau à la profondeur à laquelle ils se trouvent.

R

9.9 DYNAMIQUES DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

L'objectif de cette section et de la suivante est de modéliser le comportement dynamique des fluides. Nous commencerons par en établir les caractéristiques générales afin de pouvoir faire la distinction entre les fluides réels et leur idéalisation, les fluides parfaits.

9.9.1 Observations préliminaires



FIGURE 9.51 Exemple d'écoulement laminaire (glacier d'Aletsch, Suisse). (Photo: Dirk Beyer (CC)).

On appelle *fluide* un milieu matériel parfaitement déformable. Les fluides regroupent notamment les *gaz* qui sont l'exemple de fluides *compressibles*, et les *liquides*, qui sont peu compressibles. La compressibilité plus ou moins importante des fluides est due au fait que leurs constituants interagissent entre eux. Cette interaction interne entraîne également l'apparition d'une autre caractéristique intrinsèque, la *viscosité*. Ces deux caractéristiques intrinsèques ont des conséquences sur l'écoulement des fluides.

La description d'un écoulement se fait au moyen de lignes de courant dont nous préciserons plus bas la signification. Lorsque ces lignes de courant ne se croisent pas, on parle d'*écoulement laminaire* (fig. 9.51).

Si cette organisation des lignes de courant disparaît, on passe du régime laminaire à un *écoulement turbulent* (fig. 9.52). Nous verrons que le passage de l'un à l'autre dépend essentiellement de la viscosité du fluide.

FIGURE 9.52 Passage progressif du régime laminaire au régime turbulent.



Dans cette section, nous allons modéliser le comportement dynamique des *fluides parfaits*, c'est-à-dire sans viscosité. Il s'agit là d'une idéalisation qui permet d'obtenir un certain nombre de résultats qui sont également valables pour les fluides réels. Nous nous limiterons aux fluides incompressibles et ne considérerons que des écoulements stationnaires, ce qui signifie que la structure du champ de vitesse n'évolue pas dans le temps. Il est usuel de représenter ce champ de vitesse¹ au moyen de *lignes de courant* qui, dans le cas particulier, correspondent à la trajectoire suivie par les particules du fluide.

9.9.2 Équation de continuité pour un fluide incompressible

Lorsqu'un fluide est incompressible, sa masse volumique est constante, ce qui implique que, dans un écoulement à travers une conduite de section variable, le débit volumique ne varie pas le long de la conduite. L'élément de volume ΔV qui traverse une section durant un intervalle de temps Δt est égal à $A \cdot \Delta x = A \cdot v \cdot \Delta t$, où A est l'aire de la section traversée, Δx la longueur de l'élément et v la vitesse de l'écoulement à cet endroit. La constance du débit à deux endroits différents de la conduite (fig. 9.53) s'exprime donc par :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (9.80)$$

Cette relation est appelée *équation de continuité pour un fluide incompressible*.

9.9.3 Théorème de BERNOULLI

L'exemple 8.6 nous a permis d'établir que la conservation de l'énergie implique que, le long d'une ligne de courant d'un fluide incompressible et sans viscosité, la densité d'énergie totale est constante :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const (ligne de courant)}$$

Le terme $\rho g z$ représente la densité d'énergie due à la pesanteur. Si nous remplaçons le potentiel du champ de pesanteur $g z$ par un potentiel quelconque représenté par φ , l'expression, appelée *équation de BERNOULLI*, devient :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + P = \text{const (ligne de courant)} \quad (9.81)$$

La valeur de la constante change généralement d'une ligne de courant à l'autre. Par contre, si l'écoulement est *irrotationnel*, c'est-à-dire si les particules qui constituent le fluide ou les objets entraînés par l'écoulement ne subissent pas de rotation, gardent toujours la même orientation spatiale, comme les cabines de la grande roue du Prater à Vienne (fig. 9.54), il n'est plus nécessaire de se placer le long d'une ligne de courant, d'où :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + P = \text{const (dans tout le fluide)} \quad (9.82)$$

1. Lorsque l'on parle d'un champ de vitesse, on donne à la notion de champ une signification différente à celle que nous avons utilisée dans les chapitres précédents, à savoir celle d'un système physique immatériel caractérisé par ses propriétés physiques telles que son énergie, sa quantité de mouvement ou de moment cinétique, etc. Un champ de vitesse n'est pas un système physique, c'est un objet mathématique qui sert à décrire la distribution spatiale de la vitesse. Un champ de pression est un autre exemple de champ mathématique.

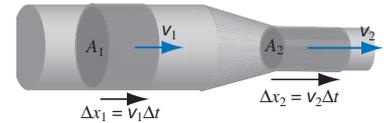


FIGURE 9.53 L'incompressibilité entraîne la constance d'un volume de fluide lorsqu'il se déplace dans la conduite.

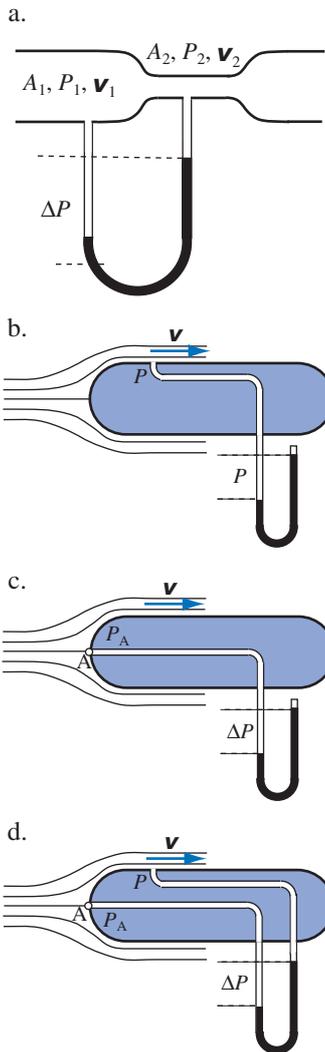


FIGURE 9.54 Lorsque la grande roue du Prater à Vienne se met à tourner, les cabines gardent toujours la même orientation. Dans un écoulement irrotationnel, les particules du fluide en rotation se comportent de la même manière que les cabines : elles gardent toujours la même orientation, elles ne tournent pas sur elles-mêmes. (Photo : David Monniaux (CC)).

À la différence de l'équation (9.81), la constante est la même dans tout le fluide. L'ensemble des lignes de courant forme un tube de courant.

Lorsqu'un fluide parfait franchit un étranglement, sa vitesse doit augmenter en vertu de l'équation de continuité. Si la conduite est horizontale, le deuxième terme de l'équation (9.82) ne varie pas. La constance des deux autres termes implique que la pression statique doit diminuer proportionnellement à l'augmentation de l'énergie cinétique du fluide. Notons que l'hypothèse du fluide parfait implique que l'on retrouve la même pression à la sortie de l'étranglement, vu qu'il n'y a pas de dissipation, faute de viscosité.

EXEMPLE 9.15. Mesures de débit et de pression dans les écoulements.



En se référant à la figure 9.55, explicitez le fonctionnement des dispositifs suivants : (a) tube de Venturi pour la mesure du débit volumique ; (b) sonde de mesure de la pression statique ; (c) sonde de Pitot pour la mesure de la pression totale ; (d) sonde de Prandtl pour la mesure de la pression dynamique.

SOLUTION : Tous les développements qui suivent sont basés sur l'équation (9.82) dans laquelle le terme lié à la densité d'énergie potentielle est négligé, vu que les écoulements considérés se déroulent horizontalement.

(a) En vertu de l'équation de BERNOULLI, nous avons :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

La différence de pression dans le tube en U est donc :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\rho(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

À partir de l'équation de continuité (9.80), nous exprimons la vitesse à l'étranglement :

$$v_2^2 = v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

La différence de pression devient :

$$\Delta P = \frac{\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}{2}$$

Comme le débit Q est égal à :

$$Q = A_1 v_1 = A_1 \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta P}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

FIGURE 9.55 Dispositifs de mesure dans les écoulements : (a) tube de Venturi pour la mesure du débit ; (b) mesure de la pression statique ; (c) mesure de la pression totale (sonde de PITOT) ; (d) mesure de la pression dynamique (sonde de PRANDTL).

on observe que le tube de Venturi permet de réduire la mesure du débit à une simple mesure de différence de pression.

(b) La sonde de pression est un tube arrondi à l'avant dans les parois duquel on a percé une ouverture. Lorsque le tube est placé parallèlement aux filets de courant, le manomètre relié à l'ouverture mesure la pression que relèverait un observateur entraîné par l'écoulement, ce que l'on appelle la pression statique.

(c) Au point d'arrêt A de la sonde de Pitot, la vitesse du fluide est nulle. En vertu de l'équation de BERNOULLI, nous avons :

$$P_A = P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \Delta P$$

c'est-à-dire la somme de la pression statique et de la pression dynamique, donc la pression totale.

(d) La sonde de Prandtl est une combinaison des deux sondes précédentes. L'application de l'équation de BERNOULLI nous permet d'écrire :

$$P_A = P + \frac{1}{2} \rho v^2$$

donc :

$$\Delta P = P_A - P = \frac{1}{2} \rho v^2$$

La mesure de la vitesse d'écoulement du fluide :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta P}{\rho}}$$

est donc réduite à une mesure de différence de pression.

Les versions actuelles de ces sondes utilisent des manomètres reliés à des ordinateurs pour effectuer les mesures.



9.9.4 Écoulement potentiel

Lorsqu'un écoulement est irrotationnel, on peut montrer que le vecteur vitesse est le gradient d'un potentiel multidimensionnel :

$$\mathbf{v} = \text{grad} [\varphi(\mathbf{r})] \quad (9.83)$$

où $\varphi(\mathbf{r})$ représente le potentiel de vitesse.

Même s'ils sont une idéalisation, les écoulements potentiels, ou les combinaisons d'écoulements potentiels, permettent de modéliser des écoulements de manière assez proche de la réalité. Seuls les configurations les plus simples peuvent être résolues analytiquement. Dans ce cas, la technique la plus élégante est d'utiliser des fonctions complexes, plus précisément des transformations conformes². Avec cette option, l'écoulement autour d'un cylindre peut être représenté en tant que superposition d'un écoulement parallèle et d'un écoulement dipolaire (fig. 9.56).

Les deux points sur l'axe de symétrie horizontal sont des points de stagnation qui correspondent à une vitesse d'écoulement nulle. Notons que, dans ce modèle, l'écoulement est symétrique par rapport à un axe vertical, ce qui est une conséquence de l'hypothèse du fluide parfait, absent de viscosité. Mais dans certaines circonstances, par exemple lorsque les vitesses sont très faibles, ce modèle est très proche de la réalité (fig. 9.57).

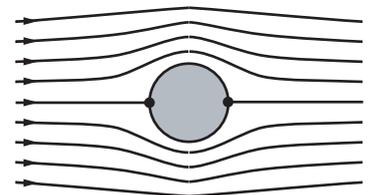


FIGURE 9.56 Représentation d'un écoulement potentiel autour d'un cylindre au moyen de lignes de courant.

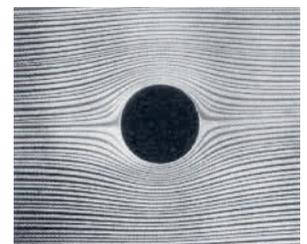


FIGURE 9.57 Visualisation d'un écoulement réel autour d'un cylindre. Les lignes de courant sont rendues visibles par de l'encre (FRAUENFELDER/HUBER, *Physik*, fig. 6.32, tous droits réservés).

2. L.V. BEWLEY (1963), *Two-Dimensional Fields in Electrical Engineering*, Dover Publications, New York.

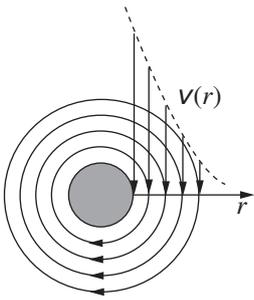


FIGURE 9.58 Écoulement tourbillonnaire.

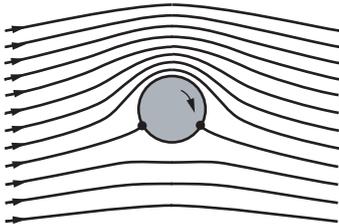


FIGURE 9.59 Superposition d'un écoulement potentiel et d'un écoulement tourbillonnaire.

9.9.5 Superposition d'un écoulement potentiel et d'un tourbillon

On appelle *tourbillon* un écoulement dont les lignes de courant sont des cercles concentriques tels que celui de la figure 9.58. Suivant la manière dont la vitesse varie, un tel écoulement peut être irrotationnel ou pas. Par exemple, si la vitesse varie de manière inversement proportionnelle à la distance de l'axe de rotation, l'écoulement est irrotationnel.

Si l'on superpose l'écoulement de la figure 9.58 à celui de la figure 9.56, les lignes de courant se resserrent au-dessus de l'obstacle alors qu'elle s'en écartent en dessous. Les points d'arrêt migrent en dessous de l'obstacle (fig. 9.59). A la section suivante, dans l'exemple 9.18, nous reviendrons sur la réalisation d'un tel écoulement et sur ses conséquences, en parlant de l'effet MAGNUS.

9.10 DYNAMIQUES DES FLUIDES VISQUEUX

Dans la section précédente, nous avons étudié le comportement des fluides parfaits, une approximation que le grand physicien et mathématicien John von Neumann appelle de l'*eau sèche*. Nous allons nous approcher de la réalité en prenant en compte la viscosité inhérente à tous les fluides.

9.10.1 Frottement dans les fluides

Notre expérience quotidienne nous permet de constater que tout déplacement dans un fluide, qu'il soit liquide ou gazeux, ou tout écoulement d'un fluide, est soumis à une résistance. Nous attribuons cette résistance à la *viscosité des fluides*.

Lors de la modélisation des écoulements, il est nécessaire de distinguer les deux types de régimes que nous avons mentionnés à la section 9.9.1 :

- *Le régime laminaire*: l'écoulement ou le déplacement dans le fluide a lieu de telle manière que les lignes de courant (trajectoires suivies par les particules du fluide) ne se croisent jamais (fig. 9.51). On peut alors appliquer au fluide un modèle de couches adjacentes qui glissent les unes contre les autres (comme les cartes d'un jeu que l'on étale sur une table).
- *Le régime turbulent*: il apparaît lorsque le déplacement ou l'écoulement se fait à une vitesse supérieure à une certaine vitesse critique. Au delà de cette vitesse, les frottements internes sont tels qu'il y a apparition de tourbillons. Dans cette situation, les dissipations d'énergie sont beaucoup plus importantes qu'en régime laminaire.

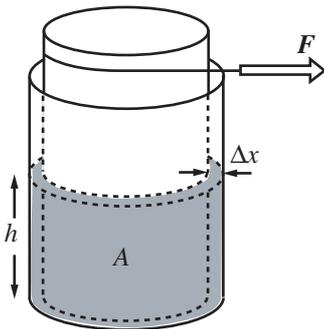


FIGURE 9.60 Expérience servant à déterminer le comportement d'un fluide en régime laminaire. Le fluide pris en sandwich entre deux cylindres est entraîné par le mouvement du cylindre intérieur.

Frottement en régime laminaire. La figure 9.60 montre une expérience possible pour déterminer la paramètre qui détermine l'intensité des forces de frottement dans un fluide visqueux. Dans un récipient 1, on place un cylindre 2 pouvant tourner autour de son axe sans frottement notable. Entre les deux cylindres, dont les rayons sont pratiquement les mêmes, on introduit un liquide jusqu'à une hauteur h . On entraîne le cylindre intérieur au moyen d'une force de module F choisi de telle sorte que la vitesse de rotation soit constante. On peut alors constater que la force d'entraînement est directement proportionnelle à l'aire de contact A du fluide avec le cylindre, à la vitesse v , inversement proportionnelle à l'épaisseur Δx de la couche de fluide. Si ces paramètres sont maintenus constants, elle varie en fonction du fluide considéré.

Interprétation: à cause de sa viscosité, le fluide adhère à la paroi mobile qui l'entraîne dans son mouvement. À l'opposé, il adhère à la paroi fixe, ce qui implique que la vitesse d'écoulement varie d'une paroi à l'autre. La vitesse d'écoulement évolue comme

si le fluide était constitué de couches adjacentes qui glissent les unes par rapport aux autres (fig. 9.61a). Ce phénomène de cisaillement est dû au fait que la quantité de mouvement s'écoule latéralement dans le fluide (dans la figure 9.61b, le mouvement a lieu horizontalement, mais la quantité de mouvement injectée dans les couches supérieures doit s'écouler verticalement vers la terre).

La prise en compte des résultats de l'expérience et leur interprétation nous permettent d'énoncer:

La force de frottement interne entre deux couches de fluide d'aire A séparées par une distance Δx et qui ont une vitesse relative Δv est, après passage à la limite, donnée par :

$$F_{\text{fr}} = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (9.84)$$

Le coefficient de proportionnalité η , qui se mesure en Pa·s, est appelé coefficient de viscosité dynamique du fluide. Le facteur dv/dx , qui décrit la variation locale de la vitesse, est le gradient de vitesse. Un fluide qui obéit à la loi ci-dessus (loi de NEWTON) est dit newtonien.

À partir de cette loi générale, on peut déduire des lois spécifiques.

Couche limite. On appelle *couche limite* la couche de fluide entraînée (de manière différentielle, c'est-à-dire variant d'un endroit à l'autre comme le montre la figure 9.62) par un objet en mouvement dans un fluide ou retenue par un obstacle. On comprend facilement que l'épaisseur de cette couche croît avec les dimensions linéaires de l'obstacle et la viscosité du fluide et décroît avec la masse volumique du fluide et sa vitesse. La modélisation de ce phénomène permet de montrer que cette couche limite a pour ordre de grandeur:

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\eta L}{\rho v}} \quad (9.85)$$

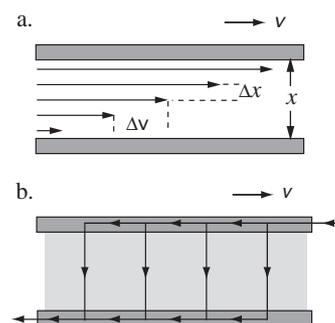
où L représente une dimension linéaire caractéristique de l'obstacle.

L'analyse de la répartition spatiale d'écoulements débouche sur des équations différentielles dans lesquelles la variable temporelle est remplacée par une ou plusieurs variables spatiales. Les conditions initiales sont alors remplacées par des *conditions aux limites*. L'exemple 9.16 illustre ce genre de situation.

EXEMPLE 9.16. Établissement de la loi de HAGEN-POISEUILLE.

Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η s'écoule à travers une conduite cylindrique de longueur l dont le rayon R est inférieur à l'épaisseur δ de la couche limite. En admettant que l'écoulement est laminaire, déterminez (a) le profil des vitesses d'écoulement; (b) l'intensité du flux volumique total et la valeur de la résistance à l'écoulement; (c) comment la résistance à l'écoulement dépend de la vitesse moyenne de l'écoulement.

SOLUTION: (a) Nous devons tenir compte du fait que la vitesse d'écoulement est variable, nulle sur les parois, maximale sur l'axe du cylindre. Considérons un volume de fluide trouvant place dans un cylindre de rayon r (fig. 9.63). La force de frottement interne qui s'exerce sur le manteau du cylindre de fluide est donnée par la loi de NEWTON. Dans notre repère, elle se projette négativement:



Transport de quantité de mouvement

FIGURE 9.61 Modèle de couches adjacentes: (a) le fluide pris en sandwich entre les deux plaques adhère à la plaque mobile et à la plaque fixe; il s'établit un gradient de vitesse entre les deux plaques; (b) la quantité de mouvement injectée dans le fluide par la plaque supérieure s'écoule à travers le fluide.

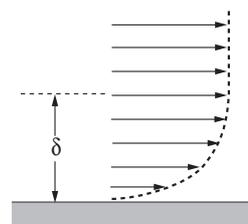


FIGURE 9.62 Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une paroi fixe ou autour d'un obstacle, la vitesse sur la paroi ou sur l'obstacle est nulle. On appelle couche limite la couche de fluide à l'intérieur de laquelle la vitesse passe de la valeur nulle à la valeur de l'écoulement non perturbé.

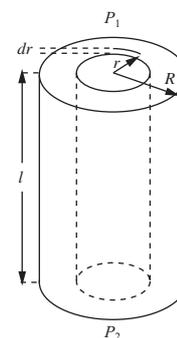


FIGURE 9.63 Pour déterminer le flux volumique total, il est nécessaire de tenir compte de la variation radiale de la vitesse. On le fait en subdivisant l'écoulement en cylindres annulaires d'épaisseur dr .

$$F_{fr} = -\eta A_{\text{manteau}} \frac{dv}{dr} = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

En régime stationnaire, elle est équilibrée par la force pressante due à la différence de pression entre la section d'entrée et celle de sortie. Cette force se projette positivement :

$$F_{\text{press}} = \Delta P \cdot A_{\text{section}} = (P_1 - P_2) \cdot \pi r^2$$

En égalant ces deux équations, nous trouvons :

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} r \cdot dr$$

L'intégration de chacun des membres donne :

$$v(r) = \int dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} \int r \cdot dr = -\frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} r^2 + C$$

La valeur de la constante d'intégration C est obtenue en exigeant que la vitesse d'écoulement soit nulle au niveau de la paroi, donc pour $r = R$. Nous obtenons :

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique, ce que confirme la figure 9.64.

(b) Le flux volumique n'est pas constant sur toute la section, vu que la vitesse d'écoulement varie. Nous devons donc l'évaluer en sommant tous les flux volumiques élémentaires dI_V à travers les cylindres annulaires compris entre r et $r + dr$ (fig. 9.63) :

$$dI_V(r) = 2\pi r dr \cdot v(r) = \frac{2\pi(P_1 - P_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) r dr = -\frac{\pi\Delta P}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr$$

Le flux total s'obtient par intégration :

$$I_V = -\frac{\pi\Delta P}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = -\frac{\pi\Delta P}{2\eta l} \frac{R^4}{4} = -\Delta P \frac{\pi R^4}{8\eta l} = -\Delta P \frac{\pi D^4}{128\eta l} = -\frac{\Delta P}{R_V}$$

La dernière égalité est la loi de résistance hydraulique. Nous en déduisons que la résistance à l'écoulement d'un fluide de viscosité η transporté à travers une conduite cylindrique de longueur l et de diamètre D inférieur à la double épaisseur de la couche limite est donnée par :

$$R_V = \frac{128\eta l}{\pi D^4}$$

C'est la loi de HAGEN-POISEUILLE que nous avons utilisée dans le premier chapitre, à la section 1.7.2. La relation que nous venons de démontrer explique l'observation que nous avons faite au chapitre 1, à savoir que la pression diminue linéairement le long d'une conduite qui transporte un fluide en régime laminaire.

(c) Pour savoir comment la force de frottement dépend de la vitesse d'écoulement, nous partons de la loi de résistance :

$$\Delta P = -R_V I_V = -\frac{128\eta l}{\pi D^4} I_V$$

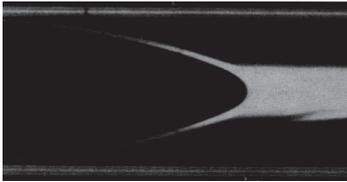


FIGURE 9.64 Visualisation du profil parabolique de la répartition des vitesses d'un écoulement laminaire dans une conduite de diamètre inférieur au double de l'épaisseur de la couche limite (FRAUENFELDER / HUBER, *Physik*, fig. 6.56, tous droits réservés).

Comme nous l'avons dit plus haut, la force de frottement est compensée par la force pressante, ce qui nous permet d'écrire (en ne travaillant que sur les modules):

$$F_{\text{fr}} = A_{\text{section}} \Delta P = \frac{\pi D^2}{4} \Delta P = \frac{\pi D^2}{4} \frac{128 \eta l}{\pi D^4} I_v = \frac{32 \eta l}{D^2} I_v$$

Nous pouvons remplacer l'intensité du flux volumique par le produit de l'aire de la section et d'une vitesse d'écoulement moyenne; il en résulte:

$$F_{\text{fr}} = \frac{32 \eta l}{D^2} I_v = \frac{32 \eta l}{D^2} \frac{\pi D^2}{4} \bar{v} = 8 \pi \eta l \cdot \bar{v}$$

ce qui nous permet de conclure qu'en régime laminaire, la force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse moyenne d'écoulement et à la longueur l de la conduite:

$$F_{\text{fr}} = kl \cdot \bar{v}$$

C'est pour cette raison que, le long d'un oléoduc, on doit introduire des stations de pompage régulièrement espacées afin de maintenir une pression suffisante pour entretenir le courant. ■

Loi de Stokes. De manière analogue à ce qui a été fait dans l'exemple 9.16, on peut trouver que:

La force de frottement exercée sur une sphère de rayon R qui se déplace à une vitesse de module v dans un fluide de viscosité η est donnée par

$$F_{\text{fr}} = 6\pi\eta Rv \quad (9.86)$$

pour autant que l'écoulement du fluide autour de la sphère reste laminaire.

Dans un viscosimètre à bille, on mesure la vitesse de chute stationnaire d'une bille de diamètre connu pour déterminer la viscosité du fluide dans lequel elle tombe. Les gouttelettes de bouillart sédimentent en régime laminaire. Elles sont donc soumises à une force de frottement donnée par la loi de Stokes. Il en va de même des particules en suspension dans un fluide; pour augmenter la vitesse de sédimentation et pour les séparer en fonction de leur masse volumique, on a recours à la centrifugation, comme le montre l'exemple 9.14.

EXEMPLE 9.17. Détermination de la vitesse de chute stationnaire en régime laminaire.

Déterminer la vitesse de chute stationnaire d'une bille sphérique de rayon égal à 0.5 cm et de masse égale à 1.4 g dans une huile de masse volumique égale à 850 kg m^{-3} et dont le coefficient de viscosité vaut 0.188 Pa·s.

SOLUTION: La bille est soumise à trois forces: la pesanteur, la poussée d'ARCHIMÈDE et le frottement visqueux. La vitesse stationnaire correspond à l'état d'équilibre:

$$\begin{aligned} mg - F_{\text{fr}} - F_A &= 0 \\ mg - 6\pi\eta Rv - \rho Vg &= 0 \\ mg - 6\pi\eta Rv - \rho \frac{4\pi R^3}{3} g &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons pour la vitesse stationnaire :

$$v = \frac{3m - 4\pi\rho R^3}{18\pi\eta R} g = 0.529 \text{ m s}^{-1}$$

■

9.10.2 Similitude dynamique et nombre de REYNOLDS

L'étude générale du passage du régime laminaire au régime turbulent (fig. 9.65) est possible grâce à la théorie des *similitudes dynamiques*.

Cette théorie permet entre autres de résoudre des problèmes aérodynamiques à partir de modèles réduits (essais en soufflerie). Le modèle réduit doit satisfaire à trois critères de similitude :

- similitude géométrique: le modèle doit être une reproduction géométrique exacte (échelle réduite) de l'original ;
- similitude cinématique: le profil des vitesses d'écoulement autour du modèle est semblable à celui de l'original, le rapport des modules des vitesses entre l'original et le modèle est une constante ;
- similitude dynamique: le rapport des forces et des pressions aux points correspondants est égal à un facteur d'échelle constant.

Les similitudes peuvent être exprimées au moyen de nombres sans dimension (nombre de REYNOLDS, de Froude, de Mach, de Strouhal, etc.). Le choix de l'un ou de l'autre de ces nombres dépend de la particularité du processus auquel on s'intéresse.

Le nombre de REYNOLDS est celui qui est le plus souvent utilisé. Il exprime le rapport des forces d'inertie et des forces dues à la viscosité. Si nous désignons par ρ la masse volumique du fluide, par v_∞ la vitesse d'écoulement loin de l'obstacle, par L une dimension caractéristique de l'obstacle ou de l'écoulement et par η la viscosité dynamique du fluide, la densité de flux convectif de quantité de mouvement est égale au produit de la masse volumique et du carré de la vitesse. Le flux convectif lui-même est égal au produit de la densité de flux et de l'aire L^2 de la section à travers laquelle il s'écoule. La force de frottement due à la viscosité est, en vertu de la loi de NEWTON égale au produit de la viscosité, du gradient de vitesse que nous approximations par v_∞/L et de l'aire L^2 de la surface à travers laquelle la quantité de mouvement s'écoule latéralement, créant une contrainte de cisaillement. Nous avons donc :

$$\text{Re} = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force due à la viscosité}} = \frac{\rho v_\infty^2 L^2}{\eta \frac{v_\infty}{L} L^2} = \frac{\rho v_\infty L}{\eta} \tag{9.87}$$

Vu que la section à travers laquelle s'écoule la quantité de mouvement est la même pour les deux forces mises en rapport, le nombre de REYNOLDS peut également être interprété comme le rapport de flux convectif de quantité de mouvement et de son flux diffusif (la viscosité contraint la quantité de mouvement de diffuser latéralement à travers le fluide).

Deux écoulements sont équivalents s'ils ont le même nombre de REYNOLDS. On remarque que, pour un nombre de REYNOLDS constant, les dimensions linéaires de l'obstacle et la vitesse de l'écoulement sont inversement proportionnelles. Cela explique pourquoi il faut donner aux souffleries de grandes dimensions, pour qu'elles puissent accueillir des modèles suffisamment grands. En effet, si la vitesse de l'air devient trop grande, on ne peut plus le considérer comme incompressible.

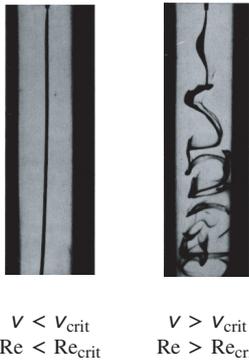


FIGURE 9.65 Le passage du régime laminaire au régime turbulent a lieu lorsque le nombre de REYNOLDS associé à l'écoulement dépasse la valeur critique, ce qui est le cas lorsque la vitesse d'écoulement est supérieure à la vitesse critique (FRAUENFELDER / HUBER, *Physik*, fig. 6.58, tous droits réservés).

Le passage du régime laminaire au régime turbulent se fait à une certaine vitesse, appelée vitesse critique v_{crit} , à laquelle on associe un nombre de REYNOLDS critique

$$\text{Re}_{\text{crit}} = \frac{\rho v_{\infty, \text{crit}} L}{\eta} \quad (9.88)$$

Ce nombre de REYNOLDS critique n'est pas une constante, mais peut varier suivant les circonstances (rugosité des parois, conditions à l'injection, etc.) Par exemple, on trouve dans la littérature pour l'écoulement dans une conduite cylindrique de diamètre D un nombre de REYNOLDS critique égal à 2320 (en fait, ce nombre peut varier entre 2200 et 40000). Cela signifie que pour de l'eau ($\eta = 1.21 \cdot 10^{-3}$ Pa·s) dans un tube cylindrique de dimension $L = D = 2$ cm, la vitesse critique devient égale à 14.0 cm s^{-1} . Le banal robinet du lavabo nous permet de vérifier quotidiennement cette estimation: s'il est peu ouvert, l'eau s'écoule dans un filet clair et lisse; s'il est fortement ouvert, l'eau s'écoule en régime turbulent.

Pour une sphère plongée dans un écoulement, le nombre de REYNOLDS critique est approximativement de 10. La figure 9.66 montre comment le profil de l'écoulement évolue en fonction de ce nombre et comment le passage au régime turbulent se fait progressivement.

9.10.3 Résistance et frottements en régime turbulent

La figure 9.66 montre également comment se forment les tourbillons: à cause des frottements dans la couche limite, les particules de fluide proches de l'obstacle perdent de l'énergie et s'accumulent derrière l'obstacle (zone de fluide mort). Ces masses sont mises en mouvement de rotation par le frottement des couches voisines et sont chassées de la zone de fluide mort par l'arrivée de nouvelles particules.

La formation des tourbillons (leur mise en mouvement) se fait aux dépens de l'énergie cinétique du fluide en mouvement. Les forces de frottement en régime turbulent croissent donc avec le carré de la vitesse. Des expériences répétées et l'étude théorique permettent de montrer qu'elles sont proportionnelles à la grandeur $\rho v^2/2$ que l'on appelle la pression dynamique (on vérifie en effet que cette expression a la dimension d'une pression), et qu'elles dépendent de la géométrie de l'objet.

La force de résistance dans un écoulement turbulent est donnée par:

$$F_{\text{fr, turb}} = C_x A_{\text{app}} \frac{\rho v^2}{2} \quad (9.89)$$

Dans cette relation, A_{app} est appelé la section apparente de l'obstacle. C_x est un nombre sans dimension, appelé coefficient de traînée, qui dépend de la forme géométrique de l'objet (symbolisée par φ), de la forme de l'écoulement (caractérisée par le nombre de REYNOLDS Re), ainsi que de la rugosité de la surface (caractérisée par la hauteur de rugosité relative ε):

$$C_x = f(\varphi, \text{Re}, \varepsilon) \quad (9.90)$$

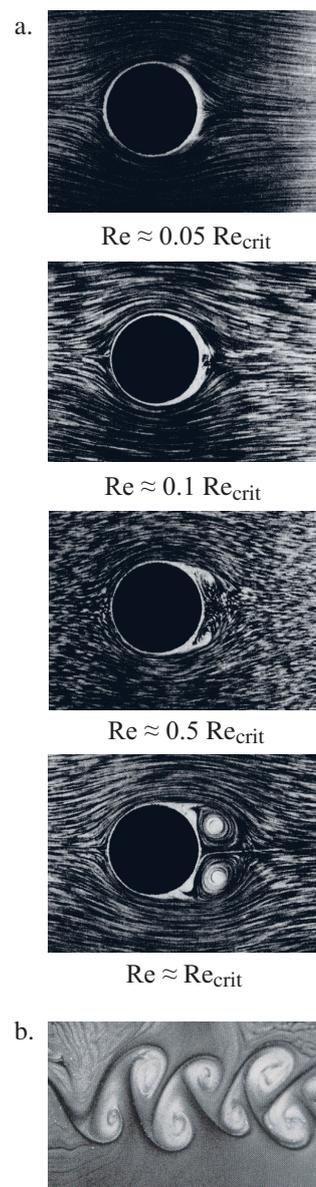


FIGURE 9.66 (a) Mise en évidence du passage progressif du régime laminaire au régime turbulent en fonction du nombre de REYNOLDS (FRAUENFELDER / HUBER, *Physik*, fig. 6.59, tous droits réservés). (b) Pour un nombre de REYNOLDS nettement au-dessus de la valeur critique, les tourbillons qui se forment derrière l'obstacle sont chassés de la « zone de fluide mort » par l'arrivée de fluide et se détachent, formant un trainée de tourbillons dont le sens de rotation alterne. Cette trainée est appelée *sillage tourbillonnaire de VON KARMAN*.

La figure 9.67 de l'exemple 9.18 montre comment cette valeur évolue pour une sphère, autant en fonction du nombre de REYNOLDS que de sa texture.

EXEMPLE 9.18. Trajectoire d'une balle de tennis de table.

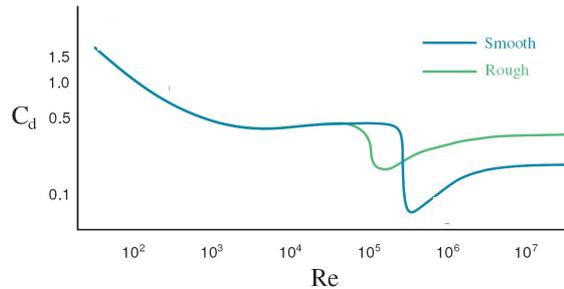
Analysez la trajectoire d'une balle de tennis de table en fonction de sa vitesse de rotation: (a) évaluez la plage des valeurs du nombre de REYNOLDS pour une vitesse de module variant de 1 m s^{-1} à 50 m s^{-1} ; (b) spécifiez les forces agissant sur la balle et déterminez le module de chacune de ces forces pour une vitesse moyenne de module égal à 10 m s^{-1} , et une vitesse de rotation de 20 tr s^{-1} ; (c) modélisez le système et simulez son comportement pour différentes valeurs et divers sens de la vitesse de rotation.

SOLUTION: (a) Dans l'équation (9.87), nous introduisons les valeurs de la masse volumique de l'air égale à 1.2 kg m^{-3} , le diamètre de la balle égal à $40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, et la viscosité dynamique de l'air égale à $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}^{-1}$, ce qui donne, pour la plage de vitesses considérées:

$$2.6 \cdot 10^3 < \text{Re} < 1.4 \cdot 10^5$$

Dans ce domaine, le coefficient de traînée est pratiquement constant, de valeur égale à 0.5.

FIGURE 9.67 Coefficient de traînée en fonction du nombre de REYNOLDS pour une sphère lisse (tennis de table) ou rugueuse (tennis, baseball).



(b) Pendant son vol, la balle est soumise à trois forces: la force de pesanteur F_G :

$$F_G = mg$$

la résistance de l'air $F_{\text{Trainée}}$:

$$F_{\text{Trainée}} = C_x A_{\text{app}} \frac{\rho}{2} v^2 u_v$$

où u_v est le vecteur unitaire associé au vecteur vitesse. Le coefficient de traînée C_x varie en fonction du nombre de REYNOLDS.

La troisième force est l'effet MAGNUS F_{Magnus} , dont l'expression varie d'un auteur à l'autre. Nous adoptons la version suivante³:

$$F_{\text{Magnus}} = C_z A_{\text{app}} \frac{\rho}{2} v^2 (u_\omega \times u_v)$$

où $u_\omega \times u_v$ est le produit vectoriel des vecteurs unitaires liés respectivement à la vitesse de rotation et à la vitesse de translation. Ce produit rend compte du fait que l'effet MAGNUS s'exerce perpendiculairement aux deux vecteurs de vitesse. Le coefficient C_z est le coefficient de

3. ROBINSON G. and ROBINSON I. (2013): *The motion of an arbitrary rotating spherical projectile and its application to ball games*, Physica Scripta 88, Number 1.

portance; il varie en fonction du rapport entre vitesse de rotation et vitesse de translation. Ce rapport, appelé coefficient de spin S :

$$S = \frac{\omega R}{v}$$

est le quotient de la vitesse circonférentielle et de la vitesse de translation.

Si nous prenons une vitesse moyenne de module égal à 10 m s^{-1} , et une vitesse de rotation de 20 tr s^{-1} , le coefficient de spin est égal à 0.25, ce qui correspond à une valeur de 0.26 pour le coefficient de portance. Les valeurs respectives des modules des forces entrant en jeu sont, à l'instant initial:

$$F_G = 26.5 \text{ mN}, \quad F_{\text{Trainée}} = 37.8 \text{ mN}, \quad F_{\text{Magnus}} = 14.5 \text{ mN}$$

(c) Pour modéliser le comportement dynamique de la balle, nous nous plaçons dans un repère $Oxyz$ avec l'axe Ox coïncidant avec l'axe de la table, l'axe Oy parallèle au filet et l'axe Oz perpendiculaire à la table, dirigé vers le haut. L'origine est placée sur la ligne de fond, au milieu de la largeur et au niveau de la table.

La figure 9.68 montre la composante suivant Oz du modèle. La grandeur Coeff représente le facteur commun à la force de traînée et à l'effet MAGNUS, à savoir $A_{\text{app}} \cdot \rho v^2 / 2$.

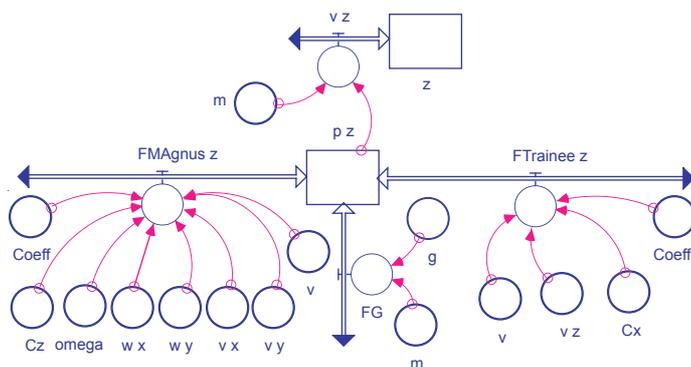


FIGURE 9.68 Modèle du comportement dynamique d'une balle de tennis de table. La figure ne montre que la composante suivant Oz .

Le modèle a servi à simuler, dans un premier temps, la trajectoire d'une balle frappée 50 cm derrière la ligne de fond et 25 cm au-dessus du niveau de la table, sous un angle positif de 15° , dans l'axe de la table, avec une vitesse initiale de module égal à 7 m s^{-1} . Le paramètre variable est la vitesse de rotation imprimée à la balle de telle manière que le vecteur ω ait une seule composante non nulle, parallèle à Oy .

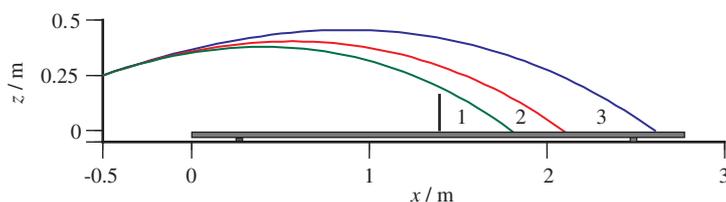


FIGURE 9.69 Trajectoires d'une balle de tennis de table: la vitesse initiale et l'angle de départ sont les mêmes, la vitesse de rotation varie en valeur et en sens. 1: rotation avant de 10 tr s^{-1} ; 2: aucune rotation; 3: rotation arrière de 10 tr s^{-1} .

La trajectoire la plus courte, qui frôle le filet, correspond à une rotation avant de 10 tours par seconde, un coup que l'on appelle topspin. La rotation est provoquée par une frappe près du pôle nord de la balle, et l'adhérence entre la balle et le revêtement de la raquette imprime la rotation à la balle. La circulation engendrée par cette rotation est opposée à l'écoulement de l'air au-dessus de la balle alors qu'elle va dans le même sens en dessous. La pression est plus élevée au-dessus, et l'effet MAGNUS va dans la même direction et le même sens que la force de pesanteur.

La trajectoire numéro 2 correspond à une frappe dans le voisinage de l'équateur, ce qui n'imprime que peu ou pas de rotation à la balle. Seule la force de pesanteur la fait redescendre sur la table.

Lorsque le joueur frappe la balle près du pôle sud (on parle de balle coupée), il engendre une rotation arrière. Les écoulements d'air sont inversés par rapport au topspin, et l'effet MAGNUS est opposé à la force de pesanteur. La trajectoire est allongée.

Le tableau ci-dessous récapitule les paramètres les plus significatifs de chacune de ces trajectoires.

	Coup	$\mathbf{v}_{rot} / t \text{ s}^{-1}$	t_{vol} / s	$\mathbf{v}_{impact} / m \text{ s}^{-1}$	Apogée / m
1	Topspin	10	0.41	5.55	0.38
2	Sans effet	0	0.47	5.37	0.40
3	Coupé	-10	0.58	5.09	0.46

Il est rare que le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ n'ait qu'une seule composante non nulle. Dans un tel cas, l'effet MAGNUS s'exerce également en dehors d'un plan vertical, ce qui entraîne une déviation latérale de la trajectoire. À titre d'exemple, considérons un coup où la rotation imprimée à la balle est caractérisée par un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ parallèle au plan Oyz . Les paramètres sont énumérés dans le tableau ci-dessous et les deux projections de la trajectoire apparaissent dans la figure 9.70.

	Coup	$\mathbf{v}_{rot} / t \text{ s}^{-1}$	t_{vol} / s	$\mathbf{v}_{impact} / m \text{ s}^{-1}$	Apogée / m	Déviation / m
4	Sidespin	y: 8, z: 10	0.45	5.86	0.42	0.42
5					0.22	0.22

FIGURE 9.70 Trajectoire d'une balle de tennis de table frottée latéralement (sidespin). 4: vue latérale; 5: vue verticale.

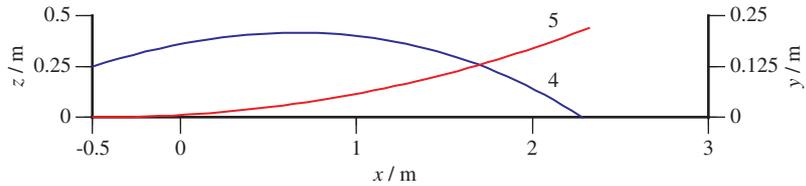
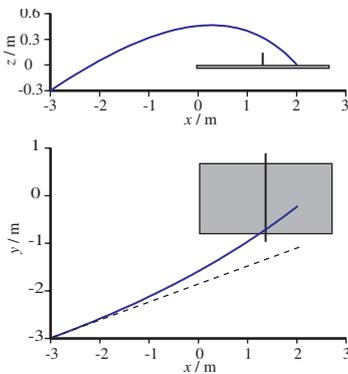


FIGURE 9.71 Le sidespin peut servir à ramener sur la table une balle fortement déportée latéralement.

Dans le tennis de table de haut niveau, les joueurs sont souvent très éloignés de la table, autant en profondeur que latéralement: ils ne peuvent ramener la balle sur la table qu'en lui imprimant une forte rotation, ce qui engendre des trajectoires fortement incurvées, comme le montre l'exemple de la figure 9.71.

Résumé du chapitre

Si la grandeur extensive fondamentale en mécanique est la quantité de mouvement \mathbf{p} , l'équation de bilan est: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{I}_{p,cond} + \Sigma_p$, où $\mathbf{I}_{p,cond}$ et Σ_p représentent respectivement la somme des flux de quantité de mouvement par conduction et la somme des apports en mode radiatif. Cette équation de bilan correspond à la deuxième loi de NEWTON, si nous faisons correspondre à la somme des flux de quantité de mouvement par conduction la somme \mathbf{F} des forces dues au contact entre des corps et si nous assimilons l'apport par rayonnement à la force de pesanteur $m\mathbf{g}$. L'équation de bilan devient $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}$. Sachant que le taux de variation de la quantité de mouvement est $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$, on retrouve la forme usuelle de l'équation de mouvement du point matériel.

Qu'en est-il des deux autres lois? La première est un cas particulier de la deuxième et les deux énoncés sont équivalents si l'on tient compte de la correspondance entre forces et flux de quantité de mouvement. La troisième, la loi d'action et de réaction, est nécessaire dans la vision de NEWTON parce que les interactions entre les systèmes sont formulées au moyen de forces attribuées à chacun des systèmes considérés isolément. Si en revanche l'interaction est modélisée au moyen d'échange de quantité de mouvement, il n'est pas nécessaire d'énoncer une loi particulière, puisqu'il est évident que l'intensité du flux émergent du premier système est égale et opposée à celle du même flux entrant dans le second système.

Comme les équations sont énoncées par rapport à un repère, il est nécessaire d'énoncer une règle de correspondance entre les flux et les forces. À un flux de quantité de mouvement entrant dans un élément d'un système ou à un taux de source positif correspond une force dirigée dans le sens de référence positif, à un flux sortant de cet élément du système ou à un taux de source négatif une force de sens opposé au sens de référence positif.

Un flux de quantité de mouvement entraîne un flux d'énergie donné par le produit scalaire du potentiel (la vitesse) et de l'intensité du flux. Si l'on substitue une force au flux de quantité de mouvement, le flux d'énergie correspond à la puissance de cette force: $\mathcal{P}(F) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$. La puissance du processus lié au flux de quantité de mouvement entre deux niveaux de la vitesse \mathbf{v} , toujours associé à un transbordement d'énergie, est définie sans ambiguïté par: $\mathcal{P}_{\text{proc}} = -\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_p$ et ne dépend pas du choix du référentiel. La puissance du processus sera positive si le processus libère de l'énergie (c'est le cas lorsque le processus est spontané, c'est-à-dire lorsque la vitesse décroît), négative si le processus lie (absorbe) de l'énergie (ce qui est le cas lorsque le processus est contraint et entraîne une augmentation de la vitesse).

Lors des interactions, les systèmes peuvent accumuler de l'énergie, soit sous forme capacitive en tant qu'énergie cinétique $E_C = 1/2 m v^2$, soit sous forme inductive, par exemple dans un ressort $E_L = 1/2 k x^2$.

Lorsque deux objets sont en contact et échangent de la quantité de mouvement, on peut décomposer la force associée à ces flux de quantité de mouvement en deux composantes, la première perpendiculaire à la surface de contact, la force normale \mathbf{F}_n , la seconde parallèle à la surface de contact, la force de frottement sec ou dynamique \mathbf{F}_{fr} en cas de mouvement réciproque, ou la force d'adhérence \mathbf{F}_{adh} ou force de frottement statique en l'absence de mouvement réciproque. En première approximation, la force de frottement est proportionnelle à la force normale: $\mathbf{F}_{\text{fr}} = \mu \mathbf{F}_n$. Par contre, la force d'adhérence évolue entre deux limites: $0 \leq \mathbf{F}_{\text{adh}} \leq \mathbf{F}_{\text{adh, max}} = \mu_{\text{adh}} \mathbf{F}_n$. Si la limite supérieure est dépassée, le système bascule en régime dynamique.

La présence d'éléments inductifs dans un système, par exemple un ressort, peut entraîner l'apparition d'oscillations.

Le mouvement d'un solide rigide peut être décomposé en un mouvement de translation de son centre de masse que l'on traite comme celui d'un point matériel: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{I}_p = \mathbf{F}$, où \mathbf{F} représente la somme des forces extérieures, et une rotation autour d'un axe instantané passant par le centre de masse: $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{I}_L = \mathbf{M}$, où \mathbf{M} est la somme des moments extérieurs.

Pour un fluide parfait (sans viscosité), la pression P varie avec le potentiel φ . L'équation de l'équilibre hydrostatique: $\mathbf{grad}(P) = -\rho \mathbf{grad}(\varphi)$ permet d'évaluer la pression en fonction des variations du potentiel, pour autant que l'on connaisse les variations de la masse volumique du fluide. Un objet plongé dans un fluide subit une poussée orientée dans la direction de la pression décroissante, la poussée d'ARCHIMÈDE.

Le débit volumique d'un fluide parfait incompressible qui s'écoule à travers une conduite de section variable A , est constant, ce qui est énoncé par l'équation de continuité

$A_1 v_1 = A_2 v_2$. En outre, l'équation de BERNOULLI: $\rho v^2/2 + \rho\varphi + P = \text{const}$ exprime la conservation de l'énergie. Le potentiel φ est égal à gz dans le cas de la pesanteur.

Les frottements dans les fluides visqueux influencent leur comportement dynamique. On distingue deux régimes: les écoulements laminaires dans lesquels les lignes de courant ne se croisent jamais, et au-delà d'une certaine vitesse critique, les écoulements turbulents caractérisés par l'apparition de tourbillons.

En régime laminaire, la force de frottement entre les couches de fluides d'aire A est donnée par la loi de NEWTON: $F_{\text{fr}} = \eta A \cdot dv/dx$, où η est le coefficient de viscosité dynamique. En général, les effets de la viscosité se manifestent essentiellement dans le voisinage des obstacles ou des parois des conduites, à l'intérieur de ce que l'on appelle une couche limite d'épaisseur $\delta \propto \sqrt{(\eta L / \rho v)}$, où L est une dimension linéaire caractéristique de l'obstacle.

Le passage du régime laminaire au régime turbulent se fait à une certaine vitesse, la vitesse critique v_{crit} , à laquelle on associe un nombre de REYNOLDS critique défini par $\text{Re}_{\text{crit}} = \rho v_{\infty, \text{crit}} L / \eta$, où v_{∞} représente la vitesse d'écoulement non perturbée. La force de frottement en régime turbulent est donnée par: $F_{\text{fr, turb}} = C_x A_{\text{app}} \rho v^2 / 2$. A_{app} est la section apparente de l'obstacle, C_x le coefficient de traînée.

Problèmes

- Une personne tire un bloc sur le sol à vitesse constante au moyen d'une corde (fig. 9.72). Choisissez la direction positive dans le sens du mouvement. (a) Identifiez le circuit fermé au travers duquel s'écoule la composante horizontale de la quantité de mouvement. (b) Déterminez les flux de quantité de mouvement et leurs signes relativement au bloc, à la personne et au sol. (c) Interprétez ces flux de quantité de mouvement en termes de forces. (d) Il existe plusieurs relations entre ces flux (forces). Lesquelles ont-elles à voir avec la troisième loi de NEWTON? Qu'expriment les autres relations?

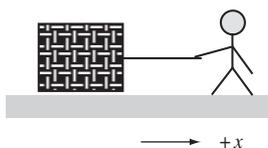


FIGURE 9.72
Problème 1

- Une corde de longueur L , de section A , de masse par unité de longueur λ constante, est suspendue à un crochet. Établissez l'équation de bilan de la quantité de mouvement pour un petit segment de la corde et déduisez-en l'équation différentielle pour le cas continu. Déterminez la densité de courant de quantité de mouvement dans la corde en fonction de la position. Quelle est la relation de cette grandeur par rapport à la contrainte mécanique dans la corde?
- Une balle de tennis est posée au sommet d'un ballon de football. On les laisse tomber ensemble. Les masses respectives sont de 442 g et 56 g. Le diagramme de la figure 9.89 montre les positions des centres des deux objets en fonction du temps. La résistance de l'air peut être considérée comme négligeable. (a) Isolez chacun des deux objets pour la durée du rebond sur le sol et identifiez toutes les forces auxquelles ils sont soumis. Admettez que la balle de tennis est en contact avec le ballon durant le rebond. (b) Déterminez les valeurs de la vitesse et de la quantité de mouvement juste avant et juste après le rebond. (c) Combien de quantité de mouvement est échangée avec le sol durant le rebond? Si la durée du rebond est de 4 ms, que vaut l'intensité moyenne de la force entre le ballon et le sol? (d) Combien d'énergie a été dissipée? (e) En l'absence de dissipation, la quantité de mouvement échangée serait-elle plus grande, égale, ou plus faible que dans le cas réel?

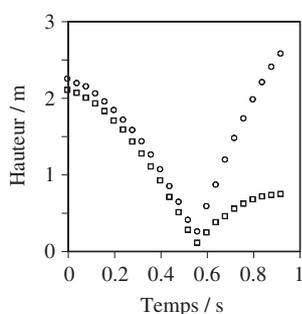


FIGURE 9.73
Problème 3

- Deux glisseurs équipés d'aimants glissent l'un vers l'autre sur un rail à coussin d'air. Ils se repoussent lorsqu'ils se rapprochent l'un de l'autre. Comme le flux d'air est relativement faible, le frottement est notable. La figure 9.74 montre l'évolution des vitesses respectives en fonction du temps. Les masses des glisseurs 1 et 2 sont respectivement de 0.868 kg et 0.618 kg.

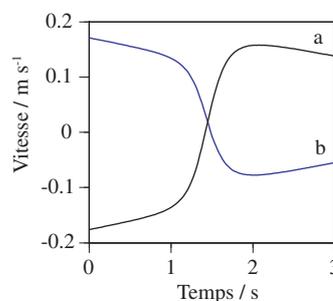


FIGURE 9.74
Problème 4

- Laquelle des deux courbes d'évolution de la vitesse (a ou b) est-elle relative au glisseur plus léger? Pourquoi?
 - Admettez une force de frottement constante de coefficient de frottement dynamique μ . Déterminez la valeur de ce coefficient de frottement à partir des données expérimentales.
 - Déterminez l'intensité de la force de répulsion lorsque la distance entre les deux glisseurs est minimale.
 - Selon quel mode l'échange de quantité de mouvement se déroule-t-il?
- Le comportement du tampon d'un wagon de chemin de fer a été simulé au moyen d'un modèle. Le wagon, de masse égale à 10 t, se déplace horizontalement et bute contre un obstacle fixe à une vitesse de module égale à 5 m s^{-1} . Les propriétés élastiques du tampon sont modélisées comme un ressort linéaire de longueur égale à 0.50 m. Le frottement interne est considéré comme une force constante de même intensité en compression et en détente. La figure 9.75 montre l'évolution de l'accélération durant le rebond sur l'obstacle.

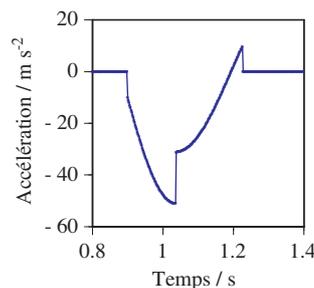


FIGURE 9.75
Problème 5

- Le ressort du tampon ne peut pas être comprimé sur une longueur supérieure à sa longueur propre, même si on néglige le frottement interne. (a) Quelle doit être la valeur minimale de la constante d'élasticité du ressort pour que cela soit possible? (b) En ne tenant pas compte du frottement interne, déterminez la durée de la collision. (c) Quelle est la raison de l'apparition du segment vertical entre les deux moitiés de la courbe de variation de l'accélération? (d) Déterminez la valeur de la force d'amortissement.

6. Un bloc de masse égale à 2.0 kg glisse vers le bas d'un plan incliné. Il est soumis à un frottement dynamique de coefficient égal à 0.30. Un ressort de constante d'élasticité égale à 2000 N m⁻¹ est fixé à l'avant du bloc (fig. 9.76).

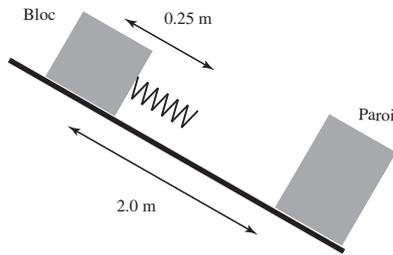


FIGURE 9.76
Problème 6

Lorsqu'il percute la paroi, le bloc est repoussé vers le haut et redescend un certain nombre de fois. Le diagramme de la figure 9.77 montre l'évolution de la position (ligne traitillée) et du module de la vitesse (ligne continue) du bloc.

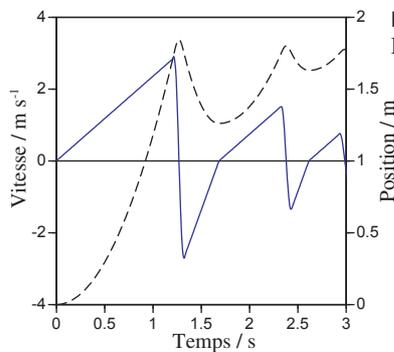


FIGURE 9.77
Problème 6

- (a) Déterminez et dessinez les forces qui agissent sur le bloc avant la collision avec la paroi, puis durant la collision (lorsque le bloc est encore en train de descendre). (b) À partir du graphique, déterminez la valeur de l'accélération avant la collision. (c) Quelle est l'inclinaison du plan? (d) Quelle est la valeur maximale de l'accélération? (e) Pourquoi le graphique de la vitesse présente-t-il un coude aux instants 1.7 s et 2.6 s?
7. Un cycliste franchit un virage de rayon égal à 64 m à une vitesse dont le module est donné par l'équation $v = ct + d$ avec $c = 1.0 \text{ m s}^{-2}$ et $d = 4.0 \text{ m s}^{-1}$. La masse totale du vélo et du cycliste est de 50 kg. Considérez l'instant $t = 4 \text{ s}$.
- (a) Déterminez module et direction de l'accélération du cycliste. (b) Dans la plan de la trajectoire, dessinez toutes les composantes horizontales des forces qui agissent sur le vélo et le cycliste. (c) Déterminez la valeur de la résistance de l'air sachant que la cycliste a une section apparente de 1.0 m² et que le coefficient de traînée vaut 1.0. La masse volumique de l'air est de 1.0 kg m⁻³. (d) Quelle doit être la valeur de la force d'adhérence entre le sol et les roues? Quelle est la direction de cette force? Quelle doit être la valeur minimale du coefficient d'adhérence pour éviter le dérapage? (e) Que vaut le taux de dissipation d'énergie?
8. Une automobile de masse égale à 1000 kg se déplace dans un virage plan de rayon égal à 200 m à une vitesse dont le

module croît linéairement de 36 km h⁻¹ à 72 km h⁻¹ en 5 s. La surface apparente du véhicule est de 3.0 m². La densité de l'air et le coefficient de traînée sont respectivement de 1.2 kg m⁻³ et 0.5.

- (a) Quelle distance le véhicule parcourt-il durant ces 5 s? (b) Déterminez le module du vecteur d'accélération ainsi que l'angle qu'il forme avec le rayon instantané 3 s après le début du mouvement considéré. (c) À l'instant $t = 5 \text{ s}$, le véhicule atteint une plaque de verres. Quel va être le mouvement du véhicule (direction et accélération initiale)?
9. Un personne de masse égale à 60 kg est tirée à vitesse constante par un skilift le long d'une pente inclinée de 30°. Le câble de traction est parallèle à la pente; il est tendu et peut être modélisé comme une tige rigide. Le câble qui tire le skieur forme un angle de 45° avec le câble de traction. Sa masse et celle de la sellette sont négligeables. Le mécanisme monté sur le câble de traction a une masse de 15 kg. Le coefficient de frottement dynamique entre la neige et les skis vaut 0.20.

- (a) Quelles sont les forces qui agissent respectivement sur la personne et sur le mécanisme de traction? (b) Que vaut le module de la force exercée par le câble de traction sur le mécanisme de traction? (c) Que vaut le module de la force exercée par la sellette sur la personne tractée?

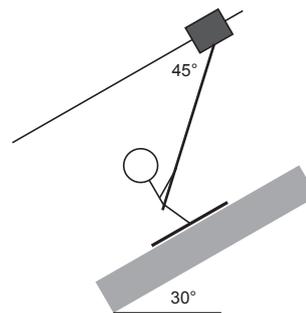


FIGURE 9.78
Problème 9

10. Un bidon d'eau de masse égale à 10 kg est suspendu à une corde de masse négligeable enroulée autour d'un treuil cylindrique de masse égale à 20 kg et de rayon égal à 6.0 cm. Ce dispositif est fixé à la margelle d'un puits de 10 m de profondeur. On laisse aller la manivelle du treuil et le bidon plonge vers le bas. En négligeant le frottement du treuil, déterminez combien de temps durera la chute.



FIGURE 9.79
Problème 10

11. Un yoyo de masse égale à 1.0 kg et de moment d'inertie égal à 0.0025 kg m² descend vers le bas, retenu par une ficelle longue de 1.0 m enroulée autour de l'axe de 2.5 cm de rayon.

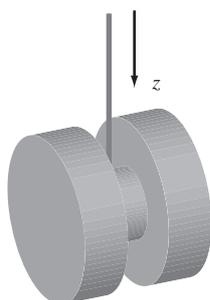


FIGURE 9.80
Problème 11

- (a) Déterminez et dessinez les forces et les couples qui agissent sur le yoyo et énoncez les équations de bilan de la quantité de mouvement et du moment cinétique. (b) Déterminez l'accélération du centre de masse. (c) Énoncez l'équation de l'évolution de $z(t)$ pendant la première descente. (d) En négligeant l'influence des frottements, esquissez le plus précisément possible le diagramme $z-t$ du mouvement du centre de masse pour une durée correspondant à quatre fois le temps que dure la première descente. (e) Que vaut l'énergie cinétique totale du yoyo à l'instant où il a déroulé la moitié de la ficelle?
12. Un volant dont le moment d'inertie vaut 10.0 kg m² est entraîné par un moteur et freiné par un frein à friction. Ce frein a une caractéristique de type ohmique.

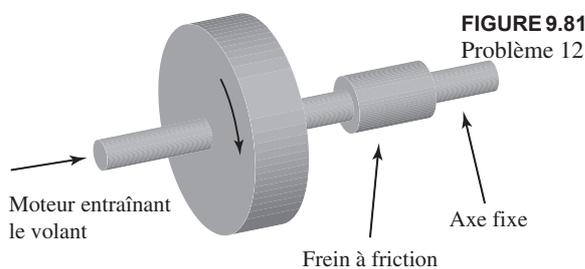


FIGURE 9.81
Problème 12

Le couple délivré par le moteur croît linéairement dans le temps selon la loi: $I_L(t) = at + b$, avec $a = 1.0 \text{ Nm s}^{-1}$ et $b = 10.0 \text{ Nm}$. On observe que la vitesse angulaire du volant varie comme le montre la figure 9.82.

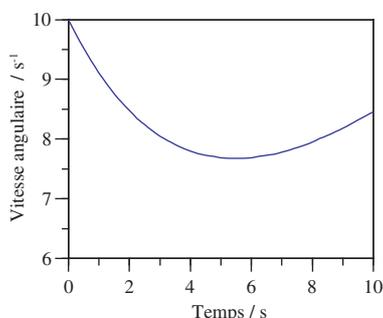


FIGURE 9.82
Problème 12

- (a) Déterminez l'accélération angulaire et la valeur du couple moteur à l'instant $t = 0 \text{ s}$. Que vaut le flux de moment cinétique à travers le frein à friction? (b) Déterminez le flux de moment cinétique à travers le frein à friction à l'instant $t = 5.5 \text{ s}$. (c) À partir de ces deux valeurs, déterminez la caractéristique ohmique du frein à friction. Quelle est la résistance de ce frein?

13. Un cylindre homogène de rayon égal à 5.0 cm et de masse égale à 1.0 kg roule sans glisser vers le bas d'un plan incliné de 30°. À partir de l'immobilité, il couvre une distance de 1.5 m en une seconde. La résistance de l'air peut être négligée. (a) Que valent les modules de l'accélération linéaire et de l'accélération angulaire? (b) Déterminez la valeur de la composante de la force parallèle à la surface. (c) En quel point la force normale agit-elle sur le corps? En d'autres termes, de combien le point d'attaque de cette composante de la force exercée par la surface sur le cylindre doit-elle être déplacée vers l'avant par rapport à l'axe du cylindre?
14. Il s'agit de dimensionner le balancier d'une montre mécanique. Le ressort associé au balancier a une constante d'élasticité égale à $1.78 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-1}$. La période d'oscillation du balancier doit être égale à une seconde. Le balancier consiste en un tore fin. Le métal dont il est constitué a une densité de 7300 kg m^{-3} . Le diamètre d du tore est de 1.0 mm. (a) Quel devra être le rayon r du balancier? (b) L'amplitude de l'oscillation du balancier, décroît de 20% en 10 périodes si elle n'est pas entretenue. Combien d'énergie doit être emmagasinée dans le ressort d'entraînement si on le remonte une fois par jour?

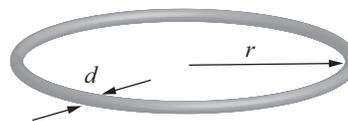


FIGURE 9.83
Problème 14

15. Un cylindre de masse égale à 10 kg et de rayon égal à 6 cm est posé sur un plan incliné de 30° alors qu'il tourne dans le sens antihoraire à une vitesse angulaire de module égal à $100\pi \text{ s}^{-1}$ (fig. 9.84). Le cylindre se met à glisser sur la surface. Le coefficient de frottement dynamique entre le cylindre et la surface vaut 0.2.

- (a) Quels sont les forces et les moments auxquels est soumis le cylindre? (b) Que valent les accélérations linéaire et angulaire du cylindre? (c) Après combien de temps le cylindre se mettra-t-il à rouler au lieu de glisser?

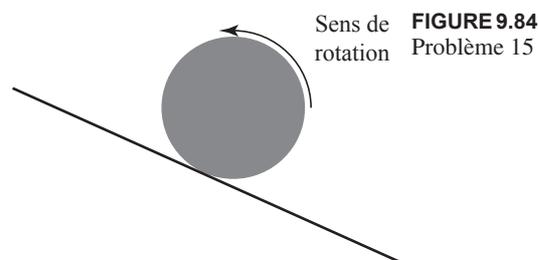


FIGURE 9.84
Problème 15

16. Un cylindre métallique de masse égale à 0.50 kg est attaché à un élastique et roule sans glisser sur un plan incliné de 30° dans un mouvement oscillant (fig. 9.85). Le graphique de la figure 9.86 montre l'évolution de la vitesse de l'axe en fonction du temps. La résistance de l'air et le frottement dynamique peuvent être ignorés; l'amortissement observé est dû à la dissipation dans l'élastique.

- (a) Isolez le cylindre et introduisez les forces et moments auxquels il est soumis.
- (b) Formulez les équations de mouvement et les lois constitutives.
- (c) Quelle est l'intensité de la force exercée par l'élastique à l'instant $t = 3$ s?

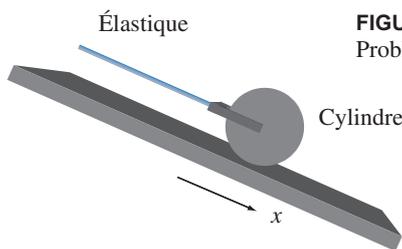


FIGURE 9.85
Problème 16

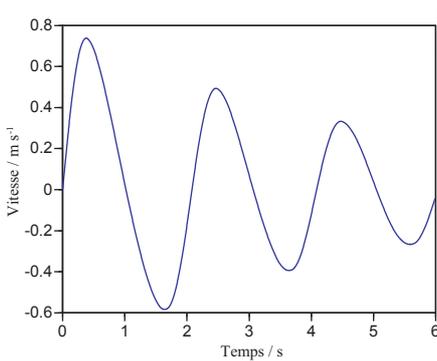


FIGURE 9.86
Problème 16

17. Un pendule de torsion (fig. 9.87) est constitué d'une tige horizontale de moment d'inertie I_{tige} inconnu. La tige est fixée en son milieu sur un axe entraîné par un ressort spiral de constante de torsion D également inconnue. Deux disques de masse m égale à 200 g chacun peuvent être déplacés sur la tige. Leur épaisseur peut être négligée. On veut déterminer les deux paramètres inconnus au moyen d'une expérience consistant à mesurer la durée de la période en fonction de la distance d entre l'axe de rotation et la position de chaque disque. Les résultats des mesures apparaissent dans le tableau 9.3.

TABLEAU 9.3
Problème 17

d / cm	T / s
8.0	1.92
12.0	2.56
16.0	3.24
20.0	3.96

- (a) Exprimez le moment d'inertie total du pendule de torsion.
- (b) Exprimez la période T de l'oscillation en fonction du moment d'inertie et de la constante de torsion.
- (c) Montrez que si on reporte dans un graphique le carré de la période T en fonction du carré de la distance d , les points sont alignés

sur une droite. Estimez les paramètres de cette relation linéaire au moyen de la méthode des moindres carrés. (d) À partir des résultats obtenus en (c), déterminez les valeurs du moment d'inertie de la tige et de la constante de torsion.



FIGURE 9.87
Problème 17

18. Un fluide est confiné entre les parois de deux cylindres concentriques (fig. 9.88). L'espace entre les cylindres est très étroit. Le cylindre intérieur est mis en rotation et on mesure le couple et la vitesse angulaire. Déterminez la viscosité du fluide à partir des données expérimentales (masse, couple, vitesse angulaire).

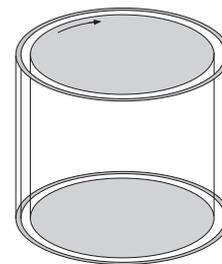


FIGURE 9.88
Problème 18

19. Un liquide de masse volumique égale à 920 kg m^{-3} s'écoule dans une conduite dont le diamètre décroît de 3.0 cm à 1.5 cm (fig. 9.89). La vitesse de l'écoulement à la petite sortie est de 4.82 m s^{-1} . (a) Calculez les valeurs des flux convectifs de quantité de mouvement aux deux extrémités. (b) La pression du fluide à l'entrée est de 1.10 bar. Calculez la valeur du flux conductif de quantité de mouvement à l'entrée. Comparez les valeurs des flux convectif et conductif.

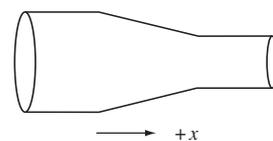


FIGURE 9.89
Problème 19

- 20. Évaluez la force nécessaire pour maintenir en place la conduite du problème précédent. La pression de l'air environnant est de 1.0 bar. Admettez un écoulement non dissipatif.
- 21. Une plaque d'aire égale à 0.50 m^2 est tirée horizontalement sur une surface horizontale. Une couche d'huile d'épaisseur égale à 4.0 mm permet de réduire les frottements. Une force de 25 N est nécessaire pour entraîner la plaque avec une vitesse constante de module égal à 1.0 m s^{-1} . Que vaut le coefficient de viscosité dynamique de l'huile?

22. Une petite bille d'acier de masse égale à 2.09 g, de 4.0 mm de rayon, s'enfonce dans de l'huile de colza de densité égale à 920 kg m^{-3} . La profondeur en fonction du temps, donnée par le tableau 9.4, a été déterminée à partir d'un film.

TABLEAU 9.4
Problème 22

t / s	z / cm
0	0
0.04	0.5
0.08	1.6
0.12	3.9
0.16	6.4
0.20	9.3
0.24	12.3
0.28	15.5
0.32	18.6
0.36	21.9
0.40	25.1
0.44	28.3
0.48	31.5
0.52	34.7

(a) Utilisez les données expérimentales pour déterminer le module de la vitesse de la bille en fonction du temps et reportez les valeurs dans un diagramme $v-t$. Suivant quel fonction la vitesse évolue-t-elle ? Déterminez les paramètres de cette fonction au moyen d'un ajustement selon la méthode des moindres carrés.

(b) Énoncez les équations nécessaires pour la modélisation du mouvement de la bille. Admettez que la traînée est proportionnelle au module de la vitesse de la bille, avec un facteur de proportionnalité f . Montrez que ces équations peuvent être combinées pour aboutir à l'équation :

$$m\dot{v} = mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{huile}} g - fV$$

(c) Déterminez la valeur du coefficient de proportionnalité f .

CHAPITRE 10

THERMODYNAMIQUE DES FLUIDES SIMPLES

Dans le chapitre 5, nous avons étudié la réponse au chauffage et refroidissement de corps à volume constant et le changement de phase de substances telles que l'eau, ce qui nous a permis de découvrir des lois constitutives simples. En nous limitant à des processus à volume constant, nous avons exclu les gaz de notre étude. Dans ce chapitre, nous allons étendre notre analyse à des corps dont le volume et la température peuvent varier simultanément. Le *gaz parfait* et le *rayonnement du corps noir* serviront d'exemple de tels matériaux.

10.1 RELATIONS FONDAMENTALES

Nous commençons par formuler les équations de bilan relatives à des fluides dont le volume varie lors de processus de chauffage ou de refroidissement et ajoutons les relations relatives aux transferts d'énergie lors de ces processus.

10.1.1 Équations de bilan et relations énergétiques

Un volume d'air est beaucoup plus intéressant du point de vue thermodynamique qu'un solide, vu qu'il couple les processus thermiques de chauffage et de refroidissement à des processus mécaniques de compression ou de détente. Ce couplage amène de nouveaux effets qui peuvent être compris pour autant que nous arrivions à clairement distinguer les processus sous-jacents (fig. 10.1).

Équations de bilan relatives aux fluides parfaits. Vu qu'un fluide couple les processus thermiques et hydrauliques, nous devons formuler deux équations de bilan, l'une pour l'entropie, l'autre pour le volume.

Pour ce qui concerne l'entropie, nous devons d'abord examiner les éventuelles irréversibilités. Dans un gaz, il y a deux sources de production d'entropie. La première résulte de la diffusion de l'entropie lors du chauffage ou du refroidissement. Nous admettons que nous avons affaire à des corps uniformes et que l'entropie se répartit sans résistance, donc sans production due à son transport. La seconde source possible d'entropie serait due au frottement interne du fluide lors des processus de compression ou de détente. Nous traitons ce cas de manière similaire; nous admettons que les frottements internes sont négligeables.

Un fluide parfait est caractérisé par l'absence d'irréversibilité:

$$\Pi_{S, \text{ transmission de chaleur}} + \Pi_{S, \text{ frottement}} = 0 \quad (10.1)$$

Pour un tel fluide, l'équation du bilan d'entropie est:

$$\dot{S} = I_S \quad (10.2)$$

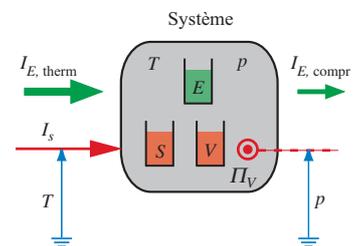


FIGURE 10.1 Diagramme de processus d'un fluide parfait soumis simultanément à un chauffage ou refroidissement et une compression ou détente. Chauffage signifie transfert d'entropie et compression implique destruction de volume. Π_V est le taux de production du volume.

Seul le chauffage ou le refroidissement peuvent entraîner des variations d'entropie dans le modèle envisagé ici.

Dans ce chapitre, nous n'envisagerons pas de transfert de matière à travers les limites du système. Comme nous considérons un matériau compressible, le volume n'est pas conservé; il y a création de volume lors de la détente et destruction de volume lors de la compression, raison pour laquelle nous introduisons un taux de production Π_V . Ainsi:

$$\dot{V} = \Pi_V \quad (10.3)$$

Relations liées à l'énergie. Dans l'équation de bilan de l'énergie, nous devons prendre en compte les deux processus auxquels peut être soumis un fluide, à savoir le chauffage ou le refroidissement et la compression ou la détente. L'équation de bilan de l'énergie fera donc apparaître deux flux:

$$\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} \quad (10.4)$$

$I_{E, \text{therm}}$ représente le flux d'énergie qui accompagne le transfert d'entropie lors du chauffage ou du refroidissement. En vertu des relations énoncées au chapitre 5, ce flux est égal à:

$$I_{E, \text{therm}} = T I_S \quad (10.5)$$

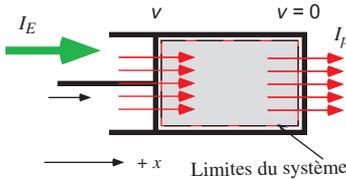


FIGURE 10.2 Lors de la compression d'un fluide, de l'énergie est introduite dans le système par l'intermédiaire d'un processus mécanique. Durant la détente, l'énergie s'échappe du système.

Nous devons encore évaluer le travail de compression d'un fluide. On comprime ce fluide au moyen d'un piston qui se déplace à vitesse constante v dans un cylindre immobile (fig. 10.2). La quantité de mouvement est immédiatement évacuée (le cylindre est immobile). Mais l'énergie amenée par le flux de quantité de mouvement est accumulée dans le fluide comprimé. Évaluons le flux d'énergie mécanique:

$$I_{E, \text{compr}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = vAP = -P\dot{V} \quad (10.6)$$

Or, le taux de variation du volume correspond à son taux de production. Nous pouvons donc conclure:

$$I_{E, \text{compr}} = -P\Pi_V \quad (10.7)$$

Le signe négatif devant le dernier terme des équations (10.6) et (10.7) indique que le fluide reçoit de l'énergie durant la compression (taux de variation et production de volume négatifs) et qu'il en perd durant la détente pour la raison inverse. En résumé:

Lors du processus de chauffage ou de refroidissement d'un fluide parfait, la variation de son énergie est due aux flux d'entropie et aux variations de son volume. Le taux de variation de l'énergie est donné par:

$$\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} = T I_S - P \Pi_V \quad (10.8)$$

Nous pouvons maintenant élaborer les relations constitutives du fluide parfait.

10.2 CHAUFFAGE D'UN FLUIDE PARFAIT

Notre expérience nous enseigne qu'un fluide se dilate ou s'échauffe lorsque son entropie augmente, à l'exception de l'eau entre 0°C et 4°C. Nous n'allons considérer ici qu'un fluide parfait au sens des équations (10.1) et (10.2). Il n'y a pas de production d'entropie et la variation de l'entropie est uniquement due au flux de chauffage ou de refroidissement.

Compression ou détente isotherme d'un fluide parfait. Le problème qui se pose lors d'une compression ou détente isotherme est qu'il faut refroidir ou chauffer pendant le processus, ce qui veut dire que l'entropie ne fait pas ce qu'elle fait usuellement dans les solides ou liquides, à savoir provoquer un abaissement ou une élévation de la température. L'entropie peut provoquer deux phénomènes :

- elle peut provoquer un changement de volume sans variation de température; dans ce cas, elle ne se manifeste pas de manière usuelle; on peut donc la qualifier de latente, ce dont nous tiendrons compte par l'introduction d'un paramètre Λ que nous appellerons *entropie latente*;
- elle peut entraîner une variation de température (variation du niveau thermique), ce dont nous tiendrons compte au moyen de l'introduction d'un paramètre K qui est la *capacité entropique* que nous avons introduite au chapitre 5.

Venons-en au premier cas de la compression ou détente isotherme (fig. 10.3). Nous décrivons le processus par la relation :

$$\dot{S} = \Lambda_V \dot{V} \quad (10.9)$$

Le paramètre Λ_V est l'*entropie latente par rapport au volume* ou *entropie latente de détente*. Il nous indique combien d'entropie il faut fournir pour provoquer une détente d'une unité de volume. Comme nous ne considérons que des fluides parfaits, le taux de variation de l'entropie correspond au flux d'entropie :

$$I_S = \Lambda_V \dot{V} \quad (10.10)$$

L'entropie échangée lors de ce processus isotherme, qui correspond à la variation de l'entropie accumulée, se calcule par intégration du flux d'entropie entre l'instant initial t_i et l'instant final t_f :

$$S_{\text{éch}} = \int_{t_i}^{t_f} I_S dt = \int_{t_i}^{t_f} \Lambda_V \dot{V} dt \quad (10.11)$$

ou

$$S_{\text{éch}} = \int_{V_i}^{V_f} \Lambda_V dV \quad (10.12)$$

Cette variation de l'entropie ne peut être évaluée que si nous connaissons la valeur de l'entropie latente. Elle est très difficile à mesurer, vu que les gaz absorbent très peu d'entropie par rapport à l'appareil qui sert à effectuer la mesure. Heureusement, la relation entre l'entropie et la puissance due à la chute de celle-ci entre deux températures nous permettront de déterminer l'entropie latente du fluide parfait à partir d'arguments théoriques (section 10.3.4).

Chauffage du fluide parfait à volume constant. Nous considérons maintenant le deuxième effet que peut avoir l'apport d'entropie dans un fluide parfait, à savoir une

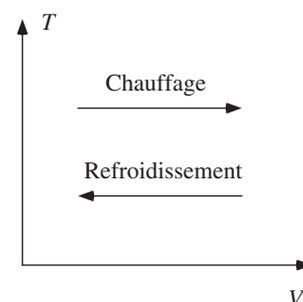


FIGURE 10.3 Diagramme T - V du chauffage/refroidissement isotherme d'un fluide parfait. Il y a une exception notable au comportement esquissé ci-dessus, celui de l'eau entre 0°C et 4°C (son entropie latente est négative dans ce domaine).

variation de température uniquement. Ce phénomène ne peut avoir lieu que si l'on enferme le gaz dans un récipient imperméable.

Pour le traitement de ce processus, nous introduisons, comme dans le cas du chauffage des solides ou des liquides, la *capacité entropique à volume constant* que nous désignons par K_V . Le taux de variation de l'entropie est donné par :

$$\dot{S} = K_V \dot{T} \tag{10.13}$$

Ici, l'indice V sert à indiquer qu'il s'agit d'un *chauffage à volume constant*, ce qui n'est pas le cas pour les équations (10.9) à (10.12) où l'indice signifie qu'il s'agit d'une entropie latente *par rapport au volume*.

Comme il s'agit d'un fluide parfait, nous pouvons écrire :

$$I_S = K_V \dot{T} \tag{10.14}$$

Comme dans le cas du chauffage isotherme, il est instructif de représenter le processus dans un diagramme $T-V$ (fig. 10.4). En général, la capacité entropique est une fonction à la fois du volume et de la température du corps. Nous pouvons déterminer la quantité d'entropie échangée durant le chauffage isochore :

$$S_{\text{éch}} = \int_{t_i}^{t_f} I_S dt = \int_{t_i}^{t_f} K_V \dot{T} dt \tag{10.15}$$

ou encore :

$$S_{\text{éch}} = \int_{T_i}^{T_f} K_V dT \tag{10.16}$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas de l'entropie latente, la détermination expérimentale de la capacité entropique est délicate. Dans ce cas, nous résoudrons le problème en recourant à une combinaison de méthodes théoriques et expérimentales (section 10.3.6).

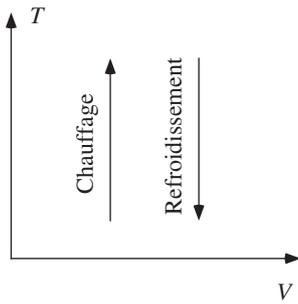


FIGURE 10.4 Diagramme $T-V$ du chauffage/refroidissement isochore d'un fluide compressible parfait.

Lors du processus de chauffage ou refroidissement d'un fluide parfait, la variation de son entropie est due aux flux d'entropie qui provoquent des variations du volume et de la température :

$$\dot{S} = \Lambda_V \dot{V} + K_V \dot{T} \tag{10.17}$$

Les flux d'entropie sont :

$$I_S = \Lambda_V \dot{V} + K_V \dot{T} \tag{10.18}$$

L'entropie échangée lors d'un tel processus est donnée par :

$$S_{\text{éch}} = \int_{V_i}^{V_f} \Lambda_V dV + \int_{T_i}^{T_f} K_V dT \tag{10.19}$$

1. Comment un gaz réagit-il à la chaleur (entropie)?
2. Quelle est la signification de l'entropie latente pour un fluide qui n'est pas soumis à un changement de phase?
3. Que représente la capacité entropique à volume constant?
4. L'air de notre atmosphère est chauffé par le Soleil. Ce processus est-il proche d'un chauffage à volume constant ou plutôt à pression constante?



1. La température et le volume peuvent varier individuellement ou simultanément.
2. C'est l'entropie qui provoque une variation de volume à température constante, rapportée à l'unité de volume.
3. C'est l'entropie qui provoque une variation de température à volume constant, rapportée à l'unité de température.
4. Chauffage à pression constante.



10.3 THERMODYNAMIQUE DU GAZ PARFAIT

Le gaz parfait est un système dont la température et le volume peuvent varier. Ces deux grandeurs sont liées à une troisième propriété, la pression du gaz.

10.3.1 Équation d'état du gaz parfait

Nous avons énoncé la relation entre ces trois grandeurs à la section 6.5.1 :

$$PV = nRT \quad (10.20)$$

Rappelons que cette relation est valable pour toutes les substances dans un état de dilution suffisante (par exemple pour une substance telle que du sel dilué dans de l'eau), et que les gaz réels s'approchent du comportement du gaz parfait si leur température est élevée et leur densité basse. Seule l'expérience peut déterminer si ces critères sont satisfaits. Ce que l'on peut retenir, c'est qu'une température suffisamment éloignée du point de liquéfaction du gaz est considérée comme une température élevée.

Il est quelquefois utile d'écrire l'équation d'état du gaz parfait en termes de masse volumique plutôt que de volume :

$$P = \frac{1}{V} nRT = \frac{\rho}{m} nRT = \rho \frac{n}{m} RT = \frac{R}{M} \rho T \quad (10.21)$$

10.3.2 Nouvel énoncé de la relation constitutive

Souvent, le chauffage a lieu à pression constante. Il est donc utile d'exprimer le chauffage au moyen d'une expression qui fait intervenir la pression et la température :

$$I_S = \Lambda_p \dot{P} + K_p \dot{T} \quad (10.22)$$

Les nouvelles grandeurs constitutives sont appelées respectivement *entropie latente par rapport à la pression* ou *entropie latente de compression* et *capacité entropique à pression constante*. Il est aisé, pour un gaz parfait, d'établir le lien avec les mêmes grandeurs liées au volume. Pour cela, nous utilisons la dérivée par rapport au temps de l'équation des gaz parfaits :

$$P\dot{V} + V\dot{P} = nR\dot{T} \quad (10.23)$$

ce qui nous permet de remplacer le taux de variation du volume V dans l'équation (10.18) :

$$\begin{aligned} I_S &= \Lambda_v \frac{1}{P} (nR\dot{T} - V\dot{P}) + K_v \dot{T} \\ &= -\Lambda_v \frac{V}{P} \dot{P} + \left(\Lambda_v \frac{nR}{P} + K_v \right) \dot{T} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Si nous comparons cette dernière expression avec l'équation (10.22) qui fait intervenir la pression, nous trouvons que :

$$\Lambda_p = -\Lambda_v \frac{V}{P} \quad (10.25)$$

$$K_p = \frac{nR}{P} \Lambda_v + K_v \quad (10.26)$$

Ces relations sont particulièrement importantes, parce qu'elles permettent de déterminer les entropies latentes (qui sont difficiles à mesurer) à partir des capacités qui sont plus simples à mesurer.

10.3.3 Énergie échangée lors d'une compression isotherme

Avant de pouvoir déterminer les relations constitutives du gaz parfait, nous devons déterminer l'énergie échangée lors d'une compression isotherme. Nous insérons l'équation de bilan de volume (10.3), ainsi que l'équation d'état du gaz parfait (10.20) dans la forme générale (10.7) de l'énergie échangée lors de la compression d'un fluide parfait :

$$I_{E, \text{compr}} = -P\Pi_V = -P\dot{V} = -\frac{nRT}{V} \dot{V}$$

Nous intégrons sur un intervalle de temps :

$$E_{\text{éch, compr}} = -\int_{t_i}^{t_f} \frac{nR}{V} \dot{V} dt = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV$$

ce qui donne finalement :

$$E_{\text{éch, compr}} = -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (10.27)$$

On remarquera que le résultat ne dépend que du rapport du volume final au volume initial, et pas de leurs valeurs individuelles. Ainsi, quel que soit le volume initial, un doublement du volume d'une mole de gaz à température ambiante entraînera l'émission d'une énergie de 1.7 kJ dans le milieu ambiant.

10.3.4 Relations constitutives du gaz parfait

Le gaz parfait est décrit au moyen de trois fonctions, la pression (10.20), l'entropie latente (10.9) et la capacité entropique (10.13). Nous connaissons la première de ces trois fonctions, mais pas les deux autres. Il est possible d'obtenir des informations supplémentaires sur la base de considérations théoriques, en reprenant les réflexions de CARNOT qui ont été abordées à la section 5.8.3 (fig. 5.55).

Considérons un cycle dans lequel les adiabatiques sont très courtes :

$$\Delta T = T_H - T_B \ll T_H \quad (10.28)$$

Comme le montre la figure 10.5, ce choix entraîne que :

$$V_3 \approx V_2 \text{ et } V_4 \approx V_1$$

ce qui nous permet de négliger le travail produit durant les phases adiabatiques du cycle. Le travail effectué durant un tel cycle est donc uniquement produit durant la phase isotherme. L'énergie échangée durant la compression et la détente dans un cycle de CARNOT est donc, selon l'équation (10.27), après avoir remplacé T_B par T :

$$\begin{aligned} E_{\text{éch, compr}} &= -nR(T + \Delta T) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nRT \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \\ &\approx -nR\Delta T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

Étant donné que la puissance d'un processus thermique est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{therm}} = -(T - T_H) I_S \quad (10.30)$$

nous pouvons écrire que le travail total effectué lors du cycle est donné par :

$$E_{\text{éch, cycle}} = -(T_H - T) S_{\text{éch}} = -\Delta T S_{\text{éch}} \quad (10.31)$$

Si nous comparons les deux derniers résultats, nous voyons que l'entropie fournie par le foyer (source chaude) doit être :

$$S_{\text{éch}} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (10.32)$$

D'autre part, en vertu de l'équation (10.12), l'entropie absorbée durant la détente isotherme est égale à :

$$S_{\text{éch}} = \int_{V_1}^{V_2} \Lambda_V dV \quad (10.33)$$

La comparaison nous permet de conclure que l'entropie latente du gaz parfait est donnée par :

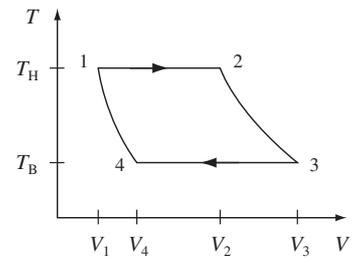


FIGURE 10.5 Cycle de CARNOT du gaz parfait. Les lignes incurvées sont les adiabatiques (dont les longueurs ont été exagérées pour des raisons de lisibilité, contrairement à ce qui est supposé dans le texte).

$$\Lambda_v = \frac{n}{V} R \quad (10.34)$$

En résumé, la relation entre l'entropie et l'énergie détermine l'une des grandeurs constitutives du gaz parfait. On remarquera que l'entropie latente est proportionnelle à la densité molaire; la quantité d'entropie qu'un gaz peut accumuler est proportionnelle à la quantité de matière et inversement proportionnelle au volume occupé.

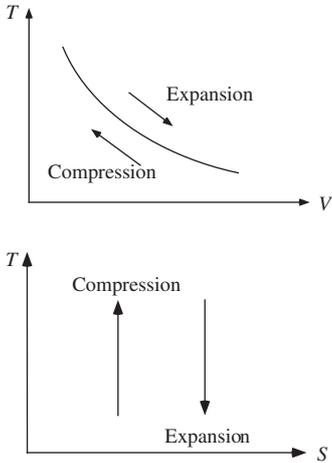


FIGURE 10.6 Diagrammes T - V et T - S d'une compression et d'une détente adiabatique. Le terme *adiabatique* signifie que l'entropie ne peut pas franchir les limites du système. La température de la plupart des fluides, tels que le gaz parfait, décroît à la suite d'une détente adiabatique. Cette courbe est typique pour le gaz parfait.

10.3.5 Processus adiabatiques et capacités entropiques du gaz parfait

À la section 5.2.3, nous avons vu que la température d'un fluide compressible peut être augmentée uniquement par compression, sans qu'il soit nécessaire de le chauffer (fig. 10.6). De tels processus, au cours desquels il n'y a pas de chauffage, sont dits *adiabatiques*.

Description qualitative. Lors d'un processus adiabatique, il n'y a ni chauffage, ni refroidissement (pas d'échange d'entropie avec l'extérieur), ce qui veut dire que les flux donnés par l'équation (10.18) sont nuls:

$$I_S = \Lambda_v \dot{V} + K_v \dot{T} = 0 \quad (10.35)$$

ce qui nous permet de conclure:

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{\Lambda_v}{K_v} \quad (10.36)$$

C'est la relation fondamentale des processus adiabatiques pour des fluides simples. Nous pouvons résoudre cette équation différentielle si nous connaissons le rapport de l'entropie latente et de la capacité entropique du fluide.

Recherche de la solution de l'évolution adiabatique du gaz parfait. Nous utilisons l'équation des gaz parfaits (10.20) pour éliminer le taux de variation de la température dans l'équation qui exprime le flux d'entropie. À partir de sa dérivée par rapport au temps, nous obtenons:

$$\begin{aligned} P\dot{V} + V\dot{P} &= nR\dot{T} \\ \Rightarrow \dot{T} &= \frac{1}{nR}(P\dot{V} + V\dot{P}) = T\left(\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{P}}{P}\right) \end{aligned} \quad (10.37)$$

La dernière égalité a été obtenue grâce à la substitution:

$$\frac{1}{nR} = \frac{T}{PV}$$

Nous substituons le taux de variation de la température dans l'expression du flux d'entropie (10.35), dont nous savons qu'il est nul, puisqu'il s'agit d'un processus adiabatique:

$$\begin{aligned} I_S &= \Lambda_v \dot{V} + K_v T \left(\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{P}}{P} \right) \\ &= T \left[K_v \frac{\dot{P}}{P} + \left(K_v + \Lambda_v \frac{V}{T} \right) \frac{\dot{V}}{V} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.38)$$

Mais, en vertu des équations (10.25) et (10.26):

$$\begin{aligned} \Lambda_p &= -\Lambda_v \frac{V}{P} \\ K_p &= K_v + \frac{nR}{P} \Lambda_v = K_v + \frac{V}{T} \Lambda_v \end{aligned} \quad (10.39)$$

Posons maintenant:

$$\gamma = \frac{K_p}{K_v} \quad (10.40)$$

Ce rapport est le *coefficient* ou *exposant adiabatique*. Il vient alors, après division de (10.38) par T/K_v :

$$\frac{\dot{P}}{P} + \gamma \frac{\dot{V}}{V} = 0 \quad (10.41)$$

Cette équation différentielle ne peut être intégrée que si l'on connaît les capacités respectives, ou au moins leur rapport γ .

Différents types de mesures, qui ne nécessitent pas la mesure de quantités d'entropie, indiquent tous que, *pour un gaz parfait, le rapport des capacités entropiques doit être constant*:

$$\gamma = \text{const} \quad (10.42)$$

D'autre part, cette constante est supérieure à 1, ce qui signifie qu'il faut plus d'entropie pour élever la température du gaz parfait d'un degré dans un processus isobare que dans un processus isochore. Une expérience qui permet de mesurer ce rapport est présentée à la section 10.3.7. La propagation du son dans un gaz parfait (exemple 10.3) est un processus qui permet également d'effectuer cette mesure.

L'intégration de l'équation différentielle donne:

$$PV^\gamma = \text{const} \quad (10.43)$$

En utilisant la loi des gaz parfaits (10.20), on peut la réécrire en utilisant d'autres variables:

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const} \quad (10.44)$$

ou encore:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (10.45)$$

Il est essentiel de se souvenir que les différentes formes de l'équation de la transformation adiabatique ne sont valables que pour le gaz parfait.

10.3.6 Capacités entropiques et énergétiques du gaz parfait

Rassemblons les relations que nous avons établies, à savoir les équations (10.25), (10.26), (10.34) et (10.40):

$$K_p = n \frac{R}{P} \Lambda_V + K_V ; \quad \Lambda_p = -\Lambda_V \frac{V}{P} ; \quad \Lambda_V = n \frac{R}{V} ; \quad \gamma = \frac{K_p}{K_V}$$

En substituant les trois dernières relations dans la première, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \gamma K_V &= n \frac{R}{P} \Lambda_V + K_V \\ (\gamma - 1) K_V &= n \frac{R}{P} \Lambda_V = n \frac{R}{P} n \frac{R}{V} = n \frac{R}{T} \end{aligned}$$

Donc :

$$K_V = n \frac{R}{\gamma - 1} \frac{1}{T} \quad (10.46)$$

$$K_p = \gamma K_V = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{1}{T} \quad (10.47)$$

Les capacités entropiques du gaz parfait sont donc inversement proportionnelles à sa température. Nous montrerons dans l'exemple 10.1 qu'il existe une relation simple entre les capacités molaires :

$$\bar{\kappa}_p = \bar{\kappa}_v + \frac{R}{T} \quad (10.48)$$

Cette relation n'est valable que pour un gaz parfait.

Coefficients de température de l'énergie et de l'enthalpie. Normalement, les produits des capacités entropiques et de la température sont utilisés pour calculer les quantités d'énergie échangées durant les processus de chauffage / refroidissement. Ils sont définis comme suit :

$$C_V = TK_V = n \frac{R}{\gamma - 1} \quad (10.49)$$

$$C_p = TK_p = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (10.50)$$

Nous appellerons la première grandeur *coefficient de température de l'énergie* et la seconde *coefficient de température de l'enthalpie*. L'origine de ces noms sera expliquée à la section 10.4.1. Traditionnellement, elles sont appelées *capacité thermique à volume constant* et *capacité thermique à pression constante*.

Pour les rendre indépendantes de la quantité de matière ou de la masse, on divise ces grandeurs par la quantité de matière ou la masse. Il est alors usuel des les appeler respectivement *chaleur molaire* ou *chaleur spécifique*. Cette dénomination date du milieu du XIX^e siècle, époque où la thermodynamique fut construite sur la base de l'énergie, notion qui venait d'être découverte et qui fut assimilée, de manière incorrecte, à la grandeur qui rend les corps plus chauds. En fait, l'énergie, comme nous l'avons vu dans toute la physique, sert à coupler des processus de nature diverse et, comme le révèle la théorie de la relativité, à augmenter la masse des objets (et donc à courber localement l'univers, là où elle est concentrée).

Valeurs des coefficients de température. Comme les capacités entropiques du gaz parfaits sont inversement proportionnelles à la température, les coefficients de température (les capacités thermiques) doivent être constants. La théorie quantique prédit que le coefficient de température molaire de l'énergie prend des valeurs discrètes :

$$\bar{c}_v = \frac{1}{2} fR, \quad f = 3, 5, 7 \quad (10.51)$$

Le facteur f est le nombre de degrés de liberté. Pour un gaz monoatomique, ce nombre est égal à 3 à toutes les températures, pour un gaz diatomique il vaut 5 à température ambiante, alors qu'il vaut 7 pour des molécules plus grosses. Les valeurs pour les gaz que l'on trouve dans la nature s'approchent plus ou moins de ces valeurs pour la température ambiante, mais s'éloignent vers le haut lorsque la température augmente. Par contre, les gaz rares, qui sont monoatomiques, ont une valeur constante.

L'équation de bilan lors du chauffage d'un fluide parfait peut être formulée en fonction de la température et du volume ou de la pression :

$$I_s = \Lambda_v \dot{V} + K_v \dot{T} = \Lambda_p \dot{P} + K_p \dot{T}$$

Pour un gaz parfait, les entropies latentes et les capacités entropiques sont respectivement :

$$\Lambda_v = n \frac{R}{V} ; \quad K_v = n \frac{R}{\gamma - 1} \frac{1}{T} ; \quad \Lambda_p = -n \frac{R}{P} ; \quad K_p = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{1}{T}$$

Les capacités énergétiques (thermiques) correspondantes sont :

$$C_v = TK_v = n \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = TK_p = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

En régime isotherme, l'énergie échangée lors du chauffage sert à faire varier le volume :

$$E_{\text{éch, compr}} = -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Lors de processus adiabatiques (sans échange d'énergie), l'équation d'état du gaz peut être reformulée de différentes manières :

$$PV^\gamma = \text{const} ; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}' ; \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}''$$

où γ le coefficient adiabatique, constant pour un gaz parfait, est égal à :

$$\gamma = \frac{K_p}{K_v} = \frac{C_p}{C_v}$$

EXEMPLE 10.1. Coefficient de température du gaz parfait.

(a) Exprimez la capacité entropique molaire à pression constante en termes de capacité entropique à volume constant et utilisez ce résultat pour exprimer le coefficient de température molaire de l'enthalpie: (b) Calculez la valeur du coefficient de température de l'enthalpie pour un gaz monoatomique tel que l'hélium. Comparez le résultat en utilisant la valeur du rapport des capacités entropiques qui vaut 1.66 pour l'hélium.

SOLUTION: (a) La relation entre les capacités entropiques donnée par l'équation (10.26), dans laquelle nous substituons la valeur de l'entropie latente de l'équation (10.34), permet d'écrire:

$$K_p = \frac{nR}{P} \Lambda_v + K_v = \frac{nR}{P} \frac{nR}{V} + K_v = \frac{nR}{T} + K_v$$

L'équation d'état du gaz parfait a été utilisée à la dernière étape. Pour les quantités molaires, nous obtenons:

$$\bar{\kappa}_p = \bar{\kappa}_v + \frac{R}{T}$$

(b) Comme l'hélium est un gaz monoatomique, le nombre de degrés de liberté est égal à 3. En outre, à partir de l'équation (10.48), nous obtenons:

$$\bar{c}_p = \bar{c}_v + R$$

et donc:

$$\bar{c}_p = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R = 20.8 \text{ Ct mol}^{-1}$$

À partir de l'équation (10.50), cette valeur devient:

$$\bar{c}_p = T \bar{\kappa}_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 20.9 \text{ Ct mol}^{-1}$$



10.3.7 Modèle dynamique du gaz parfait

Nous sommes maintenant en mesure de créer un modèle dynamique d'une certaine quantité de gaz parfait de manière relativement simple. Comme par le passé, nous énonçons d'abord les équations de bilan de l'entropie et du volume auxquels nous adjoignons les lois constitutives, à savoir les relations concernant le chauffage du gaz, équation (10.17) et l'équation d'état (10.20). Il est évident que nous avons encore besoin des relations constitutives du gaz, c'est-à-dire l'entropie latente (10.34) et la capacité entropique. Pour cette dernière, nous choisissons la forme (10.46) en utilisant le coefficient adiabatique en tant que paramètre du modèle.

Lorsque nous aurons établi le modèle basé sur ces relations, nous pourrons l'appliquer à des cas concrets tels que l'expérience de Ruechardt pour mesurer l'exposant adiabatique et à la propagation du son dans un gaz (cas unidimensionnel).

Modèle de base. Considérons un corps gazeux de quantité de matière fixe n dont les valeurs initiales du volume et de la température sont connues (si ce sont la pression et la température qui sont connues, cela correspond à une seconde forme du modèle dans laquelle c'est la forme (10.22) de l'équation de chauffage qui est prise en compte). Les processus de chauffage ou de refroidissement ainsi que de compression ou de détente

sont gouvernés par l'environnement, ce qui signifie que le modèle doit pouvoir prédire les valeurs du volume, de l'entropie, de la température et de la pression en fonction du temps.

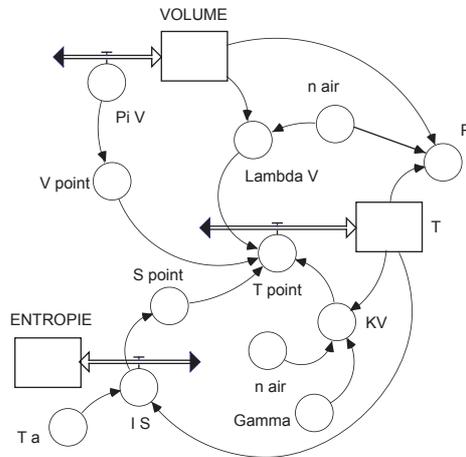


FIGURE 10.7 Modèle dynamique de l'évolution d'un gaz parfait. Il est composé de deux bilans, pour l'entropie et le volume respectivement. L'élément permettant de calculer la température ne représente pas un bilan, il sert à intégrer le taux de variation de la température. Le courant d'entropie est calculé à partir de la différence de température et d'une conductance qui n'apparaît pas dans le modèle.

Les équations de bilan de volume et d'entropie contiennent le taux de production du volume ainsi que les flux d'entropie dus au chauffage ou au refroidissement (fig. 10.7). Les autres éléments du modèle sont la relation (10.17) qui exprime le lien entre la température et le volume avec l'entropie, ainsi que l'équation d'état.

Expérience de RÜCHARDT. Une expérience simple permet de mesurer le coefficient adiabatique γ donné par l'équation (10.40), c'est-à-dire le rapport des capacités entropiques. Une grosse bouteille remplie d'air est surmontée d'un col cylindrique étroit (fig. 10.8a). Lorsqu'on laisse tomber à l'intérieur de ce cylindre une bille de diamètre choisi de manière à ce que l'air ne puisse pas s'échapper latéralement et que les frottements soient peu importants, elle oscille verticalement un certain nombre de fois jusqu'à ce que la dissipation interrompe son mouvement (fig. 10.8b).

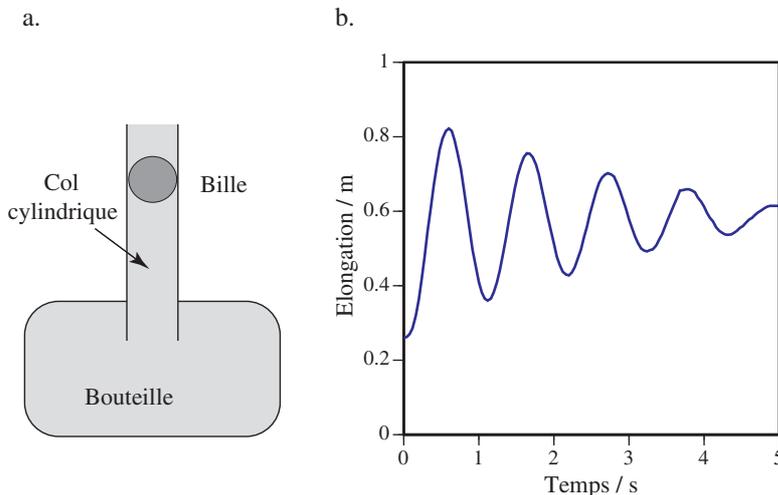
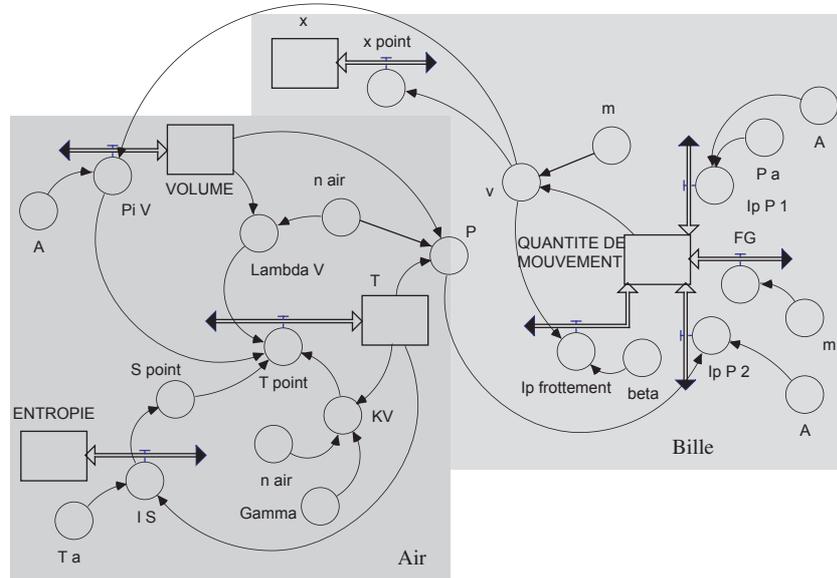


FIGURE 10.8 Expérience de RÜCHARDT: (a) configuration expérimentale: une bille oscille sur l'air emprisonné dans un col cylindrique étroit surmontant une grosse bouteille remplie d'air; (b) relevé des oscillations effectuées par la bille.

Le modèle de ce processus consiste en deux parties, la première concernant l'air emprisonné en dessous de la bille et la seconde pour la bille elle-même. Le modèle dynamique pour la partie gazeuse est celui de la figure 10.7, alors que pour la bille, il suffit de reprendre le modèle standard du mouvement de translation tel que nous l'avons rencontré au chapitre 8. Il y a quatre processus qui contribuent à faire varier la quantité

de mouvement de la bille: la gravité, la pression de l'air P_1 et P_2 en dessus et en dessous de la bille et les frottements. Nous calculons la vitesse à partir de la quantité de mouvement.

FIGURE 10.9 Diagramme de dynamique des systèmes pour l'expérience de RÜCHARDT. Les deux parties concernant respectivement la dynamique de l'air et celle de la bille sont reliées par deux couplages: la vitesse détermine le taux de production de volume et la pression de l'air la force pressante sur la bille.



La partie intéressante du modèle combiné est l'interaction entre le mouvement de la bille et la dynamique de l'air. Lors du mouvement oscillant de la bille, le volume de gaz emprisonné est alternativement comprimé et dilaté. Le taux de production de volume est proportionnel à la vitesse:

$$\Pi_v = -Av \tag{10.52}$$

où A est la section de la bille et v la vitesse de la bille (positive lorsqu'elle descend). La seconde interaction va de l'air à la bille: la variation de la pression de l'air provoque une variation de la force pressante qui s'exerce depuis le bas sur la bille:

$$I_{p,P2} = -AP \tag{10.53}$$

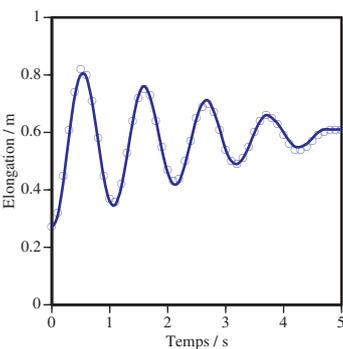


FIGURE 10.10 Simulation du modèle dynamique de l'expérience de RÜCHARDT et comparaison avec les données expérimentales. L'adéquation est obtenue pour une valeur de 1.40 du coefficient adiabatique.

La figure 10.9 montre le diagramme du modèle complet. Les deux parties, à savoir la dynamique de l'air et celle de la bille interagissent grâce au couplage entre la vitesse et le taux de production du volume d'une part et de la pression de l'air et la force pressante sur la bille d'autre part.

La simulation du modèle et la comparaison avec les données expérimentales (fig. 10.10) peuvent être utilisées pour déterminer le coefficient adiabatique de l'air, sachant que les autres paramètres tels que le volume d'air dans la bouteille et les valeurs initiales de la température et de la pression sont mesurés lors de la réalisation de l'expérience. Le meilleur ajustement est obtenu pour une valeur de 1.40 pour le coefficient adiabatique, ce qui concorde avec d'autres mesures ainsi qu'avec les résultats prédits par l'équation (10.51).

Si l'on admet que le processus est adiabatique ($I_S = 0$) dans la partie inférieure gauche de la figure 10.9 et que les frottements sont négligés, le résultat est une oscillation harmonique, vu que les amplitudes de variation du volume sont faibles comparées au volume total d'air (raison pour laquelle le volume contenu dans la bouteille doit être important, comparé à celui qui est emprisonné dans le col cylindrique). La période des oscillations et le coefficient adiabatique sont couplés, ce qui permet de calculer

simplement ce dernier. Même en l'absence de frottements, le transfert d'entropie de et vers l'air contenu dans la bouteille provoque un amortissement de l'oscillation. C'est un exemple intéressant qui montre que la dissipation dans une partie du système affecte le comportement d'un élément différent du système.

Propagation du son dans l'air. La propagation du son est une autre application intéressante de la dynamique d'un gaz. Dans ce cas, on envisage de l'air emprisonné dans un long tube cylindrique avec une source sonore à l'une des extrémités. Les ondes sonores sont des ondes de pression longitudinales.

1. Quelle observation de la vie quotidienne permet de comprendre que la capacité entropique à pression constante doit être supérieure à la capacité entropique à volume constant?
2. Comment, dans un diagramme TS , la courbe relative au chauffage d'un gaz parfait à volume constant se différencie-t-elle de celle relative au chauffage à pression constante?
3. Pourquoi un gaz que l'on comprime rapidement s'échauffe-t-il?
4. Lorsque de l'air s'élève dans l'atmosphère, est-ce un processus isotherme ou adiabatique?
5. On laisse tomber dans un tube de verre dont l'extrémité inférieure est fermée une bille en acier qui épouse parfaitement les parois du tube. L'air est comprimé. Considérez que le processus de compression est isotherme ou adiabatique. Quand l'air est-il le plus comprimé?
6. Une pompe à vélo s'échauffe lorsque l'on comprime rapidement l'air qu'elle contient. Cela signifie-t-il que la compression n'est pas adiabatique?
7. L'équation (10.35) nous indique que, lors d'un processus adiabatique, la température d'un volume de gaz doit atteindre une valeur maximale lorsque le volume est le plus petit possible. Pourquoi? Pourquoi cela n'est-il plus vrai si le gaz est chauffé ou refroidi durant la phase de compression ou de détente?
8. Le volume de l'eau diminue lorsqu'on la chauffe entre 0°C et 4°C . Qu'est-ce que cela nous indique au sujet de l'entropie latente de l'eau? Quel en est la conséquence pour une adiabatique de l'eau dans un diagramme TV ?



1. Il faut moins d'entropie pour élever la température de l'air à volume constant qu'à pression constante.
2. La courbe relative au chauffage à pression constante est la moins pentue.
3. Parce que l'entropie contenue dans le gaz est comprimée dans un volume plus petit. Formellement, ce fait est exprimé par l'équation (10.35).
4. C'est un processus proche d'un processus adiabatique.
5. La compression isotherme débouche sur une plus grande variation du volume, parce que l'entropie est évacuée.
6. La compression est quasi-adiabatique, ce qui entraîne l'échauffement de l'air. Mais l'air transfère une partie de son entropie à la pompe, c'est un refroidissement non adiabatique.
7. La condition $dV/dt = 0$ entraîne $dT/dt = 0$. Par contre, si $I_S \neq 0$, cette condition n'est plus valable.
8. L'entropie latente par rapport au volume est positive lorsque la température est supérieure à 4°C et négative entre 0°C et 4°C , ce qui signifie que les adiabatiques passent par un minimum.



EXEMPLE 10.2. Variation de l'entropie du gaz parfait.

Calculez la variation de l'entropie du gaz parfait en fonction du volume et de la température en admettant que l'entropie latente et la capacité entropique sont connues.

SOLUTION: En vertu de l'équation (10.17), le taux de variation de l'entropie du gaz est liée au taux de variation du volume et de la température par l'intermédiaire de l'entropie latente et de la capacité entropique à volume constant, données respectivement par les équations (10.34) et (10.49):

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_i}^{t_f} [\Lambda_v \dot{V} + K_v \dot{T}] dt \\ &= \int_{V_i}^{V_f} \frac{nR}{V} dV + \int_{T_i}^{T_f} \frac{n\bar{c}_v}{T} dT\end{aligned}$$

Après intégration, nous obtenons:

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + n\bar{c}_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

La variation de l'entropie ne dépend pas des valeurs initiales du volume et de la température, mais du rapport de leurs valeurs au début et à la fin du processus. ■

EXEMPLE 10.3. Vitesse du son dans un gaz parfait.

(a) Déterminer la formule servant à calculer la vitesse du son dans un fluide sur la base de la théorie développée au chapitre 9, section 9.7. (b) Utilisez ce résultat pour obtenir la vitesse du son dans l'air pour des ondes en régime respectivement isotherme et adiabatique.

SOLUTION: (a) Nous procédons de la même manière que dans l'exemple 9.12. L'inverse de la masse par unité de longueur reste identique:

$$\frac{1}{C_p^*} = \frac{\Delta x}{m} = \frac{\Delta x}{\rho \cdot \Delta x \cdot A} = \frac{1}{\rho A}$$

La forme de la loi d'induction est inchangée:

$$\Delta V = -L_p \frac{dI_p}{dt} = -L_p^* \cdot \Delta x \cdot A \frac{dj_p}{dt} = -L_p^* \cdot \Delta x \cdot A \frac{dP}{dt}$$

où P représente la pression. La variation de vitesse est due aux variations de volume:

$$\frac{dV}{dt} = A \Delta V = -L_p^* \cdot \Delta x \cdot A^2 \frac{dP}{dt}$$

Donc:

$$\frac{1}{L_p^*} = -\Delta x \cdot A^2 \frac{dP}{dV} = -V \cdot A \frac{dP}{dV}$$

Un fluide étant mieux caractérisé par sa masse volumique que par son volume, nous passons à la dérivée par rapport à ρ :

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dV} \frac{dV}{d\rho} \Leftrightarrow \frac{dP}{dV} = \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^{-1} \frac{dP}{d\rho}$$

Mais :

$$V = \frac{PA}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = -\frac{PA}{\rho^2} = -\frac{V\rho}{\rho^2} = -\frac{V}{\rho}$$

Donc :

$$\frac{dP}{dV} = \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^{-1} \frac{dP}{d\rho} = -\frac{\rho}{V} \frac{dP}{d\rho}$$

et :

$$\frac{1}{L_p^*} = -V \cdot A \frac{dP}{dV} = -V \cdot A \left(-\frac{\rho}{V} \frac{dP}{d\rho}\right) = \rho A \frac{dP}{d\rho}$$

Il s'ensuit :

$$c^2 = \frac{1}{C_p^* L_p^*} = \frac{1}{\rho A} \rho A \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{d\rho}$$

pour le carré de la vitesse de propagation du son dans un fluide simple.

(b) Dans le cas adiabatique, la relation entre la pression et la densité du fluide est donnée par l'équation (10.43) :

$$P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$$

La dérivée de cette expression débouche sur :

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \cdot \text{const} \cdot \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{\text{const} \cdot \rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{RT}{M}$$

Pour obtenir la dernière égalité, nous avons fait usage de la loi des gaz parfaits (10.20). Finalement :

$$c_{\text{adiabatique}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Dans la cas isotherme, le résultat est :

$$c_{\text{isotherme}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

La valeur numérique pour la vitesse du son dans de l'air à 25°C est d'environ 290 m s⁻¹, alors que l'on mesure une valeur supérieure d'environ vingt pour cent. La différence entre la théorie basée sur un processus isotherme et les mesures ont amené LAPLACE à proposer que les ondes sonores sont adiabatiques. La confrontation des données et de la théorie débouche sur une valeur de 1.4 pour l'exposant adiabatique de l'air. ■

10.4 ÉNERGIE ET ENTHALPIE

Maintenant que nous avons établi l'équation d'état du gaz parfait et déterminé ses grandeurs constitutives, entropie latente et capacité entropique, nous pouvons énoncer les relations relatives à son énergie et à l'enthalpie, une grandeur liée à l'énergie.

10.4.1 Énergie et enthalpie du gaz parfait

Sachant comment l'entropie d'un gaz parfait dépend du volume et de la température, nous voulons découvrir comment l'énergie du gaz parfait dépend de ces paramètres,

Relation fondamentale de GIBBS pour les fluides parfaits. Nous substituons les expressions pour les transferts d'énergie (10.5) et (10.7) dans l'équation de bilan de l'énergie (10.4):

$$\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} = T\dot{I}_S - P\dot{V}$$

ou, après prise en compte des équations des bilans d'entropie et de volume:

$$\dot{E} = T\dot{S} - P\dot{V} \quad (10.54)$$

Cette relation est la forme dynamique de la *relation fondamentale de GIBBS* pour un fluide qui peut être chauffé ou comprimé. Elle est analogue à la relation (5.24), section 5.5.2, pour les corps qui ne peuvent subir que du chauffage et du refroidissement. Elle ne met en relation entre elles que des grandeurs propres au système et ne fait pas mention des processus. Même si elle a été établie sur la base de processus réversibles de fluides parfaits, on peut montrer qu'elle est également applicable aux processus irréversibles de systèmes uniformes¹.

Relation liée à l'énergie. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat surprenant: *l'énergie du gaz parfait ne dépend que de la température*. En d'autres termes, les valeurs du volume et de la pression n'ont aucune influence sur l'énergie. Nous introduisons dans l'équation (10.54) le taux de variation de l'entropie donné par la relation:

$$I_S = \Lambda_v \dot{V} + K_v \dot{T}$$

$$\dot{E} = (T\Lambda_v - P)\dot{V} + (TK_v)\dot{T} \quad (10.55)$$

La forme de l'entropie latente (10.34) entraîne la disparition du premier terme. Ainsi:

La variation de l'énergie du gaz parfait donnée par:

$$\dot{E} = (TK_v)\dot{T} \quad (10.56)$$

implique que son énergie ne dépend que de la température:

$$E(T) = C_v (T - T_0) + E_0 \quad (10.57)$$

1. FUCHS H.U. (2010): *The Dynamics of Heat*, Springer, New York, chapitre 10.

La linéarité est due au fait que $C_V = TK_V$ est constant pour le gaz parfait. Nous comprenons maintenant pourquoi C_V est appelé *coefficient de température de l'énergie*. Ce résultat est important, puisqu'il nous permet de calculer l'évolution de processus auxquels est soumis le gaz parfait en termes de température uniquement.

Enthalpie. Nous avons déjà été confrontés au fait que, parfois, le changement de variables peut se révéler utile. Nous réécrivons la relation (10.54) en y intégrant le taux de variation de l'entropie donné par l'équation (10.22):

$$\dot{E} = T(\Lambda_p \dot{P} + K_p \dot{T}) - P\dot{V} \quad (10.58)$$

Si nous additionnons le terme $d(PV)/dt$ à cette relation, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \dot{E} + P\dot{V} + V\dot{P} &= T(\Lambda_p \dot{P} + K_p \dot{T}) + V\dot{P} \\ &= (T\Lambda_p + V)\dot{P} + TK_p \dot{T} \\ &= \left(-T \frac{nR}{P} + V\right)\dot{P} + TK_p \dot{T} \\ &= (TK_p)\dot{T} \end{aligned}$$

La nullité du contenu de la parenthèse à l'avant-dernière ligne est une conséquence de l'équation du gaz parfait.

La variation de la grandeur appelée enthalpie, définie par:

$$H = E + PV \quad (10.59)$$

est égale à:

$$\dot{H} = (TK_p)\dot{T} = C_p \dot{T} \quad (10.60)$$

pour le gaz parfait.

Il n'est pas possible de donner une signification intuitive à cette grandeur. Son utilité découle de l'équation (10.60). La même équation permet de comprendre pourquoi C_p est appelé *coefficient de température de l'enthalpie*.

L'enthalpie fait partie d'une catégorie de fonctions de l'énergie, introduites pour faciliter certains calculs. Ces fonctions sont appelées *potentiels thermodynamiques*. À côté de l'enthalpie, citons l'enthalpie libre et l'énergie libre de GIBBS.

10.4.2 Transfert d'énergie lors de chauffage ou de refroidissement

Ce qui précède nous permet de calculer la valeur de l'énergie échangée lors de chauffage ou de refroidissement à *volume constant* ou à *pression constante*. Dans le premier cas, nous avons

$$I_{E, \text{therm}} = \dot{E} - I_{E, \text{fluide}} = \dot{E} = C_V \dot{T}$$

ou

$$E_{\text{éch,therm}} = C_V (T_2 - T_1) \quad (10.61)$$

Cette relation découle du fait qu'à volume constant, il n'y a aucun échange d'énergie dû à une compression ou une dilatation.

Nous effectuons le même calcul dans le cas d'une pression constante :

$$I_{E, \text{therm}} = \dot{E} - I_{E, \text{compr}} = \dot{E} + P\dot{V} = \dot{H} = C_p \dot{T}$$

ou

$$E_{\text{éch,therm}} = \Delta H$$

$$E_{\text{éch,therm}} = C_p (T_2 - T_1) \quad (10.62)$$

Nous voyons donc que, si le chauffage se déroule à pression constante, l'énergie transférée n'est pas totalement accumulée dans le système, elle n'est pas égale à la variation de l'énergie du corps, mais à celle de son enthalpie.

1. Un volume d'air subit un variation adiabatique. Pourquoi le modèle de fluides développé dans cette section nous dit-il que l'entropie de ce corps doit rester constante ?
2. Quelle est la forme fondamentale de GIBBS pour des processus isothermes du gaz parfait ?
3. Pourquoi le rapport des coefficients de température de l'enthalpie et de l'énergie est-il égal à celui des capacités entropiques à pression constante et à volume constant ?
4. La température d'un corps évolue de T_1 à T_2 durant une compression adiabatique. Que vaut la variation d'énergie du gaz ? Pourquoi pouvons-nous utiliser le coefficient de température de l'énergie C_V pour effectuer ce calcul ?
5. Un volume de gaz est chauffé à pression constante. Qu'advient-il de l'énergie absorbée par le gaz à la suite du chauffage ? Quelle est la part de cette énergie stockée dans le gaz ?
6. L'enthalpie d'un gaz varie de -10 kJ. Combien d'énergie a été transférée par le processus de chauffage/refroidissement à pression constante ?



1. Les processus auxquels sont soumis les matériaux modélisés dans cette section sont réversibles.
2. $0 = TdS/dt - PdV/dt$.
3. $C_p/C_V = TK_p/TK_V$.
4. $\Delta E = C_V(T_2 - T_1)$. À partir de l'équation (10.34) et de celle du gaz parfait, on obtient $\Lambda_V = P/T$ que l'on substitue dans l'équation (10.55). Alternativement, C_V est le coefficient de température de l'énergie, et l'énergie du gaz parfait ne dépend que de la température.
5. Une partie est émise vers l'environnement en conséquence de la détente. L'énergie stockée est égale à l'énergie absorbée diminuée de la partie $P\Delta V$ émise vers l'environnement.
6. -10 kJ.



EXEMPLE 10.4. Chauffage isotherme du gaz parfait.

Déterminez l'énergie échangée par un gaz parfait lors d'un chauffage isotherme, ce qui revient à calculer l'énergie apportée pour la réalisation des variations de volume. Utilisez les résultats pour montrer que l'énergie du gaz parfait doit rester constante durant un processus isotherme.

SOLUTION: Comme la température ne varie pas durant le processus, il suffit de multiplier la quantité d'entropie absorbée par la température pour obtenir l'énergie échangée par l'intermédiaire du chauffage:

$$E_{\text{éch.therm}} = \int_{V_i}^{V_f} T \Delta_v dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

À la section 10.3.3, nous avons calculé l'énergie échangée lors du processus de compression. L'équation (10.27) donne la même valeur que celle que nous venons de trouver, mais de signe opposé. Étant donné que la variation de l'énergie est égale à la somme des énergies transférées, cette variation est nulle. ■

EXEMPLE 10.5. Énergie échangée lors de processus isochore, isotherme et adiabatique.

Comparez les processus suivants: (1) doublement adiabatique du volume d'une mole d'air à partir des conditions standard et (2) refroidissement isochore suivi d'un chauffage isotherme qui permet de passer du même état initial au même état final qu'en (1). (a) Tracez les processus dans un diagramme T - V . (b) Calculez l'énergie échangée en conséquence des processus thermique et mécanique pour chacune des étapes. (c) Déterminez la variation de l'énergie en (1) et (2) respectivement.

SOLUTION: (a) La représentation graphique des deux processus apparaît dans la figure 10.11.

(b1) Pour un gaz parfait avec un rapport des capacités entropiques constant, la relation entre le volume et la pression lors d'un processus adiabatique est donnée par l'équation (10.43):

$$PV^\gamma = P_i V_i^\gamma$$

Si nous exprimons la pression à partir de cette relation, nous pouvons calculer l'énergie échangée à la suite d'une compression ou d'une détente:

$$E_{\text{compr}} = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{P_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_i V_i^\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{V_f^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_i^{\gamma-1}} \right]$$

Pour des conditions standard, les valeurs de la température et de la pression sont respectivement 0°C et 1 bar. Aux mêmes conditions, le volume du gaz parfait est égal à $22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, et le rapport des capacités entropiques vaut 1.4 pour l'air. Ainsi, l'énergie échangée est égale à:

$$E_{\text{compr}} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)^{1.4}}{1.4 - 1} \left[\frac{1}{(44.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)^{0.4}} - \frac{1}{(22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)^{0.4}} \right] \text{ J} = -1.37 \text{ kJ}$$

Pour une détente adiabatique, l'énergie échangée par l'intermédiaire du processus thermique est nulle: $E_{\text{therm}} = 0 \text{ J}$.

(b2) Nous numérotions les étapes isochore et isotherme par 1 et 2 respectivement. L'énergie échangée par le fluide dans la partie isochore est nulle:

$$E_{\text{compr.1}} = 0$$

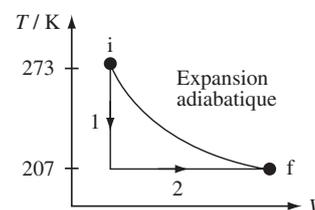


FIGURE 10.11 Représentation graphique des trois processus envisagés dans l'exemple 10.5. Les segments 1 et 2 représentent respectivement les étapes isochore et isotherme.

L'équation (10.27) nous permet d'évaluer l'énergie échangée lors du processus de détente isotherme. Sa valeur numérique est :

$$E_{\text{compr},2} = -1 \text{ mol} \cdot 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 207 \text{ K} \cdot \ln(2) = -1.19 \text{ kJ}$$

C'est l'équation (10.45) qui a permis de déterminer que la température tombe à la valeur 207 K lors du doublement adiabatique du volume, ce qui est également le cas lors du refroidissement isochore. Durant ce dernier processus, l'énergie échangée à cause du refroidissement est :

$$E_{\text{therm},1} = \int_{T_i}^{T_f} C_V dT = C_V (T_f - T_i) = 1.0 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (207 - 273) \text{ K} = -1.37 \text{ kJ}$$

Le coefficient de température de l'énergie a été calculé au moyen de l'équation (10.51) pour $f = 5$.

L'énergie échangée durant le chauffage isotherme est calculée au moyen de l'équation (10.19). Étant donné que l'entropie latente du gaz parfait est nR/V en vertu de l'équation (10.34), nous obtenons :

$$E_{\text{therm},2} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 1.0 \text{ mol} \cdot 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 207 \text{ K} \cdot \ln(2) = +1.19 \text{ kJ}$$

(c) Si nous additions les contributions des étapes (1) et (2), nous obtenons la même valeur :

$$\Delta E = -1.37 \text{ kJ}$$

C'est ce qui était attendu : la variation de l'énergie ne dépend pas des détails du processus. En revanche, l'énergie échangée dépend du type de processus. ■

10.5 RAYONNEMENT DU CORPS NOIR EN TANT QUE FLUIDE SIMPLE

Il existe un autre système physique simple qui présente un grand intérêt pour la thermodynamique : le rayonnement thermique qui peut se répandre aussi bien à travers l'espace que dans les corps. Dans sa forme la plus simple, le champ radiatif peut, du point de vue thermodynamique, être décrit en utilisant très peu de variables. Le rayonnement contient de l'entropie ; on peut s'en rendre compte en observant un objet qui se refroidit uniquement par l'intermédiaire du rayonnement. Comme l'entropie ne peut pas disparaître, elle doit être transportée hors de l'objet par le rayonnement, ce qui veut dire que le rayonnement lui-même constitue un système thermique. En fait, le rayonnement thermique piégé dans une cavité se comporte exactement comme un simple fluide uniforme comparable au gaz parfait. On l'appelle couramment un *gaz de photons*. Il possède une certaine quantité d'entropie et d'énergie, et sa pression et sa température prennent des valeurs bien définies. Dans cette section, nous allons étudier le gaz de photons.

Si l'entropie et la pression du rayonnement sont relativement modestes dans notre quotidien, ces grandeurs jouent un rôle prépondérant en astrophysique, où elles sont à l'origine de phénomènes à l'intérieur des étoiles et dans l'Univers en tant que tout. Le transport de l'entropie par rayonnement peut être important, même à des températures basses. Nous étudierons ce phénomène au chapitre 11.

10.5.1 Rayonnement thermique et corps noir

Les corps peuvent émettre et absorber du rayonnement électromagnétique. Si ces processus se produisent parce que le corps est chaud, on parle de *rayonnement thermique*. Une cavité peut être remplie d'un rayonnement qui est continuellement absorbé et réémis par les parois qui l'entourent, qui ont une température T (fig. 10.12). Si le champ est uniforme, nous pouvons attribuer la même température au rayonnement qui est appelé *rayonnement du corps noir*. Un corps est considéré comme *noir* s'il est un absorbeur parfait du rayonnement. C'est le cas d'une cavité avec une petite ouverture; le rayonnement qui y pénètre a très peu de chances d'en ressortir, ce qui nous permet de considérer le trou comme un absorbeur parfait.

10.5.2 Énergie, pression et chauffage du rayonnement du corps noir

Au moyen de mesures effectuées sur le rayonnement émanant de corps noirs, nous pouvons déduire une relation entre la température du rayonnement et la densité d'énergie du gaz de photons. On trouve que l'intensité du rayonnement provenant de l'ouverture dans la figure 10.12 ne dépend ni de la nature des parois, ni de la taille ou de la forme du corps émetteur. La température du corps est le seul paramètre influençant le rayonnement du corps noir. En conséquence, la densité d'énergie du champ uniforme, c'est-à-dire la grandeur

$$\rho_E = \frac{E}{V} \quad (10.63)$$

ne dépend que de la température du champ de rayonnement enfermé dans la cavité:

$$\rho_E = f(T) \quad (10.64)$$

V est le volume du gaz de photons, E est son énergie qui est pour l'instant une fonction inconnue de la température.

Une autre information essentielle concerne la pression du gaz de photons. La théorie électromagnétique nous apprend que le rayonnement transporte de la quantité de mouvement. Même si la pression du rayonnement est faible, elle peut être mesurée. La théorie et l'expérimentation démontrent que la pression du gaz de photons est égale au tiers de la densité d'énergie:

$$P = \frac{\rho_E}{3} \quad (10.65)$$

Cette relation sera justifiée au chapitre 14, exemple 14.8. Comme la densité d'énergie est une fonction de la température uniquement, cela est vrai aussi pour la pression. Nous venons d'établir l'*équation d'état du rayonnement thermique* qui est comparable à l'équation du gaz parfait. Nous allons l'utiliser pour découvrir d'autres propriétés du rayonnement du corps noir.

Avant de pouvoir déterminer les grandeurs constitutives, nous devons étudier le chauffage du gaz de photons. Nous modélisons le rayonnement thermique du corps noir comme un système spatialement uniforme, ce qui implique que nous lui attribuons des valeurs uniques de la température et de la pression. Nous admettons que le volume de la cavité de la figure 10.12 peut varier. En conséquence, les variables indépendantes nécessaires pour décrire les propriétés du rayonnement sont le volume et la température, tout comme dans le cas de fluides simples. C'est pour cette raison que nous pouvons définir l'*entropie latente par rapport au volume* et la *capacité entropique* à

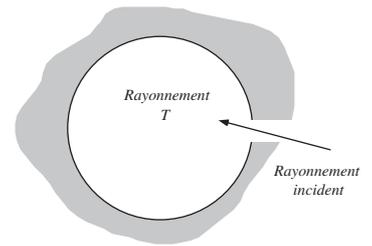


FIGURE 10.12 Cavité contenant du rayonnement thermique. Le gaz de photons peut interagir avec les parois de la cavité ou avec un corps noir à la température T , qui est également la température du gaz de photons. Le rayonnement qui franchit le trou de la cavité sera complètement absorbé, raison pour laquelle on dit que le trou agit comme un corps noir. Réciproquement, du rayonnement émis par cette ouverture est appelé rayonnement du corps noir.

volume constant du gaz de photons. La procédure est la même que celle que nous avons appliquée pour le gaz parfait à la section 10.3. Nous allons également admettre que le gaz de photons ne peut subir que des opérations réversibles. Comme dans le cas du gaz parfait, l'entropie dépend du volume et de la température avec l'entropie latente et la capacité entropique comme facteurs respectifs, et le chauffage se déroule comme décrit par l'équation (10.18).

Vu qu'il est semblable à un fluide simple qui ne peut échanger de l'énergie que par l'intermédiaire de processus thermiques et mécaniques, le système est régi par la même *relation fondamentale de GIBBS*, à savoir l'équation (10.54). C'est une conséquence directe des bilans d'entropie et d'énergie du champ de rayonnement, et de la relation entre le chauffage et le taux de transfert d'énergie, qui est équivalente à l'équation (10.5).

10.5.3 Relations constitutives du gaz de photons

Nous devons maintenant déterminer l'entropie latente et la capacité entropique du gaz de photons, et avec elles la densité d'entropie et d'énergie. Nous pouvons obtenir l'information manquante à partir des relations constitutives (10.64) et (10.65) si nous envisageons un cycle de CARNOT auquel on soumet le rayonnement à l'intérieur de la cavité, comme nous l'avons fait pour le gaz parfait à la section 10.3.4. Le gaz de photons passe à travers un cycle de CARNOT dont les adiabatiques sont très courtes (fig. 10.5): l'énergie libérée par une machine de CARNOT idéale est égale à

$$E_{\text{éch, cycle}} = -(T_H - T) S_{\text{éch}} = -\Delta T S_{\text{éch}} \quad (10.66)$$

où $S_{\text{éch}}$ est la quantité d'entropie absorbée à la température de la source chaude, $T_H = T + \Delta T$. D'autre part, l'énergie échangée par le fluide durant la détente peut être facilement calculée à partir de la pression, qui reste constante durant les étapes isothermes, et par la variation du volume. Les étapes adiabatiques ne contribuent pas de manière significative à l'échange d'énergie, vu qu'elles ont été choisies très courtes. Pour la même raison, les variations de volume sont pratiquement les mêmes pour chacune des deux étapes isothermes (fig. 10.5). En tenant compte du fait que la pression du gaz de photons est égale au tiers de la densité d'énergie, ce que nous démontrerons dans l'exemple 14.8, et si nous approximations la différence des pressions, nous obtenons

$$E_{\text{éch, cycle}} = -(P_{T+\Delta T} - P_T) \Delta V = -\frac{1}{3} \frac{d\rho_E}{dT} \Delta T \cdot \Delta V \quad (10.67)$$

Les expressions dans les équations (10.66) et (10.67) doivent être égales, ce qui permet d'évaluer l'entropie ajoutée dans un cycle de CARNOT. Cette grandeur est aussi égale à l'entropie latente intégrée sur le volume. Pour cette raison, l'entropie latente par rapport au volume doit être égale, pour le gaz de photons, à

$$\Lambda_V = \frac{1}{3} \frac{d\rho_E}{dT} \quad (10.68)$$

Nous introduisons le taux de variation de l'entropie dans la relation fondamentale de GIBBS (10.54) et remarquons que l'énergie E est le produit de la densité d'énergie et du volume. Vu que la densité d'énergie est fonction uniquement de la température, son taux de variation ne dépendra que de celui de T . Ces considérations permettent d'énoncer le résultat suivant:

$$V\dot{\rho}_E + \dot{V}\rho_E = T(\Lambda_V\dot{V} + K_V\dot{T}) - P\dot{V} \quad (10.69)$$

ou

$$\left(V\frac{d\rho_E}{dT} - TK_V\right)\dot{T} = \left(\frac{1}{3}T\frac{d\rho_E}{dT} - \frac{4}{3}\rho_E\right)\dot{V} \quad (10.70)$$

Vu que le volume et la température peuvent varier de manière indépendante, chacun des facteurs apparaissant de l'équation (10.70) doit être égal à zéro. Le membre de droite donne une équation différentielle pour la densité d'énergie en fonction de la température, dont la solution est:

$$\rho_E = aT^4 \quad (10.71)$$

ou

$$E = aVT^4 \quad (10.72)$$

Cette relation est la *loi de STEFAN-BOLTZMANN*; a est la *constante de rayonnement*, dont la valeur est $7.56 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$. Cette constante a une grande importance, non seulement pour les grandeurs relatives au gaz de photons, mais lorsque l'on doit calculer l'énergie associée au rayonnement de corps chauds (section 11.3).

Nous pouvons maintenant déterminer l'entropie latente ainsi que la capacité entropique du gaz de photons. Nous utilisons l'équation (10.68) pour évaluer la première grandeur. Nous obtenons la seconde si nous posons que le facteur du membre de gauche de l'équation (10.70) est égal à zéro. Les grandeurs constitutives du gaz de photons sont donc:

$$\Lambda_V = \frac{4}{3}aT^4 \quad (10.73)$$

$$K_V = 4aVT^2 \quad (10.74)$$

Finalement, le taux de variation du contenu en entropie du rayonnement peut être exprimé au moyen de ces grandeurs constitutives. Si nous intégrons l'équation (10.74) le long d'un chemin simple dans le diagramme T - V de la figure 10.13, nous obtenons l'*entropie du rayonnement du corps noir*:

$$S(T) = \frac{4}{3}aVT^3 \quad (10.75)$$

EXEMPLE 10.6. Rayonnement à l'intérieur d'une étoile.

La matière et le rayonnement coexistent à l'intérieur d'une étoile. Lorsque la température est élevée, le gaz est complètement ionisé, ce qui en fait un gaz parfait, même lorsque la densité est élevée. Le rayonnement peut contribuer pour une part considérable à la pression à cause de la température élevée. (a) La matière à l'intérieur d'une étoile de la séquence principale est composée de 70% d'hydrogène et de 30% d'hélium en masse. Calculez la pression totale de la matière et du rayonnement au centre d'une étoile de 15 masses solaires, en admettant que la température et la densité ont des valeurs respectives de $34 \cdot 10^6 \text{ K}$ et $6.2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Évaluez le rapport β de la pression due au gaz et de la pression totale. (b) Exprimez le chauffage du gaz

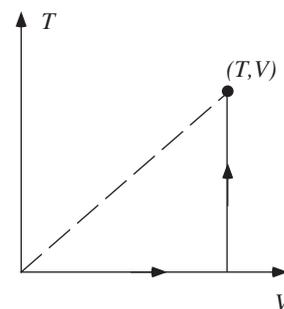


FIGURE 10.13 Nous intégrons l'expression pour le taux de variation de l'entropie du rayonnement de l'état $T = 0, V = 0$ vers un état arbitraire. Tout d'abord, nous intégrons sur V à $T = 0$, puis sur T pour une valeur donnée de V . La valeur de l'entropie à $T = 0$ est fixée à zéro.

parfait plus rayonnement en termes de pression du gaz P_{gaz} et de la pression radiative P_{rad} . (c) Déterminez l'expression pour la capacité entropique totale en termes de capacité entropique du gaz parfait et de la fraction β de la pression due au gaz.

SOLUTION: (a) Nous utilisons la forme (10.21) de l'équation d'état du gaz parfait pour calculer la pression. Pour ce faire, nous devons connaître la masse molaire du gaz à l'intérieur de l'étoile. Comme la matière est complètement ionisée, à chaque mole d'hydrogène correspond une mole d'électrons, et à chaque mole d'hélium deux moles d'électrons. Si nous désignons par \bar{x} la fraction massique de l'hydrogène, nous avons

$$M = \left[\frac{2\bar{x}}{M_{0H}} + \frac{3(1-\bar{x})}{M_{0He}} \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{2 \cdot 0.7}{0.0010 \text{ kg mol}^{-1}} + \frac{3 \cdot (1-0.7)}{0.0040 \text{ kg mol}^{-1}} \right]^{-1}$$

ce qui donne une valeur de $0.615 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ pour la masse molaire moyenne. Les pressions sont respectivement :

$$P_{\text{gaz}} = \frac{R}{M} \rho T = \frac{8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 6.2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 34 \cdot 10^6 \text{ K}}{0.615 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 2.8 \cdot 10^{15} \text{ Pa}$$

et

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} 7.56 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \cdot (34 \cdot 10^6 \text{ K})^4 = 3.4 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$$

Le rapport β de la pression du gaz à la pression totale est de 0.89, ce qui signifie que 11% de la pression totale est due au rayonnement. Il existe des conditions dans l'univers sous lesquelles le rayonnement est à l'origine d'une fraction encore plus importante de la pression totale.

(b) Il faut chauffer simultanément la matière et le rayonnement. Nous devons donc additionner les relations exprimant le chauffage de chacune des composants :

$$I_S = (\Lambda_{V_{\text{gaz}}} + \Lambda_{V_{\text{rad}}}) \dot{V} + (K_{V_{\text{gaz}}} + K_{V_{\text{rad}}}) \dot{T}$$

À partir des relations constitutives (10.34), (10.46), (10.73) et (10.74), ainsi que (10.65) et (10.71), nous obtenons :

$$I_S = \left(\frac{nR}{V} + \frac{4}{3} a T^3 \right) \dot{V} + \left(\frac{nR}{\gamma-1} \frac{1}{T} + 4aVT^2 \right) \dot{T}$$

$$= \frac{1}{T} (P_{\text{gaz}} + 4P_{\text{rad}}) \dot{V} + \frac{1}{T^2} V \left(\frac{1}{\gamma-1} P_{\text{gaz}} + 12P_{\text{rad}} \right) \dot{T}$$

(c) Le facteur qui multiplie le taux de variation de la température dans l'équation précédente est la capacité entropique totale du mélange de gaz et de rayonnement :

$$K_V = \frac{1}{T^2} V \left(\frac{1}{\gamma-1} P_{\text{gaz}} + 12P_{\text{rad}} \right)$$

Sachant que $P = P_{\text{gaz}} + P_{\text{rad}}$, $\beta P = P_{\text{gaz}}$ et $(1-\beta)P = P_{\text{rad}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
K_v &= \frac{1}{T^2} V \left(\frac{1}{\gamma-1} \beta P + 12(1-\beta)P \right) \\
&= \frac{1}{T} \frac{PV}{T} \frac{1}{\gamma-1} [\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)] \\
&= \frac{K_{v\text{gaz}}}{\beta} [\beta + 12(\gamma-1)(1-\beta)]
\end{aligned}$$

Pour $\beta = 1$ cette expression correspond à la capacité entropique du composant gazeux uniquement. ■

10.6 EFFET MAGNÉTOCALORIQUE

L'étude d'un certain nombre de système magnétiques révèle qu'il peut exister un couplage entre les propriétés magnétiques et thermiques. Dans le cas le plus simple, lorsqu'un tel système est chauffé, autant sa *température* que sa *magnétisation* ou *aimantation* varient simultanément. Les propriétés de certaines substances paramagnétiques ont permis d'atteindre des températures très basses au moyen de la *démagnétisation adiabatique*. Nous allons utiliser les concepts introduits essentiellement à la section 10.3, lors de l'étude de la thermodynamique du gaz parfait pour illustrer un tel processus.

10.6.1 Échange d'énergie dans les systèmes magnétiques

Considérons, à titre d'exemple concret, une substance paramagnétique remplissant l'intérieur d'un long solénoïde. Si nous enclenchons le courant à travers cette bobine, le champ magnétique qui s'établit magnétise la substance qui occupe l'intérieur. Ce processus provoque naturellement un transfert d'énergie vers le corps magnétisé.

La théorie relative à l'électromagnétisme (chapitres 13 et 14) permet de montrer que le taux de transfert d'énergie lors d'un processus magnétique peut être exprimé, de manière analogue au cas électrique, en tant que produit d'une *tension magnétique* U_{magn} et d'une intensité du *courant magnétique* I_{magn} ²:

$$I_{E, \text{magn}} = U_{\text{magn}} I_{\text{magn}} \quad (10.76)$$

La tension magnétique et le courant magnétique sont définis par:

$$U_{\text{magn}} = \int_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (10.77)$$

$$I_{\text{magn}} = \int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{A} \quad (10.78)$$

Ces définitions sont semblables à celles des grandeurs électriques correspondantes. C et S sont respectivement la courbe le long de laquelle est intégrée l'intensité \mathcal{H} du

2. HERRMANN F. et G.B. SCHMID (1986): The POYNTING vector field and the energy flow within a transformer. *Am. J. Phys.* **54**, 528-531.

champ magnétique et la surface sur laquelle on intègre le taux de variation du flux magnétique \mathcal{B} . On se rend compte que, dans cette analogie, le flux magnétique joue le rôle de la grandeur extensive magnétique, et que son taux de variation remplace la densité de flux \mathbf{j} de la charge électrique. Notons que les unités de mesure sont échangées: la tension magnétique et l'intensité du courant magnétique se mesurent respectivement en ampère et en volt.

Adaptons ces grandeurs au cas particulier considéré. La tension magnétique dans le champ uniforme du solénoïde est égale à:

$$U_{\text{magn}} = L\dot{\mathcal{H}} \quad (10.79)$$

où L est la longueur de la bobine. Comme la densité du flux magnétique \mathcal{B} est censée être constante sur toute la section A de la bobine, l'intensité du courant magnétique devient:

$$I_{\text{magn}} = A\dot{\mathcal{B}} \quad (10.80)$$

de sorte que le flux d'énergie magnétique est égal à:

$$I_{E, \text{magn}} = V\mathcal{H}\dot{\mathcal{B}} \quad (10.81)$$

où V est le volume de la bobine. En présence de substance paramagnétique dans le champ, la densité de flux magnétique peut être exprimée par:

$$\mathcal{B} = \mu_0 (\mathcal{H} + \mathcal{M}) \quad (10.82)$$

où \mathcal{M} est l'aimantation totale du corps. Si nous ne considérons que le corps en tant que système étudié et négligeons le champ dans l'espace vide, le courant d'énergie magnétique associé à la magnétisation de la substance paramagnétique a pour intensité:

$$I_{E, \text{magn}} = \mu_0 \mathcal{H} \dot{\mathcal{M}} V \quad (10.83)$$

Il est intéressant de comparer cet exemple avec la compression d'un fluide. La puissance liée à la compression d'un fluide, donnée par l'équation (10.7), et celle relative à l'aimantation d'un corps impliquent le taux de production ou le taux de variation d'une grandeur extensive plutôt que le transfert d'une grandeur telle que la charge ou la masse. Visiblement, il existe des processus physiques au cours desquels il n'y a pas de transport de grandeurs, mais plutôt une variation de leur valeur à l'endroit où elles se trouvent. De tels processus peuvent être interprétés en termes de création ou de destruction de la grandeur impliquée.

10.6.2 Équation d'état d'une substance paramagnétique

Les substances paramagnétiques manifestent un couplage entre les propriétés thermiques et magnétiques semblable à celui entre les propriétés mécaniques des fluides et des grandeurs thermiques, comme nous avons pu l'observer dans les cas du gaz parfait ou du rayonnement. L'équation d'état du gaz parfait exprime la relation entre température, volume et pression du fluide. Dans le cas d'une substance paramagnétique, les grandeurs extensives et intensives correspondant au volume et à la pression sont respectivement l'aimantation \mathcal{M} et l'intensité \mathcal{H} du champ magnétique. L'équation d'état thermique d'une substance paramagnétique peut être énoncée sous la forme:

$$\mathcal{M}T = C^* \mathcal{H} \quad (10.84)$$

C^* est la *constante de CURIE*. Cette relation explicite le couplage entre les propriétés magnétique et thermique.

Dans le cas du gaz parfait, la seule connaissance de l'équation d'état s'est révélée insuffisante pour une description complète du système. Nous avons eu besoin d'informations supplémentaires telles que les mesures d'une capacité entropique ou du rapport des capacités entropiques, ou de connaître la forme de l'énergie du système. L'expression de l'énergie du système en termes de température et d'autres variables est appelée *équation d'état calorique*. Pour des substances paramagnétiques, on montre que l'énergie ne dépend que de la température³:

$$E(T) = \frac{A}{1 + B \exp(D/T)} \quad (10.85)$$

où A , B et D sont des constantes. L'énergie dépend uniquement de la température, comme dans le cas du gaz parfait.

10.6.3 Chauffage d'une substance paramagnétique

Lorsqu'une substance manifeste un couplage magnéto-calorique, ses propriétés thermiques et magnétiques peuvent évoluer lors du chauffage. D'autre part, il est également possible d'observer des processus réversibles, auquel cas nous pouvons exprimer la loi constitutive relative au chauffage sous la forme:

$$I_S = \Lambda_{\mathcal{M}} \dot{\mathcal{M}} + K_{\mathcal{M}} \dot{T} \quad (10.86)$$

Les grandeurs constitutives ont des significations semblables à celles relatives aux fluides. Le facteur qui multiplie le taux de variation de la température doit être une capacité entropique que nous appelons *capacité entropique à aimantation constante*. L'autre facteur est l'*entropie latente par rapport à l'aimantation*. Nous allons montrer qu'avec l'équation d'état et celle relative à l'énergie, nous pourrions déterminer ces grandeurs. Comme dans le cas des fluides, nous utilisons la grandeur:

$$C_{\mathcal{M}} = TK_{\mathcal{M}} \quad (10.87)$$

appelée *coefficient de température de l'énergie*. Comme dans les sections relatives à la thermomécanique, où nous avons également utilisé la pression en place du volume, il est pratique d'exprimer le chauffage au moyen de la grandeur magnétique intensive, à savoir l'intensité \mathcal{H} du champ magnétique:

$$I_S = \Lambda_{\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}} + K_{\mathcal{H}} \dot{T} \quad (10.88)$$

Avec l'équation d'état (10.84), nous obtenons les relations suivantes entre les différentes grandeurs constitutives:

3. L'atteinte de températures basses est discutée en détail dans ZEMANSKY M.W., R.H. DITTMAN (1981): *Heat and Thermodynamics*, 6th ed. McGraw-Hill, Singapore, chapitre 18.

$$\Lambda_{\mathcal{H}} = \frac{C^*}{T} \Lambda_{\mathcal{M}} \quad (10.89)$$

$$K_{\mathcal{H}} = K_{\mathcal{M}} - \frac{\mathcal{M}}{T} \Lambda_{\mathcal{M}} \quad (10.90)$$

10.6.4 Énergie et forme fondamentale de GIBBS

Comme l'énergie du corps peut varier en conséquence de processus magnétique et thermique, son équation de bilan a la forme :

$$\dot{E} = I_{E,\text{therm}} + I_{E,\text{magn}} \quad (10.91)$$

dont les termes sont :

$$I_{E,\text{therm}} = T\dot{S} \quad (10.92)$$

$$I_{E,\text{magn}} = \mu_0 \mathcal{H} \dot{\mathcal{M}} \quad (10.93)$$

Le raisonnement appliqué à la section 10.1.1 au cas du gaz parfait peut également l'être à celui de processus thermique et magnétique. En substituant les relations (10.92) et (10.93) dans l'équation de bilan de l'énergie (10.91), nous obtenons la *forme fondamentale de GIBBS* analogue à celle de l'équation (10.54) :

$$\dot{E} = T\dot{S} + \mu_0 \mathcal{H} \dot{\mathcal{M}} \quad (10.94)$$

Cette équation exprime le fait que si l'entropie d'un corps est augmentée à magnétisation constante, son énergie augmente également. Il en va de même si l'aimantation est augmentée à température constante. La relation fondamentale de GIBBS est relative uniquement aux propriétés du corps, mais ne se réfère pas aux grandeurs qui sont échangées au cours de processus magnétocaloriques.

Mais les lois que nous avons énoncées jusqu'ici nous permettent de tirer quelques conclusions importantes au sujet des propriétés de substances paramagnétiques. Tout d'abord, leur énergie ne dépend que de la température, ce qui s'applique également aux taux de variation correspondants :

$$\dot{E} = C_{\mathcal{M}} \dot{T} \quad (10.95)$$

Si nous substituons cette relation dans la forme fondamentale de GIBBS et tenons compte du fait que le taux de variation de l'entropie est exprimé au moyen de la capacité entropique et de l'entropie latente, nous avons :

$$C_{\mathcal{M}} \dot{T} = T \Lambda_{\mathcal{M}} \dot{\mathcal{M}} + T K_{\mathcal{M}} \dot{T} + \mu_0 \mathcal{H} \dot{\mathcal{M}} \quad (10.96)$$

et pouvons conclure que l'entropie latente par rapport à l'aimantation est :

$$\Lambda_{\mathcal{M}} = -\mu_0 \frac{\mathcal{H}}{T} \quad (10.97)$$

Ce résultat implique que si nous diminuons l'aimantation d'une substance en régime isotherme, elle *absorbe* de l'entropie. Les équations (10.95) et (10.85) permettent de calculer la capacité entropique à aimantation constante. Pour des températures qui ne sont pas trop basses (en pratique, quelques dizaines de kelvins), l'expression (10.85) pour l'énergie du corps peut être approximée. On obtient ainsi l'approximation suivante pour la capacité entropique⁴:

$$K_{\mathcal{M}} = \frac{A^*}{T^3} \quad (10.98)$$

où A^* est une constante. Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer les calculs relatifs à des processus magnéto-caloriques et aux grandeurs associées.

10.6.5 Accès aux basses températures

Il est possible d'atteindre des températures basses en utilisant de l'hélium liquide. Ce procédé ne permet pas de descendre en dessous de 1 K. Les techniques actuelles utilisent des substances paramagnétiques pour abaisser encore plus la température. Le processus est le suivant: une substance paramagnétique dont la température est proche de 1 K est aimantée lentement à température constante. En vertu de la relation:

$$\dot{S} = A_{\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}} = -\frac{C^* \mu_0}{T^2} \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \quad (10.99)$$

valable pour les processus isothermes, le corps émet de l'entropie durant cette étape (fig. 10.14). Durant la seconde étape, l'aimantation est réduite trop rapidement pour que de l'entropie puisse être transférée, ce qui correspond à un processus adiabatique (segment vertical dans la figure 10.14). En vertu de l'équation (10.88), l'équation de bilan pour ce processus adiabatique est:

$$0 = A_{\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}} + K_{\mathcal{H}} \dot{T} \quad (10.100)$$

Vu que l'entropie latente est négative, la température diminue en même temps que l'intensité du champ magnétique. C'est ainsi que l'on obtient des températures basses au moyen de la *désaimantation adiabatique*.

EXEMPLE 10.7. Désaimantation adiabatique.

Déterminez la température finale atteinte au moyen de la désaimantation adiabatique à partir de la température initiale et de l'intensité du champ magnétique. Évaluez la valeur numérique pour l'exemple suivant: la substance est de l'alun de chrome avec une constante de CURIE $C^* = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ K mol}^{-1}$ et une capacité entropique constante $A^* = 0.15 \text{ J K mol}^{-1}$. Quelle est la température finale atteinte si l'on commence le processus à une température et une intensité du champ respectives de 1.0 K et $2.0 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-1}$?

SOLUTION: Il suffit d'utiliser l'équation (10.88) pour le chauffage en posant $I_S = 0$. Nous avons en outre besoin de l'entropie latente et de la capacité entropique données respectivement par les équations (10.97) et (10.98). Nous obtenons ainsi l'équation différentielle:

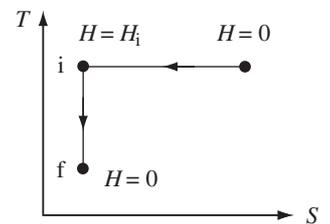


FIGURE 10.14 Refroidissement au moyen de la désaimantation adiabatique: le champ magnétique est tout d'abord augmenté en mode isotherme à une température relativement élevée, ce qui provoque une diminution de la quantité d'entropie contenue dans le corps. Ensuite, l'échantillon est démagnétisé en régime adiabatique, ce qui entraîne une diminution de la température.

4. ZEMANSKY M.W., R.H. DITTMAN (1981).

$$-\frac{\mu_0}{C^*} \mathcal{M} \dot{\mathcal{M}} + \frac{A^*}{T^3} \dot{T} = 0$$

Si nous faisons varier la température de T_i à T_f et simultanément l'aimantation de \mathcal{M}_i à 0, la solution de cette équation est:

$$\frac{\mu_0}{C^*} \mathcal{M}_i^2 = A^* \left(\frac{1}{T_f^2} - \frac{1}{T_i^2} \right)$$

Si nous remplaçons la magnétisation par l'intensité du champ à partir de l'équation d'état (10.84), nous obtenons:

$$T_f = T_i \sqrt{\frac{A^*}{\mu_0 C^* \mathcal{H}_i^2 + A^*}}$$

Pour ce cas, la valeur numérique est:

$$T_f = 1.0 \text{ K} \sqrt{\frac{0.15 \text{ J K mol}^{-1}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ J A}^{-2} \text{ m}^{-1} \cdot 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ K mol}^{-1} \cdot 4.0 \cdot 10^{12} \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} + 0.15 \text{ J K mol}^{-1}}} = 0.036 \text{ K}$$

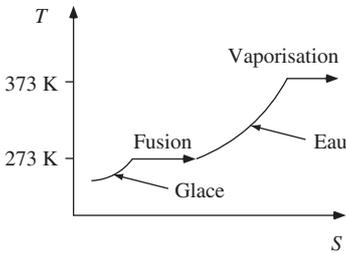


FIGURE 10.15 Diagramme T - S pour la fusion d'un mélange eau-glace et la vaporisation de l'eau. Durant les deux changements de phase, la température reste constante. Le diagramme ne donne qu'une vision qualitative de la relation.

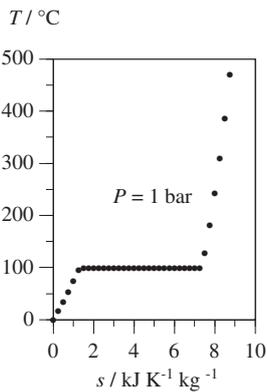


FIGURE 10.16 Diagramme T - s pour le chauffage et la vaporisation de 1 kg d'eau à pression constante. La température croît en fonction de l'apport du contenu en entropie. La section horizontale correspond à la vaporisation: l'apport d'entropie ne provoque pas de variation de la température.

10.7 CHANGEMENTS DE PHASE

La chaleur ne sert pas seulement à rendre les corps plus chauds, ou à faire se dilater l'air, c'est également l'ingrédient essentiel pour les changements de phase: nous avons besoin d'entropie pour faire fondre la glace ou pour vaporiser de l'eau.

Cet apport d'entropie augmente la quantité d'entropie contenue dans le système. Nous savons par expérience que la température d'une substance en train de fondre ou d'être vaporisée (à pression constante) ne varie pas: l'entropie est utilisée uniquement pour provoquer le changement de phase (fig. 10.15). La température de fusion (ou de vaporisation) est unique pour les substances et les conditions dans lesquelles se déroule le processus.

10.7.1 Description d'un changement de phase

Pour illustrer ce qui se passe lors du changement de phase d'un fluide tel que la fusion, la vaporisation ou la sublimation, nous allons considérer à titre d'exemple le chauffage de 1 kg d'eau à partir de 0°C et à pression constante de 1 bar (fig. 10.16). La température et l'entropie spécifique s croissent à partir de zéro (pour l'entropie ce choix est arbitraire), comme le montre le premier segment de la courbe. Durant cette phase, l'eau est qualifiée de *liquide comprimé* (en anglais: *subcooled liquid*). Comme l'eau est quasi incompressible, cette courbe est approximée par la relation (5.32):

$$s(T) = s(T_0) + c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \tag{10.101}$$

Rappelons que pour l'eau, c_p vaut approximativement $4200 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. À la température de 100°C , l'eau se met à bouillir. Juste avant le début de l'ébullition, l'eau est un *liquide saturé*. Durant le processus de vaporisation, la température reste constante, et le fluide est constitué d'un *mélange liquide-vapeur*. Lorsque toute l'eau a été vaporisée, la température de la vapeur se met à croître à cause de l'apport d'entropie. On parle alors de *vapeur surchauffée*, alors que la vapeur que l'on obtient lorsque la dernière goutte de liquide est vaporisée est appelée *vapeur saturée*. On peut également utiliser l'équation (10.101) pour approximer la relation entre la température et l'entropie pour le régime de vapeur surchauffée si l'on considère la vapeur comme un gaz parfait possédant un coefficient de température de l'enthalpie constant. À partir de la figure 10.16, sa valeur moyenne entre 100°C et 200°C est d'environ $2000 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

10.7.2 Équations de bilan lors d'un changement de phase

Lors d'un processus de fusion ou de vaporisation, il faut énoncer les équations de bilan des trois grandeurs qui y participent. Il s'agit tout d'abord de l'entropie. Pendant tout le processus, tel que celui qui est décrit ci-dessus, l'entropie qui est introduite dans le système s'y accumule. Comme le processus est réversible, il n'y a pas de production d'entropie dans le système. Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{S} = I_S \tag{10.102}$$

Lors du chauffage, il y a également de l'énergie qui est introduite par l'entropie. Mais cette énergie ne reste pas complètement dans le système. Particulièrement lors de la vaporisation, le volume du système croît très fortement. La vapeur doit repousser l'air environnant, ce qui signifie qu'une partie de l'énergie est utilisée dans un processus mécanique; on dit que la vapeur effectue un travail (fig. 10.17). L'équation de bilan de l'énergie prend, de ce fait, la forme suivante (fig. 10.18):

$$\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{méc}} \tag{10.103}$$

Nous voyons que, lors de transitions de phase, il faut soigneusement faire la distinction entre l'énergie introduite dans le système et la variation de l'énergie accumulée.

Il faut finalement prendre en compte le processus chimique qui se déroule lors de la transition de phase: une des phases disparaît alors que l'autre apparaît; les équations de bilan de quantité de matière ou de masse sont (nous considérons le processus de vaporisation ou de liquéfaction d'eau, pour celui de fusion ou solidification, il suffit de remplacer l'indice « vap » par « glace »):

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{eau}} &= \Pi_{m, \text{eau}}, & \dot{m}_{\text{vap}} &= \Pi_{m, \text{vap}}, & \Pi_{m, \text{eau}} &= -\Pi_{m, \text{vap}} \\ \dot{n}_{\text{eau}} &= \Pi_{n, \text{eau}}, & \dot{n}_{\text{vap}} &= \Pi_{n, \text{vap}}, & \Pi_{n, \text{eau}} &= -\Pi_{n, \text{vap}} \end{aligned} \tag{10.104}$$

10.7.3 Lois constitutives lors de transitions de phase

Entropie. Les lois constitutives lors de changements de phase sont particulièrement simples: la quantité d'entropie nécessaire pour faire fondre ou vaporiser une substance est proportionnelle à la masse (ou à la quantité de matière) transformée:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= I_S = l_{\text{vap}} \Pi_m & \text{ou} & & \Delta S &= l_{\text{vap}} m_{\text{prod}} \\ \dot{S} &= I_S = \bar{l}_{\text{vap}} \Pi_n & \text{ou} & & \Delta S &= \bar{l}_{\text{vap}} n_{\text{prod}} \end{aligned} \tag{10.105}$$

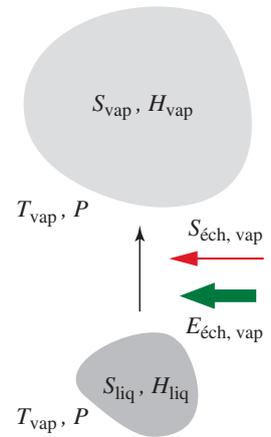


FIGURE 10.17 Lors de la vaporisation, l'entropie introduite reste dans le système, alors qu'une partie de l'énergie est utilisée pour la détente du gaz.

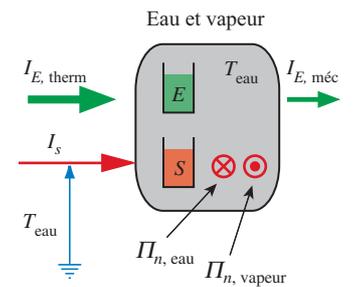


FIGURE 10.18 Diagramme de processus de vaporisation d'eau.

Les grandeurs \dot{m} et \dot{n} représentent respectivement le taux de production de la masse ou de quantité de matière de liquide lors d'une fusion ou de vapeur lors d'une vaporisation, et m_{prod} et n_{prod} sont respectivement la masse et la quantité de matière de la substance produite. Le facteur l_{fus} ou l_{vap} est appelé *entropie latente de fusion spécifique* ou *entropie latente de vaporisation spécifique*, selon le processus considéré (tableau 10.1 et tableau 10.2). Les mêmes grandeurs barrées \bar{l}_{fus} ou \bar{l}_{vap} sont les entropies latentes molaires correspondantes. Comme nous l'avons déjà mentionné à la section 10.2, le terme *latent* exprime le fait que l'entropie fournie n'affecte pas la température du système durant la transition de phase.

TABLEAU 10.1 Entropie et enthalpie de fusion à 1 bar.

	Température	Entropie spécifique	Entropie molaire	Enthalpie spécifique	Enthalpie molaire
	$T_{\text{fus}} / \text{K}$	$l_{\text{fus}} / \text{Ct kg}^{-1}$	$\bar{l}_{\text{fus}} / \text{Ct mol}^{-1}$	$\Delta h_{\text{fus}} / \text{J kg}^{-1}$	$\Delta H_{\text{fus}} / \text{J mol}^{-1}$
Aluminium	933	448	12.1	$3.97 \cdot 10^5$	10720
Cuivre	1356	151	9.68	$2.05 \cdot 10^5$	13120
Fer	1808	153	8.58	$2.70 \cdot 10^5$	13800
Mercure	234	50.2	10.1	$0.11 \cdot 10^5$	2300
Or	1336	49.2	9.69	$0.65 \cdot 10^5$	12943
Platine	2042	54.4	10.6	$1.11 \cdot 10^5$	22170
Plomb	600	38.4	7.94	$0.25 \cdot 10^5$	4770
Tungstène	3695	52.6	9.67	$1.92 \cdot 10^5$	35300
Eau	273	1220	22.0	$3.33 \cdot 10^5$	6010

Énergie. Vu que le processus est réversible, nous pouvons calculer le courant d'entropie et la quantité d'entropie échangée à partir de l'équation (10.105). Le processus se déroulant à température constante, on peut obtenir, au moyen d'une simple multiplication par la température de fusion ou de vaporisation, le courant d'énergie ou la quantité d'énergie échangée $E_{\text{éch, therm}}$ lors du chauffage ou du refroidissement. Comme le changement de phase se déroule également à pression constante, nous pouvons conclure que l'énergie ajoutée correspond à la variation de l'enthalpie du fluide :

$$E_{\text{éch, therm}} = \Delta h_{\text{vap}} m_{\text{prod}} \quad \text{où} \quad \Delta h_{\text{vap}} = T_{\text{vap}} l_{\text{vap}} \quad (10.106)$$

Le facteur Δh_{fus} ou Δh_{vap} est l'*enthalpie de fusion spécifique* (*chaleur latente de fusion*) ou *enthalpie de vaporisation spécifique* (*chaleur latente de vaporisation*).

TABLEAU 10.2 Entropie et enthalpie de vaporisation à 1 bar.

	Température	Entropie spécifique	Entropie molaire	Enthalpie spécifique	Enthalpie molaire
	$T_{\text{vap}} / \text{K}$	$l_{\text{vap}} / \text{Ct kg}^{-1}$	$\bar{l}_{\text{vap}} / \text{Ct mol}^{-1}$	$\Delta h_{\text{vap}} / \text{J kg}^{-1}$	$\Delta H_{\text{vap}} / \text{J mol}^{-1}$
Aluminium	2742	4000	108	$10.9 \cdot 10^6$	$2.94 \cdot 10^5$
Cuivre	2840	1672	107	$4.781 \cdot 10^6$	$3.06 \cdot 10^5$
Fer	3023	2107	118	$6.31 \cdot 10^6$	$3.54 \cdot 10^5$

TABLEAU 10.2 Entropie et enthalpie de vaporisation à 1 bar.

	Température	Entropie spécifique	Entropie molaire	Enthalpie spécifique	Enthalpie molaire
	$T_{\text{vap}} / \text{K}$	$I_{\text{vap}} / \text{Ct kg}^{-1}$	$\bar{I}_{\text{vap}} / \text{Ct mol}^{-1}$	$\Delta h_{\text{vap}} / \text{J kg}^{-1}$	$\Delta H_{\text{vap}} / \text{J mol}^{-1}$
Mercure	630	453	91	$0.29 \cdot 10^6$	$0.57 \cdot 10^5$
Or	3080	558	110	$1.65 \cdot 10^6$	$3.25 \cdot 10^5$
Platine	4100	538	105	$2.30 \cdot 10^6$	$5.10 \cdot 10^5$
Plomb	2020	4250	880	$8.59 \cdot 10^6$	$17.8 \cdot 10^5$
Tungstène	5830	755	139	$4.36 \cdot 10^6$	$8.02 \cdot 10^5$
Eau	373	6055	109	$2.30 \cdot 10^6$	$0.41 \cdot 10^5$

Il est important de noter que, alors que l'entropie qui a été fournie pour le changement de phase est contenue dans la nouvelle phase, ce n'est pas le cas de l'énergie, tout au moins pour une partie de celle-ci. En effet, le changement de phase est généralement accompagné d'une variation du volume, particulièrement importante lors de la vaporisation, et ce processus entraîne un échange d'énergie avec l'environnement (fig. 10.19). La quantité d'énergie échangée peut être calculée. Vu que les transitions de phase se déroulent également à pression constante, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I_{E, \text{méc}} &= -P\Pi_V \\ E_{\text{éch, méca}} &= -P\Delta V \end{aligned} \quad (10.107)$$

P est la pression qui règne dans le fluide et ΔV la variation de volume du système.

Lien entre entropie et enthalpie molaire. Le fait que la vaporisation à température et pression constantes soit réversible implique que l'entropie ajoutée au liquide sera présente dans la vapeur (fig. 10.20). L'entropie latente l due à la transition de phase peut donc être exprimée au moyen des entropies du liquide et de la vapeur :

$$\bar{I}_{\text{vap}} = \bar{s}_{\text{vap}} - \bar{s}_{\text{liq}} \quad (10.108)$$

Pour décrire le changement de phase en termes d'énergie échangée (fig. 10.18), il suffit de tenir compte du fait que l'énergie échangée correspond selon l'équation (10.106) à la variation de l'enthalpie du fluide. Une partie de cette énergie sert à augmenter l'énergie interne, alors que le reste est émis lors de la détente du fluide. Ainsi, la variation de l'entropie et celle de l'enthalpie (l'enthalpie latente de vaporisation) sont liées par :

$$\bar{h}_{\text{vap}} - \bar{h}_{\text{liq}} = T_{\text{vap}} (\bar{s}_{\text{vap}} - \bar{s}_{\text{liq}}) \quad (10.109)$$

Il est naturellement possible d'énoncer la même relation en termes de grandeurs spécifiques.

EXEMPLE 10.8. Vaporisation d'eau dans un récipient isolé.

De l'eau est vaporisée au moyen d'un thermoplongeur dans un récipient isolé, comme le montre l'expérience de la section 5.1.6. La puissance constante du thermoplongeur est de 438 W et la température d'ébullition est de 98.1°C. a) Déterminer le taux de variation de la masse, sachant

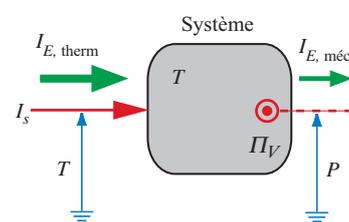


FIGURE 10.19 Diagramme de processus de chauffage d'un corps à la température T . Une partie de l'énergie qui est apportée au système avec l'entropie est utilisée pour provoquer le changement de volume et ne réside plus dans le système.

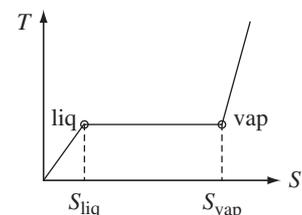


FIGURE 10.20 Il est possible de lire l'entropie de vaporisation à partir du diagramme TS . Sa valeur correspond au segment horizontal de la courbe. Les points liq et vap correspondent aux états de liquide saturé et de vapeur saturée.

les masses mesurées aux temps $t = 0$ s et $t = 600$ s sont respectivement 0.930 kg et 0.810 kg. b) Déterminer le taux de production d'entropie. c) Déterminer les valeurs de l'entropie de vaporisation spécifique et de l'enthalpie de vaporisation spécifique. d) Élaborer un modèle dynamique du processus de vaporisation.

SOLUTION: a) À partir du graphique de la figure 5.8, nous obtenons une approximation du taux de variation de la masse:

$$\dot{m} \approx \frac{0.810 \text{ kg} - 0.930 \text{ kg}}{600 \text{ s}} = -0.20 \cdot 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$$

b) Le taux de production d'entropie est évalué à partir de (5.20):

$$\Pi_S = \frac{\mathcal{P}_{\text{el}}}{T_{\text{vapeur}}} = \frac{438 \text{ W}}{371.25 \text{ K}} = 1.180 \text{ W K}^{-1} = 1.180 \text{ Ct s}^{-1}$$

c) En nous basant sur l'équation (10.105), nous trouvons:

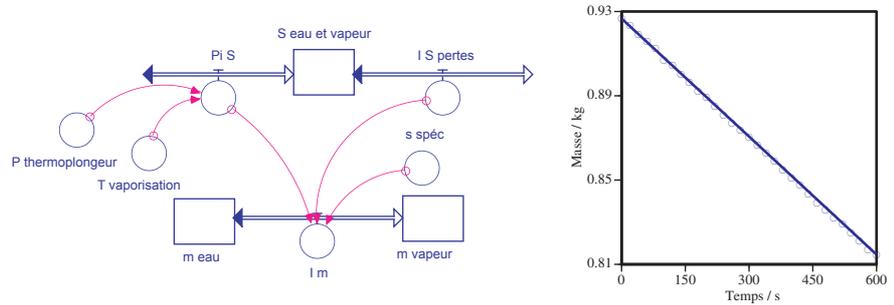
$$l_{\text{vap}} = \frac{\Pi_S}{\dot{m}} = \frac{1.180 \text{ Ct s}^{-1}}{0.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}} = 5900 \text{ Ct kg}^{-1} = 5900 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\Delta h_{\text{vap}} = T_{\text{vapeur}} l_{\text{vap}} = 371.25 \text{ K} \cdot 5900 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} = 2.20 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$$

Ces valeurs sont légèrement inférieures à celles qui apparaissent dans les tables, mais dépendent fortement de l'approximation du taux de variation de la masse.

d) Le modèle est basé sur deux éléments fondamentaux, le bilan d'entropie de l'eau et de la vapeur qui prend en compte l'apport par le thermoplongeur et les pertes vers l'environnement et le bilan des masses donné par (10.104).

FIGURE 10.21 Modèle dynamique de la vaporisation d'eau dans un récipient isolé et comparaison de la simulation et des données expérimentales.



Si l'on tient compte des pertes à travers l'isolation, c'est en choisissant $l_{\text{vap}} = 6160 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ que l'on obtient la meilleure adéquation du modèle aux données expérimentales; la valeur de l'enthalpie de vaporisation devient $2.29 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ (fig. 10.21).

10.7.4 Diagramme T-s de l'eau

Lorsque l'on chauffe une certaine quantité d'eau à pression constante, trois processus se déroulent en séquence. Tout d'abord, l'apport d'entropie entraîne une augmentation de la température selon les lois découvertes à la section 5.5, équation (5.32). Lorsque la température d'ébullition est atteinte, l'eau se transforme en vapeur; durant ce processus, l'entropie du mélange d'eau et de vapeur continue à croître à température constante (fig. 10.16 et 10.22). Finalement, lorsque toute l'eau a été transformée en vapeur, la température du gaz continue à croître si l'apport d'entropie se poursuit. Le diagramme

température-entropie de ce processus est représenté dans la figure 10.22 pour diverses valeurs de la pression.

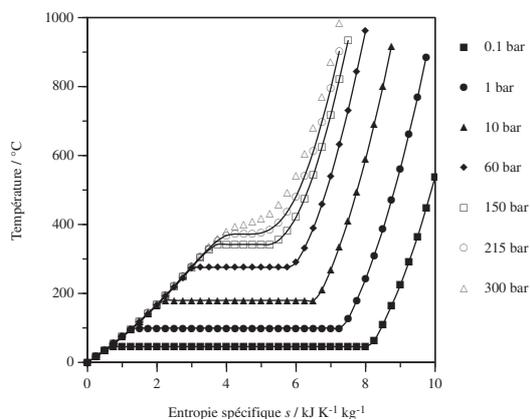


FIGURE 10.22 Diagramme T - s du chauffage et de la vaporisation de 1 kg d'eau à pression constante. Les courbes sont données pour différentes valeurs de la pression.

Notons quelques points intéressants. Tout d'abord, les mesures indiquent que la quantité d'entropie nécessaire pour vaporiser 1 kg d'eau diminue lorsque la pression augmente. Mais, à l'inverse, la quantité d'énergie nécessaire pour ce processus diminue lorsque la pression augmente, car la température de vaporisation augmente avec la pression et l'énergie est proportionnelle à la fois à l'entropie et à la température.

Les segments horizontaux des courbes T - s déterminent une surface en forme de cloche, ce qui permet de diviser le diagramme T - s en trois zones, la première à gauche de la cloche pour la *phase de liquide comprimé*, la deuxième à droite pour la *vapeur surchauffée* et la zone de la cloche elle-même qui représente le *mélange de liquide et de vapeur* (fig. 10.23). La phase liquide occupe une bande très étroite le long de la ligne de liquide saturé; cela est dû au fait que les propriétés de l'eau liquide ne dépendent pas fortement de la pression. Ce n'est que pour des pressions de l'ordre de centaines ou de milliers de bars que les propriétés de l'eau liquide s'éloignent fortement de celles de l'état saturé. La courbe qui délimite la cloche est divisée en deux parties: la partie gauche correspond aux états de *liquide saturé* (liquide sur le point de se vaporiser) et la partie droite montre les états de *vapeur saturée* (vapeur pure sur le point de condenser). Les deux segments se rejoignent au sommet de la cloche en un point dénommé *point critique*. La dernière série de points de la figure 10.22 montre que, lorsque la pression est supérieure à la pression critique de 220.9 bar, la vapeur ne condense plus lorsqu'on la refroidit à pression constante, tant que l'on est au-dessus d'une température critique de 374.14°C, ce qui correspond à une entropie spécifique de 4.43 Ct kg^{-1} .

D'autre part, on voit que l'eau bout à des températures plus basses si la pression est faible. La température d'ébullition de 100°C est valable pour une pression de 1 bar. La pression associée à une certaine température d'ébullition est appelée tension de vapeur. Cette grandeur sera introduite à la section 10.8.3.

10.7.5 Relations pression-température pour les changements de phase

La majorité des observations faites au sujet de la vaporisation peuvent être reprises telles quelles pour la fusion ou la sublimation. Des quantités spécifiques d'entropie sont nécessaires pour ces transformations (ou sont récupérées lors du processus inverse); l'énergie nécessaire est liée à cette grandeur par la température du changement de phase. Tant que le processus se déroule à pression constante, la température reste constante. Dans chacun des cas, la pression ne dépend que de la température à laquelle a lieu le changement.

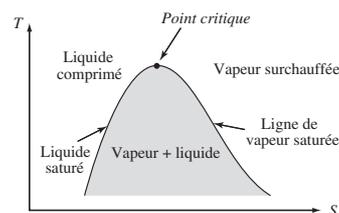
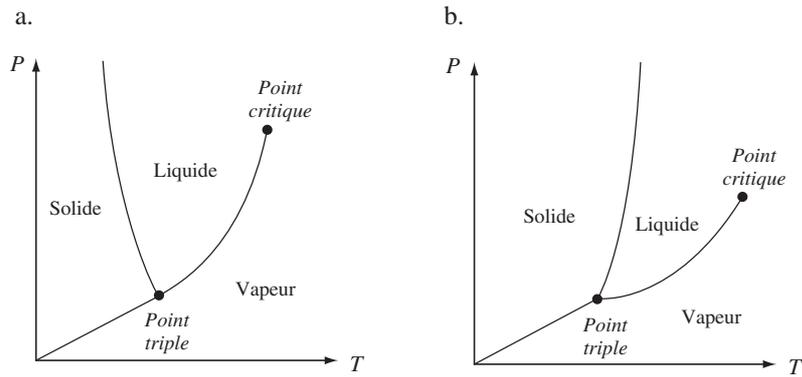


FIGURE 10.23 Le diagramme T - S de l'eau se divise en trois régions: celle du liquide comprimé, celle de la vapeur surchauffée et celle du mélange liquide-vapeur. Elles sont délimitées respectivement par la ligne de liquide saturé et celle de vapeur saturée.

FIGURE 10.24 Diagrammes de phase: (a) pour l'eau; (b) pour toute autre substance. Ces diagrammes expriment la relation entre la pression et la température lors des changements de phase solide-liquide, liquide-vapeur et solide-vapeur. Au point triple, qui correspond à des valeurs uniques de la pression et de la température, les trois phases coexistent. À des températures (et pressions) supérieures au point critique, le liquide et la vapeur ne peuvent pas être distingués.



Le cas de la congélation de l'eau est particulièrement intéressant. Nous savons déjà (exemple 6.5) que des variations de pression influencent le point de fusion. D'autre part, cet effet est responsable du fait que l'eau qui gèle peut fendre la pierre: lorsqu'elle atteint une température légèrement inférieure à 0°C, l'eau gelée engendre une pression gigantesque, ce qui implique que la courbe représentant la relation pression-température pour la fusion ou la congélation a une pente négative, contrairement à ce qui est le cas pour la vaporisation et, en fait, pour tout ce que l'on rencontre par ailleurs dans la nature.

Une relation pression-température analogue existe pour la sublimation. Les trois courbes se rencontrent en un point unique, le point triple, où les trois phases coexistent. La figure 10.24a montre le diagramme de phase pour le cas exceptionnel de l'eau et la figure 10.24b pour celui des autres substances.

1. Lors de la condensation de la vapeur, qu'advient-il de l'entropie de la vapeur, de l'eau et de l'environnement?
2. Les lois constitutives pour le changement de phase (10.104) ont été formulées en termes de taux de production et/ou de destruction de la phase participant au processus. Le taux de production d'une phase est-il toujours égal au taux de variation de la quantité de matière de cette substance?
3. Le courant d'entropie qui apparaît dans l'équation (10.105) est-il égal au taux de variation de l'entropie du système qui subit le changement de phase?
4. Pour faire fondre de la glace, on apporte de l'entropie au système. Qu'advient-il de l'énergie qui accompagne le flux d'entropie?



1. L'entropie de la vapeur et de l'eau prises ensemble diminue, celle de l'environnement augmente.
2. Seulement s'il n'y a pas une partie de la substance qui franchit les limites du volume de contrôle.
3. Oui, car le changement de phase est un processus réversible.
4. L'énergie apportée contribue pour une part à faire varier l'énergie du système, une autre part est liée à la variation du volume.



10.8 POTENTIEL CHIMIQUE ET CHANGEMENT DE PHASE

Nous l'avons découvert au chapitre 6 (section 6.4.2 et 6.4.3), les changements de phase peuvent être traités comme des réactions chimiques. Si, à une température et une pression données, le potentiel chimique d'une phase est plus élevé que celui d'une autre, la substance passera de la première à la seconde phase. Nous allons, dans cette section, montrer comment l'utilisation des potentiels chimiques peut servir à comprendre les phénomènes liés aux changements de phase.

10.8.1 Fusion et vaporisation en tant que réactions chimiques

Les changements de phase peuvent être envisagés comme une catégorie particulière de réactions chimiques, gouvernées par les mêmes lois que celles que nous avons étudiées au chapitre 6 en nous servant des valeurs du potentiel chimique. Ainsi, en consultant les valeurs du tableau 6.2, on voit qu'aux conditions standard, la valeur du potentiel chimique de l'eau liquide est inférieure à celles de la glace et de la vapeur, ce qui implique que la glace et la vapeur doivent passer à l'état liquide à 25°C et une pression de 1 atm.

Les valeurs des potentiels chimiques et des coefficients de température du tableau 6.2, ainsi que l'équation (6.27), permettent d'approximer les valeurs des températures des points de fusion et de vaporisation en exigeant que les potentiels chimiques des deux phases considérées soient égaux, pour autant que la pression reste constante :

$$\mu_{\text{glace}}^0 + \alpha_{\mu, \text{glace}}^0 (T_{\text{fusion}} - T^0) = \mu_{\text{eau}}^0 + \alpha_{\mu, \text{eau}}^0 (T_{\text{fusion}} - T^0) \quad (10.110)$$

C'est ainsi que, dans l'exemple 6.4, nous avons trouvé une température de 274.6 K pour le point de fusion de la glace, ce qui est acceptable, puisqu'il s'agit d'une approximation linéaire.

10.8.2 Influence de la pression sur la valeur du point de fusion

Pour déterminer comment la pression fait varier le point de fusion (ou de vaporisation), il faut tenir compte à la fois de l'influence de la pression et de la température. Cela implique que, par exemple, l'égalité des potentiels chimiques au point de fusion est exprimée par :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{glace}}^0 + \alpha_{\mu, \text{glace}} (T - T_0) + \beta_{\mu, \text{glace}} (P - P^0) \\ = \mu_{\text{eau}}^0 + \alpha_{\mu, \text{eau}} (T - T_0) + \beta_{\mu, \text{eau}} (P - P^0) \end{aligned} \quad (10.111)$$

Si nous choisissons la température de fusion de la glace (à pression normale P^0) comme température de référence T_0 , les potentiels de référence de la glace et de l'eau sont les mêmes. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = - \frac{\alpha_{\mu, \text{glace}} - \alpha_{\mu, \text{eau}}}{\beta_{\mu, \text{glace}} - \beta_{\mu, \text{eau}}} \quad (10.112)$$

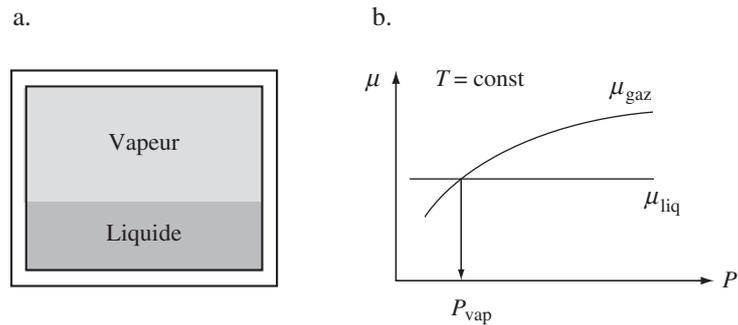
L'introduction des valeurs numériques converties pour 0°C (exemple 6.5) révèle que le taux de variation $\Delta P/\Delta T = -136.2 \text{ bar K}^{-1}$, ce qui signifie que le point de fusion de la glace décroît lorsque la pression augmente et permet de justifier la pente négative du segment solide-liquide du diagramme de phase de la figure 10.24a. Ce résultat remarquable, qui n'est valable que pour l'eau et peut-être pour une ou deux autres

substances, est dû au fait que le coefficient de pression de la glace est plus grand que celui de l'eau. En effet, la température de fusion augmente généralement avec la pression car, si la phase solide a une plus grande densité, le volume molaire et le coefficient de pression sont plus petits. Cette affirmation est également vraie pour la température de vaporisation qui augmente lorsque la pression augmente. Pour ce changement de phase, l'eau a le même comportement que les autres substances, comme nous allons le montrer dans la section suivante.

10.8.3 Pression de vapeur

Lorsque deux phases d'une substance coexistent (par exemple la phase liquide et la phase gazeuse), la situation est comparable, pour une température donnée, à celle d'un fluide et de sa vapeur enfermés dans un récipient isolé (fig. 10.25a). Comme le volume

FIGURE 10.25 Pression de vapeur: (a) lorsque les deux phases coexistent, la substance passe d'une phase à l'autre en fonction de la température; (b) potentiels chimiques des phases liquide et gazeuse; celui du liquide ne varie pratiquement pas, ce qui veut dire que c'est la dépendance par rapport à la température de celui de la phase gazeuse qui détermine si celle-ci va condenser ou si le liquide va s'évaporer. L'égalité des deux potentiels détermine la pression de vapeur pour la température donnée.



et l'énergie sont constants, les seuls changements possibles sont la transformation de liquide en vapeur (ou l'inverse) et la production d'entropie. En vertu de l'équation (6.56), le taux de production d'entropie est donné par:

$$\Pi_S = \frac{1}{T} |\mu_{\text{gaz}} - \mu_{\text{liq}}| |\dot{n}| \quad (10.113)$$

Les échanges entre les deux phases se poursuivront jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, c'est-à-dire lorsque les potentiels chimiques des deux phases seront égaux:

$$\mu_{\text{gaz}}(P, T) = \mu_{\text{liq}}(P, T) \quad (10.114)$$

En nous servant des valeurs du tableau 6.2, nous pouvons estimer celle de la pression de vapeur à la température de 25°C. Il faut toutefois convertir les potentiels aux valeurs de la pression inconnue. Si nous traitons la vapeur d'eau comme un gaz parfait et l'eau liquide comme un fluide incompressible, nous avons:

$$\mu_{\text{gaz}}^0 + RT \ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P^0}\right) = \mu_{\text{liq}}^0 + (P_{\text{vap}} - P^0) \bar{v}_{\text{liq},0} \quad (10.115)$$

Lorsque l'on introduit des valeurs numériques, on se rend compte que le terme relatif à la pression du liquide est très petit comparé aux autres termes, ce qui veut dire que la pression du liquide n'influence que très peu le résultat (comme on peut le voir sur le graphique de la figure 10.25b). Si l'on néglige ce terme, la solution de l'équation (10.115) donne:

$$\ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P^0}\right) = -\frac{1}{RT} (\mu_{\text{gaz}}^0 - \mu_{\text{liq}}^0) \quad (10.116)$$

L'insertion des valeurs du tableau 6.2 donne, pour la pression de vapeur de l'eau à 25°C, une valeur de 3150 Pa, ce qui est proche de la valeur mesurée de 3169 Pa. On peut obtenir une première approximation de l'évolution de la pression de vapeur en fonction de la température au moyen de l'équation (10.116) en ajustant les potentiels chimiques à la température. Mais les valeurs correctes doivent être mesurées, car les fluides n'obéissent pas à des lois constitutives simples. La courbe de tension de vapeur pour l'eau est représentée dans la figure 10.26. Notons que cette courbe a un début et une fin. Cette dernière n'apparaît pas dans le graphique: c'est le point critique alors que le point initial est le point triple de la substance.

Nous pouvons maintenant donner une interprétation de la courbe en forme de cloche de la figure 10.23. Les points de cette courbe sont ceux qui correspondent à la condition d'équilibre chimique (10.114) entre le liquide et la vapeur.

Dépendance de la pression de vapeur par rapport à la température. Pour obtenir cette dépendance à partir de la relation (10.116), il faut connaître les potentiels chimiques de chacune des deux phases en fonction de la température et de la pression. Les relations en question sont⁵:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{gaz}} &= \mu_{\text{gaz}}^0 + RT \ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_0}\right) + \bar{c}_{P_{\text{gaz}}}(T - T_0) - T\bar{c}_{P_{\text{gaz}}} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - (T - T_0)\bar{s}_{0_{\text{gaz}}} \\ \mu_{\text{liq}} &= \mu_{\text{liq}}^0 + (P_{\text{vap}} - P_0)\bar{v}_{0_{\text{liq}}} + \bar{c}_{P_{\text{liq}}}(T - T_0) - T\bar{c}_{P_{\text{liq}}} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - (T - T_0)\bar{s}_{0_{\text{liq}}}\end{aligned}\quad (10.117)$$

Le terme relatif à la pression dans le potentiel chimique de la phase liquide et les termes où apparaissent les coefficients de température de l'enthalpie sont relativement petits comparés à ceux liés à l'entropie et peuvent être négligés en première approximation. L'égalité des potentiels chimiques à l'équilibre donne finalement:

$$\ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_0}\right) = -\frac{1}{RT} \left[(\mu_{\text{gaz}}^0 - \mu_{\text{liq}}^0) - (T - T_0)(\bar{s}_{0_{\text{gaz}}} - \bar{s}_{0_{\text{liq}}}) \right] \quad (10.118)$$

Nous pouvons utiliser cette relation pour calculer la température à laquelle la pression de vapeur correspond à la pression standard de 1 atm. Avec les valeurs du tableau 6.2, nous obtenons une température de 97°C, ce qui est suffisamment proche de la valeur correcte, vu les approximations effectuées.

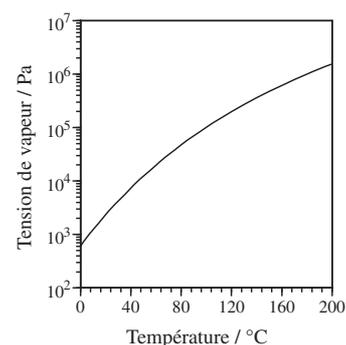


FIGURE 10.26 Courbe de tension de vapeur de l'eau. La tension de vapeur est reportée dans une échelle logarithmique.

1. Lorsque l'on évapore de l'eau, quelles parts respectives de l'entropie et de l'énergie apportée retrouve-t-on dans la vapeur?
2. Que peut-on affirmer au sujet des valeurs des potentiels chimiques du liquide et de la vapeur (ou du solide et du liquide) le long de la fonction pression-température séparant les phases dans les diagrammes de phase PT de la figure 10.24?
3. Dans le diagramme TS du passage de la phase liquide à la phase vapeur de la figure 10.23, en quels points ou le long de quelles lignes les potentiels chimiques du liquide et de la vapeur sont-ils égaux?
4. Si la courbe de pression de vapeur de l'eau doit être calculée sur la base des modèles de fluide incompressible et de gaz parfait, quelles relations faut-il utiliser?



5. Fuchs H.U. (2010): *The Dynamics of Heat*, Springer, New York, section 8.4.

1. Toute l'entropie, mais seulement une partie de l'énergie.
2. Ils sont égaux.
3. Le long de droites horizontales, correspondant à une température T constante, dans la zone de coexistence du liquide et de la vapeur.
4. L'équation (10.117).



EXEMPLE 10.9. Variation de la tension de vapeur et enthalpie de vaporisation.

(a) Exprimez l'approximation (10.118) pour la pression de vapeur en fonction de la température au moyen de l'entropie de vaporisation. Utilisez la température de vaporisation à 1 atm en tant que référence. (b) Déterminez la pression de vapeur et le potentiel chimique standard de la vapeur de mercure à 25°C.

SOLUTION: (a) À une pression de 1 atm et avec la température de vaporisation correspondante en tant que valeur de référence, les potentiels chimiques standard de la vapeur et du liquide sont égaux. Si nous utilisons la relation (10.109) entre l'entropie et l'enthalpie de vaporisation, l'équation (10.118) se réduit à :

$$\ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_0}\right) = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{T_{\text{ébul}}}{T}\right)\left(\bar{s}_{\text{ébul,gaz}} - \bar{s}_{\text{ébul,liq}}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{T_{\text{ébul}}} - \frac{1}{T}\right)\Delta\bar{h}_{\text{vap,ébul}}$$

Ce résultat implique que la mesure de l'enthalpie de vaporisation fournit une information fondamentale sur un fluide envisagé comme un gaz parfait.

(b) Nous utilisons le résultat que nous venons d'obtenir avec $T_{\text{vap}} = 630 \text{ K}$ et 57 kJ mol^{-1} pour l'enthalpie de vaporisation. Il s'ensuit :

$$\ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_0}\right) = \frac{1}{8.3144 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}\left(\frac{1}{630 \text{ K}} - \frac{1}{298 \text{ K}}\right)57 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1} = -12.1$$

ce qui correspond à une tension de vapeur de 0.54 Pa. Nous pouvons utiliser cette valeur pour calculer le potentiel chimique du mercure gazeux à 25°C et 1 atm à partir de l'équation (10.116):

$$\ln\left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_0}\right) = -\frac{1}{8.3144 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 298 \text{ K}}(\mu_{\text{gaz}}^0 - 0)$$

sachant que le potentiel chimique du mercure liquide aux conditions standard est nul par convention. Nous obtenons ainsi une valeur de 30.0 kG, comparée à la valeur des tables qui est de 31.84 kG. ■

Résumé du chapitre

Lorsqu'ils sont soumis à des apports ou à des retraits de chaleur, les fluides répondent par des variations simultanées de la température et du volume. Nous considérons des fluides parfaits, donc sans viscosité et dans lesquels la chaleur se répartit uniformément sans résistance, ce qui implique qu'il n'y a pas de dissipation.

L'équation de bilan de l'entropie est donc celle d'un processus réversible, à savoir: $\dot{S} = I_s$. Le taux de production du volume $\dot{V} = \Pi_v$ sert à exprimer les variations de

volume. L'équation de bilan de l'énergie $\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} = T\dot{I}_S - P\dot{I}_V$ tient compte des deux processus.

Lors de l'établissement des lois constitutives pour un fluide parfait, on envisage deux cas extrêmes, le chauffage isotherme, au cours duquel l'apport d'entropie ne provoque que des variations de volume, et le chauffage isochore, où seule la température évolue.

Dans le cas du chauffage isotherme, la variation de l'entropie est: $\dot{S} = I_S = \Lambda_V \dot{V}$. Le paramètre Λ_V est l'entropie latente par rapport au volume ou entropie latente de détente.

Lorsque l'apport d'entropie a lieu à volume constant, son taux de variation est donné par la relation: $\dot{S} = I_S = K_V \dot{T}$. Le paramètre K_V est la capacité entropique à volume constant.

Le processus général de chauffage du fluide parfait est la réalisation simultanée des deux cas considérés, ce que l'on modélise par: $\dot{S} = I_S = \Lambda_V \dot{V} + K_V \dot{T}$. On peut aussi énoncer l'équation de bilan en termes de pression et de température: $I_S = \Lambda_p \dot{P} + K_p \dot{T}$. Le paramètre Λ_p est l'entropie latente par rapport à la pression ou entropie latente de compression.

L'énergie échangée au cours d'un processus isotherme ne dépend que du rapport du volume final au volume initial. Lors de processus adiabatiques, ou isentropiques, l'équation d'état du gaz parfait devient $PV^\gamma = \text{const}$. L'exposant $\gamma = K_p/K_V$ est le coefficient adiabatique. Il est constant dans le cas d'un gaz parfait.

À partir de l'équation d'état du gaz parfait $PV = nRT$, il est possible de déterminer les relations entre les quatre paramètres intervenant dans les équations de bilan. Les capacités entropiques sont proportionnelles à l'inverse de la température, ce qui implique que leurs produits avec la température sont des grandeurs énergétiques constantes que l'on appelle capacités thermiques en thermodynamique traditionnelle.

La température des objets peut varier à la suite d'absorption ou d'émission de rayonnement électromagnétique que l'on appelle alors rayonnement thermique. Un objet qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit est un corps noir. À la température T , il émet un rayonnement auquel on attribue la même température. Ce rayonnement peut être considéré comme un gaz de photons que l'on peut traiter de manière analogue à un gaz parfait. En procédant de la sorte, on établit que la densité d'énergie du gaz de photons est proportionnelle à la quatrième puissance de la température, ce qui est également le cas de son entropie latente de détente, alors que sa capacité entropique à volume constant varie avec le carré de la température. Le contenu en entropie du rayonnement du corps noir varie avec le cube de la température.

Dans certains matériaux paramagnétiques, on peut observer un couplage entre la température et l'aimantation, il s'agit de l'effet magnétocalorique. L'équation de bilan peut être exprimée au moyen de l'aimantation \mathcal{M} qui est la grandeur extensive intervenant dans ce processus: $\dot{S} = I_S = \Lambda_{\mathcal{M}} \dot{\mathcal{M}} + K_{\mathcal{M}} \dot{T}$, ou au moyen de la grandeur intensive associée, à savoir l'intensité \mathcal{H} du champ magnétique: $\dot{S} = I_S = \Lambda_{\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}} + K_{\mathcal{H}} \dot{T}$. Les relations constitutives qui lient entre elles les entropies latentes et les capacités entropiques peuvent être établies à partir de l'équation d'état thermique d'une substance paramagnétique: $\mathcal{M}T = C^* \mathcal{H}$, où C^* est la constante de CURIE. L'effet magnétocalorique peut être utilisé pour accéder à de très basses températures au moyen de la désaimantation adiabatique.

Les changements de phase sont caractérisés par le fait que la température reste constante durant le passage d'un état à l'autre. Les équations de bilan doivent énoncer les variations des trois grandeurs qui participent à un tel processus. Il s'agit d'abord de l'entropie qui s'accumule dans le système ou s'en échappe: $\dot{S} = I_S$. Comme le processus est réversible, il n'y a pas de production d'entropie. L'entropie introduit de l'énergie dans le système ou en extrait. Une partie de cette énergie est utilisée dans un

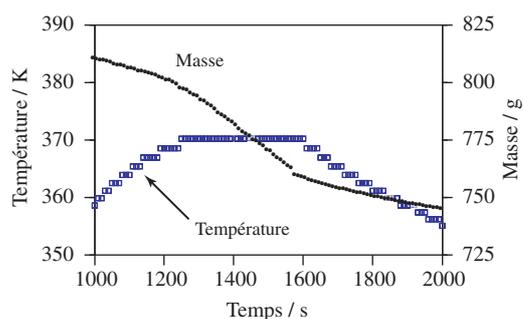
processus mécanique, ce qui apparaît dans l'équation de bilan: $\dot{E} = I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{méc}}$. Enfin, il faut prendre en compte les processus chimiques en formulant les bilans des quantités de matière (ou de masse): $\dot{n}_{\text{eau}} = \Pi_{n, \text{eau}}$ et $\dot{n}_{\text{vap}} = \Pi_{n, \text{vap}}$ avec $\Pi_{n, \text{eau}} = -\Pi_{n, \text{vap}}$, ici pour le cas de vaporisation d'eau. Les lois constitutives sont simples, par exemples pour la vaporisation, nous avons: $\dot{S} = I_S = \bar{l}_{\text{vap}} \Pi_n$ ou $\Delta S = \bar{l}_{\text{vap}} n_{\text{prod}}$, où \bar{l}_{vap} représente l'entropie molaire de vaporisation. Des relations équivalentes doivent être énoncées pour l'énergie.

L'utilisation des potentiels chimiques permet d'envisager les transitions de phase comme des réactions chimiques particulières. Ainsi, en égalant les valeurs des potentiels de deux phases d'une substance, il est possible de déterminer la température à laquelle aura lieu le passage d'une phase à l'autre. De même, on peut déterminer l'influence de la pression sur la température du changement d'état.

Exercices et problèmes

- (a) Démontrez comment l'entropie molaire ou spécifique de fusion (ou de vaporisation) peut être déterminée au moyen de la mesure du flux d'énergie de chauffage, de la température de fusion (ou de vaporisation) et du taux de variation de la quantité de matière fondue (ou vaporisée). (b) Un mélange de glace et d'eau est chauffé par un thermoplongeur et brassé pour assurer des conditions homogènes. Si la puissance électrique est de 50 W, 10 g de glace fondent en 67 s. Calculez l'entropie spécifique de fusion de la glace.
- Freon-12 est un fluide réfrigérant utilisé dans les réfrigérateurs. Il absorbe l'entropie de l'espace à refroidir lors de son évaporation à basse température. Lors de son évaporation à -30°C , il absorbe un courant d'entropie de 4.0 Ct s^{-1} . (a) À quel taux le fréon liquide passe-t-il dans sa phase gazeuse? L'entropie latente spécifique de vaporisation à -30°C est égale à 680 Ct kg^{-1} . (b) Que vaut l'enthalpie spécifique de vaporisation du Freon-12 à cette température? (c) À quel taux pourrait-on produire de la glace dans ce réfrigérateur?
- De l'eau est chauffée, partiellement vaporisée, puis évaporée dans un verre ouvert posé sur une balance. L'évolution de la température et de la masse de l'eau est représentée dans la figure 10.27. Le thermoplongeur est débranché à $t = 1600 \text{ s}$. Les données expérimentales sont : température ambiante : 20°C ; aire des parois du verre : $3.58 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$; coefficient de transfert de l'entropie à travers les parois (de l'eau à l'air) : $0.039 \text{ Ct s}^{-1} \text{ m}^{-2}$; puissance du thermoplongeur : 304 W. Considérez l'instant $t = 1400 \text{ s}$. (a) Que vaut le taux de production d'entropie du thermoplongeur à cet instant? (b) Que vaut le flux massique de vapeur? (c) Quel est le flux d'entropie à travers les parois du verre (le fond est bien isolé)? (d) Déterminez l'entropie spécifique d'évaporation à partir des données expérimentales.

FIGURE 10.27
Problème 3.



- Un ballon à air chaud flotte à une altitude de 2000 m dans une atmosphère isotherme de température égale à 0°C . La température de l'air à l'intérieur du ballon est de 250°C . Déterminez le rayon du ballon sphérique en admettant que sa masse est de 450 kg, passagers compris, et que la pression au niveau de la mer est de 1 bar.
- Une éprouvette de 10 cm de longueur est remplie d'air à la température de 27°C . En gardant l'éprouvette ouverte, l'air est chauffé à la température de 57°C . L'éprouvette est ensuite

retournée et plongée dans l'eau en laissant 5 cm au-dessus du niveau de l'eau comme le montre la figure 10.28. L'air enfermé se refroidit à 27°C . A quelle distance au-dessus ou au-dessous du niveau extérieur l'eau va-t-elle pénétrer dans l'éprouvette sachant que la pression atmosphérique vaut 1 bar?

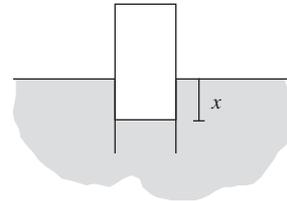


FIGURE 10.28
Problème 5.

- Lorsqu'un gaz parfait se dilate ou se contracte, il échange de l'énergie en conséquence du processus mécanique. (a) Déterminez l'énergie échangée dans le doublement isotherme d'une mole de gaz parfait à la température de 300 K. (b) Que vaut l'entropie échangée?
- Une grande bouteille remplie d'air est surmontée d'un col cylindrique étroit (fig. 10.8a). Lorsqu'on laisse tomber à l'intérieur de ce cylindre une bille de diamètre choisi de manière à ce que l'air ne puisse pas s'échapper latéralement et que les frottements soient peu importants, elle oscille verticalement un certain nombre de fois jusqu'à ce que la dissipation interrompe son mouvement (fig. 10.8b). Les oscillations sont suffisamment lentes pour qu'on puisse les observer et suffisamment rapides pour que le cycle de détente et compression de l'air soit adiabatique. La taille de la bouteille est telle que l'on peut admettre que la pression et le volume de l'air qu'elle contient restent inchangés. Déterminez la fréquence de l'oscillation.
- Exprimez l'énergie échangée lors de la détente adiabatique du gaz parfait au moyen des températures, sachant que l'énergie du gaz parfait ne dépend que de la température.
- Pour déterminer le rapport des capacités entropiques, on peut réaliser l'expérience de Clément et Désormes. L'air contenu dans une grande bouteille est comprimé à une pression légèrement plus élevée que la pression extérieure, et la pression interne est mesurée. On laisse s'échapper rapidement de l'air à travers une valve pour ramener la pression à la valeur extérieure. La température interne diminue, vu que le processus est adiabatique. Finalement, on chauffe l'air lentement pour ramener sa température à la valeur initiale et on mesure la pression atteinte. (a) Esquissez un diagramme TV des deux étapes. (b) Dérivez le rapport des capacités entropiques à partir des valeurs de la pression. (c) Démontrez que l'énergie échangée durant la première étape doit être égale, au signe près, à celle qui est échangée durant la seconde étape.
- Un fluide dont l'énergie ne dépend que de la température se dilate en régime adiabatique; dans une seconde étape, sa température est ramenée à sa valeur initiale à volume constant. On constate que, durant la phase de détente adiabatique, le fluide échange une quantité d'énergie égale à 50 kJ. (a) Par quel type de processus cet échange d'énergie est-il provoqué? Quel est le signe de l'énergie échangée? (b) Y a-t-il échange d'énergie durant l'étape isochore? Dans l'affirmative, par

- quel type de processus, et combien? (c) Esquissez les étapes dans un diagramme TS en admettant que l'entropie est conservée. Est-il possible de visualiser ΔE ou des quantités d'énergie échangée dans ce diagramme?
11. Une quantité de 1.0 g d'eau est complètement vaporisée à 100°C et à la pression de 1.0 bar pour produire 1670 cm³ de vapeur. Exprimez la variation de l'énergie de l'eau en termes de variation d'entropie et de volume et déterminez sa valeur.
 12. Comment l'énergie de l'eau varie-t-elle si elle subit une détente isotherme à la température de 2°C? La réponse est-elle différente à la température de 20°C?
 13. Une masse de 20 kg d'air à 100°C et 1.0 bar est comprimée en régime isotherme. (a) Combien d'énergie doit-on apporter dans le processus mécanique si le volume doit être réduit à 10% de sa valeur initiale? (b) Quelle sera la valeur de la pression à la fin du processus? (c) Si la compression doit être réalisée en 10 s à un taux de variation du volume constant, comment la valeur de la puissance mécanique évolue-t-elle en fonction du temps?
 14. De l'air sec dévale d'une montagne située à 2500 m d'altitude dans une vallée à 500 m d'altitude. La température de l'air au sommet est de 4°C. Avant l'arrivée du vent, celle de la vallée est de 16°C. De combien l'arrivée du vent dans la vallée va-t-elle élever la température?
 15. Pourquoi l'entropie du gaz parfait reste-t-elle constante lors d'un processus adiabatique? Déterminez la forme particulière des équations de bilan de l'entropie et de l'énergie pour un tel processus. Qu'advient-il de l'énergie du gaz parfait durant une détente adiabatique?
 16. Esquissez la courbe relative à un processus isobare de l'air dans un diagramme TS . Qu'advient-il de la courbe si le processus se déroule à une pression plus élevée?
 17. Un volume d'air est chauffé à pression constante. Quelle fraction de l'entropie ajoutée reste à l'intérieur de ce volume? Qu'en est-il de l'énergie ajoutée?
 18. Considérez une quantité fixe d'air atmosphérique à la température de 15°C et une pression de 950 mbar. Le rayonnement du Soleil est tel que cet air absorbe de l'énergie à un taux de 0.1 W. (a) Au début, le volume de cette quantité d'air est de 1.0 m³. Que valent la quantité de matière et la masse de cette quantité d'air? (b) À quel taux l'entropie de ce volume d'air croît-elle à ce moment? (c) Quelle est la capacité entropique à volume constant de cet air? Quelle est la capacité entropique à pression constante? (d) Lors du processus envisagé, la pression reste constante. À quel taux la température évolue-t-elle au premier instant?
 19. Une masse de 5 g d'air à une pression de 38 bar et une température de 650°C est chauffée à l'intérieur d'un cylindre par la combustion d'un carburant injecté. L'énergie ajoutée par ce chauffage est de 7.5 kJ. Le piston se déplace de manière à maintenir la pression constante (cela correspond à une des étapes du processus Diesel). Admettez que le carburant injecté ne change pas les propriétés de l'air dans le cylindre. (a) Combien d'énergie est échangée à la suite de la variation du volume d'air? (b) Calculez la variation d'énergie du gaz.
 20. Une bulle d'air de diamètre initial de 5.0 mm commence à remonter vers la surface d'un étang à partir d'une profondeur de 5 m. Du fond à la surface, la température de l'eau varie linéairement de 6°C à 15°C. Admettez que la température de la bulle évolue comme celle de l'eau environnante. Négligez les effets de la tension superficielle. (a) Déterminez le diamètre de la bulle peu avant qu'elle atteigne la surface. (b) Estimez approximativement la quantité d'énergie échangée en conséquence du chauffage durant la montée de la bulle.
 21. Utilisez les lois de l'équilibre hydrostatique pour un colonne de gaz s'étendant du centre du Soleil à sa surface afin d'estimer la pression au centre. Le gaz au centre du Soleil est un gaz parfait. Déterminez sa température à partir d'une grossière estimation de la densité. Quelle est l'importance de la contribution du rayonnement à la pression au centre du Soleil?
 22. Le gaz de photons peut être soumis à des processus adiabatiques et isothermes. (a) Exprimez la relation entre la température et le volume du rayonnement du corps noir lors de processus adiabatiques. Montrez que le rayonnement du corps noir se comporte comme un gaz parfait avec un rapport des capacités entropiques égal à 4/3. (b) Déterminez les quantités d'énergie échangées en conséquence de variations isothermes du volume et calculez la variation d'énergie du gaz de photons.
 23. Considérez le modèle fortement simplifié d'un gaz de particules sans interaction: N particules sont enfermées dans un cube de longueur des côtés égale à L . Admettez qu'un tiers des particules se déplacent dans chacune des directions parallèles aux parois du cube. Toutes les particules ont le même module de vitesse. (c) Montrez que la pression de ce gaz est donnée par: $P = 1/3 N V p / V$, où V et p sont respectivement le module de la vitesse et la quantité de mouvement d'une particule, et V le volume du cube. (b) Appliquez ce résultat à un gaz parfait de particules matérielles. Dérivez la relation entre la pression et la densité d'énergie du gaz. (c) Dans le même contexte, dérivez l'expression du coefficient de température de l'énergie. À quel type de gaz la valeur de ce coefficient est-elle relative? (d) Appliquez l'idée à un gaz de photons. Montrez que la relation entre la pression et la densité d'énergie est celle de l'équation (10.65).
 24. De la vapeur d'eau surchauffée à une température de 300°C et une pression de 30 bar subit une détente isentropique qui se termine à une température de 100°C (un tel processus pourrait se produire lors d'une détente adiabatique d'un fluide parfait dans une turbine). (a) Calculez l'entropie spécifique et l'enthalpie du fluide. (b) Déterminez la température et la pression auxquelles le fluide commence à se condenser. (c) Calculez la pression et la répartition du mélange de fluides à l'état final. Pour les calculs, utilisez des valeurs obtenues par interpolation dans les figures 10.22 ou fig. 10.29.
 25. Le cycle de Rankine est un modèle des étapes que traverse le fluide (eau et vapeur) dans une turbine à vapeur d'une centrale thermique (ligne continue dans la figure 10.29). De 1 à 2, l'eau est chauffée. Simultanément, la pression est élevée à 60 bar. La poursuite du chauffage provoque une vaporisation totale (2 à 3). Ensuite, on poursuit le chauffage de la vapeur à

pression constante (3 à 4). De 4 à 5, la vapeur subit une détente isentropique dans la turbine pour ramener la pression à 1 bar. Finalement, la totalité du fluide est liquéfiée (5 à 1). Dans ce qui suit, considérez 1 kg d'eau.

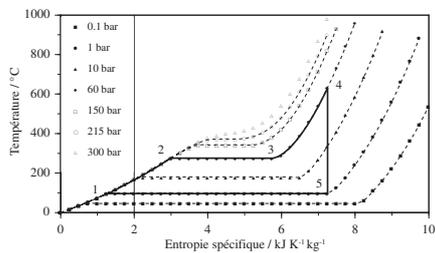


FIGURE 10.29
Problème 25.

(a) Dans l'étape 3 à 4, considérez la vapeur comme un gaz parfait de coefficient de température de l'enthalpie (chaleur spécifique à pression constante) de 3000 J kg^{-1} . Combien d'entropie doit-on injecter dans le gaz pour que sa température croisse comme le montre le diagramme ? Comparez votre résultat avec le diagramme. (b) Combien d'énergie par kilogramme d'eau est libérée du condenseur vers l'environnement durant l'étape de 5 à 1 ? Quel est le flux d'énergie vers l'environnement lorsque le flux massique du fluide dans la centrale est de 800 kg s^{-1} ?

CHAPITRE 11

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT ET SYSTÈMES OUVERTS

Ce chapitre est consacré à l'approfondissement de l'étude des phénomènes de transport que nous avons déjà rencontrés dans les chapitres précédents, à savoir la *conduction*, le *rayonnement* et la *convection*. Les premières sections traiteront de la conduction et du rayonnement et seront illustrées par le transport de l'entropie. Les dernières sections aborderont les processus de convection et nous confronteront avec les *systèmes ouverts*.

11.1 MODES DE TRANSPORT ET FORCE MOTRICE THERMIQUE

L'introduction des trois types de transport d'entropie, que l'on rencontre par ailleurs dans d'autres domaines de la physique et des sciences naturelles, nous amènera à généraliser l'équation de bilan de l'entropie et à mieux comprendre le rôle de la température dans les processus thermiques.

11.1.1 Transport d'entropie par conduction

Au chapitre 5, nous avons observé que la chaleur, l'entropie, migre de l'extrémité chauffée d'une barre métallique vers l'extrémité froide, qu'elle passe à travers les parois de récipients ou les murs d'une maison.

Dans chacun de ces exemples, il n'y a aucun transport de matière. L'entropie s'écoule à travers les corps sans l'aide d'un corps qui la transporte, et elle s'écoule d'un corps à l'autre s'ils sont mis en *contact direct*. Ce sont des exemples de *conduction* ou *diffusion de l'entropie*.

Force d'entraînement. Les observations du chapitre 5 nous ont également révélé que l'entropie s'écoule par conduction tant qu'il existe une différence de température entre les corps qui échangent de la chaleur, et que le processus est spontané lorsque l'entropie s'écoule de corps chauds vers des corps froids.

Nous avons observé ce type de comportement dans tous les domaines de la physique que nous avons abordés : dans chaque cas, quelque chose s'écoule tant qu'il y a une différence de potentiel en tant que force d'entraînement du processus. Par analogie, nous interprétons le transport d'entropie par conduction de la manière suivante :

Lors du transport par conduction, l'entropie s'écoule à travers les corps des points de température élevée vers ceux de température plus basse. Le processus dure tant qu'il y a une différence de température qui sert de force d'entraînement.

Équation de bilan de l'entropie. Le transport d'entropie par conduction est un excellent exemple de processus irréversible (section 5.7). Un corps qui conduit de l'entropie

en produit simultanément. Ce doit être le cas puisque, dans un processus stationnaire, l'énergie qui entre dans le corps à température élevée en émerge à un niveau thermique plus bas. Il s'ensuit que le courant d'entropie qui émerge du système doit être plus important que celui qui y a pénétré. Cela signifie que l'équation de bilan de l'entropie doit contenir un terme qui prend en compte la production d'entropie :

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond}} + \Pi_S \tag{11.1}$$

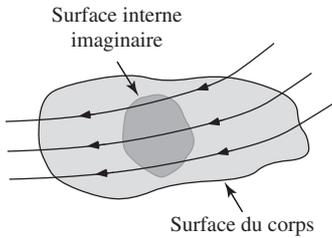


FIGURE 11.1 Flux conductif d'entropie à travers des surfaces. De telles surfaces peuvent être des surfaces réelles de corps ou des surfaces imaginaires qui séparent des parties internes du corps.

Le terme $I_{S, \text{cond}}$ représente le flux net d'entropie transportée par conduction dans le système considéré. Nous l'appellerons *flux conductif d'entropie*.

Écoulement à travers des surfaces. L'entropie qui s'écoule par conduction doit, à un moment donné, s'écouler à travers la surface des corps. Si nous sommes intéressés par l'écoulement à l'intérieur du corps, nous pouvons introduire des surfaces imaginaires entre deux éléments du corps qui sont en contact (fig. 11.1). Nous relevons cette particularité parce qu'un corps peut absorber ou émettre de l'entropie par rayonnement.

11.1.2 Transport d'entropie par les fluides: convection

Au lieu du climat tempéré dont elles jouissent, les régions septentrionales de l'Europe auraient un climat beaucoup plus rude si elles ne bénéficiaient pas de l'apport du Gulf Stream qui transporte de gigantesques quantités de chaleur du golfe du Mexique vers les côtes occidentales de l'Europe. Il ne s'agit que d'un exemple parmi d'autres d'un deuxième mode de transport de l'entropie qui est, dans ce cas, transportée par un milieu matériel en mouvement, tel que l'air qui s'élève au-dessus d'un radiateur chaud, de l'eau chaude pompée dans les conduites d'un chauffage central. On parle dans un tel cas de *transport d'entropie par convection*.

Force d'entraînement. Une différence de température entraîne la conduction d'entropie, ce qui n'est pas le cas lors du transport par convection. Le flux convectif d'entropie est causé par la force d'entraînement de l'écoulement qui transporte la chaleur; nous savons qu'il s'agit d'une *différence de pression* engendrée par une pompe ou un autre appareil ou processus :

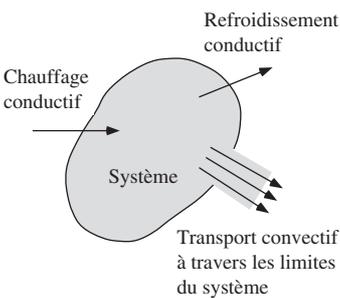


FIGURE 11.2 L'entropie peut traverser les limites d'un corps par conduction ou par convection. Dans le premier cas, il n'y a aucun transport de matière à travers la surface et l'entropie s'écoule à travers la matière. Dans le cas de la convection, une substance s'écoule à travers la surface, entraînant avec elle l'entropie qu'elle contient.

Lors d'un processus de convection, l'entropie est transportée par des écoulements de substances. La force d'entraînement de ce processus est la différence de pression à l'origine de l'écoulement de la substance matérielle.

On pourrait croire que, par exemple, l'ascension de l'air chaud au-dessus d'un radiateur est due à une différence de température. En fait, la circulation de l'air est due à une *différence de pression engendrée par le chauffage*. La différence de température est donc responsable du flux de manière indirecte.

Bilan d'entropie. Comme il s'agit d'un nouveau processus, nous devons en tenir compte par l'introduction d'un nouveau terme dans l'équation de bilan de l'entropie, celui qui prend en compte les *courants convectifs* :

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond}} + I_{S, \text{conv}} + \Pi_S \tag{11.2}$$

À nouveau, nous sommes confrontés à un processus qui se déroule à la surface: les substances, et avec elles l'entropie, s'écoulent vers ou hors de régions de l'espace à travers des surfaces réelles ou imaginaires (fig. 11.2).

Il faut relever un point important au sujet de l'identification du système sur lequel porte le bilan d'entropie. Jusqu'à présent, nous avons toujours affaire à des objets matériels rigides qui n'échangeaient pas de matière avec leur environnement, que nous continuerons à appeler des *corps*. En présence d'un écoulement de matière, la situation se complique. Considérons par exemple un volume d'eau s'écoulant dans une rivière. Nous pouvons continuer à le considérer comme un corps séparé du reste de la rivière par une surface imaginaire qui se déplace et se déforme avec lui (fig. 11.3). Dans un tel cas, le taux de variation de l'entropie (ou d'une autre fonction) dans l'équation (11.1) se réfère à l'*entropie du corps*. C'est pour cette raison que cette dérivée est appelée *dérivée matérielle* ou *dérivée substantielle*.

Volume de contrôle. Il est souvent plus commode d'établir le bilan par rapport à une région de l'espace plutôt que par rapport à un corps identifiable (fig. 11.3). C'est particulièrement le cas lorsqu'il y a écoulement de matière. On isole une certaine région de l'espace au moyen d'une surface imaginaire. Pour les distinguer des corps, on les appelle respectivement *volume de contrôle* ou *surface de contrôle*. Des flux peuvent pénétrer dans la surface de contrôle, ce qui peut faire varier la quantité de matière contenue dans le volume de contrôle. Il s'ensuit que le taux de variation apparaissant dans l'équation (11.2) ne se réfère pas au corps mais au volume de contrôle (qui peut être stationnaire ou en mouvement). La dérivée représente donc le taux de variation de l'*entropie du volume de contrôle*. Cette dérivée est appelée *dérivée locale*.

11.1.3 Transport d'entropie par rayonnement

La chaleur qui provient du Soleil ne peut être transportée ni par conduction, ni par convection, puisque l'espace qui nous sépare de notre étoile est vide. Le Soleil ne peut donc éliminer les énormes quantités d'entropie qu'il produit que par rayonnement.

La chaleur qui est émise par des corps chauds peut être photographiée au moyen d'une caméra ou d'un film sensibles au rayonnement infrarouge, de la même manière que les photographies usuelles sont faites avec des caméras ou des films sensibles à la lumière visible. Ce fait suggère que le médium qui transporte l'entropie est semblable à la lumière. Il s'agit bel et bien de rayonnement électromagnétique dont les rayons X, la lumière ultraviolette et visible, le rayonnement infrarouge et les ondes radio sont des exemples.

L'entropie peut être transportée par la lumière, qui est une onde électromagnétique (section 14.9). Tout corps chaud émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'entropie.

Notons toutefois que la chaleur perçue par les corps qui absorbent du rayonnement est essentiellement produite à l'intérieur même du corps.

Transport par l'intermédiaire du champ radiatif. Nous pouvons appeler ce mode de transport *rayonnement thermique*. Il s'agit de l'écoulement d'entropie (ou d'autres grandeurs) par l'intermédiaire d'un système physique non matériel, le *champ électromagnétique*. Ce transport s'effectue par l'intermédiaire du rayonnement qui peut transporter des grandeurs telles que l'entropie, la quantité de mouvement et l'énergie de manière semblable à des corps matériels. Nous pouvons formuler l'équation de bilan de l'entropie pour le champ électromagnétique dans un volume de contrôle vide par ailleurs (fig. 11.4):

$$\dot{S}_{\text{champ}} = I_{S, \text{rad}} \quad (11.3)$$

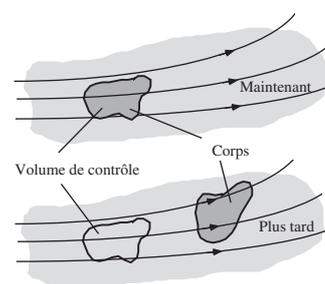


FIGURE 11.3 Un corps et un volume de contrôle dans une situation impliquant un écoulement de substances. Un corps se déplace et se déforme avec l'écoulement. Un volume de contrôle est une région de l'espace, en mouvement ou stationnaire. En général, le volume de contrôle peut accueillir des flux convectifs. Dans cet exemple, le corps et le volume de contrôle occupent initialement la même région.

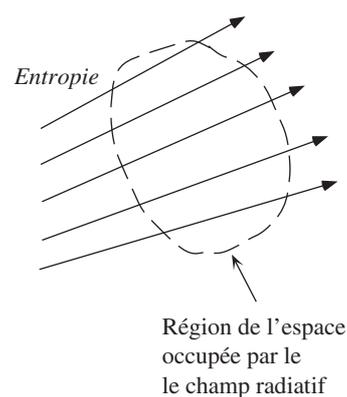


FIGURE 11.4 Entropie transportée par le rayonnement dans l'espace vide. Elle traverse le volume de contrôle sans qu'il y ait de variation de température.

À nouveau, le flux d'entropie par l'intermédiaire du champ radiatif est un phénomène de surface avec des courants qui s'écoulent à travers des surfaces imaginaires entourant certaines régions de l'espace. La quantité d'entropie dans cette région varie à cause de l'entropie transportée par le rayonnement (fig. 11.4).

Le flux d'entropie à travers l'espace vide n'est pas dissipatif. On peut en outre se demander si une différence de température est nécessaire pour entraîner le flux d'entropie par l'intermédiaire du champ radiatif. Ce n'est pas le cas. On associe la même température au rayonnement qui quitte le Soleil et à celui qui arrive sur la Terre, ce qui rend le transport d'entropie par le rayonnement très semblable au transport par convection. Le seul mode de transport de l'entropie qui est entraîné par une différence de température est le transport par conduction.

11.1.4 Interaction entre corps et champ

Dans la plupart des cas, on ne s'intéresse pas au transport d'entropie par l'intermédiaire du champ radiatif, mais plutôt à l'interaction entre les champs et les corps. Le rayonnement du Soleil qui n'a pas été réfléchi dans l'espace pénètre dans l'atmosphère à l'intérieur de laquelle il est partiellement absorbé, le reste atteignant la surface. Simultanément, l'air doit émettre de l'entropie, vu que sa température reste dans une plage limitée. L'absorption et l'émission de rayonnement ne se déroulent pas à l'endroit où le rayonnement pénètre dans l'atmosphère, mais n'importe où en son sein, ce qui signifie que *le champ radiatif et l'atmosphère occupent simultanément la même région de l'espace* (fig. 11.5).

Équation de bilan de l'entropie pour le corps et le champ. Nous allons procéder en deux étapes. Nous envisageons tout d'abord le système combiné de matière et de champ qui occupent la même région de l'espace (fig. 11.5a). Le système absorbe une partie du rayonnement. Nous avons donc un flux radiatif d'entropie qui pénètre dans le système ainsi qu'une production d'entropie en cas de dissipation car, comme nous le verrons, l'absorption et l'émission d'entropie sont des processus irréversibles :

$$\dot{S} = I_{S, \text{rad}} + \Pi_S \tag{11.4}$$

Sources dues à l'absorption et à l'émission. L'absorption et l'émission de rayonnement sont des *phénomènes volumiques*. L'entropie surgit dans le matériau par l'intermédiaire du champ, ce qui signifie qu'il n'y a pas de courant à travers la matière associé à ce type de transport. L'entropie apparaît en chaque point du corps considéré avec une intensité qui dépend du degré d'interaction (fig. 11.5b). Si nous formulons l'équation de bilan uniquement pour le corps, nous devons représenter cette interaction au moyen d'un *terme de source* au lieu d'un courant :

$$\dot{S}_{\text{corps}} = \Sigma_{S, \text{corps}} \tag{11.5}$$

Le terme $\Sigma_{S, \text{corps}}$ représente le *taux d'apport d'entropie* ou l'*intensité de source d'entropie*, le taux net auquel l'entropie surgit dans ou émane du corps en conséquence de l'interaction avec le champ. L'équation de bilan de l'entropie du champ doit être :

$$\dot{S}_{\text{champ}} = I_{S, \text{rad}} + \Sigma_{S, \text{champ}} \tag{11.6}$$

Si nous combinons les deux dernières équations, nous obtenons :

$$\dot{S} = \dot{S}_{\text{corps}} + \dot{S}_{\text{champ}} = I_{S, \text{rad}} + \Sigma_{S, \text{corps}} + \Sigma_{S, \text{champ}} \tag{11.7}$$

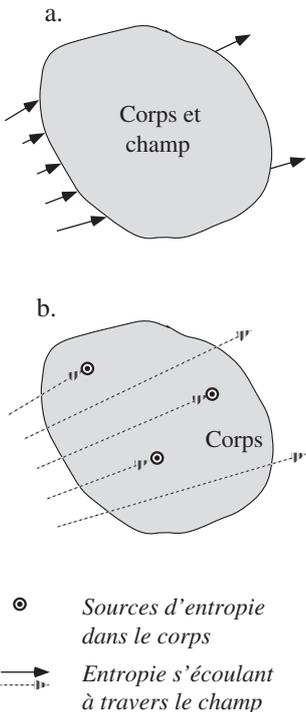


FIGURE 11.5 La même région de l'espace que celle de la figure 11.4 est maintenant remplie de matière, par exemple de l'air : (a) le champ et la matière occupent simultanément la même région, ce qui implique que leur interaction a lieu en tous les points à l'intérieur du système; (b) si nous ne considérons que le corps matériel, nous devons introduire des sources d'entropie où il absorbe du rayonnement et des puits où il émet de l'entropie vers le champ.

La comparaison avec l'équation (11.4) nous permet de conclure que le corps a absorbé plus d'entropie que celle qui a été émise par le champ. La relation entre les deux intensités de source et le taux de production d'entropie est donnée par :

$$\Sigma_{S, \text{corps}} + \Sigma_{S, \text{champ}} = \Pi_S \quad (11.8)$$

où la production d'entropie résulte du transfert entre le champ et le corps (fig. 11.6). Notons que nous faisons la distinction entre les sources d'entropie dues à la production d'entropie et les contributions dues au transfert entre champ et corps.

Équation de bilan d'entropie générale. Si nous ajoutons à l'équation (11.2) les termes de source, nous obtenons

L'équation de bilan d'entropie générale pour un corps :

$$\dot{S} = I_{S, \text{cond}} + I_{S, \text{conv}} + \Sigma_S + \Pi_S \quad (11.9)$$

Cette relation exprime le fait que l'entropie d'un corps peut changer en conséquence de trois types de transport, la conduction, la convection et le rayonnement, auxquels s'ajoutent les effets de l'irréversibilité.

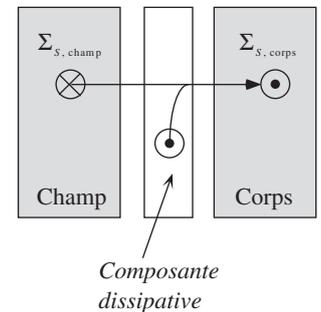


FIGURE 11.6 Lors de la modélisation du transfert radiatif, il faut décider de l'endroit où placer la source d'irréversibilité. La solution présentée par les équations correspond à son placement entre le champ et le corps.

11.1.5 Bilan d'énergie

L'un des problèmes pratiques les plus importants de l'élaboration de la théorie du transport de la chaleur est la détermination des flux et des termes de source d'entropie dans l'équation de bilan (11.9). Il s'agit de découvrir les lois constitutives qui permettent de calculer ces grandeurs dans des situations concrètes. C'est ici que la loi de conservation de l'énergie intervient. Les trois types de transport d'entropie sont accompagnés de flux d'énergie. Il est donc nécessaire d'énoncer le bilan d'énergie parallèlement à celui de l'entropie. Comme l'énergie est une grandeur conservée, la quantité accumulée dans un corps ne peut varier que par l'intermédiaire de transport vers ou hors du système. Dans les cas de conduction et de convection, l'énergie traverse les limites du système, ce dont on tiendra compte en termes de flux d'énergie conductifs et convectifs. Dans le cas d'un apport radiatif, l'interaction entre les corps et les champs fait apparaître des sources ou des puits d'énergie dans les corps et dans les champs.

L'équation de bilan de l'énergie est donnée par :

$$\dot{E}_{\text{corps}} = I_{E, \text{conv}} + I_{E, \text{conv}} + \Sigma_{E, \text{champ}} \quad (11.10)$$

Pour le champ radiatif seul, l'équation de bilan de l'énergie devient :

$$\dot{E}_{\text{champ}} = I_{E, \text{rad}} + \Sigma_{E, \text{champ}} \quad (11.11)$$

Le dernier terme de l'équation (11.10) est le *taux de source* ou *l'apport d'énergie*. Notons que, dans cette même équation, nous n'avons pas pris en compte d'autres apports d'énergie, par exemple d'origine mécanique. Dans les sections suivantes, nous traiterons quelques aspects simples de chacun des trois modes de transfert de l'entropie.

1. Quelle est la force d'entraînement pour le transport d'entropie par conduction? Laquelle est-ce pour les flux convectifs d'entropie?
2. Lorsque de l'eau chaude s'échappe d'un réservoir, il y a un courant convectif d'entropie qui émane du système. Cela signifie-t-il que l'eau du réservoir se refroidit?
3. Lorsque l'on a des flux et des sources d'entropie, l'entropie est transportée d'un système à l'autre. Quelle est la différence (géométrique et spatiale) entre un courant d'entropie et un taux de source d'entropie?
4. Les taux de source d'entropie et les taux de production d'entropie sont tous deux des grandeurs volumiques. Qu'est-ce qui les différencie?
5. Lorsqu'un volume d'air de l'atmosphère absorbe du rayonnement solaire, les taux de source d'énergie du champ radiatif et de l'air sont-ils égaux? Les taux de source d'entropie sont-ils égaux?



1. La différence de température. La différence de pression.
2. Non, l'entropie spécifique de l'eau contenue dans le réservoir reste la même.
3. Le courant d'entropie est distribué sur la surface. Le taux de source d'entropie est distribué sur le volume.
4. Dans le premier cas, l'entropie n'est pas produite, elle est simplement transportée.
5. Oui dans les deux cas.

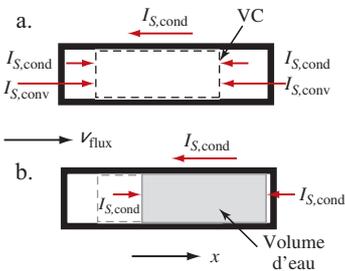


FIGURE 11.7 Étude des flux d'entropie accompagnant un écoulement d'eau chaude à travers une conduite: (a) flux relatifs à un volume de contrôle VC fixe; (b) flux relatifs à un volume d'eau en mouvement.

EXEMPLE 11.1. Flux d'entropie conductifs et convectifs.

On envisage de l'eau chaude s'écoulant à travers une conduite cylindrique (fig. 11.7). (a) Considérez une partie de la conduite comme un volume de contrôle fixe et non déformable (VC) et déterminez tous les flux d'entropie qui franchissent la surface de ce volume de contrôle. (b) Admettez que l'eau contenue dans ce volume à un instant particulier constitue le système; quels sont les flux d'entropie pour ce volume en mouvement?

SOLUTION: (a) Si la température de l'environnement est plus basse que celle de l'eau, il y a un flux conductif d'entropie qui émane en direction radiale du volume de contrôle. Comme ce flux est dirigé vers l'extérieur du volume de contrôle, il est affecté d'un signe négatif (symbolisé par une flèche orientée dans le sens des x négatifs).

À cause des pertes à travers les parois de la conduite, l'eau qui pénètre dans le volume de contrôle est plus chaude que celle qui en émerge. Nous avons donc une force d'entraînement thermique parallèlement à l'axe de la conduite. Ce processus est représenté par deux flux conductifs d'entropie, positif à l'entrée, négatif à la sortie du volume de contrôle.

En outre, deux flux convectifs sont associés à l'écoulement de l'eau à travers le volume de contrôle. L'entropie contenue dans l'eau est transportée à travers la surface du système. Le flux entrant est positif, le flux émergeant négatif. Ce dernier est moins important que le flux entrant.

(b) Si nous considérons le volume en mouvement, les parois du système le sont aussi (fig. 11.7b). L'eau ne traverse pas ces parois, ce qui signifie qu'il n'y a plus de flux convectifs d'entropie. Les flux conductifs restent les mêmes que dans la partie (a).



11.2 CONDUCTION D'ENTROPIE

Après avoir exprimé de manière générale les bilans relatifs au transport de l'entropie et de l'énergie, nous allons étudier en détail chacun des trois modes de transport, en commençant par la conduction.

11.2.1 Loi de FOURIER pour la conduction d'entropie

Quels sont les facteurs qui influencent la conduction de l'entropie? En premier, la chaleur ne migrera d'un endroit à l'autre que s'il existe un *gradient de température* entre ces deux endroits. D'autre part, la matière à travers laquelle migre l'entropie aura certainement une influence sur l'intensité du flux de chaleur, ce que nous exprimerons au moyen d'un paramètre appelé *conductivité entropique*.

Loi de FOURIER pour un bloc de matière. Pour motiver cette loi, nous empruntons les idées à l'électricité où nous avons formulé la relation qui régit la circulation de la charge dans un conducteur, la loi d'OHM¹. Nous considérons la conduction d'entropie à travers un bloc de matière, comme le montre la figure 11.8. Nous admettons que l'entropie s'écoule dans une seule direction et que la distribution du courant est uniforme dans un plan perpendiculaire au flux, la situation la plus simple possible.

Nous savons déjà que le courant d'entropie doit dépendre de la différence de température entre les extrémités du corps et d'une conductance qui dépend de la géométrie de l'objet et des propriétés du matériau dont il est composé. Pour une différence de température donnée, l'intensité du courant doublera si nous doublons la section A . En outre, nous nous attendons à ce que cette intensité soit diminuée de moitié si nous doublons l'épaisseur du bloc. Ce que nous pouvons exprimer par :

$$I_S(x) = -k_S \frac{A}{\Delta x} \Delta T \quad (11.12)$$

Le facteur k_S exprime la propriété conductrice du matériau et est appelé *conductivité entropique* de la substance. Nous venons d'énoncer la forme intégrée de la loi de FOURIER de la conduction. La conductivité entropique dépend du matériau du corps et de la température. Cette dépendance est mise en évidence pour certaines substances dans le tableau 11.1 et dans la figure 11.9.

TABLEAU 11.1 Conductivité de quelques matériaux.

Substance	Conditions	Conductivité (entropie)	Conductivité (énergie)
		$k_S / \text{W K}^{-2} \text{m}^{-1}$	$k_E / \text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
<i>Gaz à pression atmosphérique</i>			
Air	200 K	$9.05 \cdot 10^{-5}$	0.0181
	300 K	$8.73 \cdot 10^{-5}$	0.0262
	400 K	$8.41 \cdot 10^{-5}$	0.0337

1. Historiquement parlant, le chemin est inverse. Joseph FOURIER a formulé cette loi en 1822 dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, alors que Georg OHM s'est inspiré des idées de FOURIER pour énoncer en 1827 la loi qui porte son nom.

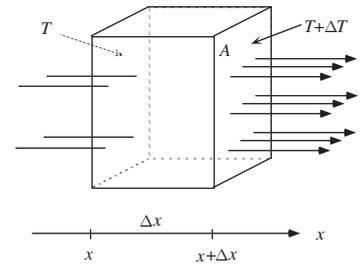


FIGURE 11.8 Flux unidirectionnel d'entropie à travers un bloc de matière. La distribution du courant à travers un plan perpendiculaire à la direction x est supposée uniforme. La différence de température entre les deux faces est la force d'entraînement du flux d'entropie.

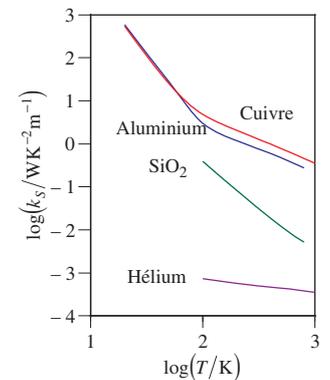


FIGURE 11.9 Évolution de quelques conductivités entropiques k_S en fonction de la température. Les valeurs de la conductivité énergétique k_E sont égales au produit de k_S et de la température (fig. 11.10).

TABLEAU 11.1 Conductivité de quelques matériaux.

Substance	Conditions	Conductivité (entropie)	Conductivité (énergie)
		$k_S / \text{W K}^{-2} \text{m}^{-1}$	$k_E / \text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
Hélium	200 K	$5.89 \cdot 10^{-4}$	0.1177
CO ₂	250 K	$5.16 \cdot 10^{-5}$	0.0129
	300 K	$5.53 \cdot 10^{-5}$	0.0166
H ₂ O vapeur	400 K	$6.52 \cdot 10^{-5}$	0.0261
	500 K	$6.76 \cdot 10^{-5}$	0.0339
	600 K	$7.03 \cdot 10^{-5}$	0.0422
<i>Liquides saturés</i>			
Mercure	293 K	$2.97 \cdot 10^{-2}$	8.69
Eau	273 K	$2.02 \cdot 10^{-3}$	0.552
	293 K	$2.04 \cdot 10^{-3}$	0.597
	313 K	$2.01 \cdot 10^{-3}$	0.628
	333 K	$1.96 \cdot 10^{-3}$	0.651
	353 K	$1.89 \cdot 10^{-3}$	0.668
	373 K	$1.82 \cdot 10^{-3}$	0.680
<i>Métaux liquides</i>			
Sodium	366 K	0.232	84.96
<i>Solides à 20°C</i>			
Aluminium		0.70	204
Brique de construction		0.0024	0.7
Bronze (75% Cu, 25% Sn)		0.089	26
Argile	30°C	0.0043	1.3
Béton (parpaing)		0.0026	0.76
Cuivre		1.32	386
Fibre (pour isolation)		0.00016	0.048
Verre (fenêtre)		0.0027	0.8
Laine de verre		0.00013	0.038
Granit		0.0058–0.014	1.7–4.0
Fer		0.25	73
Plomb		0.12	35
Calcaire	100–300°C		1.3
Papier	30°C	$3.6 \cdot 10^{-5}$	0.011
Pyrex	30°C	0.0046	1.4
Caoutchouc vulcanisé	30°C	$4.3 \cdot 10^{-5}$	0.013
Sable	30°C	$8.9 \cdot 10^{-5}$	0.027
Grès	40°C	0.0058	1.83

TABLEAU 11.1 Conductivité de quelques matériaux.

Substance	Conditions	Conductivité (entropie)	Conductivité (énergie)
		$k_S / \text{W K}^{-2} \text{m}^{-1}$	$k_E / \text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
Acier	1.0% C	0.15	43
	20% Ni	0.065	19
Tissus biologiques	30°C		
	Graisse	0.00066	0.20
	Muscle	0.0014	0.41
Tungstène		0.556	163
Bois	Balsa	0.00019	0.055
	Sapin	0.00038	0.112
	Chêne	0.00057	0.166

Forme différentielle de la loi de FOURIER. Les hypothèses sur lesquelles nous avons basé l'élaboration de la relation (11.12) régissant la conduction de la chaleur à travers un bloc de matière sont trop grossières. En effet, l'observation révèle que la température varie d'un point à l'autre dans un matériau traversé par un flux d'entropie. D'autre part, nous avons découvert à la section 5.7 que la conduction est un processus dissipatif: l'écoulement d'entropie à travers la matière entraîne une production d'entropie, occasionnant une augmentation de l'intensité du courant dans le sens de l'écoulement. Nous devons donc pouvoir préciser à quel endroit s'applique l'équation (11.12).

Ces difficultés peuvent être éliminées en recourant à une description continue du phénomène. Dans un premier temps, nous introduisons une mesure de la distribution du courant sur la surface qu'il traverse au moyen de la *densité de courant d'entropie* j_S :

$$|I_S| = A |j_S| \quad (11.13)$$

Cette grandeur se mesure en $\text{Ct m}^{-2} \text{s}^{-1}$. Nous pouvons maintenant énoncer la:

Loi de conduction de l'entropie dans une dimension:

$$j_S = -k_S \frac{dT}{dx} \quad (11.14)$$

k_S est la conductivité entropique et dT/dx le gradient de température.

Cette relation est analogue à la relation (2.22), énoncée à la section 2.6.1, relative à la conduction de l'électricité, et celle que nous rencontrerons au chapitre 12 lorsque nous étudierons l'apparition de contraintes lors de la conduction de la quantité de mouvement à travers la matière.

Il nous manque encore la loi constitutive relative à la production d'entropie, mais nous allons auparavant nous intéresser aux flux d'énergie qui accompagnent le processus de conduction de la chaleur.

11.2.2 Écoulements d'entropie et d'énergie lors de la conduction

Le courant d'énergie qui accompagne toujours le flux conductif d'entropie peut être calculé en adaptant au cas continu l'équation (5.18) énoncée à la section 5.4.2 :

$$j_{E, \text{therm}} = Tj_S \quad (11.15)$$

où j_E représente la densité de courant d'énergie. Nous introduisons une *conductivité énergétique* (*conductivité thermique*) définie par :

$$k_E = Tk_S \quad (11.16)$$

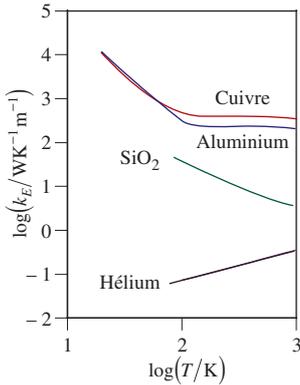


FIGURE 11.10 Évolution de quelques conductivités énergétiques (thermiques) k_E en fonction de la température. Les conductivités entropiques correspondantes apparaissent dans la figure 11.9.

Loi de FOURIER formulée en termes de courant d'énergie thermique :

$$j_{E, \text{therm}} = -k_E \frac{dT}{dx} \quad (11.17)$$

Les valeurs de la conductivité énergétique apparaissent dans le tableau 11.1 pour un certain nombre de substances ainsi que dans la figure 11.10.

11.2.3 Production d'entropie lors de la conduction

Tous les phénomènes que nous avons abordés nous ont révélé que la conduction d'une grandeur extensive (semblable à un fluide) est un processus dissipatif, qui engendre une production d'entropie. Nous allons déterminer de deux manières différentes le taux de production lors de la conduction de l'entropie.

Dissipation. Nous savons que lorsque l'entropie passe d'un niveau de température élevé à un niveau de température plus bas, elle libère de l'énergie qui est dissipée. À partir de ce que nous avons étudié à la section 5.7.1, nous savons que :

$$\Pi_S = -\frac{1}{T_B} \Delta T \cdot I_S = \frac{1}{T_B} \Delta T \cdot k_S \frac{A}{\Delta x} \Delta T$$

où T_B est la température basse à laquelle l'entropie émerge du bloc. Nous amplifions cette relation par Δx pour obtenir :

$$\Pi_S = \frac{1}{T_B} k_S A \Delta x \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)^2 \quad (11.18)$$

Dans le cas continu, on introduit une *densité de taux de production* π_S que l'on obtient en divisant les deux termes de l'équation (11.18) par le volume du bloc :

$$\pi_S = \frac{1}{T} k_S \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \quad (11.19)$$

Le produit $T\pi_S$ représentera donc la *densité de dissipation* à l'intérieur du bloc due au processus de conduction.

Bilans simultanés d'entropie et d'énergie. Nous allons maintenant utiliser une dérivation qui se révélera utile dans de nombreuses applications. L'approche précédente

nécessite de connaître la quantité d'énergie dissipée ainsi que la température à laquelle cette dissipation a lieu. Si nous ne possédons pas ces informations, ou si elles sont peu sûres, nous pouvons recourir à une méthode indirecte qui utilise les bilans d'entropie et d'énergie pour déterminer le taux de production d'entropie.

Considérons un élément résistif tel que le bloc de la figure 11.8; la figure 11.11 représente le diagramme de processus correspondant. Les équations de bilan d'entropie et d'énergie sont respectivement :

$$\begin{aligned} 0 &= I_{S1} + I_{S2} + \Pi_S \\ 0 &= I_{E, \text{therm1}} + I_{E, \text{therm2}} \end{aligned}$$

La nullité des sommes est due au fait que nous admettons que l'élément résistif n'emmagasine ni entropie, ni énergie. Les flux d'entropie et d'énergie sont liés entre eux par les relations :

$$\begin{aligned} I_{E, \text{therm1}} &= T_1 I_{S1} \\ I_{E, \text{therm2}} &= T_2 I_{S2} \end{aligned}$$

Le taux de production d'entropie peut être évalué :

$$\begin{aligned} \Pi_S &= -(I_{S1} + I_{S2}) = -\left(\frac{1}{T_1} I_{E, \text{therm1}} + \frac{1}{T_2} I_{E, \text{therm2}}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{T_1} I_{E, \text{therm1}} + \frac{1}{T_2} I_{E, \text{therm1}}\right) = -\frac{T_2 - T_1}{T_2} \frac{1}{T_1} I_{E, \text{therm1}} = -\frac{T_2 - T_1}{T_2} I_{S1} \end{aligned} \quad (11.20)$$

Nous avons trouvé ce résultat à la section 5.7.1 en admettant connaître le taux de dissipation.

11.2.4 Détermination des conductances et résistances

Nous avons introduit à la section 5.6.1 la conductance (ou son inverse, la résistance) globale pour la transmission de la chaleur à travers une série de couches. La définition débouche sur un couche unique dont la conductance est donnée par :

$$G_{S, \text{cond}} = k_s \frac{A}{\Delta x} \quad (11.21)$$

La résistance d'une telle couche est donc :

$$R_{S, \text{cond}} = \frac{\Delta x}{k_s A} \quad (11.22)$$

Le coefficient global de transmission de l'entropie (5.35) peut être calculé à partir de la relation ci-dessus et tout peut être converti en grandeurs relatives à l'énergie (5.37). Comme nous l'avons montré à l'exemple 5.5, autant les conductances que les résistances peuvent être calculées pour des couches composites. Il est usuel de le faire pour des résistances ou conductances relativement à l'énergie en admettant qu'elles sont indépendantes de la température. Pour des couches en série, nous avons alors :

$$R_{E, \text{cond}} = \sum_i R_{E,i} \quad (11.23)$$

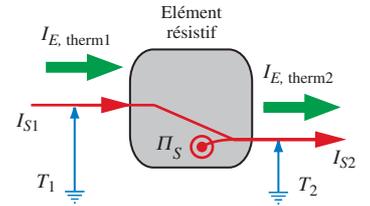


FIGURE 11.11 La transmission d'entropie due à une chute de température est dissipative : il y a production d'entropie supplémentaire.

et pour des couches en parallèle :

$$G_{E, \text{cond}} = \sum_i G_{E,i} \tag{11.24}$$

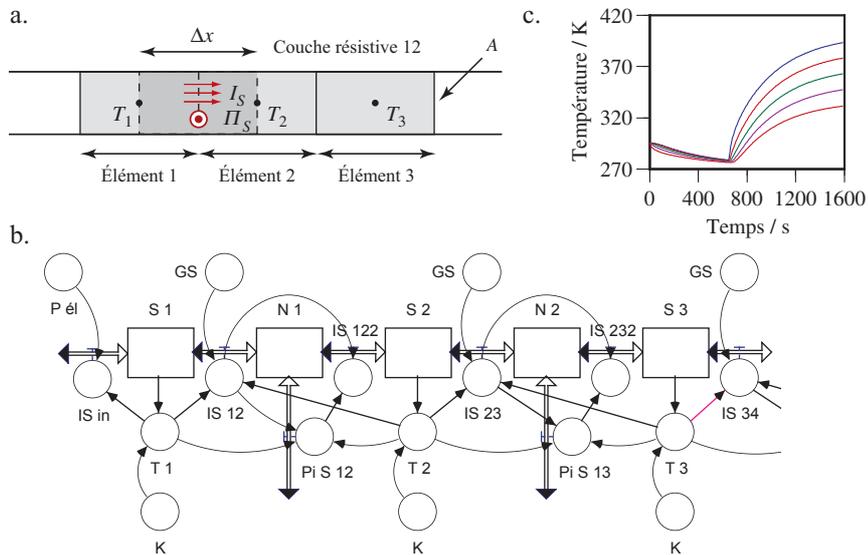
Ces résultats ne sont que des approximations, vu que nous savons, comme le montrent les valeurs du tableau 11.1, que les conductances thermiques dépendent de la température. Si l'on veut effectuer les calculs en prenant en compte la production d'entropie, il faut utiliser les résultats de l'exemple 5.5. Toutefois, si les différences de température sont relativement faibles, on peut utiliser l'équation (11.23).

11.2.5 Modèle dynamique de la conduction dans une barre de cuivre

Un modèle dynamique de la conduction à travers une longue barre de cuivre va nous permettre de mettre en évidence l'utilité des hypothèses sur lesquelles est basée la loi de FOURIER. Un exemple de données expérimentales est présenté à la figure 5.7 de la section 5.1.5: une barre de cuivre plongée dans un bain d'eau glacée à une extrémité est chauffée électriquement à l'autre extrémité. On observe que la température diminue avant l'enclenchement du chauffage. Après son enclenchement, la température s'élève plus rapidement dans les régions proches du chauffage.

Même si nous ne disposons pas encore des outils pour traiter le système comme un milieu continu, nous pouvons élaborer un modèle basé sur des systèmes uniformes en divisant la barre de cuivre en plusieurs éléments. Nous envisageons chaque élément comme un accumulateur d'entropie ayant sa température propre que nous associons au centre de l'élément (fig. 11.12a). Le matériau entre deux centres est considéré comme un élément conductif (ou résistif) entre deux unités accumulatives.

FIGURE 11.12 Modélisation de la conduction d'entropie à travers une barre: (a) la barre est divisée en éléments, chacun représentant une unité de stockage d'entropie; le matériau entre les centres de deux éléments est modélisé en tant qu'élément résistif; (b) partie du diagramme du modèle dynamique de ce système constitué d'éléments de stockage et de nœuds (utilisés pour exprimer le bilan d'entropie pour les résistances); (c) résultats de la simulation pour le cas particulier de la figure 5.7 à la section 5.1.5.



La longueur et la section d'un élément définissent la géométrie dont nous avons besoin pour calculer la capacité entropique (section 5.5) des éléments et les conductances selon l'équation (11.21). Le modèle peut être simulé en utilisant des conditions initiales et des conditions aux limites adéquates.

1. Quelle est l'intensité d'un courant d'entropie à travers une paroi de grès de 10 m par 10 m et de 0.5 m d'épaisseur si la différence de température est de 20°C?
2. Admettez des résistances entropiques constantes et indépendantes de la température pour deux couches disposées en série. Pourquoi ne peut-on pas simplement les additionner pour obtenir la résistance totale?
3. Considérez deux barres telles que celle de la figure 11.12a constituées de deux matériaux différents. Elles sont géométriquement identiques et ont des conductivités et des capacités entropiques spécifiques égales. Le second matériau a une densité supérieure. En quoi le comportement du second matériau va-t-il différer de celui que montre la figure 11.12c?
4. Les températures ont été mesurées en 8 points sur la barre de cuivre de la figure 11.12. Cela implique-t-il que le modèle dynamique doit comprendre 8 éléments?



1. 25 W K⁻¹.
2. À cause de la production d'entropie.
3. Le second matériau réagira plus lentement aux changements.
4. Non, la structure du modèle ne dépend pas de la manière dont ont été recueillies les données expérimentales.



EXEMPLE 11.2. Fusion d'un bloc de glace isolé par de la fibre de verre.

Un cube de glace de volume égal à 1 m³ est enfermé dans une caisse isolée par une couche de fibre de verre épaisse de 10 cm. Le tout est placé dans un environnement à 30°C. Estimez le temps que mettra le cube de glace pour fondre complètement.

SOLUTION: On peut traiter la fibre de verre comme une couche plane de 6 m² d'aire. Selon le tableau 11.1, la conductance entropique de la fibre de verre est de 1.3·10⁻⁴ W K⁻² m⁻¹. Il s'ensuit que le courant d'entropie de l'environnement vers le cube de glace vaut:

$$I_s = -k_s \frac{A}{\Delta x} \Delta T = -1.3 \cdot 10^{-4} \text{ W K}^{-2} \text{ m}^{-1} \frac{6.0 \text{ m}^2}{0.10 \text{ m}} (0 - 30) \text{ K} = 0.23 \text{ W K}^{-1}$$

Le cube de glace a une masse de 910 kg. L'entropie latente spécifique l_{fus} vaut 1220 J K⁻¹ kg⁻¹ (tableau 10.1, section 10.7.3). L'entropie latente du bloc de glace est donc de 1.1·10⁶ J K⁻¹. Le temps nécessaire pour apporter cette entropie au volume est:

$$\Delta t = \frac{S_{\text{éch}}}{I_s} = \frac{1.1 \cdot 10^6 \text{ J K}^{-1}}{0.23 \text{ W K}^{-1}} = 5 \cdot 10^5 \text{ s}$$

ce qui correspond approximativement à 60 jours. Le modèle suppose que l'eau de fonte reste à la température de 0°C, transmet facilement l'entropie et ne constitue pas un isolant supplémentaire à côté de la couche de fibre de verre.



EXEMPLE 11.3. Chauffage d'un circuit intégré².

Un chip de silicium est fixé sur une surface isotherme appelée le *header*. Le sommet du chip est couvert par une alimentation qui dissipe l'énergie à un taux de 50 W. Trente fils d'or mince connectent le sommet au header. Supposez que l'entropie circule à travers le chip seulement de haut en bas. Quelle sera la température du sommet du chip en régime stationnaire si la température du header est maintenue à 25°C ?

Le chip a une surface de 0.51 cm par 0.51 cm. Il est constitué de trois couches. La première est en silicium de 0.051 cm d'épaisseur. La base du chip est une couche d'or épaisse de 0.010 cm. Entre les deux se trouve une couche d'oxyde de silicium de 0.00013 cm d'épaisseur. Les conductivités thermiques par rapport à l'énergie sont respectivement 88 W K⁻¹ m⁻¹, 312 W K⁻¹ m⁻¹ et 0.157 W K⁻¹ m⁻¹. Les fils d'or mesurent 0.130 cm de long est ont un diamètre de 0.0254 cm.

SOLUTION: Ce dispositif peut être représenté par un circuit thermique avec des éléments en parallèle et en série (fig. 11.13). Une force d'entraînement thermique est maintenue aux bornes du circuit. Nous devons évaluer la résistance thermique totale que ce circuit oppose aux courants d'entropie et d'énergie. La résistance du chip est:

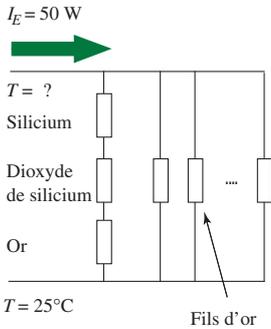


FIGURE 11.13 Chip de silicone pris en sandwich entre une alimentation qui dissipe de l'énergie et un header maintenu à une certaine température pour le refroidissement.

$$R_{E, \text{chip}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{k_{E,i}} \frac{\Delta x_i}{A}$$

$$= \frac{1}{0.0051^2 \text{ m}^2} \left(\frac{0.051 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{88 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}} + \frac{1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{0.157 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}} + \frac{0.010 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{312 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}} \right) = 0.554 \text{ K W}^{-1}$$

Ce dispositif est branché en parallèle avec trente fils identiques. L'inverse de la résistance totale est donc:

$$\frac{1}{R_{E, \text{tot}}} = \sum_{i=1}^{31} \frac{1}{R_{E,i}} = 30 \frac{k_E A}{\Delta x} + \frac{1}{R_{E, \text{chip}}}$$

$$= 30 \frac{312 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot \pi (1.27 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2}{0.0013 \text{ m}} + \frac{1}{0.554 \text{ K W}^{-1}} = 2.17 \text{ W K}^{-1}$$

ce qui correspond à une résistance thermique de 0.461 K W⁻¹. Le flux d'énergie étant connu, nous pouvons calculer la force d'entraînement thermique, c'est-à-dire la différence de température entre le sommet et la base du chip:

$$\Delta T = R_E I_{E, \text{therm}} = 0.461 \text{ K W}^{-1} \cdot 50 \text{ W} = 23.0 \text{ K}$$

La température au sommet du chip est de 48°C. Elle serait de 53°C sans les fils d'or. ■

11.3 TRANSFERT D'ENTROPIE PAR RAYONNEMENT

Nous voulons découvrir de quelle manière un corps rayonne la chaleur dans son environnement. Alors même que le rayonnement est un phénomène complexe, un cas peut être traité de manière relativement simple, l'émission et absorption de rayonnement par un corps opaque. L'absorption et l'émission de rayonnement sont des processus volumique, comme nous l'avons découvert à la section 11.1, mais l'émission par un corps opaque ressemble à un rayonnement émanant d'une surface.

2. RIDGELY P. (1987): Life in the heart of the computer: A bit of thermal physics. *The Physics Teacher* **25**, 276-279.

À l'intérieur du volume occupé par le corps, le rayonnement est constamment émis et réabsorbé à un taux tel que le résultat net est un flux de chaleur des points chauds vers les points froids (fig. 11.14a). Comme nous admettons que le corps est opaque, le rayonnement que nous percevons à l'extérieur émane d'une mince couche à la surface du corps. Si nous traçons une surface imaginaire entourant le corps, le rayonnement émis traverse cette surface, transporté par le champ radiatif (fig. 11.14b).

11.3.1 Émission hémisphérique par la surface d'un corps noir

Nous allons commencer par étudier le rayonnement émis par la surface d'un *corps noir*. Rappelons qu'il s'agit d'un corps qui absorbe tout le rayonnement qui l'atteint. À la section 10.5, nous avons étudié le rayonnement d'un tel corps, en admettant que ce rayonnement était confiné dans une cavité. Si les couches superficielles d'un corps opaque ont des propriétés telles qu'elles émettent un rayonnement de corps noir, celui-ci sera le même que s'il provenait d'une cavité enfouie dans le corps (fig. 11.15). Nous avons exprimé par les équations (10.72) et (10.75) comment l'énergie et l'entropie de ce rayonnement dépendent de la température. Le taux d'émission du rayonnement émanant de la surface doit avoir la même dépendance de la température.

Le taux hémisphérique d'émission d'énergie du corps noir ou la puissance émissive hémisphérique du corps noir, ou encore exitance hémisphérique du corps noir \mathcal{M}_{CN} (anciennement émittance) mesure la quantité d'énergie émise par la surface d'un corps noir par unité de temps et par unité de surface. La loi qui régit cette émission d'énergie est:

$$\mathcal{M}_{CN} = \sigma T^4 \quad (11.25)$$

Le taux d'émission d'entropie est exprimé par:

$$\mathcal{M}_{S,CN} = \frac{4}{3} \sigma T^3 \quad (11.26)$$

Ces deux expressions ne sont valables que pour un rayonnement de corps noir. L'exitance énergétique se mesure en W m^{-2} , l'exitance entropique, en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$. La constante σ est la *constante de STEFAN-BOLTZMANN*. Sa valeur est $5.67 \cdot 10^{-8} \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$. Elle est liée à la constante de rayonnement a , introduite à la section 10.5.3, par la relation:

$$\sigma = \frac{1}{4} ac \quad (11.27)$$

où c est la vitesse de la lumière.

Notons une différence importante entre ce type de transport et le transport par conduction ou diffusion. Lors de conduction ou diffusion, les grandeurs extensives qui migrent le font dans une seule direction. En revanche, le rayonnement se répand dans toutes les directions. Pour obtenir les deux exitances ci-dessus, nous devons intégrer la densité d'énergie et d'entropie du rayonnement sur le demi-espace qui surmonte la surface, d'où la dénomination hémisphérique.

Si les exitances sont constantes sur une surface, les courants d'entropie et d'énergie sont obtenus en multipliant les exitances par l'aire de la surface A :

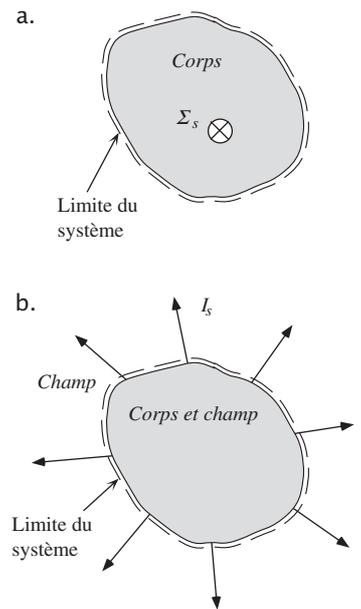


FIGURE 11.14 Rayonnement émanant de la surface d'un corps opaque: (a) il y a un échange constant de rayonnement entre la matière et le champ dans le volume occupé par le corps; (b) à l'extérieur du corps, on ne perçoit que le rayonnement transporté par le champ. Ce rayonnement provient d'une couche extrêmement mince à la surface du corps matériel.

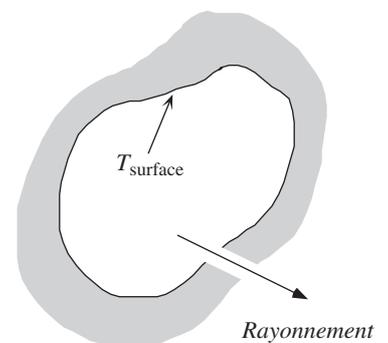


FIGURE 11.15 Le rayonnement du corps noir émanant des couches superficielles d'un corps noir opaque est le même que celui qui proviendrait d'une cavité dans un tel corps.

$$I_{S, \text{rad}} = -A M_{S, \text{CN}} = -\frac{4}{3} \sigma A T^3 \quad (11.28)$$

$$I_{E, \text{rad}} = -A M_{\text{CN}} = -\sigma A T^4 \quad (11.29)$$

Il est important de noter que la relation (5.18) entre les courants d'entropie et d'énergie qui s'applique au chauffage ou au refroidissement d'un corps ne s'applique plus lors de flux radiatifs. Dans ce dernier cas, le chauffage et le refroidissement sont modélisés par des sources et des puits d'entropie et d'énergie liés entre eux par l'équation (11.34).

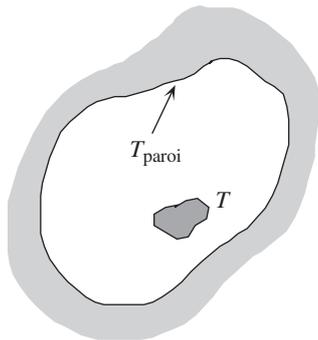


FIGURE 11.16 Interaction entre deux corps noirs. Une cavité, dont la paroi est à la température T_{paroi} , sert de conteneur du rayonnement du corps noir. Le petit corps placé à l'intérieur est à la température T .

11.3.2 Flux net d'énergie pour un corps noir rayonnant

En général, les flux exprimés par les équations (11.28) et (11.29) ne sont pas des flux nets, vu que le corps considéré peut encore absorber de la chaleur d'un autre objet qui rayonne vers lui. Pour calculer le flux net d'énergie, nous imaginons un petit corps noir immergé dans la cavité d'un autre corps noir dont la paroi est à la température T_{paroi} (fig. 11.16). Comme le rayonnement est isotrope, un point de la surface du corps fermé reçoit du rayonnement venant de toutes les directions au même taux.

La quantité d'énergie reçue par unité de temps et unité de surface par un corps noir plongé dans le rayonnement d'un corps noir est :

$$\mathcal{E}_{\text{CN}} = \sigma T_{\text{paroi}}^4 \quad (11.30)$$

La grandeur \mathcal{E}_{CN} est appelée éclairement énergétique ou irradiance du corps noir.

Comme un corps noir absorbe tout le rayonnement incident, le flux net d'énergie émanant du morceau de matière à la température T à l'intérieur de la cavité est :

$$I_{E, \text{rad, net}} = -A (M_{\text{CN}} - \mathcal{E}_{\text{CN}}) = -\sigma A (T^4 - T_{\text{paroi}}^4) \quad (11.31)$$

À la section 11.4.3, ce résultat sera étendu à des corps autres que des corps noirs.

11.4 ABSORPTION ET ÉMISSION DE RAYONNEMENT

Comme nous l'avons discuté à la section 11.1.4, les corps peuvent émettre ou absorber du rayonnement. Il s'agit de processus volumiques pour la description desquels nous utilisons des taux de source. Nous voulons établir la relation entre les taux de source et les taux de production d'entropie d'une part, et les taux de sources d'énergie accompagnant ces processus d'autre part.

11.4.1 Chauffage et refroidissement par absorption et émission

Nous allons utiliser le modèle du corps uniforme à la température T et envisager le cas où ce corps émet de l'entropie et de l'énergie vers le champ qui occupe la même région de l'espace; le raisonnement s'applique également au cas de l'absorption. S'il n'y a

pas d'autre mode de transfert, les taux d'émission de ces deux grandeurs sont égaux aux taux de variation de l'entropie et de l'énergie du corps :

$$\dot{S} = \Sigma_S \quad (11.32)$$

$$\dot{E} = \Sigma_E \quad (11.33)$$

Dans un modèle de processus uniformes, ces processus sont réversibles, non dissipatifs. Comme c'est le cas ici, les taux de variation ci-dessus sont liés par une relation fondamentale de GIBBS semblable à la relation (5.24), ce qui implique que les taux de source vérifient l'équation :

$$\Sigma_E = T \Sigma_S \quad (11.34)$$

Ce résultat, qui est valable pour le corps matériel illustré par la figure 11.17, ne tient pas compte du fait que de l'entropie est produite en conséquence de l'émission (ou de l'absorption) de rayonnement. Cela n'affecte pas le bilan d'entropie et d'énergie du corps matériel, vu que notre modèle tient compte de l'irréversibilité par l'adjonction d'un élément entre le corps et le champ (fig. 11.6). Pour le corps, l'émission de chaleur vers un champ a le même effet que le refroidissement par conduction provoqué par le contact d'un corps uniforme avec son environnement.

Nous allons maintenant prendre en compte la production d'entropie due à l'émission ou l'absorption de rayonnement. En présence de l'irréversibilité, les taux de source d'entropie pour le corps et pour le champ ne sont pas les mêmes, comme nous l'avons exprimé par l'équation (11.8) :

$$\Sigma_S = -\Sigma_{S, \text{champ}} + \Pi_S \quad (11.35)$$

À partir de l'équation (11.34), nous obtenons une relation correspondante pour l'énergie :

$$\Sigma_E = T (-\Sigma_{S, \text{champ}} + \Pi_S) \quad (11.36)$$

Envisageons le cas particulier de l'absorption d'un rayonnement qui ne transporte aucune entropie. Dans ce cas, toute l'entropie servant à chauffer le corps doit avoir été produite, ce qui rend le processus totalement irréversible. Toute l'énergie apportée par le rayonnement a été dissipée, et l'équation (11.36) est équivalente à l'équation (5.20) qui met en relation le taux de dissipation d'énergie et le taux de production d'entropie.

En résumé, nous pouvons interpréter l'émission et l'absorption d'entropie en termes de refroidissement ou de chauffage des corps. La différence avec les cas traités au chapitre 5, à savoir le chauffage par l'intermédiaire de courants conductifs est que nous avons affaire aux taux de source d'entropie et d'énergie (11.34), au lieu des flux donnés par l'équation (5.18). Rappelons que dans ce modèle, l'irréversibilité est associée à un élément particulier placé entre le corps et le champ (fig. 11.6).

11.4.2 Émission, absorption et production d'entropie

Notre prochaine tâche consiste à déterminer le taux de production d'entropie lors de l'émission et de l'absorption de rayonnement.

Irréversibilité de l'émission. Considérons le cas de l'émission : le taux auquel le corps émet l'entropie vers le champ est inférieur à celui auquel elle émane de la

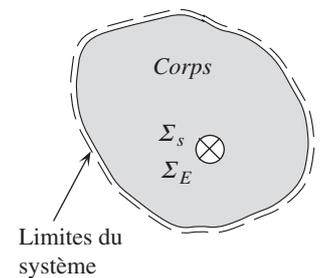


FIGURE 11.17 Un corps et un champ radiatif occupent la même région de l'espace (le champ n'est pas visualisé). L'émission de rayonnement signifie que le corps perd de l'entropie et de l'énergie (et éventuellement d'autres grandeurs) en tous les points à l'intérieur du champ.

surface du corps (fig. 11.14). Pour le démontrer, nous envisageons le modèle d'un corps uniforme à la température T pour lequel la relation :

$$\Sigma_E = T \Sigma_S \quad (11.37)$$

est valable. En vertu des équations (11.28) et (11.29), nous pouvons écrire :

$$I_{S, \text{rad}} = \frac{4}{3} \frac{I_{E, \text{rad}}}{T} = \frac{4}{3} \frac{\Sigma_E}{T}$$

ce qui entraîne :

$$I_{S, \text{rad}} = \frac{4}{3} \Sigma_S \quad (11.38)$$

Le flux d'entropie qui émane du corps est supérieur à ce qui a été émis par le corps vers le champ radiatif, ce qui implique que de l'entropie a été produite dans le volume occupé par la matière rayonnante.

Irréversibilité de l'émission et absorption pour deux corps en interaction. Envisageons la situation décrite par la figure 11.16: les parois d'une cavité entourent un corps plus petit. Nous admettons que les deux surfaces sont des corps noirs et que le corps enfermé est le plus chaud, avec une température T_1 et une aire A . Le flux d'énergie du petit corps vers les parois qui l'entourent est donné par l'équation (11.31), dans laquelle T_2 est la température de l'enceinte. Nous pouvons évaluer le taux de production d'entropie dans les deux interfaces radiatives entre les corps et le champ, comme le montre la figure 11.6. À partir de l'équation (11.36), nous trouvons :

$$\Pi_S = \Pi_{S1} + \Pi_{S2} = \frac{1}{T_1} \Sigma_{E1} + \Sigma_{S, \text{champ1}} + \frac{1}{T_2} \Sigma_{E2} + \Sigma_{S, \text{champ2}}$$

Les taux de source s'annulent mutuellement, vu que l'entropie émise par le corps chaud vers le champ est transportée par ce champ et est absorbée par le second corps. Vu que Σ_{E2} est égal à $-\Sigma_{E1}$, il s'ensuit :

$$\Pi_S = \Sigma_{E1} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (11.39)$$

Puisque $T_1 > T_2$, cette expression est positive, vu que Σ_{E1} est négatif. En nous servant du flux d'énergie donné par l'équation (11.31), nous pouvons évaluer le taux de production d'entropie :

$$\begin{aligned} \Pi_S &= \frac{\sigma A}{T_1 T_2} (T_1 - T_2) (T_1^4 - T_2^4) \\ &= \frac{\sigma A}{T_1 T_2} (T_1 - T_2) (T_1^2 - T_2^2) (T_1^2 + T_2^2) \\ &= \frac{\sigma A}{T_1 T_2} (T_1 - T_2)^2 (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2) \end{aligned} \quad (11.40)$$

Cette expression est positive si l'un des deux corps est plus chaud que l'autre et s'annule s'ils ont la même température. Il n'est pas nécessaire de savoir lequel des deux corps est le plus chaud. L'émission et l'absorption d'entropie entre des corps à des températures différentes sont toujours dissipatives.

Surface éclairée par le Soleil. Nous allons nous intéresser au cas de la couche superficielle d'un corps noir à la température T exposé à la lumière du Soleil (fig. 11.18). L'entropie apportée par le rayonnement solaire est totalement absorbée, ce qui engendre une production d'entropie de taux Π_{S1} . Le rayonnement solaire est pratiquement un rayonnement de corps noir, ce qui veut dire que le flux d'entropie sur la couche superficielle du corps est, en vertu des équations (11.28) et (11.29):

$$I_{S1} = \frac{4}{3} A \frac{\mathcal{E}_{CN}}{T_{\text{Soleil}}} \quad (11.41)$$

où \mathcal{E}_{CN} est l'irradiance de la surface et T_{Soleil} la température à la surface du Soleil. C'est également la température du rayonnement. Si le corps n'absorbait que de la lumière, l'équation de bilan de l'entropie serait:

$$\dot{S} = I_{S1} + \Pi_{S1}$$

ce qui implique que le taux de production d'entropie devient

$$\Pi_{S1} = \dot{S} - I_{S1} = \frac{1}{T} I_{E, \text{rad1}} - I_{S1} = \frac{1}{T} A \mathcal{E}_{CN} - I_{S1} = \frac{1}{T} A \mathcal{E}_{CN} - \frac{4}{3} A \frac{\mathcal{E}_{CN}}{T_{\text{Soleil}}}$$

Finalement:

$$\Pi_{S1} = \frac{1}{TT_{\text{Soleil}}} \left(T_{\text{Soleil}} - \frac{4}{3} T \right) A \mathcal{E}_{CN} \quad (11.42)$$

représente le taux de production d'entropie due à l'absorption de la lumière solaire. Cette expression peut devenir négative si T s'approche de T_{Soleil} , ce que nous savons être impossible. Mais nous n'avons considéré que l'absorption du rayonnement et nous devons encore tenir compte de la production d'entropie due à l'émission.

Comme le corps exposé à la lumière solaire est à la température T , il émet un courant d'entropie égal à:

$$I_{S2} = -A\sigma \frac{4}{3} T^3 \quad (11.43)$$

Comme nous l'apprend l'équation (11.38), un quart de ce courant provient de l'entropie produite, et pas de l'entropie émise:

$$\Pi_{S2} = \frac{1}{3} A\sigma T^3 \quad (11.44)$$

Le taux total de production d'entropie nous permet de faire une observation intéressante. Si nous sommes les deux contributions et posons $T = T_{\text{Soleil}}$, nous obtenons:

$$\Pi_S = \frac{1}{3} A\sigma T_{\text{Soleil}}^3 - \frac{1}{3} \frac{1}{T_{\text{Soleil}}} A \mathcal{E}_{CN}$$

qui doit être nul, vu que nous avons admis que les deux corps sont à la température du Soleil. Si nous acceptons cette conclusion, nous voyons que \mathcal{E} doit être égal à $\sigma T_{\text{Soleil}}^4$, ce qui signifie que nous pouvons amener un corps à la température du Soleil pour autant que la rayonnement incident ait la même intensité qu'à la surface du Soleil, ce que l'on peut obtenir en concentrant la lumière du Soleil.

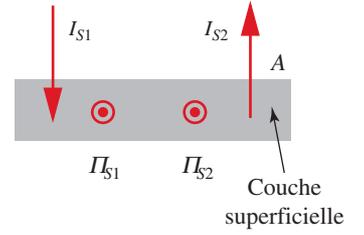


FIGURE 11.18 Flux d'entropie et taux de production d'entropie pour la couche superficielle d'un corps exposé à la lumière du Soleil.

11.4.3 Propriétés radiatives de surfaces grises

Nous n'avons traité jusqu'ici que le cas du rayonnement du corps noir. Nous allons maintenant nous intéresser à des surfaces qui n'absorbent qu'une partie du rayonnement incident, que l'on appelle pour cette raison des *surfaces grises*.

Absorptivité des surfaces grises. Nous avons besoin de deux grandeurs pour décrire les propriétés absorptives d'une surface. La première, l'*irradiance* \mathcal{E} qui mesure le flux d'énergie incidente par unité de surface, a été introduite à la section 11.3.2.

Pour caractériser l'absorption du rayonnement par une surface grise, on introduit le taux d'absorption d'énergie par unité de surface \mathcal{A} , ainsi que l'absorptivité ou facteur d'absorption α . Ces deux grandeurs sont liées à l'irradiance du corps noir par la relation :

$$\mathcal{A} = \alpha \mathcal{E}_{\text{CN}} \quad (11.45)$$

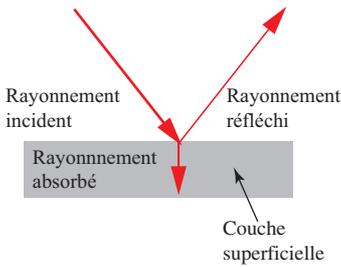


FIGURE 11.19 Sur une surface grise, le rayonnement incident peut être partiellement absorbé et réfléchi.

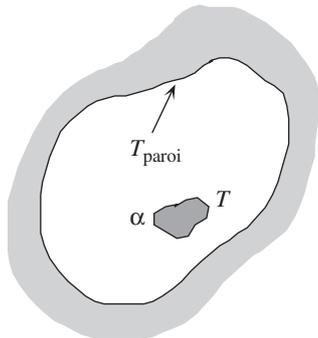


FIGURE 11.20 Un corps d'absorptivité α est introduit dans une cavité remplie du rayonnement d'un corps noir.

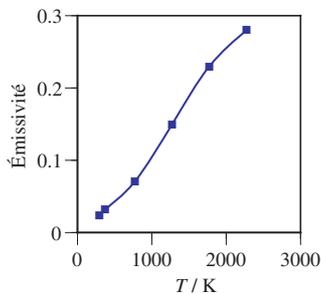


FIGURE 11.21 Émissivité du tungstène en fonction de la température.

Pour un corps noir, $\alpha = 1$. Quelquefois, on introduit également la *réflectivité* ou *facteur de réflexion* ρ pour tenir compte de la part d'énergie qui n'a pas été absorbée et a donc été réfléchi (fig. 11.19). Les deux grandeurs sont logiquement liées entre elles par la relation :

$$\rho = 1 - \alpha \quad (11.46)$$

Loi de KIRCHHOFF. Comment le rayonnement d'une surface grise se différencie-t-il de celui du corps noir? Nous considérons à nouveau le rayonnement dans une cavité. Le rayonnement dans cette cavité est celui d'un corps noir, quelle que soit la constitution de ses parois; le seul facteur qui détermine les propriétés de ce rayonnement est la température des parois. Il s'ensuit que l'irradiance est égale à l'exitance (11.25) :

$$\mathcal{E}_{\text{CN}} = \mathcal{M}_{\text{CN}} \quad (11.47)$$

Nous introduisons un corps d'absorptivité α dans cette cavité (fig. 11.20). Un état stationnaire sera atteint après un certain temps, et la température du petit corps sera égale à celle du rayonnement de la cavité. L'exitance de ce corps correspondra à la part absorbée de l'irradiance. L'exitance du corps plongé dans la cavité sera donc égale au produit de son absorptivité et de l'exitance du corps noir :

$$\mathcal{M} = \alpha \mathcal{M}_{\text{CN}} \quad (11.48)$$

C'est une forme de la *loi de KIRCHHOFF* qui stipule que *l'exitance d'un corps est une fraction égale au produit de son absorptivité α et de l'exitance d'un corps noir à la même température.*

Si nous introduisons l'*émissivité* ε du corps en tant que fraction de l'exitance d'un corps noir à la même température :

$$\mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{M}_{\text{CN}} \quad (11.49)$$

nous pouvons reformuler la loi de KIRCHHOFF en affirmant que *l'émissivité est égale à l'absorptivité*. En général, les valeurs de l'absorptivité (et donc de l'émissivité) dépendent de la température de la surface (fig. 11.21). Le tableau 11.2 donne les valeurs pour quelques matériaux.

Flux énergétique net d'un corps gris plongé dans un rayonnement de corps noir.

Si le petit corps enfermé dans la cavité a une température T différente de celle du rayonnement, le taux d'absorption d'énergie n'est pas égal au taux d'émission. Le taux de source net d'énergie rayonnée est donné par:

$$I_{E, \text{rad}} = -A(\mathcal{M} - \alpha\mathcal{E}) \quad (11.50)$$

où A est l'aire de la surface du corps plongé dans la cavité. Comme la puissance émissive est donnée par la loi de KIRCHHOFF, et comme l'irradiance dans la cavité est égale à l'exitance des parois, nous obtenons:

$$I_{E, \text{rad}} = -\alpha A [\mathcal{M}_{\text{CN}}(T) - \mathcal{M}_{\text{CN}}(T_{\text{paroi}})] \quad (11.51)$$

Ce taux est la différence entre les taux d'émission et d'absorption, calculés pour une surface de corps noir selon l'équation (11.49) et multipliés par l'absorptivité de la surface. Ce résultat nous permet de calculer le flux énergétique émanant d'une surface grise d'aire A à la température T , plongée dans un rayonnement de température T_{paroi} :

$$I_{E, \text{rad}} = -\varepsilon A \sigma (T^4 - T_{\text{paroi}}^4) \quad (11.52)$$

L'absorptivité a été remplacée par l'émissivité. Rappelons que ce résultat n'est valable que si le corps est plongé dans une cavité. Lorsque la géométrie est différente, on en tient compte par l'introduction d'un *facteur de forme*.

TABLEAU 11.2 Émissivités et absorptivités solaires.

Substance		Émissivité ^a	Absorptivité pour le rayonnement solaire
		ε	α
Aluminium	Poli	0.03	0.09
	Anodisé	0.84	0.14
	Feuille	0.05	0.15
Brique	Rouge	0.93	0.63
Béton		0.88	0.60
Terre	Champ labouré		0.75
Feuille métal galvanisé	Propre, neuf	0.13	0.65
	Oxydé, abîmé	0.28	0.80
Verre, fenêtre		0.92	
Glace	Lisse	0.97	
Peinture	Noir	0.98	0.98
	Blanc, acrylique	0.90	0.26
	Blanc, oxyde de zinc	0.93	0.16
Papier	Blanc	0.95	0.28
Grès		0.85	
Neige	Poudreuse, fraîche	0.82	0.13
	Granuleuse	0.89	0.33
Suie, charbon		0.95	

TABLEAU 11.2 Émissivités et absorptivités solaires.

Substance		Émissivité ^a	Absorptivité pour le rayonnement solaire
		ε	α
Eau	Profonde	0.96	
Bois	Sciure	0.75	
	Chêne, raboté	0.90	

a. Pour une température approximative de 300 K.

11.4.4 Absorbeurs et émetteurs sélectifs

Selon la loi de KIRCHHOFF, l'émissivité d'une surface est égale à son absorptivité (section 11.4.3). Pourquoi y a-t-il deux colonnes dans le tableau 11.2?

Si l'émissivité est égale à l'absorptivité, la loi de KIRCHHOFF implique que tous les corps doivent atteindre la même température en régime stationnaire, quelles que soient les valeurs de ces grandeurs égales. Nous savons que ce n'est pas le cas. Par exemple, lorsqu'elles sont exposées au Soleil, des surfaces noires s'échauffent plus rapidement que des surfaces blanches.

En fait, la loi de KIRCHHOFF s'applique, mais de manière différenciée selon le type de rayonnement: α et ε sont égaux, mais leur valeurs varient en fonction de la longueur d'onde de la lumière.

Considérons un corps complètement entouré d'air. L'air agit comme un environnement de type corps noir, ce qui implique que l'interaction par l'intermédiaire du rayonnement entraîne un flux d'énergie donné par l'équation (11.52). Une interaction supplémentaire est due à la lumière solaire. Si A_S est l'aire effective de la surface exposée au Soleil, \mathcal{E}_S et α_S , respectivement l'irradiance de la lumière solaire et l'absorptivité de la surface, le taux d'absorption sera:

$$\Sigma_{E,abs} = \alpha_S A_S \mathcal{E}_S \tag{11.53}$$

Si nous tenons encore compte de la convection entre le corps et l'air, l'équation de bilan de l'énergie en régime stationnaire est:

$$\alpha_S A_S \mathcal{E}_S = \varepsilon A \sigma (T^4 - T_{air}^4) + Ah(T - T_{air}) \tag{11.54}$$

Considérons le premier terme dû au rayonnement: vu que α_S et ε ne sont généralement pas égaux, la température stationnaire T du corps dépendra du rapport de l'émissivité et de l'absorptivité pour le rayonnement solaire. Prenons pour référence un corps noir parfait ($\alpha = \varepsilon = 1$ pour toutes les longueurs d'onde) ou des corps pour lesquels $\alpha_S = \varepsilon$ à titre de référence. Un corps pour lequel $\alpha_S/\varepsilon > 1$ sera plus chaud que le corps de référence, et plus froid si $\alpha_S/\varepsilon < 1$.

11.4.5 Dynamique d'une lampe à incandescence

Examinons un système dynamique simple dans lequel intervient le rayonnement. Une petite ampoule est connectée à une alimentation dont la tension croît très rapidement

et décroît tout aussi rapidement. La tension aux bornes de l'ampoule et l'intensité du courant sont mesurées en fonction du temps (fig. 11.22a). Lorsque l'on reporte ces mesures dans un graphique courant-tension, on obtient pour le filament de tungstène une caractéristique intéressante (fig. 11.22b), qui est passablement différente de celle d'une lampe à incandescence obtenue en régime stationnaire (fig. 2.47, section 2.6.2).

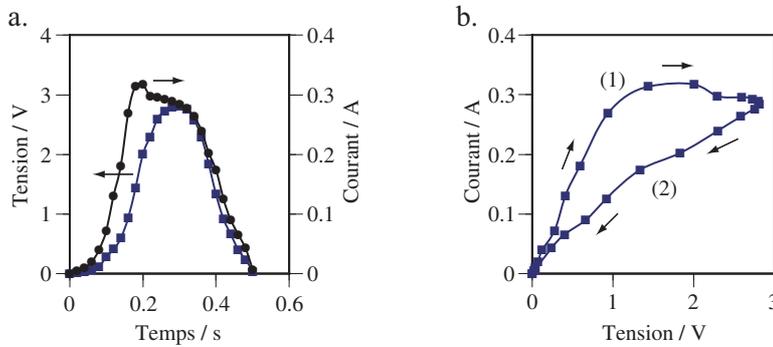


FIGURE 11.22 Données expérimentales du comportement d'une lampe à incandescence enclenchée brièvement: (a) tension et intensité du courant en fonction du temps; (b) caractéristique courant-tension.

La branche descendante de la caractéristique (partie 2 de la figure 11.22b) est proche de la caractéristique en régime stationnaire. En revanche, la branche ascendante diverge fortement des attentes. Cela est dû à la variation drastique de la température du filament (et d'autres parties de l'ampoule) à la suite de la dissipation croissante puis décroissante de l'énergie libérée lors du processus électrique et du rayonnement de l'entropie. Au début du processus, le filament est encore froid, d'où une résistivité basse. L'intensité du courant croît plus rapidement que lors des expériences standard au cours desquelles la tension est augmentée très lentement et pas à pas. Après le pic de dissipation, le filament est chaud et la caractéristique s'approche de celle des expériences en régime stationnaire.

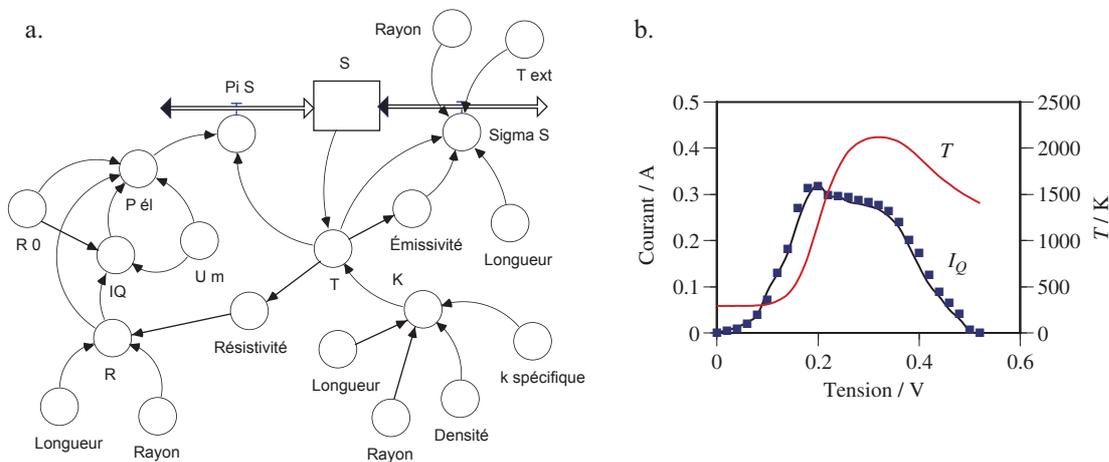


FIGURE 11.23 Comportement dynamique d'un filament de tungstène: (a) diagramme du coeur d'un modèle fortement simplifié; (b) comparaison des données expérimentales (carrés) et résultats de la simulation pour l'intensité du courant traversant le filament et sa température.

La figure 11.23a montre le centre d'un modèle fortement simplifié du phénomène. Il repose sur l'équation de bilan de l'entropie du filament de tungstène. Deux processus essentiels se déroulent: de l'entropie est produite dans le filament et est rayonnée dans l'environnement. L'entropie du filament définit sa température qui est utilisée pour exprimer les lois constitutives pour le taux de production et le taux de source d'entropie.

Les détails du modèle concernent la résistivité et l'émissivité du tungstène qui varient avec la température; la dépendance de la température n'a pas été prise en compte pour la capacité entropique. L'équation de bilan de l'entropie pour le filament de tungstène inclut le taux de production dû à la dissipation de l'énergie et un taux de source pour le rayonnement:

$$\dot{S} = \Pi_S + \Sigma_{S,\text{rad}} \quad (11.55)$$

Trois lois constitutives complètent le modèle: une relation température-entropie pour le filament de tungstène (section 5.5), une autre pour le taux de production d'entropie (section 5.4.3) et une dernière pour le rayonnement de l'entropie par le filament chaud.

Dans ce modèle, nous opérons avec une valeur moyenne de la capacité entropique K obtenue de la manière suivante. La chaleur spécifique c du tungstène varie entre $130 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ et $180 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ dans la plage de températures allant de 300 K à 3000 K. Nous approximations la capacité entropique par:

$$K_{\text{moy}} = m \frac{c_{\text{moy}}}{T_{\text{moy}}} \quad (11.56)$$

Nous obtenons la masse m du filament en le considérant comme un cylindre dont nous évaluons la longueur et le rayon r ; cette dernière grandeur se révélera être un paramètre inconnu critique dans le modèle. Avec une capacité entropique constante, la relation entre l'entropie et la température est simplement:

$$S = K_{\text{moy}} T \quad (11.57)$$

Le taux de production d'entropie est égal au quotient du taux de dissipation et de la température du filament. Cette dernière valeur est tirée de l'équation (11.57) alors que la première est égale à la puissance du processus électrique. La tension sur le filament n'est qu'une partie de la tension mesurée U_m , l'autre partie étant due aux connexions en cuivre entre l'alimentation et le filament. On attribue à cette partie une résistance constante (inconnue) R_0 , ce qui constitue une autre simplification du modèle:

$$U_T = \frac{R}{R + R_0} U_m \quad (11.58)$$

où R et U_T sont respectivement la résistance du et la tension sur le filament. L'intensité du courant à travers l'ampoule est:

$$I_Q = \frac{1}{R + R_0} U_m \quad (11.59)$$

Avec ces deux grandeurs, nous pouvons calculer le taux de production d'entropie:

$$\Pi_S = \frac{1}{T} U_T I_Q = \frac{1}{T} \frac{R}{(R + R_0)^2} U_m^2 \quad (11.60)$$

Nous obtenons la résistivité ρ du filament au moyen d'une fonction d'interpolation des données de la figure 11.24. La résistance du filament est

$$R = \rho \frac{1}{\pi r^2} \quad (11.61)$$

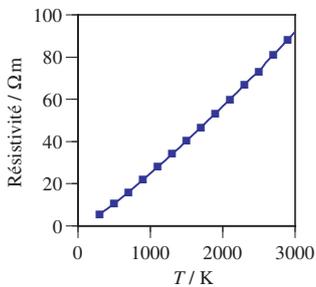


FIGURE 11.24 Résistivité du tungstène en fonction de la température.

Selon l'équation (11.37), le taux de source d'entropie est égal au quotient du taux de source d'énergie et la température. Le taux de source d'énergie est égal au flux d'énergie donné par l'équation (11.52). Ainsi :

$$\Sigma_s = \frac{1}{T} \alpha A \sigma (T^4 - T_{\text{air}}^4) \quad (11.62)$$

L'absorptivité α est égale à l'émissivité que l'on peut obtenir à partir des données représentées dans la figure 11.21.

Le modèle est maintenant complet et peut être utilisé pour prédire l'intensité du courant et comparer cette simulation aux données expérimentales (fig. 11.23b). Le modèle fournit également l'évolution de la température du filament. Cette évolution correspond aux idées exprimées lors de l'analyse des données expérimentales : la température croît d'abord lentement, puis reste élevée au-delà de l'extinction de la lampe.

Le très bon accord entre la simulation et les mesures ne doit pas être interprété comme un signe de perfection du modèle. Il souffre d'un certain nombre de défauts mais permet une compréhension des phénomènes fondamentaux. Nous avons laissé de côté au moins deux éléments importants. Il aurait fallu intégrer la dynamique électrique et thermique des connexions en cuivre. En plus, le rayonnement émis par le filament est intercepté partiellement par le verre de l'ampoule que nous aurions pu intégrer comme élément supplémentaire du modèle. En outre, la capacité entropique ne devrait pas être considérée comme constante, vu la grande étendue de la plage de températures. Enfin, il faudrait mesurer les caractéristiques géométriques du filament de tungstène et des fils de connexion pour obtenir un modèle plus fiable.

1. Pourquoi la mesure du flux d'entropie à travers le champ radiatif n'est-elle pas un courant standard ? Pourquoi la mesure du taux d'émission d'un corps vers un champ (ou vice versa) est-elle un taux de source et pas un courant ?
2. Pourquoi la relation $I_E = T I_S$ ne s'applique-t-elle pas au rayonnement à travers le champ radiatif ? La relation analogue est-elle valable pour les sources et puits d'énergie et d'entropie lors de l'interaction par rayonnement entre des corps et des champs ?
3. Quel argument simple permet de montrer que l'émission de rayonnement est dissipative ?
4. La lumière solaire a une température approximative de 6000 K. La lumière rayonnée par notre planète a une température proche de 300 K. Quel est le rapport de l'entropie par unité d'énergie pour ces deux types de rayonnement ?
5. Sachant qu'à l'équilibre la Terre rayonne autant d'énergie qu'elle en reçoit du Soleil, déterminez combien d'entropie est produite par la planète ?
6. Imaginez une sphère dont le rayon correspond à la distance Soleil-Terre, centrée sur le Soleil et considérez un mètre carré de cette surface traversé par la lumière solaire. Les valeurs de \mathcal{M} et de \mathcal{M}_S sont-elles les mêmes qu'à la surface du Soleil ?
7. Considérez la surface opaque d'un corps chaud entouré d'air. On est en présence de rayonnement et de transfert d'entropie par convection. Les processus sont-ils en parallèle ou en série ?
8. Imaginez une planète sphérique sans atmosphère exposée à la lumière du Soleil. Elle atteindra une certaine température en régime stationnaire. Cette température dépendra-t-elle de l'émissivité de sa surface ?
9. Une plaque de métal galvanisé deviendra-t-elle plus chaude au soleil qu'une surface peinte en noir ?



1. À partir d'un point de l'espace, le rayonnement s'écoule dans toutes les directions. L'émission et l'absorption sont des processus volumiques.
2. Le rayonnement ressemble plus à un processus de convection: il dépend de la densité de l'entropie stockée. Oui.
3. Le flux d'entropie qui émane du corps est plus grand (d'un facteur 4/3) que le taux de source dans le corps.
4. 20.
5. 19 de 20 unités rayonnées sont produites.
6. Oui, la température est encore la même (équations (11.25) et (11.26)).
7. En parallèle.
8. Pas pour une surface grise. Oui pour une surface sélective.
9. Oui (tableau 11.2).



EXEMPLE 11.4. Température à la surface du Soleil.

Le rayonnement qui émane d'une mince couche superficielle du Soleil a des propriétés qui sont presque semblables à celles d'un corps noir. (a) En utilisant la constante solaire (irradiance solaire totale) de 1370 W m^{-2} , la distance Terre-Soleil de $1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$ et le rayon du Soleil de $700\,000 \text{ km}$, déterminez la température de sa surface. (b) Calculez le taux auquel l'entropie est émise par la surface totale.

SOLUTION: (a) La constante solaire \mathcal{E}_{cs} est la valeur du flux d'énergie normal par unité de surface à la hauteur de la Terre. En utilisant cette valeur, nous calculons la puissance émissive du Soleil, appelée sa luminosité L :

$$L = 4\pi d^2 \mathcal{E}_{cs} = 4\pi (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 1370 \text{ W m}^{-2} = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Puisque le Soleil est approximativement un corps noir qui n'absorbe aucun rayonnement de son environnement, l'équation (11.29) s'applique à la relation entre la puissance émissive et la température, ce qui entraîne:

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R_s^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4\pi \cdot (7.0 \cdot 10^8 \text{ m})^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}}} = 5770 \text{ K}$$

pour la température à la surface du Soleil.

(b) Le flux d'entropie émanant du Soleil à travers le champ radiatif est donné par:

$$I_s = \frac{4}{3} A \sigma T_s^3 = 8.95 \cdot 10^{22} \text{ W K}^{-1}$$



EXEMPLE 11.5. Température à la surface de la Terre.

Modélisez la Terre en tant que (a) corps noir de température uniforme qui absorbe le rayonnement solaire et émet du rayonnement vers l'espace: quelle est la valeur de la température atteinte par la surface du corps en régime stationnaire? (b) Répétez l'opération pour une surface grise

et (c) pour un corps noir qui n'absorbe que 70% de la lumière solaire à cause de la réflexion par la neige et les nuages.

SOLUTION: (a) Nous pouvons utiliser l'équation (11.54) sans le terme lié à la convection et pour une température de l'environnement de 0 K. Nous obtenons :

$$A_S \mathcal{E}_{cs} = A \sigma T^4$$

A_S est l'aire de la projection plane de la sphère (un disque) et A est celle de la surface de la planète. Après substitution et résolution selon T , nous obtenons :

$$T = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{E}_{cs}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1370 \text{ W m}^{-2}}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}}} = 279 \text{ K}$$

(b) Pour des corps qui ne sont pas noirs, nous avons :

$$\alpha_S A_S \mathcal{E}_{cs} = \varepsilon A \sigma T^4$$

Comme $\alpha_S = \varepsilon$ pour des surfaces grises, la nouvelle situation aboutit au même résultat, c'est-à-dire à une température de 279 K.

(c) Si la Terre rayonne comme un corps noir, alors $\varepsilon = 1$. Cependant, comme elle réfléchit 30% du rayonnement incident, nous posons $\alpha_S = 0.7$. Nous avons alors :

$$T = \sqrt[4]{\frac{\alpha_S \mathcal{E}_{cs}}{4\varepsilon\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{0.7 \cdot 1370 \text{ W m}^{-2}}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}}} = 255 \text{ K}$$

Les trois valeurs sont trop basses. La température moyenne de notre planète est plus proche de 288 K. On obtient une valeur plus proche de la valeur observée en prenant en compte les vents et l'effet de serre. ■

EXEMPLE 11.6. Coefficient de transmission de la chaleur par rayonnement.

À la section 5.6.1, les flux d'énergie thermique entre un corps et son environnement sont exprimés au moyen des équations (5.38) pour la conduction et (5.40) pour la convection. Dans ces équations de forme générale $I_{E, \text{therm}} = -Ah(T - T_{\text{amb}})$, A représente l'aire de l'interface entre le corps et son environnement et la grandeur h , appelée coefficient de transmission de la chaleur (de l'énergie), englobe les caractéristiques thermiques des couches traversées ou de l'interface.

Écrivez l'équation (11.31) décrivant l'échange d'énergie entre un corps noir à la température T_1 et son environnement à la température T_2 dans une forme semblable afin de déterminer ce que devient le coefficient de transmission de la chaleur par rayonnement.

SOLUTION: Il faut transformer le facteur formé par la différence des quatrièmes puissances des températures afin de faire apparaître la différence des températures dans l'équation :

$$\begin{aligned} I_{E, \text{rad, net}} &= -\sigma A (T_1^4 - T_2^4) \\ &= -\sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 - T_2^2) \\ &= -\sigma A (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Le coefficient de transmission de la chaleur par rayonnement devient :

$$h_{\text{rad}} = \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$$

On voit que ce coefficient dépend fortement des températures impliquées dans le processus.

Si de la convection intervient également dans le processus d'échange d'énergie, on est en présence de flux parallèles de chaleur. Le flux total d'énergie est alors égal à la somme du flux radiatif et du flux convectif. Le coefficient global de transmission de la chaleur est égal à la somme des coefficients respectifs.

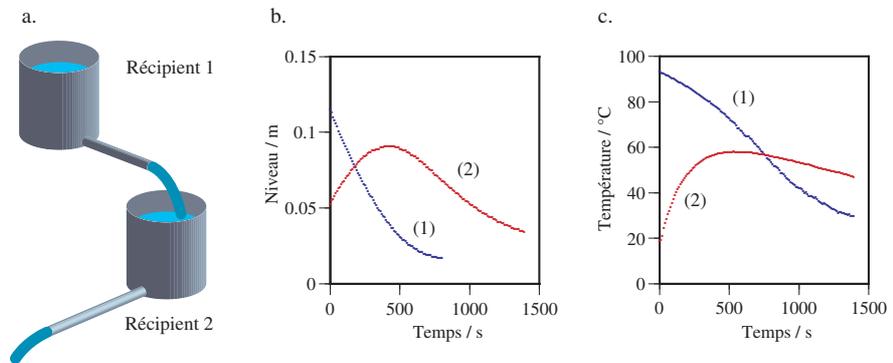


11.5 PHÉNOMÈNES THERMIQUES DANS LES SYSTÈMES OUVERTS

Dans les sections précédentes, les systèmes envisagés sont des *systèmes fermés* qui n'échangent pas de matière avec l'environnement. Lorsque de la matière entre dans ou émerge d'un système par l'intermédiaire d'un écoulement, on a affaire à un *système ouvert*. Pour nous familiariser avec les systèmes ouverts, nous allons étudier deux exemples à échelle réduite. Dans le premier, de l'eau chaude s'écoule d'un premier récipient vers un autre qui contient de l'eau froide et d'où le liquide peut s'écouler. Dans le second, on observe l'évolution d'un volume d'eau chauffée électriquement.

Mélange d'eau chaude et froide dans un écoulement. Deux récipients métalliques équipés d'un déversoir contiennent de l'eau. De l'eau chaude se déverse du premier

FIGURE 11.25 Mélange d'eau chaude et froide en écoulement: (a) l'eau chaude s'écoule du récipient 1 vers le récipient 2 qui contient une petite quantité d'eau froide; (b) évolution des niveaux; (c) évolution de la température.



vers le second qui contient initialement une petite quantité d'eau froide; les niveaux respectifs apparaissent dans la figure 11.25. Les liquides sont brassés continuellement. Le niveau du premier récipient diminue alors que celui du second augmente tout d'abord avant de diminuer également. Les températures suivent une évolution semblable.

Interprétation. L'évolution des niveaux correspond à ce que nous attendions, même si elle peut être légèrement différente de ce que nous avons observé au chapitre 1 à cause d'effets dus à la température qui influence la viscosité du liquide.

La partie thermique est nettement plus intéressante. La diminution de la température dans le récipient 1 est due aux pertes vers l'environnement, qui ont deux origines: les pertes à travers les parois du récipient et celles qui sont dues à l'évaporation. Toutefois, la courbe d'évolution de la température n'est pas celle d'un simple refroidissement: le taux de diminution de la température augmente dans le temps, ce qui peut être expliqué par le fait que la masse du liquide diminue relativement rapidement durant les premières 500 secondes.

La température de l'eau du second récipient augmente tout d'abord grâce à l'apport d'eau chaude, mais elle commence à diminuer avant même d'avoir atteint la même valeur que celle du premier récipient. La raison est la même que pour le récipient 1.

Chauffage et vaporisation d'eau dans un récipient ouvert. Dans la seconde expérience, on chauffe de l'eau au moyen d'un thermoplongeur électrique. L'eau est

continuellement brassée et on mesure la température et la masse de l'eau dans le récipient (fig. 11.26).

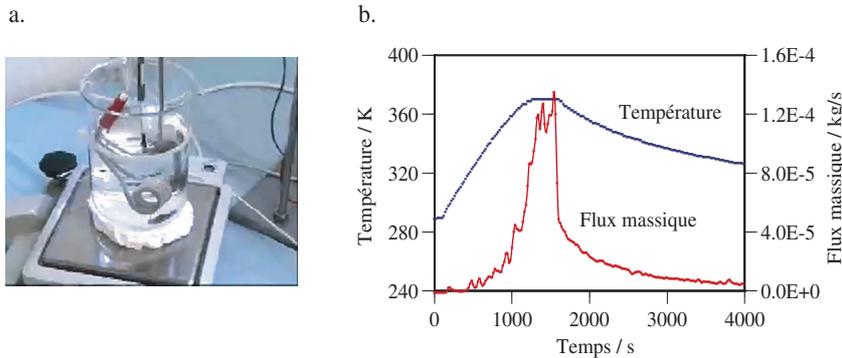


FIGURE 11.26 Vaporisation d'eau : (a) l'eau est chauffée au moyen d'un plongeur électrique et brassée continuellement ; (b) évolution de la masse et de la température.

Le taux d'élévation de la température est légèrement plus élevé au début du processus. Lorsque l'eau se met à bouillir, la température ne varie plus. À l'instant $t = 1600$ s, on coupe l'alimentation du thermoplongeur et on laisse le liquide se refroidir.

La mesure de la masse du liquide permet de déterminer le flux de masse dû à l'évaporation. Ce flux augmente fortement lorsque la température s'approche du point d'ébullition et diminue de manière quasi symétrique après la coupure du chauffage.

Interprétation. L'augmentation de la température durant la première phase du chauffage est un comportement classique. Le taux d'augmentation diminue légèrement parce que les pertes deviennent plus importantes à cause de l'augmentation de la différence de température entre l'eau et l'environnement.

L'évolution de la masse est due à l'évaporation qui augmente avec la température. Mais il y a une différence fondamentale avec l'évaporation qui était aussi présente dans la première expérience. Le fait de retirer de l'eau d'un récipient laisse normalement la température inchangée. Ici, l'eau qui s'évapore emporte avec elle l'entropie qu'elle contient en tant qu'eau chaude plus l'entropie nécessaire à la vaporiser. Nous en concluons que *les courants de matière transportent l'entropie qu'ils contiennent.*

11.6 TRANSPORT PAR CONVECTION

Pour traiter le transport par convection de grandeurs extensives, nous commencerons par étudier le transport d'une substance dissoute dans un fluide en mouvement, comme par exemple du sel dissous dans de l'eau en train de s'écouler. Nous pourrions ensuite appliquer l'image de la substance dissoute à la quantité de mouvement, à l'entropie et à l'énergie.

11.6.1 Transport par convection de substances dissoutes

Considérons de l'eau salée qui franchit le limite d'un système (fig. 11.27) et imaginons un petit domaine en amont de cette limite (rectangle en pointillé) dans lequel la concentration molaire du sel est égale à \bar{c} . La quantité de sel $\bar{c}A\Delta x$ contenue dans cette région met une durée Δt pour s'écouler hors du système, ce qui implique que le courant de quantité de sel est $I_n = \bar{c}AV$. Comme le produit AV est égal au flux volumique I_V , le courant convectif de la quantité de substance dissoute $I_{n, \text{conv}}$ est donné par :

$$I_{n, \text{conv}} = \bar{c}I_{V, \text{fluide}} \quad (11.63)$$

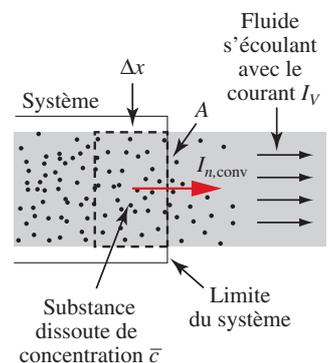


FIGURE 11.27 Un fluide (grisé) transporte une substance diluée (points) à travers les limites d'un système.

Dans cette relation, $I_{V, \text{fluide}}$ est basé sur le volume de la solution qui peut être différent du volume du solvant.

Il est assez courant d'utiliser le flux massique I_m du fluide au lieu du flux volumique. Si nous utilisons la définition (6.14) de la fraction massique w_s du soluté, nous obtenons une expression équivalente :

$$I_{n, \text{conv}} = \frac{1}{M_s} w_s I_{m, \text{fluide}} \tag{11.64}$$

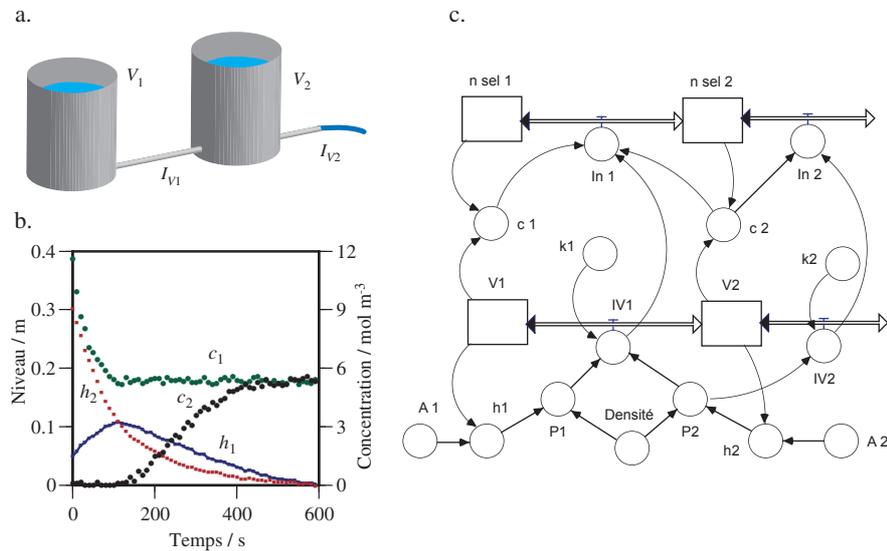
dans laquelle l'indice s se réfère au soluté et $I_{m, \text{fluide}}$ est le flux total de masse, solvant et soluté.

Les relations (11.63) et (11.64) ne sont valables que si la concentration des substances dissoutes est uniforme sur la surface traversée par le flux. Si ce n'est pas le cas, les expressions doivent être remplacées par une relation plus générale qui utilise les densités de flux j_n et $j_V = \nu$.

$$j_{n, \text{conv}} = \bar{c} \nu \tag{11.65}$$

Mélange de sel et d'eau dans un écoulement. Nous allons démontrer la simplicité du concept de courants convectifs en modélisant une expérience au cours de laquelle de l'eau fraîche et de l'eau salée sont mélangées (fig. 11.28). Deux récipients identiques sont reliés par une conduite. Le second a un déversoir supplémentaire. Le premier récipient est rempli d'eau salée jusqu'à un niveau de 5 cm alors que le second contient de l'eau fraîche à un niveau initial de 30 cm. L'eau s'écoule de ce récipient à la fois vers le premier et vers l'extérieur. Lorsque le niveau s'élève dans le premier récipient, la concentration de sel diminue à cause de l'arrivée d'eau fraîche. À partir de l'instant où les deux niveaux ont la même valeur (aux environ de 120 s), le flux s'inverse et de l'eau salée se mélange avec l'eau fraîche, et la concentration de sel croît dans le second récipient.

FIGURE 11.28 Mélange de sel et d'eau dans un écoulement: (a) les deux récipients contiennent initialement de l'eau salée (1) et de l'eau fraîche (2); (b) évolution des niveaux et des concentrations de sel; (c) diagramme du modèle dynamique du système.



Le modèle dynamique du système (fig. 11.28c) contient quatre stocks représentant les quatre grandeurs extensives dont il faut tenir compte, à savoir le volume d'eau dans chacun des récipients, ainsi que la quantité de sel dissoute dans l'eau de ces récipients. Nous y ajoutons deux courants d'eau et deux courants convectifs de sel. Nous admettons que

les concentrations de sel sont suffisamment faibles pour qu'elles ne modifient pas la densité de l'eau, ce qui nous permet de traiter la partie hydraulique de manière indépendante des propriétés chimiques de la même manière qu'au chapitre 1. Nous devons introduire les concentrations molaires de sel et exprimer les flux convectifs de sel au moyen de ces concentrations et de flux volumiques d'eau. Le courant de sel entre les deux récipients dépend de la concentration dans le récipient 1 si l'eau s'écoule de celui-ci vers le récipient 2 (après 120 s), et de la concentration dans le récipient 2 lorsque l'eau s'écoule dans le sens inverse (avant 120s):

$$\begin{aligned} I_{n, \text{NaCl}, 1} &= \bar{c}_1 I_{V1} & \text{si } P_1 > P_2 \\ I_{n, \text{NaCl}, 1} &= \bar{c}_2 I_{V1} & \text{si } P_1 < P_2 \end{aligned} \quad (11.66)$$

Le courant de sel émergeant du récipient 2 vers l'extérieur ne dépend que de la concentration de sel dans ce récipient. Ce modèle simple donne des résultats satisfaisants, comme le montre la comparaison des résultats de la simulation et des données expérimentales (fig. 11.29).

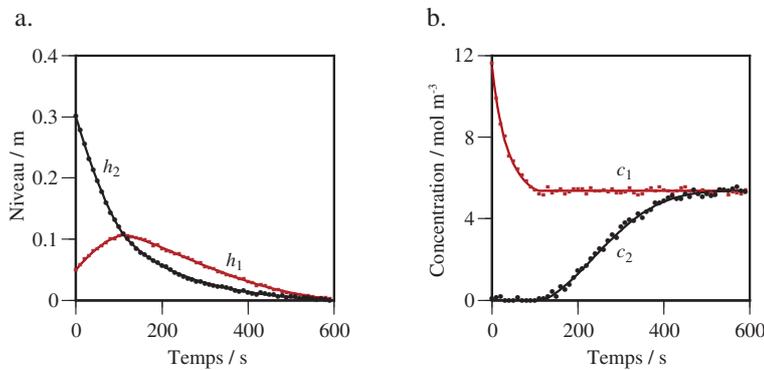


FIGURE 11.29 Résultats de la simulation du modèle de la figure 11.28 et comparaison avec les données expérimentales: (a) niveaux; (b) concentrations.

11.6.2 Courants convectifs de quantité de mouvement

À partir de l'équation (11.63), nous voyons qu'un courant convectif de quantité de mouvement doit être égal à la densité volumique de quantité de mouvement ρV multipliée par le flux volumique I_V . Ce produit peut être transformé pour obtenir le produit de la densité massique de quantité de mouvement et du flux massique:

$$I_{p, \text{conv}} = \rho I_{m, \text{fluide}} \quad (11.67)$$

La quantité de mouvement par unité de masse du fluide est la *quantité de mouvement spécifique*, elle est égale à la vitesse du fluide par rapport à l'observateur.

Ce flux de quantité de mouvement accompagne tous les flux convectifs. Nous ne les avons pas pris en compte dans les applications étudiées jusqu'à présent. En revanche, si la vitesse d'écoulement devient importante, il faut tenir compte de cette contribution mécanique. Lors de l'établissement des bilans d'énergie, l'apport dû à la quantité de mouvement devra être intégré.

11.6.3 Courants convectifs d'entropie

L'entropie accompagne toujours les écoulements de substances. Nous devons donc déterminer combien d'entropie est contenue dans un volume de fluide. Pour pouvoir

le faire, nous introduisons la *densité d'entropie* ρ_S , l'*entropie spécifique* s et l'*entropie molaire* \bar{s} . Pour des corps uniformes, ces grandeurs sont définies par :

$$S = \rho_S V, \quad S = sm, \quad S = \bar{s}n \quad (11.68)$$

La densité d'entropie et l'entropie spécifique sont liées par la relation :

$$\rho_S = \rho s \quad (11.69)$$

où ρ est la *densité massique* usuelle. Si nous voulons pouvoir exprimer la densité d'entropie d'un corps, nous devons pouvoir disposer d'une théorie constitutive telle que celle des fluides incompressibles de la section 5.5 ou celle du gaz parfait de la section 10.3.

Les flux convectifs d'entropie sont évalués de la même manière que les courants convectifs de substances dissoutes. Une manière de visualiser la chose est d'imaginer que les points de la figure 11.27 représentent des grains d'entropie dissoute dans le fluide. Grâce à cette analogie, nous pouvons écrire :

$$I_{S, \text{conv}} = \rho_S I_{V, \text{fluide}} \quad (11.70)$$

Les deux autres manières d'exprimer un flux convectif d'entropie sont :

$$I_{S, \text{conv}} = s I_{m, \text{fluide}} \quad (11.71)$$

$$I_{S, \text{conv}} = \bar{s} I_{n, \text{fluide}} \quad (11.72)$$

Ces relations pour les courants d'entropie ne sont valables que si les densités ou les valeurs spécifiques sont constantes sur la surface traversée. Dans le cas contraire, on doit utiliser les densités de flux.

Relations constitutives pour l'entropie d'un fluide. À la section 5.5, nous avons établi les relations pour l'entropie spécifique (ou molaire) d'un fluide. Dans le cas d'un fluide incompressible, tel que l'eau, l'entropie molaire est :

$$\bar{s}(T) = \bar{c} \ln \left(\frac{T}{T_{\text{réf}}} \right) \quad (11.73)$$

avec $\bar{s}_{\text{réf}} = 0$. \bar{c} est le coefficient de température molaire de l'énergie (chaleur molaire dans la thermodynamique traditionnelle), à ne pas confondre avec la concentration molaire apparaissant dans les équations (11.63) et (11.65). On remarquera que l'entropie ne dépend que de la température pour les fluides incompressibles, ce qui n'est pas le cas pour les fluides compressibles tels que le gaz parfait :

$$\bar{s}(P, T) = -R \ln \left(\frac{P}{P_{\text{réf}}} \right) + \bar{c}_p \ln \left(\frac{T}{T_{\text{réf}}} \right) \quad (11.74)$$

Le facteur du logarithme du rapport des températures est le coefficient de température molaire de l'enthalpie du gaz défini par l'équation (10.50). L'influence de la pression (ou du volume) ne peut pas être découplée de celle des variations de température, comme c'est le cas pour les fluides incompressibles.

11.7 TRANSPORT D'ÉNERGIE DANS LES SYSTÈMES OUVERTS

Les modèles des processus physiques utilisent les bilans des quantités de matière, de la charge, de la quantité de mouvement ou du moment cinétique, et de l'entropie. À eux seuls, les bilans ne suffisent pas: il faut être en mesure de formuler les lois constitutives qui régissent les flux et les taux de production. C'est là qu'intervient la loi de conservation de l'énergie: elle permet d'éliminer, parmi les lois constitutives possibles, celles qui la contrediraient.

Courant convectif d'énergie. Nous envisageons un fluide chaud, sous pression, qui pénètre dans un système (fig. 11.30). Il y a deux contributions au courant d'énergie. En premier lieu, le fluide transporte de l'énergie accumulée en son sein; cette énergie, en quelque sorte « diluée » dans le fluide, est représentée par les points dans la figure 11.30. C'est l'énergie du fluide qu'un observateur emporté par le courant mesurerait. Si, comme dans le cas de l'entropie, nous introduisons la densité d'énergie ρ_E , l'énergie spécifique e et l'énergie molaire \bar{e} :

$$E = \rho_E V, \quad E = em, \quad E = \bar{e}n \quad (11.75)$$

nous pouvons écrire la partie convective des flux d'énergie comme suit:

$$I_{E, \text{conv}} = \rho_E I_{V, \text{fluide}} \quad (11.76)$$

$$I_{E, \text{conv}} = e I_{m, \text{fluide}} \quad (11.77)$$

$$I_{E, \text{conv}} = \bar{e} I_{n, \text{fluide}} \quad (11.78)$$

Courant d'énergie dû à l'écoulement d'un fluide sous pression. Il faut ajouter le terme que nous avons introduit par l'équation (3.13), le flux d'énergie transporté par un fluide sous pression:

$$I_{E, \text{fluide}} = P I_V \quad (11.79)$$

À nouveau, nous pouvons convertir cette expression pour pouvoir l'utiliser avec des flux massiques ou des flux de quantité de matière:

$$I_{E, \text{fluide}} = P v I_m \quad (11.80)$$

$$I_{E, \text{fluide}} = P \bar{v} I_n \quad (11.81)$$

où $v = 1/\rho$ représente le *volume spécifique* et \bar{v} le *volume molaire*.

Courant d'énergie total dû à l'écoulement. Dans le cas que nous envisageons ici, un liquide chaud sous pression, le courant d'énergie total est la somme des deux contributions évoquées ci-dessus. Exprimé au moyen du courant de quantité de substance, il devient:

$$I_{E, \text{écoulement}} = (\bar{e} + P\bar{v}) I_{n, \text{fluide}} \quad (11.82)$$

La somme $\bar{e} + P\bar{v}$ correspond à l'enthalpie molaire \bar{h} du fluide. Cette grandeur a été introduite à la section 10.4.

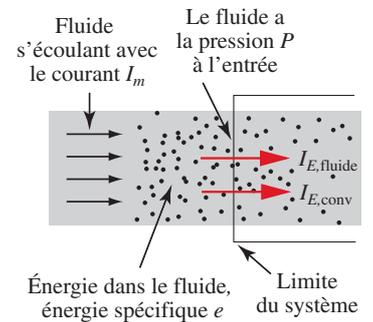


FIGURE 11.30 Un fluide (grisé) transporte une substance diluée (points) à travers les limites d'un système.

Pour pouvoir formuler une loi constitutive pour un courant concret, nous devons disposer des informations constitutives relatives à l'énergie d'un fluide. Pour un *fluide incompressible*, nous avons

$$\bar{e} = \bar{c}(T - T_{\text{réf}}) \quad (11.83)$$

alors que pour un *gaz parfait*, l'énergie molaire est

$$\bar{e} = \bar{c}_v(T - T_{\text{réf}}) \quad (11.84)$$

Dans les deux cas, $e_{\text{réf}} = 0$. Rappelons que, pour le gaz parfait

$$\bar{c}_p = \bar{c}_v + R \quad (11.85)$$

où R est la constante des gaz parfaits. Cette relation a été établie à la section 10.3.6.

11.8 BILANS DANS LES SYSTÈMES OUVERTS

Lors de la formulation des bilans relatifs à un processus se déroulant dans un système ouvert, à côté des bilans concernant les grandeurs qui nous intéressent directement, telles que l'entropie ou la quantité de mouvement si nous modélisons des processus thermiques ou mécaniques, nous devons prendre en compte le bilan des substances qui, en s'écoulant, transportent l'entropie, la quantité de mouvement ou la charge.

S'il s'agit par exemple d'un système hydraulique, il faudra d'abord énoncer l'équation de bilan du volume accumulé dans le système:

$$\dot{V} = \sum I_V \quad (11.86)$$

Dans un système ouvert, il faut ajouter les flux convectifs aux processus qui sont responsables de la variation des grandeurs accumulées. Une telle relation a par exemple été formulée pour la quantité de mouvement au moyen de l'équation (8.11) à la section 8.4.4:

$$\dot{p} = I_{p, \text{cond}} + \Sigma_p + I_{p, \text{conv}} \quad (11.87)$$

et pour l'entropie par l'équation (11.9) à la section 11.1.4:

$$\dot{S} = I_{S, \text{rad}} + I_{S, \text{conv}} + \Sigma_S + II_S \quad (11.88)$$

La discussion de la section précédente relative au transfert d'énergie dans les systèmes ouverts montre que l'équation de bilan de l'énergie doit être formulée de manière légèrement différente. Nous devons prendre en compte tous les termes (11.82) relatifs à l'écoulement, et pas seulement les termes associés exclusivement aux flux convectifs, à savoir les équations (11.76) à (11.78). L'équation de bilan de l'énergie aura donc la forme:

$$\dot{E} = I_{E, \text{cond}} + I_{E, \text{écoulement}} + \Sigma_E \quad (11.89)$$

1. Pourquoi l'action de vider de l'eau chaude hors d'une cuve ne change-t-elle pas la température de l'eau restant dans la cuve alors que l'action de verser de l'eau froide dans une cuve contenant de l'eau chaude fait baisser la température?
2. Quelle est la quantité de mouvement spécifique d'un fluide?
3. Pourquoi ne suffit-il pas de ne prendre en compte que l'énergie stockée dans un fluide (l'énergie interne e) lorsque l'on calcule le courant d'énergie dû à l'écoulement d'un fluide vers ou hors d'un système?
4. Imaginez que vous comprimez un ressort pour le faire entrer dans une boîte qui représente le volume de contrôle pour l'analyse. Considérez le courant d'énergie dû au ressort entrant dans la boîte, c'est-à-dire le courant d'énergie dû à l'«écoulement» du ressort à travers la surface du volume de contrôle. Y a-t-il une partie du courant total d'énergie qui est assimilable au courant d'énergie stockée ($eI_{m, \text{fluide}}$ dans l'équation (11.77)) ? Y a-t-il une partie assimilable au terme PvI_m dans l'équation (11.80)?
5. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de faire la distinction entre les coefficients de l'énergie et de l'enthalpie C_V et C_P dans le cas d'un fluide incompressible, comme dans l'équation (11.83)?
6. Considérez deux réservoirs communicants avec un déversoir supplémentaire tels ceux de la figure 11.28. Il y a une faible quantité d'eau chaude dans le réservoir 1 et une grande quantité d'eau froide dans le réservoir 2. Comment la température de l'eau dans chacun des deux réservoirs va-t-elle évoluer dans le temps?



1. Dans le premier cas, l'entropie spécifique ne varie pas, alors qu'elle diminue dans le second cas.
2. Sa vitesse.
3. La pression, et éventuellement la vitesse et le potentiel gravitationnel peuvent contribuer à l'énergie du fluide.
4. Respectivement le flux d'énergie emmagasinée dans le ressort comprimé et le flux d'énergie dû à l'action de pousser le ressort à l'intérieur de la boîte.
5. Parce qu'ils sont égaux si le volume de la substance ne varie pas.
6. T_1 commencera par diminuer alors que T_2 restera constante. Puis T_1 ne variera plus alors que T_2 diminuera.



EXEMPLE 11.7. Courants convectifs d'eau.

De l'eau, dont la température est de 50°C , s'écoule à travers un tuyau de diamètre égal à 5 cm. Le flux massique est de 10 kg s^{-1} . Calculez la valeur (a) du courant convectif d'entropie et (b) du courant convectif de quantité de mouvement et comparez-le avec le courant conductif de quantité de mouvement engendré par une pression de 1 bar.

SOLUTION: (a) Si nous choisissons de baser nos calculs sur le flux massique, nous devons évaluer l'entropie spécifique du fluide qui est donnée par:

$$s(T) = s(T_{\text{réf}}) + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{réf}}}\right) = 0 \text{ Ct kg}^{-1} + 4200 \text{ Ct kg}^{-1} \ln\left(\frac{323 \text{ K}}{273 \text{ K}}\right) = 706 \text{ Ct kg}^{-1}$$

Le flux convectif est obtenu à partir de l'équation (11.71):

$$|I_{s, \text{conv}}| = s(T)|I_m| = 706 \text{ Ct kg}^{-1} \cdot 10 \text{ kg s}^{-1} = 7.06 \cdot 10^3 \text{ Ct s}^{-1}$$

Lors du calcul de l'entropie spécifique, nous avons arbitrairement attribué une valeur nulle à celle du niveau de référence. Il en découle que nous ne pouvons pas attribuer une valeur absolue à la valeur trouvée ci-dessus, ce qui serait également le cas si nous voulions évaluer des courants d'énergie dus à l'écoulement. Ce problème est usuellement résolu en considérant les flux entrant et sortant par rapport au même point de référence, comme le montre l'exemple 11.8.

(b) Nous devons connaître la vitesse d'écoulement pour pouvoir calculer le courant convectif de quantité de mouvement. Nous l'obtenons à partir du flux massique et de la section de la conduite :

$$|I_m| = \rho |I_V| = \rho AV \Rightarrow v = 5.1 \text{ m s}^{-1}$$

Le courant de quantité de mouvement est le produit de la quantité de mouvement spécifique (la vitesse) et du flux massique :

$$|I_{p, \text{conv}}| = v |I_m| = 51 \text{ N}$$

Si la pression de l'eau vaut 1 bar, le courant convectif de quantité de mouvement est une fraction importante du flux conductif de quantité de mouvement qui vaut :

$$|I_{p, \text{cond}}| = AP = \pi \cdot 0.025^2 \text{ m}^2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 200 \text{ N}$$

■

EXEMPLE 11.8. Courant convectif d'entropie net et flux d'énergie transportés par de l'air.

Considérez un courant d'air de 100 mol s^{-1} s'écoulant à travers un dispositif technique. La pression et la température à l'entrée sont respectivement de 2 bar et 400 K. À la sortie, ces valeurs sont tombées respectivement à 1 bar et 300 K. Négligez les termes relatifs à l'énergie cinétique. (a) Calculez le courant convectif net d'entropie et (b) le courant net d'énergie dû à l'écoulement de l'air à travers le dispositif. (c) Une telle situation est-elle possible ?

SOLUTION: (a) L'entropie molaire de l'air peut être approximée au moyen du modèle du gaz parfait en utilisant l'équation (11.74) avec un coefficient de température de l'enthalpie de $7/2 R$ (selon les résultats de l'exemple 10.3, l'exposant adiabatique de l'air est proche de 1.4). Les valeurs de référence n'entrent pas en compte, vu que nous calculons une différence :

$$\begin{aligned} I_{p, \text{conv, net}} &= (\bar{s}_{\text{in}} - \bar{s}_{\text{out}}) I_n = \left[-R \ln \left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \right) + \bar{c}_p \ln \left(\frac{T_{\text{in}}}{T_{\text{out}}} \right) \right] I_n \\ &= \left[-8.314 \text{ Ct mol}^{-1} \ln \left(\frac{2 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right) + 3.5 \cdot 8.314 \text{ Ct mol}^{-1} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] 100 \text{ mol s}^{-1} = 261 \text{ Ct s}^{-1} \end{aligned}$$

(b) Comme nous évaluons une différence, les valeurs associées au niveau de référence se compensent. Nous calculons le flux net d'énergie au moyen des équations (11.82), (11.84) et (11.85), ainsi que l'équation d'état du gaz parfait :

$$\begin{aligned} I_{E, \text{écoulement, net}} &= [(\bar{e} + P\bar{v})_{\text{in}} - (\bar{e} + P\bar{v})_{\text{out}}] I_n = \{[\bar{e}_{\text{in}} - \bar{e}_{\text{out}}] + [(P\bar{v})_{\text{in}} - (P\bar{v})_{\text{out}}]\} I_n \\ &= \{\bar{c}_v (T_{\text{in}} - T_{\text{out}}) + [(RT)_{\text{in}} - (RT)_{\text{out}}]\} I_n = [(\bar{c}_v + R)(T_{\text{in}} - T_{\text{out}})] I_n \\ &= \bar{c}_p (T_{\text{in}} - T_{\text{out}}) I_n = 3.5 \cdot 8.314 \text{ Ct mol}^{-1} (400 \text{ K} - 300 \text{ K}) 100 \text{ mol s}^{-1} = 291 \text{ kW} \end{aligned}$$

(c) Il faut établir les bilans d'entropie et d'énergie pour savoir si un tel processus est réalisable. Nous admettons être en régime stationnaire. Comme il y a un afflux net d'entropie, l'air doit être refroidi par un courant d'entropie d'intensité égale à -261 Ct s^{-1} . Si nous admettons une température moyenne de 350 K, le courant conductif d'énergie associé est approximativement de -100 kW .

■

11.9 SYSTÈMES OUVERTS AVEC EFFETS MÉCANIQUES

Il existe des systèmes ouverts dans lesquels des effets mécaniques jouent un rôle qui ne peut pas être négligé lors de la modélisation de leur comportement dynamique.

11.9.1 Équations de bilan

La figure 11.31 contient les termes supplémentaires, dus aux effets mécaniques, qui devront être pris en compte dans les équations de bilan.

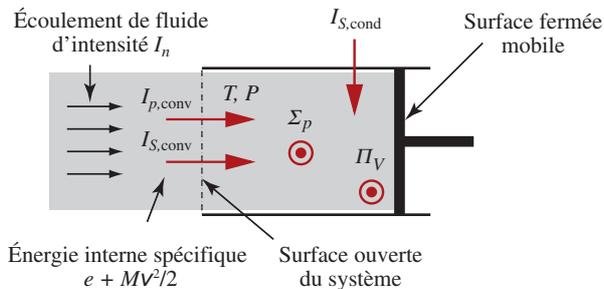


FIGURE 11.31 Fluide transportant de l'entropie et de la quantité de mouvement dans un système. Le fluide à l'intérieur du système peut être comprimé (Π_V) et chauffé ($I_{S,cond}$). Simultanément, il y a échange de quantité de mouvement lors d'interaction avec un champ (Σ_p).

Il s'agit des quatre grandeurs extensives qui participent au processus, à savoir la quantité de matière, l'entropie, le volume et la quantité de mouvement. Les équations de bilan sont celles de la section 11.8, adaptées au processus étudié. Ainsi, nous pouvons avoir par exemple :

$$\begin{aligned}
 \dot{n} &= I_n \\
 \dot{S} &= I_{S,conv} + I_{S,cond} \\
 \dot{V} &= \Pi_V \\
 \dot{p} &= I_{p,conv} + \Sigma_p
 \end{aligned}
 \tag{11.90}$$

La deuxième équation relative à l'entropie exprime le fait que le fluide transporte de l'entropie et qu'il y peut y avoir chauffage, ce qui est représenté par un flux conductif d'entropie. Nous avons admis qu'il n'y a pas de dissipation. Le troisième terme exprime les éventuelles variations de volume dues à la compression (ou détente) si on est en présence d'un fluide compressible. L'équation de bilan de la quantité de mouvement contient un terme relatif à la convection, ainsi qu'à l'interaction avec un champ, par exemple le champ de pesanteur. Un terme lié à la conduction qui tient compte de l'état de compression ou de détente du fluide (particulièrement important pour les gaz, peut être négligé pour les liquides) n'a pas été intégré dans cette équation de bilan.

L'équation de bilan de l'énergie intègre toutes les contributions dont il est question ci-dessus :

$$\dot{E} = I_{E, \text{écoulement}} + I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} + I_{E, \text{méc}} \quad (11.91)$$

11.9.2 Relations constitutives et courant d'énergie

Un des apports importants provient de l'énergie (spécifique ou molaire) du fluide. En plus du terme appelé énergie spécifique e ou molaire \bar{e} , il y a l'énergie du fluide en mouvement, calculée par unité de masse ou de quantité de matière. L'énergie cinétique par unité de masse est simplement la moitié du carré de la vitesse. L'énergie par unité de quantité de matière est égale à :

$$\bar{e} = \bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 \quad (11.92)$$

où \bar{u} est la *partie intrinsèque de l'énergie molaire* du fluide, dite *énergie interne molaire*. Cette partie représente l'énergie contenue dans le fluide lorsqu'il est immobile.

Au courant convectif d'entropie donné par l'équation (11.72), il faut ajouter un courant convectif de quantité de mouvement :

$$I_{p, \text{conv}} = \bar{p} I_n = M V I_n \quad (11.93)$$

Dans l'évaluation des flux d'énergie il faut, dans l'équation (11.82), remplacer \bar{e} par sa valeur donnée par la relation (11.92) :

$$I_{E, \text{écoulement}} = \left(\bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 + P \bar{v} \right) I_n \quad (11.94)$$

tenir compte du courant d'énergie lié au processus de compression ou de détente :

$$I_{E, \text{compr}} = -P \Pi_V \quad (11.95)$$

et du courant d'énergie mécanique :

$$I_{E, \text{méc}} = V \Sigma_p \quad (11.96)$$

11.9.3 Système ouvert en mouvement

Lorsque le système considéré est lui-même en mouvement, comme c'est le cas pour une fusée, lors de l'énoncé du bilan de quantité de mouvement :

$$\dot{p} = I_{p, \text{cond}} + \Sigma_p + I_{p, \text{conv}} \quad (11.97)$$

il faut tenir compte de la variation de la masse donnée par l'équation :

$$\dot{m} = I_m \quad (11.98)$$

La variation de la quantité de mouvement devient :

$$\dot{p} = m \dot{V} + V \dot{m} \quad (11.99)$$

Dans l'expression $p = mV$, il faut introduire les valeurs instantanées de la masse et de la vitesse du système et veiller à distinguer rigoureusement cette vitesse V du système de la vitesse d'écoulement du fluide V_{fluide} . Les vitesses d'écoulement qui entrent dans

le calcul des flux convectifs de quantité de mouvement doivent être mesurés dans le même référentiel que le système, par rapport au même observateur (fig. 11.32). Si v_{rel} est la vitesse du fluide par rapport au système, la vitesse du fluide par rapport à l'observateur est donnée par :

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (11.100)$$

et les flux convectifs de quantité de mouvement :

$$I_{p, \text{conv}} = \mathbf{v}_{\text{fluide}} I_m \quad (11.101)$$

EXEMPLE 11.9. Tir vertical d'une fusée.

Déterminez analytiquement l'évolution de la vitesse d'une fusée (fig. 11.33) avec un débit massique I_m constant et une vitesse d'éjection des gaz v_{rel} également constante pendant toute la durée du processus envisagé : (a) en l'absence de force extérieure ; (b) lors d'un tir vertical ; (c) établissez le modèle de dynamique des systèmes correspondant.

SOLUTION : (a) Les équations de bilan de la quantité de mouvement et de la masse sont :

$$\dot{p} = I_p = m\dot{v} + v\dot{m} \quad \text{et} \quad \dot{m} = -I_m$$

En vertu des équations (11.100) et (11.101), nous avons :

$$I_p = \mathbf{v}_{\text{fluide}} I_m = (\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) I_m$$

ce qui entraîne :

$$m\dot{v} = I_p - v\dot{m} = \mathbf{v} I_m + \mathbf{v}_{\text{rel}} I_m - v I_m = \mathbf{v}_{\text{rel}} I_m = v_{\text{rel}} \dot{m}$$

L'intégration de $m\dot{v} = v_{\text{rel}} \dot{m}$, à savoir $\int_{v_0}^v d\tilde{v} = v_{\text{rel}} \int_{m_0}^m \frac{d\tilde{m}}{\tilde{m}}$ donne :

$$v(t) = v_0 + |v_{\text{rel}}| \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Dans cette relation, la masse est la masse instantanée :

$$m(t) = m_0 - I_m t$$

(b) Lors d'un tir vertical, il faut prendre en compte l'influence de la gravité. Si on admet que l'altitude atteinte est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la pesanteur comme constante, l'évolution de la vitesse sera :

$$v(t) = v_0 + |v_{\text{rel}}| \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt$$

relation équivalente au taux de variation de l'altitude, $v(t) = dz/dt$, que l'on peut intégrer numériquement ou analytiquement. La figure 11.34 montre l'évolution de la vitesse et de l'altitude pour une fusée de masse initiale totale m_0 de 12 t, une masse de carburant de 9.6 t, une vitesse d'éjection des gaz v_{rel} de 2400 m s⁻¹ pour un débit massique I_m de 120 kg s⁻¹, ce qui donne une durée de combustion de 80 s. Les valeurs de la vitesse et de l'altitude à la fin de la combustion sont respectivement de 3078 m s⁻¹ et 83.37 km.

Si l'on tient compte de la variation de g en calculant sa valeur au moyen de la loi de la gravitation universelle, les valeurs finales sont alors 3099 m s⁻¹ et 83.77 km.

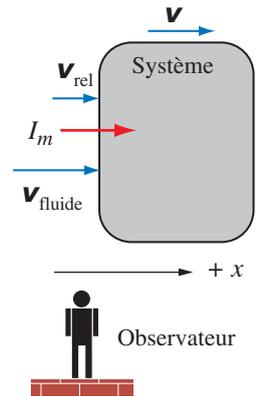


FIGURE 11.32 Toutes les vitesses doivent être exprimées par rapport au même observateur. Pour celui-ci, la vitesse du fluide est la somme vectorielle de la vitesse du système et de la vitesse relative du fluide par rapport au système.

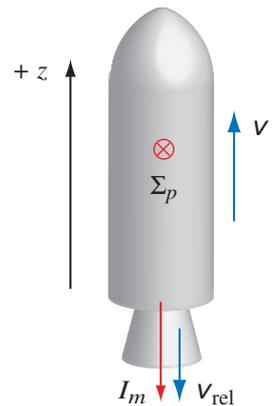


FIGURE 11.33 Une fusée tirée verticalement est soumise simultanément à la poussée engendrée par le flux massique des gaz et à la gravité.

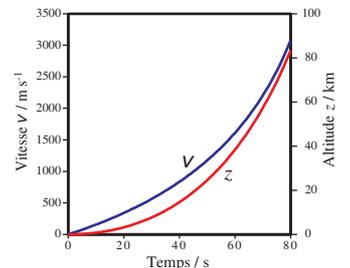


FIGURE 11.34 Lancement vertical d'une fusée : évolution de la vitesse v et de l'altitude z en fonction du temps.

(c) Les équations de bilan de la quantité de mouvement sont :

$$I_{p, \text{conv}} = (v_{\text{fusée}} - v_{\text{éjection}}) I_{m, \text{carburant}}$$

$$\Sigma_{p, \text{pesanteur}} = -m_{\text{fusée}} t$$

Pour obtenir la masse instantanée de la fusée, il faut tenir compte de l'évolution de la masse du carburant :

$$\dot{m}_{\text{carburant}} = I_{m, \text{carburant}}$$

à laquelle on ajoute la masse du lanceur.

L'altitude s'obtient par intégration de la vitesse instantanée.

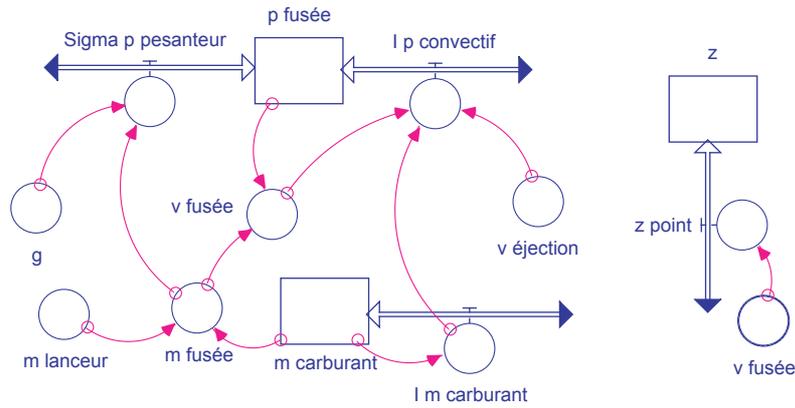


FIGURE 11.35 Modèle de dynamique des systèmes du lancement vertical d'une fusée sous l'hypothèse d'une pesanteur constante.

La figure 11.35 montre le diagramme de dynamique des systèmes correspondant. Les valeurs obtenues sont naturellement les mêmes que celle que donne la solution analytique. ■

EXEMPLE 11.10. Effets inductifs dans l'écoulement des fluides.

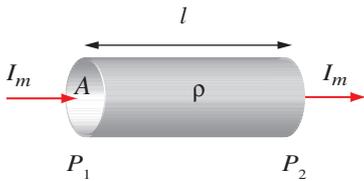


FIGURE 11.36 Les variations de la vitesse d'écoulement dans la conduite sont à l'origine d'une différence de pression entre ses extrémités : c'est le phénomène d'induction.

Justifiez les relations énoncées à la section 4.5.1 au sujet de la loi d'induction $\Delta P_L = -L_V \dot{I}_V$ pour un fluide incompressible sans frottement.

SOLUTION: L'équation de bilan pour un fluide incompressible de masse volumique ρ qui s'écoule sans frottement dans une conduite de section A et de longueur l (fig. 11.36) est :

$$\dot{p} = m\dot{v} + v\dot{m} = P_1 A - P_2 A + v_1 I_m - v_2 I_m$$

$$\dot{p} = m\dot{v} + v\dot{m} = P_1 A - P_2 A + v_1 I_m - v_2 I_m$$

Comme la section est constante et le fluide incompressible, nous avons $v_1 = v_2$; en outre, la masse est constante ($\dot{m} = 0$). Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{p} = m\dot{v} = -(P_2 - P_1) A = -\Delta P_L A$$

et, si nous exprimons la vitesse en tant que quotient du flux volumique et de la section :

$$m \left(\frac{1}{A} I_V \right) \dot{} = \frac{\rho V}{A} \dot{I}_V = -\Delta P_L A$$

Vu que $V = Al$, nous obtenons :

$$\Delta P_L = -\frac{\rho l}{A} \dot{I}_V = -L_V \dot{I}_V$$

ce qui justifie l'énoncé de la loi d'induction par l'équation (4.2) et la valeur de l'inductance mécanique par l'expression (4.11) de la section 4.5.1. ■

11.9.4 Processus d'écoulement et potentiel chimique d'un fluide

L'utilisation du potentiel chimique permet de représenter d'une autre manière le flux d'énergie qui accompagne un écoulement. À la section 6.6.1, nous avons affirmé que les transports de substance étaient accompagnés d'un flux d'énergie donné par l'équation (6.52) : $I_E = \mu I_n$. Nous voulons déterminer quels sont les facteurs qui constituent le potentiel chimique d'un écoulement. Nous rassemblons les informations de la section précédente dans l'équation de bilan de l'énergie :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= I_{E, \text{écoulement}} + I_{E, \text{therm}} + I_{E, \text{compr}} + I_{E, \text{méc}} \\ &= \left(\bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 + P \bar{v} \right) I_n + T I_{S, \text{cond}} - P \Pi_V + v \Sigma_p \\ &= \left(\bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 + P \bar{v} \right) I_n + T \left(\dot{S} - I_{S, \text{conv}} \right) - P \dot{V} + v \left(\dot{p} - I_{p, \text{conv}} \right) \\ &= \left(\bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 + P \bar{v} - T \bar{s} - M v^2 \right) I_n + T \dot{S} - P \dot{V} + v \dot{p} \\ &= \left(\bar{u} + P \bar{v} - T \bar{s} - \frac{1}{2} M V^2 \right) I_n + T \dot{S} - P \dot{V} + v \dot{p} \end{aligned}$$

En tant que facteur du flux de quantité de matière, le contenu de la première parenthèse représente le potentiel chimique du fluide, ce qui entraîne :

$$\dot{E} = \mu \dot{n} + T \dot{S} - P \dot{V} + v \dot{p} \quad (11.102)$$

avec

$$\mu = \bar{u} + P \bar{v} - T \bar{s} - \frac{1}{2} M V^2 \quad (11.103)$$

Les trois premiers termes représentent la partie intrinsèque du potentiel chimique d'un fluide, alors que le quatrième prend en compte la contribution due à son écoulement. L'équation (11.103) révèle que le potentiel chimique du fluide décroît lorsque sa vitesse augmente.

Relation fondamentale de GIBBS. La relation fondamentale de GIBBS (11.102) peut être exprimée au moyen des grandeurs molaires qui sont :

$$E = \left(\bar{u} + \frac{1}{2} M V^2 \right) n, \quad S = \bar{s} n, \quad V = \bar{v} n, \quad p = \bar{p} n \quad (11.104)$$

L'introduction de ces grandeurs dans l'équation (11.102) donne :

$$\left[\dot{E} + M v \dot{V} - T \dot{S} + P \dot{V} - v \dot{p} \right] n = \left[\mu - \left(+ \frac{1}{2} M V^2 \right) - P \bar{v} + T \bar{s} + v \bar{p} \right] \dot{n}$$

Comme n et sa dérivée temporelle peuvent varier de manière indépendante, l'égalité ne peut être vérifiée que si les expressions entre crochets s'annulent. Le membre de droite correspond au potentiel chimique de l'équation (11.103), alors que le membre de gauche exprime la forme fondamentale de GIBBS au moyen de grandeurs molaires :

$$\dot{e} = T\dot{s} - P\dot{v} \quad (11.105)$$

1. Les termes $P\bar{v}I_n$ et $P\bar{I}_V$ dans les équations (11.94) et (11.95) sont-ils dus au même processus ou se réfèrent-ils à des phénomènes différents?
2. Lorsque l'on maintient un gaz sous pression, de la quantité de mouvement s'écoule à travers sa surface. Pourquoi peut-on négliger les effets mécaniques dans ce cas?



1. Ils se réfèrent à des processus différents, à savoir pousser le fluide d'une part et le comprimer d'autre part.
2. Le maintien de la pression n'entraîne pas un mouvement du centre de masse.



EXEMPLE 11.11. Équation de BERNOULLI.

À partir du bilan d'énergie, déduire l'équation de BERNOULLI pour un tube de courant sans frottement, de section variable, dont les deux extrémités se trouvent à des hauteurs différentes (fig. 11.37).

SOLUTION: Dans ce système ouvert, les flux d'énergie ont lieu à l'entrée et à la sortie, mais pas à travers les parois (pas de frottement). De ce fait, les flux d'énergie entrant et sortant sont égaux. Nous utilisons les résultats de la section 11.9.4, en remplaçant le potentiel chimique μ par le potentiel gravitochimique μ_{GC} que nous avons introduit à la section 6.6.4 au moyen de l'équation (6.58). Le flux d'énergie devient :

$$\begin{aligned} I_E &= vI_{p,conv} + \mu_{GC}I_n = vI_{p,conv} + (\mu + M\phi_G)I_n \\ &= v \cdot vI_m + \left[\bar{u} + P\bar{v} - T\bar{s} - \frac{1}{2}Mv^2 + Mgz \right] \frac{1}{M} I_m \\ &= \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\rho}P + gz + u - Ts \right] I_m \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus est constante le long de l'écoulement. Vu que, pour des fluides incompressibles, l'énergie interne ne dépend que de la température, que celle-ci ne dépend que de l'entropie, et que cette dernière est constante (pas de frottement), les termes u et Ts se compensent lors de la formation de la différence. Nous avons donc :

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\rho}P + gz \right]_1 I_m = \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\rho}P + gz \right]_2 I_m$$

Nous multiplions les deux termes par la masse volumique ρ pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gz_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho gz_2$$

C'est la loi de BERNOULLI pour un fluide parfait. ■

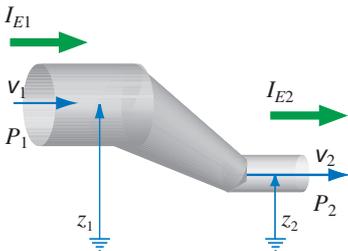


FIGURE 11.37 La loi de conservation de l'énergie permet, par comparaison des flux d'énergie entrant et sortant, d'obtenir la loi de BERNOULLI.

EXEMPLE 11.12. Répartition de la pression dans une atmosphère isotherme.

Justifiez la relation (1.23) de la section 1.5.1 en déterminant de quelle manière la pression varie dans une atmosphère isotherme.

SOLUTION: Une atmosphère isotherme est à l'équilibre, le potentiel gravitationnel est donc constant :

$$\begin{aligned}\mu_{GC1} &= \mu_{GC2} \\ [\mu + M\varphi_G]_1 &= [\mu + M\varphi_G]_2 \\ [\mu + Mgz]_1 &= [\mu + Mgz]_2\end{aligned}$$

La constance du potentiel gravitochimique implique que le potentiel chimique :

$$\mu = \bar{u} + P\bar{v} - T\bar{s} - \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 = -Mgz$$

diminue linéairement avec l'altitude. Cette variation du potentiel chimique est due à la variation de ses termes. Comme l'atmosphère est à l'équilibre et isotherme, son énergie interne et sa température ne varient pas ; il n'y a pas de production d'entropie, et le terme cinétique est nul (pas de convection). Nous avons donc :

$$d\mu = dP \cdot \bar{v}_m - P \cdot d\bar{v}_m = Mg \cdot dz$$

Or, le volume molaire est constant. Nous obtenons :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{\bar{v}}$$

Si nous envisageons l'atmosphère comme un gaz parfait : $P\bar{v} = RT$, la substitution de cette relation dans l'équation précédente donne :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT} P$$

équation différentielle dont la solution est :

$$P(z) = P_0 \cdot e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

Cette relation est usuellement appelée formule barométrique. ■

11.10 IRRÉVERSIBILITÉ DANS LES SYSTÈMES D'ÉCOULEMENT

Quel que soit le système considéré, on y rencontre toujours des sources d'irréversibilité. Les fluides en mouvement sont soumis à des frottements, mais également à des processus irréversibles typiques qui se produisent dans des fluides au repos, tels que absorption de rayonnement, réactions chimiques, diffusion de charge électrique, de chaleur et de substances. Dans des systèmes d'écoulement, il existe un processus supplémentaire qui produit de l'entropie, le *mélange de fluides* à différentes températures et pressions, ce que nous allons étudier dans cette section.

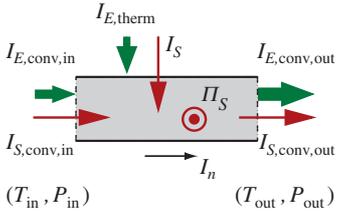


FIGURE 11.38 Chauffage à écoulement : un fluide s'écoule à travers une conduite (courant I_n). Le chauffage est quantifié par I_S , $I_{E,therm}$. Le fluide pénètre avec les valeurs (T_{in}, P_{in}) et émerge à (T_{out}, P_{out}) .

11.10.1 Analyse d'un chauffage à écoulement

Considérons un fluide tel que de l'air ou de l'eau qui s'écoule à travers une conduite qui est chauffée. Le chauffage peut être d'origine solaire, comme dans les capteurs solaires thermiques, ou conventionnel par combustion de fuel ou au moyen de chauffage électrique (fig. 11.38). Le flux d'entropie I_S est accompagné d'un flux d'énergie $I_{E,therm}$. À l'entrée de la conduite, le fluide est à la température T_{in} et à la pression P_{in} , il en émerge avec les valeurs respectives T_{out} et P_{out} .

Bilans en régime stationnaire. Si le chauffage fonctionne en régime stationnaire, les équations de bilan de l'entropie et de l'énergie sont :

$$0 = I_S + I_{S,conv,in} + I_{S,conv,out} + \Pi_S \quad (11.106)$$

$$0 = I_{E,therm} + I_{E,flux,in} + I_{E,flux,out} \quad (11.107)$$

Dans le bilan d'énergie, le courant dû au chauffage est considéré comme connu. Les expressions relatives au flux d'énergie sont données par les équations (11.82) et (11.84):

$$I_{E,therm} + \bar{c}_V (T_{in} - T_{ref}) I_n + P_{in} \bar{v}_{in} I_n = \bar{c}_V (T_{out} - T_{ref}) I_n + P_{out} \bar{v}_{out} I_n$$

ce qui revient à :

$$I_{E,therm} = \bar{c}_V (T_{out} - T_{in}) I_n + (P_{out} \bar{v}_{out} - P_{in} \bar{v}_{in}) I_n \quad (11.108)$$

Fluides incompressibles. La dernière relation peut être adaptée au cas de fluides incompressibles tels que l'eau. Dans ce cas, le coefficient de température de l'énergie est c , et les volumes molaires spécifiques sont identiques aux deux extrémités de la conduite. En régime stationnaire, le courant d'énergie dû au chauffage doit par conséquent être égal à :

$$I_{E,therm} = \bar{c} (T_{out} - T_{in}) I_n + (P_{out} - P_{in}) \bar{v} I_n \quad (11.109)$$

Nous pouvons maintenant déterminer le taux de production de l'entropie à partir de l'équation (11.106):

$$\Pi_S = -(I_S + I_{S,conv,in} + I_{S,conv,out})$$

Après substitution des équations (11.109) et (11.73), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Pi_S = & -\frac{1}{T_{out}} \left(\bar{c} (T_{out} - T_{in}) I_n + (P_{out} - P_{in}) \bar{v} I_n \right) \\ & - \left(\bar{c} \ln \left(\frac{T_{in}}{T_{ref}} \right) - \bar{c} \ln \left(\frac{T_{out}}{T_{ref}} \right) \right) I_n \end{aligned}$$

et finalement :

$$\Pi_S = \frac{1}{T_{out}} \left[\bar{c} (T_{in} - T_{out}) - T_{out} \bar{c} \ln \left(\frac{T_{in}}{T_{out}} \right) + \bar{v} (P_{in} - P_{out}) \right] I_n \quad (11.110)$$

Gaz parfait. Pour un gaz simple, l'analyse se déroule de manière analogue. Nous utilisons l'équation d'état des gaz parfaits, $PV = nRT$, ou $Pv = RT$. L'équation (11.109) devient :

$$\begin{aligned} I_{E,\text{therm}} &= \bar{c}_V (T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) I_n + (RT_{\text{out}} - RT_{\text{in}}) I_n \\ &= (\bar{c}_V + R)(T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) I_n \end{aligned}$$

Avec l'équation (11.85), nous obtenons :

$$I_{E,\text{therm}} = \bar{c}_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) I_n \quad (11.111)$$

Cette relation est intéressante, car elle nous apprend que si la température d'un volume de gaz parfait passe de T_{in} à T_{out} et sa pression de P_{in} à P_{out} , la quantité d'énergie transférée ne dépend que de la différence de température multipliée par le coefficient de température de l'enthalpie.

Évaluons maintenant le taux de production d'entropie pour ce processus :

$$\Pi_S = -(I_S + I_{S,\text{conv,in}} + I_{S,\text{conv,out}})$$

L'insertion des relations constitutives donne :

$$\begin{aligned} \Pi_S &= -\frac{1}{T_{\text{out}}} I_{E,\text{therm}} - \left(-R \ln \left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{ref}}} \right) + \bar{c}_p \ln \left(\frac{T_{\text{in}}}{T_{\text{ref}}} \right) \right) I_n \\ &\quad + \left(-R \ln \left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{ref}}} \right) + \bar{c}_p \ln \left(\frac{T_{\text{out}}}{T_{\text{ref}}} \right) \right) I_n \end{aligned}$$

Après substitution des relations (11.111) et (11.74), nous obtenons :

$$\Pi_S = -\frac{1}{T_{\text{out}}} \bar{c}_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) I_n - \left(-R \ln \left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \right) + \bar{c}_p \ln \left(\frac{T_{\text{in}}}{T_{\text{out}}} \right) \right) I_n \quad (11.112)$$

Mélange et production d'entropie dans les systèmes d'écoulement. L'application à un chauffage à écoulement du bilan d'entropie avec taux de production nécessite une explication. Si, dans une situation réelle, nous négligeons le frottement du fluide ou d'autres processus produisant de l'entropie, il n'y a pas de dissipation dans le système. Pourquoi avons-nous une production d'entropie dans l'équation de bilan ?

La raison est due à la forme particulière du modèle utilisé. Contrairement à la situation réelle dans laquelle la température du fluide est une fonction de la position dans la direction de l'écoulement, dans le modèle de la figure 11.38, nous admettons que le fluide a une température unique T , celle que l'on mesure à la sortie de la conduite, $T = T_{\text{out}}$. En d'autres termes, il y a dans la conduite un fluide chaud, bien mélangé, auquel on ajoute du fluide froid à l'entrée. Ces deux fluides sont immédiatement mélangés, ce qui entraîne une production d'entropie, processus que nous allons maintenant analyser.

11.10.2 Mélange et dissipation

Les systèmes de stockage de chaleur (d'entropie) par des fluides tels que l'eau ou des gaz jouent un rôle important autant dans la vie quotidienne que dans le monde industriel. Nous allons considérer le remplissage d'éléments de stockage pour présenter un

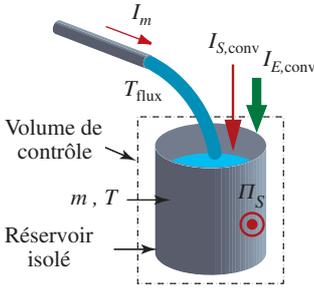


FIGURE 11.39 Un liquide à la température T_{flux} s'écoule vers un réservoir contenant une masse m du même liquide à la température T . Le flux massique a une intensité égale à I_m .

modèle de système dynamique incluant des apports par convection. Cela nous permettra de formuler les relations pour le taux de production d'entropie résultant du mélange de fluides.

Nous envisageons un écoulement d'eau à la température T_{flux} vers un réservoir comme le montre la figure 11.39. L'intensité du flux massique est I_m . Une masse m d'eau à la température T est déjà présente dans le réservoir. Cet afflux de fluide provoque une augmentation de la masse, de l'entropie et de l'énergie dans le volume de contrôle. Le mélange de deux fluides à différentes températures est un processus dissipatif. Nous nous intéressons à l'évolution de la température en fonction du temps et du taux de production d'entropie. Pour simplifier l'étude, nous supposons que la pression du flux entrant est égale à celle du liquide dans le réservoir, ce qui nous permet de ne pas tenir compte de la production d'entropie qui serait due au frottement engendré par la détente du flux entrant.

Équations de bilan. Il y a une équation de bilan pour chacune des trois grandeurs extensives de notre modèle :

$$\dot{m} = I_m \quad (11.113)$$

$$\dot{S} = I_{S, \text{conv}} + \Pi_S \quad (11.114)$$

$$\dot{E} = I_{E, \text{conv}} \quad (11.115)$$

De possibles déperditions de chaleur du réservoir sont négligées. En tant que grandeurs extensives, l'entropie et l'énergie sont proportionnelles à la quantité de matière contenue dans le système : $S = ms$ et $E = me$ (équations (11.68) et (11.75)). Leur évolution dans le temps est donnée par la dérivée temporelle de ces produits :

$$m\dot{s} + s\dot{m} = I_{S, \text{conv}} + \Pi_S \quad (11.116)$$

$$m\dot{e} + e\dot{m} = I_{E, \text{conv}} \quad (11.117)$$

Les lois constitutives pour les courants convectifs et pour les entropie et énergie spécifiques de fluides incompressibles ont été établies aux sections 11.6.3 et 11.7. Après avoir isolé le taux de production d'entropie à partir de l'équation (11.116), nous utilisons l'équation (11.71) pour remplacer $I_{S, \text{conv}}$, l'équation (11.73) pour exprimer l'entropie spécifique et remplaçons le taux de variation de la masse par I_m . Le taux de variation de l'entropie spécifique est remplacé par l'équation (11.105) dans laquelle la contribution de la pression est négligée. L'équation (11.117) fournit le taux de variation de l'énergie spécifique, celle-ci étant exprimée par l'équation (11.83) :

$$\begin{aligned} \Pi_S &= m\dot{s} + s\dot{m} - I_{S, \text{conv}} = m\dot{s} + s\dot{m} - sI_m = m\dot{s} + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{réf}}}\right) I_m - c \ln\left(\frac{T_{\text{flux}}}{T_{\text{réf}}}\right) I_m \\ &= m \frac{1}{T} \dot{e} + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{flux}}}\right) I_m = \frac{1}{T} (I_{E, \text{conv}} - em\dot{m}) + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{flux}}}\right) I_m \\ &= \frac{1}{T} [c(T_{\text{flux}} - T_{\text{réf}}) I_m - c(T - T_{\text{réf}}) I_m] + c \ln\left(\frac{T}{T_{\text{flux}}}\right) I_m \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\Pi_s = \left[\frac{1}{T} (T_{\text{flux}} - T) - \ln \left(\frac{T_{\text{flux}}}{T} \right) \right] cJ_m \quad (11.118)$$

Ce résultat est équivalent à celui de l'équation (11.112) sans la prise en compte du terme lié à la pression.

1. De l'air ou de l'eau s'écoule à travers un chauffage à écoulement libre (sans mélange ni frottement); pourquoi le processus est-il réversible? Ne considérez que le fluide dans le chauffage en tant que système. Pourquoi obtenons-nous un taux de production d'entropie non nul dans notre analyse du chauffage écoulement de la figure 11.38 et des équations (11.110) et (11.112)?
2. Pourquoi le terme relatif à la pression, présent dans l'équation (11.110) est-il absent de l'équation (11.118)?
3. Comment le système de la figure 11.39 devrait-il être modifié pour inclure l'effet sur la production d'entropie d'une différence de pression entre le fluide entrant et le fluide stocké?

Q

1. Le transfert d'entropie est réversible car le fluide reçoit l'entropie à la bonne température partout dans le système. Dans notre modèle, la dissipation est due au fait que nous traitons le fluide en tant que système uniforme.
2. Parce que le fluide entrant dans le système est à la même température que le fluide déjà présent.
3. Il faudrait injecter le fluide à travers une vanne qui modifie la pression du fluide entrant.

R

11.11 ÉVAPORATION

L'évaporation est une vaporisation lente dans l'air environnant à partir d'une quantité d'eau relativement grande. Nous allons consacrer cette section à l'étude de l'évaporation et de la condensation de l'eau, et du mélange de la vapeur d'eau et de l'air d'un point de vue dynamique. Ces processus sont importants, autant dans la nature (évaporation à partir de la surface des océans, des sols, des plantes), dans le génie chimique (où l'on fait s'évaporer des substances) que dans les tours de refroidissement ou dans la climatisation de l'air.

11.11.1 Évaporation et diffusion de vapeur d'eau dans l'air

Envisageons un volume d'eau surmonté d'air immobile. Si l'air n'est pas saturé, le potentiel chimique de l'eau est supérieur à celui de la vapeur d'eau, ce qui entraîne un transfert supplémentaire de vapeur vers l'air. De ce fait, la concentration de la vapeur sera plus importante dans les couches adjacentes à la surface du liquide que dans les régions qui en sont éloignées. La vapeur va donc diffuser verticalement vers les régions où l'air est moins humide (fig. 11.40).

Le processus se poursuit jusqu'à saturation de l'air au-dessus du liquide. Usuellement, cette vapeur est éliminée dans un espace ouvert, et l'évaporation se poursuit tant qu'il

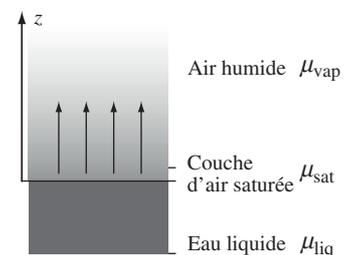
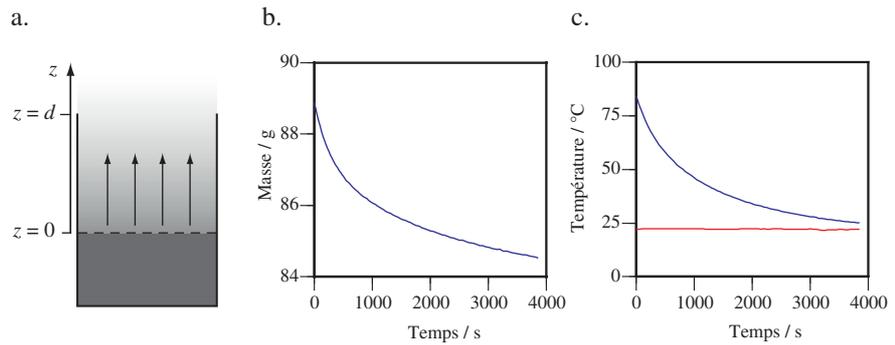


FIGURE 11.40 L'évaporation à partir d'un volume d'eau peut être comprise comme la diffusion de vapeur d'eau d'une couche d'air saturée proche de la surface de l'eau vers des endroits où l'air n'est pas saturé.

reste du liquide. Notons que l'évaporation ne dépend pas du fait que l'eau est plus chaude que l'air environnant. Elle peut également être présente si le liquide est plus froid que l'air. Ce qui est nécessaire, c'est que la concentration de vapeur d'eau près de la surface de l'eau soit plus élevée que pour les points plus éloignés de celle-ci.

Évaporation d'eau chaude: un modèle simple. On verse de l'eau chaude dans un verre placé sur une balance. La surface libre de l'eau est à une distance d du bord du verre (fig. 11.41a). On mesure la masse, la température de l'eau et de l'air ainsi que l'humidité relative en fonction du temps. La température diminue (fig. 11.41c) à cause du refroidissement dû essentiellement à l'évaporation: la masse d'eau diminue rapidement lorsque la température est élevée pour s'approcher d'une valeur quasi constante lorsque la température de l'eau est proche de celle de l'air (fig. 11.41b).

FIGURE 11.41 Évaporation d'eau chaude dans un récipient ouvert: (a) configuration expérimentale; (b) évolution de la masse; (c) évolution de la température. L'humidité relative était de 0.20 durant l'expérience.



Si nous admettons que l'évaporation est due à la diffusion à travers l'air de la vapeur à partir de la surface du liquide, nous pouvons énoncer une relation simple pour le flux de la quantité de matière, comme à la section 6.7:

$$I_{n, \text{vap}} = -Ah_{\text{vap}}(\bar{c}_d - \bar{c}_0) \tag{11.119}$$

La grandeur \bar{c} représente la concentration de vapeur dans l'air aux positions respectives $z = 0$ et $z = d$. h_{vap} est le coefficient de transfert pour la quantité de matière et A la section à la surface de l'eau. Si nous traitons la vapeur en tant que gaz parfait, sa concentration est proportionnelle à sa pression partielle. De ce fait, l'équation (11.119) devient:

$$I_{n, \text{vap}} = -\frac{Ah_{\text{vap}}}{RT_{\text{air}}}(\phi P_{\text{sat}}(T_{\text{air}}) - P_{\text{sat}}(T_{\text{eau}})) \tag{11.120}$$

P_{sat} est la pression de saturation et ϕ l'humidité relative. Dans ce modèle simple, nous admettons que la vapeur est toujours à la température de l'air T_{air} , même près de la surface de l'eau qui est à la température T_{eau} . Dans la couche qui surmonte le volume d'eau, l'air est saturé. Le coefficient de transfert h_{vap} dépend de la profondeur à laquelle se trouve la surface libre de l'eau et de la diffusivité de la vapeur dans l'air.

Si l'on utilise les valeurs mesurées de la température (fig. 11.41b) pour calculer le flux de masse $I_{m, \text{vap}} = M_{\text{vap}}I_{n, \text{vap}}$, qui émane de la surface de l'eau, nous obtenons la ligne discontinue de la figure 11.42. À première vue, l'adéquation aux valeurs mesurées est relativement bonne, mais exhibe un comportement différent. Il est donc nécessaire d'inclure dans le modèle les variations spatiales des conditions dans le récipient.

Diffusion de vapeur dans l'air. Nous devons comprendre quels types de transport se déroulent dans la colonne d'air surmontant le volume d'eau. Nous admettons que les variations n'ont lieu que dans la direction verticale et que le processus est stationnaire.

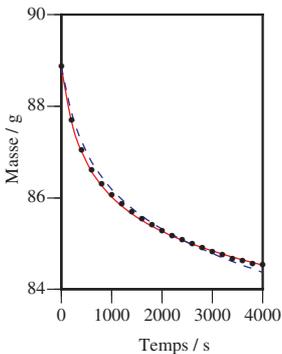


FIGURE 11.42 Évaporation d'eau chaude dans un récipient ouvert. Les points correspondent aux valeurs de la masse résiduelle d'eau. La ligne discontinue correspond au modèle de l'équation (11.120). La ligne continue est celle que l'on obtient à partir du modèle de l'équation (11.128).

Il y a tout d'abord un flux conductif (diffusion) de vapeur d'eau que nous représenterons par une densité de courant j_{nvap} (fig. 11.43). Dans ce mélange de gaz (vapeur d'eau et air sec), si l'une des composantes diffuse dans une direction, l'autre doit le faire dans la direction opposée si l'état est stationnaire. Nous avons donc une densité de courant d'air sec représentée par j_{nair} . Les intensités des flux sont indépendantes de la position z , vu que nous considérons le régime stationnaire. Les deux densités sont liées entre elles par :

$$j_{nvap}(z) = -j_{nair}(z) \quad (11.121)$$

Comme cet air ne peut pas s'accumuler à la surface de l'eau, nous devons admettre l'existence d'un flux convectif d'air humide qui compense l'arrivée de l'air sec :

$$j_{nair, conv}(z) = -j_{nvap}(z) \quad (11.122)$$

De la vapeur d'eau est transportée vers le haut par ce flux convectif d'air. Comme la quantité de vapeur dans l'air correspond à la fraction molaire de la quantité d'air humide, nous avons :

$$j_{nvap, conv}(z) = \bar{x}_{vap} (j_{nair, conv}(z) + j_{nvap}(z)) \quad (11.123)$$

car le courant d'air humide est égal à la somme des courants d'air et de vapeur. La densité de courant de vapeur totale est la somme de la contribution diffusive (11.121) et de la contribution convective (11.123), ce qui donne finalement :

$$j_{nvap, tot}(z) = \frac{1}{1 - \bar{x}_{vap}} j_{nvap}(z) \quad (11.124)$$

Nous devons maintenant introduire les relations constitutives. La densité de courant de vapeur par diffusion peut être reprise de la section 6.7.2 :

$$j_{nvap}(z) = -D \frac{\partial \bar{c}_{vap}}{\partial z} \quad (11.125)$$

La diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air est d'environ $2.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 300 K. La concentration de vapeur d'eau peut être exprimée en termes de pression à partir de la loi des gaz parfaits :

$$\bar{c}_{vap}(z) = \frac{1}{RT_{air}} P_{vap}(z) \quad (11.126)$$

Dans des situations isothermes, la température est partout égale à la température ambiante. Si nous substituons les équations (11.125) et (11.126) dans l'équation (11.124) et intégrons l'équation différentielle du premier ordre entre $z = 0$ et $z = d$, en nous souvenant que les densités de courant sont constantes, nous obtenons :

$$I_{nvap} = D \frac{P}{RT_{air}} \frac{A}{d} \ln \left(\frac{P - P_{vap, a}}{P - P_{sat}} \right) \quad (11.127)$$

A est la section du récipient, et $P_{vap, a}$ et P_{sat} sont respectivement la pression de vapeur dans l'air loin du récipient (donnée par sa température et son humidité relative) et la pression de saturation à la même température.

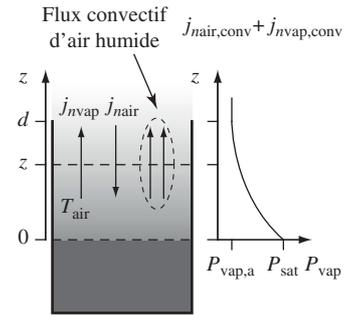


FIGURE 11.43 Évaporation d'eau chaude dans un récipient ouvert avec prise en compte des différents courants de vapeur et d'air. Le diagramme dans la partie droite montre l'évolution de la pression de vapeur dans la colonne d'air.

Évaporation d'eau très chaude. Revenons à l'expérience décrite dans la figure 11.41. L'eau est plus chaude que l'environnement pour toute la durée de l'expérience, ce qui veut dire que nous n'avons pas des conditions isothermes, comme nous l'avons admis dans le modèle ci-dessus. Si nous admettons que la colonne d'air au-dessus de l'eau est à la température T_{air} et que l'eau est à la température T_{eau} , nous pouvons utiliser la relation (11.127) pour obtenir le résultat :

$$I_{\text{nvap}} = D \frac{P}{RT_{\text{air}}} \frac{A}{d} \ln \left(\frac{P - P_{\text{vap, a}}(T_{\text{air}})}{P - P_{\text{sat}}(T_{\text{eau}})} \right) \quad (11.128)$$

Il est intéressant de noter que la dépendance par rapport à la pression exprimée par cette équation permet une bonne adéquation aux données expérimentales, comme le montre la ligne continue de la figure 11.42. Toutefois, pour assurer cette correspondance, il a fallu multiplier l'intensité du courant apparaissant dans l'équation (11.128) par un facteur proche de 10. Si la forme de l'équation (11.128) semble convenir pour décrire l'évaporation d'eau chaude dans un récipient ouvert, l'intensité des flux est nettement plus importante que ce que prédit le modèle. En outre, des expériences avec des profondeurs différentes n'ont pas révélé la dépendance par rapport à d attendue en vertu des équations (11.127) et (11.128). La vapeur condense sur la paroi intérieure du récipient et s'évapore à nouveau à différentes hauteurs et rejoint la vapeur émanant de la surface du liquide. Cela pourrait expliquer les différences.

11.11.2 Refroidissement par évaporation

Le refroidissement par évaporation peut être envisagé de deux manières. D'une part, les corps solides ou liquides se refroidissent si un liquide s'évapore de leur surface; la transpiration en est un exemple quotidien. D'autre part, nous pouvons nous intéresser à l'air qui est impliqué dans le processus et qui absorbe la vapeur; sa température diminue. Ce processus est utilisé dans le conditionnement de l'air. Nous allons illustrer ce thème par l'étude du refroidissement d'eau froide dans un récipient ouvert.

Évaporation d'eau froide. De l'eau à la même température que l'environnement peut se refroidir par évaporation si elle se trouve dans un récipient bien isolé ouvert au sommet.

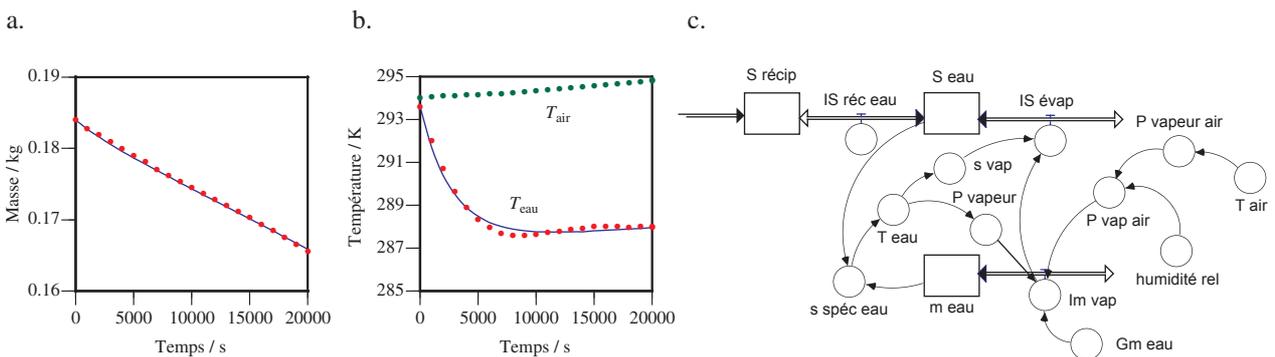


FIGURE 11.44 Évaporation d'eau froide dans un récipient assez bien isolé, ouvert au sommet: (a) évolution de la masse en fonction du temps; (b) évolution de la température (points) en fonction du temps (l'humidité relative durant l'expérience était de 0.15); (c) diagramme du modèle dynamique (certaines parties - dans la partie gauche du modèle - n'apparaissent pas dans la figure).

Ce phénomène est utilisé dans les climats secs et chauds pour rafraîchir l'eau en la conservant dans des amphores dont on mouille la paroi extérieure et en utilisant des éventails pour maintenir un courant d'air autour de ces récipients humides.

Considérons une expérience et un modèle qui vont nous permettre de traiter ce genre de situation. On verse de l'eau ayant approximativement la température ambiante dans un récipient isolé, ouvert au sommet. On place le tout sur une balance et l'on mesure l'évolution dans le temps de la température de l'eau et de l'air, et l'humidité relative de l'environnement (fig. 11.44a et b). Dans notre modèle, nous devons prendre en compte l'entropie et la masse de l'eau et l'entropie du récipient (la dynamique du récipient doit être prise en compte si nous voulons atteindre une bonne adéquation entre le modèle et les données expérimentales (fig. 11.44b)).

$$\begin{aligned}\dot{S}_{\text{eau}} &= -I_{S, \text{évap}} - I_{S, \text{cond}} \\ \dot{m}_{\text{eau}} &= -I_{m, \text{évap}}\end{aligned}\quad (11.129)$$

$$\dot{S}_{\text{récip}} = -I_{S, \text{récip-air}} + I_{S, \text{cond}} \quad (11.130)$$

Notons qu'il faudrait également tenir compte d'un courant conductif d'entropie allant directement de l'eau à l'air ou vice versa, mais il se révèle que son influence peut être négligée.

Quelles sont les lois constitutives? Vu que les différences de température sont faibles, nous avons négligé la production d'entropie due au transfert conductifs, et nous avons opéré avec des modèles de transport linéaires. En particulier, le flux d'eau s'évaporant de la surface de l'eau dans le récipient est modélisé comme dans l'équation (11.120):

$$I_{m, \text{vap}} = -G_{m, \text{vap}} \left(\phi P_{\text{sat}}(T_{\text{air}}) - P_{\text{sat}}(T_{\text{eau}}) \right) \quad (11.131)$$

où ce sont les flux de masse qui sont pris en considération. $G_{m, \text{vap}}$ est une conductance liée au transport de masse. Les flux convectifs d'entropie sont formulés de manière semblable. La température de l'eau dans son récipient peut être calculée à partir de son entropie spécifique. Les grandeurs manquantes peuvent être calculées conjointement avec les expressions pour la pression de vapeur et l'entropie spécifique de la vapeur. Ainsi, la relation pour le courant d'entropie par évaporation est:

$$I_{S, \text{évap}} = s_{\text{vap}} I_{m, \text{vap}} \quad (11.132)$$

où s_{vap} représente l'entropie spécifique de la vapeur qui émane du volume d'eau. Le modèle rend bien compte des données expérimentales (fig. 11.44b).

1. Sur quel type de raisonnement l'équation (11.119) est-elle basée?
2. Pourquoi les flux dans la figure 11.43 sont-ils indépendants de z ?
3. Pourquoi est-il possible de négliger la production d'entropie dans le modèle de la figure 11.44?



1. Sur le fait que l'évaporation est considérée comme un processus de diffusion (donc de type conductif) de la vapeur d'eau à travers l'air, comme la conduction de la charge ou de l'entropie.
2. Parce qu'il s'agit de flux unidimensionnels, en régime stationnaire, d'espèces qui ne réagissent pas entre elles.



3. Parce que les différences de température sont très faibles.

EXEMPLE 11.13. Transfert de masse et d'entropie lors du refroidissement par évaporation.

Utilisez les résultats de l'expérience de la figure 11.44 pour estimer (a) la conductivité pour la masse lors du processus d'évaporation et (b) la conductivité globale d'entropie du récipient.

SOLUTION: (a) Nous nous basons sur la situation à $t = 15000$ s, lorsque les processus ont atteint un état quasi-stationnaire. On observe dans la fig. 11.44a que le courant de masse est presque constant avec une valeur de $(0.184 \text{ kg} - 0.165 \text{ kg}) / 20000 \text{ s} = 9.5 \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-1}$. Nous utilisons l'équation (11.131) pour calculer la conductivité de masse :

$$G_{m, \text{vap}} = \frac{I_{m, \text{vap}}}{\varphi P_{\text{sat}}(T_{\text{air}}) - P_{\text{sat}}(T_{\text{eau}})} = \frac{9.5 \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-1}}{0.15 \cdot 2550 \text{ Pa} - 1700 \text{ Pa}} = 7.2 \cdot 10^{-10} \text{ kg Pa}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Les températures de l'air (21.5°C) et de l'eau (15°C) ont été lues dans la figure 11.44b et les valeurs correspondantes de la pression de saturation ont été extraites d'une table.

(b) En régime stationnaire, le flux d'entropie par conduction est égal à celui qui est entraîné par la vapeur :

$$I_{S, \text{cond}} = I_{S, \text{évap}}$$

Cette relation permet de trouver la conductivité globale d'entropie de l'eau vers l'environnement. Pour la trouver, nous devons intégrer les lois constitutives dans cette équation de bilan :

$$G_S (T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}) = s_{\text{vap}}(T_{\text{eau}}) I_{m, \text{vap}}$$

ce qui entraîne :

$$G_S = \frac{s_{\text{vap}}(T_{\text{eau}}) I_{m, \text{vap}}}{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}} = \frac{8780 \text{ Ct kg}^{-1} \cdot 9.5 \cdot 10^{-7} \text{ kg s}^{-1}}{294.655 \text{ K} - 288.15 \text{ K}} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ Ct K}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

L'entropie spécifique de la vapeur a été tirée d'une table. ■

Résumé du chapitre

Il existe trois modes de transport des grandeurs extensives. Toutes peuvent être transportées par conduction ou par convection, mais certaines, telles que le moment cinétique, la quantité de mouvement et l'entropie, peuvent également être transportées par le rayonnement, c'est-à-dire l'interaction avec un champ (électromagnétique ou gravitationnel). Ce chapitre approfondit l'étude de ces modes en les illustrant essentiellement au moyen de l'entropie.

La forme générale du bilan qui prend en compte toutes les causes possibles de la variation de l'entropie d'un système est: $\dot{S} = I_{S, \text{cond}} + I_{S, \text{conv}} + \Sigma_S + \Pi_S$, où Σ_S représente le taux d'apport d'entropie, ou taux de source, auquel l'entropie pénètre ou émane d'un corps au travers de son interaction avec le champ électromagnétique. Π_S est le

taux de production d'entropie qui tient compte de l'irréversibilité des trois processus de transport.

Les trois types de transport d'entropie sont accompagnés de flux d'énergie. La variation de l'énergie du corps est donnée par: $\dot{E}_{\text{corps}} = I_{E, \text{conv}} + I_{E, \text{conv}} + \Sigma_{E, \text{champ}}$, alors que celle de l'énergie du champ est: $\dot{E}_{\text{champ}} = I_{E, \text{rad}} + \Sigma_{E, \text{champ}}$.

L'écoulement de l'entropie par conduction est décrite au moyen de la loi de FOURIER: $j_S = -k_S \cdot dT/dx$ où j_S est la densité du courant d'entropie, k_S la conductivité entropique et dT/dx le gradient de température. Le courant d'énergie qui accompagne le flux conductif d'entropie est égal à: $j_{E, \text{therm}} = -k_E \cdot dT/dx$ où $k_E = Tk_S$ est la conductivité énergétique (ou thermique). La conduction est un processus dissipatif et la densité du taux de production d'entropie est: $\pi_S = 1/T \cdot k_S (dT/dx)^2$ où T est la température basse à laquelle l'entropie émerge du système. Le produit $T\pi_S$ représente la densité de dissipation d'énergie.

Les corps peuvent être chauffés ou refroidis par l'intermédiaire du rayonnement électromagnétique qui est alors appelé rayonnement thermique. Même si l'émission par un corps opaque ressemble à un rayonnement émanant d'une surface, l'absorption et l'émission de rayonnement sont des processus volumiques qui se déroulent à l'intérieur du corps sans franchissement préalable de sa surface: le corps et le rayonnement coexistent au même endroit.

Le prototype d'un objet rayonnant est le corps noir, un corps qui absorbe tout le rayonnement qui l'atteint. Un corps noir est caractérisé par son taux d'émission hémisphérique appelé exitance \mathcal{M}_{CN} , qui correspond à la quantité d'énergie émise par la surface du corps par unité de temps et par unité de surface. Elle est donnée par $\mathcal{M}_{\text{CN}} = \sigma T^4$, où σ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN. L'entropie rayonnée conjointement est égale à $\mathcal{M}_{S, \text{CN}} = 4/3 \sigma T^3$. Si les exitances sont constantes sur la surface, les courants d'entropie et d'énergie émanant de ce corps noir sont le produit négatif des exitances et de l'aire A de la surface.

Plongé à l'intérieur d'un corps noir dont les parois sont à la température T_{paroi} , un autre corps noir à la température T absorbe de l'énergie à un taux donné par $\mathcal{E}_{\text{CN}} = \sigma T_{\text{paroi}}^4$, où \mathcal{E}_{CN} est l'irradiance ou éclairement énergétique. Le flux net d'énergie émanant de ce corps est $I_{E, \text{rad, net}} = -A(\mathcal{M}_{\text{CN}} - \mathcal{E}_{\text{CN}}) = -\sigma A(T^4 - T_{\text{paroi}}^4)$.

L'absorption et l'émission de rayonnement par un corps provoquent son chauffage ou son refroidissement. Ces processus sont irréversibles et engendrent donc une production d'entropie. Pour deux corps noirs ayant des températures respectives T_1 et T_2 en contact thermique par l'intermédiaire du rayonnement, le taux de production d'entropie est donné par $\Pi_S = \sigma A/(T_1 T_2) \cdot (T_1 - T_2)^2 (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$. Cette expression est toujours positive (ou nulle si les deux corps ont la même température).

Les surfaces qui n'absorbent qu'une partie du rayonnement incident sont dites surfaces grises. Elle sont caractérisées par leur taux d'absorption d'énergie par unité de surface: $\mathcal{A} = \alpha \mathcal{E}_{\text{CN}}$ où α est l'absorptivité ou facteur d'absorption. On peut également les caractériser par leur émissivité ε qui est le rapport de leur exitance à celle du corps noir: $\mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{M}_{\text{CN}}$. La loi de KIRCHHOFF stipule que l'émissivité est égale à l'absorptivité. Un corps gris à la température T plongé dans le rayonnement d'un corps noir dont les parois sont à la température T_{paroi} émet de l'énergie au taux: $I_{E, \text{rad}} = -\varepsilon \sigma A(T^4 - T_{\text{paroi}}^4)$. Les tableaux d'émissivité et d'absorptivité donnent des valeurs différentes, parce qu'elles donnent l'absorptivité par rapport au rayonnement solaire.

Contrairement aux systèmes fermés, les systèmes ouverts échangent de la matière avec l'environnement. Cet échange peut se faire par l'intermédiaire d'écoulements, on a alors affaire à un transfert par convection.

Si l'écoulement transporte une substance dissoute, l'intensité du courant de la substance dissoute est généralement donnée en termes de quantité de matière : $I_{n,\text{conv}} = \bar{c} I_{V,\text{fluide}}$ où \bar{c} est la concentration molaire de la substance. La quantité de mouvement d'un écoulement est égale à $I_{p,\text{conv}} = \nu I_{m,\text{fluide}}$. La vitesse ν correspond à la quantité de mouvement spécifique. L'entropie accompagne tous les écoulements de substances. Les flux convectifs d'entropie peuvent être exprimés au moyen de la densité d'entropie, de l'entropie spécifique ou molaire. Dans le dernier cas on a : $I_{S,\text{conv}} = \bar{s} I_{n,\text{fluide}}$. Si la grandeur transportée n'est pas constante sur la surface traversée par l'écoulement, il faut utiliser les densités de flux.

Les écoulements transportent de l'énergie, divisée en deux contributions. La première est l'énergie E qu'un observateur emporté par le courant mesurerait, et la seconde provient de la pression qui règne dans le fluide, soit PI_V . Exprimée au moyen des grandeurs molaires, l'énergie transportée par l'écoulement est : $I_{E,\text{écoulement}} = (\bar{e} + P\nu) I_{n,\text{fluide}}$, où ν est le volume molaire. Le contenu de la parenthèse est l'enthalpie molaire \bar{h} du fluide.

Les équations de bilan relatives à un processus se déroulant dans un système ouvert doivent prendre en compte les grandeurs qui évoluent au cours du processus, mais également les substances qui, par leur écoulement, transportent ces grandeurs vers ou hors du système. Ce sera également le cas de l'équation de bilan de l'énergie qui aura la forme : $\dot{E} = I_{E,\text{cond}} + I_{E,\text{écoulement}} + \Sigma_E$.

Lorsque, dans un écoulement, les effets mécaniques jouent un rôle non négligeable, ils doivent être pris en compte dans les équations de bilan. Il peut s'agir par exemple d'une variation de volume d'un gaz par compression ou détente : $\dot{V} = \Pi_V$, ou de l'interaction avec un champ : $\dot{p} = \Sigma_p$. Ces contributions supplémentaires apparaissent dans le bilan d'énergie : $\dot{E} = I_{E,\text{écoulement}} + I_{E,\text{therm}} + I_{E,\text{compr}} + I_{E,\text{méc}}$. On tient compte de l'irréversibilité inhérente à tous les processus au moyen du taux de production d'entropie qui varie suivant la nature du fluide considéré.

Exercices et problèmes

- La lumière solaire traverse un gaz enfermé dans un long cylindre. Le flux d'entropie à l'entrée et dans l'axe du cylindre a une valeur de 5.0 W K^{-1} . À l'extrémité opposée, la valeur du flux émergent est de 4.0 W K^{-1} . (a) Déterminez la valeur du flux net d'entropie par rapport à la région de l'espace occupée par le cylindre. (b) À quel taux (minimal) l'entropie du corps est-elle en train de varier? (c) Quelle est la valeur du taux de source d'entropie pour le champ? Que vaut le flux d'entropie par rapport au cylindre?
- Une barre de cuivre de 0.50 m de longueur et de section égale à 10.0 cm^2 a une température de 500 K à une extrémité et de 300 K à l'autre extrémité. Lorsque le flux de chaleur a atteint le régime stationnaire, des mesures indiquent que la température varie linéairement le long de la barre. (a) Déterminez le gradient de température en prenant le sens de flux d'entropie comme direction positive. (b) Estimez les densités de flux d'entropie et d'énergie au centre de la barre en utilisant les valeurs de la figure 11.9. Que vaut la conductivité énergétique? (c) Divisez la barre en deux parts égales. Avec le valeur obtenue en (b), déterminez ce que vaut le flux d'entropie à la surface de séparation par rapport à la partie dont provient l'entropie?
- Un thermoplongeur dans une bouilloire est branché sur le secteur à 220 V . Sa résistance électrique est de 160Ω à la température de 20°C ; le coefficient de température de la résistivité est $4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Si le coefficient de transmission entre le thermoplongeur et l'eau est de $100 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ et l'aire de sa surface égale à 0.020 m^2 , quelle sera la valeur du flux d'énergie du thermoplongeur à l'eau? Comment le résultat change-t-il si une couche minérale se forme autour du thermoplongeur?
- Montrez que le flux d'énergie transmis à travers un manteau cylindrique de longueur L et de rayons intérieur et extérieur r_1 et r_2 est donné par:

$$I_E = \pi L \left[\frac{1}{2r_1 h_1} + \frac{1}{2r_2 h_2} + \frac{1}{2k_E} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]^{-1} (T_1 - T_2)$$

où h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de la chaleur intérieur et extérieur. Les températures des fluides à l'intérieur et à l'extérieur sont T_1 et T_2 .

- Un volume cylindrique de roche sous la surface du sol a été chauffé uniformément à 50°C alors que le reste de la roche est à une température de 10°C . Utilisez les valeurs moyennes du granit pour les propriétés de la roche. (a) Utilisez le modèle suivant pour les pertes de chaleur du domaine cylindrique vers l'environnement. Alors que les températures de la zone de stockage et de l'environnement restent uniformes, la chaleur s'écoule à travers un manteau cylindrique dont les rayons intérieur et extérieur sont respectivement égaux à la moitié et au double du rayon du cylindre de stockage. Estimez le flux d'énergie dû aux déperditions de chaleur pour une zone de stockage de 5.0 m de rayon et de 40 m de longueur. (b) Quelle devrait être la valeur du rayon pour que les

pertes de chaleur durant une période d'une demi-année ne dépassent pas le quart de l'énergie stockée dans la zone cylindrique?

- Une plaque métallique d'aire égale à 2.0 m^2 , dont le comportement est sélectif, est posée horizontalement sur le sol. La face en contact avec le sol est bien isolée. Dans la partie visible du spectre, l'absorptivité est égale à 0.90 , dans l'infrarouge, l'émissivité vaut 0.30 . La température ambiante est de 20°C . Le Soleil est à 50° au-dessus de l'horizon et 70% de son rayonnement pénètre dans l'atmosphère et arrive au sol. (a) En négligeant la convection, estimez la température qu'atteindra la plaque métallique exposée au Soleil. (b) Calculez cette température en prenant en compte le transfert de chaleur par convection au-dessus de la plaque métallique. Admettez un coefficient de transfert de chaleur par convection de $14 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
- On observe le refroidissement d'eau dans une canette d'aluminium. Dans une première expérience, la canette est polie (courbe 1 dans la figure 11.45). Dans la seconde expérience, la canette est peinte en noir (courbe 2). Admettez que le transfert par conduction de l'eau vers les parois de la canette est extrêmement efficace. Données expérimentales: masse de l'eau: 0.476 kg ; aire de la surface de la canette: 0.0325 m^2 ; température ambiante: 21.6°C . (a) Déterminez le taux de variation de l'entropie de l'eau dans la première expérience à l'instant $t = 500 \text{ s}$. (b) En admettant que le rayonnement est négligeable lors de la première expérience, déterminez les valeurs des coefficients de transfert par convection de l'entropie et de l'énergie de la surface de la canette vers l'air. (c) Utilisez les données de la seconde expérience pour déterminer l'émissivité de la surface noire.

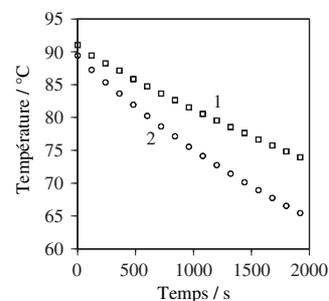


FIGURE 11.45
Problème 7

- Considérez la Terre comme un corps uniforme. (a) À quel taux l'entropie apparaît-elle dans l'atmosphère, la biosphère et les océans de la Terre si nous leur attribuons la température de 300 K ? La constante solaire à l'extérieur de l'atmosphère est de 1360 W m^{-2} . Une fraction de 30% de ce rayonnement est réfléchié dans l'espace. (b) Quelle est la valeur du flux d'entropie par l'intermédiaire du champ radiatif juste avant que le rayonnement soit absorbé? (c) Que vaut le taux de production d'entropie résultant de l'absorption? (d) Que vaut le taux de production d'entropie global?
- Un panneau photovoltaïque d'aire égale à 1.0 m^2 est exposé à un rayonnement solaire dont le flux d'énergie est égal à 800 W m^{-2} . La température initiale du panneau et des cellules est de 300 K . Le panneau a une capacité thermique (capacité énergétique) de 1000 J K^{-1} . Le coefficient d'absorption

du panneau pour le rayonnement solaire est de 0.85. L'émissivité du panneau pour le rayonnement thermique est égale à 1. L'énergie est émise directement vers l'air, le coefficient de transfert de la chaleur est de $12 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$. L'efficacité électrique du panneau décroît en fonction de la température selon $\eta = 0.15 - b(T - T_{\text{amb}})$ avec $b = 1.667 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. L'efficacité est définie en tant que rapport de la puissance électrique et du flux d'énergie du rayonnement solaire (et pas du taux d'absorption). (a) Quelle est la puissance initiale? (b) Formulez l'équation de bilan instantanée de l'énergie du panneau. (c) Que vaut le taux initial de variation de la température? (d) Déterminez la température stationnaire du panneau qui s'établit après un certain temps. (e) Esquissez aussi précisément que possible la température et la puissance électrique du panneau en fonction du temps.

10. Une bouteille de vin est placée dans un réfrigérateur dont la température intérieure reste constante à 0°C . Combien de temps faudra-t-il attendre pour que la température du vin décroisse d'une valeur initiale de 20°C à la température désirée de 8°C ? Considérez le vin comme un système uniforme de masse égale à 0.75 kg et utilisez les lois constitutives relatives à l'eau. La hauteur et le diamètre du corps principal sont de 25 cm et 8 cm respectivement; négligez l'influence du fond et du goulot et traitez le manteau comme une couche plane. Les coefficients de transfert par convection intérieur et extérieur sont égaux à $200 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ et $10 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ respectivement.
11. Une citerne à eau sphérique à parois minces a un volume de 1.0 m^3 . L'eau contenue est maintenue à une température constante de 60°C par un chauffage de puissance de 1.0 kW . La température ambiante est de 15°C . Combien de temps après le déclenchement du chauffage la température sera-t-elle retombée à 40°C ?
12. Un volume d'eau chaude de 1.0 m^3 perd de la chaleur vers l'environnement à une température constante de 20°C . La température initiale de l'eau est de 80°C . Le produit du coefficient de transfert de chaleur et de l'aire de la surface est de 60 W K^{-1} . (a) Combien de temps faudra-t-il attendre pour que la différence de température entre l'eau et l'environnement tombe à la moitié de sa valeur initiale? (b) Que vaut le taux de production d'entropie au tout début du processus? (c) Que vaut la valeur totale de l'entropie produite du début du processus jusqu'au refroidissement complet de l'eau? (d) Combien d'énergie aurait pu être libérée par une machine de CARNOT parfaite opérant entre l'eau et l'environnement lors du refroidissement de l'eau?
13. Pour maintenir à 20°C la température intérieure d'un bâtiment situé dans un environnement à 0°C , la puissance de chauffage nécessaire est de 5 kW . En l'absence de chauffage, la température intérieure diminue chaque jour de $1/5$ de la différence de température par rapport à l'environnement. (a) Déterminez le produit de l'aire de la surface et du coefficient de transfert de chaleur total. (b) Déterminez la valeur du coefficient de température de l'énergie (chaleur massique) en modélisant le bâtiment en tant que système RC. (c) Si la température intérieure est de 12°C , quelle devrait être la puis-

sance de chauffage pour que la température s'élève de 1°C par heure?

14. Un générateur d'énergie éolienne dont la section a une aire de 75 m^2 est exposé à des vents de vitesse égale à 50 km h^{-1} . Derrière le rotor, la surface d'écoulement augmente d'un facteur 1.6. L'air peut être considéré comme un fluide incompressible de densité égale à 1.2 kg m^{-3} . Admettez que la température reste constante. (a) Que vaut le flux purement convectif d'énergie du vent qui traverse le générateur? (b) À quel taux l'énergie est-elle transmise au rotor? (c) Le rotor tourne à une fréquence de 0.5 Hz . Que vaut le courant de moment cinétique à travers l'art de la roue du générateur?

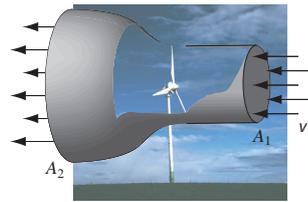


FIGURE 11.46
Problème 14

15. De l'hydrogène est brûlé avec de l'oxygène dans le moteur d'une fusée. Estimez la température des gaz éjectés, sachant que la vitesse d'éjection est de 3000 m s^{-1} .
16. Un réservoir sous pression en acier ayant une masse de 8 kg et un volume de 6.0 litres contient 4.0 litres d'eau et 0.50 kg de gaz d'azote à une température de 20°C . Le réservoir est placé sur trois supports. Il y a une ouverture équipée d'une valve au fond du réservoir. (a) Quelle est la pression du gaz? (b) À quelle vitesse l'eau s'écoule-t-elle immédiatement après l'ouverture de la valve? (c) Quel devrait être le diamètre de l'ouverture pour que l'accélération initiale du réservoir soit de 30 m s^{-2} ?

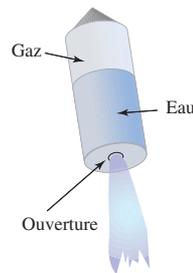


FIGURE 11.47
Problème 16

17. Un bidon ouvert en étain contient de l'eau chaude. L'eau peut s'évaporer et s'écouler à travers un tuyau horizontal. (a) Le processus thermique (écoulement d'entropie et variation de température) influence-t-il le processus hydraulique, ou les deux processus peuvent-ils être traités séparément? (b) Considérez l'eau contenue dans le bidon comme un système. Énoncez l'équation de bilan de la masse dans la forme instantanée. (d) À partir de l'équation de bilan d'entropie, démontrez que l'équation de variation de la température est donnée par

$$m\kappa\dot{T} = -G_s(T - T_{\text{amb}}) + l_{\text{vap}}I_{m,\text{vap}}$$

où m est la masse de l'eau contenue dans le système, T et T_{amb} la température instantanée et la température ambiante respectivement, κ la capacité entropique spécifique, G_S la conductance entropique, l_{vap} l'entropie spécifique de vaporisation, $I_{m, \text{vap}}$ le courant de masse d'évaporation de l'eau.

18. Considérez le modèle suivant du chauffage de l'air dans une pièce. En conséquence de l'apport d'entropie, l'air se dilate et diffuse à travers les parois de telle manière que la pression dans la pièce garde une valeur constante. En admettant une puissance de chauffage $\mathcal{P}_{\text{chauffage}}$ constante, et que l'air qui reste dans la pièce ne perd pas de chaleur vers l'environnement, montrez que la température de l'air croît selon la relation

$$T(t) = T_0 \exp\left(\frac{\mathcal{P}_{\text{chauffage}} t}{7/2 PV}\right)$$

si l'on prend la valeur de $7/2R$ pour le coefficient de température molaire de l'enthalpie de l'air.

19. Montrez que l'expression pour le flux total de vapeur d'eau dans une colonne d'air humide au-dessus d'un volume d'eau est donnée par l'équation (11.124).
20. Dérivez l'équation différentielle décrivant la diffusion de la vapeur d'eau dans un récipient comme celui qui figure dans la figure 11.41a et montrez que sa solution est donnée par l'équation (11.127).

INTERLUDE IV

CAPTEURS SOLAIRES ET STOCKAGE DE CHALEUR LATENTE

Dans cet Interlude, nous souhaitons décrire trois exemples de systèmes thermiques utilisés pour le chauffage, servant soit à fournir, soit à stocker de l'entropie. De manière spécifique, nous examinerons les collecteurs solaires qui sont des systèmes à écoulement ouverts, le stockage d'eau chaude et le stockage d'entropie au moyen de matériaux à changement de phase (stockage d'entropie latente). Dans les trois cas, nous allons élaborer des modèles qui nous permettront d'explorer ces dispositifs de manière relativement détaillée. Le deuxième modèle — un collecteur solaire aérothermique — nous permettra d'aborder le problème de l'optimisation.

IV.1 CAPTEUR SOLAIRE POUR LA PRODUCTION D'EAU CHAUDE

Les systèmes thermiques simples pour la production d'eau chaude consistent en des capteurs solaires thermiques et un réservoir de stockage de l'eau chaude. Ils sont nécessairement des systèmes dynamiques, à la fois de manière intrinsèque à cause de l'élément de stockage et extrinsèque du fait de l'influence de facteurs externes (rayonnement solaire et consommation de l'eau chaude).

IV.1.1 Capteurs solaires thermiques

Les capteurs solaires thermiques sont des objets qui absorbent une fraction de la lumière solaire qui les atteint et, en conséquence, produisent de l'entropie. Si nous faisons circuler un fluide sur l'absorbeur, nous pouvons exploiter une partie de l'entropie qui a été créée (fig. IV.1). Nous n'allons considérer que des capteurs solaires sans concentration qui, dans des conditions typiques, deviennent modérément chauds.

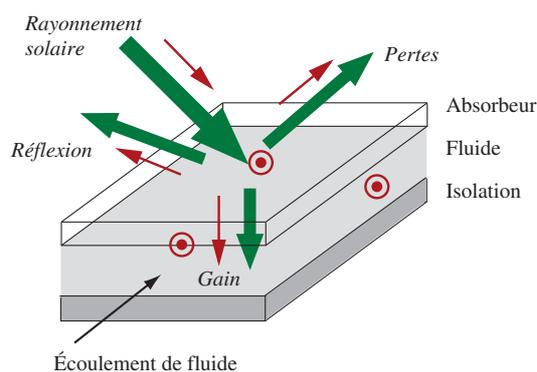


FIGURE IV.1 Un collecteur plat simple consiste en une plaque absorbante incluant si possible une couverture transparente pour réduire les pertes dans la partie supérieure. L'absorption du rayonnement solaire provoque la production d'entropie dans l'absorbeur. Un fluide qui s'écoule sous la plaque emporte une partie de l'entropie. La figure montre la géométrie la plus simple possible pour l'absorbeur et l'écoulement du fluide. Les flèches épaisses symbolisent les flux d'énergie, les flèches minces les flux d'entropie, et les cercles représentent les taux de production d'entropie.

L'arrangement géométrique le plus simple consiste en un absorbeur plat, par exemple une plaque métallique mince. On peut faire circuler un fluide (liquide ou air) à travers une conduite rectangulaire sous l'absorbeur, le fluide en contact avec la surface entière. Usuellement, le fond du collecteur est isolé et une couverture transparente, qui n'apparaît pas dans la figure IV.1, est placée sur la plaque absorbante; les deux dispositifs

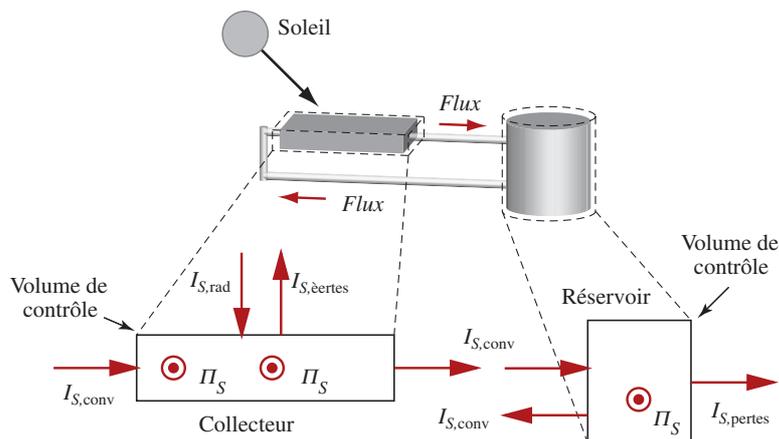
réduisent les déperditions d'entropie vers l'environnement. Les conduites transportant le fluide dans le collecteur sont souvent différentes de ce que nous avons admis, et plus compliquées, ce qui amène à des arrangements géométriques plus élaborés pour le transfert de l'entropie entre l'absorbeur et le fluide. Il en sera question plus bas.

Le rayonnement solaire transporte de l'entropie et de l'énergie. Il contient relativement peu d'entropie à cause de la température élevée de la lumière (proche de 6000 K). La plus grande partie de l'entropie qui servira à chauffer le collecteur et le fluide aura été produite (le rapport entre l'entropie fournie et l'entropie produite est proche de 1 à 20). La production d'entropie résulte de l'absorption (et de l'émission) du rayonnement, du transfert de l'absorbeur au fluide et du frottement dans l'écoulement.

IV.1.2 Modèle dynamique d'un capteur solaire

L'exemple qui suit assemble un chauffe-eau à circulation et un réservoir de stockage en un système simple mais techniquement intéressant (fig. IV.2). Les chauffe-eaux solaires consistent essentiellement en deux composantes : un collecteur et un réservoir de stockage de l'eau chaude. Cela ne s'arrête pas là, mais du point de vue thermodynamique, il fait sens de se contenter d'étudier ce système limité.

FIGURE IV.2 Haut : simple capteur solaire thermique divisé en deux corps uniformes : le collecteur (absorbeur et liquide) et le réservoir de stockage. Bas : processus relatifs au collecteur et au réservoir.



Le collecteur solaire – le chauffe-eau à circulation – consiste en un absorbeur du rayonnement solaire (une feuille métallique plane), des conduites qui font circuler de l'eau ou un mélange eau-glycol sous le collecteur afin de recueillir l'entropie, une plaque de verre sur la face antérieure pour réduire les pertes d'entropie de l'absorbeur vers l'environnement ainsi qu'une isolation au dos afin de prévenir les déperditions de chaleur. Le phénomène qui nous intéresse dans cette perspective est le chauffage d'un fluide (relativement) froid lors de son passage le long d'une plaque chauffée (section 11.10). Si nous considérons l'absorbeur et le liquide présent dans le collecteur comme un corps unique ayant une température unique, nous devons prendre en compte six processus : (1) absorption d'entropie et d'énergie amenées par le rayonnement, (2) production d'entropie due à cette absorption, (3 et 4) flux convectifs d'entropie à l'entrée et à la sortie, (5) production d'entropie due au mélange du liquide entrant dans le collecteur et (6) transfert d'entropie vers l'environnement à travers la couverture en verre (fig. IV.2).

Le réservoir devient même un système plus simple si l'eau est brassée continuellement (dans la réalité, on préfère éviter le mélange et la production d'entropie qui l'accompagnent ; sans brassage, des couches de différentes températures apparaissent dans le réservoir, un système passablement complexe à modéliser). De l'eau chaude

entre en un point du réservoir et en émerge en un autre point à la température du liquide brassé pour s'écouler vers le collecteur. Il y a production d'entropie due au mélange d'eau chaude et froide ainsi qu'une déperdition de chaleur vers l'environnement. Les consommateurs n'auront besoin d'eau chaude que pendant la journée, mais ce fait n'est pas pris en compte dans le modèle dont le diagramme apparaît dans la figure IV.3.

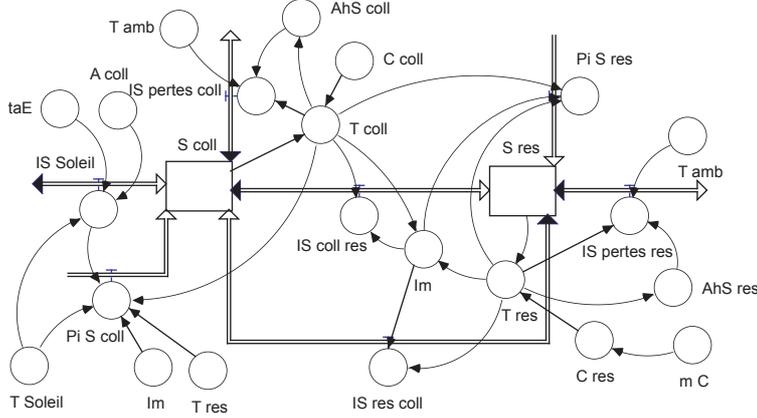


FIGURE IV.3 Diagramme de dynamique des systèmes pour un modèle simple d'un capteur solaire thermique. Il modélise les relations énoncées dans le texte.

Mentionnons quelques-unes des relations constitutives les plus intéressantes relatives aux processus qui apparaissent dans le diagramme de la figure IV.3. Le flux d'entropie provenant du rayonnement solaire (ou plutôt la partie absorbée) est évalué comme suit :

$$I_{S,Soleil} = \frac{4}{3} \frac{1}{T_{Soleil}} A_{coll} (\tau\alpha) \mathcal{E} \quad (IV.1)$$

(équations (11.28) et (11.29) du chapitre 11). T_{Soleil} est la température superficielle du Soleil, donc la température du rayonnement solaire. A_{coll} est l'aire de la surface du collecteur, \mathcal{E} l'irradiance de cette surface et $(\tau\alpha)$ la fraction du rayonnement transmise à travers le verre et absorbée par le collecteur.

Le taux de production d'entropie pour le collecteur consiste en deux termes relatifs à l'absorption du rayonnement et au mélange du fluide entrant (le premier est la part la plus importante (équations (11.42) et (11.110)) :

$$\Pi_S = \left(\frac{3}{4} \frac{T_{Soleil}}{T_{coll}} - 1 \right) I_{S,Soleil} + c I_m \left[\frac{1}{T_{coll}} (T_{rés} - T_{coll}) - \ln \left(\frac{T_{rés}}{T_{coll}} \right) \right] \quad (IV.2)$$

où c est la chaleur spécifique du liquide qui circule dans le système. L'irréversibilité dans le réservoir, due au mélange (équation (11.118)) est calculée comme suit :

$$\Pi_S = c I_m \left[\frac{1}{T_T} (T_{coll} - T_{rés}) - \ln \left(\frac{T_{coll}}{T_{rés}} \right) \right] \quad (IV.3)$$

Il reste à prendre en compte les deux flux convectifs d'entropie. Ils sont indépendants et liés au flux provenant du collecteur et du réservoir respectivement (équations (11.71) et (11.73)) :

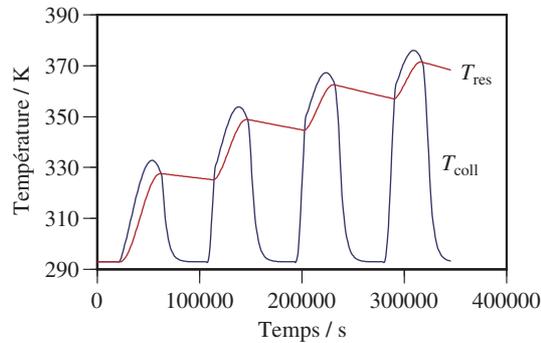
$$I_{S,\text{conv, coll-rés}} = cI_m \ln(T_{\text{coll}}/T_{\text{rés}}) \quad (\text{IV.4})$$

$$I_{S,\text{conv, rés-coll}} = cI_m \ln(T_{\text{rés}}/T_{\text{coll}})$$

Nous devons nous assurer que le courant n'est enclenché que si la température du liquide dans le collecteur est plus élevée que celle dans le réservoir.

Le calcul des pertes d'entropie est standard (chapitre 11 et équations référencées ci-dessus). Un certain nombre d'hypothèses ont été faites pour simplifier le modèle. La plus importante est le modèle d'un collecteur uniforme (où tous les composants ont la même température et que celle-ci ne varie pas dans le sens du courant), mélange complet du liquide dans le réservoir, aucune perte venant des conduites, et aucune dissipation d'énergie provenant du pompage et de la production d'entropie due à la résistance à l'écoulement. Si nous utilisons une fonction sinusoïdale simple pour l'irradiation quotidienne $\mathcal{E}(t)$ (la même pour chaque jour, ce qui peut se produire dans une période de journées claires), et si nous choisissons une valeur constante pour le flux massique, les températures du fluide dans le collecteur et dans le réservoir ont l'aspect donné par la figure IV.4.

FIGURE IV.4 Résultats de la simulation du modèle de la figure IV.2. Les courbes correspondent aux températures du collecteur et de l'unité de stockage.



Ce genre de modèle peut être utilisé pour concevoir des systèmes de chauffage solaire. En jouant avec les paramètres du système, on peut obtenir une certaine intuition pour le dimensionnement adéquat du dispositif. De plus, si nous quantifions la production d'entropie, nous avons les ressources pour minimiser l'irréversibilité, un sujet qui sera abordé à la section IV.2.

IV.2 ANALYSE D'UN CAPTEUR SOLAIRE AÉROTHERMIQUE

À la section 11.10, nous avons étudié les sources d'irréversibilité en évaluant la production d'entropie dans un chauffage à écoulement ainsi que lors du mélange d'eau chaude et froide. Un des objectifs que l'on cherche à atteindre lors de la conception de nouvelles installations de chauffage est de minimiser la production d'entropie, car toute production d'entropie diminue la puissance disponible. Nous allons aborder un exemple qui démontre que nous pouvons atteindre un minimum d'irréversibilité lors du fonctionnement d'un système alors même que des considérations énergétiques ne prévoient pas un optimum.

Nous voulons déterminer si un capteur solaire refroidi à l'air doit être construit long et étroit ou court et large. En termes pratiques, nous voulons savoir si nous devons connecter un certain nombre de capteurs en parallèle ou en série afin d'obtenir un effet optimal¹. Pour élaborer un modèle, nous allons considérer une conduite rectangulaire

mince et large à travers laquelle on pompe de l'air. La partie supérieure de la conduite sert d'absorbeur du rayonnement solaire. La partie inférieure est parfaitement isolée. Le collecteur fonctionnera de telle manière qu'il fournit de l'air à une température de sortie imposée fixe pour une température d'entrée fixe donnée. Cela implique que nous devons ajuster le flux massique d'air à travers le collecteur lorsque le rapport longueur à largeur est modifié.

L'air sera traité en tant que gaz parfait ayant des chaleurs spécifiques constantes. Sauf mention expresse, nous ne considérerons que des conditions stationnaires dans nos modèles. Les modèles donneront une représentation spatialement homogène des systèmes. Cela signifie par exemple que la température de l'air dans le collecteur aura une valeur unique correspondant à la température de sortie.

Dans les sections qui suivent, nous présenterons deux versions du même modèle. Le premier adopte l'approche du design d'installations thermiques utilisées en ingénierie: le design est formulé sur la base de considérations énergétiques et les résultats sont utilisés pour calculer le taux de production d'entropie global pour le système entier. Le second aborde le problème de manière directe en exprimant les flux d'entropie et les taux de production d'entropie pour chacun des processus irréversibles pour trouver le minimum du taux total de production d'entropie. Ce modèle fournit un exemple très intéressant d'une analyse basée sur la Seconde Loi, c'est-à-dire basée sur l'entropie, et dans laquelle des considérations relatives à l'énergie ou à la puissance ne permettent pas d'obtenir un résultat optimal.

IV.2.1 Bilan d'énergie

L'énoncé d'un bilan stationnaire de l'énergie pour l'absorbeur et l'air dans la conduite demande de mettre en relation les températures et les flux d'énergie. Ces flux d'énergie dans l'absorbeur et dans l'air apparaissent dans la figure IV.5.

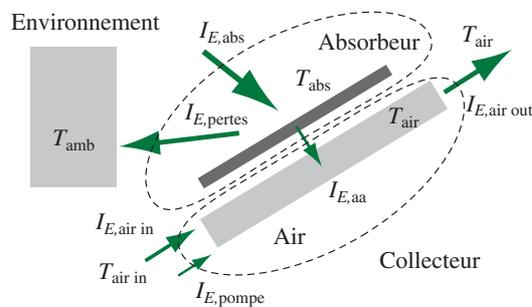


FIGURE IV.5 Un capteur solaire aérothermique est divisé en deux systèmes séparés, l'absorbeur et l'air. La figure montre les flux d'énergie dans et entre les deux systèmes.

En régime stationnaire, la somme des flux d'énergie par rapport à un système doit être nulle. Dans le cas considéré, nous avons deux systèmes, l'absorbeur et l'air. Il y a trois flux d'énergie relativement à l'absorbeur: le taux d'absorption d'énergie $I_{E,abs}$, le flux dû aux déperdition d'entropie $I_{E,pertes}$, et le taux de transfert d'énergie à l'air $I_{E,aa}$. Pour ce système, le bilan d'énergie devient:

$$0 = I_{E,abs} - I_{E,pertes} - I_{E,aa} \quad (\text{IV.5})$$

1. La question a été abordée pour la première fois par OPPLIGER (1993). Nous allons présenter une version simplifiée de son modèle.

Dans le cas de l'air, il prend la forme :

$$0 = I_{E,aa} + I_{E,air\ in} - I_{E,air\ out} + I_{E,pompe} \quad (IV.6)$$

Ici, $I_{E,air\ in}$ et $I_{E,air\ out}$ représentent les flux convectifs d'énergie transportés par l'air entrant dans le collecteur et en émergeant. $I_{E,pompe}$ est égal à la puissance de la pompe qui propulse l'air à travers la conduite du collecteur.

Lois constitutives pour les flux d'énergie. Nous avons besoin de lois constitutives spécifiques pour pouvoir utiliser les bilans d'énergie des équations (IV.5) et (IV.6). Le taux d'absorption d'énergie est communément exprimé en tant que fraction ($\tau\alpha$) du rayonnement solaire qui est le produit de l'irradiance \mathcal{E} et de l'aire de la surface de l'absorbeur :

$$I_{E,abs} = (\tau\alpha) A \mathcal{E} \quad (IV.7)$$

($\tau\alpha$) est le facteur de transmission-absorption de l'absorbeur, couverture de verre incluse. Les pertes du collecteur vers l'environnement et le taux de transfert au fluide dans la conduite sont exprimés en termes de différences de température et de conductance énergétique, qui est le produit du coefficient de transfert de chaleur et de l'aire de la surface :

$$I_{E,pertes} = AU_{pertes} (T_{abs} - T_{amb}) \quad (IV.8)$$

$$I_{E,aa} = AU_{aa} (T_{abs} - T_{air}) \quad (IV.9)$$

où

$$U_{aa} = U_{aa,0} + k\nu \quad (IV.10)$$

U_{pertes} et U_{aa} sont les coefficients de transfert dus aux pertes et au transfert vers le fluide. Dans notre modèle, ce dernier est une fonction qui croît linéairement avec le module de la vitesse ν . Pour obtenir la température de sortie souhaitée avec une température d'entrée fixe, il faut augmenter la vitesse du fluide si la longueur du collecteur augmente. Le fait que l'efficacité du transfert de chaleur augmente conjointement avec la vitesse de l'écoulement jouera un rôle important dans l'interprétation des résultats.

L'équation (IV.6) mentionne le flux convectif net dû au transfert d'énergie par le fluide. En vertu de l'équation (11.111), pour un gaz parfait, il est :

$$I_{E,air\ in} - I_{E,air\ out} = c_p I_m (T_{air\ in} - T_{air}) \quad (IV.11)$$

c_p and I_m sont respectivement la chaleur spécifique à température constant et le flux massique de l'air. Il reste à calculer la puissance de pompage. Elle est déterminée à partir d'un modèle de flux turbulent à travers la conduite rectangulaire. Ce modèle prédit une diminution de la pression en fonction de la vitesse du fluide. Nous pouvons calculer la puissance de pompage à partir de la diminution de pression ΔP et du flux massique I_m :

$$I_{E,pompe} = \Delta P \frac{I_m}{\rho} \quad (IV.12)$$

ρ est la masse volumique de l'air obtenue à partir de l'équation du gaz parfait. La puissance de pompage augmente fortement lorsque le collecteur est rendu plus long et plus étroit.

Les équations présentées jusqu'ici suffisent pour calculer les températures et les flux d'énergie. Le flux convectif d'énergie total $I_{E,conv} = I_{E,air\ out} - I_{E,air\ in}$ et le gain net $I_{E,conv} - I_{E,pompe}$ sont particulièrement intéressants. Du point de vue de l'énergie, le gain net nous indique combien d'énergie est fournie par le système. Sachant que nous devons pomper plus fortement si le collecteur devient plus long et plus étroit, nous pouvons nous attendre à une augmentation de l'énergie nette transportée par l'air émergeant du collecteur si sa longueur augmente, ce que montre la courbe des courants d'énergie de la figure IV.6. Il n'y a pas d'indication de l'existence d'une valeur optimale de la longueur du collecteur sur la base de considérations énergétiques.

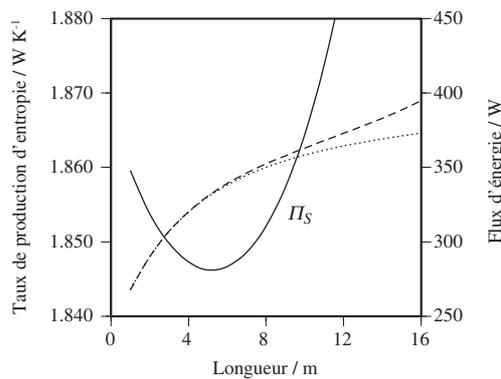


FIGURE IV.6 Flux convectif total d'énergie (ligne traitillée), gain énergétique (ligne pointillée) et taux de production d'entropie (ligne continue) du système en fonction de la longueur du collecteur. Les résultats ont été calculés pour une irradiance constante et une aire de surface d'un mètre carré. Les résultats sont également basés sur un écoulement turbulent de l'air et pour un jeu particulier de paramètres.

IV.2.2 Bilans d'entropie

Un design optimal repose sur la condition de réversibilité minimale, c'est-à-dire de production d'entropie minimale. Parfois, une production d'entropie minimale et des valeurs énergétiques optimales peuvent coïncider, ce qui n'est pas le cas dans notre exemple. Ce qui rend encore plus importante une analyse basée sur la Seconde Loi.

L'équation de bilan d'entropie est utilisée pour calculer le taux de production d'entropie d'un système. En régime stationnaire, tous les flux d'entropie I_S et le taux de production d'entropie Π_S dans le système (fig. IV.7) doivent avoir une somme nulle :

$$0 = I_{S,rad} + I_{S,air\ in} - I_{S,air\ out} - I_{S,pertes} + \Pi_S \quad (\text{IV.13})$$

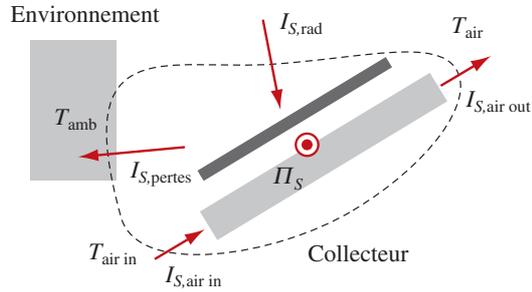
Si nous introduisons les lois constitutives respectives dans cette équation, nous obtenons, selon ce que nous avons établi au chapitre 11 :

$$\Pi_S = -\frac{4}{3} \frac{(\tau\alpha)A\mathcal{E}}{T_{\text{Soleil}}} + \left[c_p \ln\left(\frac{T_{\text{air}}}{T_{\text{air\ in}}}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_{\text{air}}}{P_{\text{air\ in}}}\right) \right] I_m - \frac{I_{E,pertes}}{T_{\text{amb}}} \quad (\text{IV.14})$$

R est la constante du gaz parfait et M sa masse molaire. Le premier terme représente le flux d'entropie apporté par le rayonnement solaire (équation (11.41)), le deuxième est le courant convectif d'entropie net transporté par l'air (équation (11.112)), et le troisième est égal au courant d'entropie vers l'environnement. Le taux de production d'entropie peut maintenant être calculé pour les processus stationnaires qui se déroulent dans le collecteur (fig. IV.7). Le résultat démontre qu'il existe une condition pour

un design optimal: le taux de production d'entropie passe par un minimum pour une certaine longueur du collecteur, comme le montre la figure IV.6.

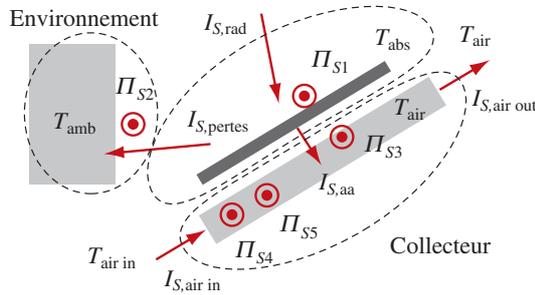
FIGURE IV.7 Le système utilisé pour procéder à l'analyse selon la Seconde Loi inclut le collecteur et une partie de l'environnement, ce qui assure que toutes les contributions à l'origine de production d'entropie font partie du système.



IV.2.3 Modèle revisité

Nous adoptons maintenant une approche directe pour modéliser le collecteur. Pour le faire, nous devons considérer tous les processus qui se déroulent et déterminer les transferts d'entropie et les irréversibilités. Les processus impliqués sont: (1) l'absorption du rayonnement, (2) les pertes d'entropie vers l'environnement dues à la convection et au rayonnement, (3) le transfert d'entropie de l'absorbeur vers le fluide, (4) le transfert convectif d'entropie et le mélange et (5) le frottement dans l'écoulement. La figure IV.8 fait apparaître ces cinq sources de production d'entropie.

FIGURE IV.8 Transferts et production d'entropie dans le modèle d'un capteur solaire aérothermique. Il y a cinq processus, tous irréversibles. Quatre sont associés avec des transferts d'entropie et au brassage, le cinquième est dû au frottement dans l'écoulement.



En régime stationnaire, les équations de bilan d'entropie pour l'absorbeur et l'air dans la conduite prennent la forme:

$$0 = I_{S,rad} - I_{S,aa} - I_{S,pertes} + \Pi_{S1} \quad (\text{IV.15})$$

$$0 = I_{S,aa} - I_{S,conv} + \Pi_{S3} + \Pi_{S4} + \Pi_{S5} \quad (\text{IV.16})$$

Dans l'équation (IV.16), $I_{S,conv}$ est relatif au courant convectif d'entropie. Les flux qui apparaissent dans les équations de bilan sont donnés par les relations constitutives qui suivent. Selon l'équation (11.41), l'entropie transportée par le rayonnement solaire est:

$$I_{S,\text{rad}} = \frac{4(\tau\alpha)AE}{3 T_{\text{Soleil}}} \quad (\text{IV.17})$$

Le courant d'entropie qui va de l'absorbeur chaud vers l'air plus froid est déterminé par le courant d'énergie associé et par la température de l'absorbeur :

$$I_{S,\text{aa}} = \frac{AU_{\text{aa}}}{T_{\text{abs}}}(T_{\text{abs}} - T_{\text{air}}) \quad (\text{IV.18})$$

Les mêmes considérations permettent de calculer le flux d'entropie vers l'environnement :

$$I_{S,\text{pertes}} = \frac{AU_{\text{pertes}}}{T_{\text{abs}}}(T_{\text{abs}} - T_{\text{amb}}) \quad (\text{IV.19})$$

Nous utilisons les équations (11.71) et (11.74) pour calculer l'expression pour le flux convectif d'entropie :

$$I_{S,\text{conv}} = \left(-\frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_{\text{air}}}{P_{\text{air in}}}\right) + c_p \ln\left(\frac{T_{\text{air}}}{T_{\text{air in}}}\right) \right) I_m \quad (\text{IV.20})$$

Finalement, nous déterminons les cinq taux de production d'entropie et leur somme. Ces taux ont été calculés au chapitre 11, ce sont entre autres les équations (11.42), (11.39) et (11.112) :

$$\Pi_{S1} = \left(\frac{1}{T_{\text{abs}}} - \frac{4}{3} \frac{1}{T_{\text{Soleil}}} \right) I_{E,\text{abs}} \quad (\text{IV.21})$$

$$\Pi_{S2} = T_{\text{abs}} I_{S,\text{pertes}} \left(\frac{1}{T_{\text{amb}}} - \frac{1}{T_{\text{abs}}} \right) \quad (\text{IV.22})$$

$$\Pi_{S3} = T_{\text{abs}} I_{S,\text{aa}} \left(\frac{1}{T_{\text{air}}} - \frac{1}{T_{\text{abs}}} \right) \quad (\text{IV.23})$$

$$\Pi_{S4} = I_m \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_{\text{air in}}}{P_{\text{air}}}\right) + c_p I_m \left(\frac{1}{T_{\text{air}}}(T_{\text{air in}} - T_{\text{air}}) - \ln\left(\frac{T_{\text{air in}}}{T_{\text{air}}}\right) \right) \quad (\text{IV.24})$$

$$\Pi_{S5} = \frac{I_{E,\text{pompe}}}{T_{\text{air}}} \quad (\text{IV.25})$$

Le taux de production d'entropie total est la somme de ces cinq termes :

$$\Pi_S = \Pi_{S1} + \Pi_{S2} + \Pi_{S3} + \Pi_{S4} + \Pi_{S5} \quad (\text{IV.26})$$

Les grandeurs énergétiques relatives peuvent être calculées sur la base des grandeurs entropiques et des températures. Les résultats du modèle sont ceux qui ont déjà été présentés dans la figure IV.6 : il existe un minimum de la production d'entropie pour

un certain rapport de la longueur à la largeur du collecteur. Alors que l'apport d'énergie augmente de plus en plus avec l'augmentation de la longueur du collecteur, les considérations relatives à l'irréversibilité révèlent l'existence d'un design optimal.

Ce comportement peut être compris simplement. La valeur basse du courant d'énergie pour de petites longueurs est due à des pertes thermiques élevées; sa croissance continue avec l'augmentation de la longueur est la conséquence de l'accroissement du coefficient de transfert de la chaleur entre l'absorbeur et le fluide. Si on allonge le collecteur, le flux d'air doit être augmenté pour maintenir la température de consigne à la sortie. Même si la performance thermique s'améliore avec l'augmentation de la longueur, de longs collecteurs (c'est-à-dire des collecteurs disposés en série) sont, à la base, chauffés par la pompe plutôt que par le Soleil. L'analyse de l'irréversibilité nous apprend qu'une telle stratégie ne doit pas être poursuivie.

IV.3 STOCKAGE DE CHALEUR LATENTE

Les changements de phase jouent un rôle important dans la nature et dans les machines. Une mise en œuvre simple de ce phénomène est réalisée dans les systèmes de stockage de chaleur (entropie) latente qui sont destinés à avoir un rôle de support dans les systèmes de chauffage et refroidissement. Le stockage de la chaleur et du froid peut améliorer considérablement le fonctionnement et l'efficacité de tels systèmes. L'expression «stockage de froid» signifie préparer un espace froid, un espace plus froid que l'environnement, qui est en mesure d'absorber de l'entropie.

L'eau est le support préféré pour le stockage et le transport de l'entropie dans les applications domestiques et industrielles. La quantité d'entropie qui peut être stockée par unité de masse et unité de température est donnée par la capacité entropique spécifique. Imaginons avoir besoin d'entropie à des températures entre -10°C et $+10^{\circ}\text{C}$. Si H_2O était liquide dans cette fourchette, la quantité d'entropie qui pourrait être stockée dans un kilogramme de la substance serait approximativement de 300 Ct (section 5.5). Comme il y a un changement de phase dans cette plage de température, l'entropie absorbée par 1 kg d'eau entre -10°C et $+10^{\circ}\text{C}$ est augmentée de l'entropie latente, à savoir 1200 Ct. Ainsi, grâce à l'inclusion de la transition de phase, l'eau serait cinq fois plus efficace en tant que matériau de stockage d'entropie dans la fourchette de température envisagée.

C'est l'idée qui est mise en pratique dans les systèmes de stockage de la chaleur qui font usage de matériaux à changement de phase (MCP) qui passent par fusion et solidification². Un MCP doit répondre à un certain nombre de critères pour convenir à ce type d'application. Tout d'abord, la plage de température doit être adéquate (pour de l'eau chaude à usage domestique, nous désirons une température de fusion entre 50°C et 60°C). Afin que l'entropie puisse entrer dans le système ou en émerger suffisamment rapidement, la conductivité du matériau doit être aussi élevée que possible, et ce matériau doit conserver ses propriétés pour un grand nombre de cycles de fusion et solidification. Finalement, on souhaiterait que l'entropie latente et la capacité entropique soient suffisamment élevées afin que les dimensions de l'élément de stockage restent raisonnables.

Modèle dynamique pour un petit système expérimental. Nous allons élaborer un modèle dynamique pour expliquer le phénomène observé lorsque de la paraffine

2. De tels systèmes sont étudiés et élaborés dans l'ingénierie de l'énergie renouvelable; voir DUFFIE and BECKMAN (1991), sections 8.8 and 13.7.

liquide dans des tubes de cuivre plongés dans de l'eau chaude refroidit dans l'environnement. Une expérience démontre l'effet de la solidification de la cire (fig. IV.9).

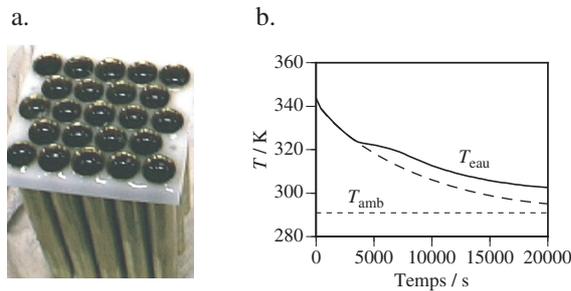


FIGURE IV.9 Libération de chaleur latente. (a) Dispositif expérimental: les tubes de cuivre contenant de la paraffine liquide sont plongés dans de l'eau chaude. Le système refroidit dans l'environnement. (b) Données expérimentales. La ligne traitillée est l'évolution estimée de la température au cas où la cire ne se solidifiait pas.

L'idée pour ce modèle est assez simple. Nous avons deux corps, la cire et l'eau, que nous traitons comme des systèmes spatialement homogènes. Cela est aisément réalisé dans le cas de l'eau par un brassage, ce qui n'est pas possible pour la cire liquide. En enfermant le MCP dans un grand nombre de tubes de cuivre à parois fines entourés d'eau, nous pouvons nous approcher de l'idéal de conditions homogènes. Comme la quantité de cuivre est faible et vu que sa température suivra celle de la cire et de l'eau, cet élément ne sera pas pris en compte dans le modèle. Comme l'eau se refroidit, sa température tombe en dessous de celle de la cire qui perdra de l'entropie au profit de l'eau. Si on laisse de côté le changement de phase, le modèle est celui que nous avons rencontré à la section 5.7. Il est semblable à celui de la figure 5.46 pour deux corps, la cire et l'eau, en contact thermique, avec un écoulement supplémentaire d'entropie pour le second élément de stockage, l'eau. Si nous négligeons la production d'entropie due au transfert de la cire à l'eau, la partie centrale du modèle a la structure apparaissant dans la figure IV.10a.

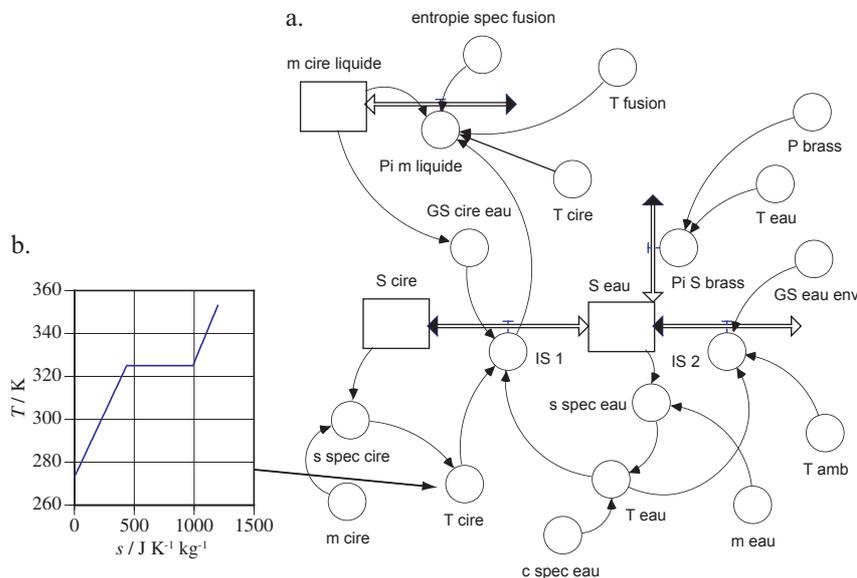


FIGURE IV.10 Modèle du refroidissement de cire liquide dans un bain d'eau chaude. (a) Diagramme de dynamique des systèmes. (b) Diagramme T_s de la paraffine.

Les équations de bilan d'entropie pour la cire et l'eau sont déterminées par les processus qui se déroulent :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{cire}} &= -I_{S1} \\ \dot{S}_{\text{eau}} &= I_{S1} - I_{S2} + \Pi_S \end{aligned} \tag{IV.27}$$

Nous admettons que la cire se refroidit de manière réversible pendant que l'eau reçoit de l'entropie provenant de la cire et en perd vers l'environnement. De l'entropie est produite dans l'eau à cause du brassage mécanique. La figure IV.10a présente le diagramme de système du modèle proposé.

Les lois constitutives pour les grandeurs liées aux flux et taux de production apparaissant dans les équations (IV.27) sont connues : Elles ont été établies au chapitre 5. Ce sont :

$$\begin{aligned} I_{S1} &= G_{S,\text{cire-eau}} (T_{\text{cire}} - T_{\text{eau}}) \\ I_{S2} &= G_{S,\text{eau-env}} (T_{\text{eau}} - T_{\text{amb}}) \\ \Pi_S &= \frac{P_{\text{brass}}}{T_{\text{eau}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Pour calculer la température de l'eau, nous utilisons la relation (5.32) entre la température et l'entropie spécifique valables pour des matériaux ayant des chaleurs spécifiques constantes. Cette approche simple ne convient pas pour la température de la cire à cause du changement de phase, ce qui nous amène à la nouveauté dans ce modèle du refroidissement de la cire. Plutôt que d'énoncer trois expressions analytiques pour la relation température-entropie pour la paraffine liquide, en phase de solidification et solide, nous créons un diagramme température-entropie spécifique pour ce matériau (fig. IV.10b) et l'insérons dans le diagramme de dynamique des systèmes. Il suffit de calculer l'entropie spécifique de la cire, $s = S/m_{\text{cire}}$, à partir de l'entropie stockée dans le MCP. Avec cette valeur, nous pouvons lire la température dans le diagramme Ts .

Comme nous l'avons vu lors de l'étude du changement de phase à la section 10.7, le modèle est complété par l'équation de bilan de la cire liquide et par la loi constitutive pour le taux de destruction du matériau :

$$\dot{m}_{\text{cire liq}} = \Pi_{m,\text{cire liq}} \quad (\text{IV.29})$$

$$\Pi_{m,\text{cire liq}} = -\frac{1}{l_{\text{fus,cire}}} |I_{S1}| \quad (\text{IV.30})$$

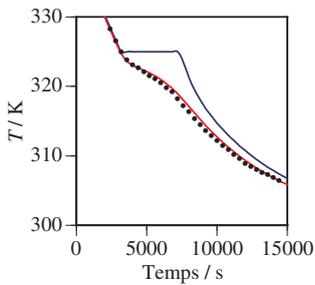


FIGURE IV.11 Simulation du modèle de la figure IV.10a et comparaison avec les données expérimentales (points pour la température de l'eau). La ligne continue proche des points expérimentaux représente la simulation de la température de l'eau, la ligne continue avec un plateau horizontal celle de la cire.

où $l_{\text{fus,cire}}$ est l'entropie latente de fusion spécifique de la cire. Il faut naturellement s'assurer de n'appliquer l'équation (IV.30) que durant la période où la température de solidification a été atteinte, et seulement aussi longtemps qu'il reste de la paraffine liquide.

Comme le démontre la figure IV.11, le modèle fonctionne assez bien si nous rendons la conductance entropique $G_{S,\text{cire-eau}}$ pour le transfert d'entropie de la cire à l'eau dépendante de l'état de la paraffine dans les tubes. Nous choisissons de lui attribuer une valeur élevée pour la paraffine liquide et une valeur basse pour sa forme solide. Nous admettons que la transition se fait de manière linéaire, proportionnellement à la masse de cire liquide restante durant la phase de solidification. La température de fusion-solidification a été placée à 52°C dans le modèle, en accord avec la valeur moyenne des données pour différents types de paraffine. Notez l'apparition d'un segment horizontal dans la courbe de température de la cire dans le résultat de la simulation du modèle.

En fait, la cire est une substance relativement complexe qui ne fond ou ne se solidifie pas à une température bien définie. C'est un matériau composé de différentes sortes de paraffine, ce qui signifie que les composantes fondent ou se solidifient à

des températures légèrement différentes. Pour cette raison, la fonction qui présente un plateau à 52°C dans la figure IV.11 ne représente pas très bien la température réelle de la cire. Il aurait été compliqué d'inclure cet effet dans un modèle simple. Le résultat basé sur des hypothèses simplificatrices est encourageant, et ce modèle peut servir de base pour élaborer des prototypes.

CHAPITRE 12

EXTENSION AUX MILIEUX CONTINUS

Jusqu'à maintenant, les équations de bilan et les équations relatives à des processus, par exemple celles qui expriment les flux, les taux de source et les taux de production ont été énoncés dans leur forme intégrale, ce qui signifie qu'elles s'appliquaient à l'entier du système considéré. Même des exemples simples, tels que celui du flux de chaleur dans une barre métallique (section 5.1.5, fig. 5.7) ou la migration de la chaleur dans un cylindre métallique (section 5.7.2) montrent que les systèmes sont rarement uniformes. Les grandeurs considérées sont distribuées dans l'espace. Il est donc nécessaire de passer d'une description intégrale à une description locale des processus, ce que réalise la physique des milieux continus. Les équations qui décrivent la distribution locale des grandeurs physiques sont appelées les *équations de champ* de ces grandeurs. Alors que, dans les chapitres précédents, nous devions connaître les conditions initiales pour décrire l'évolution temporelle des processus, nous devons y ajouter les *conditions aux limites* du domaine considéré pour pouvoir décrire l'évolution locale des grandeurs participant au processus.

Dans ce qui va suivre, nous élaborerons les rudiments de cette théorie sans prétention de rigueur mathématique. Même si nous appliquerons, pour des raisons de simplicité, les résultats trouvés à des cas unidimensionnels, les équations des champs des grandeurs extensives telles que masse, quantité de mouvement, entropie, et des potentiels associés, seront implicitement contenues dans les relations utilisées.

Nous savons que les équations de bilan fondamentales de grandeurs extensives, même en forme locale, ne suffisent pas pour élaborer des modèles de processus continus. Il faut leur adjoindre les lois constitutives qui sont liées aux caractéristiques matérielles des processus envisagés. Après avoir établi les équations de bilan des grandeurs fondamentales en version locale, nous étudierons la conduction de la chaleur et celle de l'électricité pour illustrer l'application de la théorie.

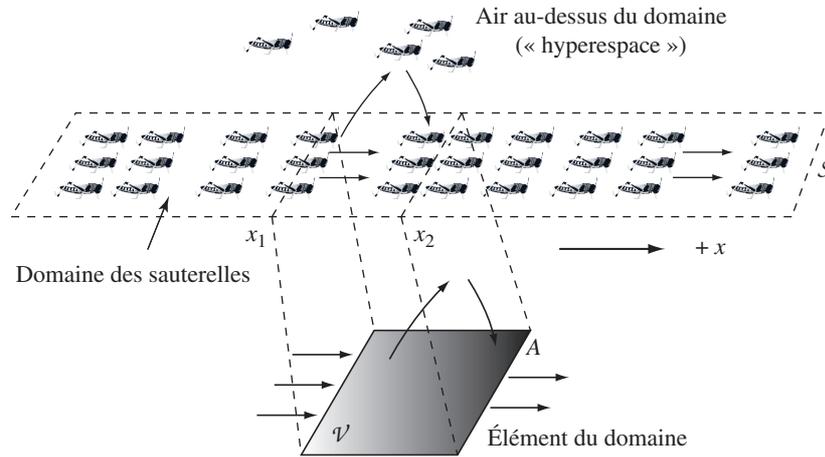
12.1 EXEMPLE INTRODUCTIF: MIGRATION DE SAUTERELLES

Pour illustrer le passage de systèmes homogènes à des systèmes continus et pour introduire quelques notions mathématiques simples, nous allons examiner une version simplifiée de la migration des sauterelles.

Nous admettons que les sauterelles vivent dans une couche très mince sur le sol, ce qui constitue un domaine à une dimension (fig. 12.1). Même s'il ne s'agit pas d'un espace tridimensionnel, nous appelons *volume* l'aire d'une région à l'intérieur de cette couche, et *surface* les limites de ce domaine. À l'intérieur de cette couche, le nombre de sauterelles varie localement, mais leur nombre est suffisamment grand pour que nous puissions admettre que la masse des insectes est distribuée de manière continue, mais variable, dans l'espace.

Les insectes qui volent ne font plus partie de leur espace, mais de l'air au-dessus de leur domaine que nous considérons comme un «hyperspace» qui leur permet de disparaître en un point et de réapparaître en un autre sans se mouvoir dans le domaine; cela correspond à notre description des processus radiatifs. Dans le domaine lui-même,

FIGURE 12.1 Sauterelles dans une couche unidimensionnelle à l'intérieur de laquelle il n'y a aucune variation perpendiculairement à la direction selon x . Les insectes peuvent se mouvoir dans la direction x aussi bien dans le sens positif que dans le sens négatif. Ils peuvent entrer dans leur domaine à partir de la couche d'air qui le surmonte ou quitter leur domaine pour rejoindre cet «hyperspace». Une partie du domaine (élément) a été singularisée pour pouvoir formuler les équations de bilan des sauterelles. Les nuances de gris indiquent la densité des sauterelles, les flèches symbolisent les processus. A est la largeur du domaine perpendiculairement à x , et x_1 et x_2 dénotent les extrémités du segment choisi pour l'analyse.



12.1.1 Densités des sauterelles et des grandeurs liées aux processus

Comme les grandeurs considérées varient d'un point à un autre, leurs valeurs seront exprimées au moyen de fonctions qui varient dans le temps et dans l'espace.

Densité des sauterelles. Comme nous avons admis que le nombre de sauterelles ne variait que dans une seule dimension, leur répartition dans l'espace sera décrite par une densité désignée par $\rho_s(x,t)$. Le nombre de sauterelles contenu dans un élément de l'espace tel que celui de la figure 12.1 sera donné par :

$$n_s(t) = \int_V \rho_s(x,t) dV = \int_{x_1}^{x_2} \rho_s(x,t) A dx \tag{12.1}$$

A est l'aire (côté) de l'élément qui s'étend de x_1 à x_2 et V est son volume bidimensionnel.

Transports conductifs. Les insectes franchissent la surface de l'élément en x_1 et x_2 (fig. 12.2). Un tel transport est décrit au moyen de courants conductifs. Comme le nombre d'insectes franchissant la frontière de l'élément varie le long de cette frontière (perpendiculairement à la direction des x), le processus est décrit au moyen d'une densité de courant j_s définie sur la ligne de largeur A . Comme les insectes ne franchissent pas nécessairement la frontière perpendiculairement à celle-ci, la composante en direction des x s'obtient en formant le produit scalaire du vecteur de densité de courant et du vecteur unitaire normal à la surface et l'intensité du courant net de sauterelles à travers une surface S s'obtient en intégrant cette composante sur cette surface ; pour la surface en x_1 nous avons :

$$I_{s,1}(t) = - \int_S j_s \cdot n_1(x_1,t) dA \tag{12.2}$$

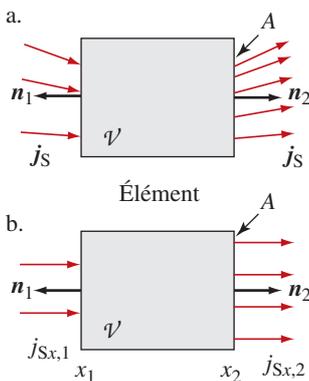


FIGURE 12.2 Distribution des courants à travers la surface d'une élément: (a) cas général; (b) transport unidimensionnel. On obtient cette composante en formant le produit scalaire du vecteur de densité de courant et du vecteur unitaire normal à la surface.

La pratique mathématique standard oriente le vecteur unitaire normal vers l'extérieur de la surface. Comme nous comptons positivement un flux entrant et négativement un flux émergent, nous devons faire précéder l'intégrale d'un signe négatif. Dans notre cas extrêmement simplifié, les intensités des courants sont égales à $j_{S,x}$ en x_1 et à $-j_{S,x}$ en x_2 (fig. 12.2b). Le courant conductif net est la somme des deux contributions :

$$I_{S,\text{net}}(t) = -(j_{S,2}(t) - j_{S,1}(t))A \quad (12.3)$$

Naissance et mort. Le processus de naissance et mort a de grandes similitudes avec les réactions chimiques qui amènent à l'apparition ou à la disparition de substances, ce que nous avons décrit à la section 6.3.4 au moyen de l'équation (6.19). Nous introduisons un taux de production de sauterelles $\Pi_S(t)$ mais, comme le processus peut varier spatialement à l'intérieur du volume \mathcal{V} considéré, nous devons avoir recours à une *densité de taux de production* π_S . Le taux de production sur ce volume s'obtient par intégration :

$$\Pi_S(t) = \int_{\mathcal{V}} \pi_S(x,t) dV = \int_{x_1}^{x_2} \pi_S(x,t) A dx \quad (12.4)$$

12.1.2 Une première équation de bilan des sauterelles

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer une version partielle de l'équation de bilan pour l'élément considéré. Le nombre de sauterelles dans l'élément varie à cause de la migration au sol (conduction) et de naissance et mort (production), ce qui donne l'équation de bilan suivante :

$$\frac{d}{dt} n_S(t) = I_{S,\text{net}}(t) + \Pi_S(t) \quad (12.5)$$

où n_S , $I_{S,\text{net}}$ et Π_S sont donnés respectivement par les équations (12.1), (12.3) et (12.4). Deux de ces termes sont des intégrales de volume, mais le second, relatif au courant, est une intégrale de surface. Il est toutefois possible de transformer une telle intégrale de surface en une intégrale de volume. Dans le cas unidimensionnel que nous traitons, le courant net est proportionnel à la différence des densités de courant aux extrémités de l'élément. Cette différence peut être obtenue en tant qu'intégrale dans la direction des x du taux de variation spatiale de $j_x(x)$:

$$I_{S,\text{net}}(t) = -(j_S(x_2,t) - j_S(x_1,t))A = -\int \frac{\partial j_{Sx}(x,t)}{\partial x} A dx$$

ou

$$I_{S,\text{net}}(t) = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial j_{Sx}(x,t)}{\partial x} dV \quad (12.6)$$

La dérivée partielle de la densité de courant qui apparaît sous l'intégrale est la première composante d'un vecteur que l'on appelle la *divergence* du vecteur de densité de courant. Cette notion sera précisée à la section 12.2.4.

Nous substituons les équations (12.1), (12.4) et (12.6) dans (12.5) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_s(x, t) dV = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial j_{sx}(x, t)}{\partial x} dV + \int_{\mathcal{V}} \pi_s(x, t) dV$$

Comme l'élément considéré est fixe, nous pouvons transformer la dérivée temporelle de l'intégrale du membre de gauche en :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_s(x, t) dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial t} dV$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial j_{sx}(x, t)}{\partial x} dV - \int_{\mathcal{V}} \pi_s(x, t) dV = 0$$

ou

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{sx}(x, t)}{\partial x} - \pi_s(x, t) \right] dV = 0$$

L'intégrale ne peut être nulle pour n'importe quelle valeur de x et t que si l'expression contenue dans les crochets s'annule, ce qui entraîne :

$$\frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{sx}(x, t)}{\partial x} = \pi_s(x, t) \tag{12.7}$$

Nous avons obtenu la *forme locale de l'équation de bilan* des sauterelles. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles pour la densité, la densité de flux et la densité du taux de production.

12.1.3 Quelques lois constitutives simples

Nous savons que la seule équation de bilan ne permet pas de modéliser le comportement dynamique d'un système, qu'il est nécessaire d'associer des lois constitutives ou lois de comportement qui décrivent les spécificités du système considéré. Nous proposons deux relations les plus simples possible pour le taux de production et la densité de flux.

Mort des sauterelles. Nous admettons que durant la période qui nous intéresse, il n'y a aucune naissance de sauterelles, uniquement des décès. L'une des idées les plus simples est d'admettre que le nombre de décès est proportionnel au nombre d'insectes vivants dans les système, ce qui s'énonce par :

$$\pi_s(x, t) = -f_d \rho_s(x, t) \tag{12.8}$$

où f_d est un facteur qui décrit à quelle vitesse la population décroît, de manière analogue au processus de désintégration radioactive modélisée à la section 6.8.4.

Mouvement des insectes. On observe en biologie des comportements semblables à ceux qu'on trouve en physique et en chimie. Nous admettons que les sauterelles ont tendance à migrer vers les régions où leur densité est moindre, ce qui peut être décrit simplement du point de vue mathématique. En effet, la pente de la courbe d'évolution de la densité des sauterelles est proportionnelle à l'intensité du flux d'insectes d'une région vers l'autre (fig. 12.3). La grandeur qui mesure cette pente est le *gradient* de la

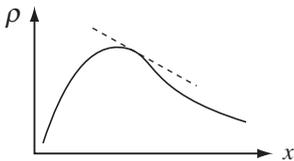


FIGURE 12.3 La pente de la courbe d'évolution de la densité des sauterelles détermine l'intensité du flux de diffusion des insectes.

densité. Nous admettons que le courant conductif de sauterelles est proportionnel à ce gradient :

$$j_{sx}(x, t) = -k \frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial x} \quad (12.9)$$

Le facteur k est une sorte de conductivité ou de coefficient de diffusion semblable à ceux qui apparaissent à la section 6.7 traitant de la diffusion et de l'osmose. Le signe négatif assure que le courant est dirigé vers les régions de densité moindre. Malgré le fait que le gradient ressemble à la divergence unidimensionnelle de l'équation (12.7), les deux grandeurs sont des objets mathématiques différents : la divergence opère sur des vecteurs, le gradient sur des grandeurs scalaires.

Équation de champ pour la densité. La substitution des lois constitutives dans l'équation de bilan aboutit à une équation aux dérivées partielles pour la densité :

$$\frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial \rho_s(x, t)}{\partial x} \right) = -f_d \rho_s(x, t) \quad (12.10)$$

En physique des milieux continus, une telle équation est appelée une *équation de champ*. Pour pouvoir résoudre une telle équation différentielle, il est nécessaire de connaître les conditions initiales et les conditions aux limites. La condition initiale pourrait par exemple spécifier la distribution de la densité au temps initial. Dans le cas simple considéré ici, il faut connaître les conditions aux limites du domaine, à savoir pour $x = 0$ et $x = L$. On pourrait par exemple spécifier la valeur de la densité aux deux extrémités du domaine, ou celle des flux, voire un mélange des deux.

12.1.4 Processus radiatifs et convectifs

Pour conclure cet exemple introductif, nous allons décrire comment nous pouvons traiter les deux autres types de processus, à savoir le rayonnement et la convection des sauterelles. Le premier sera assimilé au vol des sauterelles, le second peut être envisagé comme ce qui advient si les sauterelles sont emportées par une rivière ou le vent.

Processus radiatif. Lorsqu'un insecte s'envole vers l'«hyperspace», il disparaît du domaine, alors qu'il y apparaît s'il s'y pose. Ce processus est très semblable à celui du rayonnement que nous avons décrit au moyen du taux de source Σ au chapitre 11. Le passage au cas continu consiste à introduire une *densité de taux de source* σ . Le taux de source des sauterelles dans l'élément de la figure 12.1 est donné par l'intégrale de volume de la densité du taux de source :

$$\Sigma_s(t) = \int_{\mathcal{V}} \sigma_s(x, t) dV \quad (12.11)$$

La différence entre cette équation et l'équation (12.4) relative au taux de production réside dans le fait que dans le cas du rayonnement, les insectes arrivent d'un espace différent, alors que dans la production, ils surgissent dans le domaine à partir de rien.

Transport par convection. La différence entre un flux conductif et un flux par convection est que ce dernier fait intervenir la vitesse \mathbf{v} d'écoulement du courant qui entraîne les sauterelles. Si nous admettons que la densité des sauterelles dans ce courant est égale à $\rho_{S, \text{conv}}$, nous pouvons utiliser les idées développées à la section 11.6.1 (fig. 11.27 et l'équation (11.65)). Dans notre cas unidimensionnel, le courant convectif est donné par $I_{S, \text{conv}} = A \rho_{S, \text{conv}} \mathbf{v}$. La *densité de flux convectif* $j_{S, \text{conv}}$ est égale à :

$$j_{S,\text{conv}} = \rho_{S,\text{conv}} \mathbf{V} \quad (12.12)$$

La vitesse d'écoulement pourrait être obtenue à partir d'un modèle de l'écoulement du fluide. Il est fréquent qu'un modèle dans lequel apparaissent des processus convectifs soit un modèle couplé qui fait intervenir les caractéristiques de la grandeur transportée et du fluide transporteur.

Forme générale de l'équation de bilan des sauterelles. Nous ajoutons les termes liés au processus de rayonnement et de convection à notre équation de bilan provisoire. La forme intégrée de l'équation de bilan complète est :

$$\frac{d}{dt} n_S(t) = I_{S,\text{cond,net}}(t) + I_{S,\text{conv,net}}(t) + \Sigma_S(t) + \Pi_S(t) \quad (12.13)$$

Nous appliquons la même procédure que celle qui a amené l'équation (12.7) pour obtenir :

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (j_{Sx,\text{cond}} + \rho_{S,\text{conv}} \mathbf{V}) = \sigma_S + \pi_S \quad (12.14)$$

soit la forme locale la plus générale de l'équation de bilan des sauterelles.

Dans les sections suivantes, nous allons formaliser et généraliser les notions que cet exemple nous a permis d'introduire en les appliquant à quelques-unes des grandeurs qui sont apparues dans les chapitres précédents, à savoir la masse, l'entropie et la quantité de mouvement.

12.2 DENSITÉS ET DENSITÉS DE FLUX

Au chapitre 11, dans le cadre de l'étude des phénomènes de transport, nous avons énoncé le bilan d'entropie d'un corps au moyen de l'équation (11.9) :

$$\dot{S} = I_{S,\text{conv}} + I_{S,\text{cond}} + \Sigma_S + \Pi_S \quad (12.15)$$

Cette relation, qui exprime le fait que l'entropie d'un corps peut changer en conséquence de trois types de transport, la convection, la conduction et le rayonnement, ainsi que des effets de l'irréversibilité, fait apparaître sous forme intégrale le taux de variation de la grandeur extensive et des flux, taux de source et taux de production responsables de cette variation.

Pour adapter ces relations à un système non uniforme, les équations de bilan et les lois constitutives doivent être formulés localement. Cette forme locale fait intervenir les densités des grandeurs impliquées.

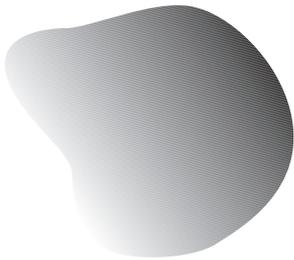


FIGURE 12.4 La densité d'une grandeur nous informe sur sa distribution dans l'espace. Si cette densité est variable localement, nous devons intégrer la distribution sur le volume occupé pour obtenir la quantité de cette grandeur contenue dans le système.

12.2.1 Densités de grandeurs extensives

La densité ρ_Q d'une grandeur extensive Q indique de quelle manière elle est distribuée dans l'espace. Si la densité est constante, la quantité contenue dans un volume donné est égale au produit de la densité et du volume. En revanche, si la densité est variable (fig. 12.4), on obtient la valeur de la quantité contenue dans un volume \mathcal{V} par intégration de la densité sur le volume :

Si ρ représente la masse volumique d'une grandeur Q , et $q = Q/m$ sa densité spécifique, alors la densité volumique ρ_Q de cette grandeur est exprimée par :

$$\rho_Q = \rho q \quad (12.16)$$

Il s'ensuit que la quantité de la grandeur Q contenue dans un volume \mathcal{V} est donnée par :

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho_Q dV \quad (12.17)$$

ou

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho q dV \quad (12.18)$$

Appliquons cette relation aux diverses grandeurs extensives rencontrées dans les chapitres précédents.

Entropie. L'entropie d'un système est donnée par :

$$S = \int_{\mathcal{V}} \rho_s dV = \int_{\mathcal{V}} \rho s dV \quad (12.19)$$

où s est l'entropie spécifique que nous avons introduite par la relation (5.25).

Quantité de mouvement. Pour un mouvement dans une seule dimension, nous obtenons :

$$p = \int_{\mathcal{V}} \rho_p dV = \int_{\mathcal{V}} \rho v dV \quad (12.20)$$

La vitesse \mathbf{v} de la matière en mouvement représente sa quantité de mouvement spécifique. Vu que la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, nous devons généraliser l'équation (12.20) sous forme vectorielle :

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dV \quad (12.21)$$

Dans un repère cartésien, les composantes sont :

$$\begin{aligned} p_x &= \int_{\mathcal{V}} \rho v_x dV \\ p_y &= \int_{\mathcal{V}} \rho v_y dV \\ p_z &= \int_{\mathcal{V}} \rho v_z dV \end{aligned} \quad (12.22)$$

Lorsque l'on travaille avec les composantes cartésiennes de la quantité de mouvement, on peut les considérer comme trois grandeurs scalaires indépendantes les unes des autres que l'on peut traiter comme la masse ou l'entropie.

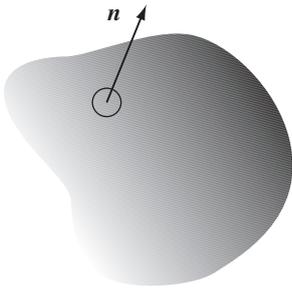
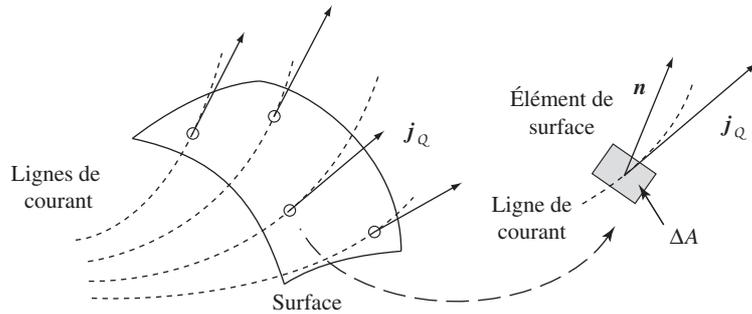


FIGURE 12.5 Le vecteur normal \mathbf{n} définit l'orientation positive de la surface entourant un corps lorsqu'il pointe vers l'extérieur.

FIGURE 12.6 La répartition des lignes de courant traversant une surface détermine la densité de flux à travers cette surface. La densité de flux d'une grandeur scalaire est un vecteur dont la direction est tangente aux lignes de courant. L'orientation de ce vecteur par rapport au vecteur \mathbf{n} perpendiculaire à cette surface doit être prise en compte lors de l'évaluation du flux à travers la surface.



12.2.2 Densités de flux

La densité \mathbf{j}_Q du flux d'une grandeur extensive Q sert à mesurer la distribution du courant à travers une surface S , tout comme la densité de cette grandeur décrit sa distribution dans l'espace. Un flux a une intensité, une direction et un sens, il s'agit donc d'un vecteur. Pour pouvoir attribuer un signe à la densité de flux, il est nécessaire d'orienter la surface qu'il traverse au moyen d'un vecteur \mathbf{n} , de norme égale à l'unité, normal à cette surface. Lorsque la surface S est fermée, le vecteur normal définit l'orientation positive de la surface lorsqu'il pointe vers l'extérieur du corps qu'elle entoure (fig. 12.5). Si la surface S est ouverte, le vecteur normal peut être choisi arbitrairement.

L'intensité du flux dépendra de sa densité et de l'orientation des lignes de courant par rapport à la surface traversée. Comme cette orientation est variable, on découpe la surface en éléments ΔA suffisamment petits pour que la densité de flux puisse être considérée comme constante sur cet élément (fig. 12.6). On se rend compte que l'intensité est maximale lorsque les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{j}_Q sont parallèles et nulle s'ils sont mutuellement perpendiculaires, c'est-à-dire si le flux est parallèle à la surface. L'intensité du flux sera donc proportionnelle au produit scalaire des deux vecteurs et à l'aire de l'élément de surface.

Dans les chapitres précédents, nous avons attribué un signe positif à l'intensité des flux entrant dans un domaine. Il s'ensuit que le lien entre l'intensité et la densité du flux sera donné par :

$$I_Q = - \int_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dA \tag{12.23}$$

L'équation (12.15) met en évidence la distinction entre les courants conductifs, qui s'écoulent à travers la matière, et les courants convectifs qui s'écoulent avec la matière. L'intensité d'un courant convectif peut être exprimée en tant que produit du courant de masse I_m et de la valeur spécifique q de la grandeur transportée :

$$I_{Q, \text{conv}} = q I_m \tag{12.24}$$

Le flux de masse est égal au produit de la densité du matériau et du flux volumique. Cette dernière grandeur s'obtient par intégration sur la surface traversée de la densité du flux volumique qui est égale à la vitesse d'écoulement. Pour alléger l'écriture, nous remplaçons l'expression $\mathbf{n}dA$ par le vecteur $d\mathbf{A}$. Ainsi :

$$I_V = - \int_S \mathbf{j}_V \cdot d\mathbf{A} = - \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \tag{12.25}$$

On déduit que la densité de flux volumique est égale à la vitesse de l'écoulement :

$$\mathbf{j}_V = \mathbf{V} \quad (12.26)$$

et que la densité de flux de masse de la grandeur Q est le produit de sa densité et de la vitesse d'écoulement :

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{V} \quad (12.27)$$

Il s'ensuit que la densité de flux convectif d'une grandeur Q est donnée par le produit de sa valeur spécifique et de la densité de flux de masse :

$$\mathbf{j}_{Q,\text{conv}} = q \rho \mathbf{V} \quad (12.28)$$

Si $\mathbf{j}_{Q,\text{cond}}$ représente la densité du flux conductif, la densité de flux totale sera

$$\mathbf{j}_Q = q \rho \mathbf{V} + \mathbf{j}_{Q,\text{cond}} \quad (12.29)$$

et l'intensité du flux total devient :

$$I_Q = - \int_S (q \rho \mathbf{V} + \mathbf{j}_{Q,\text{cond}}) \cdot d\mathbf{A} \quad (12.30)$$

Densité de flux massique. Il n'y a pas de flux conductif de masse, ce qui implique que l'intensité du flux massique est donnée par l'équation (12.27) :

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{V} \quad (12.31)$$

Densité de flux d'entropie. Comme l'entropie est une grandeur scalaire, comme la masse ou la charge électrique, il suffit de substituer sa valeur spécifique dans la relation (12.29) :

$$\mathbf{j}_s = s \rho \mathbf{V} + \mathbf{j}_{s,\text{cond}} \quad (12.32)$$

Densité de flux de quantité de mouvement. À la section 8.4, nous avons découvert que le flux de quantité de mouvement en mode conductif entraîne l'apparition de contraintes au sein de la matière dans laquelle il s'écoule. La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, ce qui implique que l'on doit rattacher à chacune de ses composantes une densité de flux qui est aussi une grandeur vectorielle.

Pour simplifier l'élaboration de la relation exprimant la densité de flux de la quantité de mouvement, nous ne considérons qu'une des composantes de la quantité de mouvement. Par exemple, pour la composante selon Ox , sa valeur spécifique est la composante correspondante de la vitesse. Nous avons donc :

$$\mathbf{j}_{px} = \rho v_x \mathbf{V} + \mathbf{j}_{px,\text{cond}} \quad (12.33)$$

Les trois composantes de ce vecteur de densité de flux sont :

$$\begin{aligned}
 j_{p_{xx}} &= \rho \mathbf{V}_x \mathbf{V}_x + j_{p_{xx}, \text{cond}} \\
 j_{p_{xy}} &= \rho \mathbf{V}_x \mathbf{V}_y + j_{p_{xy}, \text{cond}} \\
 j_{p_{xz}} &= \rho \mathbf{V}_x \mathbf{V}_z + j_{p_{xz}, \text{cond}}
 \end{aligned}
 \tag{12.34}$$

La signification des composantes est la suivante: $j_{p_{xx}}$ représente la densité de flux de la composante selon Ox de la quantité de mouvement s'écoulant dans la direction Ox , alors que $j_{p_{xy}}$ est la densité de flux de la même composante s'écoulant dans la direction Oy .

Le traitement des deux autres composantes du vecteur de densité de flux se fait de manière analogue. On obtient ainsi neuf composantes de ce que l'on appelle le *tenseur* de densité de flux de la quantité de mouvement. Les composantes du tenseur sont disposées dans une matrice dont chacune des lignes contient les trois composantes d'un des vecteurs de densité de flux. Les composantes de l'équation (12.34) constituent la première ligne du tenseur de densité de flux de la quantité de mouvement.

12.2.3 Densités de taux de source et de taux de production

À côté des flux conductif et convectif, l'équation de bilan de l'entropie (12.15) contient également un terme de source et un terme de production, représentés par leurs taux respectifs.

Le taux de source Σ_Q indique à quel taux la grandeur extensive Q apparaît ou disparaît à l'intérieur d'un corps ou d'un domaine. Dans le cas continu, ce taux peut varier localement, ce qui rend nécessaire l'introduction d'une densité locale que nous désignons par σ_Q .

Le lien entre le taux de source et sa densité est :

$$\Sigma_Q = \int_V \sigma_Q dV = \int_V \rho f_Q dV
 \tag{12.35}$$

où f_Q est le taux de source spécifique.

Pour le taux de production, on procède de manière analogue :

$$\Pi_Q = \int_V \pi_Q dV
 \tag{12.36}$$

Rappelons que seule l'entropie admet un taux de production strictement positif ou nul.

12.2.4 Transformation d'une intégrale de surface en intégrale de volume

Les équations de bilan qui apparaîtront à la section suivante mettent en relation la variation d'une grandeur à l'intérieur d'un système et les flux de cette grandeur à travers les surfaces qui englobent ce système. Pour obtenir la variation totale, nous serons amenés à intégrer la densité de la grandeur sur le volume du système et celle des flux sur les surfaces traversées. La conversion de l'intégrale de surface en une intégrale de volume nous permettra d'établir la forme locale des équations de bilan.

Cette conversion d'intégrale, qui sera démontrée à la section 13.3.2 du prochain chapitre, est applicable à tout champ vectoriel \mathcal{C} . La variation locale de son intensité est égale à la somme des variations de ses composantes, que l'on appelle sa *divergence* :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}) = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad (12.37)$$

En vertu du *théorème de la divergence*, ou *théorème de GAUSS*, le flux total du champ \mathbf{C} à travers la surface qui englobe le domaine envisagé est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume du domaine :

$$\int_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{C}) dV \quad (12.38)$$

12.3 BILANS EN NOTATION LOCALE

Lors du passage de systèmes uniformes à des systèmes qui ne le sont pas, les équations de bilan telles que celle qui est énoncée par l'équation (12.15) doivent être formulées de manière locale. Nous allons le faire pour les grandeurs extensives que nous avons rencontrées jusqu'ici.

12.3.1 Bilan de masse

La première des grandeurs semblables à un fluide dont nous devons énoncer le bilan serait la quantité de matière. Dans la pratique des sciences de l'ingénieur, il est usuel d'utiliser plutôt la masse, tant qu'il n'y a pas de réactions chimiques à l'intérieur du matériau considéré. Partant de la formulation intégrée de l'équation de bilan de la masse :

$$\dot{m} = I_m \quad (12.39)$$

nous remplaçons la masse par son intégrale sur un volume de contrôle \mathcal{V} , tel que celui de la figure 12.8 pour le cas unidimensionnel, et le flux par l'intégrale de sa densité sur la surface S qui enferme le volume de contrôle, comme nous l'avons exprimé au moyen de l'équation (12.23). Après substitution de la relation (12.27), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (12.40)$$

Au moyen du théorème de la divergence, nous transformons l'intégrale sur la surface du membre de droite de l'équation (12.40) en une intégrale sur le volume enfermé :

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

Après avoir appliqué la dérivée temporelle à l'intégrande du membre de gauche de la relation (12.40) et rassemblé les termes, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

L'intégrale doit être nulle pour un volume arbitraire, ce qui n'est possible que si l'intégrande de la dernière expression est nul. Nous obtenons finalement :

Bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (12.41)$$

Cette équation de bilan de la masse est usuellement appelée équation de continuité. Explicitement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (12.42)$$

12.3.2 Bilan d'entropie

L'entropie est une grandeur scalaire comme la masse, ce qui veut dire que la version locale de l'équation de bilan sera semblable. Si nous ne prenons pas en compte l'apport d'entropie par rayonnement, la forme intégrée de l'équation de bilan est :

$$\dot{S} = I_{S, \text{conv}} + I_{S, \text{cond}} + \Pi_S \quad (12.43)$$

Sa version locale devient :

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho s) dV + \int_S (s \rho \mathbf{v} + \mathbf{j}_{s, \text{cond}}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \pi_s dV \quad (12.44)$$

Nous transformons l'intégrale de surface du deuxième terme du membre de gauche en une intégrale de volume au moyen du théorème de la divergence et rassemblons tous les termes :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div}(s \rho \mathbf{v} + \mathbf{j}_{s, \text{cond}}) - \pi_s \right] dV = 0 \quad (12.45)$$

L'intégrale doit être nulle, quel que soit le volume considéré, ce qui impose la nullité de l'intégrande. La forme locale de l'équation de bilan de l'entropie, sans prise en compte du rayonnement, devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div}(s \rho \mathbf{v} + \mathbf{j}_{s, \text{cond}}) = \pi_s \quad (12.46)$$

12.3.3 Bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement peut être établi de manière analogue à celui des grandeurs qui précèdent, à la différence près que la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, ce qui implique que sa densité de flux conductif est un tenseur, comme nous l'avons vu à la section 12.2.2. Cette particularité rend l'établissement de l'équation de bilan dans sa forme la plus générale extrêmement complexe. Toutefois, on rencontre couramment des flux unidimensionnels de quantité de mouvement, et nous allons nous baser sur une telle situation pour établir une version de l'équation de bilan de la quantité de mouvement dans une seule dimension.

Considérons un fluide non visqueux qui s'écoule dans une conduite verticale, de haut en bas (fig. 12.7). L'écoulement transporte en mode convectif une composante unique du flux de quantité de mouvement. La même composante de la quantité de mouvement qui s'écoule à travers le fluide implique qu'il est soumis à des contraintes de tension ou de compression dans la même direction. Nous complétons l'analyse par l'adjonction d'un taux de source qui prend en compte l'apport de quantité de mouvement par l'intermédiaire du champ de pesanteur.

Nous rassemblons toutes ces contributions en une formulation intégrale de l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\dot{p} = I_{p,\text{conv}} + I_{p,\text{cond}} + \Sigma_p \quad (12.47)$$

où p représente (pour l'instant) la composante selon Oz de la quantité de mouvement. Après introduction des densités de flux correspondantes, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (\rho v) dV + \int_S (\rho v v + j_{p,\text{cond}}) dA = \int_{\mathcal{V}} \sigma_p dV \quad (12.48)$$

Nous appliquons le théorème de la divergence sur cette composante :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v v + j_{p,\text{cond}}) - \sigma_p \right] dV = 0$$

L'intégrande doit être nul, ce qui entraîne que la forme locale de l'équation de bilan de la quantité de mouvement pour un écoulement strictement unidimensionnel est :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v v + j_{p,\text{cond}}) = \sigma_p \quad (12.49)$$

La généralisation à trois dimensions implique la prise en compte du caractère vectoriel de la densité du flux de quantité de mouvement. Les trois composantes de l'équation de bilan de la quantité de mouvement sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \text{div}(\rho v_x \mathbf{v} + \mathbf{j}_{px,\text{cond}}) &= \sigma_{px} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) + \text{div}(\rho v_y \mathbf{v} + \mathbf{j}_{py,\text{cond}}) &= \sigma_{py} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) + \text{div}(\rho v_z \mathbf{v} + \mathbf{j}_{pz,\text{cond}}) &= \sigma_{pz} \end{aligned} \quad (12.50)$$

Chacune de ces trois équations a elle-même trois composantes. Ces neuf composantes peuvent être rassemblées en une seule expression si l'on utilise le tenseur du flux de quantité de mouvement dont il a été question à la section 12.2.2.

Dans le cas d'un flux unidimensionnel de l'équation (12.49), la densité de flux conductif de quantité de mouvement correspond à l'état de compression du fluide, ce qui implique :

$$j_{p,\text{cond}} = P \quad (12.51)$$

Si le fluide est visqueux, un terme supplémentaire apparaît dans la densité de flux conductif.

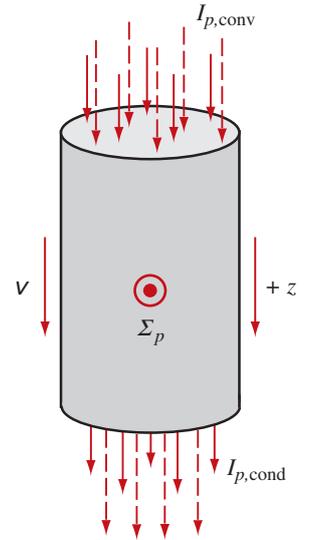


FIGURE 12.7 Écoulement à travers une conduite verticale. Les lignes de courant symbolisent respectivement les flux conductif et convectif de quantité de mouvement, et le point entouré d'un cercle la source de quantité de mouvement due à l'interaction du fluide avec le champ de pesanteur.

Le terme de source est la conséquence de l'interaction avec le champ de pesanteur. La densité de source est donc :

$$\sigma_p = \rho g \quad (12.52)$$

ce qui implique que le taux de source spécifique f_Q introduit dans l'équation (12.35) correspond à l'intensité g du champ de pesanteur. L'influence de champs différents de celui de pesanteur peut être prise en compte de manière analogue.

12.3.4 Dérivée matérielle ou particulaire

Dans la forme locale des bilans, les dérivées qui apparaissent dans les équations sont des dérivées partielles, ce qui veut dire que, par exemple, la dérivée par rapport au temps est effectuée à une position fixe. Cette manière d'énoncer les équations de bilan de grandeurs extensives est appelée *description eulérienne*.

Une autre manière de présenter les équations de bilan consiste à envisager un volume de contrôle fermé qui se déplace avec le courant. Considérons par exemple une des composantes de l'équation du bilan d'entropie (12.46) et évaluons les dérivées temporelles des produits :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} + s \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial j_{s, \text{cond}}}{\partial x} = \pi_s$$

ou

$$\rho \left[\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right] + s \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right] + \frac{\partial j_{s, \text{cond}}}{\partial x} = \pi_s$$

La composante correspondante de l'équation du bilan de masse (12.41) implique que le contenu de la seconde paire de crochets est nul. Dans cette nouvelle version de l'équation de bilan d'entropie :

$$\rho \left[\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right] + \frac{\partial j_{s, \text{cond}}}{\partial x} = \pi_s \quad (12.53)$$

les flux convectifs ont disparu. On introduit généralement un nouvel opérateur différentiel :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \quad (12.54)$$

que l'on appelle *dérivée matérielle* ou *dérivée particulaire*. L'équation (12.53) peut être réécrite :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} + \frac{\partial j_{s, \text{cond}}}{\partial x} = \pi_s \quad (12.55)$$

Dans cette version de l'équation du bilan, appelée *description lagrangienne*, le taux de variation dans le temps de la grandeur s correspond à celui que mesurerait un observateur emporté par le fluide, alors que dans la description eulérienne, l'observateur est à un endroit fixe.

12.4 LIEN AVEC L'ÉNERGIE

Comme l'énergie participe à tous les processus, il est carrément impossible de présenter une version universelle de son équation de bilan. Nous ne considérerons donc que le lien avec les trois grandeurs dont il est question dans les sections précédentes, ce qui revient à traiter le cas d'un fluide caloporteur.

12.4.1 Densité d'énergie et densité de flux d'énergie

Nous considérons un fluide qui s'écoule à travers un volume de contrôle unidimensionnel comme celui de la figure 12.8. De l'énergie est transportée à travers les faces du volume par la masse, l'entropie et la quantité de mouvement et peut également y être stockée. Comme l'énergie ne peut pas être produite, nous devons établir les relations correspondant à la densité d'énergie dans le fluide, densité des flux d'énergie à travers la surface et densité de sources d'énergie due à des apports par rayonnement.

Densité d'énergie d'un fluide. Un fluide contient une certaine quantité d'énergie qui dépend de son état déterminé par les valeurs de la température, de la pression et de sa vitesse. Il est usuel d'écrire la densité d'énergie du fluide en tant que somme de deux termes, la densité d'énergie interne et la densité d'énergie cinétique due à son mouvement. Si nous utilisons les valeurs spécifiques, nous avons :

$$\rho e = \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (12.56)$$

Dans cette expression, e représente l'énergie spécifique, alors que u correspond à l'énergie interne spécifique ou partie intrinsèque de e . Le second terme est l'énergie cinétique spécifique. L'énergie d'un fluide en mouvement peut donc être écrite en tant que :

$$E = \int_V \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \quad (12.57)$$

Densité de courant d'énergie. Dans un premier temps, nous allons étudier les apports d'énergie en mode convectif et en mode conductif :

$$j_E = j_{E,\text{conv}} + j_{E,\text{cond}} \quad (12.58)$$

Ces grandeurs sont des vecteurs dans le cas général. L'apport par convection est dû à l'énergie stockée par le fluide qui franchit les limites du système. La densité de flux d'énergie est le produit du flux massique et de l'énergie spécifique du fluide :

$$j_{E,\text{conv}} = \rho v e = \rho v \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (12.59)$$

Pour l'apport d'énergie par conduction, nous nous limitons aux contributions thermiques par chauffage ou refroidissement, ou mécanique par échange conductif de quantité de mouvement :

$$j_{E,\text{cond}} = j_{E,\text{therm}} + j_{E,\text{méc}} \quad (12.60)$$

Le premier terme sera explicité suivant le processus considéré. Le second terme est lié au flux conductif de quantité de mouvement et à la vitesse du fluide lors du franchissement des limites du système :

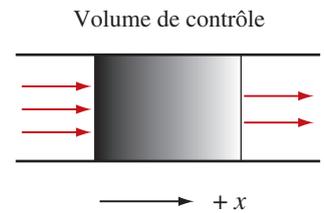


FIGURE 12.8 Flux unidimensionnel à travers un volume de contrôle ouvert et stationnaire.

$$j_{E,\text{méc}} = \mathbf{V}j_{p,\text{cond}} \quad (12.61)$$

Rappelons qu'en trois dimensions les deux facteurs du produit sont des vecteurs et qu'il s'agit alors d'un produit scalaire. Nous rassemblons les contributions des processus pris en compte pour obtenir :

$$j_E = \rho \mathbf{V} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \mathbf{V}j_{p,\text{cond}} + j_{E,\text{therm}} \quad (12.62)$$

Sources d'énergie. L'apport direct d'énergie à l'intérieur d'un corps ou d'un volume de contrôle est dû à l'interaction avec les champs. Nous le prenons en compte en introduisant une densité de source d'énergie telle que :

$$\Sigma_E = \int_V \sigma_E dV \quad (12.63)$$

L'introduction de l'interaction gravitationnelle et de l'absorption de rayonnement dans la densité de source d'énergie entraîne :

$$\sigma_E = \rho (f_p \mathbf{V} + r) \quad (12.64)$$

où $f_p = g$ est le taux de source spécifique de quantité de mouvement (la force volumique spécifique) et r le taux d'absorption spécifique d'énergie apportée par le rayonnement.

12.4.2 Bilan d'énergie

La version intégrée

$$\dot{E} = I_E + \Sigma_E \quad (12.65)$$

peut être exprimée localement au moyen des densités de flux et de taux de source :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}'} \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) dV + \int_S \left[\rho \mathbf{V} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \mathbf{V}j_{p,\text{cond}} + j_{E,\text{therm}} \right] dA \\ = \int_{\mathcal{V}'} \rho (f_p \mathbf{V} + r) dV \end{aligned} \quad (12.66)$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume. Après avoir rassemblé tous les termes dans l'intégrale de volume, qui doit être nulle, nous obtenons :

Équation de bilan de l'énergie en version locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \mathbf{V} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \mathbf{V}j_{p,\text{cond}} + j_{E,\text{therm}} \right] = \rho (f_p \mathbf{V} + r) \quad (12.67)$$

Tout ou partie des équations de bilan de masse, d'entropie, de quantité de mouvement et d'énergie va servir de base à la description d'écoulement de fluides ou de contraintes dans les solides.

EXEMPLE 12.1. Accumulation d'énergie dans un lit de galets (pebble bed).

Un lit de galets (pebble bed) consiste en un ensemble de pierres, billes, etc. enfermées dans un conteneur. Un gaz caloporteur traverse le système, soit pour y amener la chaleur (et l'énergie) pour permettre son accumulation, soit pour l'en extraire afin de la transporter où elle est utilisée.

Déterminez, pour le cas unidimensionnel, les équations différentielles pour la température de l'air insufflé et celle des galets en fonction du temps et de la position axiale. Admettez un conteneur de longueur L et de section A (fig. 12.9). Désignez par e la partie vide (inoccupée par les galets) du volume du conteneur, et par A^* l'aire de la surface des galets. Par mesure de simplification, admettez qu'il n'y a pas de déperdition de chaleur vers l'environnement, que la température des galets est uniforme et que l'on peut négliger la contribution cinétique dans le bilan d'énergie.

SOLUTION: Pour l'air, nous devons d'abord formuler les équations de bilan. Vu que le processus se déroule dans une seule dimension, l'équation de bilan de la masse (12.41) est:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (\text{E.1})$$

Dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement, la densité de flux de quantité de mouvement en mode conductif est la pression P , ce qui implique que cette équation devient:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Mais tous les termes de cette équation de bilan sont nuls, vu que nous admettons que la vitesse et la pression ne varient pas.

La densité de taux de source de l'énergie tient compte du fait que nous modélisons les effets du transfert d'entropie et d'énergie de l'air aux galets en tant que source (ou puits) à l'intérieur du volume. L'équation de bilan de l'énergie privée du terme de l'énergie cinétique devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} [u \rho v + v P] = \sigma_E$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + v \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial v}{\partial x} = \sigma_E$$

En vertu de l'équation de bilan de la masse (E.1), la somme des deuxième et troisième termes est nulle, ce qui entraîne:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial v}{\partial x} = \sigma_E \quad (\text{E.2})$$

Sachant que le processus se déroule à pression constante, nous introduisons l'enthalpie spécifique

$$h = u + \frac{1}{\rho} P$$

dans l'équation de bilan de l'énergie (E.2):

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} - v \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial v}{\partial x} = \sigma_E$$

Autant la pression que la vitesse sont constantes, ce qui implique que le bilan d'énergie se réduit à:

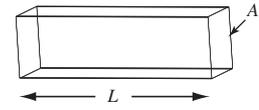


FIGURE 12.9 Dimensions du lit de galets.

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma_E$$

σ_E est le taux de transfert d'énergie de l'air aux galets par unité de volume d'air. Désignons par h le coefficient de transfert de chaleur. σ_E devient alors :

$$\sigma_E = -\frac{A^* h'}{eAL} (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}}) = -\frac{h^*}{e} (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}})$$

où h^* est le produit du coefficient de transfert de chaleur entre l'air et les galets et de l'aire des galets par unité de volume. Avec l'enthalpie spécifique :

$$h = c_p (T_{\text{air}} - T_{\text{réf}})$$

nous obtenons :

$$e(\rho c_p)_{\text{air}} \frac{\partial T_{\text{air}}}{\partial t} + e(\rho v c_p)_{\text{air}} \frac{\partial T_{\text{air}}}{\partial x} = -h^* (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}})$$

Nous introduisons le flux massique d'air à travers le système $I_m = eAV\rho$. L'évolution de la température de l'air est donnée par :

$$(\rho c_p)_{\text{air}} e \frac{\partial T_{\text{air}}}{\partial t} = -\frac{1}{A} (I_m c_p)_{\text{air}} \frac{\partial T_{\text{air}}}{\partial x} - h^* (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}})$$

Si nous avons admis que la température des galets varie localement, nous devrions recourir à une version étendue de l'équation (12.96) avec prise en compte du taux de source d'énergie. Comme nous admettons que la température des galets est spatialement uniforme, il s'agit ici d'un processus de chauffage uniforme modélisé par les versions locales des équations de la section 10.4.2

$$(\rho c_p)_{\text{galets}} \frac{\partial T_{\text{galets}}}{\partial t} = \sigma_E$$

Ici, σ_E doit être calculé par rapport au volume des galets :

$$\sigma_E = \frac{A^* h'}{(1-e)AL} (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}}) = \frac{h^*}{(1-e)} (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}})$$

L'évolution de la température des galets est donnée par :

$$(\rho c_p)_{\text{galets}} (1-e) \frac{\partial T_{\text{galets}}}{\partial t} = h^* (T_{\text{air}} - T_{\text{galets}})$$

Les lits de galets sont utilisés dans les réacteurs nucléaires modulaires à lit de boulets dont le principe est illustré dans la figure 12.10. Le matériau fissile est enfermé dans des microbilles d'environ un millimètre de diamètre enrobées de plusieurs couches de graphite. Le graphite sert de modérateur. Les microbilles sont compressées pour former une sphère de la taille d'une balle de tennis enrobée d'une nouvelle couche de graphite. La chaleur produite est recueillie par un gaz semi-inerte tel que l'hélium et amenée vers l'échangeur de chaleur qui chauffe l'eau afin de produire la vapeur qui entraîne la turbine. Le principe de base consiste en l'intégration continue des sphères de combustible par le haut du réacteur et à leur retrait par le bas pour contrôle et éventuelle réinsertion.

La sécurité est augmentée par rapport aux réacteurs traditionnels, vu que le caloporteur est un gaz rare ni nocif, ni inflammable, ni explosif. D'autre part, les températures de sortie élevées

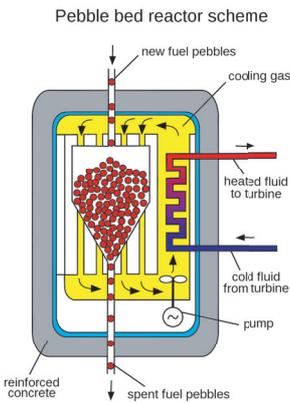


FIGURE 12.10 Principe de fonctionnement d'un réacteur à lit de boulets.

(750°C) permettent une efficacité augmentée. En revanche, la puissance globale est réduite, la taille des réacteurs ne permet pas de dépasser une puissance d'environ 100 MW. ■

12.5 CONDUCTION THERMIQUE

À côté des flux convectifs de grandeurs extensives, les flux conductifs de ces grandeurs jouent un rôle important dans la nature et dans les processus techniques. Ainsi, la chaleur migre à travers la croûte terrestre à la fois par convection mais également par conduction. Dans toutes les applications techniques, l'énergie électrique est transportée majoritairement en mode conductif.

Dans ce qui va suivre, nous allons traiter de la conduction de l'entropie dans une dimension puis, dans la section suivante, nous traiterons du couplage entre deux processus en l'illustrant par l'étude de processus thermoélectriques.

12.5.1 Bilan stationnaire de conduction d'entropie dans un corps continu

Nous envisageons le flux dans une dimension d'entropie en mode conductif, par exemple le flux d'entropie dans une barre métallique (fig. 12.11), comme celui qui a été traité précédemment (chapitre 5, section 5.1.5, fig. 5.7). Dans un premier temps, nous considérons la conduction de l'entropie en régime stationnaire sans apport d'entropie (la bougie est éteinte). Cela implique que, dans l'équation (12.15), le taux de variation de l'entropie, les flux convectifs et le taux de source s'annulent, ce qui nous laisse :

$$0 = I_S + \Pi_S \quad (12.68)$$

Vu qu'il n'y a pas de flux convectif, nous avons représenté le flux conductif par I_S pour alléger l'écriture. Comme il s'agit d'un flux unidimensionnel, la densité du courant conductif d'entropie se réduit à sa composante selon Ox que nous désignerons par j_S . Selon l'équation (12.2), le flux total à travers la surface fermée du volume de contrôle sera donné par :

$$I_S = - \int_S j_S dA \quad (12.69)$$

De manière analogue, nous évaluons le taux de production d'entropie due à la conduction d'entropie dans le système au moyen de la densité du taux de génération d'entropie π_S que nous intégrons sur le volume, vu que la production d'entropie est un processus volumique :

$$\Pi_S = \int_V \pi_S dV \quad (12.70)$$

Nous transformons l'intégrale de surface (12.69) en une intégrale de volume, comme nous l'avons fait à la section 12.2.4 :

$$\int_S j_S dA = \int_V \frac{\partial j_S}{\partial x} dx dA = \int_V \frac{\partial j_S}{\partial x} dV$$

ce qui nous permet d'écrire :

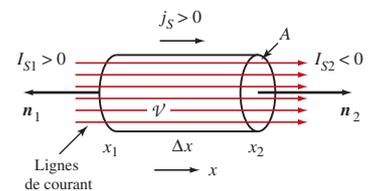


FIGURE 12.11 Courant dans une dimension à travers un corps dans une direction parallèle à l'axe du corps : lien entre les flux d'entropie et la densité de courant d'entropie.

$$\int_V \left[\frac{\partial j_s}{\partial x} - \pi_s \right] dV = 0 \quad (12.71)$$

L'intégrale ne peut être toujours nulle que si l'intégrande l'est aussi, ce qui entraîne :

$$\frac{\partial j_s}{\partial x} = \pi_s \quad (12.72)$$

C'est la version locale de l'équation du bilan d'entropie pour un flux conductif stationnaire d'entropie dans une dimension. Cette relation est valable en tous les points du système. Elle exprime le fait que le taux de variation spatial du flux d'une grandeur non conservée dépend du taux auquel cette grandeur est produite en chaque point.

12.5.2 Bilan stationnaire pour la conduction et l'apport d'entropie

L'apport d'entropie, par exemple par l'intermédiaire de la bougie qui chauffe la barre métallique de la section 5.1.5, fig. 5.7, est représenté par le taux de source Σ_s , et l'équation intégrée, dans le cas stationnaire, a pour forme :

$$0 = I_s + \Pi_s + \Sigma_s \quad (12.73)$$

En procédant de la même manière qu'à la section précédente, nous obtenons :

$$\frac{\partial j_s}{\partial x} = \pi_s + \sigma_s \quad (12.74)$$

où σ_s représente la densité du taux de source d'entropie.

12.5.3 Bilan dynamique de conduction d'entropie

Lors d'un processus de transport d'entropie stationnaire, le système évacue par l'intermédiaire des flux émergents l'entropie qui lui a été apportée par les flux entrants, la production et les apports tels que le rayonnement. En revanche, les propriétés physiques du système, décrites par exemple par la capacité entropique et l'entropie latente, peuvent être à l'origine de variation du contenu d'entropie du système. Dans ce cas, l'équation de bilan contient le taux de variation de l'entropie, ce qui rend le processus dynamique :

$$\dot{S} = I_s + \Pi_s + \Sigma_s \quad (12.75)$$

Le contenu en entropie du système sera représenté par la densité entropique ρ_s et son taux de variation sera donné par :

$$\dot{S} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_s dV$$

Comme nous considérons la conduction à travers des corps stationnaires, le volume considéré n'évolue pas dans le temps, ce qui nous permet de placer la dérivation temporelle sous l'intégrale :

$$\dot{S} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_S}{\partial t} dV \quad (12.76)$$

En remplaçant les termes du membre de droite de l'équation (12.75) par l'intégrale de leurs densités correspondantes et en procédant de la même manière que dans les sections précédentes, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \frac{\partial j_S}{\partial x} - \pi_S - \sigma_S \right] dV = 0$$

L'intégrale ne peut être toujours nulle que si l'intégrande est nul, ce qui implique :

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \frac{\partial j_S}{\partial x} = \pi_S + \sigma_S \quad (12.77)$$

Nous avons obtenu la version locale de l'équation du bilan d'entropie dynamique pour le processus de conduction avec apport d'entropie. Il s'agit d'une équation différentielle partielle, vu qu'elle porte sur la variable temps et la variable spatiale x . Le premier terme représente le stockage d'entropie, le deuxième la conduction d'entropie, alors que les termes du membre de droite représentent respectivement la production et l'apport d'entropie.

1. Quelles grandeurs introduit-on pour décrire (a) la distribution de l'entropie à l'intérieur d'un corps ; (b) la distribution d'un courant d'entropie à travers une surface ; (c) la distribution d'un taux de production d'entropie à l'intérieur d'un corps ?
2. L'orientation de la surface d'un corps est censée être comptée positivement vers l'extérieur. Comment doit-on procéder pour s'assurer que le courant d'entropie soit compté positivement pour un courant qui pénètre dans le corps ?
3. Pourquoi, dans le cas de conduction d'entropie stationnaire dans une seule dimension, la divergence de la densité du courant d'entropie n'est-elle pas nulle ?
4. Qu'est-ce qui distingue les taux de source d'entropie des taux de production d'entropie ?



1. (a) La densité d'entropie ρ_S ; (b) la densité de courant d'entropie j_S (un vecteur) ; (c) la densité de taux de production d'entropie π_S .
2. Il faut introduire un signe négatif dans l'intégrale de surface, comme dans l'équation (12.69).
3. À cause de la production d'entropie inhérente à la conduction.
4. Un taux de source représente un apport d'entropie qui vient d'ailleurs, par exemple du rayonnement.



12.5.4 Relations constitutives pour la conduction dans une dimension

Nous savons que l'entropie s'écoule d'endroits chauds vers des endroits froids, ce qui implique que la température des corps qui sont le siège de cet écoulement varie d'un

endroit à l'autre. L'objectif de cette section est d'obtenir la description du champ de température.

Lorsqu'un corps conduit de l'entropie, il peut subir des changements de volume ou de forme, et des parties peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres. La description de tels processus est éminemment complexe, raison pour laquelle nous allons limiter notre étude au cas le plus simple, la conduction d'entropie à travers un corps sans déformation, c'est-à-dire à l'étude de la *conduction pure*. De ce fait, la seule variable indépendante à côté du temps sera la température qui variera dans le temps et dans l'espace.

Trois relations supplémentaires sont nécessaires pour compléter le modèle de la conduction thermique: une expression qui relie le flux d'entropie aux variations spatiales de la température, une deuxième qui exprime la relation entre la température et la densité d'entropie et la loi de conservation de l'énergie appliquée aux processus thermiques.

Loi de FOURIER de la conduction d'entropie. À la section 11.2.1, nous avons déjà établi quels sont les facteurs qui déterminent les flux conductifs d'entropie, ce que nous avons exprimé au moyen de l'équation (11.14) que nous reprenons ici:

$$j_S = -k_S \frac{dT}{dx} \quad (12.78)$$

où k_S est la *conductivité entropique*. Si l'on imagine le champ de température, c'est-à-dire sa répartition spatiale, la loi de FOURIER exprime le fait que l'intensité du flux d'entropie est liée à la variation locale de la température, variation que l'on appelle le *gradient de température*.

Le lien entre le flux d'entropie et le flux d'énergie associé, que nous avons énoncé à la section 11.2.2, est:

$$j_E = Tj_S \quad (12.79)$$

où j_E représente la densité de courant d'énergie. Si nous introduisons une *conductivité énergétique (conductivité thermique)* définie par:

$$k_E = Tk_S \quad (12.80)$$

la loi de FOURIER peut être formulée en termes de courant d'énergie thermique:

$$j_E = -k_E \frac{dT}{dx} \quad (12.81)$$

Les valeurs de la conductivité énergétique apparaissent dans le tableau 11.1 pour un certain nombre de substances.

Équation de bilan de l'énergie lors de la conduction thermique. Si nous ne tenons compte que de la conduction d'entropie, il ne reste qu'un terme dans l'équation de bilan des flux d'énergie:

$$\dot{E} = I_{E,\text{therm}} \quad (12.82)$$

Comme pour les autres grandeurs, cette équation de bilan globale peut être transformée pour être applicable au cas continu. Nous le faisons au moyen de la densité d'énergie ρ_E et de la densité de flux conductif d'énergie thermique j_E pour obtenir:

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \frac{\partial j_E}{\partial x} = 0 \quad (12.83)$$

Nous allons montrer comment cette équation de bilan local de l'énergie, couplée avec le lien entre les flux d'entropie et d'énergie (12.79), va nous permettre de déterminer la densité de production d'entropie (12.72).

Production d'entropie lors de la conduction thermique. Vu que la conduction d'entropie est accompagnée d'une production d'entropie, nous avons besoin d'une expression pour le terme de production dans l'équation de bilan de l'entropie. Nous allons résoudre le problème pour le cas stationnaire.

Nous sommes toujours dans le cas unidimensionnel, et nous combinons les équations de bilan d'entropie et d'énergie. À partir de l'équation (12.79), nous obtenons :

$$\frac{d}{dx}(T j_s) = T \frac{dj_s}{dx} + j_s \frac{dT}{dx} \quad (12.84)$$

En vertu du bilan stationnaire d'énergie, cette expression s'annule, ce qui implique :

$$\frac{dj_s}{dx} = -\frac{1}{T} j_s \frac{dT}{dx} \quad (12.85)$$

La comparaison avec l'équation (12.72) montre que la densité du taux de production d'entropie lors de la conduction prend la forme :

$$\pi_s = -\frac{1}{T} j_s \frac{dT}{dx} \quad (12.86)$$

Donnons une interprétation imagée de ce résultat. D'où vient l'énergie nécessaire pour la production d'entropie lors de la conduction thermique ? Nous nous servons de l'image hydraulique que nous avons utilisée à la section 5.8 lors de l'étude des machines thermiques, celle de l'entropie qui tombe d'un niveau élevé vers un niveau bas. Lors de cette chute, l'entropie libère de l'énergie pour entraîner un autre processus. Dans le cas de la conduction pure, aucun processus mécanique, électrique ou d'autre nature n'est entraîné.

Lors de la conduction d'entropie, l'énergie libérée entraîne un processus thermique. En quelque sorte, l'entropie qui s'écoule à travers le corps a été « enrichie » d'une quantité supplémentaire d'entropie. Nous pouvons comparer la conduction thermique à d'autres processus qui ont la même propriété fondamentale. Le courant de charge électrique à travers une résistance, l'écoulement d'un gaz tel que la détente de l'air, ou encore le flux de quantité de mouvement entre deux corps qui frottent l'un contre l'autre sont des exemples d'une classe de processus au cours desquels une partie de l'énergie libérée entraîne la production d'entropie. Comme nous avons l'habitude de dire que les frottements produisent de la chaleur, il est possible d'interpréter la production de chaleur lors de la conduction comme une sorte de « frottement thermique ». Comme dans les autres cas, le taux de production d'entropie est donné par le quotient du taux auquel l'énergie est dissipée et de la température à laquelle le processus a lieu : le terme $j_s dT/dx$ dans l'équation (12.86) est la densité du taux de dissipation d'énergie.

Équation du champ de température. Nous savons que, dans un corps qui conduit l'entropie, la température change d'un point à l'autre et dans le temps si nous considérons un processus non stationnaire. Nous allons développer l'équation du champ de température dans le cas stationnaire. Elle résulte de la combinaison de l'équation de bilan de l'entropie et de la loi constitutive liée à la conduction, la loi de FOURIER.

Nous l'énonçons en utilisant le coefficient de conductivité énergétique k_E :

$$j_S = -\frac{k_E}{T} \frac{dT}{dx} \quad (12.87)$$

Évaluons la dérivée spatiale de cette équation:

$$\begin{aligned} \frac{dj_S}{dx} &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{k_E}{T} \frac{dT}{dx} \right) \\ &= -\frac{k_E}{T} \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \frac{dk_E}{dx} + \frac{k_E}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

qui, selon l'équation de bilan de l'entropie (12.72), correspond à la densité du taux de production d'entropie. Après remplacement dans l'équation (12.86) de la densité de flux par la loi de FOURIER, cette grandeur devient:

$$\begin{aligned} \frac{dj_S}{dx} &= -\frac{1}{T} j_S \frac{dT}{dx} = \frac{1}{T} \left(\frac{k_E}{T} \frac{dT}{dx} \right) \frac{dT}{dx} \\ &= k_E \frac{1}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

La comparaison avec l'équation de bilan de l'entropie donne:

$$\frac{k_E}{T} \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \frac{dk_E}{dx} = \frac{1}{T} \left(k_E \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} \frac{dk_E}{dx} \right) = 0$$

ce qui est équivalent à:

$$\frac{d}{dx} \left(k_E \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (12.88)$$

Nous avons obtenu l'équation du champ de température dans le cas de la conduction thermique stationnaire.

Apport d'énergie et d'entropie. Dans le cas de conduction stationnaire avec apport d'entropie, l'équation de bilan de l'énergie prend une forme simple. En l'absence de sources d'énergie, le taux de variation spatiale de la densité de flux d'énergie est nul, vu que l'énergie est une grandeur conservée. En revanche, dans le cas considéré, nous avons des sources d'énergie, ce qui nous amène à l'équation de bilan de l'énergie suivante:

$$\frac{dj_E}{dx} = \sigma_E \quad (12.89)$$

Nous savons qu'un apport d'entropie à un corps à une température particulière doit être accompagné d'un apport d'énergie correspondant. Dans les chapitres 5 et 11, nous avons découvert que la relation fondamentale de GIBBS stipule que, dans un corps homogène, l'énergie croît à un taux qui est égal à T multiplié par le taux d'accroissement de l'entropie. Nous en déduisons que le lien entre la densité du taux de source d'entropie et celui d'énergie est:

$$\sigma_E = T \sigma_S \quad (12.90)$$

Équation du champ de température avec apport d'entropie. Nous pouvons montrer que l'équation (12.90) est correcte en établissant l'équation du champ de température à partir de l'équation de bilan de l'entropie avec apport (12.74), combinée avec la loi de FOURIER et l'équation (12.86), ce qui donne :

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{k_E}{T} \frac{dT}{dx} \right) = \frac{1}{T^2} k_E \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \sigma_S \quad (12.91)$$

Nous en déduisons l'équation du champ de température en présence de sources d'entropie :

$$\frac{d}{dx} \left(k_E \frac{dT}{dx} \right) = -T \sigma_S \quad (12.92)$$

La même équation de champ, dérivée à partir de l'équation de bilan de l'énergie, devient :

$$\frac{d}{dx} \left(k_E \frac{dT}{dx} \right) = -\sigma_E \quad (12.93)$$

Elle ne peut être équivalente à l'équation (12.92) que si la relation entre les sources d'entropie et les sources d'énergie est donnée par l'équation (12.90).

1. Si l'on considère l'équation de bilan (12.77), combien de relations constitutives faut-il énoncer, et lesquelles, pour compléter le modèle de conduction dépendante du temps ?
2. Pourquoi y a-t-il un signe négatif dans la loi de FOURIER (12.78) pour la conduction ? Peut-on comparer cette expression à la loi d'OHM pour la conduction de la charge électrique ? Quelle est la formule multidimensionnelle de la loi de FOURIER ?
3. Le taux de production d'entropie de l'équation (12.86) est-il toujours non négatif ?
4. Quelle condition la conductivité énergétique k_E doit-elle vérifier pour que le gradient de température soit constant dans un processus de conduction unidimensionnelle, en régime stationnaire et sans apport ?



1. Quatre, à savoir (a) pour la densité d'entropie ; (b) pour la densité de courant d'entropie ; (c) pour la densité du taux de production d'entropie ; (d) pour la densité du taux de source d'entropie.
2. L'entropie s'écoule dans le sens de la température décroissante. Oui, la conductivité entropique est remplacée par la conductivité électrique. La forme multidimensionnelle : $j_S = -\mathbf{grad}(T)$ fait intervenir le vecteur de densité de flux d'entropie et le gradient multidimensionnel de la température.
3. Oui, il suffit d'introduire la loi de FOURIER pour le vérifier.
4. k_E doit être constant, ce qui implique que la conductivité entropique k_S dépend de la température.



EXEMPLE 12.2. Gradient de température dans une barre métallique.

(a) En admettant que la conductivité énergétique k_E est indépendante de la température, déterminer la répartition de la température dans une longue barre. Les valeurs de la température aux faces supérieure et inférieure de la barre sont respectivement T_s et T_i . (b) Que devient la solution si la conductivité entropique k_S est constante ?

SOLUTION: (a) Si la conductivité énergétique est constante, l'équation de champ (12.88) implique que le gradient de température est constant et que :

$$k_E \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

ce qui veut dire que la température est une fonction linéaire de la position dans la barre :

$$T(x) = T_s + (T_i - T_s) \frac{x}{L}$$

où L est la longueur de la barre et x est mesuré à partir de la face chaude.

(b) Si la conductivité entropique ne dépend pas de la température, la conductivité énergétique est proportionnelle à la température :

$$k_E = T k_S$$

Dans ce cas, l'équation du champ de température implique que le produit de la température et du gradient de température est constant :

$$T k_S \frac{dT}{dx} = \text{const}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$T^2(x) = T_s^2 + (T_i^2 - T_s^2) \frac{x}{L}$$

Les conditions aux limites sont les mêmes que dans le premier cas. ■

EXEMPLE 12.3. Équation du champ de température pour une symétrie sphérique.

Déterminer l'équation du champ de température dans le cas de conduction stationnaire pour un écoulement à symétrie sphérique, puis la température en fonction du rayon pour une coque sphérique pour une conductivité énergétique k_E indépendante de la température.

SOLUTION: Comme dans l'exemple précédent, nous utilisons le bilan d'entropie. Pour des conditions stationnaires, l'équation de bilan pour une coque sphérique devient :

$$A(r + \Delta r) j_E(r + \Delta r) - A(r) j_E(r) = 0$$

Si nous insérons les valeurs de l'aire des surfaces sphériques et divisons le résultat par le volume de la coque sphérique $4\pi r^2 \Delta r$, nous obtenons :

$$\frac{1}{4\pi r^2 \Delta r} \left[-4\pi r^2 j_E(r) + 4\pi (r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2) (j_E(r) + \Delta j_E) \right] = 0$$

En ne gardant que les termes linéaires en Δr et Δj , et après passage à la limite $\Delta r \rightarrow 0$, l'équation différentielle pour le bilan en coordonnées sphériques devient :

$$\frac{dj_E}{dr} + \frac{2}{r} j_E = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 j_E) = 0$$

Pour obtenir l'équation du champ de température, nous substituons la loi de FOURIER pour la densité du flux d'énergie, ce qui donne :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k_E \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Si k_E est indépendant de la température, cette équation différentielle donne le résultat suivant. La première intégration nous indique que le produit du carré de la variable radiale et du gradient de température doit être une constante que nous désignons par $-B$. Il s'ensuit que la température est inversement proportionnelle à la variable radiale r . La seconde intégration fournit une seconde constante A , ce qui permet d'exprimer qu'à l'intérieur de la coque sphérique, la température évolue selon :

$$T(r) = A + \frac{B}{r}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites. ■

EXEMPLE 12.4. Température dans une barre chauffée de manière interne.

Une barre de longueur L , dont la conductivité énergétique k_E est constante, conduit la chaleur uniquement dans la direction axiale. Elle est reliée à des réservoirs d'entropie dont les températures sont maintenues constantes aux valeurs T_0 et T_L aux extrémités respectives $x = 0$ et $x = L$. Nous admettons que $T_0 \geq T_L$. La barre est chauffée de manière interne à un taux de source d'énergie constant; cela pourrait être dû à une source radioactive, comme dans l'exemple précédent. (a) Déterminer la répartition de la température en fonction de la position en régime stationnaire. (b) Serait-il possible d'observer un minimum de la température de l'intervalle $0 \leq x \leq L$? (c) Déterminer sous quelle condition la température peut diminuer de manière monotone de T_0 à T_L . (d) Quelle est l'alternative ?

SOLUTION: (a) Dans les conditions de la donnée, l'équation différentielle pour l'évolution locale de la température est :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\sigma_E}{k_E}, \quad \frac{\sigma_E}{k_E} = \text{const} \quad (\text{E.5})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_0 \\ T(x=L) &= T_L \end{aligned}$$

La solution de l'équation (E.5) est une fonction quadratique, à savoir :

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{k_E} x^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{k_E} L - \frac{T_0 - T_L}{L} \right) x + T_0 \quad (\text{E.6})$$

On remarque facilement que, pour un taux de source nul, la solution est identique à celle que nous avons donnée dans l'exemple 12.2, où la température est une fonction linéaire de la position.

(b) Une fonction quadratique a un extremum. Dans le cas étudié, la dérivée seconde de la température par rapport à la position, c'est-à-dire $-\sigma_E/k_E$, est négative, ce qui signifie que l'extremum est un maximum, pas un minimum. On ne pourrait avoir un minimum que s'il y avait un puits d'énergie dans la barre au lieu d'une source.

(c) Pour que la température puisse décroître de manière monotone à partir de la valeur à l'extrémité chaude, le maximum de la fonction quadratique ne doit pas être situé dans la plage de valeurs $0 \leq x \leq L$. Nous trouvons la position du maximum en exigeant la nullité de la dérivée première de l'équation (E.6), ce qui donne :

$$-\frac{\sigma_E}{k_E} x_{max} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{k_E} L - \frac{T_0 - T_L}{L} = 0$$

Comme $T_0 - T_L$ est positif, la position du maximum ne peut pas être supérieur à $x = L/2$. Pour que le maximum soit positionné en dehors du domaine occupé par la barre, la valeur de sa position doit donc être négative, ce qui entraîne :

$$\frac{\sigma_E}{k_E} < 2 \frac{T_0 - T_L}{L^2}$$

Nous comprenons intuitivement que le taux de source ne doit pas être trop grand si l'on veut que l'entropie soit encore transportée du réservoir chaud vers le réservoir froid.

(d) L'alternative est que le maximum de température soit situé dans l'intervalle $0 \leq x \leq L/2$. Dans ce cas, le gradient de température est nul ou positif à l'extrémité de la barre en contact avec le réservoir chaud. L'entropie ne circulera plus du réservoir vers la barre, mais plutôt du point de température maximale situé dans la barre vers les deux extrémités de la barre. Cela se produit si :

$$\frac{\sigma_E}{k_E} \geq 2 \frac{T_0 - T_L}{L^2}$$

c'est-à-dire si le taux de source d'énergie devient très grand. Lorsque les valeurs du taux de source augmentent, le point du maximum de température se déplace vers le milieu de la barre. Il est important de se souvenir que ces considérations ne sont valables qu'en régime stationnaire. ■

EXEMPLE 12.5. Flux de chaleur à travers le manteau terrestre avec apport d'entropie.

Nous admettons que pratiquement toute l'entropie qui émerge de la surface de la Terre est produite par la désintégration radioactive dans le manteau. Calculez la température à la base du manteau en admettant que toute l'entropie est transportée en mode conductif. La limite entre le manteau et le noyau est située à une profondeur de 3400 km et le rayon de la Terre est égal à 6400 km. Admettez une conductivité énergétique constante égale à $1 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Le gradient de température à la surface est de 0.06 K m^{-1} . Admettez que la température de surface est de 0°C .

SOLUTION: Nous pouvons obtenir l'équation différentielle par la répartition de la température dans une symétrie sphérique en procédant comme nous l'avons fait dans l'exemple 12.3. Comme nous admettons l'existence de sources d'entropie, l'équation de bilan de l'énergie devient :

$$\frac{dj_E}{dr} + \frac{2}{r} j_E = \sigma_E$$

Après insertion de la loi de FOURIER, nous obtenons l'équation du champ de température :

$$k_E \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} \right) = -\sigma_E$$

si la conductivité énergétique est constante. Il est possible de simplifier cette équation grâce à une transformation de variables :

$$u = T r$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{\sigma_E}{k_E} r$$

La solution particulière de cette équation est proportionnelle à la troisième puissance du rayon alors que la solution homogène est une fonction linéaire. La solution complète est donc :

$$u(r) = A r^3 + B r + C$$

La prise en compte des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T(R) &= 0 \\ R \left. \frac{dT}{dr} \right|_R &= D \end{aligned}$$

donne pour la répartition radiale de la température le résultat suivant :

$$T(r) = -\frac{1}{6} \frac{\sigma_E}{k_E} r^2 + D + \frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{k_E} R^2 - \left(\frac{1}{3} \frac{\sigma_E}{k_E} R^3 + D r \right) \frac{1}{r}$$

Il manque la valeur de la densité de production d'énergie due à la désintégration radioactive. Ce taux correspond au flux d'énergie à travers la surface de la Terre, ce que l'on peut calculer à partir du gradient de température et de la conductivité. Si nous divisons cette grandeur par le volume de la croûte, nous obtenons :

$$\sigma_E = \frac{4 \pi R^2 k_E \left| \frac{dT}{dr} \right|_R}{\frac{4}{3} \pi (R^3 - R_{\text{noyau}}^3)} = 3.14 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-3}$$

Avec les valeurs numériques, la fonction de répartition de la température devient :

$$T(r) = -5.2 \cdot 10^{-9} \text{ K m}^{-2} r^2 + 2.6 \cdot 10^5 \text{ K} - \frac{2.8 \cdot 10^{11}}{r} \text{ K m}$$

Si nous substituons la valeur du rayon à la limite entre le noyau et le manteau, nous obtenons une température de 120 000 K. C'est une valeur qui est beaucoup trop élevée qui empêcherait le manteau de rester solide. Nous avons fait des hypothèses fortement simplifiées au sujet de la conductivité et de la distribution des sources d'entropie. D'autre part, il est hautement improbable que l'entropie puisse être transportée à travers le manteau terrestre uniquement par conduction. En fait, il existe un mécanisme bien plus efficace, la convection. ■

12.6 CONDUCTION DÉPENDANTE DU TEMPS

Nous avons déjà établi l'équation de bilan de l'entropie pour une conduction dépendant du temps au moyen de l'équation (12.77), de laquelle nous supprimons le terme d'apport d'entropie. Nous avons besoin de trois lois constitutives pour pouvoir résoudre cette équation, à savoir la densité, la densité de flux et la densité du taux de production d'entropie. Nous avons déjà énoncé les deux dernières lors de l'étude des processus stationnaires. La loi de FOURIER (12.78) détermine la densité de flux alors que la densité du taux de production d'entropie est donnée par l'équation (12.86). Il nous reste à développer une relation entre entropie et température pour le cas continu.

12.6.1 Relation capacitive

Nous limitons notre étude à un conducteur rigide. Le stockage d'entropie est décrit au moyen de la capacité entropie K du corps rigide dans la loi de capacité exprimée dans l'équation (5.27), à la section 5.5.4. Nous devons simplement transformer la définition originale de la capacité entropique. Pour un corps uniforme, nous le faisons de la manière suivante :

$$V\dot{\rho}_s = V \frac{K_s}{V} \dot{T} \quad (12.94)$$

Nous obtenons la densité de capacité entropique en multipliant la capacité entropique spécifique k_s par la masse volumique :

$$\dot{\rho}_s = \rho k_s \dot{T} \quad (12.95)$$

Ces grandeurs peuvent varier selon les conditions locales.

12.6.2 Équation du champ de température

Si nous substituons la loi de capacité (12.95), la loi de FOURIER (12.78) et la densité du taux de production d'entropie dans l'équation de bilan (12.77), nous obtenons, après quelques manipulations algébriques, l'équation du champ de température pour une conduction dépendante du temps :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_E \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (12.96)$$

Nous avons utilisé les grandeurs relatives à l'énergie en lieu et place des grandeurs relatives à l'entropie. La grandeur c est le *coefficient de température spécifique de l'énergie* (chaleur massique dans la thermodynamique traditionnelle).

Le résultat est une équation différentielle partielle pour la température en fonction du temps et de la position. Il peut être très difficile, voire impossible d'obtenir une solution analytique. Dans les cas pratiques, on utilise fréquemment des méthodes numériques pour calculer la solution, qui dépend naturellement des conditions initiales et des conditions aux limites. Les théories relatives à ces techniques vont largement au-delà des objectifs de cet ouvrage. L'objectif de cette section était de montrer comment on peut utiliser l'équation de bilan de l'entropie et les lois constitutives dans des situations relativement complexes.

EXEMPLE 12.6. Pénétration de la chaleur dans les couches supérieures du sol.

Quel effet ont les variations périodiques de la température à la surface de la Terre? Jusqu'à quelle profondeur peut-on remarquer des variations journalières ou annuelles de température dont l'amplitude est de 15°C ?

SOLUTION: Nous avons besoin d'un modèle simple de la pénétration de la chaleur dans les couches supérieures du sol. Nous admettons que le sol a une température constante (dans le temps et dans l'espace) en l'absence de variation à la surface. Nous modélisons le sol en tant que corps avec une surface plane, d'extension infinie vers le bas (fig. 12.12). Nous admettons que le matériau a des propriétés physiques constantes. Ces hypothèses réduisent le problème à celui du transport de chaleur par conduction dans une dimension, que nous pouvons décrire au moyen de l'équation (12.96)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_E \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_E}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

La deuxième version est valable pour une conductivité constante. Le facteur qui multiplie la dérivée spatiale de la température est la *diffusivité thermique* α . Nous pouvons formuler l'équation du champ de température comme suit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec

$$\alpha = \frac{k_E}{\rho c}$$

La condition à la surface du sol est donnée par:

$$T(t, 0) = T_0 \cos(\omega t)$$

Pour résoudre l'équation différentielle, nous admettons que la solution est séparable:

$$T(t, x) = f(t)g(x)$$

L'équation différentielle devient alors:

$$\frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{g(x)} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}$$

L'égalité des deux membres relatifs chacun à une seule variable ne peut être satisfaite que si chaque membre est égal à une constante K , ce qui implique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t)}{\partial t} &= K f(t) \\ \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} &= \frac{K}{\alpha} g(x) \end{aligned}$$

Nous avons maintenant deux équations différentielles ordinaires avec des solutions simples:

$$\begin{aligned} f(t) &= a \exp(Kt) \\ g(x) &= b \exp\left(\sqrt{\frac{K}{\alpha}} x\right) \end{aligned}$$

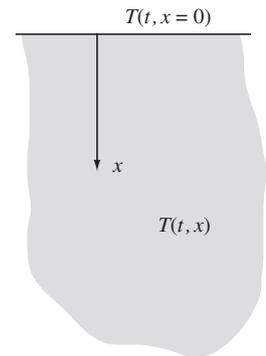


FIGURE 12.12 Modèle de sol en tant que corps avec une surface plane, d'extension infinie vers le bas.

Finalement, la solution de l'équation différentielle partielle devient:

$$T(t, x) = T_0 \exp\left(Kt + \sqrt{\frac{K}{\alpha}} x\right)$$

La condition à la surface du sol devient:

$$T_0 \exp(Kt) = T_0 \cos(\omega t)$$

Il est indiqué de passer maintenant dans le domaine complexe. Chacune des parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe est solution de l'équation différentielle. Nous remplaçons $K = \omega$ par $K = i\omega$, ce qui donne:

$$T(t, x) = \text{Re} \left[T_0 \exp\left(i\omega t \pm \sqrt{\frac{i\omega}{\alpha}} x\right) \right]$$

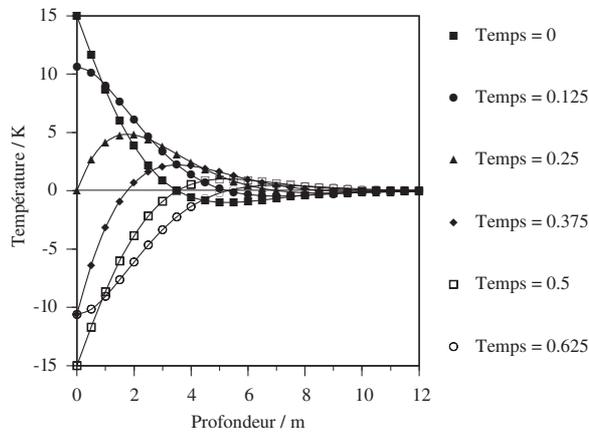
pour la partie réelle. Cette relation peut être transformée:

$$T(t, x) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x\right)$$

Il faut choisir le signe négatif pour éviter que la température augmente avec la profondeur.

Le graphique de la figure 12.13 montre la solution pour une variation périodique de la température de surface avec une période d'une année et une amplitude de 15°C. Les courbes correspondent à différents moments de l'année indiqués en fraction d'année. On a admis une diffusivité thermique du sol de $5.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. On voit que la perturbation décroît vers quelques degrés à une profondeur d'approximativement 5 m. Une variation journalière n'est perçue qu'à une profondeur environ 20 fois moindre que pour les fluctuations annuelles.

FIGURE 12.13 Modèle de l'évolution de la température à l'intérieur du sol: solution pour une variation périodique de la température de surface de période égale à une année et une amplitude de 15°C. Les courbes correspondent à différents moments de l'année indiqués en fraction d'année.



Les changements climatiques s'étendent sur des périodes qui se comptent en millions d'années. Dans un tel cas, les variations se répercuteraient jusqu'à des profondeurs de plusieurs kilomètres. Les courbes sont semblables si la variable de profondeur est proportionnelle à la racine carrée de la période de fluctuation.

12.7 THERMOÉLECTRICITÉ

Nous avons abordé les processus thermoélectriques d'un point de vue uniforme dans l'interlude III. Nous voulons développer une description correspondante pour les systèmes continus. Cette section permettra entre autres de présenter une dérivation simplifiée de la relation entre les coefficients SEEBECK et PELTIER.

12.7.1 Observations

Deux observations vont nous permettre d'élaborer une description formelle de l'effet thermoélectrique. Tout d'abord, nous pouvons mesurer le gradient du potentiel électrique qui apparaît aux bornes d'un appareil thermoélectrique soumis à un gradient de température. En outre, si de l'électricité s'écoule à travers un tel appareil, un flux d'entropie accompagne le courant électrique.

Coefficients thermoélectriques. Nous allons commencer par introduire le coefficient SEEBECK ε et le coefficient PELTIER α . Le premier établit la relation entre le gradient de température et le gradient du potentiel électrochimique μ_{ec} en circuit ouvert :

$$\mathbf{grad}(\mu_{ec}) = -\varepsilon \mathbf{grad}(T) \quad (12.97)$$

\mathbf{grad} est le symbole du gradient multidimensionnel introduit par la relation (9.77) à la section 9.9.4. Cette relation exprime ce que nous apprend l'utilisation des thermocouples. Une différence de température de 1 K provoque l'apparition d'une différence de potentiel électrochimique de ε volts aux bornes de l'appareil.

μ_{ec} est le potentiel électrochimique (des porteurs de charge dans le matériau) par charge d'une mole de porteurs de charge, c'est-à-dire le quotient du potentiel électrochimique μ_{EC} introduit par l'équation (6.83) et de la constante de FARADAY \mathcal{F} . Si l'on peut négliger l'influence de différences de concentration et de la dépendance de la température de la partie chimique du potentiel, μ_{ec} est égal au potentiel électrique mesuré en volts. C'est le cas lorsque l'on utilise un voltmètre pour mesurer la tension sur un dispositif thermoélectrique.

Le coefficient PELTIER α est le facteur qui détermine le couplage entre les courants de charge et d'entropie¹. On observe que, même en régime isotherme, de l'entropie est transportée à travers un système de refroidissement thermoélectrique (module PELTIER) si un courant électrique de densité j_Q le traverse, ce que l'on peut exprimer par :

$$\mathbf{j}_S = \alpha \mathbf{j}_Q \quad (12.98)$$

\mathbf{j} est le vecteur de densité de courant (d'entropie et de charge électrique respectivement). Cette équation exprime le fait qu'un courant électrique emporte α unités d'entropie lorsqu'il n'y a pas de différence de température. Il faut noter que le courant d'entropie de l'équation (12.98) est non dissipatif, contrairement à la conduction d'entropie causée par un gradient de température.

1. Dans la présentation traditionnelle, basée sur l'énergie, c'est le produit $T\alpha$ qui est appelé coefficient PELTIER.

12.7.2 Hypothèses

Les lois que nous allons utiliser pour modéliser un processus thermoélectrique sont, d'une part, les bilans d'entropie et de charge électrique (ou du nombre de particules de porteurs de charge) et le bilan d'énergie auquel nous aurons intégré l'expression pour le courant total d'énergie en termes de flux d'entropie et de charge. Les lois constitutives pour les courants de charge et d'entropie qui nous seront fournies par des expériences seront traitées à la section 12.7.3.

Nous ne formulerons les équations que pour le cas unidimensionnel où les écoulements ont lieu dans la direction axiale d'une barre de matériau conducteur. En outre, nous n'envisagerons que le cas stationnaire.

Équations de bilan d'entropie et de charge. L'équation de bilan de l'entropie en régime stationnaire est :

$$\frac{dj_S}{dx} = \pi_S \quad (12.99)$$

et de celui de la charge électrique :

$$\frac{dj_Q}{dx} = 0 \quad (12.100)$$

x représentant la seule variable indépendante. Les sources possibles d'entropie n'ont pas été incluses.

Équation de bilan de l'énergie. L'équation de bilan de l'énergie en régime stationnaire est simple à formuler : la divergence de la densité du flux d'énergie total est nulle :

$$\frac{dj_E}{dx} = 0 \quad (12.101)$$

Le courant total d'énergie j_E peut être décomposé en deux termes liés respectivement à l'entropie et à la charge :

$$j_E = Tj_S + \mu_{ec}j_Q \quad (12.102)$$

ce qui correspond à notre image de l'entropie et de la charge en tant que transporteurs d'énergie.

12.7.3 Lois constitutives

Nous généralisons la relation (12.97) pour tenir compte du courant électrique qui circule dans le générateur thermoélectrique :

$$j_Q = -\sigma \frac{d\mu_{ec}}{dx} - \sigma \varepsilon \frac{dT}{dx} \quad (12.103)$$

σ est la conductivité électrique du matériau. Si nous combinons les deux termes du membre de droite, nous obtenons un potentiel thermo-électrochimique $\mu_{tec} = \mu_{ec} + \varepsilon T$ qui entraîne le courant électrique :

$$j_Q = -\sigma \frac{d}{dx} (\mu_{ec} + \varepsilon T) = -\sigma \frac{d\mu_{tec}}{dx} \quad (12.104)$$

La seconde relation constitutive est une généralisation de l'équation (12.98) pour tenir compte d'un gradient de température :

$$j_s = \alpha j_Q - k_s \frac{dT}{dx} \quad (12.105)$$

où k_s est la conductivité entropique du matériau. L'équation (12.105) suggère que le courant d'entropie est constitué d'un terme non dissipatif et d'un terme dissipatif. Si l'on substitue la relation (12.103) dans l'équation (12.105), on peut résumer les lois constitutives par :

$$\begin{aligned} j_Q &= -\sigma \frac{d\mu_{ec}}{dx} - \sigma \varepsilon \frac{dT}{dx} \\ j_s &= -\sigma \alpha \frac{d\mu_{ec}}{dx} - (\sigma \alpha \varepsilon + k_s) \frac{dT}{dx} \end{aligned} \quad (12.106)$$

Il est usuel de représenter ces relations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} j_Q \\ j_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma & \sigma \varepsilon \\ \sigma \alpha & \sigma \alpha \varepsilon + k_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\mu_{ec}}{dx} \\ \frac{dT}{dx} \end{pmatrix} \quad (12.107)$$

Les relations de réciprocité d'Onsager affirment que la matrice des coefficients est symétrique, ce qui entraîne :

$$\alpha = \varepsilon \quad (12.108)$$

relation que nous allons démontrer de différentes manières dans les sections suivantes.

12.7.4 Production d'entropie

Nous substituons la relation (12.102) dans l'équation de bilan de l'énergie (12.101), tout en prenant en compte les équations de bilan d'entropie et de charge :

$$\frac{dj_E}{dx} = T \frac{dj_s}{dx} + j_s \frac{dT}{dx} + \mu_{ec} \frac{dj_Q}{dx} + j_Q \frac{d\mu_{ec}}{dx} = 0$$

ce qui entraîne :

$$T \pi_s = -j_s \frac{dT}{dx} - j_Q \frac{d\mu_{ec}}{dx} \quad (12.109)$$

Les termes du membre de droite représentent respectivement la puissance thermique et la puissance électrique des processus. Comme ceux-ci ont des parties non dissipatives, seule la somme des deux termes peut être égale à la densité du taux de production d'entropie. Un seul terme, pris pour lui-même, ne représente pas une partie du taux de production d'entropie. Si nous substituons les lois constitutives (12.103) et (12.105), après quelques manipulations algébriques, nous voyons que :

$$T \pi_s = -\alpha j_Q \frac{dT}{dx} + k_s \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} j_Q^2 + \varepsilon j_Q \frac{dT}{dx} \quad (12.110)$$

Le premier et le dernier termes sont les parties non dissipatives de la puissance respectivement électrique et thermique. Comme ils ne contribuent pas à la production d'entropie, leur somme s'annule dans l'équation (12.110). Ce n'est possible que si :

$$\alpha = \varepsilon \quad (12.111)$$

Le taux de production d'entropie devient :

$$\pi_s = \frac{1}{T} k_s \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{1}{T} \frac{1}{\sigma} j_Q^2 \quad (12.112)$$

Cela correspond à ce que nous savons au sujet de la dissipation due à la conduction d'entropie et de charge électrique.

12.7.5 Puissance des processus thermoélectriques

Nous considérons maintenant le cas de la génération de puissance thermoélectrique. Une différence de température permet à un courant d'entropie de s'établir, ce qui entraîne un processus électrique et deux processus dissipatifs. La densité de la puissance du processus thermique p_{therm} est donnée par :

$$p_{\text{therm}} = -j_s \frac{dT}{dx} \quad (12.113)$$

ce que nous pouvons exprimer au moyen des équations (12.103) et (12.105) :

$$p_{\text{therm}} = \frac{\alpha}{\sigma \varepsilon} j_Q^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} j_Q \frac{d\mu_{\text{ec}}}{dx} + k_s \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \quad (12.114)$$

Interprétons les termes du membre de droite. Le troisième est le taux de dissipation dû à la conduction thermique. Le premier est le taux de dissipation dû à la conduction de la charge électrique, pour autant que $\alpha = \varepsilon$. Si cette égalité est valable, le deuxième terme représente la puissance non dissipative du processus électrique consistant à entraîner un courant électrique à travers le gradient de potentiel électrochimique. Ces identifications nous permettent de conclure une nouvelle fois que les coefficients SEEBECK et PELTIER doivent être égaux.

12.7.6 Potentiel thermoélectrique et transport thermoélectrique

Les résultats des deux sections précédentes s'appuient sur la distinction entre les parties irréversibles et les parties non dissipatives de l'effet thermoélectrique. Résumons le déroulement du processus

1. Les transports de charge et d'entropie sont couplés, comme l'exprime la relation (12.98). Il en résulte une partie non dissipative du courant total d'entropie, la partie dissipative étant due à la conduction :

$$j_s = j_{s,\text{cond}} + j_{s,\text{te}} = j_{s,\text{cond}} + \alpha j_Q \quad (12.115)$$

2. C'est ce couplage, c'est-à-dire le transport non dissipatif d'entropie, qui est à l'origine du gradient thermoélectrique :

$$\frac{d\mu_{\text{ve}}}{dx} = -\varepsilon \frac{dT}{dx} \quad (12.116)$$

Dire que la deuxième affirmation est une conséquence de la première revient à dire que l'énergie libérée par le transport non dissipatif d'entropie correspond à l'énergie rendue disponible pour le processus thermoélectrique :

$$j_{S,\text{ve}} \frac{dT}{dx} + j_Q \frac{d\mu_{\text{ve}}}{dx} = 0 \quad (12.117)$$

Une fois encore, ce résultat implique l'égalité des coefficients de SEEBECK et de PELTIER. Les étapes présentées ici peuvent être considérées comme une simple description de la thermoélectricité.

1. Quel genre d'expérience pourrait servir à justifier l'équation (12.98) ?
2. Pourquoi doit-on utiliser le potentiel électrochimique plutôt que le potentiel électrique pur lorsque l'on traite des phénomènes électrochimiques ?
3. Quel est la signification du potentiel thermo-électrochimique introduit dans l'équation (12.104) ?
4. Dans le commentaire relatif à l'équation (12.105), il est affirmé qu'il y a deux transports différents d'entropie. Que représentent ces transports ?
5. Si nous considérons le refroidissement thermoélectrique, quelle sont les origines du transport d'entropie dans un module PELTIER ? Quelle condition doit être réalisée pour que le refroidissement puisse avoir lieu ?
6. En quel sens l'équation (12.112) est-elle évidente ?
7. Pourquoi le premier et le quatrième termes du membre de droite de l'équation (12.110) représentent-ils des processus non dissipatifs ? Pourquoi cela signifie-t-il qu'ils ne contribuent pas à la production d'entropie ?



1. Placer un élément PELTIER en tant que séparation entre deux volumes d'eau à la même température et mesurer le taux de variation des températures en fonction de l'intensité du courant I_Q .
2. Parce que les charges électriques circulent à travers différents matériaux.
3. Il ajoute au potentiel électrochimique le prise en compte de l'influence de la température.
4. Un transport non dissipatif de charge et d'entropie d'une part et un processus de conduction dissipatif d'autre part.
5. Le transport couplé d'entropie et de charge dans un sens et le processus de conduction dans le sens opposé. Le transport couplé doit être plus important que la conduction.
6. Elle contient les deux termes qui quantifient l'irréversibilité de la conduction de l'entropie d'une part et de la charge d'autre part.
7. Le facteur $j_Q dT/dx$ peut être positif ou négatif, ce qui signifie qu'il est lié à des processus non dissipatifs. Or, la dissipation implique la production d'entropie.



Résumé du chapitre

Le passage au continu devient nécessaire lorsque les systèmes envisagés ne sont pas uniformes, c'est-à-dire lorsque les grandeurs qui les caractérisent varient localement. Ce fait contraint de passer de la forme intégrale des équations à leur forme locale qui remplace les grandeurs et leurs flux par les densités des grandeurs et celles de leurs flux.

La distribution dans l'espace d'une grandeur extensive Q peut être exprimée au moyen de sa densité ρ_Q ou de sa valeur spécifique q telle que $q = Q/m$. Le lien entre les deux densités est $\rho_Q = \rho q$ où ρ est la masse volumique. La valeur de la grandeur Q contenue dans un volume \mathcal{V} s'obtient par intégration: $Q = \int_{\mathcal{V}} \rho_Q dV = \int_{\mathcal{V}} \rho q dV$.

Lorsque la grandeur considérée est une grandeur vectorielle, il faut introduire une densité pour chacune de ses composantes. À titre d'exemple, la densité de la composante suivant Ox de la quantité de mouvement est égale à ρv_x . La vitesse \mathbf{v} de la matière en mouvement représente sa quantité de mouvement spécifique.

La densité \mathbf{j}_Q du flux d'une grandeur extensive Q sert à mesurer la distribution du courant à travers une surface S . Un flux a une intensité, une direction et un sens, il s'agit donc d'un vecteur. Pour pouvoir attribuer un signe à la densité de flux, il est nécessaire d'orienter la surface qu'il traverse au moyen d'un vecteur \mathbf{n} , de norme égale à l'unité, normal à cette surface. Lorsque la surface S est fermée, le vecteur normal définit l'orientation positive de la surface lorsqu'il pointe vers l'extérieur du corps qu'elle entoure. Si la surface S est ouverte, le vecteur normal peut être choisi arbitrairement.

Vu que nous attribuons une valeur positive à l'intensité d'un flux entrant dans un domaine, le lien entre cette intensité et la densité de flux associée sera donnée par la relation: $I_Q = -\int_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dA = -\int_S \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{A}$, où $\mathbf{n} dA$ a été remplacé par le vecteur $d\mathbf{A}$ pour alléger l'écriture.

Étant elle-même une grandeur vectorielle, la densité de flux d'une grandeur vectorielle telle que la quantité de mouvement aura neuf composantes, trois pour chacune des trois composantes de la grandeur vectorielle. Ces neuf composantes sont celles du tenseur de la densité de flux.

Pour les taux de source et les taux de production, les densités sont respectivement σ_Q et π_Q . On obtient les taux respectifs par intégration sur le volume considéré.

Les équations de bilan établissent le lien entre la variation d'une grandeur à l'intérieur d'un système et les flux de cette grandeur à travers les surfaces qui englobent le système. Comme ces grandeurs varient localement, nous devons, pour obtenir la variation totale, intégrer la densité de la grandeur sur le volume et la densité des flux sur les surfaces traversées. Le théorème de GAUSS ou théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume. Ce théorème fait intervenir un opérateur différentiel, appelé divergence du champ vectoriel \mathbf{C} . Il est défini par: $\text{div}(\mathbf{C}) = \partial C_x / \partial x + \partial C_y / \partial y + \partial C_z / \partial z$. Le théorème de GAUSS: $\int_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{C}) dV$.

La forme locale de l'équation de bilan de la masse est: $\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Cette relation est appelée équation de continuité. Celle de l'entropie, sans prise en compte du rayonnement, est: $\partial / \partial t(\rho s) + \text{div}(s \rho \mathbf{v} + \mathbf{j}_{s,\text{cond}}) = \pi_s$, où s est l'entropie spécifique et π_s la densité du taux de production d'entropie.

Le fait que la densité de flux de quantité de mouvement soit un tenseur peut rendre extrêmement complexe l'établissement de l'équation de bilan dans sa forme la plus générale. Pour le cas de l'écoulement d'un fluide parfait, la première composante de l'équation de bilan est: $\partial / \partial t(\rho v_x) + \text{div}(\rho v_x \mathbf{v} + \mathbf{j}_{px,\text{cond}}) = \sigma_{px}$. Cette équation a trois composantes, et il en va de même pour les deux autres composantes.

L'équation de bilan de l'énergie devient: $\partial/\partial t[\rho(u + 1/2 v^2)] + \partial/\partial x[\rho v(u + 1/2 v^2) + v j_{p, \text{cond}} + j_{E, \text{therm}}] = \rho(f_p v + r)$. Le contenu du premier crochet représente la densité d'énergie du fluide. Le premier terme du second crochet est l'apport énergétique des flux convectifs. Le membre de droite représente les densités de source dues à l'interaction gravitationnelle et à l'absorption de rayonnement.

À titre d'exemple, nous avons considéré le processus de conduction d'entropie dans un corps unidimensionnel. L'équation de bilan est: $\partial \rho_s / \partial t + \partial j_s / \partial x = \pi_s + \sigma_s$, où les deux termes du membre de gauche représentent respectivement le taux de variation de la densité d'entropie et de la densité de flux d'entropie, alors que les termes du membre de droite sont les densités des taux de production et de source.

Les lois constitutives sont basées sur la loi de FOURIER: $j_s = -k_s dT/dx$, où k_s est la conductivité entropique. En termes de courant d'énergie thermique: $j_E = -k_E dT/dx$, avec $k_E = T k_s$. L'équation de bilan de l'énergie pour la conduction est: $\partial \rho_E / \partial t + \partial j_E / \partial x = 0$. La densité du taux de production d'entropie est donnée par: $\pi_s = -1/T \cdot j_s \cdot dT/dx$.

L'équation du champ de température est: $d/dx (k_E \cdot dT/dx) = 0$ dans le cas stationnaire sans apport d'entropie et d'énergie, et $d/dx (k_E \cdot dT/dx) = -T \sigma_s = -\sigma_E$ s'il y a apport d'entropie et d'énergie.

L'effet thermoélectrique est dû au couplage d'un processus thermique et d'un processus électrique. Il se manifeste d'une part par l'effet SEEBECK qui lie entre eux les gradients du potentiel électrochimique et de la température: $d\mu_{ec}/dx = -\varepsilon dT/dx$, où μ_{ec} est le potentiel électrochimique molaire et ε le coefficient SEEBECK. L'effet PELTIER consiste en un couplage entre les courants d'entropie et de charge: $j_s = \alpha j_Q$; α est le coefficient PELTIER. L'application des lois constitutives: $j_Q = -\sigma d\mu_{tec}/dx$, où $\mu_{tec} = \mu_{ec} + \varepsilon T$ est le potentiel thermo-électrochimique, et $j_s = \alpha j_Q - k_s dT/dx$ permet de démontrer que $\alpha = \varepsilon$. Le taux de production d'entropie: $\pi_s = 1/T \cdot k_s (dT/dx)^2 + 1/T \cdot j_Q^2 / \sigma$ se compose de la dissipation due à la conduction d'entropie et de charge électrique.

Questions et problèmes

1. Basez-vous sur le modèle de migration de sauterelles pour montrer que, sur des bases purement mathématiques, il n'est pas possible de faire la distinction entre des densités de taux de production et des densités de taux de source. En quoi ces densités se distinguent-elles?
2. Reformulez les équations de bilan du modèle spatialement continu de la migration des sauterelles en termes de modèle uniforme. Pour le faire, divisez l'espace unidimensionnel en un certain nombre d'éléments. Incluez la migration terrestre ainsi que les naissances et les décès. (a) Esquissez le diagramme du modèle de dynamique des systèmes correspondant. (b) Écrivez les équations pour un élément de ce modèle de pseudo-éléments finis. (c) Comparez ces équations à celles du cas continu. Le modèle uniforme peut-il être dérivé du modèle continu, ou vice versa? (d) Dans le cas uniforme, il apparaît qu'il est impossible de faire la distinction entre les flux (conductifs) et les taux de naissance et de décès sur des bases mathématiques. Pourquoi? Quelle est donc la différence?
3. Considérez l'équation (12.10) du modèle de migration des sauterelles. (a) Reformulez l'équation pour une conductivité constante et une absence de naissances et décès. (b) Quelle sera la solution de cette équation pour le cas stationnaire (indépendant du temps)? Combien de conditions aux limites faut-il formuler, et quelles sont-elles? Comment la solution dépend-elle des conditions aux limites particulières que l'on a choisies?
4. Dans l'équation (12.10) du modèle de migration des sauterelles, admettez maintenant une valeur non nulle du taux de décès. Admettez que ce taux est indépendant du temps et de l'espace. Quelle sera la solution stationnaire de cette équation pour une conductivité constante? Combien de conditions aux limites faut-il formuler, et quelles sont-elles?
5. Ajoutez de la nourriture en tant que nouvelle espèce dans le modèle unidimensionnel de migration des sauterelles. La ressource en nourriture ne peut pas se déplacer, elle ne peut qu'être produite ou détruite. (a) Formulez l'équation de bilan de la nourriture pour le cas continu à la fois dans l'espace et dans le temps. (b) Écrivez des relations constitutives possibles pour la production de nourriture (par exemple croissance logistique) et pour sa destruction (consommation) et ajoutez-les aux équations de bilan.
6. Montrez qu'une composante de l'équation de bilan générale de la quantité de mouvement doit prendre la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + j_{pij, cond}) = \sigma_{pi}$$

Écrivez chacune des neuf composantes du tenseur.

7. Montrez que la formulation (12.55) de l'équation de bilan de l'entropie semble ne représenter que le cas du transport purement conductif d'entropie. La loi exprimée par la relation (12.55) exclut-elle le phénomène de convection? Pouvez-

vous expliquer le pourquoi de la dénomination «dérivée matérielle» donnée à l'opérateur dans l'équation (12.54)?

8. Écrivez l'équation de bilan de la masse en utilisant la dérivée matérielle. Faites de même pour le cas simple du transport de quantité de mouvement dans une dimension.
9. Dans le cas unidimensionnel, gradient et divergence ont le même aspect. Expliquez leurs différences et explicitiez-les dans le cas multidimensionnel.
10. Énoncez la forme tridimensionnelle de la dérivée matérielle, autant dans la forme indépendante des coordonnées qu'en coordonnées cartésiennes.
11. Considérez un véhicule plat contenant de l'eau et se déplaçant horizontalement. L'eau s'écoule par un trou au fond du véhicule. Déterminez les densités de flux et les flux de quantité de mouvement par rapport à un volume de contrôle stationnaire.
12. Les extrémités d'un cylindre de cuivre de 0.50 m de longueur et de 0.05 m de diamètre sont à des températures constantes de 373 K et 273 K respectivement. L'entropie ne circule que dans la direction de l'axe. La conductivité énergétique du cuivre, de $384 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, peut être considérée comme constante. Calculez: (a) la densité de flux d'énergie, (b) le flux d'énergie et (c) les densités de production d'entropie aux extrémités du cylindre. (d) À partir de la densité de production d'entropie en fonction de la position, déterminez le taux de production d'entropie dans la barre de cuivre. Montrez que le résultat est égal au courant net d'entropie.
13. Dérivez l'équation de champ de la température lors du processus de conduction stationnaire sur la base de l'équation de bilan de l'énergie au lieu du bilan d'entropie.
14. Selon le tableau 11.1, la conductivité entropique de l'eau dépend moins de la température que sa conductivité énergétique. (a) Si l'on admet que la première grandeur est constante lors du processus de conduction à travers une couche d'eau en régime stationnaire, le gradient de température doit-il être plus important à la face chaude ou à la face froide? (b) Montrez que l'équation de champ de la température doit avoir la forme:

$$T \frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 = 0$$

15. Calculez (a) la densité de source d'énergie et (b) la densité de production (ou de source) de l'entropie dans un échantillon de 1 kg d'uranium enrichi à la température de 300 K. L'uranium a une masse volumique de $18\,950 \text{ kg m}^{-3}$. L'échantillon contient 97% d'uranium 238 et 3% d'uranium 235. L'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau est approximativement de 4.2 MeV et 4.6 MeV respectivement. Les demi-vies respectives des deux isotopes sont de $4.5 \cdot 10^9$ années et $7.8 \cdot 10^8$ années.
16. Considérez la conduction de la chaleur à travers la croûte terrestre modélisée comme une couche plane d'épaisseur L . Admettez la présence de sources d'entropie, de densité de taux de source σE , distribuées régulièrement dans le maté-

riau, et une conductivité énergétique constante k_E . (a) Montrez que le profil de la température de la base vers la surface de la croûte est donnée par

$$T(x) = T_L + \frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{k_E} (L^2 - x^2) + \frac{1}{k_E} j_E(0)(L - x)$$

pour un flux d'énergie $j_E(0)$ à la base de la croûte et une température de surface égale à T_L . (b) Déterminez comment le gradient de température juste en dessous de la surface dépend des paramètres matériels de la croûte. (c) Évaluez le gradient de température à la surface pour une croûte de 50 km d'épaisseur, une conductivité énergétique de $2.5 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, une densité de taux de source de $1.25 \cdot 10^{-6} \text{ W m}^{-3}$ et un flux d'énergie nul à la base.

17. Refaites les calculs afin de déterminer le profil stationnaire de température d'une couche de matière telle que la croûte terrestre du problème 16, mais pour un taux de source d'énergie qui décroît de manière exponentielle à partir de la surface. Les conditions aux limites sont à nouveau un flux d'énergie fixe à la base et une température de surface donnée.
18. Montrez que l'équation de champ de la température pour un dispositif thermoélectrique en régime dynamique est donnée par:

$$\frac{\rho c}{k_E} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{j_Q^2 \rho_{el}}{k_E}$$

où ρ_{el} est la résistivité électrique, et ρ et c sont respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du matériau. k_E est la conductivité énergétique. (a) Quelles sont les suppositions au sujet des propriétés matérielles du dispositif? (b) Utilisez un raisonnement qualitatif pour justifier l'équation en identifiant la signification de ses parties. (c) Donnez une dérivation formelle basée sur les équations formulées dans les Sections 12.7.2 et 12.7.3.

19. Les courants d'énergie thermique aux extrémités chaude et froide de générateurs thermoélectriques sont généralement écrits comme suit:

$$I_{E \text{ therm, c}} = \alpha I_Q T_c + G_E (T_c - T_f) - \frac{1}{2} R I_Q^2$$

$$I_{E \text{ therm, f}} = \alpha I_Q T_f + G_E (T_c - T_f) + \frac{1}{2} R I_Q^2$$

c et f sont associés aux extrémités chaude et froide respectivement. (a) Quelles sont les suppositions au sujet de la conductance énergétique G_E ? (b) Dérivez ces expressions en utilisant les lois de la conduction thermique. Montrez que les termes $\pm R I_Q^2 / 2$ sont une conséquence des hypothèses particulières utilisées. (c) Utilisez ces équations pour obtenir la puissance et l'efficacité du générateur.

CHAPITRE 13

CHAMPS STATIQUES ET POTENTIEL

La vision de NEWTON d'une *action à distance*¹ qui se transmet de manière instantanée a été remplacée, à partir du premier quart du XIX^e siècle, par celle d'un effet qui se propage de proche en proche à travers l'espace et qui, de ce fait, ne peut être instantané. Cette manière de voir a été introduite par Michael FARADAY pour expliquer les phénomènes électriques et magnétiques, puis élaborée mathématiquement par James Clerk MAXWELL durant le troisième quart du même siècle. FARADAY postula que l'espace n'est pas simplement le cadre inerte dans lequel ont lieu les phénomènes physiques, mais qu'il est lui-même un système physique qui participe activement à ces processus. Dans la vision de FARADAY, la présence de matière (masse, charge, etc.) structure l'espace et lui donne des propriétés physiques supplémentaires. Un tel système physique est un *champ*. Un champ est tout autant un système physique avec ses particularités propres telles que quantité de mouvement, moment cinétique, état de tension, etc., qu'un objet en mouvement, un volume de gaz enfermé dans un récipient ou tout autre système qui peut faire l'objet de notre intérêt.

L'objectif de ce chapitre est de présenter et d'illustrer cette notion de champ que, d'ailleurs, nous avons déjà utilisée dans chacun des chapitres précédents. Notons que la physique moderne tente de décrire la nature uniquement au moyen de ce concept, en y ajoutant un certain nombre d'ingrédients tels que la physique quantique².

13.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Nous allons reprendre quelques observations de certains chapitres précédents et les compléter afin de nous familiariser avec des processus au cours desquels des objets interagissent sans être en contact.

13.1.1 Phénomènes électriques

Illustrons les phénomènes électriques en reprenant quelques observations du chapitre 2. Rappelons que nous avons attribué les phénomènes électriques au fait que les objets qui interagissent portent une «charge électrique» qui peut être positive ou négative. Il s'agit d'une grandeur physique qui permet d'expliquer et de quantifier ces

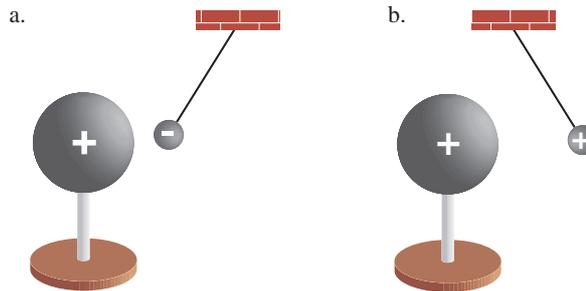
-
1. Cette vision ne le satisfaisait pas du tout, comme le démontre une lettre de 1692 à BENTLEY, dans laquelle il affirme : «Gravity should be innate, inherent and essential to Matter, so that one body may act upon another at a distance thro' a Vacuum without the Mediation of any thing else, by and through which their Action and Force may be conveyed from one to another, is to me so great an Absurdity that I believe that no Man who has in philosophical Matters a competent Faculty of thinking can ever fall into it. Gravity must be caused by an Agent acting constantly according to certain laws; but whether this Agent be material or immaterial, I have left to the Consideration of my readers.»
 2. Le corps théorique appelé théorie quantique des champs (Quantum Field Theory, QFT) propose d'envisager autant le rayonnement que la matière comme étant des états excités d'un champ, le champ quantique.

phénomènes. Une entité telle que l'électron n'est pas la charge élémentaire, il est porteur de la charge élémentaire négative. D'ailleurs, il existe d'autres entités qui portent une fraction (un tiers ou deux tiers) de la charge élémentaire ou de son opposé: ce sont les quarks, les constituants des particules que l'on appelle les hadrons.

Interaction entre objets électrisés. Nous disposons de deux sphères métalliques, la première fixe, l'autre mobile, suspendue à un fil. Nous pouvons les charger, par exemple au moyen d'une source de haute tension.

- Lorsque les deux sphères portent des charges de signes opposés, nous constatons que la sphère suspendue se rapproche de la sphère fixe.
- Lorsque les deux sphères portent des charges de même signe, la sphère mobile s'éloigne de la sphère fixe.

FIGURE 13.1 Interaction entre charges électriques: (a) les charges de signes opposés se rapprochent l'une de l'autre; (b) les charges de même signe s'éloignent l'une de l'autre.



Interprétation: L'interaction entre les objets chargés se manifeste sans qu'un contact soit nécessaire. Comme nous nous en sommes rendu compte à la section 2.1.9, le comportement des deux charges n'est pas le résultat d'une «action à distance», mais est provoqué par la présence d'un champ électrique.

Champ électrique. Tous les objets qui portent une charge électrique sont entourés d'une «aura» par l'intermédiaire de laquelle ils interagissent. Cette «aura» est le *champ électrique*.

Des objets chargés électriquement sont entourés d'un champ électrique. Lorsque ces objets portent des charges de même signe, le champ électrique les écarte l'un de l'autre; lorsqu'ils portent des charges de signes opposés, le champ électrique les attire l'un vers l'autre.

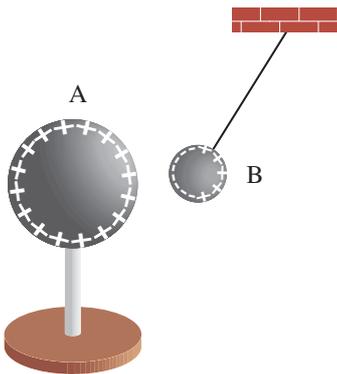


FIGURE 13.2 Manifestation du phénomène d'influence: par l'intermédiaire de son champ électrique, la sphère A polarise la sphère B, qui est alors attirée dans les régions du champ le plus intense.

Champ électrique et phénomène d'influence. Il est possible d'électriser des objets par frottement ou au moyen d'une source de tension. Ce n'est pas la seule manière de procéder; un phénomène, appelé influence électrique, permet d'obtenir le même effet.

Nous répétons l'expérience de la figure 13.1, mais en ne chargeant pas la sphère suspendue. Nous constatons que, quelle que soit la charge de la sphère fixe, la sphère mobile est attirée vers elle.

Interprétation. La seule explication possible est que le champ électrique de la sphère A (admettons qu'elle soit chargée positivement) agit sur la charge de la sphère B de telle façon que le côté proche de A devient majoritairement négatif à cause de l'attraction qui s'exerce entre charges de signes opposés, l'autre majoritairement positif, la sphère B restant globalement neutre (fig. 13.2). Ce phénomène de redistribution des charges est la *polarisation*, et la sphère mobile est devenue un *dipôle électrique*. Les charges négatives de B étant plus proches des charges positives de A que ses charges positives, l'attraction dominera.

On appelle influence électrostatique le phénomène de séparation des charges, de polarisation, par l'intermédiaire d'un champ électrique.

Une seconde expérience permet de montrer qu'il est possible de séparer des charges par l'intermédiaire du phénomène d'influence.

Nous chargeons par exemple une sphère fixe positivement. Nous amenons deux plaques métalliques neutres dans le voisinage de la sphère chargée en nous assurant qu'elles sont en contact (fig. 13.3). Par l'intermédiaire du phénomène d'influence, le champ de la sphère sépare les charges de telle façon que la plaque proche de la sphère présentera une plus grande concentration de charges négatives, alors que la plaque éloignée de la sphère présentera une plus grande concentration de charges positives. Le système des deux plaques accolées constitue un *dipôle électrique*.

Nous séparons les deux plaques pendant qu'elles sont encore dans le champ électrique de la sphère chargée, puis nous les éloignons de cette dernière. En utilisant l'électroscope, nous pouvons vérifier qu'elles portent la même charge, mais de signe opposé. Il est donc possible de séparer les charges d'un dipôle électrique.

13.1.2 Phénomènes magnétiques

Les phénomènes magnétiques sont connus depuis l'Antiquité: le nom vient de Magnésie, une ville grecque sur le fleuve Méandre, en Anatolie, au bord de la mer Égée; on trouve dans cette région un minerai qui a la faculté d'attirer des morceaux de fer.

Quelques exemples. Les objets aimantés font partie de notre vie quotidienne. On les trouve dans les fermetures magnétiques d'armoires, de sacs à main ou d'étuis, ils servent à maintenir des documents sur des tableaux d'affichage, etc. Dans ces exemples, l'objectif est atteint soit au moyen d'un aimant en face d'un élément en fer, soit au moyen de deux aimants qui se font face.

Les aimants peuvent prendre différentes formes. La figure 13.4 montre un aimant droit et un aimant en U. Les extrémités sont les *pôles* de l'aimant et, pour des raisons historiques (la première application pratique est la boussole inventée par les Chinois), ces pôles portent les noms des pôles terrestres. Dans la figure, l'extrémité de la partie colorée (en général en rouge) est le pôle nord qui, s'il s'agit d'un aimant droit suspendu en son centre de gravité, s'oriente à peu de chose près vers le pôle Nord géographique.

Nous approchons un aimant en fer à cheval d'un tas de clous (fig. 13.5). Les clous sont attirés par les deux pôles de l'aimant. Cette attraction s'exerce également sur des objets contenant du nickel ou du cobalt. Ces trois métaux ont une propriété que l'on appelle *ferromagnétisme*. Les autres métaux ont des propriétés magnétiques différentes et les effets sont trop faibles pour se manifester de manière visible.

Interaction entre aimants. Lorsque l'on rapproche deux aimants, on observe qu'ils s'attirent si les deux pôles opposés se font face, alors qu'ils se repoussent lorsque les pôles de même nom se font face.

Interprétation: Il y a similitude entre le comportement des objets électrisés et des objets magnétisés. Les objets magnétisés interagissent: les pôles opposés s'attirent, les pôles identiques se repoussent.

C'est cette répulsion entre pôle de même nom qui a été utilisée à la section 8.2 lors de l'étude de la collision élastique entre deux glisseurs sur un coussin d'air (fig. 13.6). On observe que les deux glisseurs se comportent comme si l'espace entre eux était occupé par un milieu élastique qui se serait comprimé dans la phase d'approche et dilaté dans la phase d'éloignement.

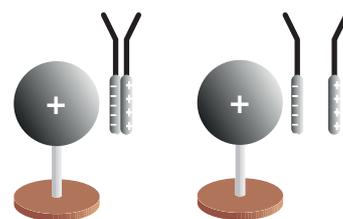


FIGURE 13.3 Séparation de charge au moyen du phénomène d'influence. La paire de plaques métalliques se polarise dans le champ de la sphère. Lorsqu'on les sépare, on obtient deux plaques portant des charges de signes opposés.



FIGURE 13.4 Aimant droit et aimant en U. La partie colorée est ce que l'on appelle le pôle nord.



FIGURE 13.5 Attraction magnétique: les aimants attirent des clous en fer; les deux pôles de l'aimant exercent l'attraction.

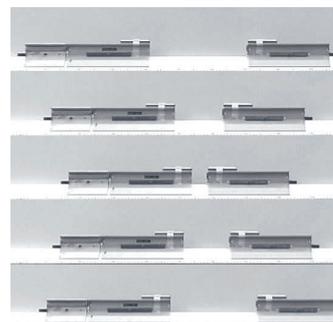


FIGURE 13.6 Quelques séquences de l'enregistrement de la collision de deux glisseurs sur un rail à coussin d'air. La répulsion est assurée par des aimants montés à l'avant de chacun des glisseurs.

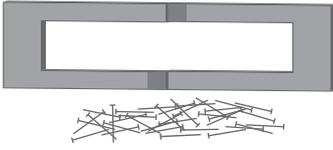


FIGURE 13.7 Neutralisation de la charge magnétique: lorsque les pôles opposés de deux aimants identiques se font face, les aimants n'attirent plus le fer; leurs charges magnétiques se sont neutralisées.

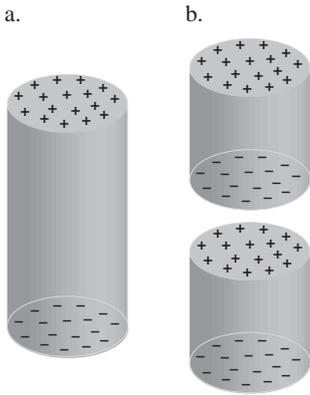


FIGURE 13.8 Inséparabilité des dipôles magnétiques: (a) la charge magnétique s'accumule aux pôles; (b) lorsque l'on brise un aimant en deux, on obtient deux nouveaux aimants, les dipôles magnétiques sont inséparables.

Charge magnétique. Si nous prenons deux aimants en U identiques et que nous opposons les pôles de l'un aux pôles opposés de l'autre de manière à former un anneau, cet ensemble n'attire plus le fer (fig. 13.7): les pôles se sont neutralisés, comme dans le cas de la neutralisation des charges électriques. Lors de ses études des phénomènes électriques et magnétiques, dont il publia les résultats entre 1785 et 1791, Charles Augustin de COULOMB, inspiré par l'analogie entre les deux phénomènes, conclut que l'attraction ou la répulsion entre deux corps magnétisés est due au fait qu'ils portent des *charges magnétiques*³ qu'il appelle des *molécules magnétiques*. Les surfaces des pôles d'un aimant sont les endroits où cette charge magnétique s'accumule (fig. 13.8a). Se basant sur le fait que lorsqu'on brise un aimant, quelle que soit sa taille, on obtient à chaque fois un nouvel aimant avec deux pôles opposés (fig. 13.8b), il conclut que chaque molécule a deux pôles inséparables.

L'observation de neutralisation de l'aimantation amène à conclure que, tout comme la charge électrique, la charge magnétique, que nous désignerons par q_m , peut prendre des valeurs opposées, que l'on appelle positives ou négatives. Par convention, les domaines occupés par des charges positives sont des pôles nord, les domaines chargés négativement sont des pôles sud. L'aiguille aimantée d'une boussole s'oriente en direction Nord-Sud. Par convention, le pôle positif pointe vers le pôle Nord géographique. Comme nous avons constaté que les pôles de signes opposés s'attirent, nous devons en conclure qu'en vertu de cette convention, le pôle Nord géographique est chargé négativement, ce qui en fait un pôle sud magnétique.

L'expérience de neutralisation de l'aimantation au moyen de deux aimants identiques nous permet de tirer un autre conclusion: un aimant contient autant de charges magnétiques positives que négatives.

La charge magnétique totale d'un aimant est toujours nulle, c'est-à-dire que la charge positive a la même valeur absolue que la charge négative.

Alors qu'un corps peut porter une charge électrique nette non nulle (bien qu'extrêmement faible), ce ne sera jamais le cas pour un corps magnétisé. Cette différence essentielle a pour conséquence que l'on peut avoir des courants électriques (flux de charges électriques), mais jamais de courants de charge magnétique⁴.

Champ magnétique. Comme dans le cas des objets électrisés, les objets magnétisés interagissent sans qu'un contact soit nécessaire. L'interaction a lieu comme si tous les objets qui portent une charge magnétique étaient entourés d'une «aura» par l'intermédiaire de laquelle ils interagissent. Cette «aura» est le *champ magnétique*.

Des objets magnétisés sont entourés d'un champ magnétique. Lorsque ces objets portent des charges de même signe, le champ magnétique les écarte l'un de l'autre; lorsqu'ils portent des charges de signes opposés, le champ magnétique les attire l'un vers l'autre.

3. Il est important de noter que ce que nous appelons charge magnétique ne doit pas être confondu avec le monopôle magnétique. La charge magnétique que nous introduisons ici est un concept théorique qui permet d'expliquer et de quantifier le phénomène de magnétisation. En revanche, un monopôle magnétique serait une particule magnétisée, comme un électron est une particule électrisée; l'électron n'est pas une charge électrique (un concept théorique) mais une particule qui porte une charge électrique. Nous verrons que la présence de cette charge magnétique aux pôles d'un aimant est la conséquence d'un phénomène de polarisation analogue à la polarisation électrique.
4. C'est une conséquence du fait qu'il n'y a pas de monopôle magnétique.

Influence magnétique. Lorsque l'on approche un objet en fer (par exemple un clou, fig. 13.9) d'un pôle d'un aimant (le contact n'est pas nécessaire), cet objet devient lui-même un aimant, avec deux pôles. On peut s'en convaincre par le fait qu'il est lui-même capable d'attirer un autre objet en fer.

Interprétation. Ce phénomène est semblable à celui que nous avons observé dans le cas électrique et doit être interprété de la même manière: le champ magnétique d'un des pôles de l'aimant (admettons qu'il s'agisse d'un pôle positif) agit sur les charges magnétiques du clou de telle façon que le côté proche de l'aimant devient majoritairement négatif à cause de l'attraction qui s'exerce entre charges de signes opposés, l'autre majoritairement positif, l'objet restant globalement neutre (fig. 13.9). Ce phénomène de redistribution des charges est la *polarisation*, et le clou est devenu un *dipôle magnétique*. Les charges négatives de B étant plus proches des charges positives de A que des siennes, l'attraction dominera.

Dureté magnétique. Lors de l'expérience de la figure 13.9, le clou que nous avons approché de l'aimant est lui-même devenu un aimant, puisqu'il est capable d'attirer un autre clou. Toutefois, cette aimantation disparaît dès qu'il est éloigné de l'aimant. Des objets qui ont un tel comportement sont des *matériaux magnétiques doux*. Ils se laissent magnétiser facilement, mais perdent tout aussi facilement leur magnétisation. Le fer est le représentant de cette catégorie de matériaux.

En revanche, les *aimants permanents* sont fabriqués à partir de *matériaux magnétiques durs*. Ce sont par exemple des céramiques produites à partir d'oxyde de fer (ferrite) ou d'autres alliages contenant du fer, du nickel ou du cobalt.

Courant électrique et champ magnétique. Le physicien danois Hans Christian ØRSTED découvrit en 1820 qu'une aiguille de boussole placée parallèlement à un fil conducteur était déviée lorsqu'un courant électrique circulait dans ce fil conducteur (fig. 13.10). S'appuyant sur cette découverte, André-Marie AMPÈRE réalise de nouvelles expériences qui l'amènent à élaborer une *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience*. La quintessence de cette théorie est que les «les propriétés des aimants sont dues à des courants électriques circulaires dans des plans perpendiculaires à leur axe» (fig. 13.11).

13.1.3 Phénomènes électromagnétiques

Dans les chapitres 5, 10 et 11, nous avons affirmé que l'entropie pouvait être transportée par rayonnement, l'apport de chaleur par la lumière du Soleil est l'exemple connu du tous.

Nous montrerons au chapitre 14 que la lumière, qui transporte entre autres de l'entropie, consiste en des vibrations du champ électromagnétique, une combinaison des champs électrique et magnétique qui se propagent sous forme d'onde. Ce sont ces ondes qui nous apportent l'entropie produite dans le Soleil.

13.1.4 Phénomènes gravitationnels

La pesanteur est le phénomène qui fait partie de notre vie quotidienne et auquel nous ne pouvons pas échapper. Les objets tombent au sol ou y retombent si on les lance vers le haut, comme s'ils étaient liés à la Terre par une sorte de milieu élastique attractif.

Mouvement planétaire. En 1666, alors qu'il s'était réfugié dans son village natal de Woolsthorpe pour échapper à la peste qui sévissait à Londres, Isaac NEWTON, alors âgé de 23 ans, réalisa que la chute des corps à la surface de la Terre et le mouvement de la Lune (et des planètes) avaient la même cause: la Lune tombe continuellement

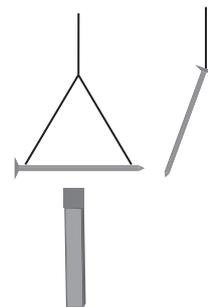


FIGURE 13.9 Influence magnétique: un objet en fer proche d'un aimant attire d'autres objets en fer. Il est devenu aimanté sous l'influence du champ magnétique de l'aimant.

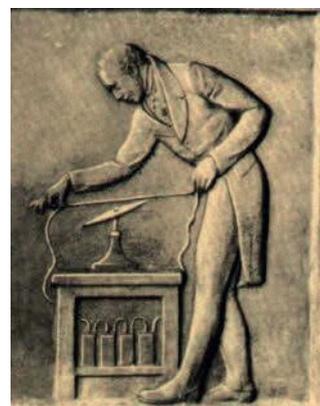


FIGURE 13.10 Partie d'un bas-relief de A. Bundgaard montrant l'expérience réalisée par ØRSTED en 1820 au cours de laquelle il découvrit qu'un courant électrique circulant dans un conducteur dévie une aiguille de boussole, qu'il doit donc être la source d'un champ magnétique. (Source: europeana.eu (CC)).



FIGURE 13.11 Vision ampérienne du magnétisme: les propriétés des aimants sont dues à des courants électriques circulaires.

vers la Terre, mais comme elle a une vitesse propre tangentielle, cette chute vers la Terre incurve sa trajectoire de telle manière que celle-ci devient quasi circulaire.

Masse en tant que charge gravitationnelle. Comme nous l'avons fait pour les processus électriques et magnétiques, nous attribuons l'origine du processus d'attraction gravitationnelle à la présence d'une «charge gravitationnelle» que nous avons déjà rencontrée: ce n'est rien d'autre que la *masse* d'un objet⁵. Contrairement aux charges électriques ou magnétiques, qui peuvent se neutraliser, il n'y a qu'une sorte de charge gravitationnelle, la masse est toujours positive et l'interaction est toujours attractive. Un objet ne peut pas être gravitationnellement neutre, et il n'y a pas de dipôle gravitationnel. En outre, le phénomène d'influence que nous avons révélé autant pour les phénomènes électriques que magnétiques ne se manifeste pas dans le cas de la gravitation.

Champ gravitationnel. L'interaction gravitationnelle se fait sans contact. Elle a lieu comme si tous les objets qui portent une charge gravitationnelle étaient entourés d'une «aura» par l'intermédiaire de laquelle ils interagissent. Cette «aura» est le *champ gravitationnel*.

1. Quelles sont les caractéristiques communes des interactions électriques, magnétiques et gravitationnelles ?
2. À quoi est due la présence de ces trois champs statiques ?
3. Quelle est la différence entre la charge électrique et la charge magnétique ?



1. Les trois interactions ne résultent pas d'une «action à distance», mais sont transmises par des champs qui occupent l'espace dans lequel sont plongés les objets. Ce que l'on observe est l'interaction entre les objets et les champs.
2. Le champ électrostatique est attaché aux charges électriques, le champ magnétostatique est attaché aux pôles des aimants ou est engendré par la circulation d'un courant électrique, le champ gravitationnel est attaché à la masse.
3. La charge électrique est une propriété physique liée à certains objets tels que les électrons, les protons ou d'autres particules matérielles. Il existe deux sortes de charge électrique que l'on qualifie de positive ou négative. Ce que nous appelons la charge magnétique est un concept qui permet d'expliquer et de quantifier le phénomène de magnétisation, en analogie avec le concept de charge électrique: on attribue à chaque pôle d'un aimant des charges magnétiques de signes opposés. Alors qu'un objet peut porter une charge électrique non nulle, un objet magnétisé a toujours une charge magnétique totale nulle, parce que les charges magnétiques apparaissent toujours en paires de signes opposés, en dipôles magnétiques. Il n'est pas possible d'isoler un objet ou une particule qui porterait une charge magnétique unique positive ou négative.



5. Rappelons que nous avons montré à la section 8.8 que la masse d'un objet et son énergie intrinsèque représentent la même grandeur.

13.2 CARACTÉRISTIQUES ET DESCRIPTION DES CHAMPS

Les champs sont omniprésents en physique. Nous allons maintenant préciser ce qui les caractérise, de quelle manière on peut les décrire et en établir des modèles.

13.2.1 Champ en tant que système

Les observations de la section 13.1 ont révélé que les entités que nous avons respectivement appelées champ électrique, magnétique, électromagnétique ou gravitationnel :

- peuvent transporter et accumuler de la quantité de mouvement, vu qu'ils sont les médiateurs de forces ;
- peuvent transporter et accumuler du moment cinétique ;
- peuvent transporter et accumuler de l'entropie ;
- peuvent transporter et accumuler de l'énergie ;
- ont des propriétés élastiques, c'est-à-dire qu'ils sont le siège de tensions (en traction ou en compression).

Ces observations montrent que les champs ont les mêmes propriétés que les systèmes physiques que nous avons étudiés jusqu'ici (solide rigide, fluides parfaits, gaz parfait, condensateur, etc.). Nous en concluons :

Un champ est un système physique tout comme un objet ou un fluide est un système physique. Un champ peut accumuler, libérer et transporter des grandeurs physiques extensives telles que quantité de mouvement, énergie, entropie, etc. Cette faculté se manifeste par le fait qu'un champ peut interagir avec d'autres objets. Ce qui fait la différence entre le système physique « objet ou fluide » et le système physique « champ » est que le second est immatériel et n'est pas localisable, il occupe tout ou partie de l'espace.

Très souvent, il y a confusion entre les champs physiques dont nous venons de préciser la nature et les champs mathématiques qui servent à leur description.

Quelques exemples pour illustrer cette remarque. Dans une pièce, on peut rattacher à n'importe quel point de l'espace une valeur bien déterminée de grandeurs physiques telles que température, pression, etc. Chaque ensemble de valeurs est appelé respectivement champ de température ou champ de pression. Ce sont des champs mathématiques de type scalaire. La répartition des valeurs de l'intensité des champs gravitationnel, électrique et magnétique est donnée par des champs mathématiques de type vectoriel.

Pour mieux illustrer cette distinction, prenons un exemple. Un objet ne sera jamais identique au point matériel (abstraction mathématique) dont nous nous sommes servis pour en décrire le comportement cinématique. Il en va de même avec le système physique champ qui ne sera jamais identifiable aux fonctions de l'espace et du temps que nous utilisons pour décrire son action sur des objets. Le point matériel et les fonctions spatiales ne sont que des moyens mathématiques de description.

13.2.2 Description des champs statiques

On appelle champ statique un champ dans lequel les phénomènes de transport (de quantité de mouvement, d'énergie, etc.) se font à une vitesse beaucoup plus grande (en

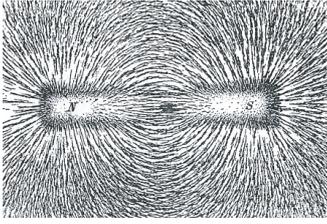


FIGURE 13.12 Visualisation de la structure du champ magnétique d'un barreau aimanté au moyen de limaille de fer.

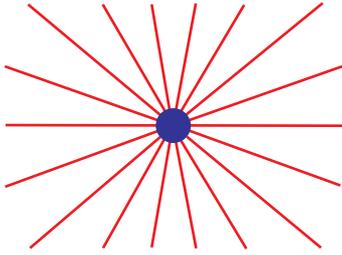


FIGURE 13.13 Représentation du champ d'une sphère chargée au moyen de lignes de champ. Les lignes émanent de la sphère si celle-ci est chargée positivement, y convergent si elle est chargée négativement.

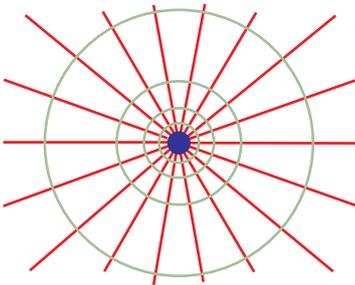


FIGURE 13.14 Représentation du champ d'une sphère chargée au moyen de ligne de champ et de surfaces orthogonales.

général la vitesse de la lumière) que celle des objets qui y sont plongés. Les champs non statiques sont des champs d'ondes qui seront traités au chapitre 14, dans le cas du champ électromagnétique.

Description graphique. La manière usuelle de visualiser la structure d'un champ est, depuis FARADAY (fig. 13.12), d'introduire des *lignes de champ* qui indiquent dans quelle direction et dans quel sens s'exercerait la force sur une charge témoin (électrique, magnétique, masse gravitationnelle, positive par convention). Ainsi, les lignes du champ attaché à une sphère chargée positivement ont une structure sphérique et émanent de la sphère; la figure 13.13 représente une coupe plane quelconque passant par le centre de la sphère. Pour une sphère chargée négativement, le sens des lignes est inversé. Les lignes du champ électrostatique commencent sur des charges positives et finissent toujours sur des charges négatives.

Cette manière de procéder est toutefois incomplète. En effet, comme nous le montrerons à la section 13.5.2, un champ électrique est le siège de contraintes, à savoir de tensions de traction dans le sens des lignes de champ, mais également de compression, perpendiculairement à celles-ci. Nous pouvons visualiser la présence de ces dernières tensions au moyen de surfaces orthogonales qui, nous le verrons, sont des surfaces équipotentielles. La figure 13.14 réunit la représentation au moyen de lignes de champ et de surfaces orthogonales.

Description mathématique. Il existe plusieurs manières de donner une représentation mathématique de la structure d'un champ. La manière usuelle est d'introduire la notion d'*intensité du champ* en tant que quotient de la force subie par une charge ou une masse témoin et de cette charge ou de cette masse témoin. Comme la force est une grandeur vectorielle, il en va de même pour l'intensité du champ qui sera une fonction de la position dans l'espace, représentée par le vecteur position \mathbf{r} . Ainsi, la répartition de l'intensité d'un champ quelconque, que nous désignons par \mathcal{C} , sera :

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{\text{Charge ou masse témoin}} \tag{13.1}$$

Ainsi, dans le cas d'une charge témoin électrique Q , nous aurons :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{Q} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q \cdot \mathcal{E}(\mathbf{r}) \tag{13.2}$$

Principe de superposition. Nous verrons à la section 13.3.1, équation (13.7), que l'intensité du champ attaché à une charge Q est proportionnelle à la valeur de cette charge. Si nous doublons la valeur de la charge, l'intensité doublera elle aussi. Mais cette opération de doublement de la charge peut être réalisée en mettant deux charges identiques au même endroit, l'effet sera le même. Si les deux charges ne sont pas placées au même endroit, on peut calculer la contribution de chacune d'elles comme si l'autre n'était pas présente, puis sommer vectoriellement les deux contributions. Cette manière de faire peut s'étendre à un nombre quelconque de sources du champ envisagé. Cela signifie que :

Lorsque plusieurs champs coexistent dans le même espace, leurs intensités s'additionnent vectoriellement. Cette particularité des champs est appelée principe de superposition. Elle est valable pour tous les champs.

Considérons, à titre d'exemple, le champ engendré par deux charges électriques positives en un point P. Nous déterminons au moyen de l'équation (13.1) les vecteurs respectifs d'intensité et formons le vecteur somme qui représente l'intensité totale

résultant de la superposition des deux champs. Les lignes de champ sont des courbes telles que les vecteurs d'intensité leur sont tangents en tout point (fig. 13.15).

13.3 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Dans les sections qui suivent, nous allons étudier le champ électrostatique pour élaborer les outils servant à la description mathématique des champs statiques. Nous utiliserons ces outils en les adaptant respectivement aux champs magnétique et gravitationnel lorsque nous aborderons ces sujets.

13.3.1 Champ lié à une charge ponctuelle: loi de COULOMB

En utilisant une balance de torsion (fig. 13.16), inventée un siècle plus tôt par CAVENDISH, Charles Augustin COULOMB établit en 1785 que le module F_{12} de la force qu'exerce une charge ponctuelle Q_1 sur une autre charge ponctuelle Q_2 est proportionnel à chacune des charges et inversement proportionnel au carré de la distance r_{12} qui les sépare:

$$F_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \quad (13.3)$$

Comme l'unité de la charge est fixée, la constante de proportionnalité k doit être déterminée par l'expérience. Pour des raisons historiques, cette constante s'écrit:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (13.4)$$

où ϵ_0 est la *constante diélectrique* ou *permittivité du vide*. Sa valeur

$$\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (13.5)$$

est liée à la valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 , fixée numériquement par la définition de l'ampère, par la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$, où c est la vitesse de la lumière qui a été fixée dans le Système international à 299 792 458 m s⁻¹.

En utilisant le vecteur \mathbf{r}_{12} qui relie la charge Q_1 à la charge Q_2 (fig. 13.17), nous pouvons donner la forme vectorielle de la force s'exerçant sur la charge Q_2 :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_r \quad (13.6)$$

où les charges doivent être prises avec leur signe. Un produit négatif correspond à une attraction, un produit positif à une répulsion. Le vecteur \mathbf{u}_r est le vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{r}_{12} . C'est le quotient du vecteur \mathbf{r}_{12} et de son module.

Si nous considérons la charge Q_2 comme charge témoin plongée dans le champ électrique attaché à la charge Q_1 , nous obtenons, à partir de l'équation (13.1) et après suppression des indices, pour de l'intensité du champ attaché à une charge ponctuelle Q :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (13.7)$$

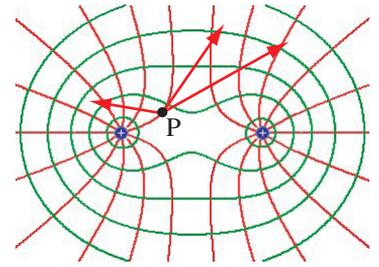


FIGURE 13.15 Superposition vectorielle des intensités: l'intensité totale au point P est la somme des vecteurs d'intensité respectifs. Le vecteur de l'intensité totale est tangent à la ligne de champ passant par le point P.

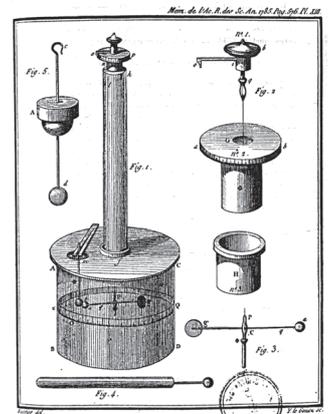


FIGURE 13.16 Balance de COULOMB.: illustration de la publication originale de 1785.

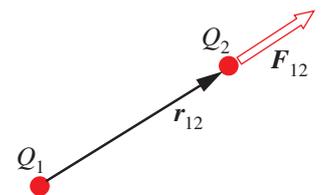


FIGURE 13.17 Loi de COULOMB: la force qui s'exerce entre deux charges électrique dépend de la grandeur et du signe des charges et de la distance qui les sépare.

Cette intensité se mesure en volt par mètre ($V\ m^{-1}$). Par beau temps, la valeur moyenne de l'intensité du champ électrique de la Terre varie entre $0\ V\ m^{-1}$ et $200\ V\ m^{-1}$. Par temps d'orage, elle peut atteindre des valeurs de l'ordre de $15\ à\ 20\ kV\ m^{-1}$; mais les éclairs peuvent se déclencher à partir d'une intensité de $2000\ V\ m^{-1}$.

Le tableau 13.1 met en évidence la vaste plage de valeurs que peut prendre l'intensité du champ électrique dans la nature ou dans quelques applications techniques.

TABEAU 13.1 Quelques valeurs de l'intensité du champ électrique.

Champ particulier	Intensité / $V\ m^{-1}$
À la surface d'un noyau d'uranium	$3 \cdot 10^{21}$
À l'intérieur de l'atome d'hydrogène	$5 \cdot 10^{11}$
Valeur de rupture moyenne dans l'atmosphère	10^5
Près du tambour chargé d'une imprimante laser	10^3
Dans l'atmosphère, au niveau du sol	10^2
Dans les fils de cuivre des circuits d'une maison d'habitation	10^{-2}

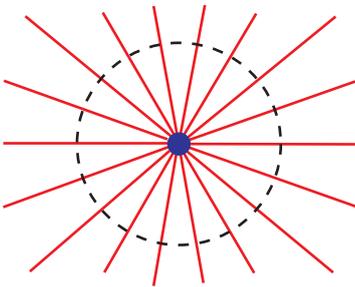


FIGURE 13.18 Le nombre de lignes de champ traversant la surface fermée ne dépend ni des dimensions de la surface, ni de la position de la charge se trouvant à l'intérieur.

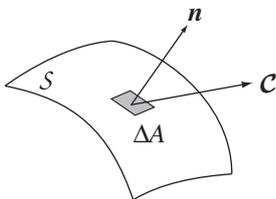


FIGURE 13.19 Surface S traversée par le flux du champ vectoriel d'intensité C . La surface est divisée en petits éléments d'aire ΔA à chacun desquels on attache un vecteur normal n de norme égale à l'unité.

13.3.2 Flux d'un champ vectoriel et théorème de GAUSS

Si nous entourons une charge d'une surface fermée (fig. 13.18), par exemple une sphère, le nombre de lignes de champ qui traversent cette surface ne dépend ni des dimensions de la surface, ni de la position de la charge à l'intérieur de la surface. Si la charge se trouve en dehors de la surface, le nombre de lignes entrantes est égal à celui des lignes sortantes. On en conclut que le nombre total de lignes de champ à travers une surface fermée est proportionnel à la charge ou à la masse enfermée. Cette description d'un champ vectoriel au moyen de lignes de champ évoque la notion de divergence ou de convergence depuis ou vers les causes du champ, comme le ferait l'écoulement d'un fluide depuis sa source ou vers un puits.

C'est sur cette analogie que repose la notion de flux d'un champ vectoriel:

Un élément du flux ψ d'un champ vectoriel C est défini par:

$$\Delta\psi = C \cdot n \Delta A = C \cdot \Delta A \tag{13.8}$$

où n est le vecteur normal rattaché à l'élément de surface ΔA (fig. 13.19).

La notation $n \Delta A = \Delta A$ est introduite pour alléger l'écriture.

Le flux total à travers une surface S s'obtient par intégration, après passage à la limite d'éléments infinitésimaux:

$$\psi_c = \int_S C \cdot dA \tag{13.9}$$

Considérons le cas d'une charge ponctuelle Q dont l'intensité du champ est donnée par la relation (13.7). Nous l'entourons d'une sphère imaginaire concentrique de rayon R . Le flux du champ à travers la surface S de cette sphère imaginaire, dite surface gaussienne) est alors:

$$\psi_{\mathcal{E}} = \oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\mathcal{E} \parallel d\mathbf{A}}{=} \oint_S \mathcal{E} \cdot dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_S dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13.10)$$

Dans la relation ci-dessus, le symbole d'intégrale encerclé indique que l'intégration a été effectuée sur une surface fermée que nous avons désignée par S . Ce résultat est l'énoncé mathématique de l'affirmation du début de la section, à savoir que le nombre total de lignes de champ qui traversent une surface fermée, c'est-à-dire le flux total du champ à travers une surface gaussienne, est proportionnel à la charge enfermée Q .

Même si le résultat ci-dessus a été obtenu à partir du cas particulier d'une charge ponctuelle, il est valable de manière générale.

Quelle que soit la configuration de la charge enfermée dans une surface gaussienne, le flux total du champ électrique à travers cette surface est proportionnel à la charge enfermée :

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (13.11)$$

C'est la version intégrale du théorème de GAUSS.

La forme intégrale (13.11) du théorème de GAUSS est particulièrement utile lorsqu'il s'agit de déterminer l'intensité de champs produits par des distributions de charges qui ont une certaine symétrie. Si ce n'est pas le cas, on doit avoir recours à sa version différentielle. Pour l'obtenir, on envisage un volume infinitésimal cubique dont les faces sont perpendiculaires aux axes d'un repère orthonormé (fig. 13.20). La valeur du flux entrant dans la face perpendiculaire à Ox est égale à :

$$\Delta\psi_{x, in} = \mathcal{E} \cos(\theta) \Delta A = \mathcal{E}_x \Delta y \Delta z$$

Le flux émergent à travers la face opposée vaut :

$$\Delta\psi_{x, out} = -\mathcal{E}'_x \Delta y \Delta z$$

Le flux total à travers les deux surfaces est la somme des ces deux contributions.

$$\Delta\psi_x = (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x) \Delta y \Delta z$$

La différence entre les parenthèses représente la variation de l'intensité du champ \mathcal{E} suivant Ox . Comme le volume considéré est très petit, nous pouvons recourir à une approximation linéaire de cette grandeur au moyen du produit de son taux de variation et de la distance Δx , ce qui donne finalement :

$$\Delta\psi_x = (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x) \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \Delta V$$

Après avoir procédé de la même manière pour les quatre autres faces du volume infinitésimal, nous obtenons le flux total à travers les parois de cet élément de volume :

$$\Delta\psi = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

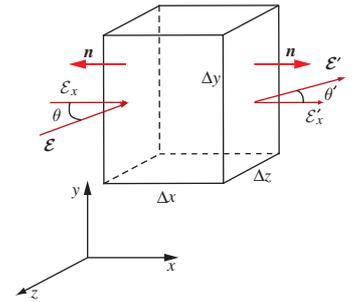


FIGURE 13.20 Élément de volume pour l'établissement de la forme différentielle du théorème de GAUSS.

Le contenu de la parenthèse représente le taux de la variation locale de l'intensité du champ \mathcal{E} (ou de tout champ vectoriel \mathcal{C}).

La grandeur appelée divergence de \mathcal{E} , abrégée par $\text{div}\mathcal{E}$:

$$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \tag{13.12}$$

exprime l'équation de bilan du flux d'un champ de vecteurs par unité de volume. Une divergence positive signifie qu'il y a une « source » du champ dans le volume considéré, alors que dans le cas contraire, il y a un « puits » du champ dans ce volume. Il est usuel de dire qu'un champ dont la divergence est non nulle est un « champ de sources ».

Si l'on considère un domaine fini, le flux total est égal à la somme des flux calculés sur chacun des éléments en lesquels nous avons décomposé ce domaine, ce que nous obtenons en intégrant sur la surface enfermant le volume. Ce flux total correspond à l'intégrale de la divergence sur tout le volume:

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathcal{E} dV \tag{13.13}$$

Cette relation est appelée *théorème de la divergence* ou *théorème de GAUSS*. Malgré le fait que, pour l'établir, nous avons fait référence au champ électrique, elle est valable de manière générale pour n'importe quel champ vectoriel \mathcal{C} .

Dans la relation (13.11), nous exprimons la charge au moyen de sa densité ρ . Alors:

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \int_V \text{div } \mathcal{E} dV$$

La version locale du théorème de GAUSS:

$$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{13.14}$$

relie la distribution des sources du champ électrique à son intensité en tout point de l'espace.

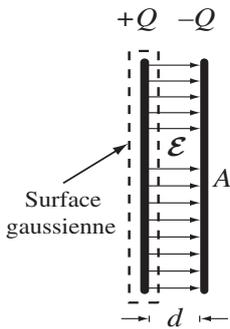


FIGURE 13.21 Détermination de l'intensité du champ électrique à l'intérieur d'un condensateur plan. La distance d entre les plaques est beaucoup plus faible que les dimensions linéaires des plaques.

13.3.3 Intensité du champ d'un condensateur plan

Appliquons le théorème de GAUSS pour déterminer l'intensité du champ qui règne entre les plaques d'un condensateur plan. Il faut d'abord réaliser que, pour autant que la distance entre les plaques soit faible par rapport aux dimensions linéaires des plaques ($d \ll \sqrt{A}$), la charge se concentre uniquement sur la face intérieure des plaques du condensateur et que, à part dans le voisinage des bords, cette répartition est uniforme.

Nous entourons une des plaques, par exemple la plaque positive, d'une surface imaginaire (fig. 13.21), et appliquons la relation (13.11) pour obtenir:

$$\mathcal{E}_{\text{cond. plan}} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (d \ll \sqrt{A}) \quad (13.15)$$

13.3.4 Quelques configurations du champ électrostatique

La figure 13.22 illustre quelques configurations de champs électrostatiques. Chaque champ est représenté à la fois au moyen de lignes de champ dont les extrémités sont toujours sur des charges et de surfaces orthogonales qui sont toujours fermées.

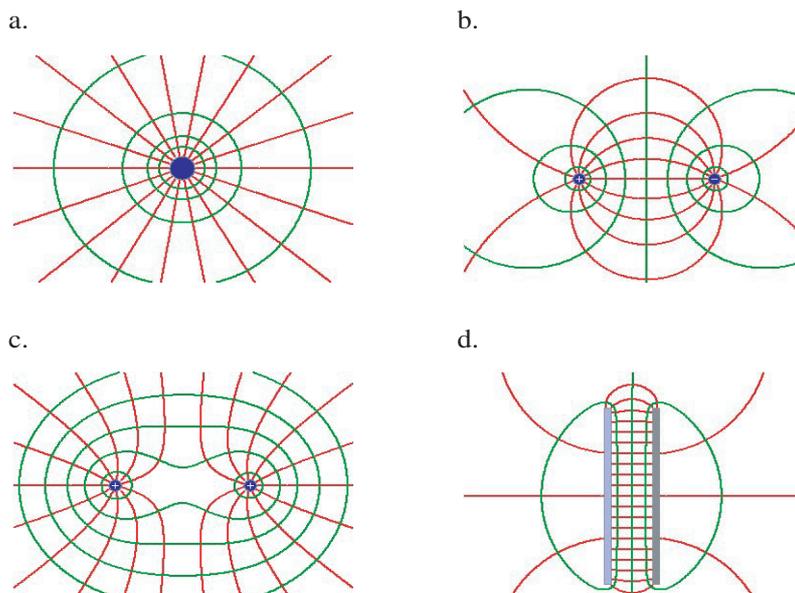


FIGURE 13.22 Représentation de quelques configurations du champ électrostatique au moyen des lignes de champ et des surfaces orthogonales : (a) sphère chargée ou charge ponctuelle; (b) doublet de charges opposées; (c) doublet de charges égales; (d) condensateur plan.

EXEMPLE 13.1. Champ à l'intérieur d'un conducteur plongé dans un champ extérieur.

Pourquoi le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur est-il nécessairement nul ?

SOLUTION: Comme les charges électriques à l'intérieur d'un conducteur sont mobiles, elles s'accumulent sur la surface, là où elles ont le plus de place. Elles s'arrangent jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent compense complètement, à l'intérieur du conducteur, le champ extérieur. Cette condition entraîne la perpendicularité des lignes de champ à la surface du conducteur, sinon les charges se déplaceraient sous l'influence de la composante tangentielle. En conclusion, l'intérieur d'un conducteur plongé dans un champ électrostatique est libre de champ et les lignes du champ extérieur sont perpendiculaires à sa surface (fig. 13.23).

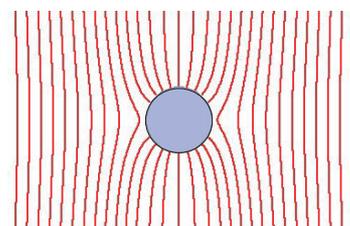


FIGURE 13.23 Lorsqu'un conducteur est plongé dans un champ électrostatique, l'intensité du champ est nulle à l'intérieur du conducteur et les lignes de champ sont perpendiculaires à sa surface.

13.4 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ET POTENTIEL

Dans cette section, nous allons développer une méthode qui permet de décrire un champ, ici le champ électrostatique, au moyen de la distribution de l'énergie, une grandeur scalaire, plutôt qu'au moyen de l'intensité elle-même. Cette manière de procéder apporte une simplification considérable du point de vue mathématique.

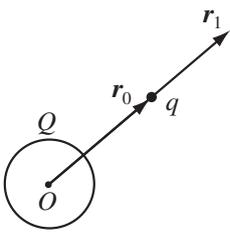


FIGURE 13.24 Déplacement de la charge témoin q de r_0 à r_1 dans le champ engendré par la charge Q .

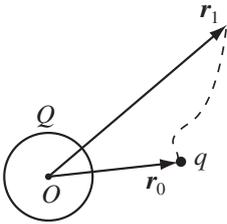


FIGURE 13.25 La variation de l'énergie ne dépend pas de la trajectoire suivie mais uniquement des extrémités du déplacement.

13.4.1 Potentiel du champ électrique

Considérons la distribution de l'intensité du champ engendré par une charge sphérique positive Q . Nous savons qu'elle correspond (en dehors de la charge) à celle d'une charge ponctuelle Q . Nous introduisons une charge témoin positive q à la position r_0 , mesurée par rapport au centre de symétrie O (fig. 13.24). Sous l'effet du champ, cette charge témoin est déplacée, le long d'une ligne de champ, à un autre endroit repéré par le vecteur r_1 . Si cette position est plus éloignée de O que la position r_0 , le champ libère de l'énergie dans ce déplacement. Calculons la quantité d'énergie libérée :

$$\begin{aligned} E(r_1) - E(r_0) &= \int_{r_0}^{r_1} I_E \cdot dt = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_p \cdot dt = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= q \int_{r_0}^{r_1} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{r_0}^{r_1} \left[\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (13.16)$$

Nous montrerons à l'exemple 13.2 que le résultat que nous venons de trouver est également valable si le déplacement n'a pas lieu le long d'une ligne de champ, mais selon une trajectoire quelconque (fig. 13.25) et que la variation de l'énergie lors du déplacement ne dépend que des extrémités du déplacement et pas de la trajectoire suivie.

Divisons l'énergie libérée par la charge q de la charge témoin pour obtenir l'énergie par unité de charge :

$$\frac{E(r_1) - E(r_0)}{q} = \int_{r_0}^{r_1} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) = \varphi(r_0) - \varphi(r_1) \quad (13.17)$$

Cette grandeur, représentée par le symbole φ , dépend uniquement de la charge Q et de la distance (grandeur scalaire) par rapport à cette charge. Il s'agit d'une fonction de la position \mathbf{r} , au moyen de laquelle il est possible de décrire mathématiquement le champ électrostatique de Q .

La grandeur $\varphi(\mathbf{r})$, proportionnelle à l'énergie par unité de charge (énergie spécifique), définie par la relation

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_0) = - \int_{r_0}^{r_1} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.18)$$

est le potentiel électrostatique. C'est une grandeur qui est associée à tout point d'un champ physique. C'est un champ mathématique de type scalaire. Les potentiels obéissent au principe de superposition, un potentiel global est égal à la somme (algébrique) des potentiels individuels. L'unité de mesure du potentiel électrique est le volt (V).

Si nous faisons varier le point d'arrivée r_1 du déplacement, l'équation (13.18) détermine le potentiel à une constante additive près. Celle-ci est déterminée par le choix arbitraire du point r_0 . Nous pouvons fixer librement le niveau zéro du potentiel. Il est usuel d'adopter la convention :

$$\varphi(r_0 \rightarrow \infty) = 0 \quad (13.19)$$

Ainsi, le potentiel d'une charge Q ponctuelle ou sphérique devient :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{r_0}^r \mathcal{E} \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (13.20)$$

La description d'un champ physique au moyen du potentiel est équivalente à sa description au moyen de la distribution des intensités $\mathcal{E}(\mathbf{r})$. L'une peut être calculée à partir de l'autre. Nous avons établi la relation entre les deux en nous servant d'une charge ponctuelle ou sphérique, mais le résultat obtenu est valable de manière générale (en dehors de la charge considérée). La comparaison des équations (13.20) et (13.7) montre que l'intensité du champ électrique d'une charge ponctuelle est égale à l'opposé de la dérivée par rapport à r du potentiel :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Cette relation justifie le fait que l'intensité du champ électrique se mesure en V m^{-1} . Dans un repère cartésien, la dérivation est effectuée par rapport à chacune des coordonnées; ces dérivées sont les composantes du vecteur *gradient* défini par la relation (9.77). Ce vecteur est dirigé dans la direction de la plus forte variation du potentiel.

L'intensité du champ électrostatique est l'opposé du gradient du potentiel :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi(\mathbf{r})] \quad (13.21)$$

Les relations (13.18) et (13.21) s'impliquent mutuellement :

$$\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_0) = -\int_{r_0}^{\mathbf{r}_1} \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi(\mathbf{r})] \quad (13.22)$$

Le signe négatif dans les deux équations est la manifestation du fait que l'intensité du champ augmente lorsque le potentiel décroît. Au chapitre 2, lorsque nous avons étudié le comportement des circuits électriques, nous avons découvert que le courant électrique conventionnel s'écoulait dans les conducteurs dans le sens du potentiel décroissant. Comme la tension électrique U correspond à l'opposé de la différence de potentiel, la tension entre deux points A et B du champ électrique correspond donc à :

$$\int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB} \quad (13.23)$$

La condition $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ définit une surface sur laquelle le potentiel est constant. En variant \mathbf{r} , on obtient une famille de surfaces, les surfaces équipotentielles. Les surfaces équipotentielles du champ engendré par une distribution sphérique de charge sont des sphères concentriques.

Les surfaces équipotentielles d'un champ sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ (fig. 13.26). La représentation graphique des surfaces équipotentielles au moyen de lignes de niveau, comme dans une carte topographique, sont donc tout aussi suggestives que les lignes de champ. Dans la figure 13.26, la distance qui sépare deux lignes de niveau successives correspond toujours à la même variation du potentiel.

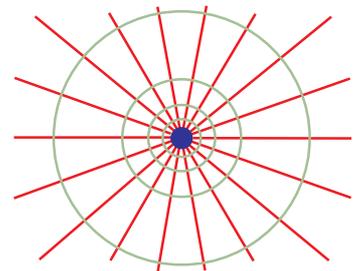


FIGURE 13.26 Représentation graphique du champ électrique engendré par une sphère chargée (ou une charge ponctuelle) au moyen des lignes de champ et des courbes équipotentielles. Les deux ensembles de courbes sont mutuellement perpendiculaires.

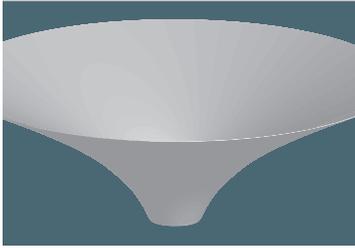


FIGURE 13.27 Puits de potentiel engendré par une sphère portant une charge négative. Ses bords s'étendent à l'infini.

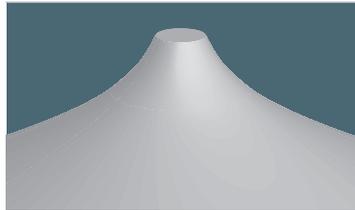


FIGURE 13.28 Colline de potentiel engendrée par une sphère portant une charge positive.

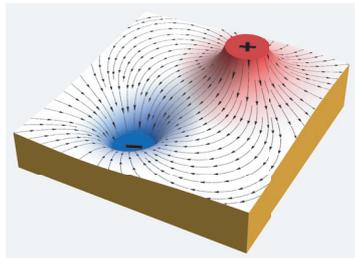


FIGURE 13.29 Paysage engendré par un dipôle électrique, deux charges de même valeur, mais de signes opposés. Les lignes et les flèches noires matérialisent la direction et le sens des lignes de champ qui s'orientent suivant la plus forte variation du potentiel, le gradient. (Figure: MikeRun (CC)).

13.4.2 Puits et collines de potentiel

Les courbes équipotentielles peuvent être interprétées de manière analogue aux lignes de niveau d'une carte topographique. Or, il est possible d'obtenir une vision tridimensionnelle du paysage à partir d'une carte topographique. C'est sur cette idée que repose la notion de puits (ou de colline) de potentiel. On construit un paysage tridimensionnel à partir de la représentation bidimensionnelle de l'évolution du potentiel.

Dans la représentation du potentiel électrostatique, les charges négatives engendrent des puits (fig. 13.27), les charges positives des collines (fig. 13.28). Lorsque plusieurs charges sont présentes, on obtient un «paysage» constitué de collines, de plaines et de combes (fig. 13.29).

13.4.3 Circulation d'un champ

L'intégrale le long d'une courbe ou intégrale curviligne du produit scalaire du vecteur d'intensité $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ du champ électrique et du vecteur de segment infinitésimal de courbe $d\mathbf{l}$, telle que celles que nous avons rencontrées à partir de l'équation (13.16), est appelée *circulation* Λ du champ $\mathcal{E}(\mathbf{r})$:

$$\Lambda = \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (13.24)$$

La valeur de la circulation du champ électrostatique est indépendante du chemin d'intégration et ne dépend que de ses extrémités A et B, comme nous le verrons dans l'exemple 13.2. Si, dans l'équation (13.24), les points de départ A et d'arrivée B du déplacement dans le champ coïncident, c'est-à-dire si le déplacement a lieu sur une courbe fermée que nous désignons par C, la valeur de la circulation est nulle.

La circulation d'un champ électrostatique le long d'une courbe fermée est nulle:

$$\Lambda_{\mathcal{E}} = \oint_C \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (13.25)$$

Les champs qui ont cette propriété sont dits conservatifs, particularité liée au fait que le champ dérive d'un potentiel scalaire (relation (13.22)). Elle entraîne également que le rotationnel du champ électrostatique est nul:

$$\oint_C \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \mathcal{E} = 0 \quad (13.26)$$

Cette propriété implique que les lignes du champ électrostatique ne sont pas fermées sur elles-mêmes.

Le fait que la nullité de la circulation d'un champ vectoriel entraîne celle de son rotationnel et qu'il dérive d'un potentiel sera démontré à la section 13.8.1.

EXEMPLE 13.2. Particularité de la circulation du champ électrostatique.

Justifier le fait que la circulation du champ électrostatique est indépendante du chemin suivi et ne dépend que des extrémités de la trajectoire : (a) au moyen d'arguments géométriques ; (b) au moyen d'arguments mathématiques.

SOLUTION : (a) Il est possible de substituer au chemin suivi une succession de marches d'escalier qui s'appuient sur la courbe et dont les flancs sont respectivement parallèles et perpendiculaires aux lignes de champ en chaque point de la trajectoire. Sur les flancs perpendiculaires aux lignes de champ, la contribution à l'intégrale est nulle, vu que les vecteurs $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ et $d\mathbf{l}_\perp$ sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul. La somme des segments des flancs parallèles correspond à la longueur du chemin direct le long d'une ligne de champ.

(b) En chaque point de la trajectoire empruntée, nous pouvons décomposer le vecteur élémentaire $d\mathbf{l}$ en une composante parallèle et une composante perpendiculaire à la direction de l'intensité $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ du champ (fig. 13.30) :

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{l}_\parallel + d\mathbf{l}_\perp = dr \cdot \mathbf{u}_\mathcal{E} + d\mathbf{l}_\perp$$

où $\mathbf{u}_\mathcal{E}$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de l'intensité du champ au point considéré. Les deux termes de cette décomposition correspondent aux flancs des marches d'escalier évoquées dans la partie (a) de cet exemple.

La substitution de la décomposition du vecteur $d\mathbf{l}$ dans l'intégrale donne finalement :

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_\mathcal{E} \cdot (d\mathbf{l}_\parallel + d\mathbf{l}_\perp) = \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_\mathcal{E} \cdot (dr \cdot \mathbf{u}_\mathcal{E} + d\mathbf{l}_\perp) \\ &= \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot \left(dr \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\mathcal{E} \cdot \mathbf{u}_\mathcal{E}}_1 + \underbrace{\mathbf{u}_\mathcal{E} \cdot d\mathbf{l}_\perp}_0 \right) = \int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

ce qui démontre que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration, mais uniquement de ses extrémités. ■

EXEMPLE 13.3. Intensité du champ et potentiel d'une sphère chargée.

Considérons une sphère de rayon R portant une charge Q . Déterminer l'intensité du champ électrique et le potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère : (a) en admettant que la sphère est conductrice ; (b) en admettant que la charge est répartie de manière uniforme sur tout le volume d'une sphère non conductrice.

SOLUTION : (a) Pour appliquer le théorème de GAUSS, nous introduisons une sphère de rayon variable r concentrique à la sphère chargée. À l'extérieur de celle-ci ($r > R$), l'application de la relation (13.10) donne, en tenant compte du fait que les vecteurs \mathcal{E} et \mathbf{r} sont colinéaires :

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathcal{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dont nous tirons :

$$\mathcal{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

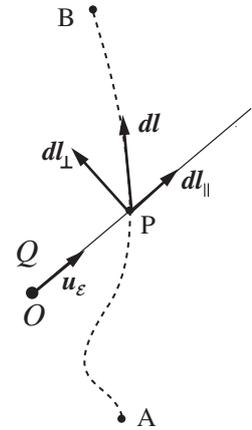


FIGURE 13.30 Décomposition du vecteur élémentaire $d\mathbf{l}$ en une composante parallèle et une composante perpendiculaire à la direction du champ $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ au point considéré.

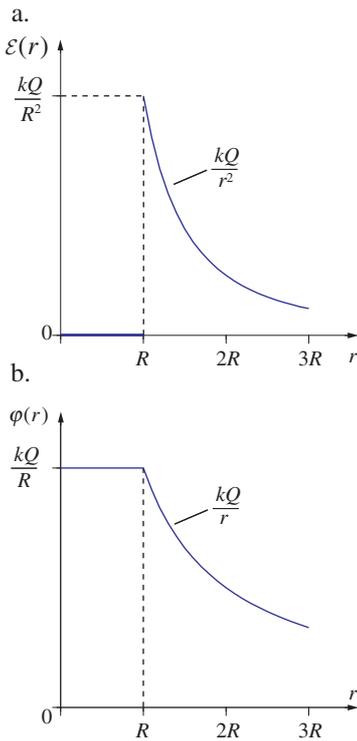


FIGURE 13.31 Sphère chargée en surface: (a) évolution de l'intensité du champ; (b) évolution du potentiel. $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

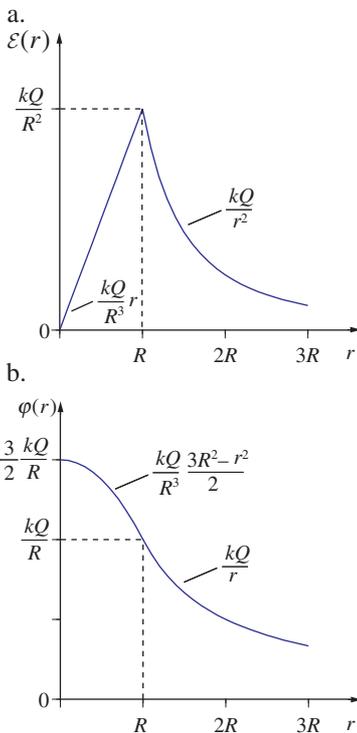


FIGURE 13.32 Sphère chargée uniformément: (a) évolution de l'intensité du champ; (b) évolution du potentiel. $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

Lorsque le rayon de la sphère gaussienne devient inférieur à R , la charge enfermée est nulle, il en va de même pour le champ électrique. Il y a donc une discontinuité dans la valeur de l'intensité du champ électrique lorsque l'on franchit la surface de la sphère (fig. 13.31a).

Pour le calcul du potentiel, nous utilisons la relation (13.22) en fixant le niveau de référence à l'infini et en lui attribuant une valeur nulle. Ainsi, pour $r \geq R$ nous avons:

$$\varphi(r \geq R) = -\int_{\infty}^r \mathcal{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{\tilde{r}^2} d\tilde{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\tilde{r}} \right]_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

À l'intérieur de la sphère, le champ d'intensité nulle doit être le gradient d'un potentiel constant, ce que confirme l'évaluation du potentiel selon l'équation (13.22)

$$\varphi(r < R) = -\int_{\infty}^R \mathcal{E}(r \geq R) \cdot d\vec{r} - \int_R^r \mathcal{E}(r < R) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \text{const}$$

Cette valeur correspond à celle du potentiel à la surface de la sphère (fig. 13.31b).

(b) Que la charge Q soit répartie uniformément sur la surface ou à l'intérieur de la sphère, cette charge est la même, vue de l'extérieur de la sphère, ce qui implique que le champ extérieur a la même intensité que dans le cas (a).

Si nous plaçons une sphère gaussienne à l'intérieur de la sphère chargée, la charge englobée par cette surface est donnée par:

$$Q(r \leq R) = \frac{Q}{4/3\pi R^3} 4/3\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

En vertu du théorème de GAUSS, nous avons:

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\vec{A} = \mathcal{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

ce qui entraîne:

$$\mathcal{E}(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

soit une croissance linéaire de l'intensité du centre à la surface de la sphère (fig. 13.32a).

L'évolution du potentiel à l'extérieur de la sphère est la même que dans le cas (a). À l'intérieur de la sphère, nous avons à nouveau:

$$\begin{aligned} \varphi(r \leq R) &= -\int_{\infty}^R \mathcal{E}(r \geq R) \cdot d\vec{r} - \int_R^r \mathcal{E}(r < R) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r \tilde{r} \cdot d\tilde{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \left(\frac{r^2 - R^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{3R^2 - r^2}{2} \end{aligned}$$

L'évolution du potentiel est représentée dans la figure 13.32b.

EXEMPLE 13.4. Potentiel et champ d'un dipôle électrique.

Déterminer le potentiel et en dériver l'intensité du champ électrique engendré par une paire de charges de valeur Q et de signes opposés, séparés par distance δ , que l'on appelle un dipôle électrique. Se placer dans l'approximation dipolaire qui consiste à limiter l'étude à des points situés loin du dipôle, c'est-à-dire à une distance $r \gg \delta$.

SOLUTION: Autant le potentiel que le champ manifestent une symétrie axiale dont l'axe est déterminé par les deux charges. Nous pouvons nous contenter d'effectuer les calculs dans un plan quelconque qui contient les deux charges du dipôle. En vertu du principe de superposition, le potentiel du dipôle (fig. 13.33) en un point P est égal à la somme des potentiels des charges qui le constituent :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Si la distance δ est très petite par rapport à r , nous pouvons écrire :

$$r_2 - r_1 \cong \delta \cos(\theta) \quad \text{et} \quad r_1 r_2 \cong r^2$$

Nous utilisons cette approximation, dite approximation dipolaire, et introduisons le module du moment dipolaire $p = Q\delta$ (qui sera défini de manière formelle à la section 13.6.1) pour obtenir :

$$\varphi(P) = \frac{Q\delta \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sachant que, selon la relation (13.22), l'intensité du champ est égale au gradient du potentiel, nous pouvons encore décider du choix du repère dans lequel nous allons l'évaluer. La présence de l'angle θ suggère l'utilisation de coordonnées polaires (r, θ) . La composante radiale du champ dipolaire est égale à :

$$\mathcal{E}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{E 13.1})$$

et sa composante transversale devient :

$$\mathcal{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{E 13.2})$$

Les figures 13.34a et 13.34b visualisent respectivement les lignes de champ et la perpendicularité entre celles-ci et les courbes de potentiel. Rappelons que les résultats ont été obtenus dans l'approximation dipolaire, qui n'est plus du tout valable dans le voisinage des charges constituant le dipôle. Dans ce cas, l'aspect du potentiel et du champ est celui de la figure 13.22b.

Notons que si l'on se place sur l'axe du dipôle ($\theta = 0$), la composante transversale s'annule et la composante radiale est égale à :

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (2Q\delta) \frac{1}{r^3} \quad (\text{E 13.3})$$

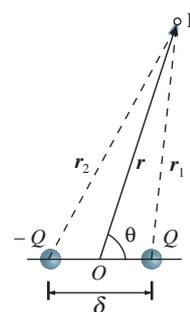


FIGURE 13.33 Dipôle électrique : éléments servant à l'évaluation de l'intensité du champ.

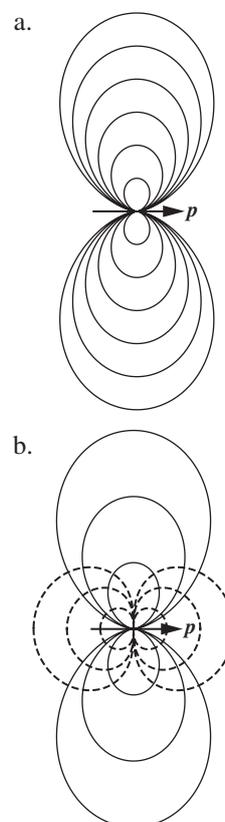


FIGURE 13.34 Champ du dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire à des distances beaucoup plus grandes que la longueur a du dipôle : (a) lignes de champ ; (b) adjonction de courbes de potentiel (lignes discontinues).

1. Quelles sont les caractéristiques d'un champ physique ?
2. Qu'est-ce qu'un champ mathématique ?
3. Que représente le flux d'un champ vectoriel ?
4. Qu'exprime le théorème de GAUSS ?
5. Que représente le potentiel d'un champ vectoriel tel que le champ électrostatique et quel est son lien avec l'intensité du champ ?



1. Un champ physique est un système qui, comme un objet matériel, peut transporter et accumuler de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'entropie, de l'énergie, ainsi qu'être le siège de contraintes. Il occupe tout ou partie de l'espace et peut interagir avec d'autres systèmes physiques.
2. Un champ mathématique est une fonction qui donne la répartition spatiale d'une grandeur physique. Celle-ci peut être une grandeur scalaire telle que la température ou la pression, ou une grandeur vectorielle telle qu'une vitesse d'écoulement ou l'intensité du champ électrique, magnétique ou gravitationnel. La représentation graphique des champs scalaires se fait au moyen de courbes qui relient les points de même intensité, les courbes de niveau. Les lignes de champ servant à décrire les champs vectoriels sont telles que les vecteurs d'intensité leur sont tangents en tout point.
3. Lorsque l'on représente un champ vectoriel au moyen de lignes de champ, leur densité dans une région donnée est proportionnelle à l'intensité. La notion de flux sert à donner une valeur à cette densité. Il est une mesure du nombre de lignes de champ qui traversent une surface donnée à un instant donné. Il est proportionnel à l'intensité du champ, à l'aire de la surface et dépend de l'orientation de cette surface par rapport aux lignes de champ.
4. La version intégrale du théorème de GAUSS indique que le flux total d'un champ à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des sources de ce champ enfermées dans cette surface. La version différentielle exprime que la densité du flux (la variation locale de l'intensité du champ, sa divergence) est proportionnelle à la densité locale des sources de ce champ.
5. Le potentiel associé à un champ vectoriel exprime la variation de l'énergie spécifique lors d'un déplacement d'un élément témoin dans le champ. Pour le champ électrostatique, cette variation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des extrémités de la trajectoire. Cette particularité en fait un champ conservatif, c'est-à-dire un champ dans lequel le principe de conservation de l'énergie est valable. Le potentiel est un champ scalaire. Un vecteur d'intensité du champ est toujours orienté dans la direction de la plus forte variation du potentiel, ce que l'on appelle le gradient du potentiel.



13.5 DENSITÉ D'ÉNERGIE ET CONTRAINTES DANS LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Vu qu'un champ est un système physique, il contient de l'énergie et il est le siège de contraintes. Nous allons déterminer la valeur de ces grandeurs pour le champ électrostatique.

13.5.1 Répartition de l'énergie dans le champ électrostatique

Si nous déplaçons une des plaques d'un condensateur par rapport à l'autre, comme le montre la figure 13.35, nous devons investir une certaine quantité d'énergie qui s'écoule vers le champ du condensateur et s'y accumule. Selon la relation (9.16), ce flux d'énergie correspond à la puissance de la force appliquée :

$$I_E = \mathcal{P} = vF$$

Si nous tenons compte de la définition du flux d'énergie: $I_E = dE/dt$ (pour le champ électrique du condensateur) et de la vitesse: $v = dx/dt$, la relation ci-dessus devient :

$$dE = F \cdot dx$$

L'énergie totale accumulée dans le champ électrique du condensateur lorsqu'une plaque a été déplacée de 0 à la distance d de l'autre s'obtient par intégration :

$$E = \int_{x=0}^{x=d} F \cdot dx = \int_{x=0}^{x=d} \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 A \cdot dx = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \cdot Ad$$

Le produit Ad représente le volume occupé par le champ entre les plaques du condensateur (rappelons que nous avons considéré le champ en dehors du condensateur comme négligeable). En divisant le résultat obtenu par ce volume, nous obtenons l'énergie volumique ou densité d'énergie. Même s'il a été obtenu à partir d'un cas particulier, ce résultat est valable, quelle que soit la configuration du champ.

La densité d'énergie dans un champ électrique est donnée par :

$$\rho_{E, \text{el}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \tag{13.27}$$

La densité d'énergie du champ électrique se mesure en J m^{-3} . Or, $1 \text{ J m}^{-3} = 1 \text{ Pa}$, ce qui implique que la densité d'énergie correspond à une pression, ce que nous allons confirmer dans la section 13.5.2 qui suit.

13.5.2 Contraintes dans le champ électrostatique⁶

Nous envisageons un condensateur plan et considérons la charge positive de la plaque 2 comme charge témoin dans le champ de la plaque 1 négative (fig. 13.36). Par l'intermédiaire du champ, la plaque 1 attire la plaque 2. Nous allons montrer qu'il existe une tension dans la direction des lignes de champ et allons en déterminer la valeur.

En vertu de l'homogénéité du champ, la force totale sur la plaque 2 est donnée par :

$$F_2 = Q_2 \mathcal{E}_1$$

où \mathcal{E}_1 est l'intensité du champ attaché à la plaque 1 seule, en l'absence de la plaque 2 (fig. 13.37). L'intensité \mathcal{E}_2 du champ attachée à la plaque 2 a la même valeur et le même sens du côté qui fait face à la plaque 1, le sens opposé à l'extérieur des plaques.

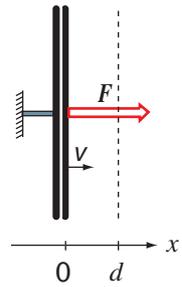


FIGURE 13.35 Pour évaluer l'énergie accumulée dans le champ électrique entre les deux plaques d'un condensateur, il suffit de calculer l'énergie à investir pour déplacer une des deux plaques jusqu'à une distance d de l'autre.

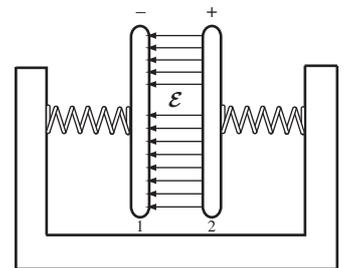


FIGURE 13.36 Condensateur plan dont les plaques sont maintenues à distance par l'intermédiaire de ressort fixés sur l'armature.

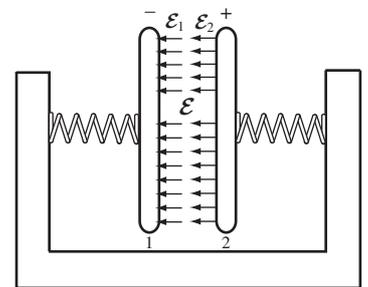


FIGURE 13.37 Contribution de chacune des plaques à l'intensité totale du champ régnant entre les plaques.

6. G. FALK, G. HEIDUCK, G. BRUNO SCHMID: Impulsströme im elektromagnetischen Feld, *Konzepte eines zeitgemässen Physikunterrichts*, Heft 5, Schroedel, Hannover, 1982.

La superposition de ces deux champs donne un champ homogène d'intensité \mathcal{E} entre les deux plaques et nulle à l'extérieur. Le champ de chacune des plaques contribue pour moitié à l'intensité totale. Il s'ensuit :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

Donc :

$$F_2 = Q_2 \frac{\mathcal{E}}{2}$$

La valeur absolue de la charge portée par chacune des plaques est la même, c'est-à-dire que $Q_2 = -Q_1 = Q$. Nous exprimons cette charge au moyen de l'intensité donnée par la relation (13.15), à savoir $Q = \epsilon_0 A \mathcal{E}$ et obtenons pour le module de la force :

$$F_2 = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 A$$

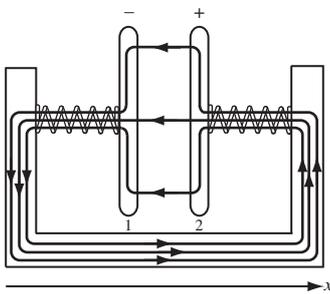


FIGURE 13.38 Circuit fermé du flux de quantité de mouvement selon l'axe x . Dans les ressorts et dans le champ électrique règne une tension de traction, dans la partie inférieure de l'armature une tension de compression.

Cette valeur ne représente pas que la force de la plaque 1 sur la plaque 2, mais celle que la plaque 1 exerce sur la portion de champ qui se trouve à sa proximité immédiate. C'est également la force que la partie gauche du champ exerce sur la partie droite. Or, nous savons que la notion de force est équivalente à celle d'un flux de quantité de mouvement.

Le fait que de la quantité de mouvement s'écoule à travers le champ (fig. 13.38) implique que celui-ci est soumis à des contraintes mécaniques. Vu qu'une partie du champ tire sur l'autre partie, il s'agit d'une tension de traction. La tension mécanique σ_x dans la direction Ox , égale à l'opposé de la densité du flux de quantité de mouvement, soit au quotient de la force par l'aire de la surface sur laquelle elle s'exerce. En conclusion :

Un champ électrique est en état de tension de traction dans la direction des lignes de champ. Cette contrainte est proportionnelle au carré de l'intensité du champ :

$$\sigma_x = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \tag{13.28}$$

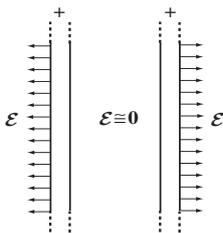


FIGURE 13.39 Lorsque les deux plaques portent la même charge, le système est également soumis à une contrainte en traction dans le sens des lignes de champ.

C'est également vrai si les deux plaques portent des charges de même signe. Les lignes de champ peuvent être obtenues en tant que superposition des champs de plaques infiniment étendues (fig. 13.39). L'espace entre les plaques est quasi libre de champ; il n'y a donc aucun flux de quantité de mouvement dans cette région. Or, nous observons que les plaques ont tendance à l'éloigner l'une de l'autre. Sachant que le champ est essentiellement localisé à l'extérieur des plaques, nous devons conclure que l'éloignement des plaques est dû à une traction exercée par le champ depuis l'extérieur des plaques. Cela n'est possible que si le champ à l'extérieur des plaques est lui aussi soumis à une traction, ce qui justifie l'affirmation en début de paragraphe.

Vu que l'espace entre les charges de même signe est libre (ou quasi libre) de champ, on doit admettre qu'il est plus correct de dire que des charges de même signe sont tirées par le champ de manière à ce qu'elles s'éloignent l'une de l'autre, plutôt qu'il ne les repousse l'une de l'autre.

Sur la base de ces constatations, nous pouvons interpréter l'action du champ des doublets de la figure 13.22. Dans le cas du doublet de la figure 13.22b, formé de deux charges de signes opposés, la densité de lignes de champ est importante entre les charges; celles-ci sont attirées l'une vers l'autre par le champ. En revanche, pour le doublet de la figure 13.22c, formé de deux charges de même signe, la densité est plus importante à l'extérieur de la configuration; les charges sont éloignées l'une de l'autre par la traction exercée de part et d'autre par le champ électrique.

Mais le champ électrostatique est également le siège d'une tension mécanique perpendiculairement aux lignes de champ. Pour nous en convaincre, nous considérons à nouveau un condensateur à plaques parallèles et imaginons que les plaques sont constituées de deux moitiés évidées qui s'imbriquent de manière télescopique l'une dans l'autre (fig. 13.40). Si des ressorts sont montés à l'intérieur de ces plaques, ils sont soumis à une traction (les deux moitiés des plaques ont tendance à s'écarter l'une de l'autre), ce qui veut dire que la quantité de mouvement s'écoule, à l'intérieur des plaques, dans le sens négatif. La quantité de mouvement ne pouvant circuler que si le circuit est fermé (fig. 13.41), nous sommes obligés de conclure qu'elle circule dans le champ électrique dans le sens positif, ce qui veut dire que ce flux engendre une tension de compression.

Un champ électrique est en état de tension de compression perpendiculairement aux lignes de champ, c'est-à-dire dans la direction des surfaces orthogonales ou surfaces équipotentielles.

$$\sigma_y = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2, \quad \sigma_z = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \quad (13.29)$$

On peut se demander s'il est possible d'avoir d'autres systèmes qui peuvent être soumis simultanément à des tensions de traction et de compression. C'est tout à fait banal. Lorsque l'on tord un torchon pour en évacuer l'eau, il est soumis simultanément à la pression des mains qui le tiennent et à leur traction, ainsi qu'à des contraintes de cisaillement dues à la torsion (fig. 13.42).

EXEMPLE 13.5. Pression et densité d'énergie dans une configuration sphérique.

Une charge Q est répartie selon une configuration sphérique de rayon R . (a) La charge est répartie sur la surface conductrice de la sphère; évaluer la force qui serait nécessaire pour maintenir ensemble les deux hémisphères si l'on coupe la sphère en deux moitiés égales. (b) La charge est répartie uniformément sur tout le volume; évaluer la valeur de l'énergie emmagasinée et appliquer le résultat à un noyau atomique en utilisant le modèle de la goutte liquide. Appliquer le résultat à la fission de l'uranium 235 après l'absorption d'un neutron. Comparer cette énergie à celle des fragments résultant de la fission et commenter les résultats obtenus.

SOLUTION: (a) Le champ électrique engendré par les charges en surface exerce une traction dans le sens des lignes de champ. La valeur de cette force pourrait être calculée en intégrant les forces élémentaires qui s'exercent sur une surface élémentaire à partir de l'équation (13.28) dans un repère à coordonnées polaires. Mais seule la composante de la force dans la direction de l'axe perpendiculaire au plan de coupe des deux hémisphères doit être prise en considération, vu que les autres composantes se compensent à cause de la symétrie de la configuration. Cela correspond à évaluer la force de traction exercée par le champ sur la projection de l'hémisphère sur le plan de coupe, donc sur un disque de rayon égal à celui de la sphère.

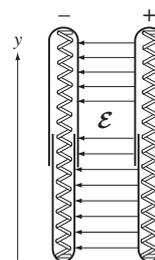


FIGURE 13.40 Les ressorts à l'intérieur des plaques télescopiques sont soumis à une traction.

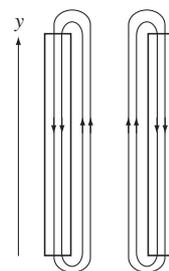


FIGURE 13.41 Comme elle circule en circuit fermé, la quantité de mouvement doit circuler dans le sens positif perpendiculairement aux lignes de champ. Il y règne une contrainte en compression.

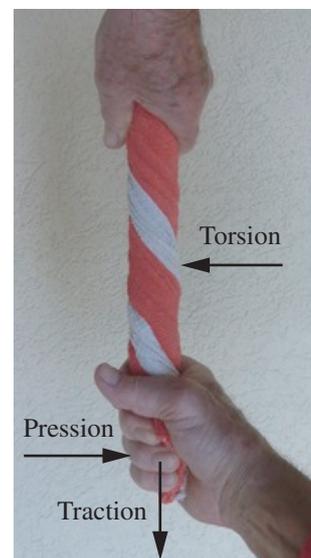


FIGURE 13.42 Lorsque l'on tord un torchon, il est simultanément soumis à des contraintes en traction, compression et cisaillement.

$$F = PA = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \cdot \pi R^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 R^4} \pi R^2 = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 R^2}$$

(b) Nous substituons dans l'expression (13.27) de la densité d'énergie la valeur du champ électrique calculée dans l'exemple 13.3b pour obtenir l'énergie accumulée par intégration :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2(r) dA = \int_0^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi \epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^R \left(\frac{r}{R^3} \right)^2 r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{1}{r^2} \right)^2 r^2 dr \right] \\ &= \frac{4\pi \epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Dans le modèle de la goutte liquide du noyau atomique, on admet que la charge des protons est répartie uniformément dans une sphère dont le rayon est approximé par la relation :

$$r = r_0 \sqrt[3]{A}$$

où $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-15}$ m et A est le nombre atomique du noyau considéré.

L'absorption d'un neutron produit un noyau d'uranium 236 (92 protons et 144 neutrons) de rayon égal à $8.7 \cdot 10^{-15}$ m. Son énergie électrostatique vaut 841 MeV.

En général, la fission produit des fragments asymétriques, par exemple du strontium 94 et du xénon 140 et deux neutrons. Par mesure de simplicité, nous admettons que la fission produit deux fragments identiques et deux neutrons, donc deux noyaux de palladium formés de 46 protons et 71 neutrons (qui n'existent pas dans la réalité). Le rayon de ces noyaux vaut $6.8 \cdot 10^{-15}$ m et leur énergie totale vaut 538 MeV. La variation d'énergie est de 303 MeV. Comment se répartit cette énergie ?

Les fragments emportent une énergie cinétique que l'on peut évaluer en calculant l'énergie due à la répulsion entre deux charges ponctuelles séparées par le double du rayon des fragments, à savoir $d = 13.6 \cdot 10^{-15}$ m. L'énergie cinétique emportée par les fragments vaut

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_{\text{fragment}}^2}{d} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(46e)^2}{d} = 3.59 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

ce qui correspond à 224.0 MeV.

L'essentiel du reste de l'énergie libérée a été utilisée pour surmonter l'interaction forte qui lie entre eux les nucléons.



1. Quelles propriétés particulières du champ électrostatique confirment-elles qu'il s'agit d'un système physique ?
2. Quel est le lien entre l'énergie accumulée et l'intensité du champ électrostatique ?
3. Quelles sont les caractéristiques des contraintes qui apparaissent dans le champ électrostatique ?



1. Le champ électrostatique est notamment le siège de contraintes, ce qui implique qu'il transporte de la quantité de mouvement lors de l'interaction entre des systèmes électrisés. Il accumule de l'énergie qui peut être liée ou libérée lors de son interaction avec des corps électrisés.
2. La densité d'énergie accumulée dans un champ électrostatique est proportionnelle au carré de son intensité (et donc au carré de la valeur des charges qui en sont la source).
3. Le champ électrostatique est soumis à deux types de contraintes : en traction dans la direction des lignes de champ, et en compression dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ. La valeur de ces contraintes est égale à la densité d'énergie (au signe près).

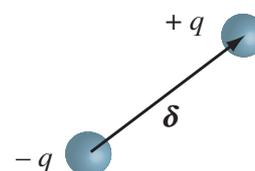



FIGURE 13.43 Définition du dipôle électrique.

13.6 CHAMP ÉLECTRIQUE EN PRÉSENCE DE MATIÈRE

Nous avons découvert à la section 2.5.2 que la présence d'un isolant augmente la capacité d'un condensateur et voulons comprendre l'origine de ce phénomène.

13.6.1 Phénomène de polarisation électrique

C'est l'apparition ou la présence de dipôles électriques dans la matière qui est responsable du phénomène. Un dipôle électrique est un système composé de deux charges opposées à une distance δ l'une de l'autre (fig. 13.43). Si le vecteur δ relie la charge négative à la charge positive, on appelle *moment dipolaire* la grandeur :

$$p = q\delta \quad (13.30)$$

Lorsqu'il est plongé dans un champ électrique d'intensité \mathcal{E} , un objet possédant un moment dipolaire p subit un couple d'intensité

$$I_L = p \times \mathcal{E} \quad (13.31)$$

La plupart des substances sont constituées d'atomes ou de molécules dont le centre de gravité de la charge positive du noyau coïncide avec celui de la charge négative des électrons. Lorsque l'on plonge un morceau d'une telle substance dans un champ électrique, ces centres de gravité se déplacent en sens opposé, et les atomes ou molécules acquièrent un moment dipolaire *induit*. Ces dipôles induits sont pratiquement orientés dans la direction du champ qui les a créés. Mais il existe également un grand nombre de substances constituées de molécules qui ont un moment dipolaire permanent (molécules constituées de deux atomes différents telles que l'acide chlorhydrique HCl ou de plus de deux atomes différents dans une structure non linéaire, telles que la molécule d'eau H₂O). Généralement, ces dipôles ont une orientation aléatoire, même dans un réseau cristallin (fig. 13.44 a). Lorsque l'on plonge un corps constitué de ces molécules dans un champ électrique, ces dipôles sont partiellement orientés sous l'effet du couple (13.31) engendré par le champ électrique (fig. 13.44 b).

La matière devient *polarisée* à la suite de l'orientation des dipôles induits ou permanents dans la direction du champ externe. Il y a apparition d'une charge résultante positive sur l'un des côtés du morceau de matière et d'une charge négative sur le côté opposé dans la direction du champ (fig. 13.44 c). Cette propriété de la matière isolante est mesurée au moyen de la *polarisation* \mathcal{P} , qui est définie en tant que moment

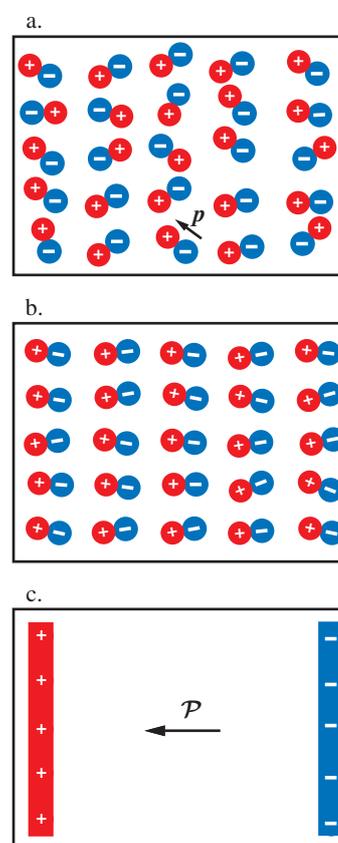


FIGURE 13.44 Polarisation de la matière dans un champ électrique : (a) orientation aléatoire des dipôles permanents en l'absence de champ électrique externe ; (b) orientation partielle des dipôles par l'intermédiaire du couple exercé par le champ externe ; (c) apparition d'une charge résultante liée aux extrémités du morceau de matière dans la direction du champ externe.

dipolaire par unité de volume, soit une densité superficielle de charge. Si n est le nombre de dipôles (supposés parallèles) par unité de volume, alors la polarisation sera :

$$\mathcal{P} = np = nq\delta \tag{13.32}$$

La polarisation d'une substance isolante entraîne l'apparition d'un champ électrique à l'intérieur de la matière. C'est la raison pour laquelle les isolants sont également appelés *diélectriques* (du préfixe grec *dia* qui signifie «à travers»). Nous allons déterminer la modification du champ électrique en présence de matière polarisable en nous basant sur la géométrie la plus simple possible, celle du condensateur à plaques parallèles.

Nous considérons une plaque de matière isolante glissée entre les plaques d'un condensateur chargé, portant la charge Q qui produirait, en l'absence du diélectrique, un champ d'intensité \mathcal{E}_0 . Nous supposons que la polarisation \mathcal{P} est uniforme, ce qui implique que nous pouvons restreindre notre attention à la charge qui apparaît à la surface du diélectrique. Si la matière de l'isolant n'est pas constituée de dipôles permanents, alors, sur l'une des faces, les électrons se sont déplacés d'une distance δ dans le sens opposé à celui du champ externe ; sur l'autre face, ils se sont déplacés de la même distance vers l'intérieur, laissant une charge positive en surface (fig. 13.44 c). S'il s'agit de dipôles permanents, δ représente la distance entre les deux charges du dipôle. Nous voulons évaluer la densité superficielle σ_{pol} de la *charge de polarisation*.

Si A est l'aire de la plaque, n le nombre d'électrons par unité de volume, δ le déplacement que nous admettons perpendiculaire à la surface et e la charge élémentaire, la charge totale est égale au produit de ces grandeurs. En divisant cette valeur par l'aire A , nous obtenons la densité superficielle de la charge de polarisation :

$$\sigma_{pol} = ne\delta$$

Mais cette valeur est égale au module du vecteur de polarisation \mathcal{P} donné par la relation (13.32) :

$$\sigma_{pol} = \mathcal{P} \tag{13.33}$$

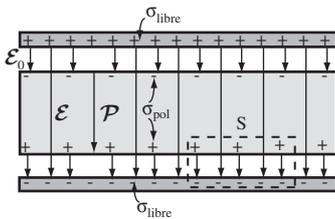


FIGURE 13.45 Modification du champ électrique d'un condensateur en présence de diélectrique.

Nous désignons par σ_{libre} la densité superficielle de la charge portée par les armatures du condensateur plan, car ces charges peuvent se mouvoir librement dans le conducteur. Notons que σ_{pol} disparaîtra si l'on décharge le condensateur. Nous appliquons le théorème de GAUSS à la surface gaussienne S de la figure 13.45. L'intensité du champ électrique \mathcal{E} dans le diélectrique est égale à la densité de charge superficielle totale divisée par ϵ_0 . Comme σ_{libre} et σ_{pol} ont des signes opposés, nous obtenons :

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma_{libre} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{libre} - \mathcal{P}}{\epsilon_0} \tag{13.34}$$

Il faut connaître la valeur de \mathcal{P} afin de déterminer celle de l'intensité du champ \mathcal{E} dans le diélectrique. Dans les champs électrostatiques, elle est proportionnelle à \mathcal{E} , ce que l'on exprime par :

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} \tag{13.35}$$

où la constante χ est la *susceptibilité électrique* du diélectrique. Après substitution, nous obtenons pour \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\mathcal{E}_0}{\varepsilon_r} \quad (13.36)$$

La constante $\varepsilon_r = 1 + \chi$, appelée *permittivité relative* ou *constante diélectrique*, est celle qui apparaît dans la relation (2.18) donnant la capacité d'un condensateur plan dont le volume est occupé par un diélectrique. À l'intérieur du diélectrique, le champ extérieur \mathcal{E}_0 est réduit d'un facteur ε_r à cause de la polarisation du milieu (fig. 13.46).

Si nous isolons σ_{libre} dans l'équation (13.34), nous obtenons :

$$\sigma_{\text{libre}} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \quad (13.37)$$

Il est usuel d'introduire un nouveau champ vectoriel, la *déplacement électrique*, dont l'intensité \mathcal{D} est définie par :

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \quad (13.38)$$

La densité superficielle de charges libres est égale au déplacement électrique à l'intérieur du diélectrique. L'origine de la dénomination de ce champ, due à MAXWELL, sera expliquée à la section 14.5. L'intensité du déplacement électrique se mesure en As m^{-2} .

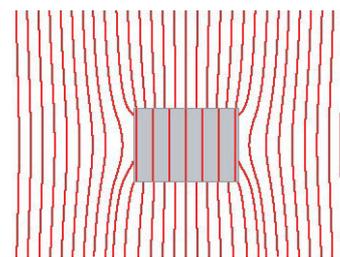


FIGURE 13.46 L'intensité du champ dans lequel est plongé un diélectrique est diminué d'un facteur ε_r dans le diélectrique à cause de la polarisation.

Lorsque la matière est plongée dans un champ électrique d'intensité \mathcal{E} , l'apparition de charges de polarisation liées à la matière provoque la formation d'un champ de polarisation d'intensité \mathcal{P} à l'intérieur de la matière. On introduit une combinaison des champs \mathcal{E} et \mathcal{P} , le champ de déplacement électrique \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \varepsilon_0 \chi \mathcal{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathcal{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathcal{E} = \varepsilon \mathcal{E} \quad (13.39)$$

où χ , la susceptibilité du vide, et $\varepsilon_r = 1 + \chi$, la permittivité relative ou constante diélectrique sont des paramètres liés à la matière. La constante

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (13.40)$$

est la permittivité absolue du milieu.

Nous pouvons généraliser le théorème de GAUSS en prenant en compte les charges liées par la polarisation. À partir de l'équation (13.34), nous obtenons :

$$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \text{div } \mathcal{P} \quad (13.41)$$

ou, dans la version intégrale :

$$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} - \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon_0} \quad (13.42)$$

Les équations (13.37) et (13.38) impliquent :

$$\text{div } \mathcal{D} = \rho \quad (13.43)$$

où ρ représente la densité de charge libre. La version intégrale de cette relation est :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{libre}} \quad (13.44)$$

Cette relation exprime le fait que le flux du champ de déplacement diélectrique est égal à la charge libre (à l'exclusion de la charge due à la polarisation) contenue dans la surface envisagée.

13.6.2 Densité d'énergie du champ électrique en présence de matière

La modification de l'intensité du champ électrique en présence de matière entraîne une modification conjointe de la densité d'énergie. Celle-ci devient :

$$\rho_{E, \text{ét}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E} \mathcal{D} \quad (13.45)$$

EXEMPLE 13.6. Capacité d'un condensateur en présence de matière.

Comment évolue la capacité d'un condensateur à plaques parallèles lorsque l'on introduit un diélectrique dans l'espace entre les plaques ?

SOLUTION : Si le condensateur est débranché, la quantité de charges libres est constante. L'introduction d'un diélectrique entraînera une diminution de l'intensité du champ électrique de \mathcal{E}_0 à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/\epsilon_r$. La tension devient :

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon_r} \int \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{r} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

La capacité étant inversement proportionnelle à la tension, elle augmente à la valeur :

$$C_Q = \frac{Q}{U} = \epsilon_r \frac{Q}{U_0} = \epsilon_r C_{Q0} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ce qui justifie la relation (2.18). ■

1. Comment se manifeste l'interaction entre le champ électrique et la matière ?
2. Quelle est la différence entre un dipôle induit et un dipôle permanent ?
3. Quelle est la conséquence de la polarisation de la matière plongée dans un champ électrique ?



1. L'interaction entre le champ électrique et la matière entraîne la polarisation de cette dernière. La polarisation peut se produire de deux manières : soit par déplacement de charges libres donnant naissance à un dipôle électrique macroscopique, soit par un alignement plus ou moins prononcé des dipôles permanents ou induits à l'intérieur de la matière, ce qui a pour conséquence l'apparition de charges liées à la surface du corps polarisé.



2. Dans certaines molécules, telles que la molécule d'eau, les centres de gravité des charges positives (noyaux) et négatives (électrons) ne coïncident pas, ce qui en fait un dipôle permanent. Dans les atomes et de nombreuses molécules, les deux centres de gravité coïncident, mais si on les plonge dans un champ électrique, ces centres de gravité se séparent, donnant lieu à l'apparition d'un dipôle induit.
3. La polarisation entraîne une réduction de l'intensité du champ électrique à l'intérieur de la matière.

13.7 CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

Dans cette présentation du champ magnétostatique, nous allons nous appuyer sur les théories élaborées pour le champ électrostatique dans les sections précédentes afin de profiter de similitudes qui existent entre ces deux champs.

Une différence importante entre l'électrostatique et la magnétostatique réside dans le fait que l'on n'a pas observé de porteur isolé de charge magnétique, ce qui serait un monopôle magnétique. De ce fait, on ne peut opérer qu'avec des charges magnétiques liées, résultant de la présence de dipôles, de manière analogue aux charges de polarisation dans les diélectriques, sujet traité à la section 13.6. D'un point de vue pratique, la manipulation des charges magnétiques liées est nettement plus commode que dans le cas électrique. Il est très difficile de conserver des dipôles électriques permanents, vu qu'ils sont rapidement neutralisés par des charges libres. En revanche, l'inexistence de porteurs de charges magnétiques libres rend très simple la conservation d'aimants permanents.

Cette représentation du magnétisme qui opère avec la notion de charge magnétique, que nous avons introduite à la section 13.1.2, est dite coulombienne. Elle va nous permettre, lors de l'étude des propriétés d'objets aimantés, de découvrir une partie des lois constitutives du champ magnétostatique. L'autre approche, dite ampérienne, due à André-Marie AMPÈRE, attribue les phénomènes magnétiques à des courants circulaires à l'intérieur des objets magnétisés. Nous aborderons cette vision à partir de la section 13.8.

13.7.1 Intensité du champ produit par un objet magnétique

Nous savons que la matière magnétique ou magnétisée est constituée de dipôles magnétiques que l'on ne peut pas séparer en deux porteurs de charge magnétique. Comme nous l'avons découvert à la section 13.1.2, il est néanmoins possible d'attribuer le champ magnétique engendré par un objet aimanté à la présence de charges magnétiques à la surface de l'objet. Cette grandeur, que nous désignons par q_m , ne fait pas partie de celles qui sont répertoriées par le Système international, elle se mesure en ampèremètre (A m). L'apparition d'unités de mesure électriques pour des grandeurs magnétiques sera justifiée à la section 13.8.4, lorsque nous aurons abordé le lien entre les phénomènes électriques et magnétiques.

Par convention, la partie d'un objet magnétique ou magnétisé qui porte la charge positive est appelée usuellement *pôle nord*, celle qui porte la charge magnétique négative est un *pôle sud*. Si l'on introduit dans un champ magnétique une charge magnétique ponctuelle q_m , réalisée par exemple par l'extrémité d'un aimant droit très long et très fin (fig. 13.47), on observe que la force est proportionnelle à la charge (si l'on approche deux aimants identiques, la force double).

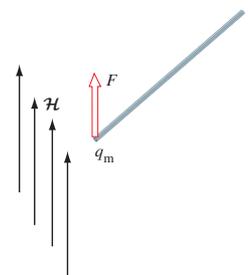


FIGURE 13.47 Détermination de l'intensité du champ magnétique.

L'analogie avec les observations faites en électrostatique nous permet d'affirmer qu'une charge magnétique ponctuelle q_m plongée dans un champ magnétique, en une position repérée par le vecteur r , subit une force donnée par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mu_0 q_m \mathcal{H}(\mathbf{r}) \quad (13.46)$$

L'intensité du champ \mathcal{H} est appelée *intensité du champ magnétique* ou *intensité de l'excitation magnétique*. Cette intensité se mesure en $A \cdot m^{-1}$. On peut la mesurer au moyen d'une sonde de HALL dont nous expliquerons le fonctionnement dans l'exemple 13.14.

La constante μ_0 a été introduite dans la relation (13.46) afin d'être en accord avec les conventions du Système international. Cette constante liée aux processus magnétiques est la *perméabilité magnétique du vide*. Elle vaut :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1}\text{m}^{-1} = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ Vs A}^{-1}\text{m}^{-1} \quad (13.47)$$

Cette valeur est liée à la définition de l'ampère, sujet dont il sera question dans l'exemple 13.12.

La notion de charge magnétique permet de définir le *moment dipolaire magnétique* de manière analogue au cas électrique (fig. 13.43) :

$$\mathbf{m} = q_m \boldsymbol{\delta} \quad (13.48)$$

Le moment dipolaire magnétique se mesure en $A \cdot m^2$. Nous verrons à la section 13.8.2 que les moments magnétiques peuvent être expliqués en termes de trajectoires microscopiques des électrons qui forment des boucles de courant. Le champ magnétique engendré par une boucle de courant a la structure d'un champ dipolaire, et son intensité est proportionnelle à l'intensité du courant et à l'aire de la boucle, ce qui justifie l'unité de mesure du moment dipolaire magnétique.

Plongé dans un champ magnétique, un dipôle magnétique subit un couple donné par :

$$\mathbf{I}_L = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathcal{H} \quad (13.49)$$

C'est un tel couple qui oriente vers le nord l'aiguille d'une boussole.

13.7.2 Aimantation

Nous avons découvert que les atomes ou molécules de certaines substances possèdent un moment dipolaire électrique. Il en va de même dans le cas du magnétisme. Dans certains cas, les dipôles magnétiques sont orientés de telle manière que leurs vecteurs de moment dipolaire sont parallèles. Le corps possède alors un moment dipolaire macroscopique non nul ; un tel objet est un *aimant*. L'état magnétique de ce corps est décrit au moyen de l'*aimantation* ou *magnétisation* \mathcal{M} qui correspond, comme dans le cas électrique, à la densité volumique de moments dipolaires magnétiques supposés parallèles :

$$\mathcal{M} = nm \quad (13.50)$$

C'est un champ vectoriel dont l'intensité se mesure en $A \cdot m^{-1}$, tout comme celle du champ magnétique \mathcal{H} . Le module de l'aimantation \mathcal{M} correspond à la densité superficielle de charge magnétique.

De même que les charges liées aux extrémités d'un corps polarisé électriquement deviennent les sources d'un champ électrostatique d'intensité \mathcal{E} , les charges magnétiques liées aux extrémités d'un aimant sont les sources d'un champ magnétostatique d'intensité \mathcal{H} . Le formalisme mathématique est analogue à celui que nous avons appliqué au champ électrostatique. Dans la relation (13.41), version locale du théorème de GAUSS, il suffit de remplacer \mathcal{E} par \mathcal{H} , \mathcal{P} par $\mu_0 \mathcal{M}$ et ρ par 0, vu qu'il n'existe pas de charge magnétique libre, et ϵ_0 par μ_0 . Nous obtenons ainsi :

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \mu_0 \mathcal{M} = -\operatorname{div} \mathcal{M} \quad (13.51)$$

ou encore :

$$\operatorname{div} (\mathcal{H} + \mathcal{M}) = 0 \quad (13.52)$$

L'équation (13.51) indique que le champ magnétostatique d'intensité \mathcal{H} a ses sources aux endroits où le champ d'aimantation \mathcal{M} a ses puits. Autrement dit, le flux du champ magnétique engendré par un aimant à travers une surface fermée S est proportionnel à l'aimantation de ce dernier :

$$\oint_S \mathcal{H} \cdot d\mathbf{A} = -\oint_S \mathcal{M} \cdot d\mathbf{A} = Q_m \quad (13.53)$$

La grandeur Q_m représente la charge magnétique totale enfermée dans la surface S . À la constante μ_0 près, le contenu de la parenthèse de l'équation (13.52) correspond à une autre mesure de l'intensité du champ magnétique appelée *induction magnétique* ou *densité du flux magnétique* \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \mu_0 (\mathcal{H} + \mathcal{M}) \quad (13.54)$$

En vertu de l'équation (13.51), nous avons :

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0 \quad (13.55)$$

La figure 13.48 illustre la configuration du champ magnétique d'un barreau aimanté et d'un aimant en U. L'équation (13.51) implique la discontinuité des lignes de champ aux pôles des aimants, là où sont localisées les charges magnétiques. À l'intérieur de l'aimant, le champ magnétique \mathcal{H} est opposé à l'aimantation \mathcal{M} , raison pour laquelle il est parfois appelé *champ démagnétisant*.

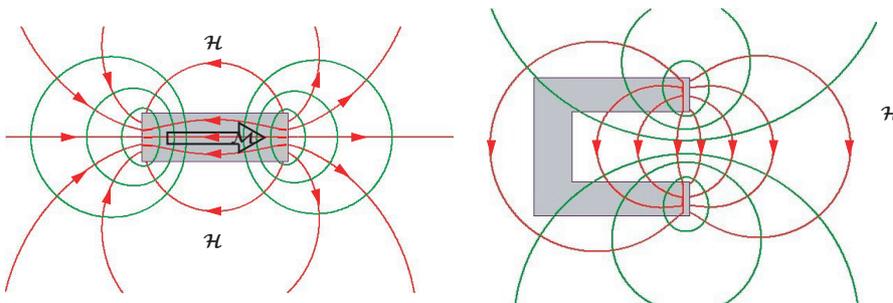


FIGURE 13.48 Configuration du champ magnétique \mathcal{H} d'un barreau aimanté et d'un aimant en U. La flèche à l'intérieur du barreau aimanté indique le sens de l'aimantation. Les trajectoires orthogonales représentent la structure du potentiel magnétique scalaire.

La nullité de la divergence du champ d'induction magnétique dans l'équation (13.55), entraîne celle de son flux ϕ_B à travers une surface fermée :

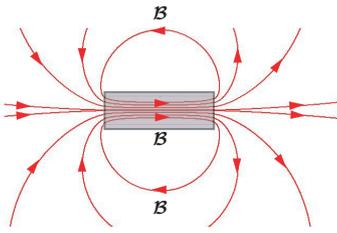


FIGURE 13.49 Configuration du champ d'induction magnétique \mathcal{B} d'un barreau aimanté. Les lignes de ce champ sont toujours fermées sur elles-mêmes.

$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \tag{13.56}$$

Cela signifie que ce champ n'a pas de sources et que, par conséquent, ses lignes sont fermées sur elles-mêmes (fig. 13.49). C'est une conséquence du fait qu'il n'existe pas de charge magnétique libre. Dans le vide, la configuration du champ magnétique \mathcal{H} et celle du champ d'induction magnétique \mathcal{B} coïncident. À l'intérieur du matériau magnétique, ce dernier est opposé au champ \mathcal{H} et sa configuration est différente.

13.7.3 Potentiel magnétique scalaire

Pour un champ magnétique statique \mathcal{H} , l'intégrale $\int_A^B \mathcal{H} \cdot d\mathbf{r}$ est indépendante du chemin d'intégration, tout comme c'est le cas en électrostatique. Nous pouvons donc définir un potentiel magnétique scalaire φ_m :

$$\varphi_m(\mathbf{r}) - \varphi_m(\mathbf{r}_0) = - \int_{r_0}^r \mathcal{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{13.57}$$

Cette relation implique également:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi_m(\mathbf{r})] \tag{13.58}$$

La figure 13.48 représente le lien entre l'intensité du champ et son potentiel scalaire pour un barreau aimanté et un aimant en U. Le potentiel magnétique scalaire et la tension magnétique se mesurent en ampère.

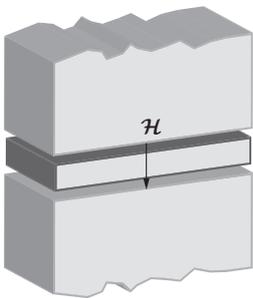


FIGURE 13.50 Matière magnétisable dans l'entrefer d'un aimant permanent.

13.7.4 Interaction entre le champ magnétique et la matière

Lorsque l'on plonge de la matière dans un champ magnétique, on observe des phénomènes semblables à ceux que nous avons observés dans le cas électrique, à savoir la création de moments magnétiques orientés dans la direction du champ, donc une *aimantation induite*, et l'orientation de dipôles magnétiques permanents, donc une *aimantation d'orientation*.

Aimantation induite. Nous plongeons une plaque de matière dans un champ magnétique homogène d'intensité \mathcal{H} , par exemple dans l'entrefer étroit d'un aimant permanent (fig. 13.50). La polarisation magnétique \mathcal{M} engendre à l'intérieur du matériau un champ d'intensité \mathcal{H}' qui se superpose au champ excitateur:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{M}$$

Comme dans le cas électrique, on a approximativement:

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}$$

où la constante χ_m est la *susceptibilité magnétique* du matériau. L'intensité résultant de la superposition des deux champs devient:

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H} + \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \chi_m \mathcal{H} = (1 + \chi_m) \mathcal{H} = \mu_r \mathcal{H}$$

La nouvelle constante $\mu_r = 1 + \chi_m$ est la *perméabilité relative* du matériau. Ce résultat nous permet de réécrire la relation entre le vecteur d'induction magnétique défini par l'équation (13.54) et le champ magnétique:

Lorsque la matière est plongée dans un champ magnétique d'intensité \mathcal{H} , il peut y avoir apparition de moments magnétiques orientés dans la direction du champ (aimantation induite) et/ou orientation de dipôles permanents (aimantation d'orientation). Une aimantation d'intensité \mathcal{M} apparaît à l'intérieur de la matière. La combinaison des champs \mathcal{H} et \mathcal{M} est le champ d'induction magnétique ou densité de flux magnétique \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \mu_0 (\mathcal{H} + \mathcal{M}) = \mu_0 \mathcal{H} + \mu_0 \chi_m \mathcal{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathcal{H} = \mu_0 \mu_r \mathcal{H} = \mu \mathcal{H} \quad (13.59)$$

où χ_m , la susceptibilité magnétique du matériau, et $\mu_r = 1 + \chi_m$, la perméabilité relative sont des paramètres liés à la matière. La constante

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (13.60)$$

est la perméabilité absolue du matériau.

13.7.5 Manifestations du magnétisme dans la matière

Il est possible d'exprimer les caractéristiques magnétiques d'un matériau soit au moyen de la susceptibilité magnétique χ_m , soit au moyen de sa perméabilité relative μ_r . Lors de l'aimantation d'un matériau par un champ magnétique, on peut observer trois mécanismes majeurs que nous allons exposer brièvement.

Diamagnétisme. Lorsqu'on place un matériau dans un champ magnétique, il devient aimanté de telle manière que \mathcal{M} et \mathcal{H} sont antiparallèles, ce qui implique que la susceptibilité est négative. Le phénomène est appelé *diamagnétisme*. Cette propriété est commune à tous les matériaux. C'est un phénomène d'origine quantique qui peut être expliqué par la modification du mouvement orbital des électrons autour du noyau atomique. Le diamagnétisme se superpose à un éventuel paramagnétisme, mais est masqué, car les valeurs négatives de la susceptibilité ne sont pas inférieures à -10^{-5} .

Paramagnétisme. Alors que, dans beaucoup de substances, les électrons qui possèdent un moment magnétique sont disposés de telle manière que les atomes ou molécules ont un moment magnétique nul, il existe des substances dont les atomes ou molécules ont un moment magnétique non nul. Ces substances sont dites *paramagnétiques*. Lorsqu'on les introduit dans un champ magnétique, les moments magnétiques sont orientés parallèlement à la direction de ce champ (comme l'orientation des dipôles électriques dans un diélectrique). La susceptibilité magnétique est positive et prend des valeurs qui couvrent une plage allant de 10^{-6} à 10^{-3} . Ces valeurs dépendent de la température et augmentent lorsque la température diminue.

Ferromagnétisme. Certains matériaux sont constitués d'atomes qui possèdent un moment magnétique intrinsèque et ont la faculté de s'orienter parallèlement de manière spontanée. Dans ces matériaux, l'aimantation peut être non nulle alors même qu'ils ne sont pas placés dans un champ magnétique. À cause de cet effet collectif, l'aimantation \mathcal{M} est très importante. Ces matériaux sont dits *ferromagnétiques*. En font partie le fer, le nickel, le cobalt, et des alliages de ces éléments avec d'autres substances.

Un morceau ordinaire de fer n'a pas de moment magnétique. C'est la conséquence du fait que l'orientation spontanée des dipôles magnétiques se fait par domaines, dits *domaines de WEISS*. Ces domaines sont orientés de manière aléatoire, de telle sorte que l'aimantation totale est nulle. Mais lorsque l'on plonge un morceau de fer dans un

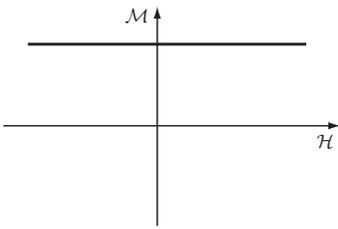


FIGURE 13.51 Courbe d'aimantation d'un matériau magnétique dur parfait. L'aimantation ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique externe.

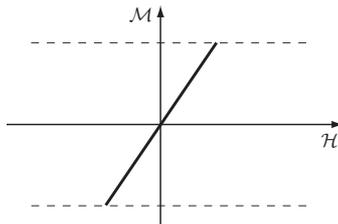


FIGURE 13.52 Courbe d'aimantation d'un matériau magnétique doux parfait. La ligne discontinue représente l'aimantation de saturation.

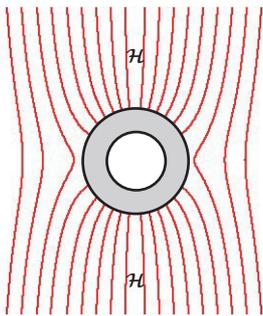


FIGURE 13.53 Cylindre de fer doux plongé dans un champ magnétique \mathcal{H} : le champ magnétique est nul à l'intérieur du cylindre.

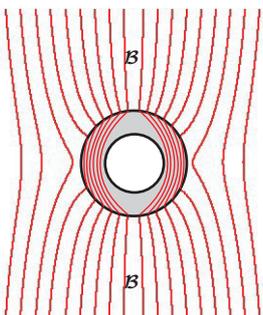


FIGURE 13.54 Effet de blindage magnétique : les lignes du champ d'induction magnétique \mathcal{B} sont « attirées » à l'intérieur du blindage en matériau magnétique doux.

champ magnétique, les domaines qui sont déjà orientés en direction du champ croissent aux dépens des autres.

L'évolution de l'aimantation en présence d'un champ magnétique externe dépend des caractéristiques du matériau. Elle varie entre deux cas extrêmes, celui du matériau magnétique dur parfait et celui du matériau magnétique doux parfait. On représente graphiquement l'évolution de l'aimantation \mathcal{M} en fonction de l'intensité \mathcal{H} du champ magnétique externe dans lequel le matériau est plongé. Un matériau magnétique dur parfait conserve l'aimantation imprimée lors de sa confection, indépendamment de l'intensité du champ extérieur, et sa courbe d'aimantation serait une droite horizontale (fig. 13.51). En revanche, l'aimantation d'un matériau magnétique doux est, s'il n'a jamais été magnétisé, proportionnelle à l'intensité du champ extérieur. La pente de cette droite est égale à la valeur de la perméabilité magnétique (fig. 13.52), ce qui implique que cette droite coïnciderait avec l'axe d'aimantation. La figure 13.53 montre une conséquence de la facilité d'aimantation d'un matériau magnétique doux : lorsqu'on le plonge dans un champ externe \mathcal{H} , on observe l'apparition de charges magnétiques induites à sa surface et celles-ci s'ordonnent de telle manière que le champ magnétique externe ne pénètre pas dans la matière, de manière semblable à ce qui se passe lorsqu'un matériau conducteur est plongé dans un champ électrique (exemple 13.1).

Comment le phénomène d'écrantage du champ externe est-il décrit au moyen du champ d'induction magnétique \mathcal{B} ? La conséquence de la reconfiguration des charges magnétiques induites est que la pièce de métal doux « attire » les lignes du champ d'induction magnétique. Cet effet est utilisé pour protéger certains espaces de la présence de champs magnétiques : il s'agit d'un blindage magnétique réalisé au moyen d'une structure fermée en mu-métal, constituée de couches successives de métal à haute perméabilité magnétique. Une telle structure joue, dans le domaine magnétique, le même rôle que la cage de FARADAY dans le domaine électrique (fig. 13.54).

Lorsque l'on plonge un morceau de matériau ferromagnétique non magnétisé dans un champ d'excitation magnétique d'intensité \mathcal{H} croissante, on observe que la valeur \mathcal{M} de l'aimantation croît d'abord, mais de manière non linéaire, contrairement à ce qui se passerait dans un matériau magnétique doux parfait. Lorsque la plus grande partie des domaines de WEISS ont été orientés, la croissance de l'aimantation diminue jusqu'au moment où l'on a atteint la *saturation*, c'est-à-dire l'aimantation maximale. Si l'on réduit l'intensité \mathcal{H} du champ, on observe que la magnétisation ne suit pas la même courbe ; les domaines de WEISS ont tendance à garder leur orientation : cet effet mémoire est un phénomène que l'on appelle *hystérésis* (du grec *husterein* « être en retard »). Lorsque l'intensité du champ extérieur s'annule, l'échantillon possède encore une certaine aimantation dite *aimantation rémanente* \mathcal{M}_r . Si l'on inverse le sens du champ exciteur, l'aimantation continue à diminuer jusqu'à s'annuler pour une valeur du champ exciteur désignée par \mathcal{H}_c , l'*intensité du champ coercitif*. Si l'on poursuit la croissance de l'intensité du champ exciteur, l'aimantation inversée augmente jusqu'à atteindre la saturation. Lorsqu'on inverse à nouveau le sens du champ exciteur, l'aimantation croît à nouveau, mais sur une courbe différente de la courbe initiale. On obtient ainsi un *cycle d'hystérésis* (fig. 13.55). C'est cet effet de mémoire qui est utilisé dans les supports d'archivage de données tels que bandes magnétiques, disques souples et durs, etc. La différence entre les matériaux magnétiques doux et les matériaux magnétiques durs se manifeste dans l'aspect de leurs courbes d'hystérésis respectives : plus le matériau magnétique est doux, plus la courbe d'hystérésis est étroite et tend à se rapprocher de l'axe d'aimantation. En revanche, pour un matériau magnétique dur, cette courbe sera d'autant plus large que la dureté est importante.

Chaque substance ferromagnétique perd son aimantation au-delà d'une température caractéristique pour la substance, la *température de CURIE*. Au-dessus de cette température (770°C pour le fer), le matériau n'est plus ferromagnétique, il est paramagnétique.

13.7.6 Densité d'énergie et tensions dans le champ magnétostatique

En utilisant les mêmes correspondances que celles de la section 13.7.2, nous pouvons reprendre les résultats obtenus pour le champ électrostatique aux sections 13.5.1 et 13.5.2.

Ainsi, la densité d'énergie est égale à :

$$\rho_{E.m} = \frac{\mu_r \mu_0}{2} \mathcal{H}^2 = \frac{\mu}{2} \mathcal{H}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{H} \mathcal{B} = \frac{1}{2\mu} \mathcal{B}^2 \quad (13.61)$$

Dans la direction des lignes de champ, il règne une tension de traction :

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\mu_r \mu_0}{2} \mathcal{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \mathcal{B}^2 \quad (13.62)$$

et perpendiculairement aux lignes de champ une tension de compression :

$$\sigma_{\perp} = -\frac{\mu_r \mu_0}{2} \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2\mu} \mathcal{B}^2 \quad (13.63)$$

Comme les lignes du champ commencent ou finissent sur des pôles magnétiques, nous pouvons conclure que le champ magnétique d'intensité \mathcal{H} exerce une traction sur les pôles des aimants. Deux pôles de noms différents sont donc tirés l'un vers l'autre par le champ magnétique, alors que les pôles de même nom sont éloignés l'un de l'autre par ce champ.

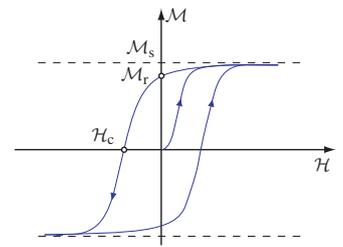


FIGURE 13.55 Cycle d'hystérésis : lorsqu'un matériau ferromagnétique est plongé dans un champ magnétique croissant, son aimantation croît jusqu'à atteindre l'aimantation de saturation. Si l'on inverse le champ externe, son aimantation ne suit pas la même courbe, mais garde une certaine mémoire. L'aimantation prend du retard (*hystereis*) sur les variations du champ externe.

1. Quelle est la particularité de la notion de charge magnétique ?
2. Quelle est la différence entre le champ d'excitation magnétique \mathcal{H} et le champ d'induction magnétique \mathcal{B} ?
3. Qu'est-ce que l'aimantation ?
4. Quelles sont les propriétés et particularités de l'aimantation ?

Q

1. La notion de charge magnétique permet de décrire le champ magnétostatique lié à la matière aimantée de manière analogue à celle du champ électrostatique. La charge magnétique n'est pas liée à une particule magnétisée, elle est associée à des dipôles magnétiques insécables.
2. Les deux champs coïncident à l'extérieur de la matière. À l'intérieur de la matière, l'excitation magnétique \mathcal{H} est opposée à l'aimantation \mathcal{M} alors que le champ d'induction magnétique \mathcal{B} englobe cette dernière. Les charges magnétiques sont les sources du champ \mathcal{H} (discontinuité à la surface de la matière magnétisée), alors que les lignes du champ \mathcal{B} sont fermées sur elles-mêmes, ce qui implique que ce champ n'a pas de sources.
3. L'aimantation (ou magnétisation) décrit l'état magnétique d'un corps. Elle correspond à la densité volumique des moments dipolaires magnétiques. C'est un champ vectoriel. Le module de l'aimantation correspond à la densité superficielle de charge magnétique.
4. L'aimantation décrit à la fois le comportement d'un matériau en présence d'un champ magnétique extérieur et les propriétés des matériaux qui sont intrinsèquement magnétisés. En présence d'un champ magnétique extérieur, suivant les propriétés du matériau, on peut

R

observer des comportements différents. Parmi ceux-ci, trois sont dominants : le diamagnétisme, propre à tous les matériaux, mais de très faible intensité, le paramagnétisme dans les matériaux dont les atomes ont un moment magnétique, et le ferromagnétisme qui est un paramagnétisme collectif qui se manifeste dans le fer, le cobalt et le nickel, ainsi que dans des alliages adéquats.

13.8 COURANT ÉLECTRIQUE ET CHAMP MAGNÉTIQUE

Dans cette section, nous allons découvrir que les champs magnétiques sont engendrés par des courants électriques et nous établirons la manière dont ils interagissent.

Dans la section précédente, nous avons introduit trois champs pour la description des phénomènes magnétiques, \mathcal{H} , \mathcal{M} et \mathcal{B} . Les deux premiers interviennent dans la description coulombienne de l'interaction entre la matière et un champ magnétique. Le champ \mathcal{H} peut être considéré comme celui appliqué à la matière, et le champ \mathcal{M} comme la magnétisation de cette dernière. Le champ \mathcal{B} rassemble, à la constante μ_0 près, la contribution du champ appliqué \mathcal{H} et celle du matériau \mathcal{M} . En dehors de la matière, \mathcal{H} et \mathcal{B} coïncident. Le champ d'induction correspond à l'approche ampérienne du magnétisme qui, comme nous le confirmerons dans ce qui suit, attribue ce phénomène à l'action de courants électriques.

Comme cette section est consacrée à l'étude de ce phénomène, nous utiliserons le champ d'induction magnétique \mathcal{B} pour quantifier l'intensité du champ magnétique.

13.8.1 Découverte d'ØRSTED et lois de BIOT-SAVART et AMPÈRE

Nous avons mentionné à la section 13.1.2 que le physicien danois Hans Christian ØRSTED découvrit en 1820 qu'une aiguille de boussole placée dans le voisinage d'un fil conducteur était déviée lorsqu'un courant électrique circulait dans ce conducteur. Une étude détaillée du phénomène permet de déterminer que les lignes du champ magnétique sont fermées sur elles-mêmes; elles entourent le conducteur sous forme de cercles concentriques situés dans un plan perpendiculaire au conducteur.

De nombreux chercheurs, notamment les physiciens André-Marie AMPÈRE, ainsi que Jean-Baptiste BIOT associé au médecin Félix SAVART, réalisèrent un grand nombre d'expériences pour modéliser le phénomène. Les deux derniers énoncèrent la même année le résultat de leurs recherches. L'intensité \mathcal{B} de l'induction magnétique engendrée par un courant stationnaire d'intensité I circulant dans un fil conducteur est égale à :

$$\mathcal{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil cond.}} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \tag{13.64}$$

où \mathbf{r} est le vecteur reliant l'élément infinitésimal $d\mathbf{l}$ au point P et \mathbf{u}_r , le vecteur unitaire associé à \mathbf{r} (fig. 13.56). Le produit vectoriel rend compte du fait que le vecteur \mathcal{B} est à la fois perpendiculaire à l'élément $d\mathbf{l}$ et au vecteur \mathbf{r} . Le dénominateur 4π a été introduit lors de l'établissement du Système international afin que les équations de MAXWELL aient une forme simple. Cette relation est connue en tant que *loi de BIOT-SAVART*.

L'application de cette loi permet de démontrer (exemple 13.8) que le module de l'intensité \mathcal{B} du champ magnétique engendré par un courant d'intensité I circulant dans un conducteur rectiligne de longueur infinie (fig. 13.57) varie de manière inversement proportionnelle au rayon r de cercles centrés sur le conducteur :

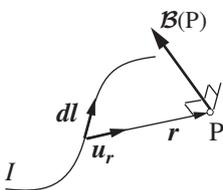


FIGURE 13.56 Loi de BIOT-SAVART: l'intensité en un point P du champ magnétique engendré par un courant d'intensité I circulant dans un conducteur est égale à la somme des contributions dues aux éléments infinitésimaux de longueur dl .

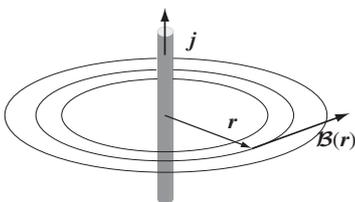


FIGURE 13.57 Champ magnétique engendré par un courant circulant dans un conducteur rectiligne.

$$\mathcal{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (13.65)$$

Le vecteur d'intensité \mathcal{B} du champ magnétique est en tout point tangent au cercle centré sur le conducteur et son sens est donné par la règle de la main droite : si elle enserre le conducteur de telle manière que le pouce indique le sens du courant conventionnel, les doigts pointent dans le sens du vecteur de champ.

Pour des configurations caractérisées par des symétries simples, on peut appliquer une généralisation de ce résultat, une loi relative à la circulation du champ d'induction magnétique qui joue un rôle semblable à celui du théorème de GAUSS en électrostatique.

La circulation du champ d'induction magnétique le long d'une courbe fermée C est donnée par la loi ou théorème d'AMPÈRE :

$$\Lambda_{\mathcal{B}} = \oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \quad (13.66)$$

\mathbf{j} est le vecteur de la densité de courant traversant la surface S délimitée par la courbe fermée C et $d\mathbf{A}$ est le vecteur normal à l'élément infinitésimal de surface dA .

Si la courbe d'intégration C entoure des conducteurs transportant des courants d'intensités diverses, comme dans la figure 13.58, la circulation du champ engendré est égale à la somme algébrique des intensités des courants enlacés par la courbe C :

$$\oint_C \mathcal{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}} \quad (13.67)$$

La version locale de la loi d'AMPÈRE s'exprime au moyen d'un opérateur différentiel, le rotationnel :

$$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (13.68)$$

Cette relation implique que les courants électriques sont les sources du champ magnétique.

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul (les lignes de champ sont fermées sur elles-mêmes) :

$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (13.69)$$

ou en version locale :

$$\text{div } \mathcal{B} = 0 \quad (13.70)$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de monopôle magnétique.

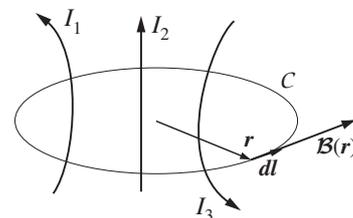


FIGURE 13.58 La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée est proportionnelle à la somme des courants enlacés.

La version locale du théorème d'AMPÈRE sera développée dans l'exemple 13.10. Vu que, selon l'équation (13.25), la circulation du champ électrostatique est nulle, son rotationnel l'est aussi, ce qui justifie notre affirmation de la section 13.4.3 :

$$\oint_c \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \mathcal{E} = 0 \quad (13.71)$$

13.8.2 Détermination de l'intensité de quelques configurations

Nous allons considérer deux configurations importantes, à savoir une boucle de courant à cause de son importance fondamentale et une bobine à cause de son application technique.

Champ d'une boucle ou spire de courant. Le calcul général de la structure du champ magnétique engendré par une boucle circulaire de courant n'est pas élémentaire. En revanche, il est aisé de déterminer l'intensité sur l'axe de la spire. Le calcul effectué dans l'exemple 13.9 donne :

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (2IA) \frac{1}{r^3} \quad (13.72)$$

La parenthèse contient les éléments qui caractérisent la boucle, à savoir son aire et l'intensité du courant. Cette partie est respectivement multipliée par la constante magnétique et par la dépendance spatiale de l'intensité du champ.

Dans l'exemple 13.4, l'approximation dipolaire du champ engendré par un dipôle électrique donne pour l'intensité sur l'axe du dipôle :

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (2Q\delta) \frac{1}{r^3} \quad (13.73)$$

une relation qui est semblable à l'équation (13.72). Cette similitude nous permet d'admettre que le champ magnétique le long de l'axe d'une spire de courant a une structure identique au champ d'un dipôle électrique, pour autant que l'on soit suffisamment éloigné des éléments qui engendrent le champ. C'est la raison pour laquelle une spire de courant est appelée un dipôle magnétique.

Cette similitude nous permet de transposer les équations (E 13.1) et (E 13.2) pour l'intensité du champ dipolaire magnétique en dehors de l'axe (fig. 13.59) :

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos(\theta)}{r^3} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin(\theta)}{r^3} \quad (13.74)$$

dans lesquelles le *moment dipolaire magnétique* associé à la boucle de courant est défini par :

$$\mathbf{m} = IA \quad (13.75)$$

où A est le vecteur normal à la surface définie par la boucle de courant, de module égal à l'aire de cette surface, et de sens positif défini par le sens du courant. Dans le Système international, cette grandeur se mesure en $A \text{ m}^2$. Si elle est définie à partir d'une paire de charges magnétiques par la relation (13.48), il s'ensuit que la charge magnétique se mesure en $A \text{ m}$.

Le mouvement des électrons dans un atome peut être considéré comme une boucle de courant et constitue donc un dipôle magnétique. Suivant l'arrangement des orbites électroniques, un atome peut avoir un moment dipolaire magnétique orbital ou non. D'autre part, un moment magnétique est lié au spin des électrons ; là aussi, l'atome peut présenter un moment magnétique intrinsèque. Ces deux contributions s'ajoutent

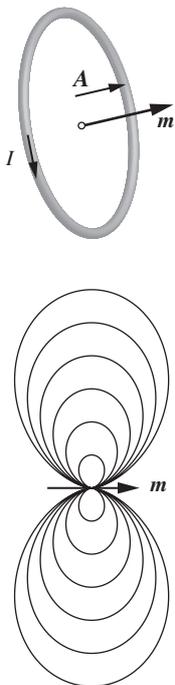


FIGURE 13.59 Champ d'une boucle de courant : (a) on associe à la spire d'aire A orientée par le sens du courant I un moment magnétique \mathbf{m} ; (b) dans l'approximation dipolaire ($r \gg \sqrt{A}$), le champ a la même structure que celui d'un dipôle électrostatique.

pour former le moment magnétique de l'atome. Ce sont ces moments magnétiques atomiques qui sont à l'origine de l'aimantation d'une substance; ils correspondent à ce que nous avons appelé la charge magnétique q_m . Rappelons que, contrairement à ce qui est possible dans le cas du dipôle électrique, on ne peut pas séparer les pôles d'un dipôle magnétique.

Champ d'un solénoïde. En enroulant un fil conducteur traversé par un courant électrique autour d'un support cylindrique, on obtient un champ magnétique important à l'intérieur de cette bobine, vu que les champs dipolaires engendrés par chacune des spires s'additionnent à l'intérieur de la bobine. Si la dimension de la section est négligeable par rapport à la longueur de la bobine, on l'appelle un *solénoïde* (terme créé par AMPÈRE lors de ses recherches sur le magnétisme). Nous allons évaluer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur de ce système.

Le solénoïde de la figure 13.60 possède n spires par unité de longueur. Nous appliquons le théorème d'AMPÈRE en choisissant pour contour d'intégration le rectangle PQRS. L'apport des côtés SP et QR à la circulation est nul, le champ leur étant perpendiculaire. Celui du côté RS est négligeable, le champ étant pratiquement nul à l'extérieur du solénoïde. La contribution du côté PQ à la circulation est égale à $\mathcal{B}a$. Le courant traversant le rectangle est égal à naI . En vertu du théorème d'AMPÈRE, ces deux grandeurs sont égales, ce qui entraîne :

$$\mathcal{B} = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{l} \quad (13.76)$$

où N représente le nombre total de spires et l la longueur du solénoïde.

EXEMPLE 13.7. Champ et aimantation d'un aimant toroïdal⁷.

Autour d'un tore constitué d'un cœur en fer de section carrée (fig. 13.61), de perméabilité μ , de rayon R beaucoup plus grand que sa section, on enroule N spires jointives qui transportent un courant d'intensité I . Que vaut l'intensité de l'aimantation \mathcal{M} à l'intérieur du fer?

SOLUTION: En vertu de la loi d'AMPÈRE (13.67).

$$\oint_c \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

l'intensité du champ magnétique est égale à

$$\mathcal{H} = \frac{NI}{2\pi R}$$

À partir de la relation (13.54), nous déduisons pour l'aimantation à l'intérieur du fer:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} - \mathcal{H} = \frac{\mu\mathcal{H}}{\mu_0} - \mathcal{H} = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \frac{NI}{2\pi R}$$

■

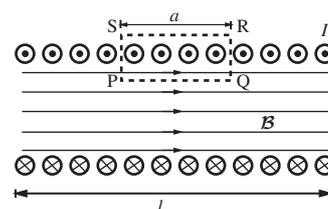


FIGURE 13.60 Champ magnétique d'un solénoïde (bobine très longue par rapport à son diamètre): le champ est uniforme.

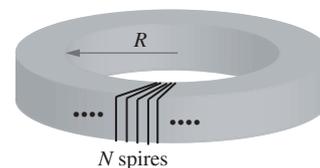


FIGURE 13.61 Aimant toroïdal.

7. Les exemples 13.7 et 13.13 sont tirés de l'ouvrage *Problems and Solutions on Electromagnetism*, edited by Lim Yung-kuo, © 2005 World Scientific (avec l'autorisation de World Scientific).

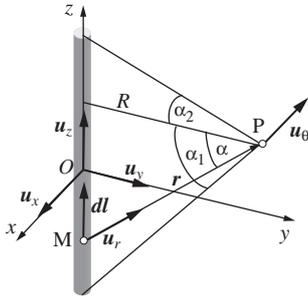


FIGURE 13.62 Champ magnétique engendré par un courant rectiligne: éléments servant à la détermination de l'intensité en un point P.

EXEMPLE 13.8. Champ magnétique engendré par un courant rectiligne.

Déterminer, à partir de la loi de BIOT-SAVART, l'intensité du champ magnétique: (a) engendré par un segment vertical de conducteur rectiligne en un point P d'où l'on voit les extrémités du segment sous des angles respectifs α_1 et α_2 par rapport à l'horizontale, le point P se trouvant à une distance R du segment qui transporte un courant d'intensité I ; (b) généraliser le résultat pour un fil de longueur infinie.

SOLUTION: (a) En nous référant à la figure 13.62, nous obtenons pour le champ engendré en P par l'élément de longueur infinitésimale $d\mathbf{l}$ situé au point M:

$$\begin{aligned} d\mathcal{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (dz \cdot \mathbf{u}_z) \times [\cos(\alpha) \cdot \mathbf{u}_y + \sin(\alpha) \cdot \mathbf{u}_z] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos(\alpha) \cdot \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

Pour obtenir l'intensité totale, nous intégrons ces contributions infinitésimales d'une extrémité à l'autre du segment. La variable α s'impose de manière naturelle. Exprimons les autres variables en fonction de cette dernière et de la distance R :

$$\begin{aligned} z &= R \tan(\alpha) \text{ donc } dz = \frac{R}{\cos^2(\alpha)} d\alpha \\ r &= \frac{R}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

Après substitution et simplification, nous obtenons:

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos(\alpha) d\alpha \cdot \mathbf{u}_\theta$$

L'intégration entre α_1 et α_2 donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(P) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\cos(\alpha) d\alpha) \mathbf{u}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)] \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

(b) Si la longueur du conducteur tend vers l'infini, les angles α_1 et α_2 tendent respectivement vers $-\pi/2$ et $+\pi/2$. L'introduction de ces valeurs et d'une distance variable r donne finalement:

$$\mathcal{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta \tag{E 13.4}$$

Ce résultat justifie la relation (13.65). L'application du théorème d'AMPÈRE aurait permis de le trouver plus simplement. ■

EXEMPLE 13.9. Champ magnétique sur l'axe d'une boucle circulaire (spire) de courant.

a) Déterminer l'intensité du champ magnétique engendré par un courant d'intensité I circulant dans une boucle circulaire (ou spire) de rayon R , uniquement sur l'axe de la boucle. (b) Se placer dans l'approximation dipolaire qui consiste à limiter l'étude à des points situés loin du dipôle, c'est-à-dire à une distance $z \gg R$.

SOLUTION: (a) En se référant à la figure 13.63 et en vertu de la loi de BIOT-SAVART (13.64), l'intensité en P créée par l'élément infinitésimal situé en M est donnée par :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs unitaires est perpendiculaire au plan qu'ils définissent et a une valeur égale à l'unité. Le champ élémentaire en P a donc pour module :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

Cet élément de champ peut être décomposé en une composante perpendiculaire et une composante parallèle à l'axe Oz . Lors de l'intégration sur le pourtour de la spire, les composantes perpendiculaires auront une contribution nulle, vu qu'à chacune d'elles en correspond une diamétralement opposée qui la compense. Ainsi, seules les composantes parallèles à l'axe contribuent à l'intensité sur cet axe. Ces composantes sont proportionnelles à $\cos(\theta) = R/r$:

$$dB_{\parallel} = dB \cos(\theta) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} dl$$

Nous obtenons la contribution totale au point P en intégrant sur le pourtour de la spire. Cette intégrale est égale à la circonférence de la spire, à savoir $2\pi R$. Ainsi, :

$$B = \oint_{\text{spire}} dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \oint_{\text{spire}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} (2I\pi R^2) \frac{1}{r^3} \quad (\text{E 13.5})$$

Comme $r = (R^2 + z^2)^{3/2}$, l'intensité en n'importe quel point de l'axe de la boucle devient :

$$B(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{E 13.6})$$

(b) Si la boucle représente un courant tel que $R \ll z \approx r$ (par exemple un courant microscopique fermé à l'intérieur d'un atome produit par le mouvement d'un électron sur son orbite), la grandeur $A = \pi R^2$ représente l'aire de la boucle. L'expression (E 13.5) peut s'écrire :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} (2IA) \frac{1}{r^3}$$

■

EXEMPLE 13.10. Version locale du théorème d'AMPÈRE.

Établir la forme différentielle du théorème d'AMPÈRE en procédant de manière analogue à celle qui a été utilisée à la section 13.3.2 pour formuler la version locale du théorème de GAUSS.

SOLUTION: Sachant que le théorème d'AMPÈRE peut s'appliquer à un contour quelconque, nous commençons par l'appliquer à un contour rectangulaire infinitésimal ABCD situé dans le plan Oxy (fig. 13.64). La circulation sur cette courbe fermée, dans le sens indiqué par les flèches, est égale à la somme de la circulation sur chacun des côtés du rectangle.

Sur le côté BC, parallèle à $+Oy$, nous avons :

$$A_{BC} = \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_y dy = B_y dy$$

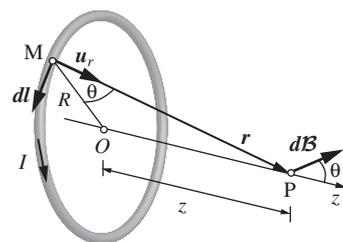


FIGURE 13.63 Champ magnétique engendré par une boucle circulaire de courant.

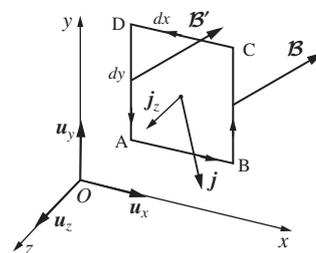


FIGURE 13.64 Élément de contour rectangulaire infinitésimal parallèle au plan Oxy pour obtenir une composante de la version différentielle du théorème d'AMPÈRE.

Sur le côté DA, orienté dans le sens opposé, la contribution est égale à :

$$\Lambda_{DA} = \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{B}' \cdot \mathbf{u}_y dy = -B'_y dy$$

La contribution totale sur les côtés parallèles à Oy devient :

$$\Lambda_{BC} + \Lambda_{DA} = (B_y - B'_y) dy$$

Comme le rectangle est très petit, nous pouvons recourir à une approximation linéaire de la variation de l'intensité du champ magnétique entre les deux segments :

$$B_y - B'_y \approx dB_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx$$

ce qui entraîne :

$$\Lambda_{BC} + \Lambda_{DA} = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy$$

En procédant de manière analogue sur les segments parallèles à Ox, nous obtenons :

$$\Lambda_{AB} + \Lambda_{CD} = -\frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy$$

La circulation totale sur le contour du rectangle infinitésimal parallèle au plan Oxz est égale à :

$$\Lambda_{ABCD} = \oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Si nous désignons par dI le courant qui traverse le rectangle ABCD, nous pouvons l'exprimer au moyen de la composante suivant Oz de la densité de courant \mathbf{j} :

$$dI = j_z dA = j_z dx dy$$

L'introduction des deux dernières relations dans le théorème d'AMPÈRE donne, après simplification par $dx dy$:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z$$

ce qui représente la troisième composante de la forme différentielle du théorème d'AMPÈRE.

En procédant de manière analogue pour des rectangles infinitésimaux parallèles respectivement aux plans Oyz et Ozx, nous obtenons les trois composantes de la forme locale du théorème d'AMPÈRE. Nous les présentons sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 j_x \\ \mu_0 j_y \\ \mu_0 j_z \end{pmatrix}$$

Le membre de droite contient le vecteur \mathbf{j} de la densité de courant. Le membre de gauche fait apparaître un nouveau vecteur, le *rotationnel de \mathcal{B}* , que l'on écrit $\mathbf{rot} \mathcal{B}$. On obtient ainsi une équation vectorielle, la forme locale du théorème d'AMPÈRE :

$$\mathbf{rot} \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

■

EXEMPLE 13.11. Champ magnétique engendré par le courant dans un câble coaxial.

Un câble coaxial très long consiste en deux conducteurs concentriques dont les dimensions sont indiquées dans la figure 13.65. Le courant d'intensité I circule dans un sens dans le conducteur central et dans le sens inverse dans le conducteur externe. En admettant que les courants sont distribués uniformément dans les conducteurs, déterminer au moyen de la version locale de la loi d'AMPÈRE l'évolution de l'intensité du champ d'induction magnétique: (a) à l'intérieur du conducteur central; (b) dans l'espace entre les deux conducteurs; (c) à l'intérieur du conducteur externe; (d) à l'extérieur du câble coaxial; (e) justifier pourquoi on peut obtenir ces résultats à partir de la version intégrale et déterminer l'intensité dans le conducteur externe.

SOLUTION: En raison de la symétrie du dispositif et du champ magnétique qui en découle, nous opérons en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La forme différentielle (13.68) de la loi d'AMPÈRE va nous permettre de déterminer l'intensité du champ magnétique à partir des densités locales de courant. En coordonnées cylindriques, le rotationnel devient :

$$\mathbf{rot} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{B}_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathcal{B}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{B}_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{B}_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Seule la composante \mathcal{B}_θ est variable, et elle ne varie qu'en fonction de la coordonnée radiale. La loi d'AMPÈRE se réduit à :

$$\mathbf{rot} \mathcal{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \mathcal{B}(r)] \mathbf{u}_z = \mu_0 \mathbf{j}$$

(a) Comme le courant est distribué uniformément sur la section du conducteur, sa densité est égale au quotient de l'intensité I et de l'aire de sa section :

$$j = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial r} [r \mathcal{B}(r)] = \frac{\mu_0 I}{\pi R_1^2} r$$

ce qui entraîne

$$r \mathcal{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi R_1^2} \frac{r^2}{2} + c_1$$

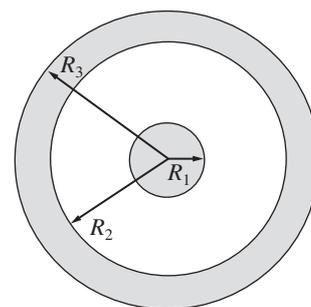


FIGURE 13.65 Câble coaxial : le courant circule dans un sens dans le conducteur central et dans le sens inverse dans le conducteur externe.

où c_1 est une constante d'intégration. Pour la déterminer, nous utilisons le fait que l'intensité du champ magnétique est nulle sur l'axe du câble (pas de courant enlacé), ce qui implique que la constante d'intégration est nulle elle aussi. Nous avons donc :

$$\mathcal{B}(r \leq R_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$$

(b) En l'absence de courant dans ce domaine, le rotationnel est nul, donc

$$\frac{\partial}{\partial r} [r\mathcal{B}(r)] = 0$$

ce qui implique

$$r\mathcal{B}(r) = c_2$$

À l'interface entre le conducteur central et l'espace intermédiaire, l'intensité du champ magnétique ne doit pas varier de manière discontinue :

$$r\mathcal{B}(r) = R_1 \mathcal{B}(r = R_1) = R_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} R_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} = c_2$$

Donc :

$$\mathcal{B}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

(c) Le sens du courant est inversé, la densité de courant devient :

$$j = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

L'équation différentielle est maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial r} [r\mathcal{B}(r)] = -\frac{\mu_0 I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} r$$

avec pour solution :

$$r\mathcal{B}(r) = -\frac{\mu_0 I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{r^2}{2} + c_3$$

La continuité du champ magnétique en $r = R_2$ permet de fixer la valeur de la constante c_3 :

$$R_2 \mathcal{B}(r = R_2) = R_2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_2} = -\frac{\mu_0 I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2} + c_3$$

d'où l'on obtient :

$$c_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

On trouve finalement :

$$\mathcal{B}(R_2 \leq r \leq R_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{1}{r}$$

(d) En dehors du câble coaxial, la densité de courant est nulle. La continuité de l'intensité du champ entraîne :

$$\mathcal{B}(r \geq R_3) = 0$$

La figure 13.66 montre l'évolution de l'intensité en fonction du rayon r .

(e) La symétrie cylindrique du système considéré permet d'obtenir ces résultats à partir de la version intégrale (13.67) de la loi d'AMPÈRE. Dans le cylindre externe, les courants enlacés sont le courant intérieur I et le courant extérieur dont l'intensité varie en fonction du rayon selon :

$$I_{\text{ext}} = -I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

La version intégrale de la loi d'AMPÈRE donne dans ce cas :

$$\oint_c \mathcal{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{B}(r) 2\pi r = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = \mu_0 I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

La valeur qui en découle est naturellement la même que celle que nous avons obtenue au point (c) à partir de la version locale de la loi.

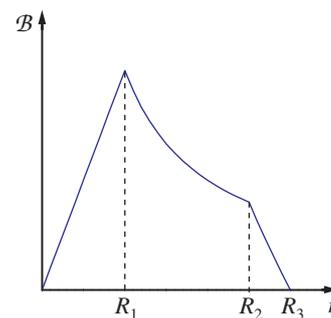


FIGURE 13.66 Évolution radiale de l'intensité du champ magnétique dans le câble coaxial.

13.8.3 Forces sur les courants et les charges en mouvement

Lorsqu'il est « attaché » à un objet matériel, c'est-à-dire lorsque les sources d'un champ sont attachées à un objet, ce champ exerce toujours des contraintes sur cet objet. Nous venons de voir qu'un conducteur traversé par un courant électrique est entouré d'un champ dont les lignes sont des cercles concentriques. En outre, à la section 13.7.6, nous avons démontré que le champ magnétique exerce une traction dans la direction des lignes de champ et une compression perpendiculairement à celles-ci. Nous devons donc conclure que le champ magnétique exerce une pression sur le conducteur et, par le fait même, sur le courant électrique transporté par le conducteur.

Ainsi, si l'on envoie un courant électrique dans deux conducteurs rectilignes parallèles, on observe qu'ils se rapprochent si le courant a le même sens dans les deux conducteurs, alors qu'ils s'éloignent si les courants sont antiparallèles.

Lorsque l'on dessine la répartition de l'intensité du champ créé par les courants en question, on se rend compte que cette intensité est maximale de part et d'autre des deux conducteurs si les deux courants sont parallèles. On en conclut que la pression exercée par le champ magnétique pousse les deux conducteurs l'un vers l'autre. C'est le champ magnétique qui exerce la force. Dans le cas de courants antiparallèles, l'intensité du champ commun est maximale entre les deux conducteurs; ceux-ci sont donc écartés l'un de l'autre par le champ magnétique.

Force de LAPLACE. L'intensité de l'interaction entre un champ magnétique et un courant doit être déterminée par l'expérience. On peut, par exemple, suspendre au moyen de fils conducteurs une barrette métallique dans l'entrefer d'un aimant; lorsque la barrette est traversée par un courant, elle subit une force (fig. 13.67). L'analyse qui précède indique que la force du champ magnétique sur le courant s'exercera

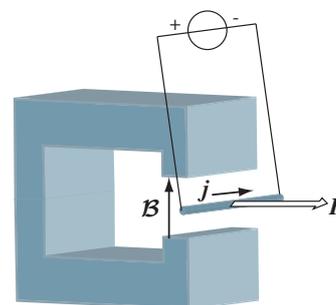


FIGURE 13.67 Force de LAPLACE. : un trapèze conducteur plongé dans un champ magnétique subit une force lorsqu'il est parcouru par un courant électrique.

perpendiculairement à la fois au vecteur de l'induction magnétique \mathcal{B} et au vecteur \mathbf{j} de la densité de courant. L'expérience révèle que la force est proportionnelle à l'intensité I du courant, à l'intensité \mathcal{B} du champ, à la longueur l de la partie du conducteur plongée dans le champ magnétique. La force dépend également de l'angle φ entre les vecteurs \mathcal{B} et \mathbf{j} ; elle est maximale si cet angle est droit, nulle si les deux vecteurs sont parallèles ou antiparallèles, donc proportionnelle à $\sin(\varphi)$. Ainsi :

$$F \propto I\mathcal{B} \sin(\varphi)$$

Cette relation peut être mise sous forme vectorielle en introduisant le vecteur \mathbf{l} de même sens que \mathbf{j} .

Un conducteur de longueur l traversé par un courant d'intensité I subit, lorsqu'il est plongé dans un champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} , une force, dite force de LAPLACE, donnée par :

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathcal{B}) \tag{13.77}$$

Force de LORENTZ . Un courant électrique est un flux de charges électriques en mouvement, et la force de LAPLACE est la résultante des forces qui s'exercent sur chacune des charges qui constituent ce courant. Pour déterminer la force individuelle, nous considérons un segment de conducteur rectiligne de longueur l , de section A , traversé par un courant d'intensité I . Nous désignons par \mathbf{v} la vitesse moyenne des charges individuelles Q et par n leur nombre par unité de volume.

L'intensité I est égale à :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(nQAl) = nQA \frac{dl}{dt} = nQAV$$

Nous substituons cette valeur dans l'équation (13.77) :

$$\mathbf{F} = nQAV(\mathbf{l} \times \mathcal{B})$$

Comme les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{l} sont parallèles, nous pouvons écrire $\mathbf{vl} = l\mathbf{v}$. La force totale est donc :

$$\mathbf{F} = nQAl(\mathbf{v} \times \mathcal{B})$$

Nous pouvons admettre que la force agit de façon égale sur chacune des charges. En divisant l'expression ci-dessus par le nombre total de charges nAl , nous trouvons que :

Un corps portant une charge Q qui se déplace à une vitesse \mathbf{v} dans un champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} est soumis à une force

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathcal{B}) \quad (13.78)$$

appelée force de LORENTZ (fig. 13.68).

Souvent, les champs électrique et magnétique sont présents simultanément. Une particule portant la charge Q plongée dans ces champs interagira avec les deux champs et subira une force donnée par :

$$\mathbf{F} = Q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}) \quad (13.79)$$

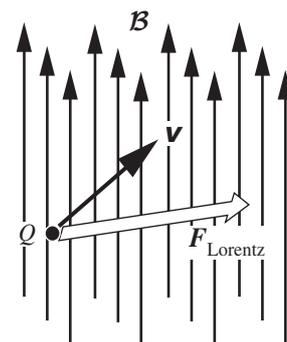


FIGURE 13.68 Une particule de charge Q en mouvement à la vitesse v dans un champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} subit une force qui est à la fois perpendiculaire au vecteur de champ et au vecteur vitesse, la force de LORENTZ.

EXEMPLE 13.12. Force entre deux courants parallèles.

Déterminer l'intensité de la force agissant sur une paire de fils conducteurs rectilignes parallèles de longueur infinie (pour pouvoir négliger les effets de bord).

SOLUTION: Nous considérons que le conducteur 2 se trouve dans le champ engendré par le conducteur 1 (fig. 13.69) et appliquons l'équation (13.77). Comme tous les vecteurs sont mutuellement perpendiculaires, elle devient: $F = I_2 l \mathcal{B}_1$. Comme

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

nous obtenons, pour la force par unité de longueur :

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (E 13.7)$$

Nous savons déjà que les deux conducteurs sont poussés l'un vers l'autre par le champ si les courants sont parallèles, écartés l'un de l'autre si les courants sont antiparallèles.

C'est cette force entre deux courants parallèles qui est utilisée pour la définition de l'ampère, l'unité de l'intensité du courant électrique: «Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre.»

Si, dans l'équation (E 13.7), nous isolons la perméabilité magnétique et substituons les valeurs des grandeurs de la définition de l'ampère, nous obtenons :

$$\mu_0 = \frac{F}{l} \frac{2\pi r}{I^2} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ N}}{1 \text{ m}} \frac{2\pi \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Nm s}}{\text{A s}} \frac{1}{\text{A m}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$$



EXEMPLE 13.13. Interaction entre deux courants à angle droit.

Deux fils conducteurs mutuellement perpendiculaires sont séparés par une distance d et transportent des courants d'intensités respectives I_1 et I_2 . Considérez, sur le second conducteur, un segment de longueur $l \ll d$, symétrique par rapport à Oy , dont les extrémités ont les coordonnées

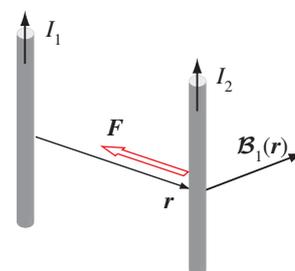


FIGURE 13.69 Détermination de la force entre deux courants rectilignes parallèles.

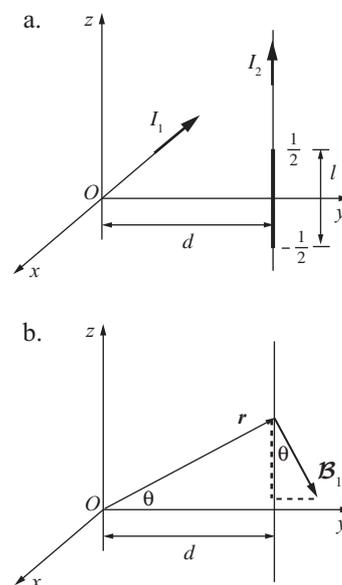


FIGURE 13.70 (a) Configuration de l'exemple 13.13. (b) Projection de l'intensité du champ d'induction magnétique sur les axes du repère cartésien.

$(-1/2, 1/2)$ (fig. 13.70a). (a) Déterminez la force et le couple exercés sur ce segment. (b) Si le second segment peut tourner librement autour de l'axe Oy , quelle sera la configuration finale?

SOLUTION: (a) En vertu de l'équation (E 13.4), le champ d'induction magnétique engendré par le courant d'intensité I_1 est donné par:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{d^2+z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{d^2+z^2}} \\ -\frac{d}{\sqrt{d^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

Le passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes est basé sur la similitude des deux triangles qui apparaissent dans la figure 13.70b. Un segment infinitésimal situé entre z et $z + dz$ du conducteur transportant le courant d'intensité I_2 subit la force de LAPLACE donnée par l'équation (13.77):

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 (d\mathbf{z} \times \mathcal{B}_1) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sqrt{d^2+z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{d^2+z^2}} \\ -\frac{d}{\sqrt{d^2+z^2}} \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 z}{2\pi(d^2+z^2)} dz \cdot \mathbf{u}_x$$

La force agissant sur le segment considéré devient:

$$\mathbf{F}_{12} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\ln(d^2+z^2) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$$

ce qui était attendu, vu la symétrie de la configuration et le fait que l'intégrande est une fonction impaire de z .

Le couple élémentaire par rapport à l'axe de rotation coïncidant avec Oy est:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 z}{2\pi(d^2+z^2)} dz \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 z^2}{2\pi(d^2+z^2)} dz \cdot \mathbf{u}_y$$

Le module du couple total devient:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dM = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{(d^2+z^2)} dz = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[z - d \tan^{-1} \left(\frac{z}{d} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

Comme $l \ll d$, on peut développer $\tan^{-1}(z/d)$ en série de Taylor autour de $z = 0$ et ne conserver que le premier terme, ce qui donne:

$$\mathbf{M} \approx -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d^2} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{u}_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{24\pi d^2} l^3 \cdot \mathbf{u}_y$$

On en conclut que si le second conducteur est libre de pivoter autour de l'axe Oy , il va se retrouver parallèle au premier conducteur de telle manière que les deux courants circulent dans le même sens, ce qui correspond à un minimum de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique. ■

EXEMPLE 13.14. Effet HALL.

En 1875, le physicien américain Edwin Herbert HALL découvrit que, lorsqu'une plaque métallique traversée par un courant dans le sens de la longueur était plongée dans un champ magnétique perpendiculaire à la plaque, une tension s'établissait entre les deux bords opposés de la plaque. Expliquez le phénomène et évaluez la valeur de la tension pour une plaque de largeur b et d'épaisseur d .

SOLUTION: Les porteurs de charges mobiles se déplacent dans le conducteur avec une vitesse de drift moyenne \mathbf{v} de même sens que le vecteur de densité de courant \mathbf{j} (fig. 13.71). Ces charges sont soumises à la force de LORENTZ $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ perpendiculairement à la direction du courant. Comme aucun courant ne peut circuler dans cette direction, ces charges électriques s'accumulent sur les bords du conducteur de telle manière qu'à l'équilibre, la force de LORENTZ \mathbf{F}_L est compensée par une force électrique $\mathbf{F}_{el} = QE_H$. La tension électrique qui s'établit entre les deux bords du conducteur est la *tension de HALL* U_H . L'égalité des modules des deux forces entraîne :

$$\mathcal{E}_H = vB$$

Sachant que

$$v = \frac{I}{\rho db} \quad \text{et} \quad U_H = \mathcal{E}_H b$$

nous obtenons

$$U_H = vBb = \frac{1}{\rho} \frac{IB}{d}$$

La tension de HALL est proportionnelle à l'intensité du champ d'induction magnétique, ce qui permet de concevoir un appareil servant à mesurer l'intensité de ce champ. Cet appareil est une sonde de HALL, dans laquelle les paramètres ρ , I et d sont contrôlés. La sonde est calibrée de manière à ce que la tension mesurée soit convertie directement en tesla.

Réciproquement, si on plonge un plaque métallique traversée par un courant dans un champ d'induction magnétique et que l'on mesure U_H , B , I et d , on peut déterminer la densité des charges en mouvement. On obtient également le signe de ces charges en mouvement. C'est de cette manière que l'on a découvert que, majoritairement, ce sont les électrons qui sont les porteurs de charge dans les métaux, mais également que le courant électrique pouvait être porté par des charges positives, les trous.

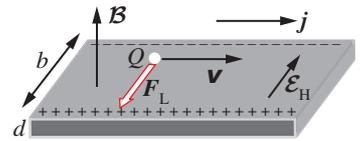


FIGURE 13.71 Effet HALL : lorsqu'un courant circule dans une plaque plongée dans un champ magnétique perpendiculaire à la plaque, une tension apparaît entre les bords opposés de la plaque.

1. Qu'exprime la version intégrale du théorème d'AMPÈRE ?
2. Quelle particularité du champ magnétique la version locale du théorème d'AMPÈRE fait-elle ressortir ?
3. Comment se manifeste l'interaction entre le champ électrique et les charges ou courants électriques ?



1. La version intégrale du théorème d'AMPÈRE indique que la circulation du flux d'induction magnétique le long d'une courbe fermée est égale (à un facteur près) à l'intégrale de la densité de courant traversant la surface délimitée par cette courbe. Si la courbe encercle des conducteurs, l'intégrale est remplacée par la somme algébriques des intensités.



Le théorème d'AMPÈRE relie l'intensité du champ magnétique à ses sources, les courants électriques.

2. La version locale du théorème d'AMPÈRE fait intervenir l'opérateur rotationnel qui donne une mesure de la «rotation» du champ considéré. Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ à tourner autour d'un point. La direction du vecteur **rot** est celle de l'axe de rotation.
3. Le champ d'induction magnétique agit sur les courants par l'intermédiaire de la force de LAPLACE et sur les charges en mouvement par l'intermédiaire de la force de LORENTZ. Ces forces s'exercent perpendiculairement à la direction de mouvement des charges.

13.8.4 Unités de mesure des champs électrique et magnétique

L'objectif est de justifier les unités de mesure des divers champs et grandeurs qui leur sont associées et de montrer comment elles sont liées entre elles.

Unités électriques. À partir de l'équation (13.2) qui introduit l'intensité du champ électrique en tant que force par unité de charge, nous obtenons :

$$[\mathcal{E}] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{N m}}{\text{As m}} = \frac{\text{J}}{\text{As m}} = \text{V m}^{-1}$$

Le flux du champ électrique aura pour unité celle du produit de l'intensité du champ et d'une surface, donc $[\psi] = \text{V m}$.

Le théorème de GAUSS (13.10) nous permet de déterminer l'unité de la permittivité du vide :

$$[\epsilon_0] = \frac{[Q]}{[\psi]} = \frac{\text{As}}{\text{V m}} = \text{As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

En tant qu'énergie par unité de charge, le potentiel électrique se mesurera en volt ; il en va de même de la circulation du champ électrique : $[\phi] = [A] = \text{V}$.

La densité d'énergie donnée par l'équation (13.27) a pour unité :

$$[\rho_E] = [\epsilon_0][\mathcal{E}^2] = \frac{\text{As}}{\text{V m}} \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{As V}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

La densité d'énergie correspond donc à une pression, ce qui est naturellement le cas des contraintes calculées à la section 13.5.2.

Finalement, la polarisation correspondant à une densité surfacique de charge, elle sera, tout comme l'intensité du déplacement électrique, égale à une charge par unité de surface : $[II] = [\Delta] = \text{As m}^{-2}$.

Unités magnétiques. Si l'on exprime la loi d'AMPÈRE (13.65) au moyen de l'excitation magnétique H , l'intensité du champ magnétique est proportionnelle au courant entouré et inversement proportionnelle à la distance, d'où

$$[\mathcal{H}] = \frac{[I]}{[r]} = \frac{\text{A}}{\text{m}} = \text{A m}^{-1}$$

La relation (13.51) implique que la magnétisation M se mesure également en A m^{-1} .

Vu que la valeur et les unités de la perméabilité magnétique du vide sont fixées, comme cela a été introduit dans l'exemple 13.12, le champ d'induction magnétique \mathcal{B} , défini par l'équation (13.54), se mesure en :

$$[\mathcal{B}] = [\mu_0][\mathcal{H}] = \frac{\text{Vs}}{\text{A m}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{tesla (T)}$$

Le moment magnétique \mathbf{m} défini par l'équation (13.75) se mesure en :

$$[\mathbf{m}] = [I][A] = \text{A m}^2$$

Si le moment magnétique défini par l'équation (13.48) a les mêmes unités, il s'ensuit que la charge magnétique se mesure en :

$$[q_m] = \frac{[\mathbf{m}]}{[\delta]} = \text{A m}$$

Rappelons que cette grandeur ne fait pas partie de la nomenclature du SI et qu'elle ne correspond pas à un monopôle magnétique.

Finalement, l'unité du potentiel magnétique scalaire et de la circulation magnétique est le produit de l'unité du champ magnétique et d'une longueur : $[\varphi_m] = [A_m] = \text{A}$.

Le flux d'induction magnétique ϕ_B défini par l'équation (13.56) se mesure en :

$$[\phi_B] = [\mathcal{B}][A] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = \text{Vs} = \text{weber (Wb)}$$

13.9 VUE D'ENSEMBLE DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE STATIQUES

TABLEAU 13.2 Équations relatives au champ électrostatique.

Version intégrale	Version locale
Dans le vide	
$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
<p>Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge enfermée, c'est-à-dire que les charges électriques sont les sources du champ électrique (équations (13.11) et (13.14)).</p>	
$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = -\int_{r_0}^r \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi(\mathbf{r})]$
<p>L'intensité \mathcal{E} du champ électrostatique est égale et opposée au taux de variation du gradient de son potentiel φ qui est un champ scalaire (équations (13.18) et (13.22)).</p>	

TABLEAU 13.2 Équations relatives au champ électrostatique.

Version intégrale	Version locale
$\Lambda_{\mathcal{E}} = \oint_C \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\text{rot } \mathcal{E} = 0$
<p>La nullité de la circulation et du rotationnel du champ électrostatique implique le fait qu'on peut lui associer un potentiel scalaire (équations (13.25) et (13.71)).</p>	
<p>En présence de matière</p>	
$\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}}{\epsilon_0}$	$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \mathcal{P}$
<p>La présence d'un diélectrique dans le champ électrique en modifie l'intensité à cause de l'apparition de charges liées à la surface du diélectrique dues à la polarisation de ce dernier (équations (13.42) et (13.41)).</p>	
$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$	
$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{libre}}$	$\text{div } \mathcal{D} = \rho$
<p>L'intensité du champ de déplacement \mathcal{D} à l'intérieur d'un diélectrique est égale à la densité superficielle de charges libres (équations (13.38), (13.44) et (13.43)).</p>	

TABLEAU 13.3 Équations relatives au champ magnétostatique.

Version intégrale	Version locale
<p>Champ engendré par un aimant</p>	
$\oint_S \mathcal{H} \cdot d\mathbf{A} = -\oint_S \mathcal{M} \cdot d\mathbf{A}$	$\text{div } \mathcal{H} = -\text{div } \mathcal{M}$
<p>Le flux à travers une surface fermée du champ magnétique engendré par un aimant est proportionnel à l'aimantation de ce dernier. Le champ magnétostatique d'intensité \mathcal{H} a ses sources aux endroits où le champ d'aimantation \mathcal{M} a ses puits, et réciproquement (équations (13.53) et (13.51)).</p>	
$\varphi_m(\mathbf{r}) - \varphi_m(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad } [\varphi_m(\mathbf{r})]$
<p>L'intensité \mathcal{H} du champ magnétostatique engendré par un aimant est égale et opposée au taux de variation ou gradient de son potentiel φ_m, qui est un champ scalaire (équations (13.57) et (13.58)).</p>	

TABLEAU 13.3 Équations relatives au champ magnétostatique.

$\mathcal{B} = \mu_0 (\mathcal{H} + \mathcal{M})$	
$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$
Le champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} englobe la contribution de l'aimantation (équation (13.54)). Sa divergence est nulle, ce qui est une conséquence de l'inexistence d'un monopôle magnétique qui serait le porteur d'une charge magnétique isolée (équations (13.56) et (13.55)).	
Champ engendré par un courant	
$\oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$	$\operatorname{rot} \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j}$
Les courants électriques sont à l'origine de la circulation du champ magnétique (équations (13.66) et (13.68)).	

13.10 CHAMP GRAVITATIONNEL

Nous sommes constamment soumis aux effets du champ gravitationnel et il est impossible de s'en isoler, contrairement à ce qui est le cas du champ électrostatique au moyen d'une cage de FARADAY ou du champ magnétostatique par un blindage. C'est une des raisons pour lesquelles l'interaction gravitationnelle a été celle qui a été la première à être étudiée et modélisée.

13.10.1 Un peu d'histoire

De tout temps, l'homme a été fasciné par le mouvement des corps célestes. Il a repéré dans le ciel deux types d'objets : les étoiles fixes, qui ne se déplacent pas les unes par rapport aux autres (mais effectuent deux révolutions : une première quotidienne, comme le Soleil, et une seconde annuelle), et des objets qui se déplacent par rapport à ce fond immuable. Les Grecs ont appelé planètes (*planétés* : astre errant) ces vagabonds du ciel.



FIGURE 13.72 Trajectoires observées des planètes Mars et Saturne. La première photo de la planète Mars (en haut à droite) date du 31 janvier 2016, la dernière (en bas à gauche) du 11 septembre 2016. Le mouvement de rétrogradation commence le 18 avril et se termine le 28 juin. La durée entre deux prises de vue successives varie entre six et dix jours. Les photos de la rétrogradation de Saturne ont été prises entre le 15 décembre 2015 et le 21 novembre 2016. (© Tunç Tezel).

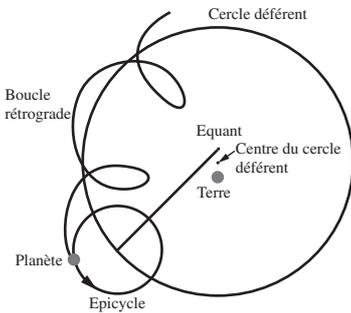


FIGURE 13.73 Modèle géocentrique de PTOLÉMÉE. Il ne peut rendre compte des observations que grâce à l'introduction de l'épicycle et de l'équant.

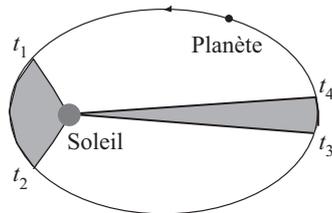


FIGURE 13.74 Loi des aires: les aires balayées par le rayon qui relie la planète au Soleil sont égales pour des durées égales. Dans la figure, l'excentricité de l'ellipse est fortement exagérée et la position du Soleil, qui devrait se trouver dans un des foyers, ne correspond pas à la réalité.

La première hypothèse concernant le mouvement des planètes était qu'elles décrivent des cercles concentriques autour de la Terre; c'est un *modèle géocentrique*. Ce qui était intrigant, c'est que certaines d'entre elles, particulièrement Mars, effectuaient des mouvements tels que leur trajectoire comportait des segments rétrogrades; la planète semblait rebrousser chemin (fig. 13.72). Cette particularité obligea les astronomes à affiner progressivement le modèle qui fut amené à sa culmination aux environs de 140 après J.-C. par Claude PTOLÉMÉE d'Alexandrie (fig. 13.73). Dans ce modèle, les planètes se déplacent sur des cercles, les *épicycles*, dont le centre se déplace lui-même sur un cercle plus grand, le *cercle déférent*. Le problème de l'inversion du mouvement des corps célestes disparaît au prix de deux artifices (une tricherie au sens d'ARISTOTE qui admettait que le seul mouvement possible pour des corps célestes est le mouvement circulaire uniforme): PTOLÉMÉE admet que les cercles déférents sont décentrés par rapport à la Terre, et que le mouvement circulaire des planètes est uniforme par rapport à l'*équant*, le point symétrique de la Terre par rapport au centre du cercle déférent.

Dans le monde occidental, cette description, en complet accord avec la Bible, fut admise et professée comme correcte jusqu'au XVI^e siècle. Il semble que certains astronomes islamiques provenant de Maragha, au nord-ouest de l'Iran, aient déjà contesté ce modèle à partir du IX^e siècle. Mais c'est le chanoine polonais Nicolas COPERNIC (1473-1543) qui, pour autant qu'on le sache, fut le premier à proposer de remplacer le modèle de PTOLÉMÉE par le *modèle héliocentrique*. L'idée avait été formulée pour la première fois au III^e siècle avant J.-C. par l'astronome grec ARISTARQUE. On retrouve dans l'ouvrage de COPERNIC des théorèmes qui avaient été formulés au XIV^e siècle par des astronomes de Maragha, AL-TUSI et AL-URDI, qui permettaient d'éliminer l'équant en le remplaçant par un épicycle supplémentaire. L'hypothèse que COPERNIC se soit inspiré des travaux des astronomes islamiques reste encore à vérifier.

L'astronome Johannes KEPLER (1571-1630), aidé entre autres par l'inventeur suisse des antilogarithmes, Jost BÜRGI (1552-1632)⁸, tira profit des observations de Tycho BRAHE (1546-1601), son prédécesseur à la cour de Prague, pour énoncer trois lois qui sont une description cinématique du mouvement des planètes (fig. 13.74).

Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Le vecteur position de chaque planète, par rapport au Soleil, balaie des aires égales de son ellipse en temps égaux (loi des aires).

Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses de révolution:

$$a^3 = kT^2 \tag{13.80}$$

où k est une constante commune à toutes les planètes.

8. Dans ses Tables rudolphines, KEPLER écrivait en 1627 : «M'aidant dans les calculs, Justus BYRGIUS a été conduit à ces mêmes logarithmes bien des années avant l'apparition du système de NAPIER ; mais étant un homme indolent, et très peu communicatif, au lieu d'élever son enfant pour le bien public, il l'a abandonné à la naissance.»

Il rend hommage à l'innovateur en mathématiques tout en regrettant sa réticence à publier, sans doute due à sa mauvaise maîtrise du latin.

C'est Isaac NEWTON (1642-1727) qui franchit l'étape suivante dans l'histoire de l'astronomie. Il découvrit en 1666, alors qu'il avait quitté Cambridge pour fuir la peste et s'était retiré dans son village natal de Woolworth, la loi de la gravitation universelle.

NEWTON réalisa que la Lune était continuellement en train de tomber vers le centre de la Terre, mais que son mouvement de chute était compensé par son avancement et la rotondité de la Terre. La force qui maintenait la Lune sur sa trajectoire devait donc être de même nature que celle qui attirait les objets vers le sol mais, vu que les accélérations respectives variaient très fortement ($2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ contre 9.81 m s^{-2}), il en conclut que la force d'attraction devait diminuer avec la distance. Le rapport de ces accélérations est approximativement l'inverse de celui du carré du rapport du rayon de la trajectoire lunaire et de celui de la Terre. NEWTON émit donc l'hypothèse que la force responsable variait avec le carré de la distance. Mais comme les données observationnelles dont il disposait à l'époque n'étaient pas assez sûres, il ne publia pas ses résultats. Ce n'est que vingt ans plus tard, sous la pression d'Edmund HALLEY, qu'il les rendit publics dans son ouvrage monumental: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Pour déterminer de quelle façon la force d'attraction diminue avec la distance, NEWTON se servit de la troisième loi de KEPLER, partant de l'hypothèse que les forces d'attraction exercées par le Soleil sur les planètes étaient de même nature que celle que la Terre exerçait sur la Lune.

Considérons une planète de masse m qui se déplace autour du Soleil avec une période T sur une orbite circulaire de rayon r (l'excentricité des orbites planétaires est très faible, ce qui veut dire que les axes des ellipses peuvent être considérés comme des rayons: $a \approx r$). La force qui maintient la planète sur sa trajectoire peut donc s'exprimer par:

$$F = \frac{mV^2}{r} = mr\omega^2 = mr(2\pi f)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

Afin d'éliminer la période T , NEWTON l'exprime à partir de la troisième loi de KEPLER (la longueur du demi grand axe a est remplacé par le rayon r): $T^2 = r^3/k$, ce qui donne, pour la force exercée sur la planète:

$$F = 4\pi^2 k \frac{m}{r^2}$$

Le facteur $4\pi^2 k$ est indépendant de la planète considérée; il ne dépend que des propriétés du Soleil et mesure en quelque sorte sa puissance comme source d'attraction. D'autre part, NEWTON supposa que cette attraction était universelle, ce qui l'amena à formuler l'hypothèse la plus simple possible, à savoir que ce facteur était proportionnel à la masse M du corps attracteur, une conséquence de sa loi d'action et de réaction qui, en fait, exprimait la conservation de la quantité de mouvement lors de cette interaction:

$$4\pi^2 k = GM$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la

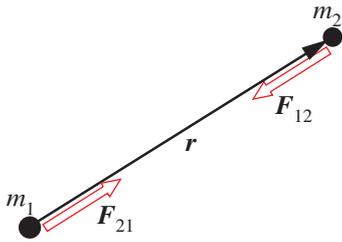


FIGURE 13.75 Loi de la gravitation universelle.

Loi de la gravitation universelle (fig. 13.75): deux masses ponctuelles m_1 et m_2 s'attirent mutuellement avec une force de module proportionnel à chacune des masses et inversement proportionnel au carré de la distance r qui les sépare. L'expression vectorielle de cette interaction est:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{13.81}$$

La constante de proportionnalité G est appelée constante de gravitation. Elle doit être déterminée par l'expérience.

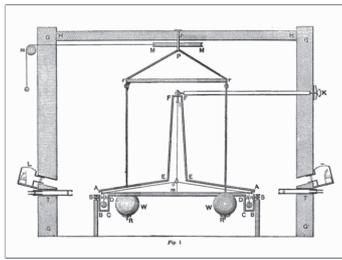


FIGURE 13.76 Balance de CAVENDISH (figure de la publication originale dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*).

La première détermination expérimentale de la constante de gravitation fut réalisée en 1798 par Henry CAVENDISH (1731-1810). Son but était de « peser la Terre », ce qui sera expliqué dans l'exemple 13.15. Il le fit au moyen d'une balance de torsion (fig. 13.76). La valeur actuelle est:

$$G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-1} \tag{13.82}$$

Ajoutons que cette détermination de la constante de gravitation n'est pas l'unique contribution de CAVENDISH. En consultant ses notes, on a réalisé qu'il avait, entre autres, découvert la loi d'OHM en 1773, alors qu'OHM ne publia ses résultats qu'en 1827.

13.10.2 Intensité du champ et potentiel gravitationnel

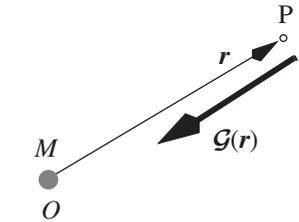


FIGURE 13.77 L'intensité du champ gravitationnel d'une masse centrée en O dépend de l'endroit où on la mesure. Le vecteur d'intensité est dirigé vers la masse qui engendre le champ.

La formulation newtonienne de l'interaction gravitationnelle est un modèle d'action à distance (qui ne satisfait pas NEWTON, comme nous l'avons mentionné en tête de chapitre). Ce modèle a été remplacé par celui du champ gravitationnel. Son intensité \mathcal{G} est définie de la même manière que dans le cas électrostatique, à savoir par le quotient de la force subie par une masse témoin et de cette masse témoin, ce qui donne, pour le champ engendré par une masse ponctuelle M située à l'origine, en un point P repéré par le vecteur \mathbf{r} (fig. 13.77):

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{13.83}$$

Le principe de superposition est également applicable au champ gravitationnel, les intensités des champs engendrés par plusieurs masses s'additionnent vectoriellement.

Au niveau de la surface du globe terrestre, l'intensité du champ gravitationnel est celle du champ de pesanteur, à savoir \mathbf{g} .

Comme c'est le cas pour le champ électrostatique et le champ magnétostatique, l'intégrale $\int_A^B \mathcal{G} \cdot d\mathbf{r}$ est aussi indépendante du chemin d'intégration. Nous pouvons donc définir un *potentiel gravitationnel* que l'on désigne par le symbole V :

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{13.84}$$

ce qui permet d'obtenir l'intensité du champ par évaluation du gradient:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [V(\mathbf{r})] \tag{13.85}$$

Dans le cas d'une masse sphérique ou ponctuelle, ce potentiel est donné par:

$$V(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} \quad (13.86)$$

De manière analogue à ce que nous avons montré pour le potentiel électrique, il est possible de donner une représentation tridimensionnelle du potentiel gravitationnel. Le «paysage» engendré sera, pour une collection de masses sphériques en interaction gravitationnelle, une plaine percée de cuvettes, de puits plus ou moins profonds et plus ou moins ouverts en fonction de la masse de l'objet sphérique qui l'engendre et du rayon de cet objet. La figure 13.78 donne une idée de l'aspect de ce «paysage» pour le système Terre-Lune (l'importance du puits engendré par la Lune est fortement exagérée et la distance n'est pas à l'échelle).

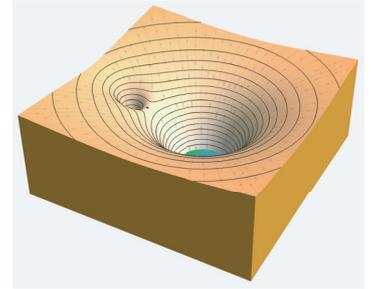


FIGURE 13.78 Puits de potentiel Terre-Lune. Les dimensions relatives sont fausses : le puits de la Terre est plus profond, celui de la Lune l'est beaucoup moins, et la distance Terre-Lune est fortement raccourcie. (Figure: MikeRun (CC)).

13.10.3 Tensions et densité d'énergie dans le champ gravitationnel

Pour évaluer les tensions régnant dans un champ gravitationnel, nous envisageons le champ gravitationnel de deux plaques parallèles de masse m , situation qui correspond à celle du champ électrique engendré par deux plaques portant des charges de même signe, cas que nous avons traité à la section 13.5.2, figure 13.39. Les lignes de champ peuvent être obtenues en tant que superposition des champs de plaques infiniment étendues. L'espace entre les plaques est quasi libre de champ; il n'y a donc aucun flux de quantité de mouvement dans cette région. Sachant que les plaques ont tendance à se rapprocher l'une de l'autre et que le champ est essentiellement localisé à l'extérieur de celles-ci (figure 13.79), nous devons conclure que le rapprochement des plaques est dû à une pression exercée par le champ depuis l'extérieur des plaques, ce qui doit être également le cas pour le champ à l'extérieur des plaques.

Nous concluons donc :

Un champ gravitationnel est en état de compression dans la direction des lignes de champ et de traction perpendiculairement à celles-ci.

La valeur de la pression σ_x qui règne dans le champ gravitationnel peut être calculée de la même manière que dans le cas électrique. On trouve (le sens de la force a changé, d'où le signe positif) :

$$\sigma_x = \frac{1}{8\pi G} \mathcal{G}^2$$

Vu que l'espace entre les masses est libre (ou quasi libre) de champ, on doit conclure qu'il est correct de dire que le champ gravitationnel pousse les objets l'un vers l'autre (ce n'est pas une attraction, mais c'est perçu comme tel).

Par une technique semblable à celle que nous avons utilisée à la section 13.5.2, nous pouvons montrer que le champ gravitationnel est en état de tension de traction perpendiculairement aux lignes de champ. Les valeurs de ces tensions sont données sans démonstration

$$\sigma_y = -\frac{1}{8\pi G} \mathcal{G}^2, \quad \sigma_z = \frac{1}{8\pi G} \mathcal{G}^2$$

De manière analogue, nous trouvons pour l'énergie accumulée dans le champ gravitationnel lors de la séparation de deux plaques de matière :

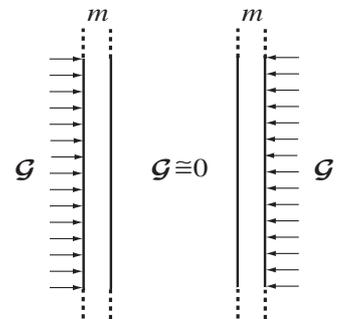


FIGURE 13.79 Tensions dans le champ gravitationnel : il règne une pression dans le sens des lignes de champ.

$$E = \frac{1}{8\pi G} \mathcal{G}^2 \cdot Ad$$

Cette accumulation d'énergie ne s'accompagne pas, comme dans le cas électrique, d'une création d'un champ mais, au contraire, de l'annihilation du champ entre les plaques. Nous en tenons compte en disant que la densité d'énergie dans le champ gravitationnel est négative. La densité d'énergie dans un champ gravitationnel est :

$$\rho_{E, \text{grav}} = -\frac{1}{8\pi G} \mathcal{G}^2$$

Une autre manière d'envisager cette densité d'énergie négative est de dire qu'il faut investir de l'énergie pour libérer du champ gravitationnel une certaine région de l'espace .

EXEMPLE 13.15. Peser la Terre.

Lors de son expérience avec la balance de torsion, l'objectif de CAVENDISH était de déterminer la densité moyenne de la Terre, ce qui revient à peser la Terre. Justifiez cette affirmation et déterminez la masse de la Terre.

SOLUTION: La force de pesanteur est le nom que l'on donne à la force de gravitation au voisinage du sol. Si m est la masse d'un corps témoin, M la masse de la Terre et R son rayon, à la surface de notre planète, nous avons :

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

d'où nous obtenons la masse de la Terre :

$$M = \frac{gR^2}{G} = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

En fait, lors de son expérience, CAVENDISH a déterminé la valeur de la constante de gravitation G qui était nécessaire pour effectuer les calculs ci-dessus. Il n'a jamais publié la valeur qu'il avait obtenue, vu que ce n'était qu'une constante intermédiaire dans ses calculs. ■

Résumé du chapitre

Un champ physique est un système susceptible d'accumuler et de transporter certaines grandeurs extensives, telles que quantité de mouvement, moment cinétique, entropie et énergie. En dernière analyse, tous les phénomènes physiques sont la manifestation de la présence de champs, et la physique tend vers une unification des interactions dans laquelle ce concept joue un rôle fondamental. La modélisation des champs physiques se fait au moyen de champs mathématiques.

Un champ physique, qui occupe tout ou partie de l'espace, a une structure qui peut être visualisée au moyen de lignes de champ indiquant dans quelle direction et dans quel sens s'exercerait la force sur un objet avec lequel il interagit. On peut également utiliser des surfaces orthogonales aux lignes de champ; ce sont des surfaces équipotentielles.

Lignes de champ et surfaces orthogonales sont les représentations graphiques des champs mathématiques associés aux champs physiques.

La description mathématique d'un champ physique se fait au moyen de son intensité définie en tant que quotient de la force subie par une charge ou masse témoin et de la valeur de cette charge ou masse témoin. L'intensité est un vecteur qui est tangent aux lignes de champ. Le principe de superposition énonce que lorsque plusieurs champs coexistent au même endroit, leurs intensités s'additionnent vectoriellement.

Les charges électriques sont les sources du champ électrostatique. Une charge ponctuelle (ou sphérique) Q engendre un champ d'intensité: $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = 1 / (4\pi\epsilon_0) Q / r^2 \mathbf{u}_r$, où \mathbf{u}_r est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de \mathbf{r} . Placée dans un champ d'intensité $\mathcal{E}(\mathbf{r})$, une charge Q subit une force $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q \cdot \mathcal{E}(\mathbf{r})$.

Le flux ψ d'un champ vectoriel «compte» le nombre de lignes de champ qui traversent une surface S . On l'obtient par intégration des flux élémentaires à travers la surface considérée: $\psi_\epsilon = \int_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A}$ où $d\mathbf{A}$ est l'élément infinitésimal orienté de surface. Pour le champ électrostatique, le flux à travers une surface fermée vaut: $\oint_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = Q / \epsilon_0$. Cette relation est la version intégrale du théorème de GAUSS qui énonce que le champ électrostatique est un champ de sources dont les sources sont les charges électriques. La version locale du théorème de GAUSS est: $\text{div } \mathcal{E} = \rho / \epsilon_0$; elle relie l'intensité locale du champ à la densité de la charge à cet endroit.

On associe au champ électrostatique $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ un potentiel scalaire $\varphi(\mathbf{r})$ défini par l'intégrale curviligne $\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{r}$. Il est usuel de poser: $\varphi(\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty) = 0$. Les potentiels obéissent également au principe de superposition. L'intensité du champ électrique dérive du potentiel par formation du gradient: $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi(\mathbf{r})]$. Les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ. Il est possible de visualiser l'évolution spatiale du potentiel au moyen de puits et collines de potentiel.

L'intégrale curviligne intervenant dans la définition du potentiel est appelée circulation Λ du champ électrostatique. La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée s'annule: $\Lambda_\epsilon = \oint \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0$, ce qui implique que la valeur de la circulation entre deux points ne dépend que de l'intensité du champ en ces points et pas du chemin suivi entre ces deux points.

En tant que système physique, le champ électrostatique contient de l'énergie dont la densité est donnée par: $\rho_{E,\epsilon 1} = 1/2 \cdot \epsilon_0 \mathcal{E}^2$. Il est le siège de flux de quantité de mouvement qui engendrent l'apparition de contraintes en traction dans la direction des lignes de champ et en compression perpendiculairement à celles-ci. Ces contraintes ont toutes une valeur absolue égale à celle de la densité d'énergie.

Lorsque l'on plonge un morceau de matière dans un champ électrique, on observe un phénomène de polarisation due à l'orientation de dipôles électriques moléculaires induits ou permanents. Cette polarisation se manifeste par l'apparition de charges superficielles qui font que le morceau de matière devient un dipôle macroscopique auquel on associe le vecteur de polarisation \mathcal{P} dont le module est égal à la densité de charge superficielle σ_{pol} . Dans le cas statique, \mathcal{P} est proportionnel à \mathcal{E} , donc $\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}$, où χ est la susceptibilité électrique du diélectrique. À l'intérieur du diélectrique, l'intensité du champ est réduite d'un facteur $\epsilon_r = 1 + \chi$; la constante ϵ_r est la permittivité relative ou constante diélectrique. Il est usuel d'introduire un nouveau champ qui englobe la polarisation, le déplacement électrique $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}$. La densité d'énergie devient $\rho_{E,\epsilon 1} = 1/2 \cdot \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{E}^2 = 1/2 \cdot \mathcal{E} \mathcal{D}$.

Il existe deux manières d'envisager le champ magnétostatique, les approches coulombienne et ampérienne. COULOMB envisage le champ magnétique comme étant dû à la présence de «charges magnétiques» qui sont en fait des dipôles magnétiques insécables. Cette vision se prête bien à la description du champ magnétique engendré par des

aimants. AMPÈRE attribue les phénomènes magnétiques à des boucles de courant microscopiques à l'intérieur des objets aimantés.

Les objets aimantés ont deux pôles. COULOMB admet que le pôle nord est l'extrémité qui porte des charges magnétiques positives q_m , le pôle sud des charges négatives. Un aimant est donc un dipôle magnétique. COULOMB établit une loi de force qui peut s'énoncer par $F(r) = \mu_0 q_m \mathcal{H}(r)$. Cette relation introduit l'intensité du champ magnétique \mathcal{H} et la constante μ_0 appelée perméabilité magnétique du vide. Les charges aux extrémités de l'aimant engendrent le champ extérieur \mathcal{H} et, à l'intérieur, son aimantation \mathcal{M} . Les lignes des deux champs émanent des charges positives et aboutissent sur les charges négatives. Appliqué à ces deux champs, le théorème de GAUSS montre que $\text{div} \mathcal{H} = -\text{div} \mathcal{M}$, ce qui implique que les sources de \mathcal{H} sont les puits de \mathcal{M} , et que la divergence de leur somme est nulle. Ce constat justifie l'introduction d'une nouvelle mesure du champ magnétique, l'induction magnétique ou densité de flux magnétique $\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M})$. Vu que la divergence de \mathcal{B} est nulle, les lignes de ce champ sont fermées sur elles-mêmes.

La description de l'interaction entre le champ magnétique et la matière procède de manière analogue au traitement en électrostatique. Ainsi, $\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}$, où χ_m est la susceptibilité magnétique. Il s'ensuit que $\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathcal{H} = \mu_0 \mu_r \mathcal{H}$, où μ_r est la perméabilité relative du matériau.

Toutefois, en présence d'un champ magnétique extérieur, suivant les propriétés du matériau, on peut observer des comportements différents qui peuvent être distingués au moyen des valeurs de la susceptibilité magnétique. Parmi les comportements observés, trois sont dominants. Le diamagnétisme, propre à tous les matériaux, est caractérisé par une susceptibilité négative faible, pas inférieure à -10^{-5} . Le paramagnétisme est le fait de matériaux dont les atomes ont un moment magnétique intrinsèque; la susceptibilité est positive, dans une plage allant de 10^{-6} à 10^{-3} . Le ferromagnétisme est un paramagnétisme collectif: les moments magnétiques s'orientent parallèlement de manière spontanée. La susceptibilité prend des valeurs positives importantes, entre 50 et 10 000, voire au-delà. En outre, les matériaux ferromagnétiques sont caractérisés par un effet mémoire, l'hystérésis.

La densité d'énergie du champ magnétique est, comme pour le champ électrique, proportionnelle au carré de son intensité: $\rho_{E,m} = 1/2 \cdot \mu_0 \mu_r \mathcal{H}^2 = 1/2 \cdot \mathcal{H} \mathcal{B}$. De même, le champ magnétique est soumis à des contraintes en traction dans le sens des lignes de champ et en compression perpendiculairement à celles-ci. L'intensité de ces contraintes a une valeur absolue égale à celle de la densité d'énergie.

Dans l'approche ampérienne, ce sont les courants électriques qui sont à l'origine des champs magnétiques. L'élément infinitésimal d'intensité du champ d'induction $d\mathcal{B}$ engendré par un courant d'intensité I est: $d\mathcal{B}(r) = \mu_0 I / (4\pi) \cdot (dl \times u_r) / r^2$, où dl est un segment infinitésimal du conducteur et u_r est le vecteur unitaire dans la direction de r . Il en découle que le module de l'intensité du champ engendré par un conducteur rectiligne de longueur infinie est: $\mathcal{B}(r) = \mu_0 I / (2\pi r)$, constante sur des cercles centrés sur le conducteur. Le pendant du théorème de GAUSS est le théorème d'AMPÈRE qui évalue la circulation du champ magnétique sur une courbe fermée: $\Lambda_{\mathcal{B}} = \oint_C \mathcal{B} \cdot dl = \mu_0 \int_S j \cdot dA$. Si la courbe enserme plusieurs conducteurs, la circulation est proportionnelle à la somme ces intensités enlacées: $\oint_C \mathcal{B} \cdot dl = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$. La version locale du théorème d'AMPÈRE est: $\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 j$. Comme les lignes du champ sont fermées sur elles-mêmes, son flux est nul: $\oint_S \mathcal{B} \cdot dA = 0$ ou, en version locale: $\text{div } \mathcal{B} = 0$.

Les courants et les charges en mouvement interagissent avec le champ magnétique. Un courant d'intensité I subit une force, la force de LAPLACE, dont l'élément infinitésimal est $dF = I (dl \times \mathcal{B})$, où dl est un segment infinitésimal du conducteur. Une charge Q se déplaçant à la vitesse v est soumise à une force dite de LORENTZ: $F = Q (v \times \mathcal{B})$.

Le champ gravitationnel est engendré par les masses et il interagit avec elles. Comme dans les cas précédents, on peut énoncer une loi de force: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Gm\mathcal{G}(\mathbf{r})$, où G est la constante de gravitation. Ce champ a des propriétés analogues au champ électrostatique, à la différence près que les masses sont uniquement positives. On peut lui associer un potentiel $V(\mathbf{r})$ tel que: $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{G} \cdot d\mathbf{r}$, avec une intégrale indépendante du chemin d'intégration, ce qui implique que l'intensité du champ peut être obtenue par évaluation du gradient du potentiel: $\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} [V(\mathbf{r})]$. La densité d'énergie est donnée par $\rho_{E,\text{grav}} = -1/(8\pi G)\mathcal{G}^2$. Le champ gravitationnel est en état de compression dans la direction des lignes de champ et en état de tension de traction perpendiculairement à celles-ci. L'intensité de ces contraintes a une valeur absolue égale à celle de la densité d'énergie.

Problèmes⁹

- Deux plans infinis se coupent à angle droit. Ils portent des charges électriques de densités respectives $+\sigma$ et $-\sigma$. Déterminez l'intensité et la direction du champ électrique en tout point et esquissez les lignes de champ.
- Un anneau de rayon R et de section négligeable porte une charge $+Q$ distribuée uniformément à sa surface. (a) Calculez l'intensité du champ électrique et la valeur du potentiel au centre de l'anneau. (b) Une charge $-Q$ est contrainte de se mouvoir sur l'axe de l'anneau. Montrez que cette charge effectuera un mouvement harmonique pour de petits déplacements perpendiculaires au plan de l'anneau.
- On place une charge Q au centre d'une coque sphérique conductrice de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , ainsi qu'une charge de densité σ répartie uniformément sur la surface externe. Déterminez l'intensité du champ électrique dans les différentes régions de la sphère ainsi que la valeur de la charge sur la face interne.
- Une sphère métallique de rayon R_1 est entourée d'une sphère métallique concentrique de rayon R_2 . L'espace entre les deux sphères est rempli d'un matériau dont la conductivité électrique σ varie proportionnellement à l'intensité du champ électrique suivant la relation $\sigma = kE$, où k est une constante. On maintient une différence de potentiel U entre les deux sphères. Que vaut l'intensité du courant entre les sphères?
- Une bulle de savon isolée de 1 cm de rayon est à un potentiel de 100 V. Si son rayon se réduit à 1 mm, que vaut la variation de l'énergie électrostatique?
- En chaque sommet d'un carré de 10 cm de côté se trouve une charge ponctuelle de 100 pC. Trois sont positives, la quatrième négative (fig. 13.80). (a) Calculez la valeur du potentiel au centre M du carré, le potentiel du niveau de référence situé à l'infini étant nul. (b) Répétez le même calcul pour un point P situé à mi-distance entre le point M et la charge négative. (c) Pourquoi un ion de sodium, abandonné en M sans vitesse initiale, suivra-t-il une trajectoire le long de la droite MP? (d) Quel sera en P le module de la vitesse acquise par ce ion?

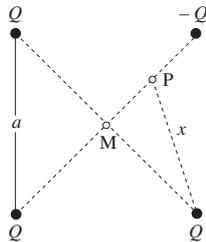


FIGURE 13.80
Problème 6

- Une sphère métallique de rayon R porte une charge Q . (a) Que vaut sa capacité? (b) Comment évolue la densité d'énergie en fonction de la distance r par rapport au centre de la
- Les problèmes 1 à 5 et 7 à 11 sont tirés de l'ouvrage *Problems and Solutions on Electromagnetism*, edited by Lim Yung-kuo, © 2005 World Scientific (avec l'autorisation de World Scientific).

- Que vaut l'énergie totale du champ électrique?
 - Que vaut l'énergie nécessaire pour charger la sphère en y amenant des charges infinitésimales depuis l'infini?
 - On établit une différence de potentiel U entre deux sphères concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 . Comment doit-on choisir le rayon R_1 de la sphère intérieure afin que le champ électrique proche de sa surface ait une intensité minimum?
- Le conducteur intérieur d'un câble coaxial rempli d'air a un diamètre de 0.5 cm et son conducteur extérieur a un diamètre de 1.5 cm. Si le conducteur intérieur est à un potentiel de +8000 V par rapport au conducteur extérieur mis à terre, (a) que vaut la charge par unité de longueur du conducteur intérieur, (b) que vaut l'intensité du champ électrique à $r = 1$ cm?
- L'espace entre les deux conducteurs d'un câble coaxial très long est rempli d'un matériau de constante diélectrique ϵ . Les rayons respectifs des conducteurs sont R_1 et R_2 . (a) Que vaut la charge par unité de longueur sur les conducteurs lorsque la différence de potentiel entre eux est égale à U , le conducteur externe au plus haut potentiel? (b) Quelle est l'intensité du champ électrique entre les deux conducteurs?
- Un condensateur à plaques parallèles séparées par une distance d est rempli par deux diélectriques différents 1 et 2. Ces diélectriques ont des constantes diélectriques et des conductivités respectives ϵ_1, σ_1 et ϵ_2, σ_2 . Les épaisseurs des couches de diélectriques sont respectivement d_1 et d_2 . On établit une différence de potentiel U entre les bornes du condensateur. On peut négliger les effets de bord. (a) Que vaut l'intensité du champ électrique dans chacun des deux matériaux? (b) Que vaut l'intensité du courant circulant à travers le condensateur? (c) Que vaut la densité de charge totale à l'interface entre les deux matériaux? (d) Que vaut la densité de charge libre à l'interface entre les deux matériaux?
- Un long câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique interne plein de rayon R_1 et d'un cylindre conducteur externe mince de rayon R_2 . À l'une des extrémités, les deux conducteurs sont connectés par une résistance et à l'autre extrémité par une batterie. On mesure une différence de potentiel U entre les deux conducteurs et un courant d'intensité I . La résistance propre des conducteurs est négligeable. (a) Déterminez l'intensité du champ électrique et du champ d'induction magnétique entre les deux conducteurs, dans la région $R_1 < r < R_2$. (b) Déterminez la densité par unité de longueur de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique dans l'espace entre les deux conducteurs. (c) En admettant que l'énergie magnétique dans le conducteur interne est négligeable, déterminez l'inductance et la capacité par unité de longueur.
- À côté du solénoïde, une autre manière d'obtenir un champ magnétique quasi uniforme utilise un dispositif constitué d'une paire de bobines coaxiales de même rayon R , séparées par une distance d (fig. 13.81). Ce dispositif est appelé bobines de HELMHOLTZ. L'intensité du champ engendré sur l'axe par une bobine comportant n spires par unité de longueur est donnée par la relation (E 13.6) que l'on peut écrire sous la forme: $B(z) = \mu_0 n I R^2 / [2(R^2 + z^2)^{3/2}]$, où z mesure la distance à partir du centre de la spire. Le courant circule dans le même sens dans les deux bobines, leurs champs ont le même sens.

Pour examiner la quasi-uniformité du champ autour de l'axe, on tire profit du fait que, si en un point la dérivée seconde d'une fonction s'annule sans changer de signe, cela signifie que la fonction varie très peu au voisinage de ce point, son graphique est plat. Considérez de petites variations δz de la position autour du point O , c'est-à-dire aux abscisses respectives $d/2 - \delta z$ et $d/2 + \delta z$ et montrez que si l'on exige que la dérivée seconde par rapport à δz de ces deux contributions s'annule après le passage la limite $\delta z \rightarrow 0$, on obtient la condition qui assure la meilleure uniformité possible, à savoir $d = R$.

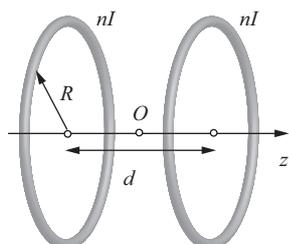


FIGURE 13.81
Problème 12

13. Jupiter met douze ans pour effectuer une révolution autour du Soleil. La lune Ganymède orbite en 7.155 jours autour de Jupiter. (a) En admettant que la trajectoire de Jupiter est circulaire, déterminez le rayon de son orbite. La distance de la Terre au Soleil est de $150 \cdot 10^6$ km. (b) Depuis la Terre, la distance maximale entre Ganymède et le centre de Jupiter est vue sous un angle de 5.76 minutes d'arc. Déterminez le rayon de l'orbite de Ganymède. (c) À partir des données de Ganymède, déterminez la masse de Jupiter.

CHAPITRE 14

CHAMP ET ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Dans le chapitre 13, nous avons étudié les champs statiques. Ce chapitre est consacré à l'étude des champs variables dans le temps et aux phénomènes qui accompagnent ces variations.

14.1 OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Des expériences semblables à celles que nous allons évoquer furent réalisées autour de 1830 simultanément par Michael FARADAY et Joseph HENRY.

14.1.1 Effet des variations du champ magnétique sur un circuit

Nous introduisons un aimant dans une bobine ; un galvanomètre très sensible ou un oscilloscope couplé aux bornes de la bobine permet d'enregistrer une tension dite *tension induite* (fig. 14.1).

Lors du retrait de l'aimant, nous observons le même phénomène, à la différence près que la tension a changé de polarité. D'autre part, nous notons que l'amplitude de la tension dépend de la vitesse relative du mouvement de l'aimant et de la bobine de telle manière que l'aire de la surface délimitée par la courbe tension-temps est la même lors de l'introduction que lors du retrait (fig. 14.2).

Nous obtenons le même résultat si nous substituons à l'aimant une bobine reliée à une alimentation (fig. 14.3) ; à l'introduction de l'aimant correspond la fermeture du circuit, à son retrait l'ouverture du circuit, c'est-à-dire respectivement l'augmentation et la diminution de champ magnétique.

Interprétation. Si, dans chacune des expériences précédentes, le voltmètre a enregistré une tension, c'est qu'il y avait un *courant induit* qui circulait dans le circuit. Or, nous savons qu'un champ électrique est nécessaire pour mettre en mouvement les charges d'un conducteur. Vu que les conducteurs considérés étaient des boucles, nous devons conclure que les lignes de ce champ électrique étaient fermées sur elles-mêmes, ce qui sera confirmé par l'expérience de la section 14.1.3. Comme les phénomènes enregistrés ne se produisaient pas lorsque le champ était stationnaire, nous pouvons conclure :

Les variations du champ d'induction magnétique créent un champ électrique tourbillonnaire. Dans un circuit fermé, ce champ électrique induit est à l'origine d'un courant induit.

14.1.2 Mouvement d'une spire dans un champ magnétique

Nous formons une spire conductrice que nous relierons à un galvanomètre très sensible ou à un amplificateur de tension. Nous introduisons cette spire entre les pôles d'un

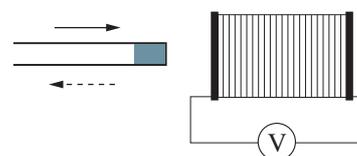


FIGURE 14.1 Phénomène d'induction : lorsque l'on introduit un aimant dans la bobine ou qu'on le retire, le voltmètre enregistre une tension (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

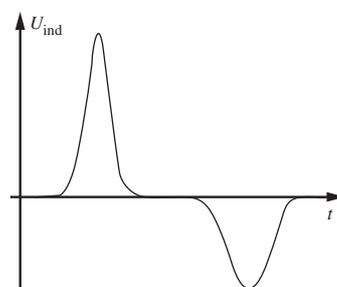


FIGURE 14.2 La tension induite dépend du sens et de la vitesse du mouvement de l'aimant.

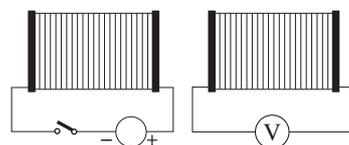


FIGURE 14.3 La fermeture du circuit de la bobine de gauche induit une tension correspondant à l'introduction, son ouverture au retrait de l'aimant (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

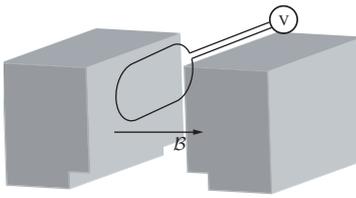


FIGURE 14.4 Lorsque l'on introduit la spire avec sa surface perpendiculaire aux lignes de champ, elle est le siège d'une tension et d'un courant induits. Lors du retrait, le sens est inversé.

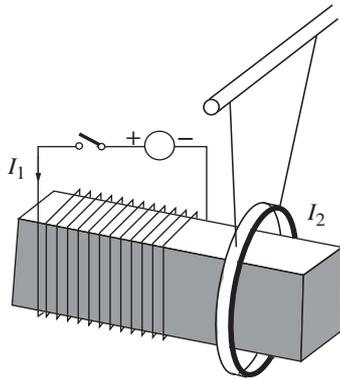


FIGURE 14.5 Détermination du sens du courant induit: lors de la fermeture du circuit, l'anneau est expulsé vers l'extérieur, lors de l'ouverture, il est attiré (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

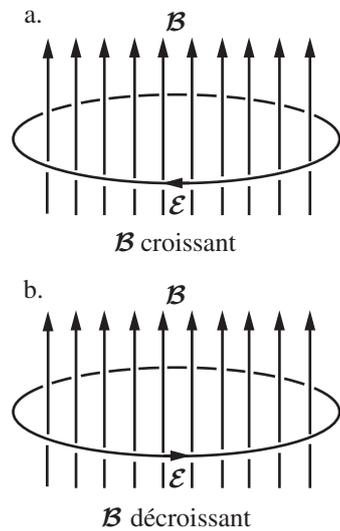


FIGURE 14.6 Le champ électrique tourbillonnaire a le même sens que celui qu'aurait un courant induit dans un boucle conductrice; son sens est donné par la règle de la main gauche.

aimant permanent en veillant à ce que la surface de la spire soit perpendiculaire aux lignes de champ (fig. 14.4). Nous enregistrons une tension et un courant induits dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse du mouvement de la spire.

Lors du retrait de la spire, nous assistons au même phénomène, mais avec une inversion de la tension induite. D'autre part, l'aire de la surface délimitée par la courbe tension-temps est la même que lors de l'introduction de la spire.

Si nous répétons ces deux expériences avec la surface de la spire parallèle aux lignes du champ magnétique, nous n'enregistrons aucun effet. De même, nous n'enregistrons aucun effet si nous appliquons la spire sur l'une des faces de l'aimant et la déplaçons sur cette face en veillant à ce qu'elle ne dépasse les bords.

En revanche, nous enregistrons une tension alternative si nous faisons tourner la spire autour d'un de ses diamètres à l'intérieur du champ magnétique stationnaire.

Interprétation. Nous constatons que nous n'enregistrons un effet que lorsque le flux du champ d'induction magnétique qui traverse la spire ou la bobine varie dans le temps. En combinant ce résultat avec celui de la section 14.1.1, nous pouvons donc conclure:

Toute variation du flux d'induction magnétique à travers une courbe fermée est à l'origine d'une tension induite. Si la courbe fermée est un conducteur, celui-ci est le siège d'un courant induit. La variation du flux peut être soit la conséquence d'une variation du champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} (qui entraîne la création d'un champ électrique tourbillonnaire d'intensité \mathcal{E}), soit celle de la déformation du circuit ou de son déplacement relatif par rapport à un champ d'induction magnétique, soit les deux.

14.1.3 Sens du courant et du champ électrique induits

Un anneau d'aluminium est suspendu de telle sorte qu'il est traversé par le noyau de fer d'un électroaimant (fig. 14.5). L'électroaimant est alimenté et un interrupteur est placé dans le circuit.

Lors de la fermeture du circuit, l'anneau est brusquement repoussé vers l'extérieur et regagne lentement sa position d'équilibre sans la dépasser. Lors de l'ouverture du circuit, l'anneau est attiré vers l'intérieur, puis oscille autour de sa position d'équilibre avant de s'immobiliser.

Interprétation. Désignons par I_1 l'intensité du courant circulant dans le circuit de l'électroaimant et par I_2 celle du courant induit qui s'établit dans l'anneau d'aluminium. Lors de la fermeture du circuit, la croissance du courant entraîne une croissance du champ d'induction magnétique et du flux magnétique à travers la surface de l'anneau. Comme l'anneau est repoussé, nous devons conclure, en vertu de ce que nous avons montré dans l'exemple 13.12, que le courant induit circule dans le sens opposé à celui du circuit. Lors de l'ouverture du circuit qui provoque une décroissance du flux magnétique, le courant induit circule dans le même sens que celui du circuit.

Comme le courant électrique circule toujours en suivant le sens des lignes du champ électrique, cette expérience nous permet également de déterminer le sens des lignes du *champ électrique tourbillonnaire* engendré par les variations temporelles du champ d'induction magnétique (fig. 14.6). En conclusion:

Dans un circuit fermé, le courant induit par une variation du flux d'induction magnétique circule toujours dans un sens donné par la règle de la main gauche : si le pouce de la main gauche pointe dans le sens de la variation du flux d'induction magnétique, les doigts courbés indiquent le sens de circulation du courant. Le sens du champ électrique tourbillonnaire, qui est présent même en l'absence d'un conducteur, est identique au sens du courant induit.

1. Quels sont les phénomènes qui provoquent l'apparition d'une tension induite ?
2. Quelles sont les différentes manifestations du phénomène d'induction ?
3. Quel est le sens de circulation du courant induit et du champ électrique tourbillonnaire ?

Q

1. Toute variation du flux d'induction magnétique peut être à l'origine de l'apparition d'une tension induite. Cette variation du flux peut être produite de différentes manières : par une variation dans le temps de l'intensité du champ d'induction magnétique, par variation de l'aire ou de l'orientation d'une boucle conductrice, ou les deux à la fois.
2. Lors de la variation dans le temps de l'intensité du champ d'induction magnétique, il y a apparition d'un champ électrique tourbillonnaire. Lors de la variation du flux par la géométrie ou le mouvement, il y a apparition d'une tension et d'un courant induits dans une boucle fermée.
3. Le sens de circulation du courant et du champ tourbillonnaire induits est donné par la règle de la main gauche.

R

14.2 LOI D'INDUCTION DE FARADAY-HENRY

Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert simultanément et étudié par FARADAY et HENRY, est une découverte qui a façonné notre environnement. Sans ce phénomène, toutes les machines fonctionneraient avec des moteurs à vapeur ou à explosion, et de nombreux gestes quotidiens (allumer la lumière, enclencher un appareil, regarder la télévision, téléphoner, surfer sur le Web, etc.) nous seraient inconnus ou en tout cas moins fréquents.

14.2.1 Énoncé de la loi au moyen de la tension

Une barrette métallique est posée sur un conducteur métallique en forme de cadre (fig. 14.7). Nous déplaçons la barrette à une vitesse constante de module v . La variation de la surface traversée par le champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} , perpendiculaire au plan du cadre, entraîne une variation de flux qui provoque l'apparition d'une tension et d'un courant induit dans le circuit. L'origine du courant

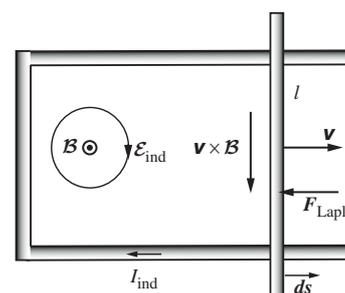


FIGURE 14.7 Le déplacement du conducteur mobile sur le cadre conducteur dont la surface est perpendiculaire aux lignes du champ magnétique provoque une variation du flux magnétique, d'où l'apparition d'une tension et d'un courant induits.

induit peut être expliquée par la force de LORENTZ qui s'exerce sur les charges libres de la barrette.

Le courant induit d'intensité I_{ind} est soumis, dans le champ d'induction magnétique, à la force de LAPLACE. Cette force est opposée au sens du déplacement, s'opposant ainsi à la variation du flux. La variation de l'énergie mécanique due au mouvement est égale à celle de l'énergie électrique. Si nous désignons par ds le déplacement élémentaire effectué durant l'intervalle dt , nous avons :

$$\begin{aligned} dE_{\text{méc}} &= dE_{\text{el}} = \mathcal{P}_{\text{el}} dt \\ -F \cdot ds &= U_{\text{ind}} I_{\text{ind}} dt \end{aligned}$$

Nous calculons la force de LAPLACE au moyen de l'équation (13.77) en tenant compte du fait que le conducteur mobile de longueur l et le champ d'induction magnétique sont perpendiculaires :

$$-I_{\text{ind}} \mathcal{B} l ds = U_{\text{ind}} I_{\text{ind}} dt$$

Le produit $\mathcal{B} l ds$ représente la variation du flux magnétique $d\phi_{\mathcal{B}}$ réalisée durant l'intervalle dt . Nous pouvons donc écrire :

$$-d\phi_{\mathcal{B}} = U_{\text{ind}} dt$$

La tension induite dans une boucle conductrice est égale en intensité à la vitesse de variation du flux magnétique qui la traverse :

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_{\mathcal{B}}}{dt} \tag{14.1}$$

Si, dans l'expérience de la figure 14.7, on introduit une alimentation dans le circuit, le courant circulant dans la barrette métallique est soumis à une force de LORENTZ qui le met en mouvement : le montage est devenu un moteur.

14.2.2 Énoncé de la loi au moyen des champs

La tension induite dans le circuit de la figure 14.7 peut être exprimée au moyen du champ électrique induit en tant qu'intégrale sur la courbe fermée déterminée par la barrette et le cadre sur lequel elle se déplace. Si nous désignons par \mathcal{C} cette courbe fermée, nous pouvons écrire :

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi_{\mathcal{B}}}{dt}$$

Si nous désignons par \mathcal{S} la surface traversée par le champ d'induction magnétique et par $d\mathbf{A}$ l'élément infinitésimal de surface, nous pouvons exprimer le flux en tant que produit scalaire du vecteur de champ et de ce vecteur. Si nous supprimons l'indice «ind» pour alléger l'écriture, nous obtenons la :

Forme intégrale de la loi d'induction:

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (14.2)$$

Dans le cas le plus fréquent où la variation temporelle du flux est due à celle du champ et non pas au mouvement de la surface S considérée, on peut permuter la dérivation et l'intégration:

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (14.3)$$

Un théorème d'analyse vectorielle, le théorème de Stokes¹, permet de transformer, dans le membre de gauche, l'intégration le long de la courbe fermée C en une intégration sur la surface S délimitée par cette courbe fermée:

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = - \int_S \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

Forme différentielle de la loi d'induction:

$$\text{rot } \mathcal{E} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (14.4)$$

Cette équation met en relation la vitesse de variation du champ d'induction magnétique et l'intensité du champ électrique engendré par cette variation au même endroit. Elle contient implicitement le résultat énoncé par l'équation (13.71), à savoir que la circulation du champ électrostatique est nulle.

La relation spatiale entre le champ d'induction et le champ électrique induit se présente comme deux anneaux fermés imbriqués l'un dans l'autre. Dans la figure 14.8, le sens du champ électrique correspond à une augmentation de l'intensité du champ d'induction magnétique.

EXEMPLE 14.1. Champs variables dans un solénoïde².

Un très long solénoïde de rayon R , portant n spires par unité de longueur, est alimenté par un courant variable $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. (a) Déterminez l'équation décrivant l'évolution temporelle de l'induction magnétique à l'intérieur du solénoïde. (b) Déterminez l'intensité du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde (admettez que le champ d'induction magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde). (c) Représentez graphiquement la dépendance de l'intensité du champ électrique à l'instant $t = 2\pi/\omega$. Quel est l'aspect des lignes du champ électrique?

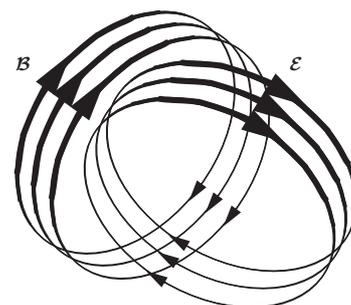


FIGURE 14.8 Lors du phénomène d'induction, le champ d'induction magnétique et le champ électrique induit forment une paire d'anneaux fermés imbriqués l'un dans l'autre. Le sens du champ électrique induit correspond ici à une augmentation de l'intensité du champ d'induction magnétique.

1. ARBENZ K., WOHLHAUSER A.: *Compléments d'analyse*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.
2. Les exemples 14.1, 14.2 et 14.4 sont tirés de l'ouvrage *Problems and Solutions on Electromagnetism*, edited by Lim Yung-kuo, © 2005 World Scientific (avec l'autorisation de World Scientific).

SOLUTION: (a) À l'intérieur du solénoïde, le champ d'induction magnétique \mathcal{B} est uniforme dans la direction axiale (section 13.8.2). Donc, si l'axe Oz coïncide avec l'axe du solénoïde, on a:

$$\mathcal{B}(z, t) = \mu_0 n I(t) = \mu_0 n I_0 \sin(\omega t)$$

(b) Nous tenons compte de la symétrie axiale de la configuration et utilisons la loi d'induction (14.3) pour déterminer l'intensité du champ électrique en fonction de la distance r par rapport à l'axe du solénoïde.

Pour $r < R$, on a:

$$\mathcal{E} \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\pi r^2 \cdot \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

ce qui débouche sur:

$$\mathcal{E}(r, t) = -\frac{\mu_0 r}{2} n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

Pour $r > R$, on a:

$$\mathcal{E} \cdot 2\pi r = -\pi R^2 \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\pi R^2 \cdot \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

ce qui débouche sur:

$$\mathcal{E}(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2}{2r} n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

(c) À l'instant $t = 2\pi/\omega$, $\cos(\omega t) = 1$. À partir de là, on peut dessiner la figure 14.9 qui montre la variation radiale du module de l'intensité du champ électrique. Les lignes du champ électrique sont des cercles concentriques perpendiculaires à l'axe du solénoïde.

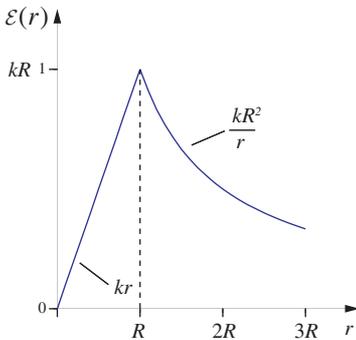


FIGURE 14.9 Évolution du module de l'intensité du champ électrique tourbillonnaire. $k = \mu_0 n I_0 \omega / 2$.

EXEMPLE 14.2. Tension induite dans une spire carrée.

Deux conducteurs parallèles, séparés par une distance d , transportent des courants égaux en intensité I , mais de sens opposés. L'intensité varie au taux dI/dt . Une spire conductrice carrée dont les côtés ont la longueur d se trouve dans le plan des deux conducteurs, à une distance d de l'un des deux conducteurs, comme le montre la figure 14.10. (a) Déterminez la valeur de la tension induite dans la spire carrée. (b) Dans quel sens le courant induit circule-t-il?

SOLUTION: (a) À partir de la loi d'AMPÈRE (13.65), nous obtenons l'intensité du champ d'induction magnétique engendré par chaque courant en fonction de la distance:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le flux d'induction engendré par le courant du conducteur 1 est:

$$\phi_1 = \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ce flux pénètre dans la page. Pour le conducteur 2, nous obtenons:

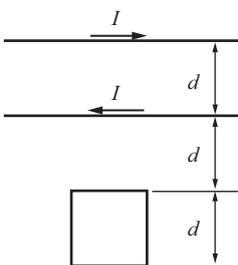


FIGURE 14.10 Configuration de l'exemple 14.2.

$$\phi_2 = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 Id}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Id}{2\pi} \ln(2)$$

Ce flux émerge de la page. Le flux total:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 Id}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

émerge de la page. La tension induite dans la spire carrée est:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{dI}{dt}$$

(b) En vertu de la loi de la main gauche, le courant induit circule dans le sens horaire, vu depuis le dessus de la page.



14.3 PHÉNOMÈNE DE SELF-INDUCTION

Si l'intensité du courant dans un circuit fermé varie, le champ magnétique qui lui est associé varie lui aussi. Il est donc plausible d'admettre que la variation du flux d'induction magnétique provoquera l'apparition d'une tension et d'un courant induits dans ce circuit. Une expérience permet de vérifier cette hypothèse.

Nous connectons en parallèle aux bornes d'une source deux lampes à incandescence. Dans le circuit de l'une des deux, nous montons en série une bobine dans laquelle nous introduisons un noyau de fer afin d'augmenter le champ d'induction magnétique et ses variations. Un interrupteur est placé en série avec la source (fig. 14.11).

Lorsque nous fermons l'interrupteur, la lampe A s'allume immédiatement, alors que la lampe B le fait avec un retard notable. Cela signifie que le courant dans la branche B n'atteint pas immédiatement sa valeur stationnaire. Lorsque nous ouvrons l'interrupteur, les deux lampes continuent à briller durant un certain temps, cela malgré le fait qu'il n'y ait plus de source dans leur circuit. Le courant ne tombe pas immédiatement à zéro.

On peut, en remplaçant la lampe B par une résistance de quelques dizaines d'ohms, visualiser les variations du courant en mesurant la tension sur cette résistance au moyen d'un oscilloscope (fig. 14.12).

Interprétation. L'expérience confirme l'hypothèse: lors de la croissance du courant, le champ d'induction magnétique et son flux croissent proportionnellement, provoquant l'apparition d'une tension induite. Le courant induit circule dans la bobine dans le sens opposé à celui qui s'établit, jusqu'à ce que ce dernier ait atteint sa valeur stationnaire. Lors de l'ouverture du circuit, la diminution du flux magnétique induit un courant qui circule dans le même sens que celui qui est en train de diminuer; ce courant continue à circuler durant un certain temps, malgré l'absence de source dans le circuit. L'énergie qui est nécessaire pour maintenir ce courant provient du champ magnétique de la bobine, comme nous l'avons montré à la section 13.7.6.

Nous devons nous baser sur une configuration pour laquelle nous savons calculer le flux magnétique. Nous baserons le développement suivant sur le cas du champ uniforme d'un solénoïde dont les N spires sont parcourues par un courant variable d'intensité $I(t)$. À partir de l'équation (13.76), nous pouvons calculer le flux:

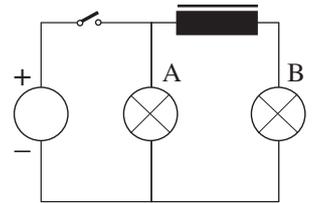


FIGURE 14.11 Lors de la fermeture de l'interrupteur, la lampe B s'allume avec un retard notable. Le courant met du temps pour s'établir dans la branche contenant la bobine avec un noyau de fer.

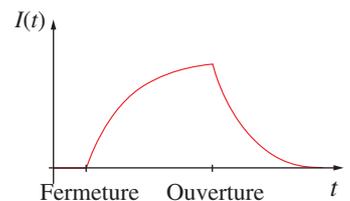


FIGURE 14.12 Évolution de l'intensité du courant dans la branche de la lampe B lors de la fermeture ou de l'ouverture de l'interrupteur dans l'expérience de la figure 14.11.

$$\phi(t) = \mathcal{B}(t) \cdot A = \mu_0 \frac{NI(t)}{l} A$$

Si le solénoïde contient un noyau de fer, l'expression doit être multipliée par la perméabilité relative μ_r du noyau. Appliquons la loi d'induction :

$$U_{\text{ind}}(t) = -N \frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 \frac{AN^2}{l} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Une variation de courant dans un circuit entraîne l'apparition d'une tension

$$U_{\text{ind}}(t) = -L \frac{dI}{dt} \tag{14.5}$$

qui s'oppose à la variation du courant. C'est le phénomène de self-induction. Le facteur de proportionnalité L est l'inductance du circuit.

L'inductance d'un solénoïde longueur l contenant un noyau de fer est égale à :

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{AN^2}{l} = A l n^2 \tag{14.6}$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur. Ce résultat justifie notre affirmation de la section 4.5.2. Comme ce sont les bobines qui sont responsables de la majeure partie de l'inductance d'un circuit, on les appelle souvent des *selfs*.

EXEMPLE 14.3. Mise en évidence de la tension induite due à une ouverture de circuit.

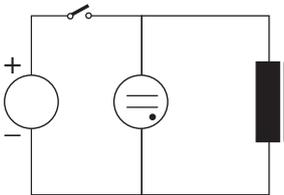


FIGURE 14.13 À-coup de courant de déclenchement: lorsque l'on ferme le circuit, la lampe à décharge ne s'allume pas, parce que la tension de l'alimentation est trop basse. En revanche, lors de l'ouverture du circuit, une des électrodes s'allume brièvement.

Dans le montage de la figure 14.13, la tension de la source ne peut pas dépasser quelques volts. On y branche en parallèle une bobine avec un noyau de fer et une lampe à décharge fonctionnant sur le réseau, qui ne s'allume donc que si la tension dépasse 100 à 150 V.

Lors de la fermeture de l'interrupteur, on n'observe aucune réaction. En revanche, lors de l'ouverture du circuit, une des électrodes s'allume brièvement.

Interprétation: Lors de l'ouverture du circuit, le taux de variation de l'intensité devient très grand et, si l'inductance est suffisante, la tension induite dépasse la tension d'allumage de la lampe. On parle d'à-coup de courant de déclenchement ou d'extra-tension de rupture. L'étincelle que l'on observe lorsque l'on arrache la prise du réseau d'un appareil en fonctionnement n'est autre qu'un arc électrique dû à la tension de self-induction. Si l'inductance est très grande, l'arc peut faire fondre l'interrupteur (ou le disjoncteur), ce qui doit être évité et peut l'être, par exemple par un violent jet d'air qui souffle l'arc. ■

14.4 EXEMPLES ET APPLICATIONS TECHNIQUES

Dans cette section, nous allons illustrer des applications de la loi d'induction qui font, pour la plupart, partie de notre vie quotidienne, et sans lesquelles notre environnement aurait un aspect très différent.

14.4.1 Courants de FOUCAULT

Un disque de cuivre est suspendu de telle sorte qu'il peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre. Une partie de sa surface est placée entre les pôles d'un électroaimant (fig. 14.14).

Lorsque la rotation du disque a lieu dans le champ d'induction magnétique, il est freiné, comme si le mouvement avait lieu dans de la mélasse. Si le disque plein est remplacé par un disque découpé en direction radiale, le freinage est beaucoup plus faible.

Interprétation. La masse métallique du disque peut être considérée comme une infinité de circuits fermés. Toute variation du flux à travers cette masse y engendre des courants induits appelés *courants de FOUCAULT* (la dénomination allemande, «Wirbelströme», c'est-à-dire «courants tourbillonnaires», décrit parfaitement la réalité). Selon la règle de la main gauche, ces courants circulent dans un sens tel qu'ils s'opposent la variation du flux qui les a produits: ils sont donc responsables d'une force de freinage. En feuilletant la masse métallique, on diminue la section et on augmente par le fait même la résistance au passage du courant, ce qui permettra de réduire fortement son intensité.

Les courants de FOUCAULT peuvent être utilisés pour le freinage des véhicules: on parle de frein à induction. Il s'agit de disques métalliques solidaires des roues qui tournent entre les pôles d'électroaimants qu'on enclenche au moment du freinage.

L'effet Joule provoqué par les courants de FOUCAULT est utilisé dans les fours à induction: un creuset conducteur est soumis à un champ d'induction rapidement variable dans le temps; il s'échauffe très vite. Ce mode de chauffage est propre, car il n'y a pas de gaz brûlés.

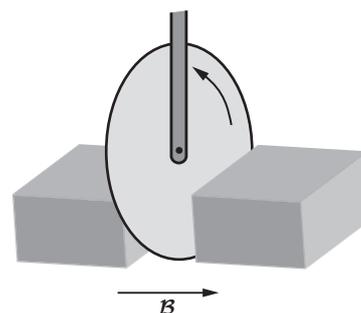
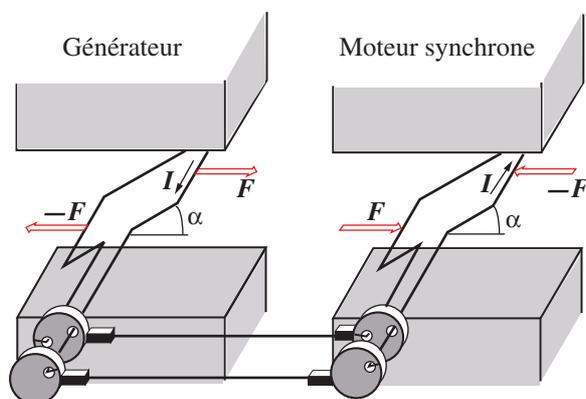


FIGURE 14.14 Lorsqu'une portion du disque conducteur tourne dans le champ magnétique, son mouvement est freiné.

14.4.2 Principe du générateur et du moteur électrique synchrone

Le fonctionnement d'un générateur de courant alternatif, d'une dynamo, est expliqué schématiquement dans la partie gauche de la figure 14.15.



La spire d'aire A tourne à la vitesse angulaire constante ω dans le champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} . La variation du flux périodique induit dans la spire une tension que nous allons estimer.

Si l'élongation angulaire α est donnée par $\alpha = \omega t$, le flux est alors:

$$\phi(t) = \mathcal{B} \cdot A(t) = \mathcal{B} \cdot A \cdot \cos(\omega t)$$

En vertu de la loi d'induction, nous avons:

FIGURE 14.15 Générateur-moteur: la spire de gauche est entraînée mécaniquement en mouvement de rotation à vitesse angulaire constante; la variation du flux magnétique induit une tension et un courant. Si ce courant est transporté vers le système identique à droite, ce dernier est soumis à un couple engendré par les forces de LAPLACE et se met à tourner de manière synchrone: c'est un moteur électrique (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

$$U(t) = -\frac{d\phi}{dt} = BA\omega \sin(\omega t) = \hat{U} \sin(\omega t)$$

En conclusion :

Le principe du générateur consiste en une boucle conductrice qui effectue un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante ω dans un champ d'induction magnétique homogène. On enregistre aux bornes de la boucle une tension induite sinusoïdale :

$$U(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \tag{14.7}$$

La tension de crête \hat{U} est atteinte lorsque le flux magnétique à travers la boucle est nul.

Un générateur permet de transférer l'énergie apportée par le moment cinétique du mouvement de rotation sur le courant induit.

Si on relie les balais d'un système identique aux balais correspondants du générateur (partie droite de la figure 14.15), un courant de même intensité circule dans le sens inverse dans les spires de ce système. Les forces de LAPLACE engendrent un couple qui fait tourner la boucle. Le système fonctionne comme un *moteur synchrone*.

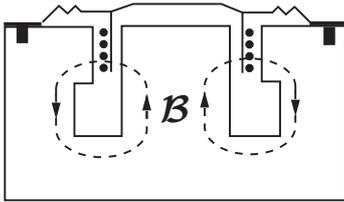


FIGURE 14.16 Microphone - haut-parleur: les ondes sonores font vibrer la membrane reliée à une bobine plongée dans un champ magnétique: la tension induite reproduit le rythme des sons. Si l'on envoie un courant variable dans la bobine, elle plonge plus ou moins profondément dans le champ magnétique: le système est un haut-parleur (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

14.4.3 Microphone et haut-parleur

Un microphone est constitué d'une membrane légère, chargée de vibrer comme le tympan sous l'effet des ondes sonores. Cette membrane est reliée à une bobine qui est introduite dans l'entrefer annulaire d'un aimant permanent (fig. 14.16).

À l'arrivée d'ondes sonores, les vibrations de la membrane sont transmises à la bobine qui plonge plus ou moins profondément dans le champ d'induction magnétique. Les variations de flux induisent une tension qui suit le rythme des ondes sonores et dont l'amplitude correspond à l'intensité des sons. Pour pouvoir alimenter un haut-parleur, cette tension doit être amplifiée.

De la même manière qu'un générateur peut être en principe transformé en moteur, un microphone peut servir de haut-parleur. La différence réside dans les dimensions plus importantes de la membrane. Lorsque la bobine est alimentée par le signal engendré par le microphone, elle plonge plus ou moins profondément dans l'entrefer, entraînant la membrane dont les vibrations génèrent des ondes sonores. Pour des raisons dues aux particularités des phénomènes ondulatoires, on doit généralement avoir plusieurs haut-parleurs (colonnes sonores) si l'on veut couvrir tout le spectre des fréquences audibles par l'oreille humaine.



FIGURE 14.17 Transformateur: le champ magnétique alternatif engendré dans le primaire est canalisé par le noyau de fer vers le secondaire où ses variations engendrent une tension induite (d'après JOSEF SCHREINER, *Physik für die Oberstufe der Mittelschulen*).

14.4.4 Transformateur

Un transformateur est constitué de deux bobines enroulées sur deux branches opposées d'un noyau de fer formant un circuit fermé (fig. 14.17). La bobine qui est reliée à une source de courant alternatif est appelée *enroulement primaire*. Le champ magnétique alternatif engendré par ce courant est canalisé par le noyau de fer vers l'autre bobine, que l'on appelle *enroulement secondaire*. Les variations du champ d'induction magnétique y engendrent une tension induite proportionnelle au nombre de spires. Le

noyau de fer est feuilleté, c'est-à-dire constitué de tôles de fer isolées les unes des autres.

Dans le cas idéal, les lignes du champ d'induction magnétique sont toutes canalisées dans le noyau de fer. Le flux d'induction est donc le même dans chacune des sections du noyau. Si nous désignons par φ ce flux, et par N_1 et N_2 les nombres respectifs de spires, nous avons :

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= N_1\varphi(t) & \text{et} & & \phi_2(t) &= N_2\varphi(t) \\ U_1(t) &= -N_1\frac{d\varphi}{dt} & \text{et} & & U_2(t) &= -N_2\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

Si le circuit secondaire est ouvert et que les résistances sont négligeables, on peut admettre que la tension aux bornes est égale en amplitude à la tension induite. Nous pouvons donc conclure :

Dans le cas idéal, les tensions aux bornes des enroulements d'un transformateur sont proportionnelles au nombre de spires :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (14.8)$$

Le rapport des nombres de spires est appelé rapport de transformation.

Notons que ce résultat représente le cas idéal. Si le secondaire est en charge, il s'y produit une self-induction, et il y a une induction mutuelle du secondaire sur le primaire. L'étude complète d'un transformateur n'est pas aussi simple que celle que nous avons présentée.

14.5 LOI D'AMPÈRE-MAXWELL

La loi d'induction de FARADAY-HENRY lie les variations du champ d'induction magnétique à l'apparition d'un champ électrique tourbillonnaire. Ces deux champs sont couplés, raison pour laquelle on parle de champ électromagnétique. On suppose que, lors de l'élaboration de la théorie de l'électromagnétisme, MAXWELL réalisa que la loi d'induction devait avoir son pendant symétrique, à savoir que les variations d'un champ électrique devaient engendrer un champ magnétique tourbillonnaire. C'est même une nécessité, car la loi d'AMPÈRE (13.67), valable uniquement pour des courants stationnaires, peut être en contradiction avec la conservation de la charge électrique en présence de courants variables.

En s'appuyant sur un modèle mécanique, MAXWELL résolut le problème en ajoutant deux termes à la loi d'AMPÈRE :

$$\oint_c \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathcal{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (14.9)$$

Pour donner une signification aux termes additionnels, nous examinons un circuit dans lequel se trouve un condensateur en train de se charger. Cette justification n'a été introduite que plusieurs années après la publication par MAXWELL de ses recherches théoriques.

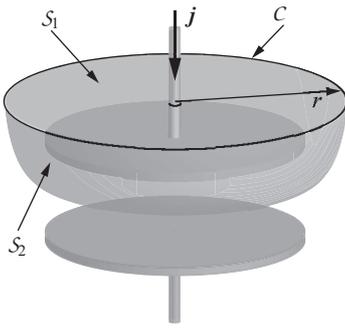


FIGURE 14.18 Loi d'AMPÈRE-MAXWELL: l'intégrale du champ magnétique le long de la courbe C a deux origines: le courant de densité \mathbf{j} traversant la surface S_1 et le courant de déplacement traversant la surface S_2 .

Nous appliquons la nouvelle version du théorème d'AMPÈRE à la courbe C , de rayon r (fig. 14.18). Dans un premier temps, la surface d'intégration est la surface S_1 , traversée par la densité de courant \mathbf{j} . Seul le premier terme du membre de droite livre une contribution, car il n'y a ni flux électrique, ni diélectrique polarisable à ce niveau:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I$$

Le terme hérité de la loi d'AMPÈRE représente donc le courant électrique « ordinaire », celui qui est amené sur les plaques du condensateur par le fil conducteur.

Tout en gardant la courbe C fixe, nous déformons la surface S_2 , comme le montre la figure 14.18. Lorsque la surface arrive à la hauteur de la plaque positive, l'intensité du courant tombe à zéro, mais le champ magnétique ne disparaît pas. Nous envisageons maintenant la situation où la surface d'intégration englobe la plaque positive, mais qu'il n'y a pas de diélectrique entre les plaques. Seul le deuxième terme du membre de droite de l'équation (14.9) contribue à l'intégration sur la surface S_2 , le membre de gauche restant identique, puisque la courbe C est fixe:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \mu_0 I_{\text{flux}}$$

En vertu du théorème de GAUSS, le flux du champ électrique est égal à la charge portée par l'une des plaques du condensateur divisée par ε_0 . Le deuxième terme correspond donc à un courant dont nous désignons l'intensité par I_{flux} , vu son origine.

Si l'espace entre les plaques est occupé par un diélectrique, le troisième terme donne:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \sigma_{\text{pol}} dA = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} Q_{\text{pol}} = \mu_0 I_{\text{pol}}$$

Il représente l'intensité du courant engendré par le déplacement de charges de polarisation dans un diélectrique présent entre les plaques du condensateur.

MAXWELL rassembla les deux contributions supplémentaires à la loi d'AMPÈRE en un courant d'intensité:

$$I_{\text{dépl}} = I_{\text{flux}} + I_{\text{pol}} \quad (14.10)$$

qu'il appela *courant de déplacement*. C'est pour cette raison que le champ:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

que nous avons introduit par l'équation (13.38) est appelé *déplacement électrique*.

La loi d'AMPÈRE-MAXWELL peut ainsi être exprimée de manière concise :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \quad (14.11)$$

ou, en version locale :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14.12)$$

Considérée pour elle-même, l'équation (14.11) ne fait que compléter une loi connue, la loi d'AMPÈRE, pour prendre en compte les processus impliquant des courants variables. Mais nous allons montrer à la section 14.9 que, combinée avec d'autres équations, elle implique l'existence d'ondes électromagnétiques.

Dans le vide, en l'absence de matière polarisable, la loi d'AMPÈRE-MAXWELL devient :

$$\oint_c \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (14.13)$$

$$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (14.14)$$

14.6 ÉQUATIONS DE MAXWELL

Nous sommes maintenant en mesure de rassembler les équations qui décrivent de manière générale les processus électromagnétiques. Elles sont le fruit d'un siècle de recherche expérimentale et de réflexion théorique intensives. Même si finalement, ce gigantesque labeur se résume à quatre équations fondamentales, il n'est pas inutile de mentionner que, dans sa première version, la publication de MAXWELL contenait vingt équations, qu'il réduisit à dix dans une publication ultérieure. Plusieurs mathématiciens et physiciens ont participé à la formulation que nous utilisons aujourd'hui.

14.6.1 Équations de MAXWELL

Nous donnons les formes intégrales et locales en commentant leur signification.

TABEAU 14.1 Équations de MAXWELL pour le champ électromagnétique.

Version intégrale	Version locale
$\oint_s \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ <p>Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge enfermée, c'est-à-dire que les charges électriques sont les sources du champ électrique (équations (13.11) et (13.14)).</p>	$\text{div } \mathcal{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oint_c \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A}$ <p>La circulation du champ électrique d'intensité \mathcal{E} est égale à l'opposé de la variation temporelle du flux du champ d'induction magnétique traversant la surface délimitée par la boucle d'intégration (équations (14.2) et (14.4)).</p>	$\text{rot } \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$

TABLEAU 14.1 Équations de MAXWELL pour le champ électromagnétique.

Version intégrale	Version locale
$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$ <p>Le flux du champ magnétique d'intensité \mathcal{B} et sa divergence sont nuls. C'est une conséquence de l'inexistence d'un monopôle magnétique qui serait le porteur d'une charge magnétique isolée (équations (13.56) et (13.55)).</p>	$\text{div } \mathcal{B} = 0$
$\oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{A}$ <p>Dans le vide, en l'absence de matière polarisable, ces équations deviennent</p>	$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$
$\oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A}$ <p>La circulation du champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} est égale à la somme du courant réel et du courant de déplacement (variation temporelle du flux électrique) traversant la surface délimitée par la boucle d'intégration. Le rotationnel est un vecteur, perpendiculaire au plan déterminé par le champ magnétique, dont l'intensité varie en fonction des valeurs locales de l'intensité du courant réel et de l'intensité des variations du courant de déplacement (équations (14.11), (14.12), ainsi que (14.13) et (14.14)).</p>	$\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$

14.6.2 Lois constitutives

Les équations de MAXWELL sont en quelque sorte les «équations de bilan» qui donnent la dynamique des champs électromagnétiques. Nous savons qu'elles ne permettent de modéliser complètement cette dynamique que si on y adjoint les lois constitutives qui relient les champs entre eux par l'intermédiaire des caractéristiques telles que la permittivité, la perméabilité, la conductivité des milieux dans lesquels se trouvent les champs.

Les sections 13.6 et 13.7.4 qui traitent de l'interaction de la matière et respectivement des champs électrique et magnétique sont des exemples de telles lois constitutives.

14.7 FLUX D'ÉNERGIE ET DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Lors des interactions observées à la section 14.1 entre des systèmes mécaniques et électromagnétiques, il y a eu des transferts de quantité de mouvement et d'énergie. Ces transferts n'ont pu s'opérer que par l'intermédiaire du champ électromagnétique.

Au chapitre 13, sections 13.5.1, 13.5.2 et 13.7.6, nous avons montré que les champs électrostatique et électromagnétique emmagasinent de l'énergie et qu'ils sont le siège de contraintes qui sont la manifestation de flux de quantité de mouvement.

Lorsque ces champs varient dans le temps, l'énergie et la quantité de mouvement varient conjointement, à cause des variations de l'intensité. Nous voulons déterminer comment les flux d'énergie et de quantité de mouvement dépendent des intensités des champs.

14.7.1 Densité d'énergie du champ électromagnétique

Les évaluations de la densité d'énergie que nous avons calculées dans le cas statique restent valables lorsque les champs varient dans le temps.

Le champ électromagnétique est caractérisé par le fait que les vecteurs \mathcal{E} et \mathcal{B} coexistent au même point de l'espace. De ce fait, la densité d'énergie est la somme de la contribution électrique donnée par l'équation (13.45) et de la contribution magnétique donnée par l'équation (13.61):

$$\rho_{E, EM} = \frac{1}{2} [\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}] \quad (14.15)$$

14.7.2 Densité de flux d'énergie dans le champ électromagnétique

En évaluant le taux de variation de la densité d'énergie du champ électromagnétique, nous allons faire apparaître les termes qui sont responsables de son évolution.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{E, EM}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathcal{E}^2 + \mu_r \mu_0 \mathcal{H}^2] \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu_r \mu_0 \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ &= -\mathcal{E} \cdot (\mathbf{j} - \text{rot } \mathcal{H}) - \mathcal{H} \cdot \text{rot } \mathcal{E} = -\mathbf{j} \cdot \mathcal{E} + \mathcal{E} \cdot \text{rot } \mathcal{H} - \mathcal{H} \cdot \text{rot } \mathcal{E} \\ &= -\mathbf{j} \cdot \mathcal{E} - \text{div} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Les dérivées temporelles du champ de déplacement électrique et du champ d'induction magnétique ont respectivement été exprimées au moyen de la loi d'AMPÈRE-MAXWELL (14.12) et de la loi d'induction (14.4). En outre, la substitution à la dernière égalité repose sur une identité de l'analyse vectorielle³. En résumé,

La relation

$$\frac{\partial \rho_{E, EM}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathcal{E} - \text{div} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \quad (14.16)$$

exprime la loi de variation de l'énergie du champ électromagnétique dans sa forme locale.

Pour pouvoir donner une interprétation physique des termes de la relation (14.16), nous passons à la version intégrale dans un volume \mathcal{V} enfermé dans une surface \mathcal{S} :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_{E, EM}}{\partial t} dV = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \cdot \mathcal{E} dV - \int_{\mathcal{V}} \text{div} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) dV$$

Nous utilisons le théorème de la divergence pour transformer le second terme du membre de droite en une intégrale sur la surface fermée entourant le volume considéré:

3. ARBENZ K., WOHLHAUSER A.: *Compléments d'analyse*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.

$$\int_V \frac{\partial \rho_{E,EM}}{\partial t} dV = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathcal{H}) \cdot d\mathbf{A}$$

Le terme $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ représente la puissance délivrée à une unité de volume de matière chargée. En effet, la force exercée par le champ électromagnétique sur une particule de charge Q est $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, et la puissance est $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. S'il y a N particules par unité de volume, la puissance est $NQ\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$, ce qui est équivalent à $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Le terme $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ représente donc l'énergie que libère le champ par unité de temps et par unité de volume, donc une densité de flux d'énergie. Son intégrale sur le volume considéré correspond donc à la puissance transmise à l'ensemble des charges comprises dans ce volume. Si ces charges se déplacent librement dans l'espace, le terme correspond à la variation de leur énergie cinétique. En revanche, s'il s'agit de charges circulant dans un conducteur, la puissance injectée par le champ correspond au taux de dissipation par effet Joule.

Le second terme du membre de droite correspond à la densité \mathbf{j}_E du flux d'énergie émanant du volume considéré. La grandeur

$$\mathbf{j}_{E,EM} = \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathcal{H} \tag{14.17}$$

est le *vecteur de POYNTING*, d'après John H. POYNTING qui élaborera la théorie en 1884. Vu qu'elle représente un flux d'énergie à travers une surface, elle se mesure en W m^{-2} . Sa direction est celle du flux d'énergie, son module l'intensité du flux. Son intégrale sur la surface fermée englobant le volume considérée correspond à la puissance rayonnée par le champ électromagnétique.

14.7.3 Quelques exemples de flux d'énergie

Nous allons découvrir que les chemins empruntés par l'énergie lors de processus électromagnétiques sont quelquefois étonnants.

Charge d'un condensateur. Nous considérons un condensateur à plaques circulaires en phase de charge. Il règne entre les deux plaques un champ électrique quasi homogène, mais qui est en train d'augmenter dans le temps. En vertu de la loi d'AMPÈRE-MAXWELL (14.11), ce champ croissant est entouré d'un champ magnétique tourbillonnaire dont les courbes fermées sont perpendiculaires au vecteur du champ électrique. La figure 14.19 permet de se rendre compte que le vecteur de POYNTING (14.17) est dirigé vers le centre du condensateur, parallèlement aux plaques. Contrairement à ce que l'on pourrait supposer, l'énergie n'entre pas dans le condensateur par les connexions conductrices, mais latéralement, entre les bords des plaques.

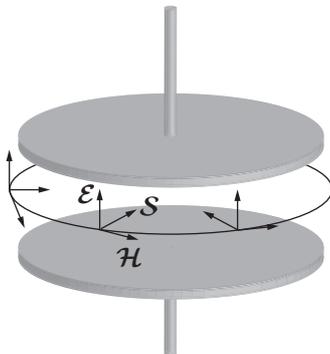


FIGURE 14.19 Lors du processus de charge, l'énergie entre latéralement entre les plaques du condensateur.

Courant dans un circuit électrique. Examinons comment l'énergie est transportée lorsqu'un courant circule dans un circuit électrique. Nous considérons un courant conventionnel de charges positives. Nous savons que le courant ne circule que si un champ électrique s'établit à l'intérieur du conducteur pour entraîner les porteurs de charges. Ce champ électrique ne peut pas être le fait de la batterie, celle-ci ne sert qu'à séparer les charges. Il doit donc être engendré par des charges électriques qui se répartissent à la surface du conducteur, les *charges de surface*. Ces charges de surface ont trois rôles à remplir dans un circuit⁴: (1) maintenir le potentiel le long du circuit, (2) fournir le

4. JACKSON J. D.: Surface charges on circuit wires and resistors play three roles. *Am. J. Phys.* **64**, 855-870, 1996.

champ électrique dans l'espace entourant le conducteur, et (3) assurer un flux de charges confiné en générant un champ électrique à l'intérieur du conducteur.

Dans le circuit, la batterie joue le même rôle qu'aurait un condensateur que l'on déchargerait au moyen du fil conducteur, à la différence près que les réactions chimiques entretiennent la différence de potentiel en séparant les charges pour compenser celles qui ont été introduites dans le circuit. Lors de la fermeture du circuit, un flux quasi instantané va amener les charges à la surface du conducteur. Elles vont se répartir de manière à remplir les trois rôles identifiés par JACKSON.

Examinons d'abord comment ces charges de surface génèrent le champ à l'intérieur du conducteur tout en épousant sa forme. Ces charges ne sont pas réparties de manière uniforme le long du circuit, car elles doivent également compenser les champs extérieurs, entre autres le champ de type dipolaire engendré par la batterie. Dans la branche connectée à la borne positive, elles sont majoritairement positives, dans la branche connectée à la borne négative, elles sont majoritairement négatives. Dans les segments courbes, la charge n'est pas répartie uniformément autour du conducteur, mais sa densité s'adapte de part et d'autre en fonction du rayon de courbure et du champ ambiant. Il est même possible d'avoir des charges d'un signe d'un côté et des charges de signe opposé de l'autre côté du conducteur.

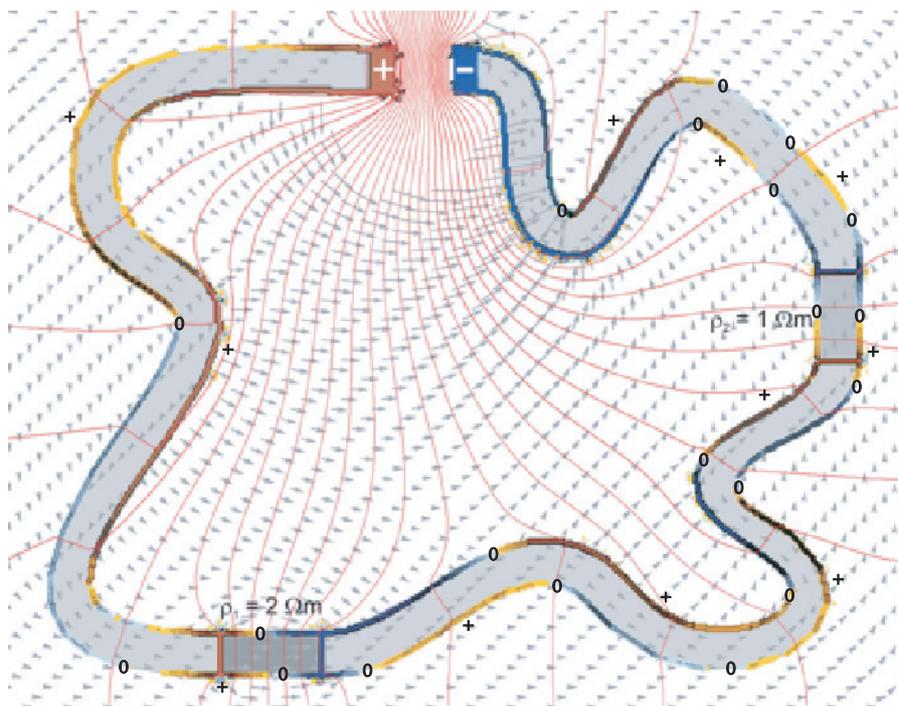


FIGURE 14.20 Répartition des charges de surface dans un circuit. Le champ magnétique engendré par le courant est perpendiculaire au plan du circuit. Le champ électrique est représenté par des flèches. Les lignes équipotentielles coïncident donc avec le champ de POYNTING. Les 0 indiquent un changement de signe des charges de surface, leur densité est indiquée par la noirceur ou l'épaisseur du trait. La résistivité du fil conducteur est de $0.25 \Omega\text{m}$.

La figure 14.20, tirée d'une étude semi quantitative du phénomène⁵, montre comment cette charge de surface se répartit dans un circuit, constitué d'une batterie et d'un conducteur flexible, qui amène le courant électrique à deux résistances montées en série. La densité des charges de surface est indiquée par l'épaisseur ou la noirceur des traits, les 0 indiquent un changement de signe des charges de surface (seuls les segments chargés positivement ont été indiqués par le signe +). On remarque que le champ électrique interne épousé les contours du conducteur. Aux extrémités des résistances, la

5. MÜLLER R.: A semi quantitative treatment of surface charges in DC circuits. *Am. J. Phys.* **80**(9), 782-788, 2012.

densité de charge de surface est beaucoup plus importante afin de compenser l'augmentation de la résistivité dans ces segments.

Les lignes équipotentielles représentent également le champ de POYNTING. En effet, le vecteur de POYNTING est perpendiculaire au vecteur du champ magnétique qui, dans le cas présent, est perpendiculaire à la feuille (à l'intérieur du circuit, il émerge de la feuille), et au vecteur du champ électrique, ce qui est le cas des lignes équipotentielles. Elles montrent comment la densité du flux d'énergie se répartit à l'extérieur du conducteur. Ces flux se répartissent de telle manière que l'énergie est injectée dans le conducteur et dans les résistances de manière proportionnelle à leur résistivité pour y être dissipée.

EXEMPLE 14.4. Charge d'un condensateur.

Un condensateur est constitué de deux plaques circulaires parallèles de rayon R séparées par une distance d très petite par rapport au rayon. On charge le condensateur au moyen d'un courant d'intensité I . Montrez, au moyen du vecteur de POYNTING, que le taux auquel le champ électromagnétique injecte de l'énergie dans le condensateur correspond au taux de variation de l'énergie du champ électrostatique stockée dans le condensateur. Montrez que l'apport d'énergie est égal à UI , où U est la tension entre les plaques.

SOLUTION: Nous introduisons des coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe Oz coïncidant avec l'axe de symétrie du condensateur (fig. 14.21). Lorsque la plaque positive porte la charge Q , l'intensité du champ électrique entre les plaques est:

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \mathbf{u}_z$$

La variation de Q entraîne celle du champ électrique, ce qui provoque l'apparition d'un champ magnétique entre les plaques. Nous appliquons l'équation (14.13) à l'espace entre les deux plaques. Le premier terme du membre de droite est nul, et après division par μ_0 , nous obtenons:

$$\oint_c \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{H} \cdot 2\pi R = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathcal{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{dQ}{dt} = I$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{H} = \frac{I}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta$$

Le vecteur de POYNTING devient:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \mathbf{u}_z \times \frac{I}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta = \frac{QI}{2\pi^2 \epsilon_0 R^3} (-\mathbf{u}_r)$$

Le flux d'énergie pénètre dans le condensateur par les côtés. Le flux est:

$$I_E = \mathcal{S} \cdot 2\pi R d = \frac{QI}{2\pi^2 \epsilon_0 R^3} 2\pi R d = \frac{QI}{\pi \epsilon_0 R^2} d$$

L'énergie emmagasinée dans le champ électrique est le produit de la densité d'énergie et du volume entre les plaques:

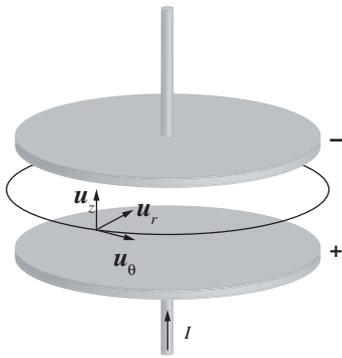


FIGURE 14.21 Lors du processus de charge, l'énergie entre latéralement entre les plaques du condensateur.

$$E_{\text{champ}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \cdot \pi R^2 d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \right)^2 \pi R^2 d = \frac{Q^2 d}{2\pi \epsilon_0 R^2}$$

Son taux de variation est :

$$\frac{dE_{\text{champ}}}{dt} = \frac{d}{2\pi \epsilon_0 R^2} \cdot 2Q \frac{dQ}{dt} = \frac{QI}{\pi \epsilon_0 R^2} d$$

ce qui correspond au flux d'énergie I_E .

La charge est égale au produit de la capacité et de la tension :

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} U$$

ce qui entraîne

$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 \pi R^2}$$

Le flux d'énergie est bien égal au produit de la tension et de l'intensité. ■

14.7.4 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

À partir du théorème de POYNTING, qui exprime la loi de conservation de l'énergie dans le champ électromagnétique, il est possible de montrer⁶ que ce champ contient de la quantité de mouvement dont la densité, désignée par \mathbf{g} , est proportionnelle à la densité du flux d'énergie :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{\mathcal{E} \times \mathcal{H}}{c^2} \tag{14.18}$$

Une expérience de pensée due à EINSTEIN va permettre de justifier cette relation. Dans un wagon de chemin de fer immobile (fig. 14.22), de masse M et de longueur L , censé se mouvoir librement, un rayonnement électromagnétique d'énergie E est émis à une extrémité du wagon pour être absorbé à l'autre extrémité. La masse effective du rayonnement est $m = E/c^2$. Comme le wagon n'est soumis à aucune interaction, le centre de masse du système est stationnaire, ce qui n'est possible que si le wagon se déplace d'une distance x dans un sens inverse à celui du rayonnement, de telle manière que :

$$Mx = mL = \frac{E}{c^2} L$$

Le recul du wagon doit être dû au fait que le rayonnement émis possède une quantité de mouvement p . En vertu de la loi de conservation de la quantité de mouvement, le wagon acquiert la même quantité de mouvement de sens opposé, et sa vitesse V est égale à p/M . Le wagon roule à cette vitesse jusqu'à ce que le rayonnement atteigne l'autre extrémité où l'absorption de la quantité de mouvement arrête le wagon. Le temps de vol est égal à L/c , ce qui nous permet de déterminer le déplacement x :

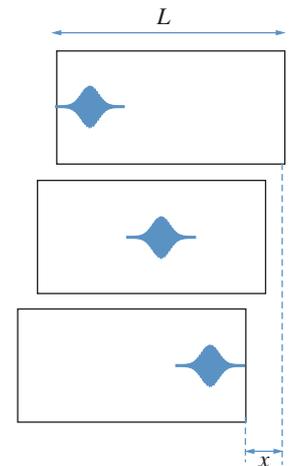


FIGURE 14.22 Quantité de mouvement du champ électromagnétique : l'émission de rayonnement électromagnétique à l'une des extrémités du véhicule provoque un recul en vertu de la conservation de la quantité de mouvement du système véhicule plus rayonnement.

6. JACKSON J.D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1962.

$$x = v \cdot \Delta t = \frac{p}{M} \frac{L}{c} = \frac{E}{c^2} \frac{L}{M}$$

On en déduit que le rayonnement possède une quantité de mouvement de module égal à :

$$p = \frac{E}{c}$$

Comme la quantité de mouvement est proportionnelle à l'énergie, sa densité g sera proportionnelle à la densité d'énergie :

$$g = \frac{\rho_{E,EM}}{c} = \frac{j_{E,EM}}{c^2}$$

Dans la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que la densité de flux d'énergie est égale au produit de la densité d'énergie et de la vitesse du flux, à savoir celle de la lumière. L'équation (14.17) nous permet de conclure que la densité de quantité de mouvement est :

$$g = \frac{j_{E,EM}}{c^2} = \frac{S}{c^2} = \frac{\mathcal{E} \times \mathcal{H}}{c^2}$$

Dans un repère cartésien $Oxyz$, la quantité de mouvement p est un vecteur défini par ses trois composantes p_x, p_y, p_z . Il en va de même pour sa densité $g(r, t)$. L'écoulement de chacune des composantes de la quantité de mouvement peut être représenté par un vecteur j_p . Il est usuel de rassembler ces trois vecteurs en un nouvel objet mathématique, le tenseur de densité de flux de quantité de mouvement. Nous allons le découvrir sur la base d'un exemple concret.

EXEMPLE 14.5. Vecteurs de densité de flux de quantité de mouvement.

Déterminer les trois vecteurs de densité de flux de quantité de mouvement : (a) dans le cas du champ d'un condensateur à plaques parallèles de capacité C portant la charge Q et dont les plaques ont une aire égale à A ; (b) généraliser le résultat pour une direction quelconque.

SOLUTION : (a) Nous nous plaçons dans un repère orthonormé et désignons par a_1, a_2 et a_3 les vecteurs unitaires (fig. 14.23). Dans le cas étudié, le vecteur unitaire a_1 est orienté perpendiculairement aux plaques du condensateur, les vecteurs a_2 et a_3 correspondent à deux directions mutuellement perpendiculaires parallèles aux plaques du condensateur. Vu la symétrie du système, le vecteur de densité de flux de quantité de mouvement j_{p,a_1} a la même direction que a_1 , ce qui implique

$$j_{p,a_1} = j_{p1} a_1$$

Nous obtenons le flux de quantité de mouvement entre les plaques en dérivant l'énergie du condensateur par rapport à la distance x entre les plaques :

$$I_{p,a_1} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} \right) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} \right)^2 A = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 A$$

La densité de flux est égale au quotient du flux et de l'aire A . Dans la direction a_1 elle est donc :

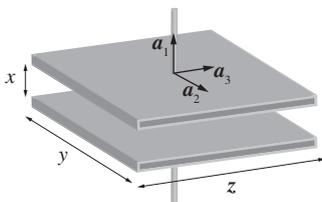


FIGURE 14.23 Détermination des vecteurs de densité de flux de quantité de mouvement.

$$j_{p,a1} = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \mathbf{a}_1$$

À la section 13.5.2, nous avons montré que le champ exerçait une traction sur les plaques dans le sens des lignes de champ. Une densité de flux de quantité de mouvement négative correspond donc à une traction.

Pour la deuxième composante, nous choisissons la direction selon Oy . Le flux de quantité de mouvement qui maintient les plaques de la figure 13.40 est calculé de manière analogue :

$$I_{p,a2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 z y} \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} \right)^2 (xz) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 (xz)$$

Le produit zy correspond à l'aire A des plaques alors que xz est l'aire de la surface à travers laquelle s'écoule la quantité de mouvement dans la direction \mathbf{a}_2 . Vu la symétrie du système envisagé, le résultat est le même pour la troisième direction. Nous avons donc :

$$j_{p,a2} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \mathbf{a}_2, \quad j_{p,a3} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \mathbf{a}_3$$

Une densité de flux positive correspond, en vertu des résultats de la section 13.5.2, à une pression dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ.

(b) Pour une direction quelconque, déterminée par un vecteur unitaire \mathbf{a} tel que :

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

la densité de flux de quantité de mouvement est, pour cet exemple, donnée par :

$$\begin{aligned} j_{p,a} &= \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 (-\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3) - \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \alpha_1 \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

Ce résultat particulier peut être généralisé pour un champ quelconque sous la forme :

$$j_{p,a} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \mathbf{a} - \epsilon_0 (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad (\text{E 14.1})$$

Cette relation est valable de manière générale, malgré le fait qu'elle ait été établie pour le champ homogène du condensateur à plaques parallèles. ■

EXEMPLE 14.6. Tenseur de densité de flux de quantité de mouvement.

Utilisez l'équation (E 14.1) de l'exemple 14.5 : (a) pour expliciter les trois vecteurs de densité de flux de quantité de mouvement pour un champ électrique quelconque dans un repère cartésien ; (b) rassemblez les trois vecteurs dans une matrice ; (c) vérifiez le résultat pour l'exemple du champ du condensateur à plaques parallèles.

SOLUTION : (a) Dans l'équation (E 14.1), nous remplaçons le vecteur \mathbf{a} par les vecteurs unitaires du repère orthonormé que nous exprimons par leurs composantes. Le vecteur selon Ox est :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{px} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon_0 \left[\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon_0 \mathcal{E}_x \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_x^2 \\ -\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \\ -\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De manière analogue, nous trouvons pour les deux autres vecteurs :

$$\mathbf{j}_{py} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_y \mathcal{E}_x \\ \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_y^2 \\ -\mathcal{E}_y \mathcal{E}_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_{pz} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_z \mathcal{E}_x \\ -\mathcal{E}_z \mathcal{E}_y \\ \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_z^2 \end{pmatrix}$$

(b) Chacun de ces trois vecteurs constitue une ligne de la matrice :

$$\mathbf{j}_p = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_x^2 & -\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y & -\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z \\ -\mathcal{E}_y \mathcal{E}_x & \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_y^2 & -\mathcal{E}_y \mathcal{E}_z \\ -\mathcal{E}_z \mathcal{E}_x & -\mathcal{E}_z \mathcal{E}_y & \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_z^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E 14.2})$$

qui est la représentation matricielle du tenseur de densité de flux de quantité de mouvement pour le champ électrique.

(c) Dans le cas du condensateur, seule la composante suivant Ox est non nulle. Il s'ensuit :

$$\mathbf{j}_{p, \text{cond}} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}^2}{2} - \mathcal{E}_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{E}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{E}^2}{2} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{E}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{E}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{E}^2}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui correspond naturellement aux résultats de l'exemple 14.5. ■

La densité de flux de quantité de mouvement dans un champ magnétique peut être exprimée à partir de la relation (E 14.1) en substituant $\mu_0 \mathcal{H}$ (ou $1/\mu_0 \mathcal{B}$) à $\varepsilon_0 \mathcal{E}$. La densité de flux de quantité de mouvement du champ électromagnétique, dans une direction déterminée par le vecteur \mathbf{a} , est donc égale à :

$$\mathbf{j}_{p, \mathbf{a}} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathcal{H}^2 \right) \mathbf{a} - \varepsilon_0 (\mathcal{E} \cdot \mathbf{a}) \mathcal{E} - \mu_0 (\mathcal{H} \cdot \mathbf{a}) \mathcal{H} \quad (\text{14.19})$$

et la matrice du tenseur de densité de flux de quantité de mouvement s'obtient en additionnant, dans la matrice donnée par la relation (E 14.2), les composantes magnétiques à chacune des composantes correspondantes du champ électrique.

Ce tenseur est symétrique. Il est l'opposé du tenseur des contraintes de MAXWELL dont les composantes diagonales sont les contraintes que nous avons introduites à la section 13.5.2:

$$\mathbf{j}_p = -\boldsymbol{\sigma} \quad (14.20)$$

14.8 GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES

L'objectif de cette section est d'introduire les concepts généraux liés aux phénomènes ondulatoires.

14.8.1 Observations préliminaires

Nous sommes confrontés, dans notre vie quotidienne ou quelquefois de manière exceptionnelle, à une catégorie de phénomènes qui, souvent mais pas toujours, portent le nom d'onde. En voici quelques-uns :

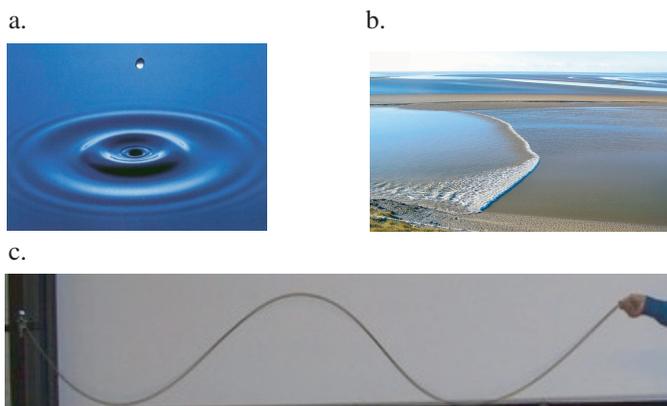


FIGURE 14.24 Exemples de phénomènes ondulatoires : (a) onde à la surface de l'eau ; (b) mascaret dans la baie de Morecambe, au Royaume-Uni (Photo: Arnold Price (CC)); (c) onde transversale sur une corde attachée.

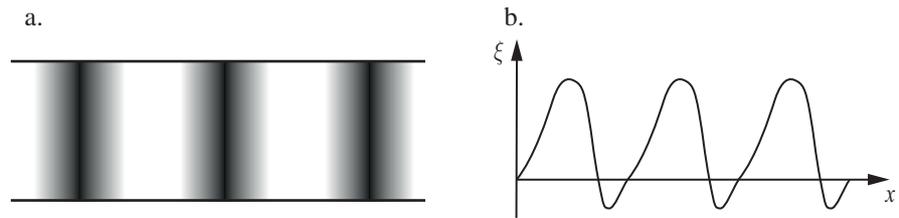
- Les ondes qui se propagent à la surface de l'eau lorsque l'on y laisse tomber un objet (fig. 14.24a).
- La vague qui atteint la rive d'un lac après le passage d'un grand bateau.
- Les mascarets qui sont des ondes qui remontent des estuaires, voire certains grands fleuves, lors de fortes marées (fig. 14.24b), les raz-de-marée (tsunamis), les vagues scélérates (vagues océaniques très hautes).
- La perturbation qui se déplace le long d'une corde attachée à une extrémité lorsqu'on la frappe avec le tranchant de la main ou que l'on agite l'autre extrémité (fig. 14.24c).
- L'effet domino: la progression de la chute le long d'une rangée de pièces de domino redressées lorsque l'on a fait tomber la première.
- La compression des soufflets entre les wagons qui se transmet d'un wagon à l'autre lorsque l'on accouple un nouveau wagon à un train.
- Les ondes sonores dans les milieux gazeux, liquide et solide.

- Les ondes sismiques.
- Les ondes lumineuses.

Ce qu'il y a de commun à tous ces exemples, c'est le fait qu'une perturbation locale d'un milieu se propage dans l'espace depuis l'endroit où a eu lieu cette perturbation.

On appelle onde toute perturbation d'un milieu qui se transmet de proche en proche dans l'espace.

FIGURE 14.25 Deux types d'ondes: (a) onde longitudinale; (b) onde transversale.



Nous pouvons d'ores et déjà constater l'existence de deux classes d'ondes en fonction de la manière dont se déroule la perturbation par rapport au déplacement de celle-ci. Dans le cas de l'effet domino, de la compression des soufflets entre les wagons, des ondes sonores, la perturbation a lieu dans la même direction que celle de la propagation. On parle alors d'*onde longitudinale* (fig. 14.25a). Dans le cas de la corde frappée, la perturbation a lieu perpendiculairement à la direction de propagation. On parle alors d'*onde transversale* (fig. 14.25b). Nous verrons à la section 14.9.2 que les ondes électromagnétiques sont des ondes transversales. Les ondes sismiques sont un mélange des deux catégories, alors que les ondes de surface ont un statut un peu particulier.

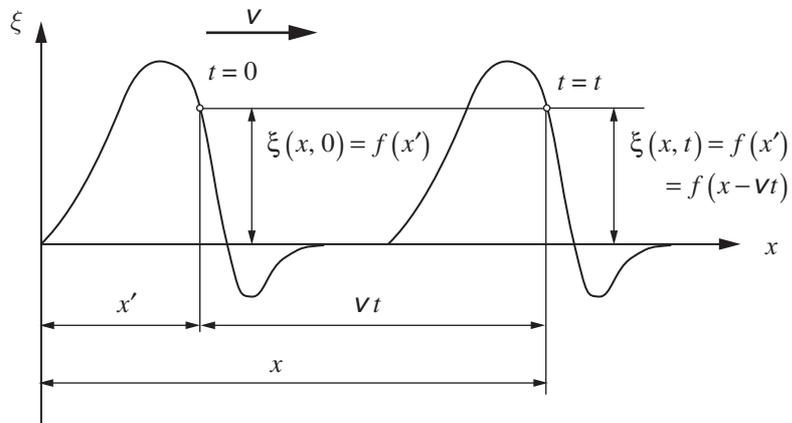
14.8.2 Description mathématique

La forme de la perturbation est décrite au moyen d'une fonction ξ de l'espace et du temps, que l'on appelle l'*elongation*:

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \tag{14.21}$$

Comme le montrent les quelques exemples ci-dessus, la grandeur ξ peut représenter une grande variété de grandeurs physiques telles que la pression dans un gaz, la déformation d'un solide, l'intensité d'un champ électrique ou magnétique, etc.

FIGURE 14.26 Perturbation en mouvement vers la droite à la vitesse v , sans déformation.



Afin de montrer comment prendre en compte la propagation sans déformation, nous envisageons une perturbation de forme donnée par la figure 14.26, aux instants $t = 0$ et t . Nous admettons que la perturbation se déplace dans une dimension, dans le sens positif, à une vitesse de module v . La fonction $\xi(x, t)$ représente la perturbation, ici le déplacement d'un point par rapport à la position d'équilibre.

Au temps $t = 0$, $\xi(x, 0) = f(x')$. Comme la perturbation se déplace à la vitesse v , nous avons $x' = x - vt$. Par comparaison, nous obtenons $\xi(x, t) = f(x - vt)$. Si le déplacement a lieu dans le sens négatif, la relation devient $\xi(x, t) = f(x + vt)$. En conclusion :

Une perturbation ondulatoire non amortie $\xi(x, t)$ prend nécessairement la forme :

$$\xi(x, t) = f(x - vt) \quad \text{ou} \quad \xi(x, t) = f(x + vt) \quad (14.22)$$

La grandeur $x - vt$ est la phase de l'onde et la vitesse v est la vitesse de phase.

La superposition des deux fonctions est la solution générale de l'équation différentielle que nous avons établie à la section 9.7, l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (14.23)$$

donnée ici pour une onde se propageant dans une dimension. Naturellement, si le déplacement a lieu dans un seul sens, on choisit une seule des deux fonctions possibles.

Montrons qu'une fonction donnée par l'équation (14.22) est solution de l'équation d'onde. Comme f est une fonction composée, nous devons appliquer la règle de dérivation en chaîne. Nous choisissons une onde qui se propage dans le sens positif. Si nous posons $u = x - vt$, nous pouvons écrire $\xi = f(u)$, et les dérivées partielles sont respectivement $\partial u / \partial x = 1$ et $\partial u / \partial t = -v$. Ainsi :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\xi}{du} (-v)$$

Les dérivées secondes sont :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{du^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2 \xi}{du^2} (-v)(-v) = v^2 \frac{d^2 \xi}{du^2}$$

En substituant $d^2 \xi / du^2$ dans la seconde relation, nous obtenons l'équation (14.23), ce qui démontre qu'une fonction de type $\xi(x, t) = f(x - vt)$ est une solution de l'équation d'onde, quelle que soit la forme de f .

14.8.3 Paramètres servant à caractériser une onde harmonique

Nous allons limiter notre étude à une onde sinusoïdale ou harmonique. Ce qui justifie ce choix, c'est le fait qu'il existe un théorème, celui de FOURIER, qui montre que toute fonction périodique peut être décomposée en une somme infinie de fonctions sinusoïdales. La figure 14.27 montre les premières étapes d'une telle synthèse au moyen

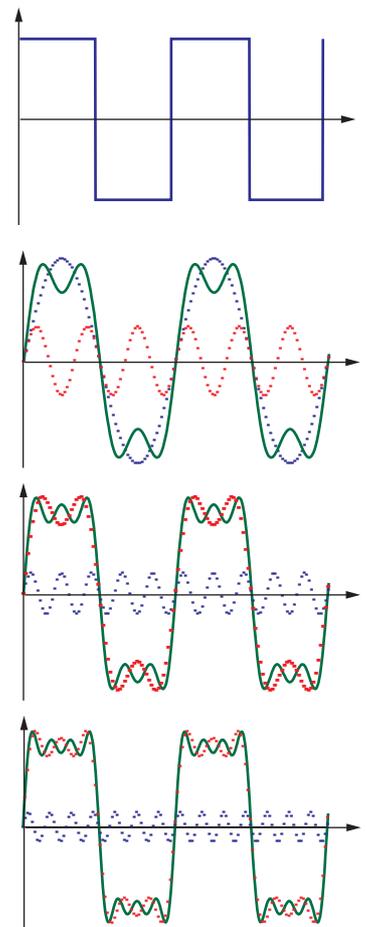


FIGURE 14.27 Premières étapes de la synthèse d'un signal carré au moyen d'une série de FOURIER.

d'une série de FOURIER. Pour une fonction non périodique, la somme est remplacée par une intégrale de FOURIER.

La fonction servant à représenter une onde harmonique est :

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x - vt)]$$

Pour déterminer la signification de la grandeur k , nous remplaçons, dans l'argument du sinus, la valeur de x par $x + 2\pi/k$:

$$\xi_0 \sin\left[k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right)\right] = \xi_0 \sin[k(x - vt) + 2\pi] = \xi_0 \sin[k(x - vt)]$$

On voit donc que la longueur $2\pi/k$ représente la périodicité dans l'espace.

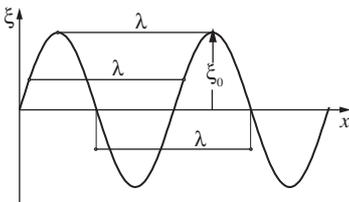


FIGURE 14.28 Longueur d'onde et amplitude.

Dans l'équation d'une onde sinusoïdale ou harmonique

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x - vt)] \tag{14.24}$$

La grandeur ξ_0 est l'amplitude de l'onde (fig. 14.28). L'argument du sinus est la phase de l'onde, et la vitesse v est la vitesse de phase.

La grandeur

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{14.25}$$

est la longueur d'onde (fig. 14.28). Elle représente la plus petite distance séparant deux points du milieu de propagation qui oscillent en phase.

La grandeur

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{14.26}$$

représente le nombre de longueurs d'onde comprises dans la longueur 2π . Elle est appelée nombre d'onde. Elle se mesure en m^{-1} .

Au moyen de ces grandeurs, nous pouvons donner de nouvelles versions de la fonction représentant une onde sinusoïdale :

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x - vt)] = \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = \xi_0 \sin[kx - \omega t]$$

Dans la dernière égalité, la grandeur

$$\omega = kv \tag{14.27}$$

correspond à la fréquence angulaire ou pulsation de l'onde. Sachant, en vertu de la relation (4.19), que $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence à laquelle l'état physique varie en chaque point atteint par l'onde, nous pouvons réécrire la relation ci-dessus et faire apparaître une propriété importante des ondes :

La vitesse de propagation v d'une onde, sa longueur d'onde λ et sa fréquence f sont liées entre elles par la relation:

$$v = \lambda f \quad (14.28)$$

En tenant compte du fait que $f = 1/T$, où T est la période d'oscillation en chaque point, nous pouvons donner une dernière version de l'équation de propagation d'une onde sinusoïdale:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin [k(x - vt)] = \xi_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \\ &= \xi_0 \sin [kx - \omega t] = \xi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \end{aligned}$$

Cette version fait apparaître la double périodicité d'une onde: sa périodicité spatiale exprimée par la longueur d'onde λ et sa périodicité temporelle exprimée par la période T (temps minimal entre deux passages par la même phase d'un point atteint par l'onde ou temps que met la perturbation pour se déplacer d'une longueur d'onde):

$$\lambda = vT$$

Notons que la notion de longueur d'onde ne s'applique pas qu'aux ondes sinusoïdales, mais à n'importe quelle sorte de perturbation périodique, comme le montre la figure 14.29.

Pour faire ressortir la double périodicité, nous concentrons notre attention sur un point fixe, par exemple celui qui est situé en $x = 0$. L'équation devient:

$$\xi(0, t) = \xi_0 \sin(-kvt)$$

ce qui représente une oscillation sinusoïdale du point situé en $x = 0$, dans une direction perpendiculaire à celle de la propagation de l'onde s'il s'agit d'une onde transversale, dans la direction de propagation s'il s'agit d'une onde longitudinale.

Si en revanche nous figeons le temps, ce qui correspond à prendre une photographie de l'aspect momentané de l'onde, en posant $t = 0$, nous obtenons:

$$\xi(x, 0) = \xi_0 \sin(kx)$$

qui est l'équation de la situation représentée par les figures 14.21c et fig. 14.25.

EXEMPLE 14.7. L'onde sinusoïdale (ou harmonique) satisfait l'équation d'onde.

Vérifier que l'onde sinusoïdale satisfait l'équation d'onde (14.23).

SOLUTION: Les dérivées secondes par rapport au temps et à la coordonnée spatiale sont respectivement:

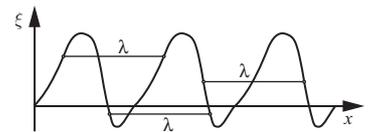


FIGURE 14.29 La longueur d'onde caractérise n'importe quelle perturbation périodique.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \xi_0 \sin [k(x - vt)] \} = -k v \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ \cos [k(x - vt)] \} = -(k v \xi_0)^2 \sin [k(x - vt)]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \xi_0 \sin [k(x - vt)] \} = -k^2 \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ \cos [k(x - vt)] \} = -(k^2 \xi_0)^2 \sin [k(x - vt)]$$

Le quotient des deux dérivées est égal à v^2 , ce qui montre que l'onde harmonique est une solution de l'équation d'onde.



14.8.4 Ondes en deux ou trois dimensions

Une onde peut se propager dans des milieux de dimension variable. Comme nous l'avons déjà observé à la section 14.8.1, certaines ondes sont unidimensionnelles : c'est le cas de celles se propageant sur une corde. Notons toutefois qu'elle peut le faire dans les deux sens : c'est le cas des ondes qui se forment sur les cordes des instruments de musique.

Même si elle se propage uniquement dans la direction de l'axe des x , une onde peut s'étendre dans l'espace. Dans ce cas, toute expression du type $\xi(x, t) = f(x - vt)$ signifie que, à l'instant t , la fonction prend la même valeur en tout point de l'espace de coordonnée x . Dans ce cas, cette expression représente ce que l'on appelle une *onde plane* qui se propage perpendiculairement à l'axe des x . La figure 14.30 montre une *surface ou front d'onde* d'une telle onde plane. Une onde plane peut aussi bien être longitudinale que transversale voire, comme c'est le cas des ondes électromagnétiques, être l'ensemble de deux ondes transversales qui vibrent dans des plans mutuellement orthogonaux (section 14.9.2).

La propagation d'une onde a généralement lieu dans plus d'une direction. C'est par exemple le cas des ondes qui se propagent à la surface de l'eau. La figure 14.31 montre des ondes de surface générées dans une cuve à ondes ; l'onde plane est obtenue au moyen d'un plongeur rectiligne qui touche à intervalles réguliers la surface de l'eau, alors que le plongeur qui génère l'onde circulaire est ponctuel. Mais le cas le plus courant est celui d'ondes qui se propagent dans l'espace à trois dimensions ; les ondes cylindriques et sphériques sont l'extension dans l'espace des ondes circulaires en deux dimensions. Notons que lorsqu'on est éloigné de la source, la courbure d'une onde cylindrique ou sphérique devient négligeable, permettant de la considérer comme une onde plane, ce qui justifie l'importance que nous accordons à ce type d'ondes.

14.8.5 Grandeurs physiques transportées par une onde

Il est important de réaliser qu'une onde, même dans un milieu matériel, ne transporte pas de matière. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer un bouchon qui flotte à la surface d'un plan d'eau sur lequel se propage une onde : le bouchon oscille verticalement sur place alors que l'onde se propage horizontalement. C'est l'état de mouvement qui se propage, ce que l'on décrit au moyen de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Une onde transporte de l'énergie et de la quantité de mouvement.

L'évaluation de ces deux grandeurs doit se faire en tenant compte du type d'onde envisagé. Ce sera fait pour l'onde électromagnétique harmonique à la section 14.9.4.

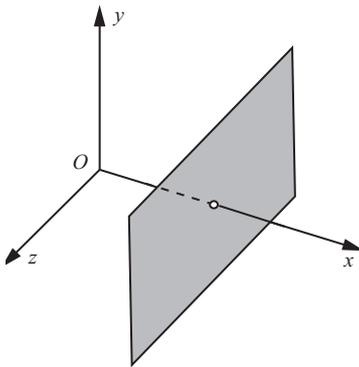


FIGURE 14.30 Onde plane se propageant le long de l'axe Ox .

a.



b.

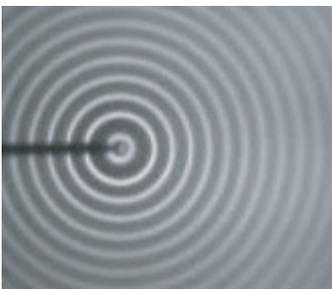


FIGURE 14.31 Ondes de surface : (a) onde plane ; (b) onde circulaire.

14.9 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Dans sa théorie, MAXWELL n'a pas seulement réussi à unifier l'électricité et le magnétisme mais, en révélant que ses équations impliquaient l'existence d'ondes électromagnétiques, il a également unifié l'optique avec l'électromagnétisme.

14.9.1 Existence des ondes électromagnétiques

Comme nous l'avons déjà affirmé à la section 14.5, l'adjonction par MAXWELL du courant de déplacement à la loi d'AMPÈRE a révélé l'existence d'ondes électromagnétiques. Nous allons montrer que la combinaison des équations de MAXWELL débouche sur l'équation d'onde pour chacun des deux champs.

Nous nous plaçons dans l'espace libre de charges et de courants. Dans ce cas, les équations de MAXWELL deviennent :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathcal{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathcal{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Nous formons le rotationnel des deux équations portant sur le rotationnel en permutant les dérivations temporelle et spatiale :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathcal{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathcal{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathcal{B}) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathcal{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{14.29}$$

Nous utilisons l'identité vectorielle⁷ :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathcal{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathcal{V}) - \Delta \mathcal{V}$$

où \mathcal{V} est un champ vectoriel quelconque et Δ le laplacien défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Si nous tenons compte du fait que la divergence de chacun des deux champs est nulle, il ne reste plus que le laplacien dans chacune des équations (14.29). Nous pouvons donc écrire :

7. ARBENZ K., WOHLHAUSER A.: *Compléments d'analyse*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathcal{E} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathcal{B}\end{aligned}\tag{14.30}$$

Nous avons obtenu l'équation d'onde pour chacun des deux champs, la perturbation se propageant à la vitesse :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}\tag{14.31}$$

Cette équation s'applique naturellement à chacune des composantes des deux champs envisagés.

14.9.2 Caractéristiques des ondes électromagnétiques

Nous avons découvert, à la section 14.7.2, que la densité du flux d'énergie dans le champ électromagnétique était décrite au moyen du vecteur de POYNTING, qui montre que l'énergie se propage dans une direction perpendiculaire à chacun des deux champs. Il est donc plausible d'admettre par hypothèse qu'une onde électromagnétique satisfaisant une relation telle que les équations (14.30) sera la composition des deux champs électrique et magnétique vibrant en phase dans des plans perpendiculaires. Nous voulons vérifier cette hypothèse.

Nous envisageons une onde sinusoïdale se propageant dans la direction des x positifs, une onde plane, et admettons que le champ électrique vibre dans la direction de l'axe des y et le champ magnétique dans celle de l'axe des z . Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= 0, & \mathcal{E}_y &= \mathcal{E}, & \mathcal{E}_z &= 0 \\ \mathcal{B}_x &= 0, & \mathcal{B}_y &= 0, & \mathcal{B}_z &= \mathcal{B}\end{aligned}$$

Dans le cas d'ondes sinusoïdales, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ \mathcal{B}(x, t) &= \mathcal{B}_0 \sin(kx - \omega t)\end{aligned}\tag{14.32}$$

Les amplitudes \mathcal{E}_0 et \mathcal{B}_0 ne sont pas arbitraires, car elles doivent vérifier la loi de FARADAY-HENRY et celle d'AMPÈRE-MAXWELL.

Les composantes correspondantes de la loi de FARADAY-HENRY donnent :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = k \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \omega \mathcal{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

ce qui implique :

$$k \mathcal{E}_0 = \omega \mathcal{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 = \frac{\omega}{k} \mathcal{B}_0 = c \mathcal{B}_0$$

À partir de la loi d'AMPÈRE-MAXWELL, nous obtenons :

$$-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} = -k\mathcal{B}_0 \cos(kx - \omega t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

d'où l'on tire :

$$k\mathcal{B} = \omega \epsilon_0 \mu_0 \mathcal{E}_0 \Rightarrow \mathcal{E}_0 = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathcal{B}_0 = c\mathcal{B}_0$$

ce qui confirme le résultat ci-dessus.

Cette relation entre les amplitudes est également valable pour les valeurs instantanées :

$$\mathcal{E} = c\mathcal{B} \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} = \frac{1}{c}\mathcal{E} \quad (14.33)$$

Cette équation implique également que les deux champs sont en phase. D'autre part, si l'on introduit le vecteur \mathbf{k} qui indique la direction et le sens de propagation, et dont le module est donné par l'équation (14.26), on montre à partir des équations de MAXWELL que les vecteurs \mathcal{E} , \mathcal{B} et \mathbf{k} forment un système de vecteurs orthogonaux orienté positivement⁸.

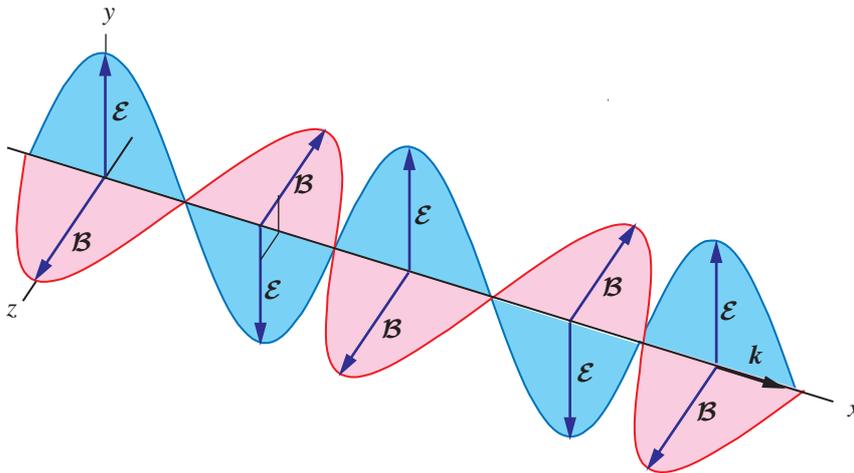


FIGURE 14.32 Champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique plane: les deux champs sont orthogonaux et forment avec le vecteur d'onde \mathbf{k} un système orienté positivement. Les deux champs sont en phase. L'onde représentée est polarisée linéairement.

La figure 14.32 montre l'onde électromagnétique donnée par les équations (14.32). Le champ électrique oscille dans le plan Oxy et le champ magnétique dans le plan Oxz . Une telle onde, caractérisée par le fait que les vecteurs de champ oscillent dans un plan fixe, est dite *polarisée linéairement*. Le plan de polarisation est, par convention, celui dans lequel oscille le champ électrique. Comme nous l'avons montré à la section 14.8.4, il s'agit d'une onde plane.

Pour une onde sinusoïdale, l'état général de polarisation est la *polarisation elliptique*. Dans ce cas, l'extrémité du vecteur \mathcal{E} (et celle du vecteur \mathcal{B} à angle droit) décrit, dans sa projection sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation, une ellipse en un temps égal à la période T de la vibration. Ce mouvement est décrit en décomposant le vecteur \mathcal{E} suivant deux axes orthogonaux Oy et Oz :

8. JACKSON J.D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1962.

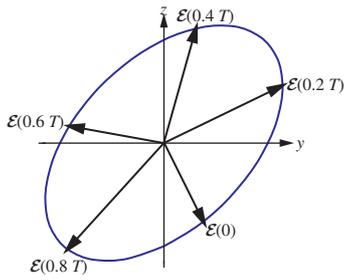


FIGURE 14.33 Polarisation elliptique: le vecteur du champ électrique effectue une rotation complète et varie son intensité en une période durant laquelle il avance d’une longueur d’onde. Le vecteur du champ magnétique fait de même, déphasé de $\pi/2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= \mathcal{E}_{0y} \sin(kx - \omega t) \\ \mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_{0z} \sin(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Pendant que le vecteur \mathcal{E} effectue un tour complet durant une période, il avance d’une longueur d’onde le long de l’axe Ox . Son extrémité effectue donc un mouvement hélicoïdal dont la figure 14.33 est la projection sur le plan Oyz . Lorsque le déphasage entre les deux composantes est nul, celles-ci sont confondues et la polarisation est linéaire. Si le déphasage est un multiple impair de $\pi/2$ (ou d’un quart de période), la polarisation est circulaire.

14.9.3 Source d’ondes électromagnétiques: le dipôle de HERTZ

Il existe de nombreuses méthodes pour produire des ondes électromagnétiques. Nous décrivons ici une des possibilités qui est particulièrement importante, autant du point de vue physique que technique. Il s’agit du rayonnement du dipôle électrique ou dipôle de HERTZ, qui est plus communément appelé une antenne linéaire. On peut s’en faire une image en admettant que l’on fait subir aux deux charges d’une dipôle électrique un mouvement de va-et-vient sinusoïdal, de telle manière que le moment dipolaire évolue selon la relation:

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \tag{14.34}$$

Pour comprendre le mécanisme d’émission d’une onde électromagnétique par une antenne linéaire, qui n’est rien d’autre qu’un conducteur formant un circuit ouvert parcouru par un courant variable de haute fréquence, on peut analyser ce qui se passe lorsque l’on déforme progressivement un circuit oscillant pour le transformer en une antenne.

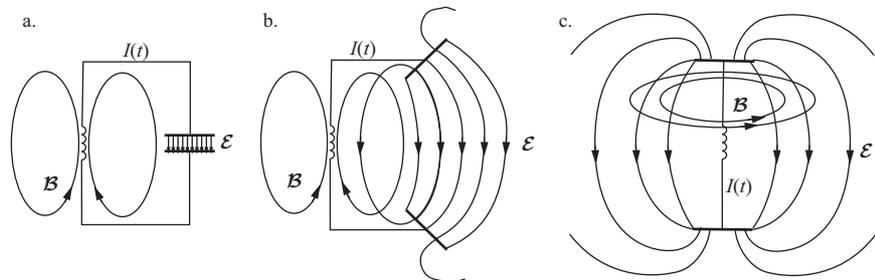


FIGURE 14.34 Genèse du dipôle de HERTZ: l’ouverture du condensateur du circuit oscillant permet la superposition des champs électrique et magnétique

La figure 14.34a représente le circuit oscillant. Les deux champs n’existent simultanément nulle part en dehors du circuit fermé. Le vecteur de POYNTING S n’a pas de composante dirigée vers l’extérieur, il n’y a donc pas d’ondes électromagnétiques.

Lorsque l’on ouvre le circuit (fig. 14.34b), les champs électrique et magnétique peuvent se superposer partiellement, ce qui engendre un certain flux d’énergie vers l’extérieur qui diminue rapidement avec la distance.

Lorsque le circuit est complètement ouvert sous forme d’antenne (fig. 14.34c), l’espace avoisinant est simultanément le siège des champs électrique et magnétique, et le flux d’énergie S est dirigé vers l’extérieur: l’antenne émet une onde électromagnétique. Le champ magnétique est celui qui est engendré par les variations du courant en vertu de la loi d’AMPÈRE-MAXWELL, celui de la bobine est négligeable.

Pour révéler l’existence des ondes électromagnétiques, Heinrich HERTZ utilisa un circuit oscillant dans lequel une bobine à induction produisait une tension élevée (bobine de Ruhmkorff) provoquant des étincelles entre deux petites sphères. L’éclatement de



FIGURE 14.35 Expérience de HERTZ: l’éclatement d’étincelles entre les deux petites sphères engendre des ondes électromagnétiques.

l'étincelle génère des ondes électromagnétiques dont HERTZ révéla la répartition (fig. 14.35) et les propriétés lors de sa série d'expériences entre 1886 et 1888, au cours de laquelle il découvrit également l'effet photoélectrique.

L'étude théorique du dipôle oscillant est un problème ardu. Nous nous contentons d'énoncer les résultats les plus importants. Nous envisageons un dipôle de longueur δ dont le moment dipolaire varie selon l'équation (14.34). La résolution des équations de MAXWELL pour cette situation donne, en coordonnées sphériques (r, φ, ϑ), pour une distance r grande par rapport à la longueur d'onde (champ lointain) et pour une longueur d'onde grande par rapport à la dimension du dipôle ($r \gg \lambda \gg \delta$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin(\vartheta)}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{u}_\vartheta \\ \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin(\vartheta)}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{u}_\varphi \end{aligned} \tag{14.35}$$

Alors que l'intensité du champ du dipôle statique, tant électrique que magnétique, décroît de manière inversement proportionnelle à r^3 , comme nous l'avons constaté dans l'exemple 13.4 et la section 13.8.2, celle des deux champs du dipôle oscillant décroît de manière inversement proportionnelle à r . C'est ce fait qui rend possible la transmission et la réception d'informations par l'intermédiaire d'antennes qui sont des dipôles oscillants.

Les deux vecteurs de champ sont perpendiculaires à la direction de propagation r (fig. 14.36). Vu qu'il est engendré par un courant parallèle à l'axe Oz , les lignes du champ magnétique sont des cercles parallèles au plan Oxy . Les lignes du champ électrique sont des boucles localisées dans les plans méridiens; l'inversion des lignes du champ électrique a lieu aux endroits de faible intensité (fig. 14.37).

Les deux champs ont des intensités nulles pour $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$, donc le long de l'axe Oz , alors qu'elles sont maximales dans le plan Oxy (plan équatorial). La courbe extérieure (ligne pointillée) de la figure 14.38 montre comment, pour une valeur constante de l'éloignement r , l'amplitude varie en fonction de l'angle zénithal ϑ .

14.9.4 Densité d'énergie, densité de quantité de mouvement de l'onde électromagnétique harmonique

La densité d'énergie du champ électromagnétique est la somme des contributions des deux champs qui le constituent. À partir des relations (13.27) et (13.61), et en tenant compte de l'équation (14.33) et du lien entre ϵ_0 et μ_0 , nous obtenons:

$$\rho_{E,EM} = \rho_{E,\mathcal{E}} + \rho_{E,\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \mathcal{B}_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_0^2 = \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2$$

La substitution de la valeur donnée par l'équation (14.35) donne:

$$\rho_{E,EM} = \frac{p_0^2}{16\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2} \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

La densité d'énergie forme une onde harmonique de fréquence 2ω et de nombre d'onde $2k$.

L'énergie et la quantité de mouvement s'écoulent en direction radiale, vu que le vecteur de POYNTING est perpendiculaire aux deux champs (fig. 14.39). Ce dernier est:

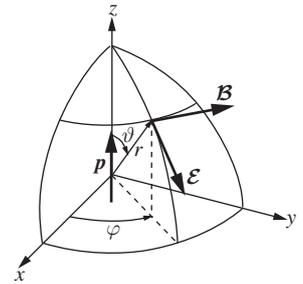


FIGURE 14.36 Vecteurs du champ dipolaire.

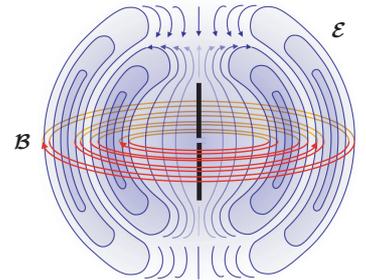


FIGURE 14.37 Lignes des champs électrique et magnétique associés au rayonnement d'un dipôle oscillant.

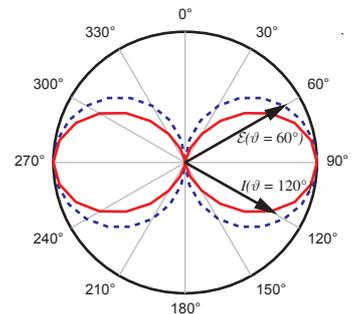


FIGURE 14.38 Répartition angulaire de l'amplitude du champ électrique (ligne discontinue) et de l'intensité (ligne continue) du rayonnement dipolaire.

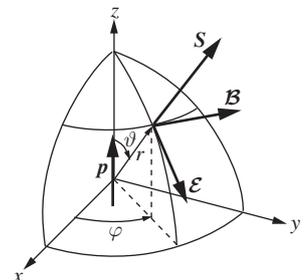


FIGURE 14.39 Vecteur de POYNTING associé au rayonnement dipolaire.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathcal{H} = \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{c} \mathcal{E}^2 \mathbf{u}_r \\
 &= \frac{p_0^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \omega^4 \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2} \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{u}_r
 \end{aligned} \tag{14.36}$$

La densité de flux d'énergie forme elle aussi une onde harmonique de fréquence 2ω et de nombre d'onde $2k$. On constate que le flux d'énergie varie de manière inversement proportionnelle au carré de la distance par rapport au dipôle, ce que nous attendions en vertu de la loi de conservation de l'énergie, vu qu'elle se répartit sur la surface d'une sphère. D'autre part, le flux d'énergie a une dépendance angulaire proportionnelle à $\sin^2(\vartheta)$. Cette dépendance est représentée par la courbe continue de la figure 14.38. L'intensité est maximale dans le plan équatorial et nulle dans l'axe du dipôle.

L'équation (14.36) montre que la densité de flux d'énergie est proportionnelle à ω^4 , ce qui veut dire que l'énergie rayonnée croît très fortement avec la fréquence d'oscillation du dipôle. Cette dépendance implique également que pour des fréquences faibles, le dipôle ne rayonne pratiquement pas, on passe par des phases successives de génération puis d'annihilation du champ dipolaire statique, l'énergie oscillant dans le voisinage du dipôle.

Lorsque l'on dérive deux fois l'équation (14.34) par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \sin(\omega t)$$

En intégrant sur une période le carré de cette accélération, on obtient :

$$\overline{\ddot{p}^2} = \frac{\omega^4 p_0^2}{2}$$

ce qui implique que :

$$p_0^2 \omega^4 = 2 \overline{\ddot{p}^2}$$

On voit donc que l'énergie rayonnée selon l'équation (14.36) est proportionnelle à l'accélération de la charge. Ce résultat général implique qu'une particule chargée en mouvement accéléré rayonne de l'énergie. Cette propriété explique notamment l'émission de rayon X par les électrons freinés dans l'anode d'un tube à rayon X; on parle de rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung.

Cette même propriété empêche l'existence d'un atome modélisé en tant que système dans lequel les électrons se déplaceraient sur des orbites circulaires ou elliptiques autour du noyau. Comme il s'agit d'un mouvement accéléré, les électrons rayonneraient de l'énergie et finiraient par tomber dans le noyau. Seule la physique quantique permet de modéliser correctement l'atome en adjoignant de nouvelles lois à celles de l'électromagnétisme.

L'onde électromagnétique transporte de la quantité de mouvement dont la densité de flux est donnée par l'équation (14.19), dans laquelle le vecteur \mathbf{a} coïncide avec le vecteur de propagation de l'onde. Les termes mixtes sont nuls, ce qui implique que le vecteur de densité de flux de quantité de mouvement a pour module :

$$j_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathcal{H}^2 = \varepsilon_0 \mathcal{E}^2 = P_{\text{rad}}$$

Cette densité de flux de quantité de mouvement correspond à une pression appelée *pression radiative*.

EXEMPLE 14.8. Étude de la pression radiative.

Etudier la pression engendrée par le rayonnement électromagnétique, (a) pour une incidence normale sur une surface parfaitement réfléchissante; (b) pour une incidence oblique sur une surface parfaitement réfléchissante; (c) pour une incidence isotrope; (d) pour une incidence isotrope sur une surface parfaitement absorbante.

SOLUTION: (a) Si la surface est parfaitement réfléchissante, l'onde réfléchie acquiert une quantité de mouvement égale et opposée à celle de l'onde incidente. La variation de la quantité de mouvement est donc double, ce qui entraîne:

$$P_{\text{rad}} = 2j_p = 2\varepsilon_0 \mathcal{E}^2$$

(b) Si ϑ est l'angle entre la direction de l'onde incidente et la normale au plan sur lequel elle est réfléchie, la quantité du rayonnement incident est proportionnelle à $\cos(\vartheta)$. En outre, la composante de la quantité de mouvement perpendiculaire au plan réfléchissant est aussi proportionnelle à $\cos(\vartheta)$. Le résultat de la partie (a) est donc pondérée par le facteur $\cos^2(\vartheta)$:

$$P_{\text{rad}} = 2j_p \cos^2(\vartheta) = 2\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 \cos^2(\vartheta)$$

(c) Le rayonnement isotrope est la superposition des ondes venant du demi-espace au-dessus du plan réfléchissant. Il faut faire la moyenne de $\cos^2(\vartheta)$ sur l'angle solide 2π correspondant à ce demi-espace:

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2(\vartheta)} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\text{Demi espace}} \cos^2(\vartheta) d^2\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi \left[-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il s'ensuit:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2}{3} j_p = \frac{2}{3} \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$$

(d) Dans le cas d'une surface absorbante, la pression est réduite de moitié:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} j_p = \frac{1}{3} \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$$

C'est ce résultat que nous avons énoncé à la section 10.5.2, dans le cadre de l'étude du rayonnement du corps noir. ■

Résumé du chapitre

Alors qu'en électrostatique les champs électrique et magnétique sont découplés, dès que l'un d'eux varie dans le temps, il entraîne des effets sur l'autre. Dans les processus

dépendant du temps, les deux champs sont intimement liés, on parle alors du champ électromagnétique.

Toute variation du flux d'induction magnétique \mathcal{B} entraîne l'apparition d'un champ électrique tourbillonnaire \mathcal{E} dont le sens est donné par la règle de la main gauche. Dans une boucle conductrice, ce phénomène engendre une tension et un courant induits. La tension induite est liée au champ tourbillonnaire par la relation $U_{\text{ind}} = \oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dot{\phi}_{\mathcal{B}}$, où $\dot{\phi}_{\mathcal{B}}$ représente la vitesse de variation du flux d'induction magnétique. Lorsqu'on l'exprime uniquement au moyen des intensités des champs, la loi d'induction de FARADAY-HENRY devient: $\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \dot{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{A}$, où $\dot{\mathcal{B}}$ est le taux de variation du flux d'induction magnétique. La version locale de la loi d'induction est: $\text{rot } \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$.

L'établissement ou l'interruption d'un courant dans un circuit s'accompagne d'une variation conjointe du champ magnétique engendré par les courants électriques. On appelle self-induction le phénomène d'induction engendré par ces variations. La tension induite est proportionnelle au taux de variation de l'intensité du courant: $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$. Le coefficient L est l'inductance du circuit.

MAXWELL a adjoint un terme à la loi d'AMPÈRE afin de tenir compte des effets engendrés par des variations temporelles du champ électrique. La loi d'AMPÈRE-MAXWELL devient $\oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \int_S \dot{\mathcal{D}} \cdot d\mathbf{A}$. En l'absence de matière polarisable, le champ électrique \mathcal{E} remplace le champ \mathcal{D} , d'où $\oint_C \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \dot{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{A}$. Les versions locales correspondantes sont respectivement $\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \dot{\mathcal{D}}$ et $\text{rot } \mathcal{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathcal{E}}$.

La densité d'énergie du champ électromagnétique est la somme des contributions électrique et magnétique: $\rho_E = \frac{1}{2} [\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}]$. La densité de flux d'énergie est donnée par $\mathbf{j}_E = \mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$. Le vecteur \mathcal{S} est le vecteur de POYNTING.

Comme le champ statique, le champ électromagnétique contient de la quantité de mouvement dont la densité est: $\mathbf{g} = \mathcal{S}/c^2 = (\mathcal{E} \times \mathcal{H})/c^2$. À chacune des composantes de la densité de mouvement correspond un vecteur de flux de quantité de mouvement qui a trois composantes. La densité des flux de quantité de mouvement est donc représentée par un tenseur \mathbf{j}_p qui a six composantes, car il est symétrique. Les termes sur la diagonale de ce tenseur sont l'opposé des contraintes introduites au chapitre précédent.

Une onde est une perturbation d'un milieu qui se transmet de proche en proche dans l'espace. La perturbation ξ est représentée par une fonction qui dépend à la fois de l'espace et du temps: $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Si la perturbation n'est pas amortie, elle a, dans une dimension, nécessairement la forme: $\xi(x, t) = f(x \pm vt)$. Le contenu des parenthèses est la phase de l'onde, v est la vitesse de phase. Une telle fonction est la solution générale de l'équation d'onde: $\partial^2 \xi / \partial t^2 = v^2 \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2$.

L'onde sinusoïdale ou harmonique $\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x - vt)]$ joue un rôle central en vertu du théorème de FOURIER qui permet de représenter toute fonction périodique comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales. Si la fonction n'est pas périodique, la somme est remplacée par une intégrale.

Les paramètres liés à l'onde harmonique sont la longueur d'onde λ qui représente la périodicité dans l'espace, et le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, soit le nombre de longueurs d'onde comprises dans la longueur 2π . La grandeur $\omega = kv = 2\pi f$ est la fréquence angulaire ou pulsation de l'onde, et f (ou ν) la fréquence proprement dite. Il s'ensuit que $v = \lambda f$, la vitesse de propagation de l'onde est le produit de sa fréquence et de sa longueur d'onde. Grâce à ces paramètres, l'argument du sinus peut être écrit de différentes manières: $k(x - vt) = 2\pi/\lambda(x - vt) = kx - \omega t = 2\pi(x/\lambda - t/T)$. La période T est l'inverse de la fréquence f .

À partir des équations de MAXWELL, on peut déduire pour chacun des champs \mathcal{E} et \mathcal{B} une équation d'onde, par exemple $\partial^2 \mathcal{E} / \partial t^2 = c^2 \Delta \mathcal{E}$, où $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ est le laplacien et $c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ est le carré de la vitesse de la lumière.

Dans l'onde électromagnétique, les intensités des deux champs sont liées entre elles par la relation $\mathcal{E} = c\mathcal{B}$, ce qui implique qu'ils vibrent en phase, dans des plans perpendiculaires. Le vecteur représentant l'intensité du champ électrique peut vibrer en gardant toujours la même direction, l'onde est dite polarisée linéairement. Le cas général de la polarisation d'une onde plane est la polarisation elliptique: l'extrémité du vecteur \mathcal{E} se déplace sur une ellipse et fait un tour complet durant le temps que met l'onde pour avancer d'une longueur d'onde. Les polarisations linéaire et circulaire sont des cas particuliers de la polarisation elliptique.

Une source possible d'ondes électromagnétiques est le dipôle de HERTZ ou antenne linéaire. Le moment dipolaire évolue selon la relation $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin(\omega t)$.

La densité d'énergie de l'onde harmonique est une onde harmonique de fréquence 2ω ; elle est proportionnelle à ω^4 et décroît avec le carré de la distance à l'émetteur. Il en va de même de la densité du flux d'énergie, le vecteur de POYNTING. L'énergie rayonnée est proportionnelle à l'accélération de la charge du dipôle. Il s'ensuit qu'une charge accélérée rayonne de l'énergie, ce qui rend impossible pour un atome un modèle semblable à un système solaire. L'onde électromagnétique transporte de la quantité de mouvement. Le module du vecteur de densité de flux de quantité de mouvement est $j_p = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 = P_{\text{rad}}$. Cette densité de flux de quantité de mouvement correspond à une pression, la pression radiative.

Problèmes⁹

- Un condensateur à plaques parallèles est constitué de plaques circulaires. La tension entre les plaques, entretenue au moyen de conducteurs sans résistance, varie en fonction du temps suivant $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. La distance d entre les plaques est beaucoup plus petite que leur rayon R , de sorte que les effets de bord peuvent être négligés. (a) À l'aide des équations de MAXWELL et d'arguments de symétrie, déterminez l'évolution temporelle de l'intensité des champs électrique et magnétique entre les plaques. (b) Comment l'intensité du courant dans les conducteurs et la densité du courant dans les plaques varient-elles en fonction du temps?
- Un condensateur à plaques parallèles est constitué de plaques circulaires séparées par une distance d beaucoup plus faible que leur rayon R , de sorte que les effets de bord peuvent être négligés. L'espace entre les plaques est rempli d'un matériau de constante diélectrique ϵ . La différence de potentiel entre les plaques varie selon $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. (a) Déterminez l'évolution temporelle de l'intensité et de la direction du champ électrique entre les plaques et de la densité de charge libre sur les plaques. (b) Comment l'intensité et la direction du champ d'induction magnétique varient-elles en fonction de la distance à l'axe du condensateur? (c) Calculez le flux du vecteur de POYNTING au niveau des bords du condensateur.
- Un cylindre à paroi mince de rayon R et de longueur l porte une charge caractérisée par sa densité de surface σ . Le cylindre tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω qui croît lentement dans le temps suivant la relation $\omega(t) = kt$, où k est une constante. En négligeant les effets de bord, déterminez (a) l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du cylindre; (b) l'intensité du champ électrique à l'intérieur du cylindre; (c) les énergies électrique et magnétique totales à l'intérieur du cylindre.
- Dans le dispositif de la figure 14.40, un conducteur de longueur infinie transporte un courant d'intensité I dans la direction des z positifs. Une spire conductrice rectangulaire, dont le côté parallèle au fil conducteur a une longueur l , est connectée à un voltmètre et s'éloigne du fil conducteur à une vitesse de module v .

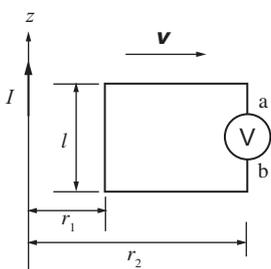


FIGURE 14.40
Problème 4

9. Les problèmes sont tirés de l'ouvrage *Problems and Solutions on Electromagnetism*, edited by Lim Yung-kuo, © 2005 World Scientific (avec l'autorisation de World Scientific).

- Indiquez laquelle des bornes a ou b du voltmètre est positive. (b) Calculez la valeur affichée par le voltmètre en fonction des distances r_1 , r_2 et de la longueur l .
- Un solénoïde très long portant n spires par unité de longueur transporte un courant dont l'intensité croît proportionnellement au temps: $I(t) = kt$. (a) Calculez l'intensité du champ d'induction magnétique à l'intérieur du solénoïde. (b) Calculez l'intensité du champ électrique à l'intérieur du solénoïde. (c) Considérez un cylindre imaginaire de longueur l et de rayon égal à celui du solénoïde et dont l'axe coïncide avec celui du solénoïde. Déterminez le taux auquel l'énergie pénètre dans le volume entouré par ce cylindre et montrez qu'il est égal à la dérivée temporelle de la grandeur $1/2 LI^2$, où L est l'inductance de cette portion du solénoïde.
- Une spire rectangulaire, de largeur a et de longueur b , tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire de module ω dans un champ d'induction magnétique uniforme mais dont l'intensité varie dans le temps selon $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$. Le vecteur de champ est perpendiculaire au plan de la spire à l'instant $t = 0$ (fig. 14.41). Déterminez la valeur de la tension induite dans la spire et montrez que sa fréquence est double de celle du champ.

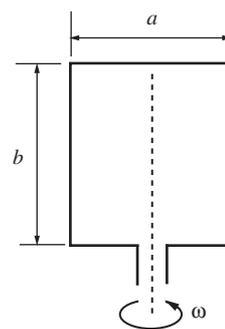


FIGURE 14.41
Problème 6

- Une spire rectangulaire de dimensions respectives a et b et de résistance R pénètre avec une vitesse constante de module v dans un champ d'induction magnétique d'intensité B , comme le montre la figure 14.42. Déterminez le module, la direction et le sens de la force qui s'exerce sur la spire en termes des paramètres donnés.

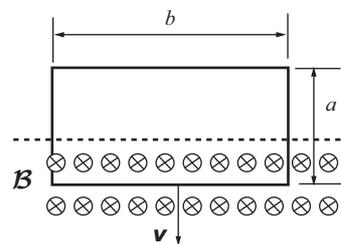


FIGURE 14.42
Problème 7

- On applique une force de module F pour entraîner une barre conductrice de résistance R qui glisse sur un cadre conducteur, comme le montre la figure 14.7. La barre part de l'immobilité et se déplace dans un champ d'induction magnétique constant d'intensité B perpendiculaire au plan du cadre. Admettez que les contacts sont sans frottement et que

l'inductance de la spire peut être négligée. (a) Déterminez le module de la vitesse de la barre en fonction du temps. (b) Déterminez l'intensité et le sens du courant en fonction du temps.

9. Une spire rectangulaire parfaitement conductrice, de côtés de longueurs respectives a et b , de masse m , d'inductance L , se déplace à partir d'une vitesse initiale de module v_0 dans son plan, dans la direction de son plus grand côté, d'une région libre de champ magnétique dans une région où règne un champ d'induction magnétique uniforme d'intensité \mathcal{B}_0 perpendiculaire au plan du rectangle. Déterminez le mouvement du rectangle en fonction du temps.
10. Une spire rectangulaire de dimensions a et b est abandonnée à l'instant $t = 0$ juste au-dessus d'une région où règne un champ d'induction magnétique d'intensité \mathcal{B} (fig. 14.43). La spire a une résistance R , une inductance L et une masse m . Considérez ce qui se passe durant le temps où la spire a son côté supérieur dans la région libre de champ magnétique. (a) En admettant que l'inductance peut être négligée, mais pas la résistance, déterminez l'intensité du courant induit et le module de la vitesse en fonction du temps. (b) Déterminez les mêmes valeurs en admettant que la résistance peut être négligée, mais pas l'inductance.

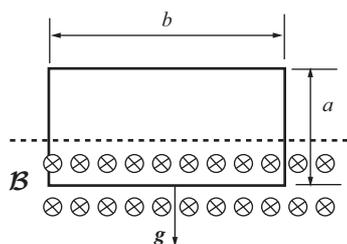


FIGURE 14.43
Problème 10

CHAPITRE 15

FORCES ET MOUVEMENTS DANS LES CHAMPS STATIQUES

Toutes les forces dont il a été question au chapitre 9 se manifestent à l'interface entre deux objets; elles apparaissent lorsque le transfert de quantité de mouvement se fait par conduction, à l'exception de la pesanteur où le transfert de quantité de mouvement se fait en mode radiatif.

Le but de ce chapitre est d'étudier un certain nombre de cas où ce transfert se fait sans contact, c'est-à-dire en mode radiatif par l'intermédiaire des champs électrique, magnétique et gravitationnel.

15.1 FORCES ET MOUVEMENTS DANS LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Depuis la disparition des téléviseurs à tube cathodique, on ne rencontre plus beaucoup d'appareils de la vie quotidienne qui utilisent l'interaction entre des charges et le champ électrique. C'est la raison pour laquelle les exemples de cette section seront tirés d'applications moins communes.

15.1.1 Interaction électrique: champ et potentiel

L'interaction entre une charge Q et un champ électrique d'intensité \mathcal{E} est donnée par la relation:

$$F = Q\mathcal{E} \quad (15.1)$$

L'intensité \mathcal{E} du champ électrique est liée au potentiel électrique φ par les relations:

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} [\varphi(\mathbf{r})] \quad (15.2)$$

et à la tension électrique ou différence de potentiel U par:

$$\int_A^B \mathcal{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB} \quad (15.3)$$

EXEMPLE 15.1. Comparaison de l'intensité des forces électrique et gravitationnelle.

Déterminez le quotient de la force qu'exercent l'une sur l'autre deux particules élémentaires, par exemple deux protons, par l'intermédiaire du champ électrique d'une part et du champ gravitationnel d'autre part.

SOLUTION: les deux protons portent la charge élémentaire $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. En vertu de la loi de COULOMB, la force qu'ils exercent l'un sur l'autre est donnée par:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

En revanche, ils s'attirent mutuellement avec une force donnée par la loi de la gravitation universelle:

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m^2}{r^2}$$

Le quotient des deux forces devient:

$$\frac{F_{\text{el}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{G} \frac{e^2}{m^2} = 1.2 \cdot 10^{36}$$

Si nous avons choisi des électrons, la valeur du rapport serait de $4.2 \cdot 10^{42}$. Nous voyons donc que l'interaction gravitationnelle est, au niveau microscopique, totalement négligeable et ne contribue en aucune manière à la stabilité de la matière. Si nous ne ressentons pas l'interaction électrique au niveau macroscopique, c'est parce que, en général, les objets sont électriquement neutres, ce qui n'est pas le cas pour la gravitation. C'est la raison pour laquelle la gravitation est la force dominante dans la vie quotidienne. De plus, c'est elle qui est responsable de la cohésion du système solaire et des galaxies, et qui donne à l'univers sa structure. ■

Souvent, dans les applications pratiques, les champs électriques servent à accélérer les particules chargées, à leur transmettre de l'énergie.

EXEMPLE 15.2. Vitesse et énergie acquises par un électron dans un champ électrique.

Déterminer l'énergie et la vitesse acquises par un électron initialement immobile qui franchit une différence de potentiel de 1 V convenablement polarisée.

SOLUTION: Lors du franchissement de cette différence de potentiel, l'électron acquiert de l'énergie aux dépens du champ électrostatique:

$$\Delta E = eU = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Cette quantité d'énergie correspond aux ordres de grandeur intervenant dans le monde atomique et celui des particules élémentaires, raison pour laquelle on lui fait correspondre une nouvelle unité, l'*électronvolt*, abrégé eV:

$$1 \text{ eV} \triangleq 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Connaissant la masse de l'électron, nous calculons sa vitesse à partir de l'énergie cinétique:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \approx 593.1 \text{ km s}^{-1}$$

Dans les anciens téléviseurs à tube cathodique, la tension d'accélération des électrons pouvait atteindre 30 kV. Pour une telle tension, la vitesse acquise est de $102\,728 \text{ km s}^{-1}$. Comme cette vitesse est proche du tiers de celle de la lumière, on se trouve dans une situation où il faudrait appliquer la théorie de la relativité restreinte pour obtenir un résultat correct. En effet, à cette vitesse, la masse est augmentée d'environ 6%, ce qui n'est pas négligeable. ■

EXEMPLE 15.3. Modèle simplifié de l'expérience de RUTHERFORD.

En 1904, J.J. THOMSON, qui avait révélé l'existence de l'électron en 1897, proposa un modèle de l'atome consistant en une sphère électriquement neutre dans laquelle la charge positive est répartie de manière uniforme dans la sphère, compensée par un nombre adéquat d'électrons distribués un peu comme les raisins de Corinthe dans un cake (plum pudding model). Entre 1909 et 1911, RUTHERFORD chargea deux de ses collaborateurs, GEIGER et MARSDEN, de mettre ce modèle à l'épreuve de l'expérience en bombardant une mince feuille d'or au moyen de particules α .

(a) Montrer au moyen d'un modèle que des particules α d'énergie égale à 4 MeV qui bombarderaient un tel atome ne seraient pas déviées de manière notable; on admettra que l'atome d'or a un rayon r_0 de $1.5 \cdot 10^{-10}$ m et que sa charge répartie uniformément sur tout le volume correspond à 79 charges positives élémentaires; (b) montrer ce que deviennent les résultats de l'expérience si l'on admet que la charge positive est concentrée dans un domaine dont le rayon est réduit à 10^{-15} m.

SOLUTION: (a) Lors de leur interaction avec les atomes d'or, les particules α peuvent être déviées dans toutes les directions de l'espace. Pour l'analyse, nous considérons celles qui se déplacent dans un plan vertical passant par le centre d'un atome d'or. Pour permettre de déterminer l'intensité de la force qu'exerce le champ électrique de la charge positive de l'atome sur une particule α , nous devons tenir compte de la distance de la trajectoire par rapport au centre de l'atome (fig. 15.1). En effet, en vertu du théorème de GAUSS, la particule incidente n'est soumise qu'à l'influence de la charge enfermée dans la sphère de rayon r à laquelle la trajectoire est tangente. La charge perçue par la particule incidente est:

$$Q_{\text{perçue}} = 79 \cdot e \left(\frac{r}{r_0} \right)^3$$

L'intensité de la force ressentie par la particule α dépend de la distance d qui la sépare du centre de l'atome. La composante verticale de cette force, qui détermine la valeur de la déviation, est donnée par:

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_\alpha Q_{\text{perçue}}}{d^3} y$$

La composante horizontale se calcule de manière analogue. Dans le modèle, un test logique détermine la valeur de r : si $|y| < r_0$ alors $r = |y|$, sinon $r = r_0$.

Le modèle a été simulé pour 20 valeurs de l'ordonnée initiale de la trajectoire, à savoir de $-2.5 \cdot 10^{-10}$ m à $2.5 \cdot 10^{-10}$ m. Comme le montre la figure 15.2a, les particules α traversent l'atome sans déviation notable. Une analyse des données de la simulation montre que la déviation verticale la plus importante pour la particule qui frôle l'atome d'or est de $1.15 \cdot 10^{-13}$ m, soit moins d'un millièmme du rayon admis pour l'atome selon le modèle de THOMSON.

(b) Vu la petitesse du rayon de la région dans laquelle est concentrée la charge positive, on peut la considérer comme une charge ponctuelle et se passer du test logique. Les composantes de la force de COULOMB ressentie par la particule α se calculent de manière analogue, à la différence près que la charge perçue est la charge totale de 79 charges positives élémentaires. Le modèle, simulé pour 20 valeurs de l'ordonnée initiale de la trajectoire, de $-1.5 \cdot 10^{-13}$ m à $1.5 \cdot 10^{-13}$ m, donne les résultats illustrés par la figure 15.2b dans laquelle la taille du centre répulsif est 10 fois trop grande.

Si nous avons choisi la même échelle que dans la figure 15.2a, nous aurions obtenu une image assez semblable, à savoir que la majorité des particules α traversaient la feuille d'or sans être déviées. Mais une échelle pratiquement mille fois plus petite révèle que GEIGER et MARSDEN ont observé que certaines particules étaient déviées de manière notable. Dans quelques rares cas, des particules étaient déviées sous un angle supérieur à 90° .

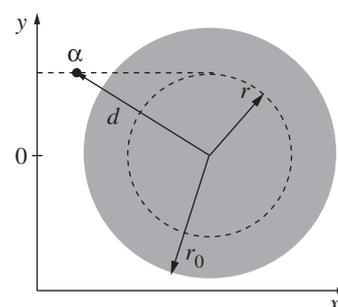
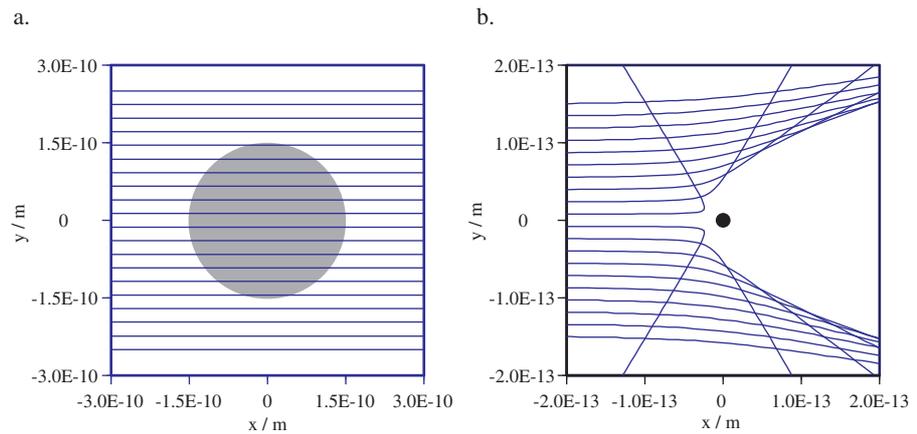


FIGURE 15.1 Évaluation de la charge perçue par une particule α .

FIGURE 15.2 Expérience de GEIGER et MARSDEN: (a) simulée pour le modèle de THOMSON d'un atome consistant en une sphère de charge positive uniformément répartie: les particules α ne sont pas déviées; (b) lorsque la charge positive est concentrée dans un volume mille fois plus petit, les particules α qui s'en approchent sont notablement déviées, voire rebondissent vers l'arrière (d'après HORST P. SCHECKER, *Physik - Modellieren*, tous droits réservés).



Lorsqu'il prit connaissance de ces résultats, RUTHERFORD fut d'abord perplexe¹, puis après avoir effectué des calculs, il en conclut que l'essentiel de la masse d'un atome est concentrée dans un volume extrêmement réduit qu'il appela le *noyau* de l'atome.

■

15.2 FORCES ET MOUVEMENTS DANS LE CHAMP MAGNÉTIQUE

Les exemples traités dans cette section seront également tirés d'applications scientifiques, vu que l'une des rares manifestations de l'influence du champ magnétique dans la vie quotidienne est son action sur l'aiguille d'une boussole.

15.2.1 Force de LORENTZ

À la section 13.8.3, nous avons découvert qu'un objet portant une charge Q qui se meut dans un champ d'induction magnétique est soumis à une force qui est à la fois perpendiculaire au vecteur de champ et au vecteur de vitesse, la force de LORENTZ:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (15.4)$$

Dans ce qui va suivre, nous allons découvrir comment on exploite la force de LORENTZ à la fois pour guider des particules chargées ou pour confiner des plasmas ultra-chauds dans la recherche sur la domestication de la fusion nucléaire.

1. «It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. On consideration, I realized that this scattering backward must be the result of a single collision, and when I made calculations I saw that it was impossible to get anything of that order of magnitude unless you took a system in which the greater part of the mass of the atom was concentrated in a minute nucleus. It was then that I had the idea of an atom with a minute massive centre, carrying a charge.» (Extrait d'un exposé de RUTHERFORD donné en 1936, «The Development of the Theory of Atomic Structure», dans *Background to Modern Science: Ten Lectures at Cambridge Arranged by the History of Science Committee*, 1936).

15.2.2 Particule chargée dans un champ uniforme

Si les deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{B} sont constants et mutuellement perpendiculaires, la trajectoire suivie par la particule chargée sera circulaire, vu que la force de LORENTZ s'exercera toujours perpendiculairement à la trajectoire (fig. 15.3). On peut donc écrire :

$$QvB = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

dont nous pouvons déduire d'une le rayon de la trajectoire suivie :

$$r = \frac{mv}{QB} \tag{15.5}$$

ainsi que la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{QB}{m} \tag{15.6}$$

qui se révèle être indépendante de la vitesse de la particule ; les paramètres qui fixent la vitesse angulaire sont la charge spécifique et l'intensité du champ d'induction magnétique. Cette valeur porte le nom de *fréquence cyclotron* pour des raisons qui seront données plus bas.

15.2.3 Spectromètre de masse

Le spectromètre de masse sert à séparer les particules chargées en fonction de leur masse. Le principe de fonctionnement apparaît dans la figure 15.4.

Si des ions de masse m , portant la charge Q , sont accélérés entre une différence de potentiel U , ils pénètrent dans la région où règne le champ d'induction d'intensité B avec une vitesse de module tel que :

$$v^2 = \frac{2QU}{m}$$

En combinant cette équation avec la relation (15.5) :

$$v = \frac{Q}{m} Br$$

nous obtenons :

$$\frac{Q}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \tag{15.7}$$

Cette relation montre que le spectromètre de masse sépare les ions en fonction de leur charge spécifique et donc, pour une même charge, en fonction de leur masse. C'est en utilisant cette technique que les chercheurs ont découvert, dans les années 1920, l'existence des *isotopes*.

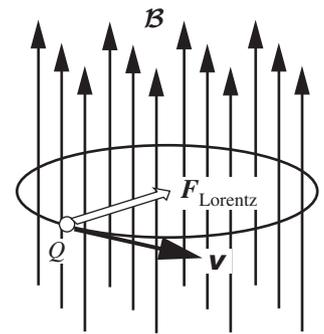


FIGURE 15.3 Une particule chargée qui se déplace dans un champ d'induction magnétique perpendiculairement aux lignes de champ suit une trajectoire circulaire.

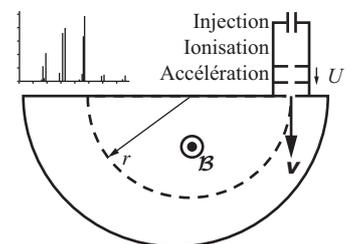


FIGURE 15.4 Schéma de principe du spectromètre de masse. Les particules de l'échantillon sont d'abord ionisées puis accélérées entre deux plaques qui servent également de collimateur. Elles pénètrent dans une région dans laquelle règne un champ d'induction magnétique d'intensité B , ce qui provoque leur déviation dépendant de leur masse vers un détecteur.

15.2.4 Cyclotron

L'équation (15.6) montre que la fréquence angulaire d'une particule chargée orbitant dans un champ d'induction magnétique ne dépend que de sa masse spécifique et de l'intensité du champ magnétique. ERNEST LAWRENCE, en 1929, eut l'idée d'utiliser cette particularité pour accélérer des particules en les confinant dans une région restreinte au moyen d'un champ magnétique, contournant ainsi les difficultés inhérentes aux accélérateurs linéaires de type van de Graaff, difficultés dues aux tensions élevées nécessaires.

L'idée de LAWRENCE consiste à placer la source qui émet les ions que l'on veut accélérer dans un champ magnétique auquel on ajoute un champ électrique alternatif perpendiculaire à B sur un diamètre de la trajectoire, en le faisant varier à la fréquence :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{QB}{2\pi m} \tag{15.8}$$

de façon à accélérer les ions chaque fois qu'ils traversent le diamètre. À chaque traversée du champ électrique, les ions acquièrent une certaine quantité d'énergie qui est multipliée par le nombre de traversées. Le champ électrique possédant les caractéristiques nécessaires est obtenu grâce à deux boîtes ayant la forme de la lettre D (d'où leur nom de *dees*) placées l'une en face de l'autre (fig. 15.5) et perpendiculaires au champ B . Les dees sont soumis à une tension alternative de fréquence f et d'amplitude de l'ordre de la dizaine de kilovolts. L'ensemble du système est contenu dans une chambre à vide.

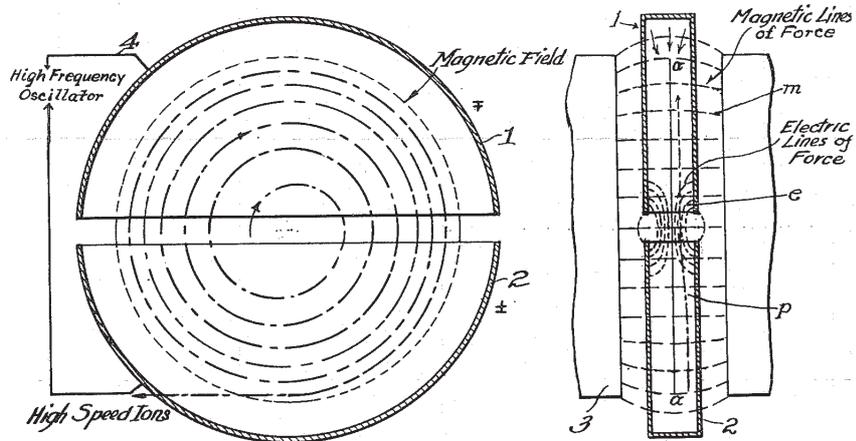


FIGURE 15.5 Cyclotron: schéma dessiné par ERNEST LAWRENCE figurant sur le brevet attribué en 1934. 1 et 2: dees; 3: un des pôles de l'électroaimant servant à fournir le champ d'induction; 4: connexion de la tension alternative d'accélération.

La particule atteindra sa vitesse maximale lorsque le rayon de sa trajectoire correspondra à celui du cyclotron :

$$R = \frac{mV_{\max}}{QB} \tag{15.9}$$

L'énergie cinétique acquise par la particule émergente sera donc :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} mV_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{m} B^2 R^2 \tag{15.10}$$

Cette relation révèle que l'énergie finale dépend des propriétés de la particule (sa charge Q et sa masse m) ainsi que des particularités du cyclotron (intensité B du champ et

rayon R des dees), mais pas de la tension d'accélération. Si celle-ci est faible, la particule devra décrire un plus grand nombre de tours pour acquérir son énergie finale.

15.2.5 Vitesse de pénétration quelconque

Si la vitesse de la particule qui pénètre dans le champ n'est pas perpendiculaire au vecteur de champ, sa décomposition en une composante perpendiculaire (qui sera à l'origine d'un mouvement circulaire uniforme si le champ est homogène) et une composante parallèle au champ qui ne sera pas influencée par l'interaction avec le champ et restera constante permet de se rendre compte que la particule suivra une trajectoire hélicoïdale à pas constant.

15.2.6 Mouvement d'une particule dans un champ inhomogène

Comme le montre l'équation (15.5), le rayon de courbure de la trajectoire – qu'elle soit circulaire ou hélicoïdale – dépend de l'intensité du champ magnétique. Si la particule se dirige vers des régions de plus grande intensité, le rayon de l'hélice diminue. Une étude détaillée du phénomène, à laquelle nous allons procéder, permet de montrer que la composante de la vitesse parallèle au champ décroît au fur et à mesure que la particule se rapproche des régions où règne une grande intensité, jusqu'à être réduite à zéro et à inverser son sens; on parle de *miroir magnétique*. Ce phénomène est utilisé pour le confinement des plasmas.

Pour illustrer ce comportement, nous allons étudier ce qui se passe lorsqu'une particule pénètre dans un champ inhomogène sous un certain angle. Nous considérons un champ d'induction magnétique possédant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz , ce qui implique qu'il ne possède que les composantes axiale et radiale, respectivement \mathcal{B}_z et \mathcal{B}_r . Nous admettons que la composante \mathcal{B}_z varie de telle manière que

$$\mathcal{B}_z = \mathcal{B}_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2} \right)$$

où L est la distance caractéristique d'évolution du champ; l'intensité doublant sur cette distance. La figure 15.8 montre la structure d'un tel champ pour $0 \leq z \leq L$. Cette structure se répète de manière symétrique pour $-L \leq z \leq 0$, engendrant ce que l'on appelle une *bouteille magnétique*. À partir de la relation (13.55)

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$$

qui, exprimée en coordonnées cylindriques, devient:

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot \mathcal{B}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} = 0$$

nous obtenons

$$\frac{\partial(r \cdot \mathcal{B}_r)}{\partial r} = -\mathcal{B}_0 \frac{2z}{L^2} r$$

ce qui entraîne:

$$r \cdot \mathcal{B}_r = -\mathcal{B}_0 \frac{zr^2}{L^2} + C$$

En vertu de la symétrie, l'intensité du champ radial est nulle sur l'axe de symétrie, ce qui implique que la constante C est nulle. Nous obtenons finalement :

$$\mathcal{B}_r = -\mathcal{B}_0 \frac{zr}{L^2}$$

que nous convertissons en coordonnées rectangulaires :

$$\mathcal{B}_x = -\mathcal{B}_0 \frac{zx}{L^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_y = -\mathcal{B}_0 \frac{zy}{L^2}$$

Nous pouvons maintenant énoncer l'équation de bilan de la quantité de mouvement d'une particule de charge Q et de masse m plongée dans un tel champ en appliquant la loi de LORENTZ :

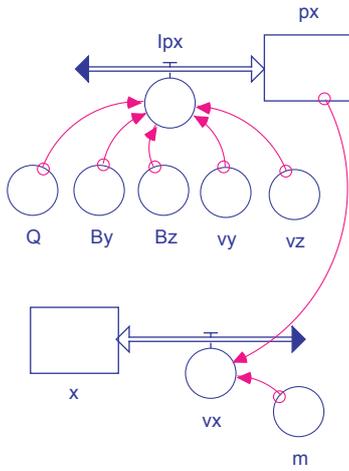


FIGURE 15.6 Bilan pour la première composante du flux de quantité de mouvement pour une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique inhomogène.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = \mathbf{I}_p &= \begin{pmatrix} \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \frac{dv_x}{dt} \\ m \frac{dv_y}{dt} \\ m \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\mathcal{B}_0 \frac{zx}{L^2} \\ -\mathcal{B}_0 \frac{zy}{L^2} \\ \mathcal{B}_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \end{pmatrix} \\ &= Q\mathcal{B}_0 \begin{pmatrix} v_y \cdot \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) + v_z \frac{zy}{L^2} \\ -v_x \cdot \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) - v_z \frac{zx}{L^2} \\ v_x \cdot \frac{zy}{L^2} - v_y \cdot \frac{zx}{L^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

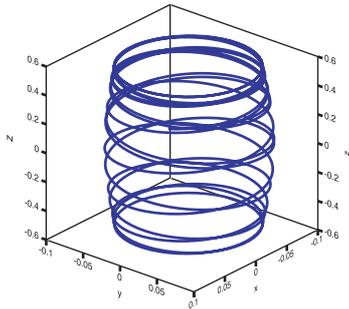


FIGURE 15.7 Trajectoire suivie par une particule confinée dans la bouteille magnétique du modèle de la figure 15.6.

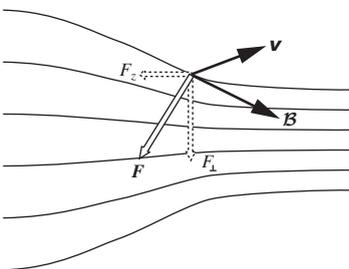


FIGURE 15.8 Structure du champ magnétique entre $z = 0$ et $z = L$ et décomposition de la force de LORENTZ en une composante radiale et une composante axiale.

Si l'on modélise ce processus au moyen d'un logiciel de dynamique des systèmes, on obtient le comportement des particules chargées en mouvement dans un tel champ. La figure 15.6 montre la partie du modèle relative au mouvement de la particule selon Ox .

Comme il ne s'agit que d'obtenir un résultat qualitatif, nous avons attribué aux paramètres constants du modèle, à savoir m , Q , \mathcal{B}_0 et L , une valeur égale à l'unité. Une particule qui pénètre dans le champ en $z = 0$ sous un angle de 0.5 radian reste confinée entre approximativement -0.55 et 0.55 unité de longueur, ce que montre la figure 15.7 établie sur la base des résultats de la simulation.

La figure 15.8 permet de comprendre pourquoi la particule rebrousse chemin. Dans la région où l'intensité du champ augmente, la force de LORENTZ, qui est à la fois perpendiculaire au vecteur vitesse \mathbf{v} et au vecteur d'intensité du champ \mathbf{B} , possède une composante F_z orientée dans le sens des z négatifs. Cette composante axiale croît au fur et à mesure que la particule avance, ce qui entraîne une diminution progressive de la vitesse axiale jusqu'à ce qu'elle s'annule et s'inverse. À partir de cet instant, la composante axiale de la force de LORENTZ provoque une accélération. Lorsque la particule franchit la position de départ $z = 0$, la composante axiale de la force de LORENTZ s'annule et s'inverse, provoquant une répétition du processus de manière symétrique. La particule est piégée dans la bouteille magnétique. Les particules qui pénètrent sous un

angle faible par rapport à l'axe du champ magnétique s'échappent de la bouteille magnétique.

Des processus semblables se déroulent dans le champ magnétique terrestre qui nous sert de bouclier de protection face au rayonnement cosmique. Il s'agit d'une douche de particules chargées qui nous proviennent essentiellement du Soleil ainsi que de l'espace intersidéral. Seules les particules qui tombent suivant l'axe magnétique terrestre atteignent la Terre sans être déviées. Toutes les autres décrivent une trajectoire hélicoïdale. Comme l'intensité du champ augmente dans le voisinage de la Terre, plus particulièrement aux pôles, seules celles qui ont une très grande énergie peuvent atteindre la surface avant d'être réfléchies par l'effet de miroir magnétique. Mais les particules qui ont été réfléchies peuvent rester piégées dans le champ magnétique, sans pouvoir s'en extraire (*bouteille magnétique*). C'est majoritairement le cas pour les électrons. Ces particules piégées dans le champ magnétique terrestre constituent ce que l'on appelle les *ceintures de VAN ALLEN*, découvertes en 1958 lors du lancement des premiers satellites artificiels. On sait maintenant que la Terre est entourée de deux telles ceintures, une ceinture intérieure localisée entre 800 km et 4000 km au-dessus de la surface, et une extérieure qui s'étend jusqu'à 60 000 km (fig. 15.9).

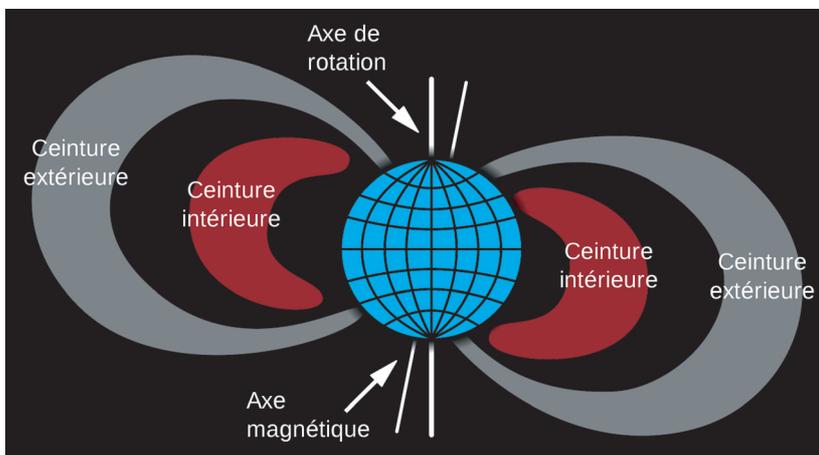


FIGURE 15.9 Représentation schématique des ceintures de VAN ALLEN de la Terre.

1. Qu'est-ce qui différencie l'interaction de particules chargées avec les champs électrique et magnétique ?
2. Qu'en est-il au point de vue énergétique ?

Q

1. Le champ électrique exerce une force dans la direction des lignes de champ, ce qui provoque une variation du module de la vitesse de la particule et éventuellement de sa direction. Le champ magnétique exerce la force perpendiculairement au vecteur vitesse, ce qui entraîne un changement de direction sans modification du module de la vitesse.
2. L'action du champ électrique provoque une variation de l'énergie cinétique de la particule, celle du champ magnétique ne la modifie pas.

R

15.3 FORCES ET MOUVEMENTS DANS LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Alors que les champs électrique et magnétique sont prédominants dans le monde microscopique, le champ gravitationnel est celui qui est responsable de la cohésion et de la dynamique des grandes structures.

15.3.1 Interaction, champ et potentiel gravitationnels

Comme dans le cas de charges dans un champ électrostatique, une masse m dans un champ gravitationnel d'intensité \mathcal{G} subit une force d'intensité :

$$F = m\mathcal{G} \quad (15.11)$$

L'intensité \mathcal{G} du champ gravitationnel est liée au potentiel gravitationnel V par les relations :

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} [V(\mathbf{r})] \quad (15.12)$$

L'intensité du champ engendré en un point $P(\mathbf{r})$ par une masse ponctuelle M (ou sphérique en dehors de celle-ci) est égale à :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (15.13)$$

et son potentiel est donné par :

$$V(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} \quad (15.14)$$

Dans le cas d'une masse ponctuelle ou sphérique, vu la symétrie radiale du potentiel et du champ, seule la variable spatiale r doit être prise en compte :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} [V(\mathbf{r})] = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

15.3.2 Champ gravitationnel et orbites planétaires

Le comportement d'un corps placé dans le champ gravitationnel central d'une masse M peut être modélisé par l'observation du mouvement qu'effectuerait une bille de masse m que l'on lancerait dans le puits de potentiel engendré par la masse M (fig. 15.11).

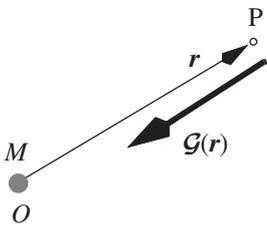


FIGURE 15.10 L'intensité du champ gravitationnel d'une masse centrée en O dépend de l'endroit où on la mesure. Le vecteur d'intensité est dirigé vers la masse qui engendre le champ.

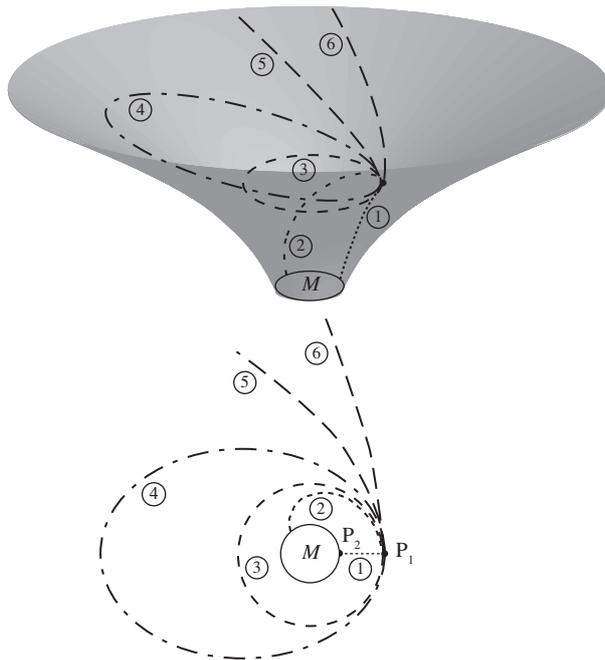


FIGURE 15.11 Mouvements dans le champ gravitationnel: ① chute libre; ② tir horizontal; ③ satellisation à vitesse minimale; ④ satellisation entre vitesse de satellisation et de libération (trajectoire elliptique); ⑤ trajectoire parabolique correspondant à la vitesse de libération; ⑥ trajectoire hyperbolique au-delà de la vitesse de libération.

La trajectoire de la bille peut être envisagée comme une trajectoire virtuelle, alors que la trajectoire réelle correspond à la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe du puits, de la trajectoire virtuelle suivie par la bille de masse m dans le puits.

15.3.3 Vitesse initiale nulle

Examinons tout d'abord le cas simple de l'objet lâché du point P_1 sans vitesse initiale dans le champ gravitationnel du corps central. La trajectoire virtuelle est une chute vers le fond du puits le long de la ligne de plus grande pente (trajectoire ①). La trajectoire réelle suit une ligne de champ.

Si nous formulons l'équation de bilan de l'énergie totale de l'objet aux points P_1 et P_2 , nous obtenons:

$$E_{\text{grav}}(1) + E_{\text{cin}}(1) = E_{\text{grav}}(2) + E_{\text{cin}}(2)$$

$$-G \frac{Mm}{r_1} + 0 = -G \frac{Mm}{r_2} + \frac{1}{2} m v_2^2$$

Nous sommes donc en mesure de calculer le module de la vitesse acquise par l'objet à la distance r_2 du centre de masse du corps central:

$$v_2 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

Si, par exemple, le corps central est la Terre, le second étant un météorite provenant d'un point P_1 placé hors du champ gravitationnel terrestre, r_1 tend vers l'infini et r_2 est égal au rayon terrestre R_{Terre} . La vitesse de chute du météorite à la surface de la Terre sera donc (si nous négligeons le freinage dû à la résistance de l'air):

$$v_2 = \sqrt{2GM_{\text{Terre}} \frac{1}{R_{\text{Terre}}}} = 11.2 \text{ km s}^{-1} = v_{\text{libération}}$$

Si nous inversons le raisonnement, nous pouvons conclure que cette vitesse est celle que nous devons imprimer à un corps lancé verticalement de la surface de la Terre pour qu’il puisse quitter le champ gravitationnel terrestre (émerger du puits de potentiel, pour utiliser l’image que nous venons de créer). Cette vitesse est appelée *vitesse de libération*. C’est, à peu de chose près, la vitesse que l’on doit imprimer à un objet que l’on veut envoyer sur la Lune (en réalité, elle peut être légèrement inférieure, l’objet ne devant être amené que jusqu’au « col de potentiel » que révèle la figure 13.78).

15.3.4 Vitesse initiale non nulle

Nous imaginons maintenant que l’objet est lancé du point P₁ avec une vitesse initiale non nulle, parallèle à la surface du corps central. Suivant le module de cette vitesse initiale, il suivra l’une des trajectoires ② à ⑥.

La trajectoire ② correspond à un jet horizontal dont la portée va augmenter avec le module de la vitesse initiale; avec l’augmentation de cette vitesse initiale, on peut imaginer que, dans le vide, l’objet pourrait spiraler plusieurs fois autour de la Terre avant de tomber au sol.

Pour une vitesse critique dont nous allons calculer le module, la bille de notre modèle resterait à hauteur constante dans le puits de potentiel, ce qui correspondrait à une trajectoire circulaire autour de la Terre: l’objet est satellisé (trajectoire ③). En égalant l’accélération centripète que subit cet objet à l’intensité du champ gravitationnel:

$$\frac{v_1^2}{r_1} = G \frac{M}{r_1^2}$$

nous obtenons le module de la vitesse minimale pour la satellisation sur une trajectoire circulaire à une distance r_1 du centre de la masse M :

$$v_{\text{satellisation}} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

Pour la Terre, la vitesse minimale de satellisation est celle que l’on obtient si on satellise l’objet au niveau du sol:

$$v_{\text{satellisation}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}}} = 7.9 \text{ km s}^{-1}$$

Si nous augmentons le module de la vitesse initiale, la bille escaladera les parois du puits de potentiel, et nous observons une trajectoire elliptique (trajectoire ④). Avec l’augmentation de la vitesse initiale, l’excentricité de l’ellipse deviendra de plus en plus importante. Lorsque la vitesse initiale sera égale à la vitesse de libération, l’ellipse s’ouvrira pour devenir une parabole (trajectoire ⑤ irréalisable dans la pratique, vu qu’il s’agit d’un cas singulier). Au-delà de la vitesse de libération, la trajectoire est hyperbolique (trajectoire ⑥). C’est la trajectoire de la plupart des comètes qui ne font qu’un passage dans le système solaire (Hyakutake, Hale-Bopp). Ce n’est pas le cas de la comète de HALLEY qui a une trajectoire elliptique, vu qu’elle est un élément du système solaire.

Calculons l'énergie totale associée à un objet qui suivrait la trajectoire parabolique :

$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{libération}}^2 - G \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} 2GMm \frac{1}{r} - G \frac{Mm}{r} = 0$$

Il est simple de montrer que, au-dessous de cette vitesse critique, l'énergie totale du système est négative, alors qu'elle est positive au-dessus. En conclusion, si l'on choisit le niveau de référence du potentiel à l'infini, l'énergie totale d'une masse m dans le champ gravitationnel d'une masse M est négative lorsque le système est lié, positive lorsque la masse m s'est libérée du champ de la masse M .

EXEMPLE 15.4. Mouvement képlérien.

Modéliser le mouvement d'un corps dans le champ gravitationnel terrestre pour différentes vitesses et conditions initiales : (a) lancement horizontal avec une vitesse initiale inférieure, mais proche de la vitesse de satellisation ; (b) vitesse initiale inférieure, mais proche de la vitesse de libération ; (c) objet se dirigeant vers la Terre à une vitesse supérieure à la vitesse de libération.

SOLUTION : (a) Comme la trajectoire se déroule dans un plan, nous nous plaçons dans un repère orthonormé Oxy dont l'origine coïncide avec le centre de la Terre (fig. 15.12). La dynamique est donnée par les équations (15.11) et (15.13). Le champ gravitationnel de la Terre échange de la quantité de mouvement avec l'objet par un flux dont la composante selon Ox est :

$$I_{px} = -GM_{\text{Terre}} m_{\text{corps}} \frac{x}{r^3}$$

C'est l'unique force qui s'exerce sur le corps. Un objet qui franchirait un point situé à 3000 km d'altitude avec une vitesse parallèle au plan horizontal local de module égal à 5.86 km s^{-1} suivrait une trajectoire qui l'amènerait à percuter la Terre après 56 minutes, soit un peu moins d'une demi-révolution (fig. 15.14a). Le frottement de l'air qui aurait légèrement modifié la fin de la trajectoire n'a pas été pris en compte, vu qu'il ne se manifeste de manière notable qu'en dessous de 50 km d'altitude. Si l'on augmentait la vitesse initiale à 5.87 km s^{-1} , en l'absence d'atmosphère, l'objet effleurerait la surface du globe aux antipodes et effectuerait des révolutions complètes.

(b) Le modèle est exactement le même, seules les conditions initiales sont différentes. Lancé d'une altitude de 2000 km avec une vitesse parallèle au plan horizontal local de module égal à 9.50 km s^{-1} , l'objet effectue des révolutions d'une durée de 64.6 heures sur une trajectoire elliptique (fig. 15.14b). L'éloignement maximal par rapport au centre de la terre est de 155 000 km, le module de la vitesse est alors de 0.52 km s^{-1} .

(c) L'objet se dirige vers la Terre d'un point situé à 400 000 km de distance. Le module de la vitesse est alors de 2.64 km s^{-1} . La trajectoire s'incurve dans le voisinage de la Terre, que l'objet contourne sur une trajectoire hyperbolique. La distance minimale est de 10 625 km, le module de la vitesse est alors de 8.94 km s^{-1} (fig. 15.14c1), supérieur à la vitesse de libération. Les trajectoires des particules alpha dans le voisinage du noyau des atomes d'or de la figure 15.2 sont également des hyperboles. La seule différence est qu'elles sont la conséquence d'une interaction de répulsion.

Lorsque la trajectoire de l'objet est plus éloignée de la Terre, elle demeure de forme hyperbolique, mais la courbure dans le voisinage de la Terre est beaucoup moins prononcée. À titre d'exemple, la figure 15.14c2 montre un objet venant d'un point situé à 400 000 km de distance, avec une vitesse de module égal à 1.75 km s^{-1} . La distance minimale est de 56 516 km, le module de la vitesse est alors de 3.90 km s^{-1} .

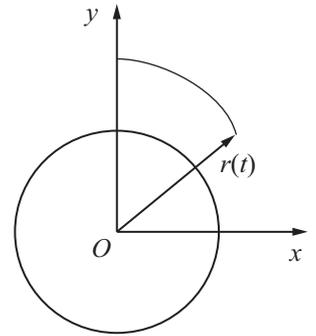


FIGURE 15.12 Repère orthonormé d'origine coïncidant avec le centre de la Terre.

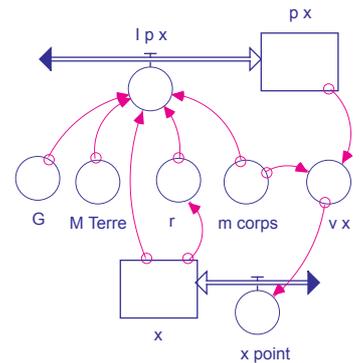
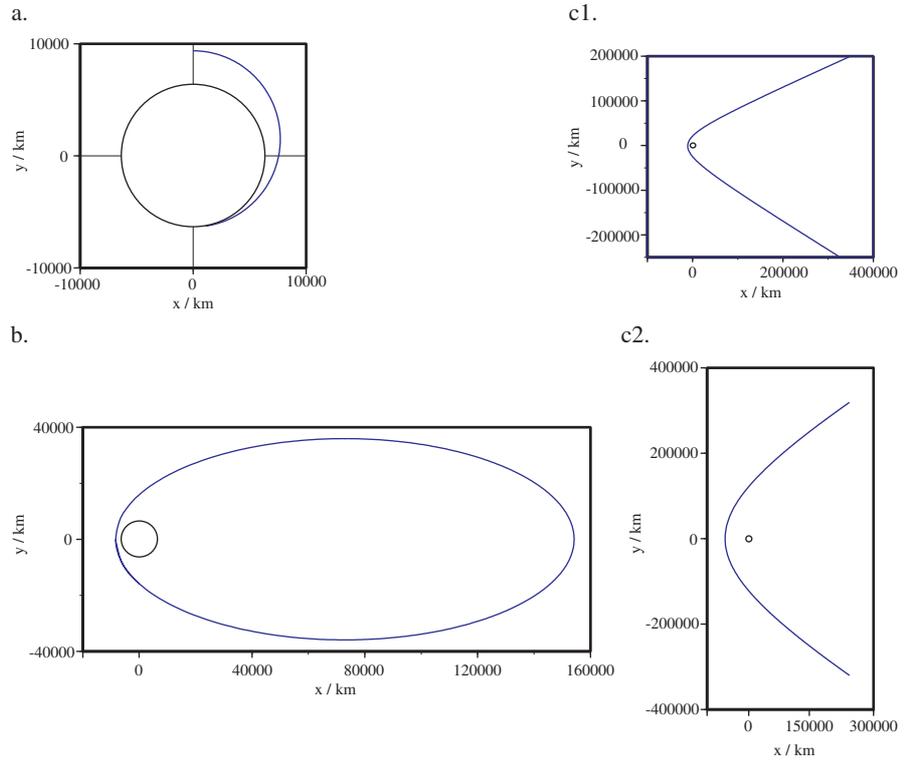


FIGURE 15.13 Diagramme de dynamique des systèmes du mouvement képlérien pour une des composantes de l'interaction.

FIGURE 15.14 Trajectoires képlériennes: (a) chute due à une vitesse inférieure à la vitesse de satellisation; (b) satellisation sur une trajectoire elliptique à une vitesse proche de la vitesse de libération; (c1) approche sur une trajectoire hyperbolique proche de la Terre; (c2) trajectoire hyperbolique éloignée de la Terre. Dans les deux derniers cas, la vitesse dans le voisinage de la Terre est supérieure à la vitesse de libération.



1. Pourquoi les astronautes flottent-ils dans la station spatiale?
2. Pourrait-on placer un satellite géostationnaire au-dessus d'une ville européenne?
3. Pourquoi l'Agence spatiale européenne (ESA) a-t-elle placé le site de lancement à Kourou, en Guyane française?



1. Tout comme la station spatiale, ils sont satellisés autour de la Terre. Or, un objet satellisé est en chute libre vers le centre de la Terre, mais comme il avance, sa chute est compensée par la rotondité de la Terre.
2. Un satellite géostationnaire doit nécessairement être placé dans le plan équatorial pour pouvoir être synchrone avec le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe. Si on plaçait un satellite à l'altitude des satellites géostationnaires ailleurs que dans le plan équatorial, il effectuerait une rotation complète en 24 heures et ne passerait qu'une fois par jour au-dessus d'un même point du globe.
3. Kourou est à 5° de l'équateur, ce qui est un avantage pour le lancement des satellites géostationnaires. La distance au centre de la Terre augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'équateur, ce qui permet d'économiser de l'énergie lors du lancement. L'effet de fronde dû à la rotation de la Terre est maximal à l'équateur, nul aux pôles.



15.4 MOUVEMENT RELATIF ET EFFETS D'INERTIE

L'objectif des sections qui suivent est d'étudier le comportement d'objets qui se déplacent dans l'espace interplanétaire, soumis à la seule action de la gravitation universelle. Le problème de deux corps en interaction gravitationnelle a été traité à la section 15.3. L'apparition d'un troisième corps rend les interactions tellement complexes qu'il n'est plus possible d'obtenir une solution analytique (sauf au moyen d'un développement en une série qui converge très lentement et ne permet pas de prédire le comportement du système²). Après NEWTON, qui ne disposait pas des outils mathématiques pour attaquer le problème, plusieurs mathématiciens, dont LÉONARD EULER, s'y intéressèrent. Joseph Louis LAGRANGE proposa en 1772 la solution d'un cas particulier où le troisième corps est de masse négligeable comparée à celle des deux autres: c'est le *problème à trois corps restreint*.

Lors de l'étude du problème restreint, pour simplifier les équations, on se place dans un référentiel qui tourne avec les deux corps les plus importants. C'est la raison pour laquelle la première des sections qui suivent est consacrée à l'étude de ce qu'il advient des relations cinématiques lors du changement de référentiel. Les sections suivantes aborderont la théorie relative à la détermination des points de LAGRANGE, puis nous modéliserons le comportement d'un corps positionné dans le voisinage du point L4.

Dans ce qui va suivre, nous admettons que toutes les vitesses sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière c , ce qui nous place dans un contexte non relativiste.

15.4.1 Référentiel inertiel et relativité galiléenne

À la section 8.2.4, nous avons découvert que, s'il n'est soumis à aucune interaction, c'est-à-dire en l'absence de flux ou de sources de quantité de mouvement, la vitesse d'un objet reste constante. Un référentiel qui a cette propriété est appelé *référentiel inertiel* ou *référentiel galiléen*.

Nous envisageons un système inertiel S , muni d'un repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$, et un second système qui se déplace relativement au premier, le système relatif R muni d'un repère orthonormé $O'x'_1x'_2x'_3$ (fig. 15.15). Le vecteur r_0 repère la position de l'origine O' du système relatif R dans le système S . La position d'un mobile M est repérée par les vecteurs position respectifs r et r' qui sont liés entre eux par la relation

$$r = r_0 + r' \quad (15.15)$$

Nous admettons que le système R se déplace à vitesse constante par rapport à S , c'est-à-dire que

$$\frac{dr_0}{dt} = \mathbf{v}_0 = \text{const} \quad (15.16)$$

Nous montrerons à la section 15.4.3 que les accélérations mesurées dans chacun des deux systèmes sont identiques, qu'elles soient mesurées dans S ou dans R , ce qui implique que R est aussi un système inertiel.

Donc, si l'équation (15.16) est valable, on peut écrire l'équation (15.15) sous la forme:

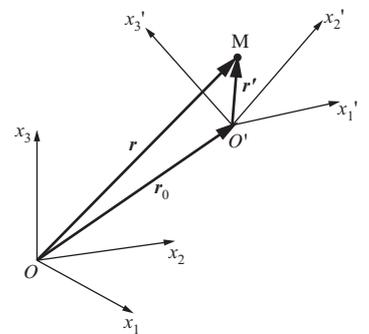


FIGURE 15.15 Lien entre la position d'un mobile M repérée dans deux référentiels différents.

2. SUNDMAN, K.F., 1913, Mémoire sur le problème des trois corps, Acta Mathematica, 36, 105-179.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}_0 t \quad (15.17)$$

ce que l'on appelle la *transformation de Galilée*, qui permet de transformer les équations du mouvement lors du passage d'un système inertiel à l'autre. L'égalité des accélérations dans les deux systèmes implique qu'il n'est pas possible, au moyen d'expériences de mécanique, de déterminer si un référentiel est immobile ou se déplace à vitesse constante. Ce ne l'est pas non plus si l'expérience a recours à une interaction non mécanique.

15.4.2 Cinématique dans un référentiel en mouvement quelconque

Nous admettons maintenant que le système relatif R effectue un mouvement quelconque, ce qui englobe la possibilité de rotation, donc d'un mouvement accéléré. Cette rotation a lieu autour d'un axe passant par O' , dont la direction et le sens sont définis par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ dont le module correspond à la vitesse de rotation du référentiel R. Comme à la section 15.4.1, le vecteur \mathbf{r}_0 repère la position de l'origine O' du système relatif R. La position d'un mobile M est repérée par les vecteurs position respectifs \mathbf{r} et \mathbf{r}' qui sont liés entre eux par la relation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (15.18)$$

Pour établir le lien entre les grandeurs cinématiques vitesse et accélération lors du passage d'un système à l'autre, nous exprimons les vecteurs position au moyen de leurs composantes et des vecteurs unitaires associés :

$$\mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{r}' = \sum_i x'_i \mathbf{u}'_i$$

Commençons par évaluer les dérivées temporelles des vecteurs dans le système relatif R en mouvement. Comme nous admettons que ce référentiel peut effectuer une rotation, nous devons tenir compte de la variation des vecteurs unitaires :

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \sum_i \frac{d'x'_i}{dt} \mathbf{u}'_i + \sum_i x'_i \frac{d'\mathbf{u}'_i}{dt} \quad (15.19)$$

où d'/dt indique que la dérivation est effectuée dans le référentiel R. Comme nous l'avons déjà constaté à la section 9.3.2, la variation d'un vecteur unitaire ne peut être que perpendiculaire à ce dernier. Dans notre cas, cette variation est due à la rotation du référentiel R caractérisée par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$. En tant que vecteur de vitesse angulaire, le module de $\boldsymbol{\omega}$ correspond au taux de variation de l'angle de rotation, qui est le même que celui de la variation de la direction du vecteur unitaire. Il est donc naturel de conclure que

$$\frac{d'\mathbf{u}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'_i$$

ce qui nous permet de réécrire la relation (15.19) :

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \sum_i \frac{d'x'_i}{dt} \mathbf{u}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_i x'_i \mathbf{u}'_i = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

dans laquelle \mathbf{v}' représente la vitesse du mobile M mesurée dans R. Une dérivation temporelle dans le référentiel S correspond donc à une dérivation temporelle plus une rotation dans R, ce que nous pouvons exprimer au moyen d'un opérateur :

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \quad (15.20)$$

Si nous l'appliquons au vecteur $\boldsymbol{\omega}$, nous obtenons :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

ce qui implique que l'accélération angulaire est la même dans les deux référentiels.

Pour obtenir la dérivée seconde, nous appliquons deux fois l'opérateur (15.20) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} &= \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \mathbf{r}' = \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}}_{\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{d\mathbf{r}'}{dt}}_{\mathbf{v}'} + \underbrace{\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Nous obtenons la vitesse et l'accélération du mobile calculée dans le référentiel S par dérivation de la relation (15.15). Le vecteur vitesse devient :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

Il est constitué de la vitesse d'entraînement de R par rapport à S augmentée de la vitesse de translation et de rotation du mobile par rapport à R.

L'accélération dans S est donnée par :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \quad (15.21)$$

15.4.3 Interprétation des résultats : dynamique dans un système accéléré

Afin de comprendre la signification des termes de l'équation (15.21), nous appliquons la loi fondamentale de la dynamique (9.6) dans chacun des deux systèmes. Un observateur placé dans le référentiel inertiel S enregistre l'accélération \mathbf{a} due à l'action de la résultante \mathbf{F} des forces extérieures. Si la masse du mobile est égale à m , il vient :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \left[\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \right] \quad (15.22)$$

En revanche, pour un observateur placé dans le référentiel accéléré R, l'accélération relative \mathbf{a}' doit être corrigée par les termes supplémentaires dus au mouvement relatif, et l'application de la loi fondamentale de la dynamique donne pour lui :

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \underbrace{\left[\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right]}_{\text{effet d'entraînement}} - \underbrace{2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')}_{\text{effet Coriolis}} \quad (15.23)$$

En examinant des cas particuliers du mouvement de R par rapport à S, nous allons pouvoir interpréter les observations d'une personne se trouvant dans le système accéléré R.

Système en mouvement à vitesse constante. Lorsque le référentiel R se déplace à vitesse constante par rapport à S, tous les termes du membre de droite sont nuls, sauf F , impliquant :

$$ma' = F = ma \tag{15.24}$$

ce qui justifie notre affirmation de la section 15.4.1 au sujet de l'égalité des accélérations mesurées dans chacun des systèmes, égalité qui implique l'équivalence de systèmes qui se déplacent à vitesse constante, les systèmes inertiels ou galiléens.

Système en mouvement rectiligne accéléré. En admettant que la résultante des forces extérieures est nulle, le seul terme qui subsiste dans le membre de droite est l'accélération a_0 du système R. L'observation de la personne placée dans R s'exprime par :

$$ma' = -ma_0 \tag{15.25}$$

Les deux systèmes ne sont plus équivalents. L'observateur perçoit une accélération opposée à l'accélération du système dans lequel il se trouve. S'il est par exemple dans un véhicule qui est en train de démarrer, il percevra une accélération dirigée vers l'arrière qui le plaquera contre le dossier de son siège. Si, au contraire, le véhicule freine, il sera emporté vers l'avant. Il interprétera ces observations comme dues à l'action d'une force. En fait, il s'agit d'un *effet d'inertie*. Tant qu'une force externe n'agira pas sur lui, il conservera son état de mouvement, l'immobilité par rapport au sol au démarrage ou la vitesse acquise lors du freinage. Pour qu'il puisse suivre le mouvement du véhicule, il faut qu'une force lui apporte ou lui retire de la quantité de mouvement : le dossier du siège le fera au démarrage, la ceinture de sécurité et le frottement sur le siège au freinage.

Il est usuel de désigner par *forces d'inertie* ou *forces fictives* ou *forces apparentes* ou *pseudoforces* les effets dus à l'inertie dans un système accéléré. Pour bien les différencier des forces au sens de la section 9.1.2, nous les désignerons par *effet d'inertie*.

Système en rotation. À nouveau, pour simplifier l'analyse, nous admettons que la résultante des forces extérieures est nulle. Comme la vitesse v' est nulle, l'effet CORIOLIS l'est aussi et il ne reste qu'un terme dans l'effet d'entraînement. Ainsi, la perception de l'observateur dans le système accéléré est exprimée par :

$$ma' = m [-\omega \times (\omega \times r')] = ma_{\text{centrifuge}} \tag{15.26}$$

Nous montrerons dans l'exemple 15.5 que l'accélération perçue est radiale, dirigée vers l'extérieur. C'est la raison pour laquelle on désigne cet effet d'inertie par *effet centrifuge*. Dans un véhicule qui prend un virage vers la gauche, un passager sera plaqué sur la portière droite par l'accélération centrifuge. Cette accélération centrifuge, dont nous verrons que le module est égal à $\omega^2 r'$, est égale et opposée à l'accélération centripète (9.30) nécessaire pour permettre au véhicule de suivre une trajectoire circulaire. Cette dernière accélération est le fait d'une force extérieure, par exemple l'adhérence des pneus sur la route.

Au cas où la vitesse angulaire n'est pas uniforme, l'observateur percevra un effet supplémentaire :

$$m\mathbf{a}' = m[-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'] = m(\mathbf{a}_{\text{centrifuge}} + \mathbf{a}_{\text{Euler}}) \quad (15.27)$$

L'accélération $-\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'$, dite *accélération d'EULER*, est opposée à l'accélération tangentielle donnée par l'équation (9.31). Placée sur un cheval de bois d'un carrousel qui démarre, une personne sera rejetée vers l'arrière du cheval, alors qu'elle aura tendance à tomber vers l'avant lors du freinage.

Translation dans un système en rotation. Quelle est la trajectoire d'un projectile lancé par un canon fixé au centre d'un disque en rotation, qui est par le fait même un référentiel accéléré R? Vue d'un référentiel inertiel S, la trajectoire du projectile est rectiligne. Mais pour un observateur placé dans le référentiel accéléré R, cette trajectoire est incurvée.

En effet, vu du référentiel accéléré, le projectile est soumis à deux accélérations dues, d'une part, au mouvement de rotation du référentiel et, d'autre part, à la vitesse relative du projectile par rapport au référentiel.

Si nous nous référons à l'équation (15.23), en admettant que les forces extérieures sont nulles et que la vitesse angulaire du référentiel R est constante, nous voyons qu'il subsiste deux termes, à savoir l'accélération centrifuge et celle de CORIOLIS:

$$m\mathbf{a}' = m[-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] = m(\mathbf{a}_{\text{centrifuge}} + \mathbf{a}_{\text{Cor}}) \quad (15.28)$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un troisième vecteur qui est perpendiculaire aux deux premiers. La force de CORIOLIS est donc normale au vecteur vitesse et n'est, de ce fait, pas associée à un flux d'énergie.

EXEMPLE 15.5. Projectile lancé dans un référentiel en rotation: modèle dynamique.

Depuis le centre d'un plateau de rayon R tournant dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire constante de module ω , on lance un projectile avec une vitesse de module v de manière à atteindre une cible entraînée à la périphérie du plateau (fig. 15.16). Élaborer le modèle dynamique correspondant afin de déterminer la trajectoire observée dans le référentiel tournant.

SOLUTION: Dans le référentiel tournant, le projectile est soumis simultanément aux effets centrifuge et de CORIOLIS donnés par l'équation (15.28).

Pour l'élaboration du modèle dynamique, nous devons calculer chacune des composantes des deux forces d'inertie qui se manifestent. La force centrifuge pour un système en rotation avec une vitesse angulaire constante a pour composantes:

$$m\mathbf{a}_{\text{centrifuge}} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y' \\ \omega x' \\ 0 \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} -\omega^2 x' \\ -\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega^2 \mathbf{r}'$$

ce qui confirme notre affirmation précédente au sujet de la direction, du sens et du module de cette force.

Évaluons l'effet CORIOLIS, à nouveau dans un système en rotation avec une vitesse angulaire constante:

$$m\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} -\omega v'_y \\ \omega v'_x \\ 0 \end{pmatrix} = 2m\omega \begin{pmatrix} v'_y \\ -v'_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

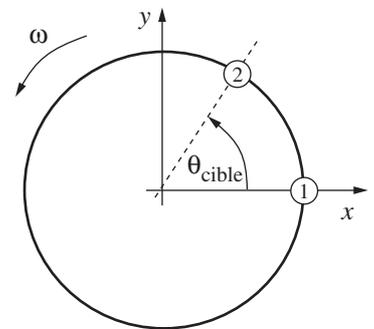


FIGURE 15.16 On lance un projectile pour qu'il atteigne une cible fixée à la périphérie d'un plateau tournant à une vitesse de module ω . Lors du lancement, la cible se trouve à la position 1. Pour tenir compte du déplacement de la cible, il faut anticiper sa position au moment de l'impact (position 2).

La figure 15.17 ci-dessous montre la partie du modèle dynamique où sont exprimées les composantes respectives des forces ressenties dans le système tournant.

FIGURE 15.17 Modèle dynamique : composantes des effets centrifuge et de CORIOLIS dans le système tournant.

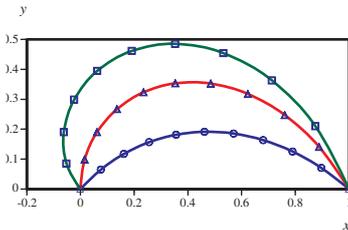
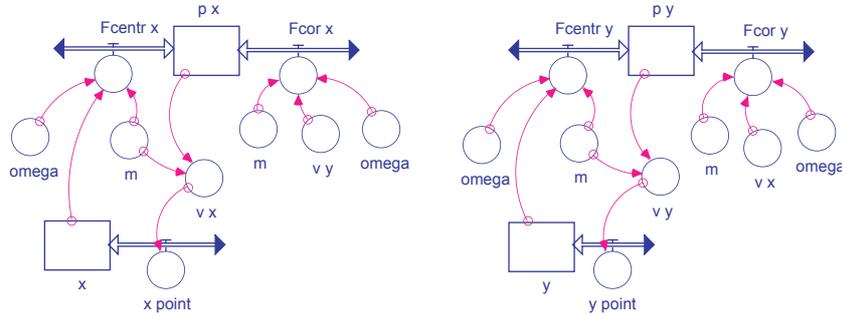


FIGURE 15.18 Trajectoires perçues par un observateur emporté par le plateau tournant. Les trajectoires correspondent à des angles de lancements θ_{cible} respectifs de 45° , 90° et 135° . Les points sur les trajectoires correspondent à des intervalles de temps égaux.

Le modèle a été simulé avec des valeurs égales à l'unité pour le rayon R , la masse m et la vitesse du projectile. La vitesse angulaire ω a la même valeur que l'angle φ à l'unité près.

La figure 15.18 montre les trajectoires perçues dans le référentiel accéléré pour différentes valeurs de la vitesse angulaire du plateau tournant. Pour accentuer les effets, on a admis que les vitesses du projectile et du plateau en rotation sont du même ordre de grandeur.

L'exemple 15.6 permet d'expliquer quels sont les facteurs qui déterminent la forme de la trajectoire perçue dans le référentiel tournant.

EXEMPLE 15.6. Projectile lancé dans un référentiel en rotation : étude analytique.

Analyser la trajectoire : (a) du point de vue d'un observateur inertiel ; (b) du point de vue d'une observateur placé sur le plateau ; (c) déterminer l'importance relative des composantes des effets centrifuge et de CORIOLIS et les représenter graphiquement pour trois points de la trajectoire.

SOLUTION : (a) Dans le système inertiel, l'analyse est simple, la trajectoire est rectiligne. Il suffit de prendre en compte le fait que la cible se déplace et anticiper l'endroit où elle se trouvera lorsque le projectile atteindra la périphérie du plateau. Si v représente le module de la vitesse du projectile, le temps de vol est $\Delta t_{vol} = R/v$. Durant ce temps, le plateau balaie un angle $\theta_{cible} = \omega \Delta t_{vol} = \omega R/v$. Si le lanceur est pointé sous cet angle par rapport à la ligne de visée vers la cible, le projectile touchera la cible à la position 2 (fig. 15.16). Dans un repère cartésien, la position instantanée du projectile est donnée par :

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = vt \begin{pmatrix} \cos(\theta_{cible}) \\ \sin(\theta_{cible}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons introduit la troisième composante parce que nous en aurons besoin lors de la formation des produits vectoriels intervenant dans le calcul des accélérations.

(b) Dans le repère en mouvement, la position instantanée est donnée par l'équation (15.15) :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

Comme la position est mesurée au moyen de l'angle, nous avons :

$$\mathbf{r}'(t) = vt \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour se rendre compte de la manière dont l'observateur accéléré perçoit cette trajectoire (fig. 15.18), il faut se souvenir que, pour lui, la cible est immobile. Le projectile n'est pas lancé en direction de la cible, mais sous l'angle θ_{cible} . À cause du mouvement de son référentiel, il perçoit une trajectoire incurvée, comme si le projectile la corrigeait pour atteindre l'objectif. Cette courbure de la trajectoire n'est qu'apparente, elle est due au fait que le mouvement de rotation du plateau sur lequel se trouve l'observateur rapproche sa ligne de vision de la trajectoire rectiligne du projectile.

Nous savons que la forme de la trajectoire perçue par l'observateur accéléré est due à l'effet centrifuge provoqué par la rotation du plateau et à l'effet CORIOLIS provoqué par le mouvement relatif du projectile par rapport à ce même plateau tournant. Vu du référentiel accéléré, le vecteur vitesse change constamment de direction, mais son module augmente également à cause des accélérations centrifuge et de CORIOLIS que nous allons évaluer.

Nous utilisons le résultat de l'exemple 15.5 pour évaluer l'accélération centrifuge

$$\mathbf{a}_{\text{centrifuge}}(t) = \omega^2 \mathbf{r}'(t) = \omega^2 vt \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est une accélération de même direction et de même sens que le vecteur position, donc dirigée vers l'extérieur de la trajectoire.

Pour pouvoir calculer l'accélération de CORIOLIS, nous devons évaluer la vitesse \mathbf{v}' dans le référentiel accéléré en tant que dérivée du vecteur \mathbf{r}' :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = v \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + vt \begin{pmatrix} \omega \cdot \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ -\omega \cdot \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= v \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) + \omega t \cdot \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) - \omega t \cdot \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Son produit vectoriel avec le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ donne l'accélération de CORIOLIS que nous évaluons en nous servant du résultat de l'exemple 15.5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{\text{Cor}}(t) &= -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'(t) = -2\boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} -v'_y(t) \\ v'_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -2\omega v \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) + \omega t \cdot \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) + \omega t \cdot \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -2\omega v \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} - 2\omega^2 vt \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -2\omega v \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ \cos(\theta_{\text{cible}} - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} - 2\omega^2 \mathbf{r}'(t)
 \end{aligned}$$

(c) Le premier terme de l'accélération de CORIOLIS a un module constant égal à $2\omega v$. Le vecteur est perpendiculaire au vecteur position instantané et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire. Le second terme a un module double de celui de l'accélération centrifuge et il est opposé à cette dernière. Nous constatons donc que l'accélération de CORIOLIS non seulement annule l'accélération centrifuge par l'intermédiaire du second terme, mais engendre une accélération résultante dirigée vers l'intérieur de la trajectoire (fig. 15.19).

FIGURE 15.19 Vecteurs des accélérations centrifuge et de CORIOLIS, ainsi que ceux de l'accélération résultante à trois instants différents pour le cas d'un angle de lancement de 90° .

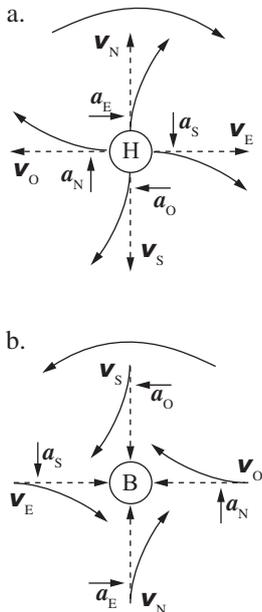
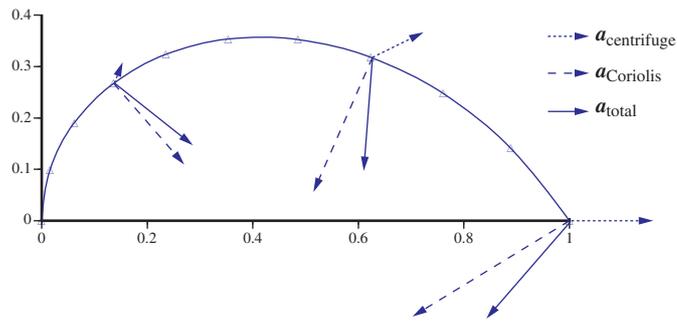


FIGURE 15.20 Sens de rotation des masses d'air sur la Terre: (a) anticyclone; (b) cyclone.

EXEMPLE 15.7. Manifestation des effets d'inertie à la surface de la Terre.

Expliquez pourquoi, dans l'hémisphère Nord, un cyclone (zone de basse pression) tourne dans le sens antihoraire, alors qu'un anticyclone (zone de haute pression) tourne dans le sens horaire.

SOLUTION: Envisageons tout d'abord une zone de haute pression et plaçons-nous sur une « Terre plate » pour simplifier l'analyse. En l'absence de rotation de la Terre, la pression élevée chasserait les masses d'air en direction radiale (flèches pointillées dans la figure 15.20a). Vue d'une position située dans l'hémisphère Nord, la rotation de la Terre s'effectue dans le sens antihoraire, le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ sort du plan. L'accélération de CORIOLIS, $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, est un vecteur perpendiculaire au vecteur vitesse \mathbf{v} , agissant de telle manière que la déviation est toujours orientée vers la droite dans le sens du déplacement. Ainsi, pour un vent orienté vers le sud, l'accélération de CORIOLIS sera orientée vers l'ouest. L'effet global de ces déviations est une mise en rotation des masses d'air dans le sens horaire. Dans le cas d'une zone de basse pression, les vents se dirigent vers la dépression (fig. 15.20b), et la déviation vers la droite engendre un mouvement global de rotation dans le sens antihoraire.

Vue d'une position située dans l'hémisphère Sud, la rotation de la Terre s'effectue dans le sens horaire, l'accélération de CORIOLIS s'inverse, la déviation a lieu vers la gauche. Le sens de rotation des masses d'air est lui aussi inversé.

EXEMPLE 15.8. Écoulement de l'eau dans un lavabo.

On entend souvent dire que l'eau d'un lavabo se vide en tournant toujours dans le même sens. Est-ce le cas ?

SOLUTION : Si c'était le cas, le sens de rotation devrait être celui d'une dépression, donc anti-horaire. Pour déterminer si cela est possible, il suffit de calculer la valeur de l'accélération de CORIOLIS. Nous devons tenir compte de la latitude, vu que la composante horizontale de l'accélération dépend de celle-ci. Nous nous plaçons à une latitude moyenne ϕ de 45° . Le module de la vitesse angulaire est égal au quotient de 2π et de la durée du jour. En admettant une vitesse radiale de l'écoulement de 1 m s^{-1} , nous obtenons :

$$a_{\text{cor}} = 2\omega v \sin(\phi) = 2 \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} 1 \text{ m s}^{-1} \sin(45^\circ) = 1.03 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$$

Pour un lavabo de 50 cm de diamètre, le déplacement latéral à la hauteur de la bonde serait de 5 dixièmes de millimètre, pour autant qu'il n'y ait aucune autre perturbation de l'écoulement. Pour avoir un effet notable, il faudrait que le lavabo ait un diamètre d'au moins 1 kilomètre. La rotation observée a un sens aléatoire. Elle est engendrée par des perturbations incontrôlables au moment de l'ouverture de la bonde. ■

15.5 PROBLÈME À TROIS CORPS RESTREINT

Comme évoqué dans l'introduction de la section 15.4, il n'est pas possible de donner une description exacte du mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. Joseph Louis LAGRANGE proposa en 1772 une solution pour le cas particulier où le troisième corps a une masse m négligeable comparée aux masses M_1 et M_2 des deux autres corps, ce qui implique que sa présence ne perturbe pas le mouvement de ces deux corps.

15.5.1 Points de LAGRANGE

Énoncé du problème. La démarche de LAGRANGE consiste à chercher les solutions des équations qui maintiennent les trois corps à une distance constante les uns des autres. Si \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont les vecteurs qui repèrent les positions des masses M_1 et M_2 par rapport à l'origine du référentiel située au centre de masse CM (fig. 15.21), la force totale perçue par la troisième masse m est donnée par³ :

$$\mathbf{F} = -GM_1 m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - GM_2 m \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \quad (15.29)$$

Les deux vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 varient dans le temps, vu que les deux masses M_1 et M_2 tournent l'une autour de l'autre. Il serait possible d'obtenir les solutions pour $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$ en résolvant le problème à deux corps, puis de rechercher les solutions pour l'équation de mouvement :

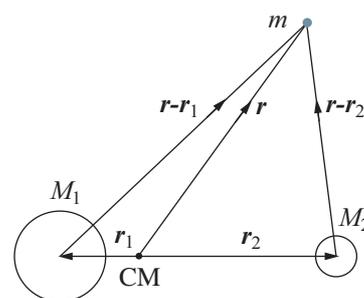


FIGURE 15.21 Repérage de trois corps en interaction gravitationnelle : si le troisième corps a une masse m beaucoup plus faible que celle des deux autres, on parle du problème à trois corps restreint.

3. Cette version de la théorie est reprise du document « The LAGRANGE Points » créé par NEIL J. CORNISH pour WMAP Education (WILKINSON Microwave Anisotropy Probe).

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (15.30)$$

en exigeant que les positions relatives des trois corps restent fixes. Ce sont ces *solutions stationnaires* que l'on appelle les *points de LAGRANGE*.

La méthode la plus simple pour trouver ces solutions stationnaire consiste à se placer dans un référentiel tournant dans lequel les deux masses importantes ont des positions fixes. L'origine de ce nouveau référentiel est placée au centre de masse des deux masses importantes et une vitesse angulaire de module ω donnée par la troisième loi de KEPLER (13.80) dans laquelle la constante k a été remplacée par $G(M_1 + M_2)/(4\pi^2)$:

$$\omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2) \quad (15.31)$$

où $R = r_1 + r_2$ représente la distance fixe entre les deux masses. Le prix à payer pour l'introduction d'un référentiel non inertiel est qu'il faut tenir compte des effets d'inertie. Dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire de module ω , en vertu de l'équation (15.23), la force devient:

$$\mathbf{F}_\omega = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \quad (15.32)$$

où les deux termes supplémentaires représentent respectivement l'effet centrifuge et l'effet CORIOLIS.

Dans le référentiel en mouvement, les effets d'inertie manifestent comme des forces volumiques, telles que la pesanteur, la gravitation, les forces électromagnétiques, qui se transmettent par l'intermédiaire de champs auxquels on associe un potentiel dont elles sont le gradient. Il s'ensuit que la force donnée par l'équation (15.32) peut être obtenue en tant que gradient généralisé d'un potentiel généralisé dont la figure 15.22 représente l'aspect pour une vitesse nulle du troisième corps.

Recherche des points L1 à L3. Pour ce faire, on se place dans un référentiel cartésien dont l'origine coïncide avec le centre de masse et on introduit la masse réduite par rapport à la deuxième masse plus faible:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

Il n'est pas possible de trouver une solution exacte du problème. Par contre, si l'on admet que la masse réduite est très faible, $\mu \ll 1$, et si R représente la distance entre les deux masses M_1 et M_2 , la solution peut être approximée par:

$$\mathbf{r}_{L1} \approx \begin{pmatrix} r_2 - R \left(\frac{\mu}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{L2} \approx \begin{pmatrix} r_2 + R \left(\frac{\mu}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{L3} \approx \begin{pmatrix} -R \left(1 + \frac{5}{12} \mu \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.33)$$

EXEMPLE 15.9. Position des trois premiers points de LAGRANGE du système Soleil – Terre.

Pour le système Soleil – Terre, la masse réduite μ vaut approximativement $3 \cdot 10^{-6}$, et la distance R est égale à une unité astronomique, à savoir $1 \text{ UA} \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, ce qui implique que le premier et le deuxième points de LAGRANGE sont situés à environ 1.5 million de kilomètres de part et

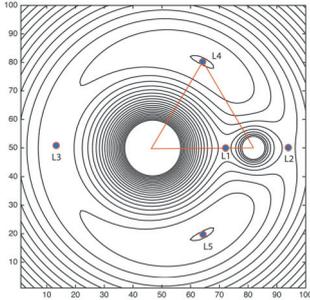


FIGURE 15.22 Potentiel effectif perçu par un corps de masse négligeable par rapport à celles des deux autres avec lesquels il est en interaction gravitationnelle. Les grandes masses sont dans un rapport de 1 à 10. (Figure : Philip D. Hall (CC)),

d'autre de la Terre, sur la droite qui relie la Terre et le Soleil. Le troisième point, diamétralement opposé à la Terre, est en orbite autour du Soleil sur une trajectoire de diamètre faiblement supérieur à celui de la trajectoire de la Terre.

■

Recherche des points L4 et L5. Pour la localisation des deux points restants, il faut se rendre compte qu'il s'agit de compenser l'effet centrifuge qui agit radialement vers l'extérieur par la composante opposée de l'attraction gravitationnelle exercée par les deux masses. En procédant de la sorte, on se rend compte que le point d'équilibre doit être situé à égale distance de chacune des deux masses. En outre, la composante tangentielle doit s'annuler, ce qui implique que les points d'équilibre doivent être situés à la distance R de chacune des deux masses, donc au sommet d'un triangle équilatéral dont la base est donnée par le segment qui relie les deux masses M_1 et M_2 . Les points L4 et L5 sont situés de manière symétrique par rapport à cette base.

$$\mathbf{r}_{L4} \approx \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{L5} \approx \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} R \end{pmatrix} \quad (15.34)$$

15.5.2 Stabilité des points de LAGRANGE

L'équilibre en chacun des points de LAGRANGE est-il un équilibre stable? Dans le cas d'un référentiel inertiel, il suffit d'examiner la structure du potentiel pour savoir si les points d'équilibre correspondent à des vallées, des collines ou des cols pour savoir quelle est la qualité de l'équilibre. Ce critère ne suffit pas lorsque le potentiel dépend de la vitesse, comme c'est le cas ici. Il faut alors procéder à une analyse de stabilité. La procédure consiste à linéariser l'équation de mouvement en chacun des points d'équilibre et à examiner comment évolue sa solution pour de petits déplacements par rapport au point d'équilibre.

Cette analyse, dont nous ne reproduirons pas les détails, donne les résultats qui sont exposés dans les paragraphes qui suivent.

Stabilité de L1 et L2. L'examen mathématique révèle que ces deux points sont situés sur des selles du potentiel, ce qui implique qu'ils sont instables du point de vue dynamique. Si l'on positionne un objet dans le voisinage de ces points, il s'en éloigne au bout de quelques mois, sauf si l'on procède à des corrections de trajectoire qui nécessitent relativement peu de carburant, vu que le potentiel est extrêmement plat dans le voisinage des points.

Les agences spatiales placent des engins spatiaux en ces deux points. Le satellite d'observation SOHO (Solar and Heliospheric Observatory, dont la mission est d'observer la surface du Soleil) gravite depuis 1996 autour de L1. Le successeur du télescope spatial Hubble, le James Webb Space Telescope, a été lancé le 25 décembre 2021 et placé en orbite autour de L2.

Stabilité de L3. Le point L3 a les mêmes caractéristiques de stabilité que les points L1 et L2. Mais comme il est situé à l'opposé de la Terre par rapport au Soleil, il est invisible et n'est pas utilisé.

Stabilité de L4 et L5. L'analyse de la stabilité autour de ces deux points donne un résultat surprenant. Alors que ces points correspondent à des maxima locaux du potentiel généralisé – ce qui impliquerait un équilibre instable –, ils sont en fait stables. Cette stabilité est due à l'effet CORIOLIS. Une masse qui serait placée initialement dans le voisinage de L4 ou L5 aurait tendance à descendre vers le bas de la colline de

potentiel. En le faisant, elle acquiert de la vitesse, l'effet CORIOLIS se manifeste en la renvoyant en orbite autour du point de LAGRANGE. Cet effet est comparable à la formation d'un ouragan à la surface de la Terre : lorsqu'une masse d'air s'évacue vers une zone de basse pression, elle se met en rotation à cause de l'effet CORIOLIS et un tourbillon stable apparaît.

15.6 SATELLISATION AUTOUR DU POINT L4 DE JUPITER

Les points de LAGRANGE L4 et L5 du couple Soleil-Jupiter sont occupés par des centaines d'astéroïdes auxquels les astronomes qui les ont découverts ont donné des noms de héros de la guerre de Troie rapportée dans l'*Illiade* d'Homère. Les astéroïdes qui orbitent autour du point L4, en avance sur Jupiter, portent des noms de guerriers grecs, alors que ceux qui sont situés autour de L5 sont associés au camp troyen.

On ne place pas d'engins en ces points à cause de l'encombrement par les astéroïdes, mais nous allons étudier comment se comporte un objet qui est placé dans le voisinage de L4.

15.6.1 Élaboration du modèle

Nous étudierons le mouvement du corps autour de L4 tout d'abord vu d'un système inertiel, puis vu du système tournant lié au couple Soleil-Jupiter.

Trajectoire dans un système inertiel. Nous nous plaçons dans un référentiel d'inertie dont l'axe Ox coïncide initialement avec la droite qui relie Jupiter au Soleil et dont l'origine est située au centre de masse CM des deux astres (fig. 15.23).

Introduisons d'abord les grandeurs géométriques. Nous déterminons la distance d_{SJ} entre le Soleil et Jupiter au moyen de la troisième loi de KEPLER (15.31):

$$d_{SJ} = \sqrt[3]{G \frac{m_s + m_J}{4\pi^2} T_J^2}$$

Les modules des vecteurs position des deux planètes sont:

$$r_s = \frac{m_J}{m_s + m_J} d_{SJ}, \quad r_J = \frac{m_s}{m_s + m_J} d_{SJ}$$

et les positions instantanées du Soleil et de Jupiter, ainsi que le vecteur qui les relie, varient selon:

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = -r_s \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T_J} t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T_J} t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_J = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix} = r_J \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T_J} t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T_J} t\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{SJ} = \begin{pmatrix} x_{SJ} \\ y_{SJ} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_J - \mathbf{r}_s$$

La position du point de LAGRANGE L4 est donnée par:

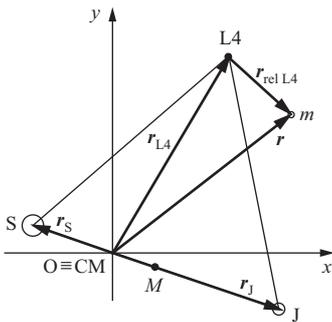


FIGURE 15.23 Repérage d'un objet en interaction avec le système Soleil - Jupiter dans un référentiel inertiel.

$$\mathbf{r}_{L4} = \begin{pmatrix} x_{L4} \\ y_{L4} \end{pmatrix} = \mathbf{r}_M + \mathbf{r}_{ML4}$$

$$\mathbf{r}_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_S + x_J}{2} \\ \frac{y_S + y_J}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{ML4} = \begin{pmatrix} x_{ML4} \\ y_{ML4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} y_{SJ} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x_{SJ} \end{pmatrix}$$

Si la position de l'objet est repérée par le vecteur:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ses positions relativement aux deux planètes et au point de LAGRANGE L4 sont données par les vecteurs:

$$\mathbf{r}_{rel S} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_S, \quad \mathbf{r}_{rel J} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_{rel L4} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{L4}$$

Le comportement dynamique de l'objet de masse m est dû à son interaction avec le Soleil et Jupiter, interaction décrite par la deuxième loi de NEWTON. La variation de la quantité de mouvement de l'objet est donnée par:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_J = -Gm_S m \frac{\mathbf{r}_{rel S}}{|\mathbf{r}_{rel S}|^3} - Gm_J m \frac{\mathbf{r}_{rel J}}{|\mathbf{r}_{rel J}|^3} \tag{15.35}$$

La figure 15.24 montre la partie du modèle qui exprime, pour chacune des composantes, la dynamique du système exprimée par la relation (15.35).

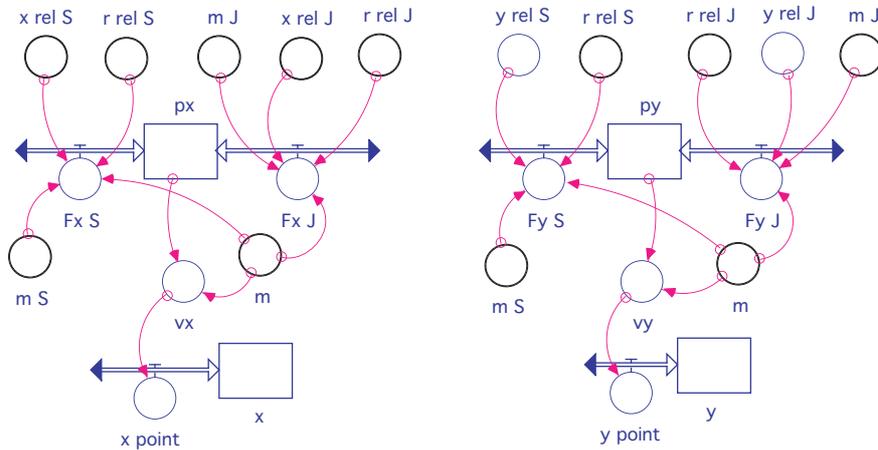


FIGURE 15.24 Modèle dynamique d'un objet en interaction gravitationnelle avec le couple Soleil - Jupiter: bilan de quantité de mouvement dans un référentiel inertiel.

Le comportement de l'objet autour du point de LAGRANGE L4 a été simulé pour deux vitesses du corps: tout d'abord avec une vitesse initiale de module égal à 13.03 km s^{-1} , proche de la vitesse orbitale moyenne de Jupiter, puis avec une vitesse initiale plus importante, de module égal à 13.37 km s^{-1} . La durée de la simulation correspond à 317 années terrestres, soit 26.4 années joviennes. Quel que soit le module de sa vitesse initiale, l'objet orbite autour du Soleil sur une orbite proche de celle de Jupiter avec une durée de révolution proche de celle de sa planète mère. La figure 15.25a montre que,

dans le premier cas, le corps reste dans le voisinage du point de LAGRANGE, alors que dans le second cas, il peut s'en éloigner très fortement, puisque le rayon maximal de sa trajectoire est plus important que la distance entre le Soleil et Jupiter (fig. 15.25b).

FIGURE 15.25 Comportement d'un corps autour du point de LAGRANGE L4 pour une durée de 317 années terrestres, vu d'un système inertiel: (a) module de la vitesse initiale proche de celui de la vitesse orbitale de Jupiter; (b) module de la vitesse initiale supérieur de 340 m s^{-1} par rapport à la vitesse orbitale de Jupiter.

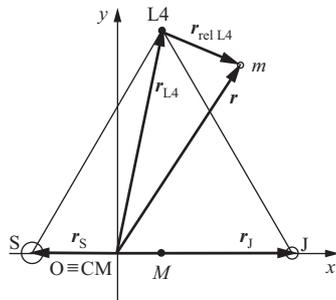
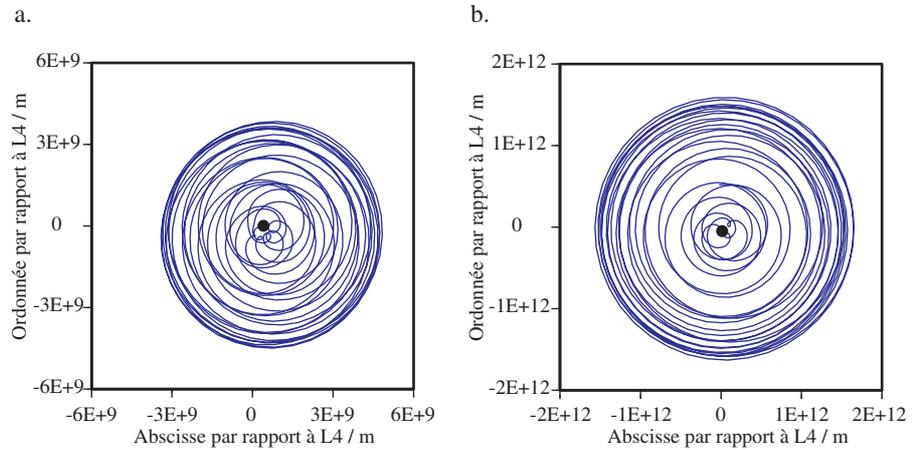


FIGURE 15.26 Repérage d'un objet en interaction avec le système Soleil - Jupiter dans un référentiel Ox tournant.

Seul le passage dans un référentiel tournant va nous permettre de comprendre ce qui se passe en détail.

Trajectoire dans le référentiel tournant. Nous reformulons le modèle dans un référentiel tournant solidaire du couple Soleil - Jupiter dans lequel les deux astres ont une position fixe sur l'axe Ox (fig. 15.26).

Les grandeurs géométriques sont inchangées. Les positions du Soleil et de Jupiter sont maintenant données par :

$$\mathbf{r}_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = -r_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_J = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix} = r_J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les autres relations géométriques ne sont pas modifiées par le changement de référentiel. La prise en compte des effets d'inertie fait apparaître deux termes supplémentaires dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_J + \mathbf{F}_{\text{centrifuge}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} \\ &= -Gm_S m \frac{\mathbf{r}_{\text{rel S}}}{|\mathbf{r}_{\text{rel S}}|^3} - Gm_J m \frac{\mathbf{r}_{\text{rel J}}}{|\mathbf{r}_{\text{rel J}}|^3} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \end{aligned} \quad (15.36)$$

Les composantes des deux effets d'inertie ont été calculées dans l'exemple 15.5 et peuvent être intégrées dans le modèle de la figure 15.24 au moyen de deux flux supplémentaires de quantité de mouvement pour chacune des composantes. Le modèle a été simulé pour quatre valeurs de la vitesse initiale.

La figure 15.27a montre comment la trajectoire de la figure 15.25a apparaît lorsqu'on l'observe à partir du référentiel tournant. L'objet est abandonné sans vitesse initiale dans le voisinage du point de LAGRANGE L4. Pour interpréter le comportement observé, il faut se souvenir que, en vertu de la loi des aires, un objet en orbite autour du Soleil qui s'en rapproche acquiert une plus grande vitesse, alors que s'il s'en éloigne, sa vitesse diminue. Réciproquement, si sa vitesse augmente, il se rapprochera du Soleil, alors qu'il s'en éloignera si sa vitesse diminue.

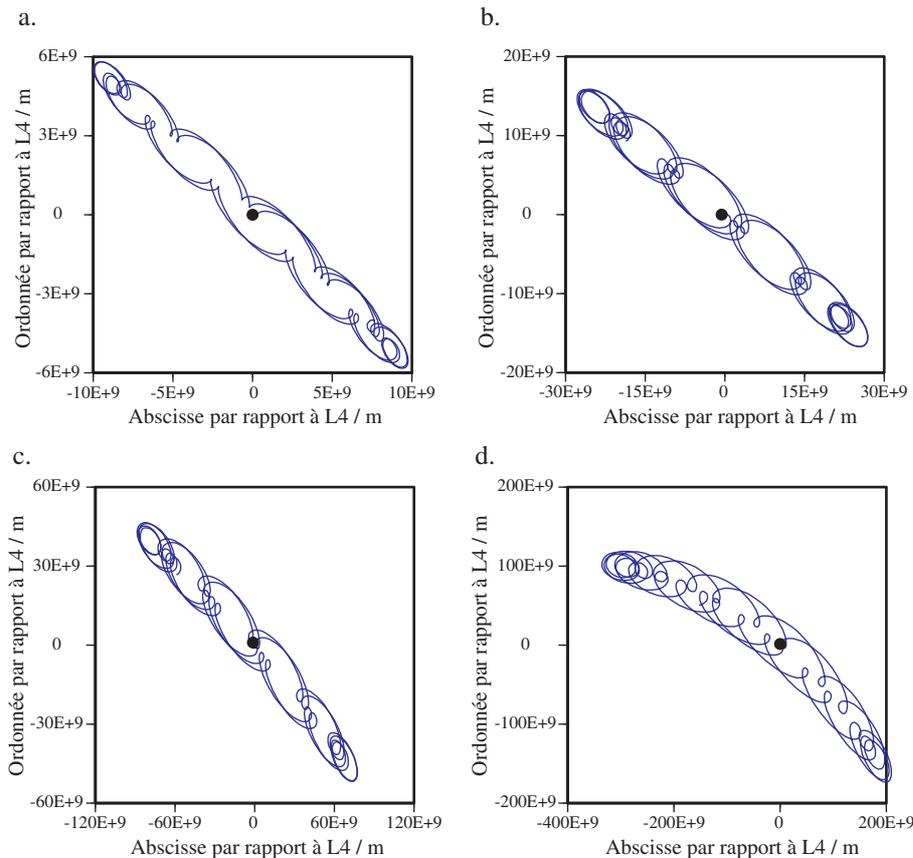


FIGURE 15.27 Comportement d'un corps autour du point de LAGRANGE L4 pour une durée de 317 années terrestres, vu du système tournant solide du couple Soleil - Jupiter: (a) module de la vitesse initiale nul; (b) module de la vitesse initiale de 20 m s^{-1} ; (c) module de la vitesse initiale de 50 m s^{-1} ; (d) module de la vitesse initiale de 150 m s^{-1} . Le point de LAGRANGE L4 est signalé par le point noir.

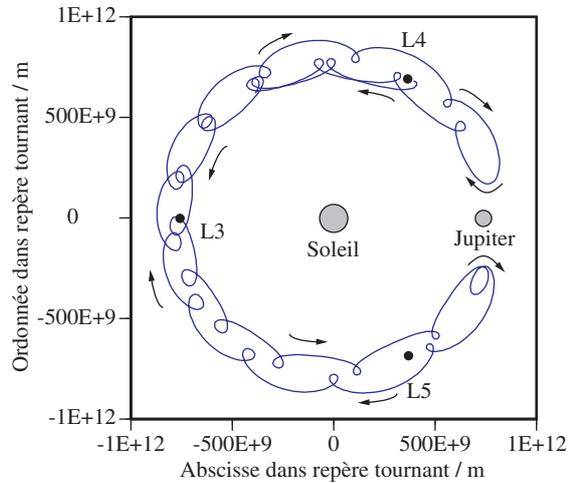
Dans le cas envisagé, le point de départ est situé plus haut (par rapport au Soleil) que l'orbite de Jupiter, ce qui implique que l'objet a une vitesse plus faible que ce dernier: la distance entre les deux diminue, l'attraction gravitationnelle augmente, ce qui provoque une augmentation du module de la vitesse. L'objet gagne progressivement une orbite plus proche du Soleil, ce qui l'éloignera de sa planète mère. Mais maintenant, l'attraction de cette dernière le freine, il rejoint progressivement une orbite plus haute jusqu'à rebrousser chemin pour se rapprocher à nouveau de Jupiter, et le cycle recommence. Ce mouvement observé dans le repère solide des corps célestes de grande masse est appelé mouvement de *libration*.

L'aspect et l'amplitude de ce mouvement de libration dépend à la fois du module et de l'orientation du vecteur vitesse au moment du début de la simulation. Dans l'exemple traité, une des composantes de la vitesse est toujours nulle alors que l'autre passe de 0 m s^{-1} (figure 15.27a) à 20 m s^{-1} (figure 15.27b), puis à 50 m s^{-1} (figure 15.27c) et enfin à 150 m s^{-1} (figure 15.27d). L'amplitude du mouvement de libration est respectivement augmentée d'un facteur égal à approximativement 3, 7 et 27.

Si l'on continue à augmenter cette composante de la vitesse, l'amplitude du mouvement de libration augmente de telle manière que la séparation entre l'objet et Jupiter devient égale au diamètre de l'orbite jovienne. Dans l'exemple traité, c'est le cas lorsque cette composante particulière de la vitesse a une valeur de 406 m s^{-1} . Dans ce cas, l'objet séjourne longtemps autour du point de LAGRANGE L3 avant de retourner vers Jupiter. Si la composante de la vitesse passe à 407 m s^{-1} , une augmentation infime, l'objet quitte le voisinage du point L3 pour atteindre le point L5 avant d'inverser le sens de marche. La figure 15.28 montre le comportement de l'objet lorsque cette

composante particulière de la vitesse est de 500 m s^{-1} . Une telle orbite est appelée *orbite en fer à cheval* (horseshoe orbit).

FIGURE 15.28 Orbite en fer à cheval (horseshoe orbit) d'un corps placé initialement dans le voisinage de L4. Le module de la vitesse est de 500 m s^{-1} supérieur à la vitesse orbitale de Jupiter.



Un astéroïde baptisé 2002 AA₂₉ a été découvert le 9 janvier 2002. Il s'agit d'un corps dont le diamètre varie entre 20 et 100 mètres. Il tourne autour du Soleil sur une orbite très semblable à celle de la Terre et sa période de révolution est exactement la même que celle de la Terre. On dit d'un tel objet qu'il est en résonance 1:1 avec la Terre. Vue de la Terre, sa trajectoire est une orbite en fer à cheval. Le point de sa trajectoire le plus proche de la Terre (à environ 6 millions de kilomètres) a été atteint le 8 janvier 2003. Depuis, il s'éloigne de la Terre et sera à nouveau à une distance minimale, à l'autre extrémité du fer à cheval le 11 juillet 2097.

Résumé du chapitre

Dans les applications techniques, le champ électrique sert essentiellement à accélérer des particules chargées. C'est le cas des dispositifs qui injectent les particules dans un accélérateur (l'équivalent des canons à électrons des tubes cathodiques des anciens téléviseurs). Dans l'accélérateur, des cavités radiofréquence fournissent l'énergie nécessaire pour l'accélération des paquets de particules et leur focalisation au moyen de champs électriques oscillants, dont la fréquence doit être adaptée à l'évolution de la vitesse des particules.

Le champ magnétique sert essentiellement à guider les particules sur la trajectoire souhaitée, vu que la force qu'il exerce est perpendiculaire au vecteur vitesse. Les applications sont le spectromètre de masse et les accélérateurs de particules circulaires tels que cyclotron, synchrotron et leurs avatars. Une configuration particulière de champ magnétique inhomogène permet de piéger des particules dans des bouteilles magnétiques ou des tores; c'est une technique utilisée dans la recherche sur la fusion contrôlée, dans des installations de type Tokamak.

Le champ gravitationnel est le vecteur de l'interaction entre les masses. Il dicte le comportement dynamique des planètes du système solaire, mais est également à l'origine de la structure de l'Univers et de la cohésion des corps matériels qui le constituent ainsi que de leur évolution. La modélisation au moyen d'un puits de potentiel permet de déterminer qu'un objet plongé dans le puits de potentiel d'un corps de masse M et de rayon R peut avoir des comportements différents suivant sa vitesse par rapport à ce

corps. On détermine de cette manière deux vitesses caractéristiques: la vitesse de satellisation $v_{\text{satellisation}} = \sqrt{GM/R}$ et la vitesse de libération $v_{\text{libération}} = \sqrt{2GM/R}$. Pour la Terre, ces deux vitesses sont respectivement 7.9 km s^{-1} et 11.2 km s^{-1} .

Le champ gravitationnel ne peut pas être contrôlé comme les champs électrique et magnétique, mais il maintient les satellites sur leur trajectoire. En orbite basse (500 km à 2 000 km), les satellites servent aux télécommunications, à l'imagerie terrestre, à la météorologie, au renseignement. En orbite moyenne (entre 2 000 km et 36 000 km), ils servent à la navigation (GPS, Glonass, Galileo). En orbite géostationnaire (à 36 000 km) ils servent à la communication.

Les satellites d'observation du Soleil et de l'Univers sont généralement «parqués» en des positions particulières appelées points de LAGRANGE. Un point de LAGRANGE est une position de l'espace dans un système à deux corps en mouvement orbital l'un autour de l'autre, où leurs champs de gravité se combinent de manière à fournir un point d'équilibre à un troisième corps de masse négligeable, de telle façon que les positions relatives des trois corps restent fixes. Pour un système donné, il existe cinq points de LAGRANGE, L1, L2 et L3, situés sur la droite déterminée par les deux corps, et deux autres, L4 et L5, au sommet d'un triangle équilatéral dont les extrémités de la base sont les deux corps massifs. Les trois premiers sont instables, les deux derniers sont stables, même s'ils correspondent à un maximum local du potentiel, grâce à l'effet CORIOLIS.

Lorsque l'on place un objet en l'un des deux points instables L1 ou L2 (ce sont des cols dans le puits de potentiel), il a tendance à s'en éloigner, ce que l'on peut contre-carrer au moyen de corrections de trajectoire relativement peu gourmandes en carburant, le potentiel étant pratiquement plat dans le voisinage de ces points. Un objet placé dans le voisinage de L4 ou L5 orbite autour du corps central avec une période proche de celle de la planète mère, mais en passant par des phases d'avance et de retard sur celle-ci. Il peut s'en éloigner fortement ce qui, vu du système des deux corps massifs, donne une trajectoire formée de boucles s'enroulant autour de l'orbite de la planète mère. Ce phénomène est appelé mouvement de libration. L'amplitude du mouvement de libration dépend des conditions initiales. Dans certains cas, ce mouvement peut déboucher sur une orbite en fer à cheval: l'objet quitte son point de LAGRANGE, s'approche de sa planète mère puis s'en éloigne pour rejoindre l'autre point de LAGRANGE en passant au voisinage de L3 et retourner au point de départ pour recommencer ce mouvement de manière cyclique.

Problèmes⁴

- Un objet ponctuel portant une charge de 1.0 As et de masse égale à 1.0 kg passe par un point P avec une vitesse de module égal à 1.0 m s^{-1} suivant Ox . En ce point, l'intensité du champ électrique est de 1.0 V m^{-1} suivant Oy , et celle du champ d'induction magnétique de 2.0 T suivant Oy . Déterminez les composantes de la force subie par cet objet.
- Une particule chargée est abandonnée à partir du repos. On observe qu'elle se met en mouvement sur une trajectoire incurvée. Peut-on affirmer que, dans cette région de l'espace, on est en présence d'un champ électrique \mathcal{E} , ou d'un champ d'induction magnétique \mathcal{B} , ou des deux? Admettez que, en dehors des éventuelles forces électrique et/ou magnétique, aucune autre force n'agit sur la particule et que les champs, s'ils sont présents, sont uniformes.
- Une particule chargée se trouve dans une région de l'espace occupée par un champ d'induction magnétique uniforme \mathcal{B} , orienté suivant Oz . Décrivez le futur mouvement de la particule si sa vitesse initiale est (a) nulle, (b) de module égal à 1.0 m s^{-1} , orientée suivant Oz ; (c) de module égal à 1.0 m s^{-1} , orientée suivant Oy .
- Une particule chargée se déplace dans une région de l'espace dans laquelle sont présents un champ électrique orienté perpendiculairement à son vecteur vitesse et un champ d'induction magnétique à la fois perpendiculaire à son vecteur vitesse et au vecteur du champ électrique. Montrez qu'il existe une vitesse particulière pour laquelle la somme des forces s'annule. Quelle est la relation entre le module de cette vitesse et les intensités respectives des deux champs? Un tel dispositif, appelé filtre de vitesse, est une des manières permettant de déterminer la vitesse d'une particule inconnue.
- Un modèle (incorrect) de l'atome d'hydrogène l'envisage comme un système constitué d'un électron en mouvement sur une orbite circulaire de rayon égal à 0.05 nm autour du proton à une vitesse de module égal à $2.2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$. La masse du proton étant pratiquement 2000 fois supérieure à celle de l'électron, on peut admettre qu'il est stationnaire et que le centre de l'orbite électronique coïncide avec le centre de masse du proton. (a) Traitez l'électron en mouvement comme une boucle de courant et calculez l'intensité de ce courant. (b) Évaluez l'intensité du champ magnétique engendré au centre de l'atome par le mouvement de l'électron. (c) Le proton est-il soumis à une force non nulle due au champ magnétique engendré par le mouvement de l'électron? (d) L'électron est-il soumis aux effets d'un champ magnétique engendré par le proton? (e) L'électron subit-il des effets engendrés par son propre courant? (f) Y a-t-il une interaction d'origine électrique agissant entre le proton et l'électron? Dans l'affirmative, évaluez son intensité. (g) Même question relativement à une interaction d'origine gravitationnelle. (h) Laquelle ou lesquelles de ces trois forces possibles contri-

buent-elles de manière significative à maintenir l'électron autour du proton?

- Une longue barre rigide tombe verticalement dans un champ gravitationnel dont l'intensité croît linéairement vers le bas. (a) Calculez l'accélération du corps au moyen de l'équation de mouvement. (b) Déterminez la densité de courant de quantité de mouvement dans la barre en fonction de la position. Référez-vous à l'exemple 8.2 pour établir l'équation de bilan de la quantité de mouvement pour le cas continu.
- Un véhicule ouvert se déplace en dessous d'une pluie verticale (fig. 15.29). Simultanément, le véhicule perd de l'eau par un trou au plancher avec un débit égal à celui de la pluie. Établissez l'équation de mouvement du véhicule et déterminez sa vitesse en fonction du temps en admettant que les frottements sont négligeables.

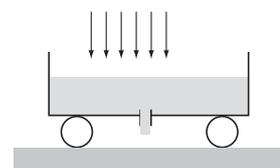


FIGURE 15.29
Problème 7

- Une fusée Scout X1 de la NASA, de masse totale égale à 16 t est sur la rampe de lancement. Après la mise à feu, 220 kg de gaz sont éjectés chaque seconde à une vitesse de module égal à 2100 m s^{-1} . La résistance de l'air est négligeable. (a) Écrivez l'équation de mouvement de la fusée en tant que système. Pourquoi le taux de variation de la quantité de mouvement n'est-il pas égal au produit de la masse et de l'accélération? (b) Que vaut le module de l'accélération au début du lancement? Quelle est sa valeur après 40 s ? (c) Que vaut le module de la vitesse 40 s après l'allumage?
- Un petit corps de masse égale à 0.50 kg se déplace sur une trajectoire elliptique. Les longueurs des grand et petit axes de l'ellipse sont respectivement $a = 4 \text{ m}$ et $b = 2 \text{ m}$. Si l'on place l'origine du système de coordonnées au centre de l'ellipse, la position du corps est repérée par les fonctions $x(t) = a \cos(ct)$ et $y(t) = b \sin(ct)$, avec $c = \pi/10 \text{ s}^{-1}$. (a) Que vaut la période du mouvement et à quelle valeur correspond un intervalle de temps dans la figure? (b) Déterminez les valeurs maximale et minimale du module de la vitesse. (c) Que vaut l'accélération à l'instant où le corps franchit l'axe Oy ? (d) Déterminez la force qui agit sur l'objet quatre secondes après le franchissement de l'axe Oy .
- Un satellite tourne autour de la Terre sur une trajectoire elliptique. Au point le plus proche de la Terre (périgée), il est à deux rayons terrestres du centre de la Terre, et le module de sa vitesse est de 6457 m s^{-1} . Au point le plus éloigné (apogée), cette distance vaut quatre rayons terrestres. Le rayon de la Terre vaut $6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$. Le satellite a une masse de 1000 kg . (a) Que vaut le module de la vitesse du satellite à l'apogée?

4. Les problèmes 1 à 5 proviennent de B. CROWELL, B. SHOTWELL, *Problems in Introductory Physics* (CC).

(b) Quels sont le module et la direction de l'accélération du satellite en ce même point ? (c) Déterminez la valeur de l'énergie cinétique du satellite aux deux points extrêmes de sa trajectoire. (d) Déterminez l'énergie du champ gravitationnel en ces mêmes points. (e) Évaluez la somme de ces deux énergies en chacun des points. Qu'observez-vous ?

11. Une fusée se déplace dans l'espace très loin de tout champ gravitationnel à une vitesse de module constant v_0 par rapport à un observateur. Les moteurs sont allumés et le flux de masse émergeant de la fusée est constant. La vitesse d'éjection des gaz est égale à v_0 par rapport aux moteurs. (a) Formulez l'équation de mouvement de la fusée par rapport à l'observateur. (b) Résolvez cette équation.

CHAPITRE 16

BILANS ET PROCESSUS DYNAMIQUES

Dans les chapitres précédents, nous avons été confrontés à des grandeurs qui peuvent être stockées et aux bilans qui nous permettent d'exprimer leur accumulation. Nous avons découvert la nécessité de lois constitutives (particulières au système) pour décrire les processus qui déterminent la variation de la grandeur accumulée dans un système. La réunion des équations de bilan et des lois constitutives constitue les modèles des processus dynamiques.

Nous voulons maintenant résumer ce que nous avons découvert tout en élargissant la forme et l'utilisation des équations de bilan. Nous allons décrire le rôle des équations de bilan et des lois constitutives. En outre, nous allons considérer le côté mathématique de manière plus approfondie et discuter le processus de modélisation en détail.

16.1 ACCUMULATION ET COMPTABILISATION DE GRANDEURS

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que les processus sont accompagnés de l'accumulation de certaines grandeurs. En fait, la dynamique des processus est une conséquence directe de cette accumulation. C'est pourquoi les processus d'accumulation et les bilans qui leur sont associés ont une importance centrale en physique. Reconsidérons ce que nous savons déjà pour pouvoir élargir notre réflexion au sujet de l'accumulation et de sa comptabilisation en général.

16.1.1 Récapitulation des acquis de la physique

Nous avons postulé l'existence d'une grandeur accumulable pour chacun des domaines abordés jusqu'ici (tab. 16.1). À côté de chacune de ces grandeurs, l'énergie, qui peut également être accumulée, apparaît dans tous les processus.

TABLEAU 16.1 Grandeurs physiques accumulables.

Domaine	Grandeur qui s'accumule	Courant ou taux de production ou taux de source associés
Hydraulique	Volume	Flux volumique
Électricité	Charge	Courant électrique
Thermodynamique	Entropie	Courant et/ou taux de production d'entropie
Changement chimique	Quantité de substance	Courant et/ou taux de production de substance
Rotation	Moment cinétique	Flux de moment cinétique
Translation	Quantité de mouvement	Flux et/ou taux de source de quantité de mouvement
Tous les domaines	Énergie	Flux d'énergie

La variation de la grandeur accumulée dans un système peut être provoquée de différentes manières: tout d'abord par les flux qui entrent dans le système ou en émergent. En hydraulique, en électricité et lors des processus de rotation, ces courants qui traversent les limites du systèmes sont les seules contributions qui déterminent la vitesse à laquelle varie le contenu du système. Les trois premiers exemples du tableau 16.2 illustrent ces trois cas.

Lors de processus thermiques ou chimiques, les variations du contenu du système peuvent être provoquées par des flux de la grandeur extensive, mais également par la production de celle-ci, dans les deux cas, ou par sa destruction dans le cas des réactions chimiques (l'entropie ne peut pas être détruite). Les quatrième et cinquième exemples du tableau 16.2 illustrent ces deux cas.

TABLEAU 16.2 Exemples d'équations de bilan.

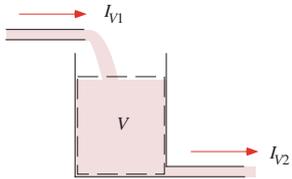
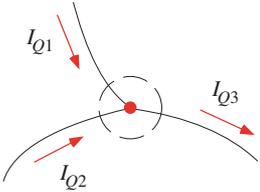
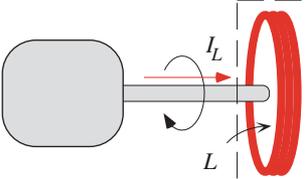
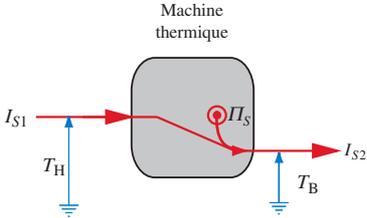
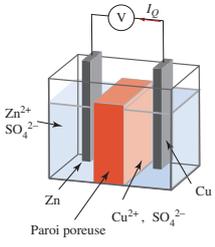
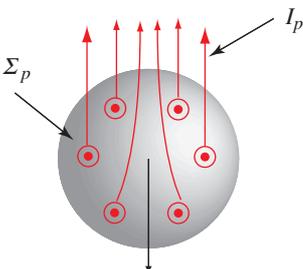
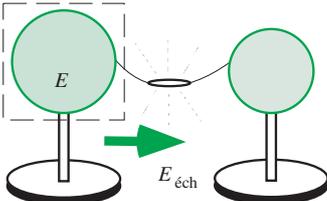
Exemple	Équations de bilan
	<p>Équation de bilan non stationnaire du volume de liquide dans un réservoir:</p> $\dot{V} = I_{V1} + I_{V2}$
	<p>Équation de bilan stationnaire de la charge dans un nœud d'un circuit électrique:</p> $0 = I_{Q1} + I_{Q2} + I_{Q3}$
	<p>Équation de bilan non stationnaire du moment cinétique lors du lancement d'un volant:</p> $\dot{L} = I_L$
	<p>Équation de bilan stationnaire de l'entropie dans une machine thermique:</p> $0 = I_{S1} + I_{S2} + \Pi_S$

TABLEAU 16.2 Exemples d'équations de bilan.

Exemple	Équations de bilan
	<p>Équations de bilan non stationnaires des ions et des atomes participant aux processus se déroulant dans une batterie :</p> $\dot{n}_{\text{Zn}^{2+}} = \Pi_{\text{Zn}^{2+}} = -\dot{n}_{\text{Zn}} = -\Pi_{\text{Zn}}$ $\dot{n}_{\text{Cu}} = \Pi_{\text{Cu}} = -\dot{n}_{\text{Cu}^{2+}} = -\Pi_{\text{Cu}^{2+}}$
	<p>Équation de bilan non stationnaire de la quantité de mouvement d'un objet en chute dans un milieu résistant :</p> $\dot{p} = I_p + \Sigma_p$
	<p>Forme intégrale de l'équation de bilan non stationnaire de l'énergie lors de la décharge d'une sphère :</p> $\Delta E = E_{\text{éch}}$

La variation de la quantité de mouvement d'un objet en translation peut se faire par l'intermédiaire de courants de quantité de mouvement, mais également par l'intermédiaire de champs, apport qui est représenté par son taux de source. L'avant-dernier exemple du tableau 16.2 illustre cette situation.

Le tableau 16.2 montre les différentes manières de formuler une équation de bilan. Tout d'abord, une équation de bilan peut être énoncée dans sa forme *instantanée* (les six premiers exemples du tableau) ou *intégrée* (le dernier exemple). En outre, nous utilisons le bilan de grandeurs dans des situations *stationnaires* ou *dynamiques* (non stationnaires). Rappelons qu'un état est dit stationnaire lorsque les grandeurs auxquelles l'on s'intéresse ne varient pas dans le temps. Dans le cas contraire, on parle de dynamique.

Dans les exemples du tableau 16.2, nous n'avons pas pris en compte le fait que la variation de la grandeur extensive peut être provoquée par des flux convectifs, c'est-à-dire que la grandeur en question est amenée dans le système ou en est extraite par un flux de matière.

Dans la section 16.1.2, nous allons présenter des processus d'accumulation dans des domaines différents de la physique pour étayer les différentes manières de faire varier le contenu d'un système qui ont été présentées dans le tableau 16.2.

16.1.2 Processus d'accumulation dans des systèmes biologiques et sociaux

Il n'y a pas que les grandeurs physiques qui peuvent être accumulées. Le monde autour de nous foisonne de grandeurs accumulables (ou assimilables à un fluide). Nous y sommes confrontés dans les processus biologiques, industriels, sociaux et d'autres encore. En examinant des exemples tirés d'autres domaines, nous allons pouvoir en apprendre plus sur la formulation des équations de bilan.

Des exemples de grandeurs qui peuvent être accumulées sont les espèces biologiques et une partie des choses créées par les êtres humains. Ainsi, des insectes, de la végétation, des éléphants, des maisons, des automobiles, etc., contribuent à agrandir la liste des grandeurs qui peuvent faire l'objet d'un bilan. Il suffit de découvrir les différentes façons dont le nombre d'individus d'une espèce ou d'objets particuliers peut varier pour obtenir la forme adéquate des équations de bilan.

Considérons un exemple facile pour mettre en évidence quels sont les points fondamentaux de l'énoncé du bilan d'une grandeur extensive (assimilable à un fluide). Le système est un pays et ses habitants en sont le contenu. Nous allons montrer que le contenu du système peut varier de quatre manières différentes. La première façon est représentée par le processus le plus évident, les *naissances* et les *décès*, alors que les autres constituent différents modes de transport.

En l'absence d'autres processus, les taux de naissance et de décès déterminent à quelle vitesse évolue le nombre d'habitants d'un pays (fig. 16.1). On pourrait avoir l'impression qu'il n'y a aucune différence entre les taux de naissance et de décès et le taux de variation du nombre d'habitants dans un pays – même dans un système fermé –, qu'il s'agit de deux termes différents pour exprimer la même entité. Il n'en est rien; pour s'en convaincre il suffit de voir qui mesure chacune de ces deux grandeurs (tab. 16.3). Les naissances et les décès sont enregistrés par les offices d'état civil, alors que le contenu du système ou ses variations sont déterminés par recensement. Dire que les taux de naissance et de décès déterminent à quelle vitesse le nombre d'habitants évolue dans un pays n'est pas une affirmation banale et évidente; c'est l'expression d'une hypothèse sur la manière dont fonctionne la nature, c'est une loi de la nature.

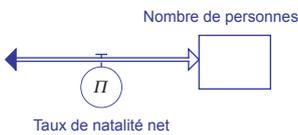


FIGURE 16.1 Bilan de la population d'un pays fermé. Le nombre de personnes ne peut changer que par l'intermédiaire des naissances et des décès. Le taux de natalité net (taux de natalité moins taux de mortalité) détermine à quelle vitesse le nombre de personnes varie.

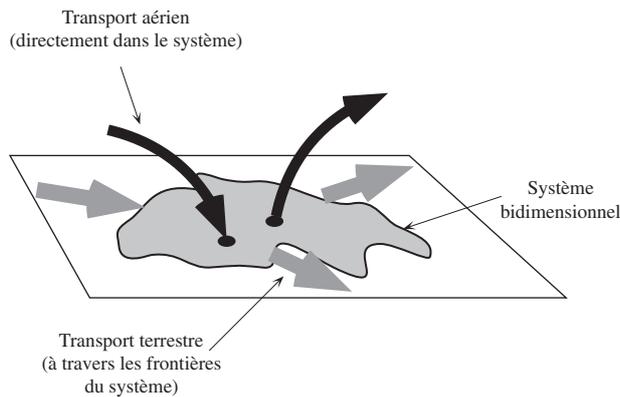
TABLEAU 16.3 Qui mesure quoi?

Grandeur	Mesurée par...
Nombre d'habitants	Recensement
Naissances et décès	Offices d'état civil
Personnes franchissant la frontière à pied	Autorité d'immigration à la frontière
Personnes franchissant la frontière en train ou en voiture	Autorité d'immigration à la frontière
Personnes arrivant ou partant en avion	Autorité d'immigration à l'aéroport

Une simple réflexion nous convainc de la différence fondamentale entre naissances et décès d'une part, et migration d'autre part. Les naissances et les décès sont des processus qui se déroulent à l'intérieur du système, alors que la migration est une interaction entre le système et son environnement. La migration fait également varier la population dans d'autres systèmes, alors que les naissances et les décès n'affectent que le système considéré. La différence entre les trois modes de transport est plus subtile. C'est la raison pour laquelle nous voulons examiner attentivement comment les personnes peuvent entrer dans ou quitter le système.

Tout d'abord, les personnes peuvent franchir la frontière à pied. Deuxièmement, elles peuvent être transportées en train ou en voiture. À nouveau, s'il n'y a que ces processus, le taux auquel les personnes franchissent la frontière, que l'on appelle les *courants* ou les *flux*, détermine à quelle vitesse le nombre de personnes évolue dans le pays. En consultant le tableau 16.3, nous voyons que ces grandeurs sont mesurées de manière totalement différente des taux de naissance ou décès. Malgré le fait que les deux modes de transport aient le même effet sur la population du pays, nous devons les distinguer l'un de l'autre, parce que dans le second cas, nous devons prendre en compte le nombre de trains et de voitures qui franchissent les limites du système. On rencontre également de tels mécanismes de transport dans des systèmes physiques. Il suffit de penser à l'entropie. Nous savons tous qu'elle peut s'écouler à travers les corps en passant à travers leurs limites; mais elle peut également pénétrer dans le système en franchissant ses limites, transportée par de la matière à l'intérieur de laquelle elle réside. Dans le premier cas, le système ne reçoit que de l'entropie, dans le second de l'entropie et de la matière. Nous avons donné à ces deux modes de transport des noms différents: le transfert *à travers la matière* est appelé la *conduction*, alors que le transport *avec la matière* est appelé la *convection* (fig. 16.2).

Le troisième mode de transport de personnes est l'avion. Il permet d'arriver directement dans le système (ou de le quitter) sans avoir à franchir la frontière. En principe, on peut ainsi arriver directement en n'importe quel point du système (fig. 16.3).



À nouveau, nous devons faire une distinction entre ce processus et ceux que nous avons déjà rencontrés et qui contribuent également à faire évoluer la population. Il s'agit clairement d'une interaction entre le système et son environnement, contrairement aux naissances et aux décès. Mais ce mode de transport doit également être distingué des trains et des voitures qui ne peuvent amener des personnes directement en un point quelconque du système. Le transport aérien permet d'entrer dans le système par la troisième dimension sans avoir à franchir la frontière. Alors que nous avons décrit les transports terrestres en termes de courants ou de flux dont nous devons connaître la distribution à la frontière, le troisième mode de transport nécessite de connaître la distribution par rapport au « volume » du système. On dit de grandeurs qui apparaissent à l'intérieur d'un système ou en disparaissent sans en avoir franchi les limites qu'elles ont des *sources* ou des *puits*. Si seuls ces processus sont présents, le taux de source net détermine à quelle vitesse la population évolue. Pour récapituler ce qui précède, nous pouvons affirmer que les taux de naissance et de décès, les flux conductifs et convectifs, ainsi que les taux de source, nous renseignent exactement et totalement sur ce qui se passe à l'intérieur du système (fig. 16.4).

Malgré la similitude entre les processus de production et ceux qui sont dus à des sources — la production entraîne l'apparition d'une source à l'intérieur du système —, il y a une différence fondamentale entre les deux phénomènes: les quantités produites

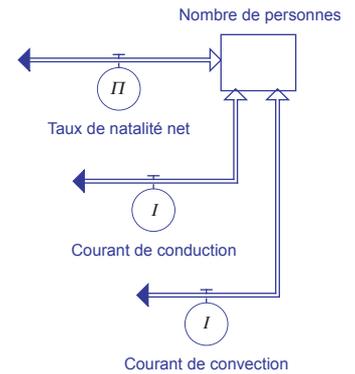


FIGURE 16.2 Le nombre de personnes varie à la suite des naissances et des décès, de personnes arrivant à pied (conduction), en voiture ou en train (convection). L'étude des phénomènes de transport d'entropie nous a familiarisés avec les termes de *conduction* et de *convection*.

FIGURE 16.3 Contrairement au transport terrestre, le transport aérien peut amener les personnes directement à l'intérieur du système sans avoir à franchir la frontière.

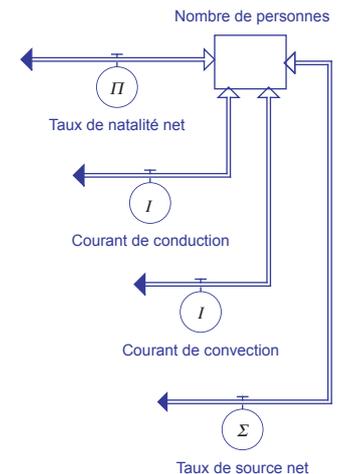


FIGURE 16.4 Bilan généralisé incluant trois types de transport ainsi que la production/destruction.

ne pénètrent pas dans le système en s'écoulant à partir d'un autre système duquel elles disparaîtraient.

16.1.3 Le processus général d'accumulation

L'exemple du nombre de personnes vivant dans un pays nous a permis d'examiner un cas très général d'accumulation. La production et les trois types de transport représentent tous les processus qui sont susceptibles d'influencer la quantité d'une grandeur extensive (assimilable à un fluide) à l'intérieur d'un système. Il s'ensuit que la forme la plus générale d'un bilan peut être exprimée de la manière suivante :

Il existe quatre types de processus qui déterminent à quelle vitesse varie le contenu d'un système à n'importe quel instant : la production, le flux conductif, le flux convectif et les sources. La somme de tous les taux de production, de tous les flux dus à la conduction et à la convection et tous les taux de sources est égale au taux de variation du contenu du système.

Beaucoup de grandeurs extensives ne varient que par l'intermédiaire d'une partie de ces quatre processus (tableau 16.4). Par exemple, de grands bâtiments ne peuvent ni migrer, ni être transportés ; seule la construction ou la démolition peuvent en faire varier le nombre.

TABLEAU 16.4 Manières de faire varier le contenu d'un système.

Grandeur	S'écoule d'elle-même ^a	Transport par d'autres moyens ^b	Sources	Production
Humains	✓	✓	✓	✓
Baleines vivantes	✓	Non	Non	✓
Voitures	✓	✓	✓	✓
Grands bâtiments	Non	Non	Non	✓
Arbres	Non	✓	✓	✓
Étoiles	✓	Non	Non	✓
Charge électrique	✓	✓	Non	Non
Entropie	✓	✓	✓	✓

a. En physique, on parle de transport par conduction.

b. En physique, on parle de transport par convection.

16.2 FORME GÉNÉRALISÉE DE L'ÉQUATION DE BILAN

Les intensités de courants dus à la conduction et à la convection, les taux de source et les taux de production représentent toutes les grandeurs nécessaires pour décrire les processus qui sont à l'origine des phénomènes dynamiques. Si elles sont mises en relation avec le taux de variation du contenu du système comme nous l'avons mentionné à la fin de la section 16.1, nous obtenons la forme la plus générale du bilan.

16.2.1 Forme instantanée de l'équation de bilan

Comme nous l'avons vu dans les applications précédentes, établir le bilan d'une grandeur accumule signifie mettre en relation ce qui survient à l'intérieur du système avec les grandeurs qui décrivent les processus de transport et de production :

$$\{\text{contenu du système}\} \leftrightarrow \{\text{processus}\}$$

La partie gauche de cette relation est spécifiée au moyen du taux de variation du contenu du système, alors que la partie droite est déterminée par les flux, taux de source et taux de production. La forme générale d'une équation de bilan a donc la structure suivante :

$$\{\text{taux de variation du contenu du système}\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{flux} \\ \text{taux de source} \\ \text{taux de production} \end{array} \right\}$$

Si nous exprimons cette relation avec des grandeurs formelles, nous obtenons une équation qui énonce le bilan de la grandeur X .

Équation de bilan: Il y a quatre types de processus qui déterminent la vitesse de variation du contenu d'un système: la production, le flux conductif, le flux convectif et les sources. La somme de tous les taux de production, de tous les flux dus à la conduction et à la convection et tous les taux de source est égale au taux de variation du contenu du système.

$$\dot{X} = I_{X, \text{net}} + \Sigma_{X, \text{net}} + \Pi_{X, \text{net}} \quad (16.1)$$

Ici, «net» signifie que le terme en question représente la somme de toutes les contributions du processus considéré. Comme nous l'avons déjà fait remarquer à plusieurs reprises, une équation de bilan ne sert pas de définition de l'un des membres de l'équation, c'est l'une des hypothèses les plus fondamentales sur la manière dont fonctionne la nature. Notez que la forme instantanée du bilan est valable à n'importe quel instant durant le déroulement des processus.

Il y a deux façons d'utiliser des équations de bilan pour calculer des grandeurs :

- Tous les processus sont spécifiés. Dans ce cas, on peut calculer le taux de variation à partir duquel le comportement du système peut être calculé.
- Le comportement du système est connu, c'est-à-dire que l'on connaît l'évolution de son contenu en fonction du temps. À partir de là, nous pouvons calculer le taux de variation du contenu. Si tous les processus sont spécifiés à l'exception d'un seul, ce dernier peut être déterminé.

EXEMPLE 16.1. Formes particulières de l'équation de bilan.

(a) Énoncez l'équation de bilan du nombre d'oiseaux sur les Galápagos avant que les humains ne découvrent ces îles. (b) Énoncez l'équation de bilan pour une substance chimique soumise à des réactions à l'intérieur d'un réacteur isolé. (c) Énoncez l'équation de bilan de l'eau d'un lac donc le contenu est constant.

SOLUTION: (a) Avant que les humains découvrent les îles Galápagos, les oiseaux pouvaient vivre dans les îles ou les quitter, et y naître et y mourir. L'équation de bilan prend donc la forme

$$\dot{O} = \Sigma_{O, \text{net}} + \Pi_{O, \text{net}}$$

O représente le nombre d'oiseaux à n'importe quel moment. Le taux de source et le taux de «production» sont respectivement la conséquence de l'immigration et de l'émigration des volatiles et de leur naissance et de leur mort.

(b) Soit X la quantité instantanée de la substance considérée. Si le réacteur est isolé, aucun transfert n'a lieu. Les seuls processus possibles sont ceux de production et de destruction dus aux réactions chimiques :

$$\dot{X} = \Pi_{X, \text{net}}$$

(c) L'eau peut s'écouler vers ou hors du lac. Les précipitations et l'évaporation peuvent apporter ou soutirer de l'eau. Tous les processus sont des transports à travers des surfaces, ce qui signifie que nous n'avons à prendre en compte que des flux. Comme le contenu du lac est supposé être constant, son taux de variation est nul. Il s'ensuit :

$$0 = I_{V, \text{in}} + I_{V, \text{out}} + I_{V, \text{précipitations}} + I_{V, \text{évaporation}}$$

Pour que cette interprétation soit correcte, il est primordial de savoir avec précision où nous situons les limites du système et de quelle manière nous traitons l'évaporation. Si nous considérons l'évaporation comme une réaction chimique qui transforme l'eau en vapeur, et si nous admettons que ce processus a lieu à l'intérieur du système, nous devons remplacer le flux dû à l'évaporation par un taux de production. Les variations du contenu du système restent naturellement les mêmes, quelle que soit la manière dont nous interprétons les processus. ■

EXEMPLE 16.2. À la recherche des éléphants manquants.

Dans un parc national en Afrique, les gardiens tiennent le décompte des éléphants qui y vivent, et des naissances et morts, mais personne ne dénombre ceux qui immigrent ou émigrent. On a reporté dans la figure 16.8a le nombre d'éléphants pour les huit dernières années. Durant la même période, le taux net de naissance a évolué graduellement de 250 à 330 par année. Déterminez le flux net dû à la migration en fonction du temps.

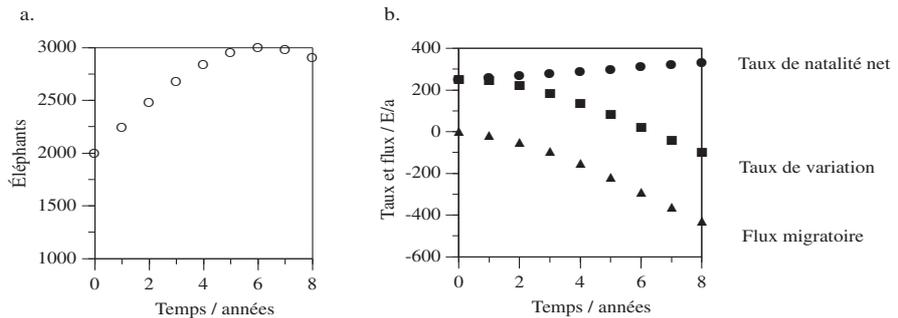


FIGURE 16.5 Évolution d'une population d'éléphants : (a) statistique des animaux présents; (b) taux de variation déterminés à partir de la statistique.

SOLUTION: Énonçons d'abord l'équation de bilan du nombre d'éléphants. Les éléphants peuvent naître et mourir, et ils migrent. Le taux de variation de leur nombre est donc donné par

$$\dot{E} = \Pi_E + I_E$$

Si nous connaissons le taux de variation du nombre d'éléphants, nous pourrions calculer le flux migratoire, vu que le taux de naissance net est connu. Mais nous pouvons déterminer le taux de variation à partir de la représentation graphique du nombre d'éléphants. Le résultat apparaît dans la courbe médiane de la figure 16.8b; le taux de variation passe de 250 éléphants par année à -100 E/a. Nous pouvons également reporter le taux de naissance connu dans le même graphique (courbe supérieure).

Selon l'équation de bilan, le flux migratoire est simplement

$$I_E = \dot{E} - \Pi_E$$

En soustrayant la courbe supérieure de la courbe médiane, nous obtenons la courbe inférieure de la figure 16.5b, donnant un flux migratoire passant de 0 E/a à -430 E/a. Il y a donc toujours plus d'éléphants qui ont quitté le parc que d'éléphants qui y sont entrés. ■

EXEMPLE 16.3. Calculer un processus complet.

Nous nous intéressons à la nourriture consommée par certains micro-organismes dans un réacteur. La nourriture est injectée à un taux stationnaire de 12 kg/min. Le taux de consommation varie selon le graphique de la figure 16.6a. En admettant que la quantité de nourriture initiale était de 100 kg, déterminez la quantité de nourriture présente en fonction du temps.

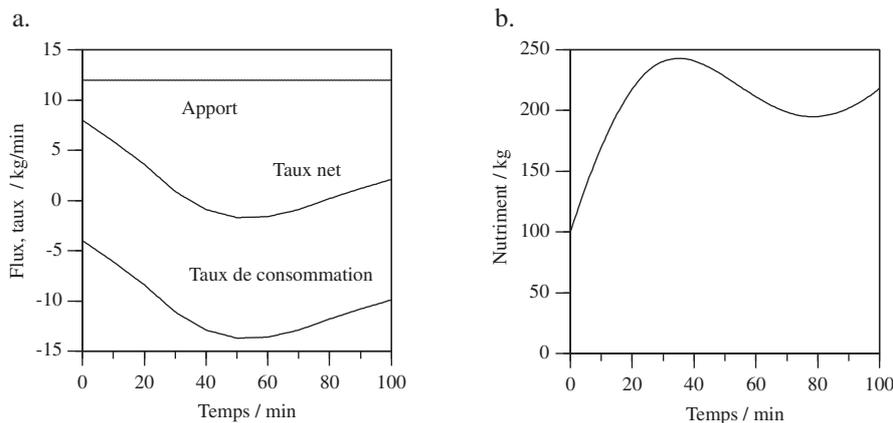


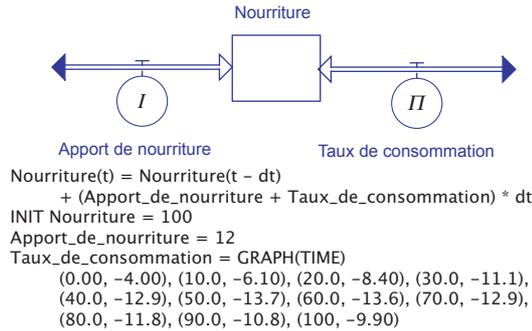
FIGURE 16.6 Consommation de nutriments dans un bioréacteur: (a) apport et consommation; (b) quantité de nutriments présente calculée.

SOLUTION: Nous avons besoin de l'équation de bilan de la quantité de nourriture pour pouvoir déterminer cette valeur en fonction du temps. L'équation de bilan inclut le flux dû à l'approvisionnement et le taux de destruction dû à la consommation:

$$\dot{N} = I_N + \Pi_N$$

La somme de I_N et Π_N , qui est égale au taux de variation de la quantité de nourriture, peut être calculée et représentée dans le graphique de la figure 16.6a. Lorsque nous avons le taux de variation de la quantité de nourriture, $N(t)$ peut être calculé par intégration ou en utilisant un outil de dynamique des systèmes. Le diagramme et les équations correspondant à notre problème apparaissent dans la figure 16.7. Le résultat est représenté dans la figure 16.6b.

FIGURE 16.7 Diagramme de dynamique des systèmes utilisé comme intégrateur pour calculer la valeur instantanée de nutriments présents dans le bioréacteur.



16.2.2 Forme intégrale de l'équation de bilan généralisée

Quelquefois, nous ne souhaitons ou ne pouvons pas savoir comment un processus se déroule dans le temps. En revanche, on pourrait avoir une information sur le résultat du déroulement du processus durant une période bien définie. Dans de tels cas, on travaille avec les variations du contenu du système, les quantités échangées, les quantités produites, plutôt qu'avec leurs valeurs instantanées.

Les variations du contenu du système, les quantités échangées et produites peuvent être obtenues en intégrant respectivement le taux de variation, les flux et les taux de source, ainsi que les taux de production. Il s'ensuit que la forme générale de l'équation de bilan applicable pour un processus se déroulant durant une période déterminée est le résultat de l'intégration de chacun des termes de l'équation (16.1), ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= I_{X, \text{net}} + \Sigma_{X, \text{net}} + \Pi_{X, \text{net}} \\
 \downarrow & \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 \Delta X &= X_{\text{éch. courants}} + X_{\text{éch. sources}} + X_{\text{produit}}
 \end{aligned}
 \tag{16.2}$$

En d'autres termes, la forme intégrée de l'équation de bilan exprime le fait que la variation du contenu du système est égale à la somme de toutes les quantités échangées par les courants et les sources et de la quantité nette produite à l'intérieur du système.

16.2.3 Rôle des bilans dans les processus dynamiques

Sans les bilans, il n'y aurait pas de systèmes dynamiques (au sens mathématique du terme). Un système peut réagir à un signal dynamique externe, et manifester une réponse dynamique, mais sans accumulation, il ne manifestera jamais un comportement dynamique intrinsèque. Considérons la lumière du soleil tombant sur une fenêtre. Si tout ce que fait la fenêtre consiste à transmettre une fraction de la lumière et réfléchir le reste, la lumière dans la pièce suit instantanément les variations du rayonnement sur le verre. Si, en revanche, la lumière était absorbée par une paroi susceptible de stocker l'entropie, la paroi pourrait réchauffer l'intérieur de la pièce dans la soirée, longtemps après que le soleil se fut couché, montrant ainsi que ce système a une vie propre.

16.3 STRUCTURE DES MODÈLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES

Arrêtons-nous un instant pour étudier la structure du modèle développé pour un modèle hydraulique simple au chapitre 1. Nous le faisons en décomposant le diagramme du modèle de système dynamique de la fig. 1.65. L'aspect le plus remarquable du diagramme est la présence de trois différents sortes de symboles représentant trois classes différentes de grandeurs ou variables (fig. 16.8). Il s'agit du *stock* (le rectangle), du *flow* (la conduite, le pipeline) et du *converter* (les cercles). Alors que la majorité des relations que l'on peut voir dans le diagramme sont des relations entre des converters, et entre des converters et des flux, il existe une relation entre le stock et le flow. Cette dernière représente l'équation de bilan portant sur la grandeur accumulée, le volume V du fluide. La distinction la plus importante est celle qu'il faut faire entre les équations de bilan et les autres relations qui sont appelées *lois constitutives*. Les diverses lois constitutives apparaissant dans notre exemple n'ont qu'un objectif : déterminer le flux dans l'équation de bilan.

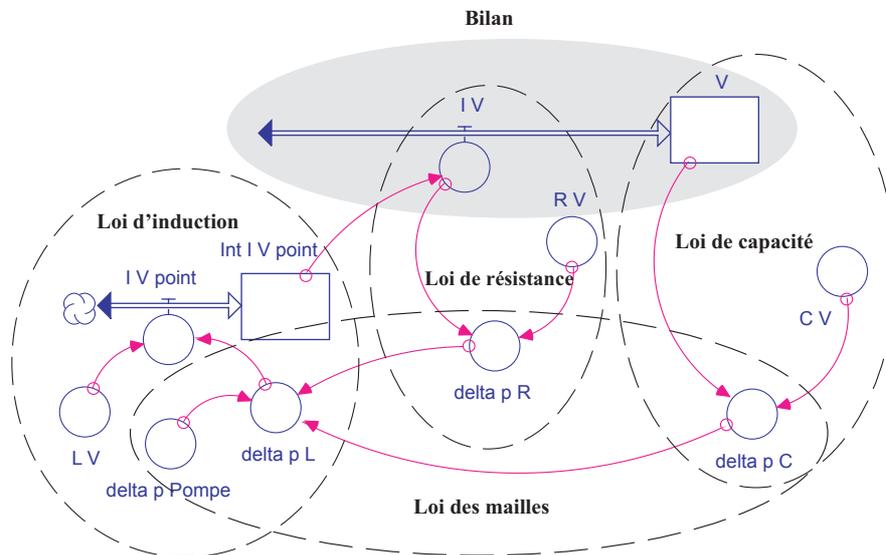


FIGURE 16.8 Structure d'un modèle de dynamique des systèmes (remplissage d'un réservoir au moyen d'une pompe avec prise en compte de l'induction). Remarquez la division des relations en deux groupes distincts, à savoir les équations de bilan et les lois constitutives. Les premiers traitent des grandeurs accumulables en mettant en relation les stocks et les flows ; elles ont toujours la même forme et sont valables pour tous les systèmes physiques. Les lois constitutives (ou lois matérielles) font la distinction entre différentes situations et reflètent les particularités des systèmes.

La structure particulière de nos modèles de dynamique des systèmes décrite dans la figure 16.8 est la conséquence de la manière dont nous envisageons le fonctionnement de la nature : nous avons supposé que l'écoulement, la production et le stockage de certaines grandeurs sont la cause des processus que nous observons autour de nous. Il est donc naturel d'énoncer des lois qui traitent de ce genre de situation : ce sont les bilans. On peut considérer les éléments constitués de stocks et de flows comme la colonne vertébrale de la description dynamique des processus de nature physique ou autres. D'autre part, les lois constitutives décrivent la grande variété de processus, corps et circonstances trouvés dans la nature. Nous pouvons résumer nos résultats de la manière suivante :

Les modèles de processus dynamiques sont basés sur deux types fondamentaux de relations, à savoir; d'une part, entre les stocks et les flows pour énoncer les bilans et, d'autre part, les relations entre les autres variables pour déterminer les flux. Ces dernières relations sont appelées lois constitutives. Étant donné qu'un modèle concret reflète la structure d'un système concret, la structure d'un modèle reflète notre vision du fonctionnement de la nature et pourrait être appelée une méta-structure.

16.4 LA FACE MATHÉMATIQUE DES MODÈLES

Alors que la modélisation implique de nombreux aspects qualitatifs, en fin de compte nous souhaitons pouvoir énoncer nos hypothèses sur le système et son comportement sous forme d'un jeu d'équations qu'il faudra résoudre. Dans ce qui suit, nous allons brièvement décrire la forme de ces équations et quelques méthodes pour les résoudre. Ce sont des points importants pour le processus de modélisation en général, et pour la physique en particulier.

16.4.1 Forme des équations du modèle

Les exemples de systèmes que nous avons modélisés jusqu'ici présentent tous une structure sous-jacente identique (section 16.3). Il est donc justifié de s'attendre à ce que les équations reflètent également cette structure, ce qui est le cas: les équations émergeant de la modélisation de processus dynamiques appartiennent toutes à la même classe d'objets mathématiques, les *problèmes aux conditions initiales* (ou problème de Cauchy).

Les modèles de systèmes dynamiques consistent en un ou plusieurs bilans et un certain nombre de lois constitutives qui déterminent les flux (section 16.3). Vu que tous les bilans ont la même forme mathématique, quel que soit le domaine considéré (physique, biologique ou autre), nous devons obtenir le même ensemble d'équations, indépendamment du sujet traité.

Avant de présenter cette forme générale, considérons un exemple simple tiré de l'hydraulique: deux réservoirs reliés par un tuyau; le second réservoir possède un écoulement au niveau du fond (fig. 16.9). Nous supposons que les réservoirs ont des parois verticales et que les écoulements obéissent à la loi de HAGEN-POISEUILLE. Nous énonçons tout d'abord les équations de bilan pour les volumes de fluide V_1 et V_2 :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -I_{V1} \\ \dot{V}_2 &= I_{V1} - I_{V2} \end{aligned} \tag{16.3}$$

Nous devons ensuite énoncer les relations qui déterminent les deux courants I_{V1} et I_{V2} qui apparaissent dans les membres de droite des équations de bilan. Ce sont les lois constitutives liées à ce problème concret, à savoir la loi de résistance pour chacun des flux et la loi de capacité pour chacun des réservoirs:

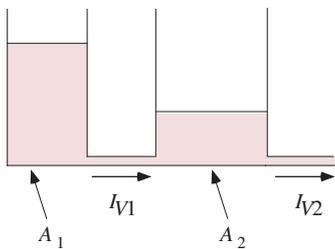


FIGURE 16.9 Système hydraulique simple constitué de deux réservoirs. Les équations du modèle comportent deux bilans ainsi que plusieurs équations caractérisant les flux.

$$\begin{aligned}
 I_{V_1} &= \frac{1}{R_{V_1}}(p_{C_1} - p_{C_2}) \\
 I_{V_2} &= \frac{1}{R_{V_2}} p_{C_2} \\
 V_1 &= C_{V_1} p_{C_1} \\
 V_2 &= C_{V_2} p_{C_2}
 \end{aligned}
 \tag{16.4}$$

Enfin, nous devons spécifier les valeurs initiales des grandeurs V_1 et V_2 qui apparaissent dans les équations de bilan :

$$\begin{aligned}
 V_1(t=0) &= V_{1,0} \\
 V_2(t=0) &= V_{2,0}
 \end{aligned}
 \tag{16.5}$$

Ce système d'équation doit être résolu si nous voulons obtenir V_1 et V_2 en fonction du temps, grandeurs à partir desquelles nous pouvons obtenir d'autres informations intéressantes. Il est possible de substituer les équations (16.4) dans les équations de bilan (16.3), ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{C_1} &= -\frac{1}{R_{V_1}C_{V_1}} p_{C_1} + \frac{1}{R_{V_1}C_{V_1}} p_{C_2} \\
 \dot{p}_{C_2} &= \frac{1}{R_{V_1}C_{V_2}} p_{C_1} - \left(\frac{1}{R_{V_1}C_{V_2}} + \frac{1}{R_{V_2}C_{V_2}} \right) p_{C_2}
 \end{aligned}
 \tag{16.6}$$

Il faut encore tenir compte des valeurs initiales selon les équations (16.5). C'est parce que les équations (16.6) donnent l'évolution de V_1 et V_2 à partir de valeurs initiales $V_{1,0}$ et $V_{2,0}$, que ce jeu d'équations est appelé un *problème aux conditions initiales*.

Si nous examinons les exemples des chapitres précédents, nous constatons que les équations des modèles peuvent toujours être ramenées à une forme semblable aux équations (16.6). Les seules choses qui changent sont le nombre d'équations, la signification des variables et la forme algébrique des membres de droite de ces équations. En d'autres termes, nous aboutissons toujours à une ou plusieurs équations contenant la dérivée par rapport au temps de la grandeur X dans le membre de gauche, divers paramètres, et éventuellement le temps, dans le membre de droite. De telles équations et les valeurs initiales associées peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= F(X, t) \\
 X(t=0) &= X_0
 \end{aligned}
 \tag{16.7}$$

La dépendance de la fonction F par rapport aux paramètres n'est pas mentionnée explicitement. Comme il peut y avoir plusieurs équations de ce type pour un problème donné, la solution sera elle aussi constituée d'un ensemble de fonctions du temps que l'on peut représenter graphiquement, comme nous l'avons vu dans les exemples.

Les solutions possibles de problèmes aux conditions initiales sont encore maintenant un sujet de recherche intense. Seules les équations les plus simples peuvent être résolues analytiquement. La majorité doivent être résolues par des méthodes numériques que nous allons décrire brièvement dans les sections suivantes. D'autre part, l'existence de systèmes à comportement dit complexe ou chaotique a fait l'objet d'une grande activité de recherche mathématique durant les dernières décennies. Elle a contribué au développement de méthodes permettant de déterminer la nature générale des solutions

que peuvent admettre des problèmes aux valeurs initiales, incluant celles des systèmes chaotiques.

16.4.2 Résolution de problèmes aux conditions initiales

L'objectif lors de la résolution d'un problème aux conditions initiales est de trouver des courbes $X(t)$ qui représentent l'évolution du système dans le temps. Il existe deux types de solutions d'un tel problème, analytiques ou numériques. Une solution analytique consiste en une expression explicite pour $X(t)$ donnée sous forme d'équation algébrique. De telles solutions n'existent que pour les systèmes les plus simples. Tous les cas que nous avons réussi à résoudre analytiquement jusqu'ici sont présentés dans le tableau 16.5.

Pour obtenir une solution analytique, il faut maîtriser l'analyse; même dans ce cas, la résolution de problèmes aux conditions initiales est un art que nous n'allons pas apprendre dans cet ouvrage. La manière la plus simple pour trouver une solution, que nous avons utilisée dans les chapitres précédents, consiste à avoir une idée des fonctions mathématiques qui pourraient décrire le comportement observé, de les utiliser comme fonction d'essai que l'on substitue dans l'équation différentielle aux conditions initiales. On peut ainsi vérifier si la fonction proposée convient et, si c'est le cas, déterminer les paramètres indéterminés dans la solution. Une solution numérique consiste en un jeu de valeurs pour $X(t)$ en des points distincts du temps, valeurs qui servent d'approximation de la solution exacte. Dans la majorité des exemples traités jusqu'ici, nous avons donné des solutions numériques sous forme de tableau de valeurs ou de graphiques.

TABEAU 16.5 Récapitulation des ED résolues analytiquement.

ED ^a	Solution	Processus
$\dot{y} + ay = 0$ $y(t = 0) = y_0$	$y(t) = y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$ $\tau_c = \frac{1}{a} = R_y C_y$	Vidange d'un réservoir: $y = V, P, I_V$ Décharge d'un condensateur: $y = Q, U, I_Q$ Refroidissement: $y = S, T, I_S$ Freinage d'un volant: $y = L, \omega, I_L$ Chute dans un milieu visqueux: $y = p, v, I_p$
$\dot{y} + ay = b$ $y(t = 0) = 0$	$y(t) = y_{\max} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \right]$ $\tau_c = \frac{1}{a} = R_y C_y$ $y_{\max} = b \cdot \tau_c$	Remplissage d'un réservoir: $y = V, P, I_V$ Charge d'un condensateur: $y = Q, U, I_Q$ Réchauffement dans un milieu à température constante: $y = S, T, I_S$

TABLEAU 16.5 Récapitulation des ED résolues analytiquement.

ED ^a	Solution	Processus
$\dot{y} + ay = b$ $y(t=0) = 0$	$y(t) = y_{\max} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right]$ $\tau_L = \frac{1}{a} = \frac{L_y}{R_y}$ $y_{\max} = b \cdot \tau_L = \frac{\Delta\varphi_y}{L_y} \tau_L = \frac{\Delta\varphi_y}{R_y}$	Établissement d'un flux volumique: $y = I_V$ Établissement d'un courant électrique: $y = I_Q$
$\ddot{y} + ay = 0$ $y(t=0) = y_0$ $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$	$y(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{L_y C_y}}$	Oscillations non amorties: y peut représenter toutes les grandeurs ci-dessus, sauf les grandeurs thermiques.
$\ddot{y} + b\dot{y} + ay = 0$ $y(t=0) = y_0$ $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$	$y(t) = \hat{y} \exp(-\lambda t) \sin(\omega_d t + \varphi)$ $\lambda = \frac{b}{2} = \frac{R_y}{2L_y} = \frac{1}{2\tau_L}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$	Oscillations avec amortissement de type visqueux: y peut représenter toutes les grandeurs ci-dessus, sauf les grandeurs thermiques.

a. Le symbole y peut représenter n'importe quelle grandeur qui évolue dans le temps.

16.4.3 Champs directionnels et solutions graphiques

La méthode de résolution peut être expliquée au moyen d'un simple graphique. Considérons une équation différentielle aux conditions initiales telle que l'équation (16.7), dont la solution est une courbe dans le diagramme $X-t$. Trouver la solution est équivalent à parcourir cette courbe. En n'importe quel point, la poursuite du chemin nécessite simplement la connaissance de la direction locale (fig. 16.10). Si nous avons cette information, nous pouvons parcourir la courbe sans problème.

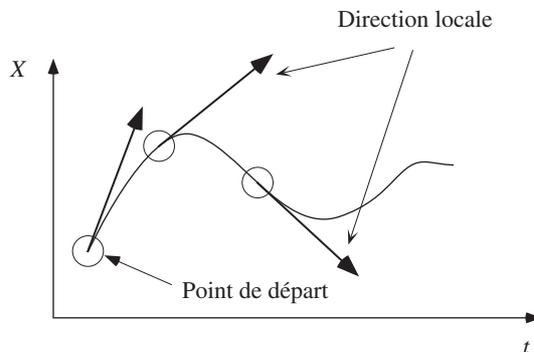


FIGURE 16.10 Trouver une courbe à partir d'un point de départ équivaut à suivre une route. Il suffit de connaître la direction de la route en chaque point. Dans le diagramme $X-t$, cette direction est donnée par le taux de variation de $X(t)$ (pente de la tangente).

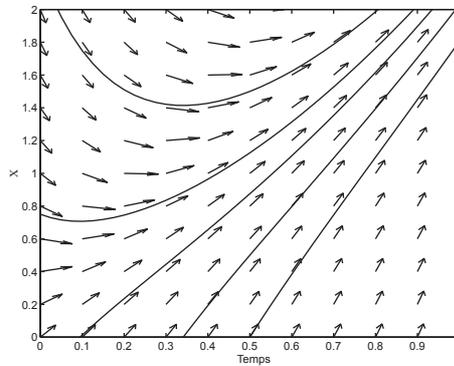
La direction de la courbure $X(t)$ en un point quelconque est le taux de variation de la grandeur X qui nous est donné par l'équation différentielle (16.7). Le membre de droite de l'équation différentielle (16.7) nous permet de calculer le taux de variation dont nous avons besoin. En d'autres termes, l'équation différentielle détermine la direction de la courbe $X(t)$ dans le diagramme $X-t$, mais pas la courbe elle-même.

Pour une équation unique, nous pouvons obtenir une vue d'ensemble des courbes représentant les solutions possibles de l'équation (16.7) si nous dessinons un champ directionnel dans le plan $X-t$. En effet, la connaissance de $F(X,t)$ nous permet de calculer dX/dt en n'importe quel point (t,X) dans le plan de la figure 16.10. Nous sélectionnons un certain nombre de valeurs de la variable t sur son axe et pour chacune de ces valeurs, nous choisissons un certain nombre de valeurs de X . Nous déterminons ainsi une grille de points dans le plan $X-t$. En chacun de ces points, nous calculons $F(X,t)$ pour obtenir la direction de la courbe solution en cet endroit. Si nous traçons une petite flèche indiquant cette direction en chaque point, nous obtenons une représentation graphique appelée champ directionnel du problème aux conditions initiales (fig. 16.11).

FIGURE 16.11 Champ directionnel d'un problème aux conditions initiales représenté par des flèches dans le plan (t,X) . L'équation différentielle est

$$\dot{X} = -\frac{2}{(t+0.5)} X + 4(t+0.5)$$

Cet exemple a été calculé et représenté graphiquement au moyen de Matlab.



Ensuite, nous pouvons choisir un point (t_0, X_0) qui servira de point de départ d'une courbe (condition initiale). Si nous suivons les flèches, nous obtenons une courbe qui est la représentation graphique de la solution pour la condition initiale choisie. D'autres conditions initiales donneront d'autres solutions (fig. 16.11). Naturellement, cette méthode est approximative, mais elle permet d'obtenir une vue d'ensemble des solutions auxquelles on peut s'attendre.

Il existe une variante importante pour les problèmes consistant en deux équations différentielles aux conditions initiales, tels que le cas de deux réservoirs communicants (fig. 16.9), ou lorsque le phénomène d'induction est couplé à un processus de stockage, ce qui peut produire un comportement oscillatoire (chapitres 4 et 7). Écrivons les équations explicites, dans lesquelles X et Y représentent les deux solutions :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F_1(X, Y) \\ \dot{Y} &= F_2(X, Y) \end{aligned} \tag{16.8}$$

Il est important de noter que nous admettons que les membres de droite ne dépendent pas explicitement du temps. Au lieu de tenter de trouver les courbes $X(t)$ et $Y(t)$ dans les diagrammes $X-t$ ou $Y-t$, nous allons construire un diagramme $Y-X$ que l'on appelle un diagramme de phase. Une solution des équations (16.8), avec prise en compte des conditions initiales, est une courbe dans l'espace des phases ; un point de cette courbe représente une paire de valeurs (X, Y) pour une valeur particulière du temps. Une telle courbe (fig. 16.12) semble émerger d'un champ directionnel tel que celui de la figure 16.11. Nous nous intéressons à la direction de la courbe au point (X, Y) , ce qui

n'est rien d'autre que la grandeur qui nous indique comment Y varie en fonction de X . Cette grandeur peut être obtenue en divisant la seconde des équations (16.8) par la première :

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{dY}{dX} = \frac{F_2(X, Y)}{F_1(X, Y)} \quad (16.9)$$

Comme auparavant dans la figure 16.11, nous choisissons une grille de points (Y, X) et calculons la direction dY/dX pour chacun d'eux. En représentant ces directions au moyen de petites flèches, nous obtenons un champ directionnel comme dans la figure 16.12.

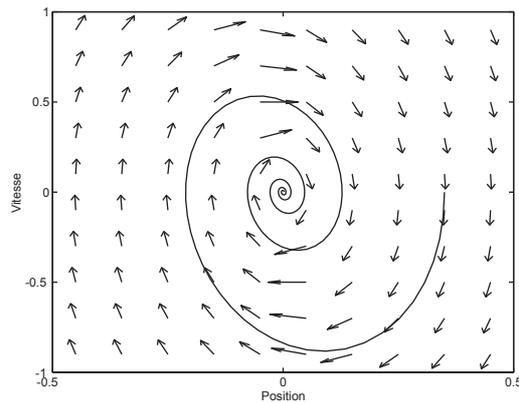


FIGURE 16.12 Diagramme de phase et champ directionnel pour les solutions des équations différentielles représentant les oscillations amorties d'un système. Les équations sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{D}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{aligned}$$

où $D = 10 \text{ N/m}$ est la constante de rigidité du ressort, et $\beta = 1 \text{ N/(m/s)}$ et $m = 1 \text{ kg}$ sont respectivement le facteur d'amortissement et la masse du corps. Les calculs et la représentation graphique ont été réalisés au moyen de Matlab.

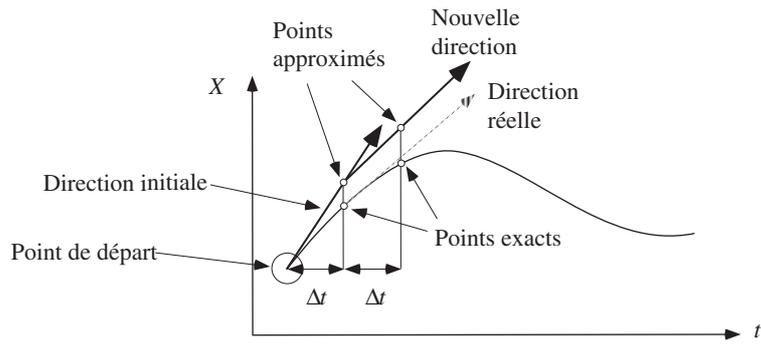
16.4.4 Méthodes numériques pour les problèmes aux conditions initiales

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques questions relatives aux méthodes numériques de manière un peu plus approfondie que dans les chapitres précédents. Nous n'arriverons qu'à égratigner la surface du domaine de la résolution numérique de solutions. Malgré tout, ce que nous apprendrons nous permettra de faire un meilleur usage des méthodes numériques qui sont proposées dans les outils de modélisation et de simulation.

Il existe pratiquement un nombre illimité de méthodes numériques pour résoudre les problèmes aux conditions initiales. Nous n'allons en considérer que deux, les algorithmes d'EULER et de HEUN, qui font partie de l'arsenal standard des méthodes numériques utilisées dans les logiciels de dynamique des systèmes. Cela nous suffira pour un début dans la résolution numérique de problèmes aux conditions initiales.

La figure 16.10 permet d'illustrer en détail la plus simple des méthodes de résolution numérique d'une équation différentielle aux conditions initiales. Le problème fondamental consiste à trouver le cheminement correct dans l'espace $X-t$. Nous connaissons le point de départ (la valeur initiale X_0 de X à l'instant 0), et nous pouvons calculer la direction initiale à partir de l'équation (16.7). Il suffit de suivre cette direction initiale durant un court intervalle de temps Δt , ce qui nous amène le long de la flèche de direction à un point qui est légèrement décalé par rapport à la solution exacte (fig. 16.13).

FIGURE 16.13 Représentation graphique de la méthode d'EULER. On suit la direction de la route pour un pas, puis on détermine la nouvelle direction. On s'éloigne progressivement de la solution exacte.



À partir de ce nouveau point, nous calculons une nouvelle direction. Vu que nous ne sommes plus sur la courbe exacte, la direction calculée à partir de l'équation (16.7) ne sera pas correcte. Ainsi, lors de la deuxième étape, nous partons d'un point approximé dans une direction approximée, ce qui va nous éloigner encore plus de la solution désirée. Mais c'est ce que nous pouvons faire de mieux avec cette méthode: la méthode d'EULER est simple, mais pas très précise. Naturellement, la précision des solutions calculées peut être améliorée en réduisant la longueur du pas Δt , ce qui se paie par une augmentation du nombre de calculs à effectuer pour arriver au point final le long de la courbe.

Il est possible de formuler mathématiquement cet algorithme. Suivre la direction de la courbe durant un bref intervalle Δt signifie que nous additionnons $F(X_i, t_i)\Delta t$ à la valeur initiale de X_i pour obtenir la nouvelle valeur. Donc :

$$X_{i+1} = X_i + F(X_i, t_i)\Delta t \tag{16.10}$$

Si nous comparons cette équation à celles qui sont générées à partir d'une structure de stocks et de flows par le programme STELLA (telle que la première de la liste d'équations dans la figure qui accompagne l'exemple 16.3), nous voyons qu'elles sont identiques. Pour des raisons de simplicité, les équations de bilan dans un modèle de dynamique des systèmes sont souvent présentées sous la forme de l'algorithme d'EULER de résolution des équations différentielles sous-jacentes.

La méthode numérique suivante est un peu moins simple, mais un peu plus précise que la méthode d'EULER. Elle consiste à améliorer la précision en calculant la valeur moyenne de la pente prise au début et à la fin de l'intervalle Δt , au lieu de se contenter de la pente calculée au début de l'intervalle. Pour y arriver, nous calculons, à partir du point X_j , une première approximation de X_{i+1} en utilisant la méthode d'EULER. Appelons X_{i+1}^* cette première approximation. Les deux valeurs X_i et X_{i+1}^* nous permettent de calculer la pente au début et à la fin de l'intervalle de temps. Même si la seconde pente est encore moins correcte que la première, nous pouvons utiliser sa valeur pour calculer une pente moyenne que nous utilisons pour le pas en question. Ainsi :

$$\begin{aligned} X_{i+1}^* &= X_i + F(X_i, t_i)\Delta t \\ X_{i+1} &= X_i + \frac{1}{2} [F(X_i, t_i) + F(X_{i+1}^*, t_{i+1})]\Delta t \end{aligned} \tag{16.11}$$

Il s'agit d'une méthode numérique de deuxième ordre, appelée méthode de HEUN. Elle est plus précise que la méthode d'EULER, vu qu'elle utilise une valeur corrigée de la pente pour chaque pas d'intégration. On peut montrer que l'erreur de la solution numérique décroît linéairement avec la longueur du pas d'intégration, mais qu'elle le fait de manière quadratique pour l'algorithme de HEUN. En augmentant le nombre

d'évaluations de la pente dans le même intervalle, on augmente la précision de l'algorithme. Les algorithmes les plus fréquemment utilisés sont connus sous la dénomination d'algorithme de RUNGE-KUTTA, qui s'arrêtent usuellement au quatrième ordre. Les algorithmes d'EULER et de HEUN sont des algorithmes de RUNGE-KUTTA respectivement d'ordre un et deux.

Il y a une leçon importante qu'il faut retenir du caractère approximatif des méthodes numériques : il ne faut jamais faire confiance à une solution après une seule exécution de la simulation. Il est indispensable de refaire une simulation, soit avec un intervalle de temps réduit, soit avec une méthode numérique différente. Il est même préférable de procéder à ces changements de manière séquentielle pour obtenir plusieurs jeux de solutions du même problème ; ce n'est que de cette manière que l'on peut améliorer la confiance dans la qualité des processus numériques.

16.5 LES ÉTAPES DU PROCESSUS DE MODÉLISATION

L'objectif principal de la physique est de créer des modèles du monde physique qui nous entoure. Les processus que nous avons étudiés dans les chapitres précédents nous ont permis de pénétrer dans le monde des systèmes dynamiques et nous ont démontré qu'une image fondamentale unique de la manière dont fonctionne la nature peut être utilisée pour la conception de modèles performants.

La modélisation de phénomènes physiques consiste en une représentation des processus au moyen d'une structure mathématique de la forme décrite dans les sections précédentes. Alors que c'est l'objectif final, nous devons toujours garder présent à l'esprit qu'il est rare de l'atteindre d'un seul jet ; au contraire, nous devons tendre à construire les modèles avec beaucoup de soin en une séquence d'étapes. Nous allons voir que ces étapes forment une boucle fermée : la méthodologie de modélisation et validation est un processus cyclique.

16.5.1 Spécification du système et des buts du modèle

Il est impératif d'examiner le problème à résoudre sous autant d'aspects que possible avant de se lancer concrètement dans la construction du modèle. Il faut en savoir le plus possible sur le système réel :

- Il faut déterminer aussi précisément que possible ce que le système est capable de faire, c'est-à-dire étudier les processus qui peuvent s'y dérouler.
- Pour autant que cela soit possible, il faut présenter l'information sur le comportement du système sous forme graphique.

La clarification des objectifs à atteindre avec le modèle est tout aussi importante. Il faut accepter le fait que l'on ne peut généralement accéder qu'à une partie, souvent très petite, des aspects, particularités et modes de comportement de l'objet réel que l'on modélise. Il faut donc mettre clairement en évidence ces objectifs limités.

- Il faut être conscient de ce que le modèle pourra accomplir, c'est-à-dire quels aspects de l'objet réel il pourra expliquer et prédire.

16.5.2 Images mentales et modèles verbaux

Après la clarification de l'objectif du modèle, l'étape suivante nécessite une réflexion approfondie, car il s'agit de développer des images mentales de l'objet et de ses

fonctions. Ces images seront, dans un premier temps, exprimées verbalement. Pour les créer, on doit s'appuyer sur ce que l'on observe dans la vie quotidienne ou sur des images qui tentent de concrétiser l'invisible, telles que les grandeurs physiques et leurs relations. Ainsi, l'image de l'accumulation et de l'écoulement de certaines grandeurs physiques correspond à ce que l'on peut voir dans la réalité. Cette réflexion peut être rendue plus structurée si l'on pose quelques questions importantes :

- Quelle est l'extension spatiale et matérielle du système, c'est-à-dire quelles sont les limites du système ?
- Quelles sont les grandeurs qui s'accumulent dans ce système ?
- Où les grandeurs accumulées s'écoulent-elles, et pourquoi s'écoulent-elles ?
- Y a-t-il d'autres grandeurs qui ont une influence essentielle sur l'évolution du système ?

16.5.3 Expression des images mentales sous forme de diagrammes

Après avoir établi des listes de termes importants et des idées, il faut faire usage de la puissance des diagrammes pour exprimer de manière plus structurée ce que l'on sait, ou croit savoir, sur le système. Les diagrammes peuvent souvent mieux révéler et exprimer certaines particularités du système que de longues explications.

Un type de diagramme qui joue un rôle central dans la modélisation de systèmes dynamiques généraux est celui que nous avons utilisé et qui se sert de stocks, de flows et de converters pour représenter les relations causales. En physique, d'autres outils graphiques, tels que les diagrammes de flux pour l'énergie et les porteurs d'énergie, et la représentation hydraulique des processus dynamiques, peuvent servir à clarifier les concepts. Tous ces diagrammes sont importants lorsque l'on essaie d'expliquer comment fonctionne la nature. En particulier, lorsque l'on considère des systèmes dynamiques :

- il faut transformer les images mentales en un diagramme de dynamique des systèmes.

16.5.4 Modèles mathématiques

Lorsque la structure d'un modèle a été couchée sur un diagramme de dynamique des systèmes, l'établissement de relations mathématiques concrètes est guidé par la représentation graphique. Cela signifie que l'on ne doit plus tâtonner dans le noir et espérer découvrir quelques équations utiles. La représentation graphique des idées sur un système sert à identifier les relations qui sont nécessaires pour compléter le modèle.

Si nous suivons la procédure pas à pas décrite ici, la modélisation devient une activité qui a peu en commun avec la recherche désespérée d'équations, souvent observée auprès de débutants lors de la résolution de problèmes en physique. En conclusion (fig. 16.14)

... la modélisation doit devenir une activité au cours de laquelle on s'efforce de comprendre une situation. Elle doit être guidée par la question « pourquoi le système fonctionne-t-il comme il le fait ? » Il faut avoir compris comment une situation réelle est transposée en un modèle physique en une suite d'étapes. Modéliser signifie se poser la question « quelle est notre image mentale de la situation que nous souhaitons décrire ? » à chaque étape du processus.

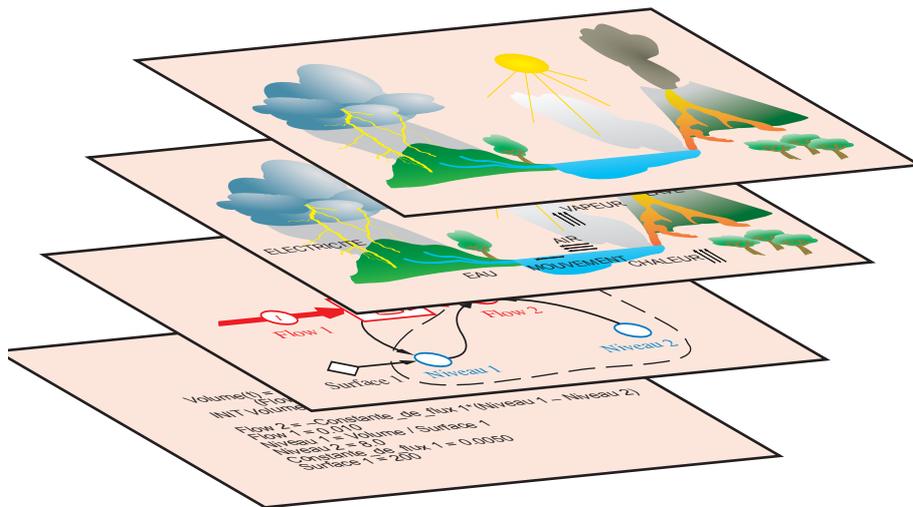


FIGURE 16.14 De la réalité au modèle mathématique. Un modèle se construit en un certain nombre d'étapes menant de la réalité (première couche) à une image mentale qualitative (deuxième couche) puis, par l'intermédiaire de diagramme de dynamique des systèmes (troisième couche) à la représentation mathématique des relations (quatrième couche). Chaque étape nous fait passer progressivement de la réalité à un monde abstrait.

16.5.5 Simulation

Le jeu de relations mathématiques qui constituent la couche formelle du modèle (fig. 16.14) doit être résolu pour obtenir des réponses au sujet du comportement du système. En fonction du type d'équations que nous avons obtenues, on pourra employer des solutions analytiques ou numériques. Si un modèle décrit une situation stationnaire, on pourra trouver un ensemble unique de valeurs de toutes les variables. Si, en revanche, nous avons affaire à des systèmes dynamiques, les variables importantes seront représentées en tant que fonction du temps, soit sous forme analytique, soit sous forme de tableaux ou de graphiques.

Un ensemble de graphiques montrant l'évolution dans le temps des grandeurs intéressantes est usuellement tout ce que l'on désire obtenir d'une simulation du modèle. Ils représentent le comportement du modèle pour un certain choix des paramètres. Si on le souhaite, on peut changer les valeurs des paramètres du modèle, refaire les calculs et examiner le comportement qui en résulte. De cette manière, on obtient une meilleure compréhension de l'éventail de processus qui peuvent avoir lieu dans le système. Cette procédure répétitive est appelée *étude des paramètres* ou *analyse de la sensibilité* (aux changements des conditions).

16.5.6 Expériences et validation

Après avoir construit un modèle et effectué la simulation, on souhaite savoir jusqu'à quel point les résultats donnés par le modèle rendent compte du comportement du système réel. Il est nécessaire de comparer les résultats du modèle avec les observations, ce qui ne peut être réalisé que si l'on a effectué des mesures sur le système réel.

Comme dans le cas des simulations du modèle qui sont répétées avec différents jeux de paramètres pour obtenir différents comportements, les systèmes réels doivent être observés dans des circonstances variables pour obtenir des résultats différents. On peut ensuite comparer les observations et les résultats des calculs, ce qui permet de juger de la qualité du modèle sur la base de la concordance entre les deux.

Si le système qui nous intéresse ne devrait ou ne peut pas être perturbé, seule l'observation peut nous donner des informations sur son comportement. C'est le cas des

grandes structures qui nous entourent. L'astronomie est le premier exemple d'une science physique qui ne peut pas expérimenter sur la majorité de ses objets.

Cependant, la physique étudie également des objets et des situations créés artificiellement. Les physiciens construisent des systèmes ou manipulent des systèmes existants pour les scruter de manière aussi détaillée que possible. C'est ce que l'on appelle l'*expérimentation*. La réalisation d'expériences sert essentiellement à soumettre un système à des processus dans un environnement contrôlé. Ce niveau de contrôle est nécessaire pour diminuer l'ampleur de la complexité que nous rencontrons dans les objets et les phénomènes naturels, ce qui est important si l'on veut simplifier le problème pour pouvoir l'étudier soigneusement et en détail. Grâce à l'expérimentation, les physiciens peuvent observer le fonctionnement de la nature dans un environnement artificiel afin de découvrir comment elle se comporte dans ce contexte simplifié.

L'expérimentation est donc une activité tout aussi abstraite que la modélisation. Les grandeurs que l'on mesure sont celles qui apparaissent dans les équations des modèles. L'expérimentation n'est pas nécessairement plus proche de la réalité que la modélisation. On choisit soigneusement les aspects du comportement réel que l'on peut contrôler et mesurer, et même dans ce cas, on ne sélectionne que ceux dont l'intérêt est immédiat.

Comment peut-on savoir à quoi il faut être attentif, quelles grandeurs il faut mesurer et mettre en relation les unes avec les autres ? Ici, les modèles viennent à la rescousse. Si l'on n'avait pas d'idée préconçue de la structure du système, on serait incapable de trouver un sens à ce que l'on observe. C'est pourquoi des expériences ne peuvent jamais prouver une théorie, une loi de la nature ou un modèle, vu que le modèle explique ce que l'on observe. En résumé :

Tout comme les expériences servent à valider une théorie ou un modèle, à en tester la qualité, les modèles donnent un sens à ce que nous observons. Aucune de ces deux activités, la modélisation ou l'expérimentation, ne se suffit à elle-même. Les deux sont imbriquées dans une relation mutuelle pour créer une science de la nature.

16.5.7 Boucler la boucle

Les paragraphes précédents suggèrent que la modélisation et l'expérimentation forment ensemble une boucle fermée d'activités qui contribue à l'élaboration d'une science telle que la physique. Les étapes mises en évidence jusqu'ici forment une boucle fermée telle que celle de la figure 16.15, si l'on revient simplement à la première étape pour reconsidérer ce qui a été fait à la lumière des observations ou des mesures réalisées lors de l'expérimentation. On pourra être amené à modifier le modèle, effectuer de nouvelles simulations, comparer les résultats à de nouvelles mesures, et ainsi de suite, dans un cycle qui ne se terminera que lorsque l'on sera satisfait de la qualité du modèle proposé.

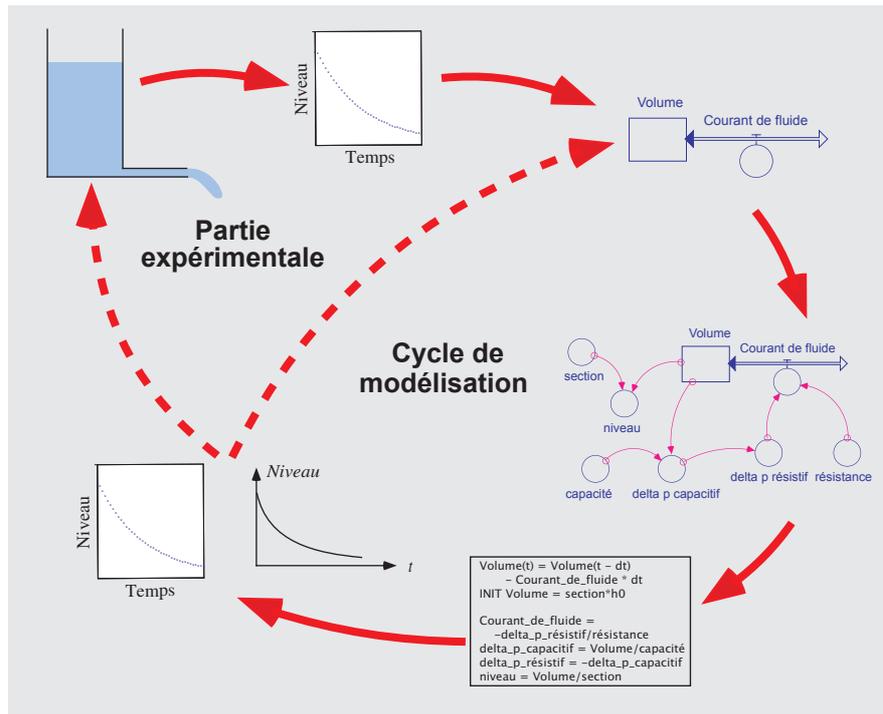


FIGURE 16.15 Le processus de modélisation forme une boucle fermée. La modélisation n'est pas terminée avec la résolution des équations du modèle. La validation nécessite la comparaison des résultats avec les mesures, ce qui peut entraîner une révision du modèle, c'est-à-dire un nouveau passage dans la boucle. Il peut s'avérer nécessaire d'effectuer de nouvelles expériences pour répondre à des questions qui ont surgi au cours du cycle de modélisation.

16.6 COMPLEXITÉ ET SENSIBILITÉ AUX CONDITIONS INITIALES

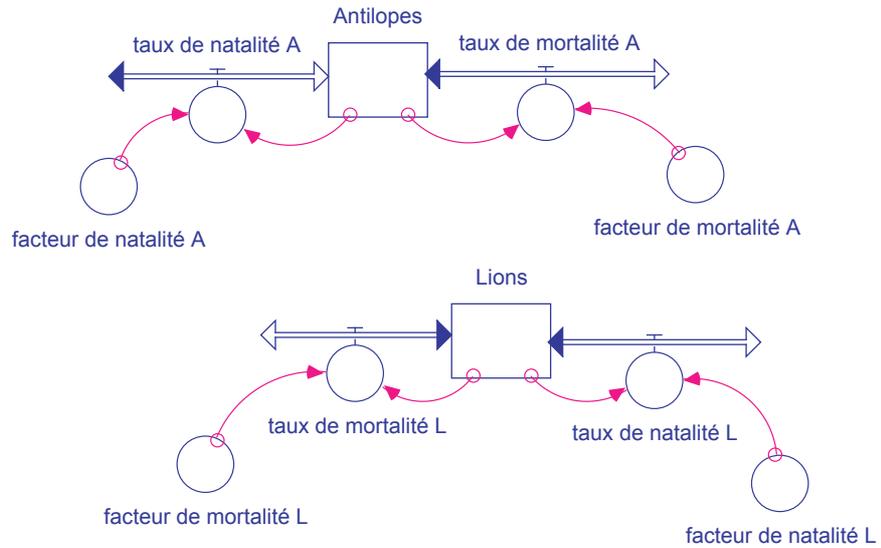
Dans cette section, nous allons étudier un exemple d'un système dynamique naturel, l'interaction entre trois populations: des antilopes, l'herbe dont elles se nourrissent, et des lions. Si nous avons choisi un exemple tiré de la biologie, ce n'est pas parce que la biologie est plus simple que la physique, l'opposé est probablement vrai. C'est pour montrer que, même en tant que novice, on peut formuler des idées intéressantes dans un domaine relativement peu connu.

Il s'agit d'un exemple construit (nous ne disposons pas de données observationnelles) et nous aborderons le problème en deux étapes. Dans la première, nous établirons un modèle de l'interaction entre les antilopes et les lions, modèle que nous compléterons dans une seconde étape par l'interaction entre les antilopes et l'herbe dont elles se nourrissent. Nous n'entrerons pas dans les détails du modèle, l'objectif étant de montrer comment un système relativement simple peut avoir un comportement complexe.

16.6.1 Deux populations en interaction: modèle de type prédateur-proie

Nous formulons tout d'abord les équations de bilan pour chacune des deux populations, les variations de chacune d'elles étant dues aux naissances et aux morts. Les deux équations de bilan ont la même structure, comme le montre la figure 16.16.

FIGURE 16.16 Bilans des populations d'antilopes et de lions sans prise en compte de leur interaction.



Nous allons maintenant modéliser l'interaction entre ces deux populations. Pour simplifier le modèle, nous admettons que les antilopes ne meurent qu'en étant tuées par les lions et que les lions ne meurent que faute de nourriture. Les taux de mortalité respectifs sont influencés par la taille de l'autre population. Ainsi, le taux de mortalité des antilopes dépend du nombre de lions présents, ce qui se modélise par la relation :

$$\text{taux_de_mortalité_A} = \text{facteur_de_mortalité_A} * \text{Lions} * \text{Antilopes} \quad (16.12)$$

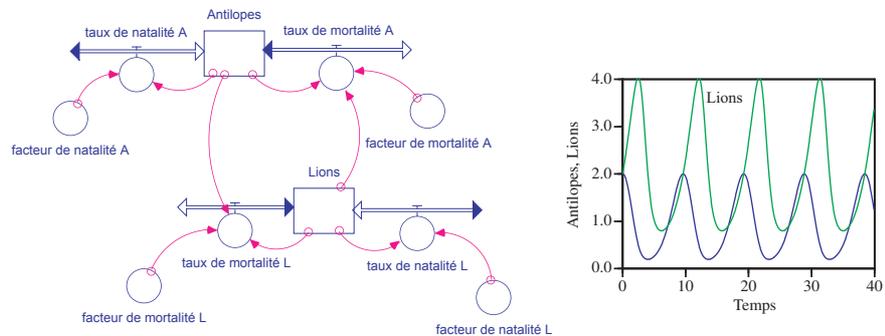
Le produit des deux premiers facteurs peut être interprété comme représentant la fraction de la population d'antilopes tuées par les lions par unité de temps.

Il doit naturellement y avoir une rétroaction du nombre d'antilopes sur la population des lions. En effet, le nombre de lions qui meurent de faim augmente lorsque le nombre d'antilopes diminue, ce que l'on peut exprimer par la relation :

$$\text{taux_de_mortalité_L} = \text{facteur_de_mortalité_L} / \text{Antilopes} * \text{Lions} \quad (16.13)$$

En combinant ces deux interactions avec les équations de bilan, nous obtenons le modèle et le comportement représentés dans la figure 16.17. Un tel modèle est appelé modèle de type prédateur-proie.

FIGURE 16.17 Modèle de l'interaction entre les antilopes et les lions, appelé modèle prédateur-proie.



Ce modèle simple aboutit à un régime cyclique, ce que la réflexion permet de prévoir. Lorsqu'il y a suffisamment d'antilopes, la population de lions augmente, ce qui augmente leur consommation et entraîne une réduction de la population d'antilopes. Avec un certain retard, la population de lions diminue elle aussi, à cause de la réduction de la nourriture disponible. La diminution du nombre de prédateurs permet à la population d'antilopes de se rétablir, rétablissement qui est suivi, avec un certain retard, par la croissance de la population des lions, et le cycle recommence.

16.6.2 Modèles linéaires et non linéaires

Le modèle prédateur-proie de la section 16.6.1 fait apparaître des oscillations des deux populations. Mais il existe une différence intéressante et essentielle entre ces oscillations et celles que nous avons observées et modélisées en hydraulique, électricité et en mécanique. Le premier modèle est non linéaire, alors que les autres le sont.

Un modèle de système dynamique est dit linéaire si les expressions pour tous les flux et taux de variations apparaissant dans le modèle sont linéaires dans les variables représentées par des stocks. Cela signifie que les variables représentées par des stocks ne peuvent pas, par exemple, être multipliées entre elles ou avec elles-mêmes. Elle ne peuvent être multipliées que par des facteurs apparaissant dans le modèle ou par des combinaisons de ceux-ci.

Considérons par exemple le taux de mortalité des antilopes dans le modèle de la figure 16.17. L'équation (16.12) nous informe que cette loi constitutive est le résultat de la multiplication du nombre de lions et d'antilopes. Comme ces variables sont représentées par des stocks et qu'elles apparaissent dans un produit, ce simple modèle prédateur-proie est non linéaire.

Tous les modèles d'oscillations rencontrés dans les chapitres précédents sont linéaires. On s'en convainc en vérifiant que les équations des modèles reliant les flux et taux de variations aux variables représentées par des stocks sont toutes linéaires.

Pourquoi cette distinction est-elle importante? On peut avoir un premier aperçu de l'importance de la non-linéarité en comparant le comportement du modèle prédateur-proie et les oscillations électriques ou mécaniques. Tout d'abord, on note que les courbes obtenues dans le cas non linéaire sont plus intéressantes: ce ne sont pas de simples courbes sinusoïdales. Deuxièmement, et cela est beaucoup plus important, les oscillations des populations de lions et d'antilopes dépendent fortement des conditions initiales choisies: un changement de celles-ci peut aboutir à un comportement passablement différent. Nous allons voir dans la section suivante comment les modèles non linéaires peuvent manifester des comportements étonnants, même en l'absence de chaos ou autre comportement extrêmement complexe.

16.6.3 Trois populations et complexité

Nous allons ajouter une extension au modèle de la figure 16.17. Ce qui manque, c'est la prise en compte de la nourriture des antilopes, l'herbe. Nous allons tout d'abord élaborer un modèle de la croissance de l'herbe que nous intégrerons dans le modèle prédateur-proie.

Nous considérons une parcelle vierge sur laquelle nous venons de semer de l'herbe. Au début, l'herbe croît de façon exponentielle. Mais l'herbe ne peut pas faire plus que de couvrir complètement la surface à disposition: la quantité d'herbe a atteint une valeur maximale stationnaire. Si l'on reporte la quantité d'herbe en fonction du temps, on obtient une courbe ressemblant à un S (fig. 16.18).

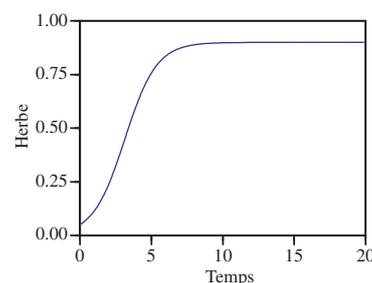


FIGURE 16.18 Courbe de croissance en forme de S rendant compte d'une limite à la croissance. Ce type de comportement est appelé croissance logistique.

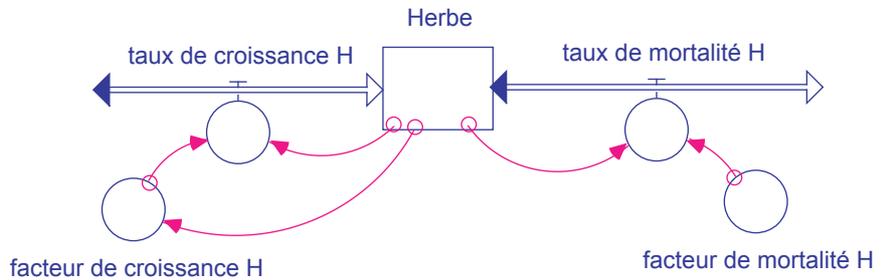
Comme il s'agit d'un modèle d'évolution de population, son élément de base sera identique à celui des populations d'antilopes et de lions. Pour tenir compte du fait que la croissance de l'herbe est limitée, nous devons rendre le facteur de croissance de l'herbe dépendant de la quantité d'herbe.

Nous admettons que nous utilisons des valeurs relatives pour l'herbe, c'est-à-dire la valeur actuelle divisée par la valeur maximale lorsque toute la surface est couverte, ce qui veut dire que les valeurs ne dépasseront pas 1. Pour cette valeur de la quantité d'herbe, le facteur de croissance doit être nul, alors que pour de très faibles valeurs de la variable Herbe, il doit correspondre au facteur de croissance normale h . Ces conditions sont satisfaites par l'expression suivante du facteur de croissance de l'herbe:

$$\text{facteur_de_croissance_H} = h(1 - \text{Herbe}) \tag{16.14}$$

C'est une forme particulière de la loi constitutive pour la croissance d'une espèce qui, intégré au modèle de la figure 16.19, donne le comportement représenté dans la figure 16.18.

FIGURE 16.19 Modèle de croissance limitée réalisé en rendant le facteur de croissance dépendant de la taille de la population.



La combinaison des deux modèles est relativement facile. Il faut y intégrer deux relations. La première est la consommation d'herbe par les antilopes. Nous remplaçons le taux de mortalité de l'herbe en un taux de consommation de l'herbe qui dépend de la taille de la population d'antilopes, ce qui peut être exprimé par:

$$\text{taux_de_consommation_H} = f_H * \text{Antilopes} * \text{Herbe} \tag{16.15}$$

Quelle est la raison de la présence de la variable Herbe en tant que facteur? S'il y a une grande quantité d'herbe disponible, cette relation n'est pas très réaliste, vu que les antilopes ne vont pas brouter plus que ce dont elles ont besoin. Cependant, lorsque

l'herbe se fait rare, cette relation reflète la réalité, raison pour laquelle nous allons la conserver. À nouveau, nous sommes en présence d'une relation non linéaire.

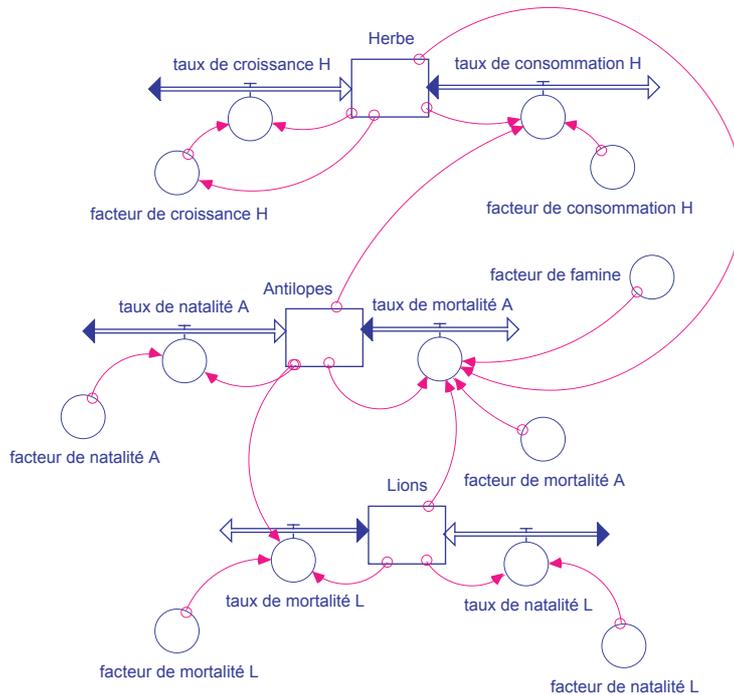


FIGURE 16.20 La combinaison du modèle prédateur-proie et du modèle de croissance logistique aboutit à un modèle d'interaction entre trois populations.

En second lieu, nous devons exprimer l'idée que les antilopes vont mourir d'inanition si elles ne trouvent plus assez d'herbe. Nous pouvons le faire en introduisant la relation suivante pour le taux de mortalité des antilopes :

$$\text{taux_de_mortalité_A} = (f_f / \text{Herbe} + f_m * \text{Lions}) * \text{Antilopes} \quad (16.16)$$

Rappelons que $f_m * \text{Lions}$ représente la fraction d'antilopes tuées par les lions. Nous avons ajouté la fraction d'antilopes mourant d'inanition au moyen de la relation f_f / Herbe , qui exprime l'idée que la fraction de décès dus à la famine doit être basse s'il y a suffisamment d'herbe et élevée dans le cas inverse.

Si nous simulons le modèle, nous voyons que le comportement du système est beaucoup plus compliqué et intéressant que tout ce que nous avons pu observer dans les modèles étudiés jusqu'à présent. En fait, nous obtenons des types de solutions très différents si nous changeons certains paramètres. La figure 16.21 montre deux solutions dans l'une desquelles l'une des espèces, les lions, disparaît.

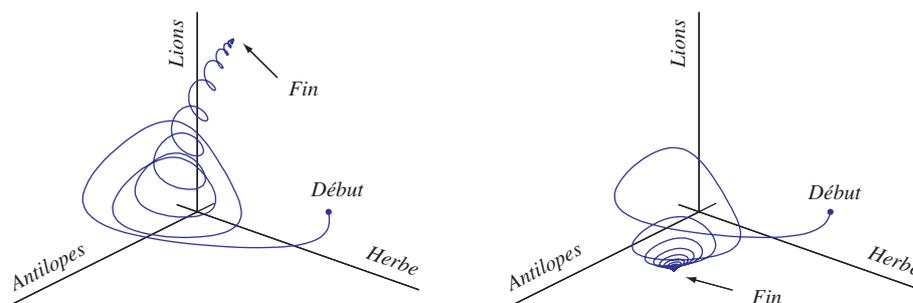
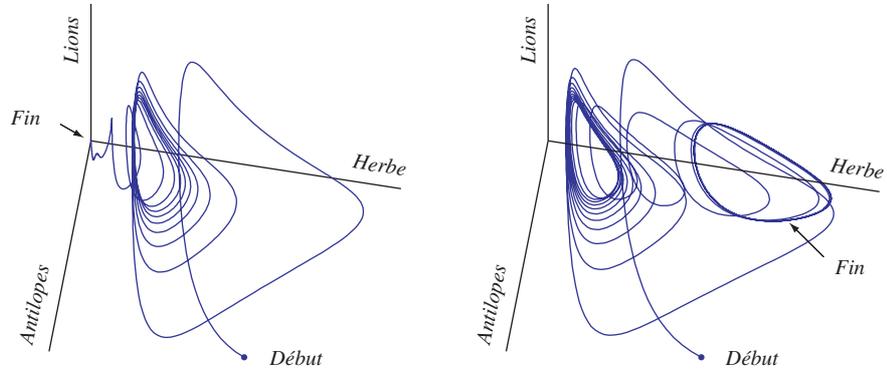


FIGURE 16.21 Deux solutions du modèle de la figure 16.20 dans un diagramme de phase tridimensionnel. Dans le premier cas, les trois espèces spiralent vers une valeur stationnaire, alors que dans le second, les lions disparaissent alors que l'herbe et les antilopes survivent.

On obtient des résultats encore plus intéressants si les interactions des populations sont modélisées de manière plus réaliste. Pour certaines plages des valeurs des paramètres, les solutions sont extrêmement sensibles à des changements, même minimes, des valeurs initiales.

FIGURE 16.22 Simulation d'une version plus élaborée du modèle de la figure 16.20. Dans le premier cas, les traces de la solution spiralent autour d'un domaine pendant un certain temps avant que le système ne subisse un collapsus qui voit la disparition de toutes les espèces. Si la valeur initiale des Antilopes est modifiée de 1%, une seconde solution apparaît. Dans celle-ci, les populations arrivent à s'échapper du goulot d'étranglement dans lequel elles semblent piégées.



Résumé du chapitre

Les processus dynamiques, qu'ils soient physiques, biologiques, sociaux, économiques ou autres, résultent de l'accumulation et de la variation à l'intérieur d'un système, d'une ou de plusieurs grandeurs extensives, qui peuvent être assimilées à un fluide. Ces variations peuvent être provoquées par des flux, la production ou la destruction ainsi que par des sources de ces grandeurs extensives. Ce constat est formulé mathématiquement au moyen d'une équation de bilan qui égale le taux de variation de la grandeur extensive à la somme des flux (conductifs ou convectifs), des taux de production et des taux de source.

Lorsque l'on veut modéliser un système dynamique, la procédure commence par l'identification des grandeurs extensives et des flux, taux de production, taux de source responsables de leurs variations, ainsi que des grandeurs qui ont une influence essentielle sur l'évolution du système.

Il faut ensuite créer une image mentale du système et des raisons du comportement observé et traduire graphiquement cette image mentale au moyen de diagrammes de processus. Dans le même temps, il faut énoncer les lois constitutives qui gouvernent les flux, taux de production et taux de source. Cette étape peut être grandement facilitée par l'utilisation de logiciels de modélisation de systèmes dynamiques qui prennent en charge l'énoncé des équations de bilan et la résolution des équations du modèle.

L'étape suivante est la phase de simulation qui consiste à résoudre les équations du modèle afin d'obtenir, analytiquement ou numériquement, les fonctions décrivant l'évolution temporelle des grandeurs caractéristiques du système. L'objectif est de pouvoir comparer les résultats des calculs et les observations obtenues lors de la phase expérimentale. Cette comparaison permet de se rendre compte de la qualité des hypothèses qui ont été utilisées pour élaborer le modèle, de les corriger si nécessaire, et éventuellement de recourir à des nouvelles expériences pour répondre à des questions que la simulation et la validation ont fait surgir.

Seuls les systèmes les plus simples permettent d'énoncer des modèles qui débouchent sur des équations différentielles que l'on peut résoudre analytiquement. Ce sont des modèles linéaires. Dès que la modélisation des processus fait intervenir des interactions entre des grandeurs extensives, les modèles deviennent non linéaires et débouchent, dans de nombreux cas, sur des comportements complexes manifestant une grande sensibilité à la variation des conditions initiales, voire des comportements chaotiques.

Questions

- Dressez la liste des processus qui sont responsables de la variation de la quantité d'une certaine grandeur stockée dans un système.
- On lit souvent que le courant d'une grandeur X est défini par dX/dt . Pourquoi est-ce faux? Que représente la grandeur dX/dt ? Si l'on souhaite continuer à définir un courant par «grandeur divisée par temps», comment peut-on le faire correctement?
- Si l'on connaît le courant d'une grandeur X , quelle autre grandeur peut-on en déduire?
- Pourquoi le taux de naissance de lapins est-il différent du taux de source de ces animaux dû à un arrivage aérien directement dans le système?
- Dans certains modèles de la circulation du sang dans les tissus, on suppose que le sang transporté par les artères apparaît directement en tous les points des tissus. Quelle est la grandeur physique adéquate pour décrire un tel processus dans un bilan?
- La figure 16.23 montre le taux de variation du nombre d'habitants d'une ville. a) Quelle est la signification des deux points où le taux de variation est nul? b) Qu'advient-il du nombre d'habitant entre ces deux points?

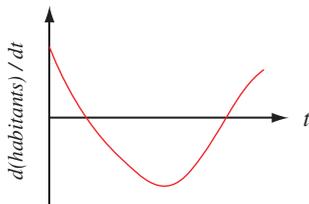


FIGURE 16.23
Question 6

- Les courants, taux de production et taux de source ont-ils des effets différents sur le taux de variation d'une grandeur accumulée?
- Tous les ordinateurs livrés à un certain pays le sont par avion. Écrivez la forme instantanée de l'équation de bilan des ordinateurs pour ce pays.
- Dans un certain pays, il n'y a ni immigration, ni émigration. Quelle conclusion peut-on tirer du fait que le nombre d'habitants de ce pays ne varie pas?
- Dressez la liste de tous les processus connus responsables de la variation de volumes de fluide, de la charge électrique, du moment cinétique, ou de la quantité de matière dans des systèmes. Énoncez ensuite la forme la plus générale de l'équation de bilan pour ces grandeurs.

Exercices

- Le nombre d'habitants dans une ville a diminué linéairement de 400 000 à 320 000 en 20 ans. a) Déterminez la variation du nombre d'habitants durant les 5 premières années. b) Quel est

le taux de variation du nombre d'habitants durant la période de 20 ans?

- L'épaisseur d'une couche de glace varie dans le temps selon la formule $e(t) = a + bt$, $a = 0.050$ m, $b = 4.0 \cdot 10^{-7}$ m s⁻¹. Quel est le taux de variation de l'épaisseur exactement deux jours après le moment initial?
- Le courant d'une certaine substance chimique augmente linéairement de 0.10 mol s⁻¹ à 0.30 mol s⁻¹ en 10 s. Combien de cette substance le courant a-t-il transporté?
- Une substance s'écoule vers et hors d'un récipient. Le diagramme de la figure 16.24 donne l'évolution des deux courants en fonction du temps. À quel instant la quantité de substance dans le récipient atteint-elle un maximum?

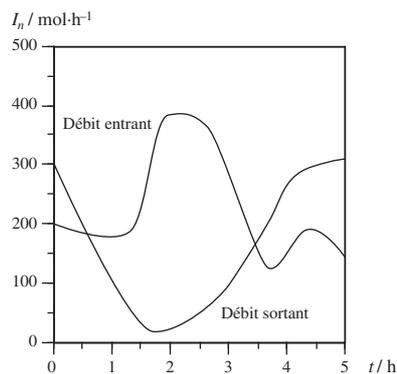


FIGURE 16.24
Exercice 4

- Les portes d'un parc d'attractions ouvrent à 9 h. Le flux de visiteurs entrant et sortant du parc est mesuré durant les premières heures (fig. 16.25). Combien de visiteurs y a-t-il dans le parc à l'instant $t = 14$ h?

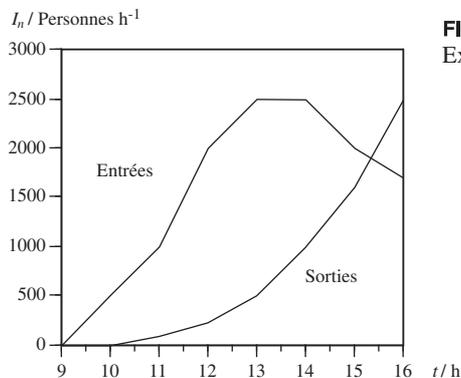


FIGURE 16.25
Exercice 5

- La quantité de nourriture pour bactéries se trouvant dans un réacteur est donnée par $n(t) = at^2 - bt + c$, où $a = 100$ mol h⁻², $b = -400$ mol h⁻¹, et $c = 1400$ mol. De la nourriture est ajoutée en continu. Le flux de nourriture augmente linéairement de 200 mol h⁻¹ à 450 mol h⁻¹ durant les 5 premières heures. a) Tracez les graphes de la quantité de nourriture et du flux de nourriture pour les 5 premières heures. b) Quel est le taux de variation de la nourriture à l'instant $t = 2.0$ h?

Problèmes

1. Considérez un état en tant que système. Nous sommes intéressés au nombre d'automobiles contenues dans ce système. Durant l'année 2018, il y a eu un flux d'importation constant de 1000 unités par mois. Durant le même temps, le flux d'exportation a augmenté linéairement de 600 à 18000 unités par mois. L'industrie automobile a produit des véhicules à un taux qui a diminué linéairement de 1200 à 600 unités par mois. a) Esquissez, dans le même diagramme, le flux d'importation, le flux d'exportation et le taux de fabrication et démolition en fonction du temps pour l'année 2018. b) Dans le même diagramme, esquissez le flux net de véhicules. c) Quel est le nombre net d'automobiles échangées entre le début du mois de mars et la fin du mois d'octobre (tous les mois étant considérés comme d'égale longueur)? d) Quelle est la variation du nombre de véhicules dans ce système pour l'année 2018?
2. Dans un certain pays, le nombre d'automobiles en circulation correspond à l'information dans la figure. Elles sont retirées de la circulation à un taux constant de 300 000 a/année, et il n'y a pas d'importation. Le taux de production de l'industrie automobile a diminué de manière constante de 700 000 A/année à 600 000 A/année en 10 ans. a) Que vaut le flux d'exportation pour $t = 5.0$ années? b) Combien de voitures a-t-on exportées durant ces 10 années?

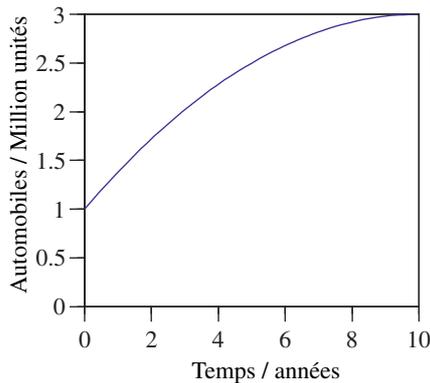


FIGURE 16.26
Problème 2

3. La population d'un certain pays varie durant le mois de juin à un taux constant de $+600 P \text{ jour}^{-1}$ (P : personnes). Durant cette période, le taux de naissance net (taux de naissance moins taux de décès) diminue de manière régulière de 1200 P/jour à 900 P/jour . a) Déterminez et représentez graphiquement le flux de migration net en fonction du temps pour cette période. b) Combien de personnes au total ont-elles franchi la frontière du 11 au 20 de ce mois?
4. Il y a, au début de l'année, dans une portion de l'océan, $1.0 \cdot 10^6$ poissons d'une certaine sorte. Durant l'année, il y a un flux constant de 20 000 poissons mois^{-1} hors de cette zone. Le taux de naissance est de $2.0 \cdot 10^6$ poissons mois^{-1} au début de janvier. Ce taux décroît de manière constante jusqu'à zéro durant les quatre premiers mois, pour rester nul de la fin avril à la fin de l'année. Durant l'année, $2.5 \cdot 10^6$ poissons meurent dans cette zone. Le taux de mortalité est constant. a) La pêche est interdite en juillet. Quel est le taux de variation du nombre de poissons le 15 juillet? b) Quel

pourrait être le taux de prise maximal par mois, si le nombre de poissons vivants dans cette zone est de $1.2 \cdot 10^6$ à la fin de l'année?

5. On cultive des micro-organismes dans un réacteur. Le graphique ci-dessous montre la masse des micro-organismes mesurée en fonction du temps. Il faut 0.20 kg de nutriments par heure pour 1 kg de micro-organismes. La quantité de nutriments dans le réacteur devrait diminuer de manière constante de 20 kg à zéro en l'espace de dix heures. a) Quel devrait être, en kg h^{-1} , le flux de nutriments dans le réacteur? b) Combien de nutriments introduit-on dans le réacteur en 10 h?

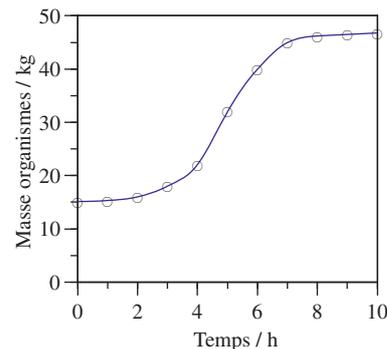


FIGURE 16.27
Problème 5

6. Des lièvres et des renards cohabitent dans une certaine zone. Les lièvres naissent et meurent, et sont mangés par les renards, mais il n'y a aucun flux migratoire. Il n'y a aucune autre cause de disparition des lièvres. Durant une période de 3 ans, le nombre de renards augmente de manière constante de 30 à 45. Dans le même temps, le nombre de lièvres mangés par les renards passe de $50 L R^{-1} a^{-1}$ à $60 L R^{-1} a^{-1}$. Le graphique donne le taux de natalité des lièvres. a) Quand le nombre de lièvres passe-t-il par un maximum ou un minimum? b) Que vaut le taux de variation des lièvres à l'instant 1.0 a? c) Combien de lièvres naissent-ils durant les trois ans?

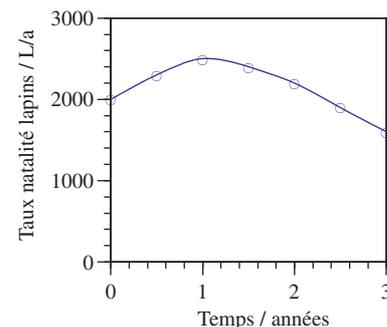


FIGURE 16.28
Problème 6

APPENDICE

- 1 Liste des tableaux
- 2 Liste des symboles
- 3 Glossaire
- 4 Références bibliographiques

Index

APPENDICE 1

LISTE DES TABLEAUX**CHAPITRE 1**

Tableau 1.1	Viscosité à 20°C	29
--------------------	------------------	----

CHAPITRE 2

Tableau 2.1	Résistivité de quelques matériaux	73
--------------------	-----------------------------------	----

CHAPITRE 3

Tableau 3.1	Chauffage d'un volume d'eau	109
Tableau 3.2	Exemples de centrales hydroélectriques	110
Tableau 3.3	Couplage turbine-générateur	111
Tableau 3.4	Exemples de couplage de processus	112
Tableau 3.5	Comparaison de différents processus	119
Tableau 3.6	Différents types de capacités constantes	133
Tableau 3.7	Problème 3	140

CHAPITRE 4

Tableau 4.1	Comparaison d'éléments hydrauliques et électriques	151
Tableau 4.2	Problème 6	172

INTERLUDE II

Tableau II.1	Valeurs des paramètres du modèle de la figure II.12	186
Tableau II.2	Valeurs des paramètres du modèle de la figure II.16	189
Tableau II.3	Phases du cycle cardiaque	190

CHAPITRE 5

Tableau 5.1	Comparaison de quelques processus	201
Tableau 5.2	Grandeurs semblables à un fluide	205
Tableau 5.3	Capacité entropique et coefficient de température de l'énergie (chaleur massique) à 20°C	217

CHAPITRE 6

Tableau 6.1	Potentiels chimiques absolus	257
Tableau 6.2	Propriétés de l'eau aux conditions standard	258
Tableau 6.3	Potentiels chimiques de quelques substances	262

Tableau 6.4	Composition de l'atmosphère sèche	266
Tableau 6.5	Pouvoir énergétique supérieur de quelques carburants	273
INTERLUDE III		
Tableau III.1	Coefficients Seebeck à 0°C (relativement au platine)	299
CHAPITRE 7		
Tableau 7.1	Carré du rayon de giration de quelques solides homogènes	337
CHAPITRE 8		
Tableau 8.1	Paires de grandeurs extensives et intensives	368
Tableau 8.2	Capacités de systèmes physiques	375
CHAPITRE 9		
Tableau 9.1	Comparaison Newton – dynamique du mouvement de translation	398
Tableau 9.2	Paramètres pour le roulement sur différentes surfaces	432
Tableau 9.3	Problème 17	460
Tableau 9.4	Problème 22	461
CHAPITRE 10		
Tableau 10.1	Entropie et enthalpie de fusion à 1 bar	496
Tableau 10.2	Entropie et enthalpie de vaporisation à 1 bar	496
CHAPITRE 11		
Tableau 11.1	Conductivité de quelques matériaux	517
Tableau 11.2	Émissivités et absorptivités solaires	531
CHAPITRE 13		
Tableau 13.1	Quelques valeurs de l'intensité du champ électrique	634
Tableau 13.2	Équations relatives au champ électrostatique	675
Tableau 13.3	Équations relatives au champ magnétostatique	676
CHAPITRE 14		
Tableau 14.1	Équations de Maxwell pour le champ électromagnétique	699
CHAPITRE 16		
Tableau 16.1	Grandeurs physiques accumulables	761
Tableau 16.2	Exemples d'équations de bilan	762
Tableau 16.3	Qui mesure quoi ?	764
Tableau 16.4	Manières de faire varier le contenu d'un système	766
Tableau 16.5	Récapitulation des ED résolues analytiquement	774

APPENDICE 2

LISTE DES SYMBOLES

Les tableaux qui suivent donnent la liste des symboles les plus importants utilisés dans le texte, leur signification et leurs unités.

- Tableau S.1 Symboles utilisant des lettres latines
- Tableau S.2 Symboles utilisant des lettres grecques
- Tableau S.3 Indices et exposants

TABLEAU S.1: Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
a	Constante de Stefan-Boltzmann	$\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
a	Accélération	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
A	Aire de la surface, aire de la section	m^2
\mathcal{A}	Taux d'absorption d'énergie par unité de surface	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
\mathcal{A}	Tension chimique (affinité chimique)	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
\mathcal{B}	Intensité de la densité du flux magnétique	T
c	Vitesse du son, vitesse de la lumière	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
c, c_V	Coefficient de température de l'énergie spécifique (chaleur spécifique ou massique)	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
c_P	Coefficient de température de l'enthalpie spécifique (chaleur spécifique ou massique)	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
\bar{c}_P	Coefficient de température de l'enthalpie molaire	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
\bar{c}_V	Coefficient de température de l'énergie molaire	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
\bar{c}	Concentration (molaire)	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}, \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
C	Coulomb (unité de la charge électrique)	
C_Q	Capacité électrique	F
C	Coefficient de température de l'énergie	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
COP	Coefficient de performance	
C_P	Coefficient de température de l'enthalpie	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

TABLEAU S.1 : Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
C_V	Coefficient de température de l'énergie	$J \cdot K^{-1}$
C_V	Capacité hydraulique	$m^3 \cdot Pa^{-1}$
C_p^*	Capacité linéique de quantité de mouvement	$kg \cdot m^{-1}$
C_t	Carnot (unité de l'entropie—chaleur)	$J \cdot K^{-1}$
C_x	Coefficient de traînée	
$^{\circ}C$	Degrés Celsius	
C	Contour d'intégration	
D	Constante de diffusion	$m^2 \cdot s^{-1}$
\mathcal{D}	Intensité du déplacement électrique	$A \cdot s \cdot m^{-2}$
e	Charge élémentaire	C
e	Énergie spécifique	$J \cdot kg^{-1}$
\bar{e}	Énergie molaire	$J \cdot mol^{-1}$
E	Énergie du système (contenu en énergie)	J
E	Module de Young	$N \cdot m^{-2}$
E_{chim}	Énergie échangée (transportée) lors de processus chimiques	J
$E_{él}$	Énergie échangée lors de processus électriques	J
$E_{méc}$	Énergie échangée lors de processus mécaniques	J
E_{therm}	Énergie échangée lors de processus thermiques (chauffage et refroidissement)	J
Eu	Euler (unité du moment cinétique)	$N \cdot m \cdot s$
\mathcal{E}	Intensité du champ électrique	$V \cdot m^{-1}$
\mathcal{E}	Irradiance, éclairage énergétique (taux d'énergie rayonnée incidente par unité de surface)	$W \cdot m^{-2}$
\mathcal{E}_{cs}	Constante solaire	$W \cdot m^{-2}$
f	Fréquence	Hz
f_Q	Taux de source spécifique de la quantité Q	
f_p	Taux de source spécifique de la quantité de mouvement	$m \cdot s^{-2}$
F	Force (flux de quantité de mouvement)	N
\mathcal{F}	Constante de Faraday	$C \cdot mol^{-1}$
g	Intensité du champ de pesanteur	$N \cdot kg^{-1}$
G	Constante de gravitation	$N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
G	Conductance	
G_E	Conductance énergétique	$W \cdot K^{-1}$
G_S	Conductance entropique	$W \cdot K^{-2}$
G_Q	Conductance électrique	S

TABLEAU S.1 : Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
G_V	Conductance hydraulique	$\text{m}^3 \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
G_n	Conductance liée au flux de quantité de matière	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
G	Gibbs (unité du potentiel chimique)	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
G	Énergie libre de Gibbs	J
G	Module de cisaillement	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
g	Densité de quantité de mouvement du champ électromagnétique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
\mathcal{G}	Intensité du champ gravitationnel	$\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$
h, H	Hauteur	m
h	Enthalpie spécifique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
\bar{h}	Enthalpie molaire	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
Δh_{fus}	Enthalpie de fusion spécifique (chaleur latente de fusion)	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
ΔH_{fus}	Enthalpie de fusion molaire (chaleur latente de fusion)	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
Δh_{vap}	Enthalpie de vaporisation spécifique (chaleur latente de vaporisation)	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
ΔH_{vap}	Enthalpie de vaporisation molaire (chaleur latente de vaporisation)	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
h	Constante de Planck	$\text{J} \cdot \text{s}$
h	Coefficient de transmission de la chaleur (de l'énergie)	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
h_{cond}	Coefficient de transmission de la chaleur (de l'énergie) par conduction	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
h_{conv}	Coefficient de transfert de la chaleur (de l'énergie) par convection	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
h_S	Coefficient de transmission de l'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}$
H	Enthalpie	J
\mathcal{H}	Intensité du champ magnétique	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
H_y	Huygens (unité de la quantité de mouvement)	$\text{N} \cdot \text{s}$
I	Intensité du courant, flux	
I_E	Intensité du flux d'énergie	W
I_L	Intensité du flux de moment cinétique	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
I_m	Intensité du flux de masse gravitationnelle	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
I_{magn}	Intensité du courant magnétique	A
I_n	Intensité du flux de quantité de matière	$\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$
I_p	Intensité du flux de quantité de mouvement	N
I_Q	Intensité du flux de charge électrique	A
I_S	Intensité du flux d'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$
I_V	Intensité du flux de volume	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

TABLEAU S.1 : Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
J	Joule (unité de l'énergie)	
J	Moment d'inertie	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
\mathbf{J}	Matrice (tenseur) du moment d'inertie	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
j	Densité de flux	
\mathbf{j}	Vecteur de densité de flux	
j_E	Densité de flux d'énergie	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
j_p	Densité de flux de quantité de mouvement	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
j_n	Densité de flux de quantité de matière	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$
j_S	Densité de flux d'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
j_V	Densité de flux volumique	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
j_m	Densité de flux massique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
k	Constante de Boltzmann	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
k	Constante de rigidité d'un ressort	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
k	Nombre d'onde	m^{-1}
k_E	Conductivité thermique relative à l'énergie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
k_S	Conductivité thermique relative à l'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$
k_n	Coefficient de vitesse d'une réaction	s^{-1}
K	Kelvin (unité de température)	
K	Voir lettre grecque kappa	
\mathcal{K}_p	Constante d'équilibre chimique	
l, L	Longueur	m
$l_{\text{fus}}, l_{\text{vap}}$	Entropie spécifique de fusion / vaporisation	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
$\bar{l}_{\text{fus}}, \bar{l}_{\text{vap}}$	Entropie molaire de fusion / vaporisation	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
L	Luminosité d'une étoile	W
L_V	Inductance hydraulique	$\text{Pa} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$
L_Q	Inductance électrique	H
L_p^*	Inductance linéique de quantité de mouvement	$\text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
L	Moment cinétique	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
m	Mètre (unité de longueur)	
m	Masse d'un corps	kg
m_{air}	Masse de l'air	kg
\mathbf{m}	Moment dipolaire magnétique	$\text{A} \cdot \text{m}^2$
mol	Unité de la quantité de matière	
M	Masse molaire	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
\mathbf{M}	Moment d'une force (couple)	$\text{N} \cdot \text{m}$
\mathcal{M}	Aimantation	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
\mathcal{M}	Puissance émissive, exitance (taux d'émission d'énergie rayonnée par unité de surface)	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

TABLEAU S.1 : Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
\mathcal{M}_{CN}	Puissance émissive du corps noir	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
n	Quantité de matière	mol
\mathbf{n}	Vecteur unitaire normal à la surface (orienté vers l'extérieur)	
N	Nombre de particules	
N_A	Nombre d'Avogadro	mol^{-1}
N	Newton (unité de force – flux de quantité de mouvement)	
\mathbf{p}	Vecteur de la quantité de mouvement	$\text{N} \cdot \text{s}$
\mathbf{p}	Moment dipolaire électrique	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$
P	Pression	Pa
\mathcal{P}	Puissance	W
$\mathcal{P}_{\text{diss}}$	Taux de dissipation de l'énergie	W
\mathcal{P}	Polarisation électrique	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Pa	Pascal (unité de pression)	
Q	Charge électrique	C, As
Q	Quantité semblable à un fluide quelconque, grandeur extensive	
q	Quantité spécifique quelconque	
Q_m, q_m	Charge magnétique	$\text{A} \cdot \text{m}$
r	Coordonnée radiale	m
\mathbf{r}	Vecteur position	m
R	Constante des gaz parfaits	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
R, R_Q	Résistance électrique	Ω
R	Rayon	m
Re	Nombre de Reynolds	
R_E	Résistance thermique par rapport à l'énergie	$\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
R_S	Résistance thermique par rapport à l'entropie	$\text{W}^{-1} \cdot \text{K}^2$
R_V	Résistance hydraulique	$\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$
s	Seconde (unité de temps)	
s	Abscisse curviligne	m
S	Surface d'intégration	
s	Entropie spécifique	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
\bar{s}	Entropie molaire	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
S	Entropie, entropie contenue dans un corps	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
$S_{\text{éch}}$	Entropie échangée au cours d'un processus	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
S_{prod}	Entropie produite dans un système	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
\mathbf{S}	Vecteur de Poynting	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
t	Temps	s

TABLEAU S.1: Symboles utilisant des lettres latines.

Symbole	Signification	Unités SI
T	Température du gaz parfait, température absolue	K
T	Période (durée d'une oscillation)	s
\mathbf{u}	Vecteur unitaire	m
u	Énergie interne spécifique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
U	Tension électrique	V
U	Énergie interne	J
U	Coefficient de transfert de la chaleur global	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
U_{magn}	Tension magnétique	V
\mathbf{v}	Vecteur vitesse	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
v_d	Vitesse de drift	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
V	Volume d'un corps	m^3
V	Potentiel du champ gravitationnel	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
\mathcal{V}	Volume d'intégration	
W	Travail produit par une force	J
W	Watt (unité du flux d'énergie ou puissance)	
w	Fraction massique	
x, y, z	Coordonnée spatiale	m
\bar{x}	Fraction molaire	
z	Fraction masse/volume	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
z	Distance verticale	m
\parallel	Parallèle	
\perp	Perpendiculaire	

TABLEAU S.2: Symboles utilisant des lettres grecques

Symbole	Signification	Unités SI
α	Absorptivité	
α	Coefficient Peltier	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$
α	Accélération angulaire	s^{-2}
α_R	Coefficient de température linéaire de la résistivité	K^{-1}
α_s	Coefficient de chauffage	$\text{K}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{J}^{-1}$
α_Q	Élastance électrique	$\text{V} \cdot \text{C}^{-1}$

TABLEAU S.2: Symboles utilisant des lettres grecques

Symbole	Signification	Unités SI
α_V	Élastance hydraulique	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-3}$
α_μ	Coefficient de température du potentiel chimique	$\text{mol} \cdot \text{K}^{-1}$
β	Coefficient de température de la pression	K^{-1}
β_R	Coefficient de température quadratique de la résistivité	K^{-2}
β_μ	Coefficient de pression du potentiel chimique	$\text{mol} \cdot \text{Pa}^{-1}$
γ	Exposant adiabatique, rapport des capacités entropiques	
γ_μ	Coefficient de concentration du potentiel chimique	$\text{G} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
δ	Épaisseur de la couche limite	m
ε	Allongement relatif	
ε	Coefficient Seebeck	$\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$
ε	Émissivité	
ε_0	Constante diélectrique, permittivité du vide	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
ε_r	Permittivité relative, constante diélectrique	
η	Efficacité, rendement	
η	Coefficient de viscosité dynamique	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
η_c	Efficacité ou rendement de Carnot	
η_I	Efficacité thermique, rendement énergétique, efficacité selon la première loi	
η_{II}	Rendement effectif, efficacité selon la deuxième loi	
θ	Température Celsius	$^\circ\text{C}$
κ	Capacité entropique spécifique	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
$\bar{\kappa}$	Capacité entropique molaire	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1}$
K	Capacité entropique	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2}$
K_V	Capacité entropique à volume constant	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2}$
K_P	Capacité entropique à pression constante	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2}$
$K_{\mathcal{M}}$	Capacité entropique à aimantation constante	$\text{J} \cdot \text{K}^{-2}$
λ	Longueur d'onde	m
λ	Constante de désintégration	s^{-1}
Λ	Circulation d'un champ vectoriel	
$\Lambda_{\mathcal{E}}$	Circulation du champ électrique	V
Λ	Entropie latente	
Λ_V	Entropie latente par rapport au volume (entropie latente de détente)	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Λ_P	Entropie latente par rapport à la pression (entropie latente de compression)	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-3}$

TABLEAU S.2: Symboles utilisant des lettres grecques

Symbole	Signification	Unités SI
$\Lambda_{\mathcal{M}}$	Entropie latente par rapport à l'aimantation	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
μ	Coefficient de frottement	
μ	Potentiel chimique	$\text{G} = \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
ν	Fréquence	Hz
ν	Coefficient stoechiométrique	
ξ	Élongation (perturbation) d'une onde	
ξ_0	Amplitude d'une onde	
π	Densité volumique du taux de production	
π_n	Densité volumique du taux de production de quantité de matière	$\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
π_S	Densité volumique du taux de production d'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Π	Taux de production	
Π_n	Taux de production de quantité de matière	$\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$
Π_S	Taux de production d'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$
ρ	Densité (en général)	
ρ	Masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
ρ_{el}	Résistivité électrique	$\Omega \cdot \text{m}$
ρ_E	Densité d'énergie	$\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$
ρ_p	Densité de quantité de mouvement	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
ρ_S	Densité de l'entropie d'un corps	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
σ	Tension mécanique	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
σ	Contrainte dans un champ vectoriel	
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
σ_{el}	Conductivité électrique	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
σ_{pol}	Densité superficielle de la charge de polarisation	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
σ	Densité volumique du taux de source	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
σ_E	Densité volumique du taux de source d'énergie	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
σ_p	Densité volumique du taux de source de la quantité de mouvement	
σ_S	Densité volumique du taux de source d'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Σ	Taux de source	
Σ_E	Taux de source de l'énergie	W
Σ_p	Taux de source de la quantité de mouvement	N
Σ_S	Taux de source de l'entropie	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$
τ	Constante de temps	s

TABLEAU S.2: Symboles utilisant des lettres grecques

Symbole	Signification	Unités SI
τ_C	Constante de temps capacitive	s
τ_L	Constante de temps inductive	s
τ	Quantum de quantité de matière	mol
$(\tau\alpha)$	Facteur de transmissio-absorption	
ν	Volume spécifique	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
$\bar{\nu}$	Volume molaire	$\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
φ	Potentiel	
$\varphi_{\text{él}}$	Potentiel électrique	V
φ_{magn}	Potentiel magnétique scalaire	A
φ	Élongation angulaire	rad
ϕ_B	Flux d'induction magnétique	Wb (weber) = V · s
ψ	Flux d'un champ vectoriel	
χ	Susceptibilité électrique	
χ_m	Susceptibilité magnétique	
Ω	Ohm (unité de la résistance électrique)	
ψ	Flux d'un champ vectoriel	
$\psi_{\mathcal{E}}$	Flux du champ électrique	V · m
ω	Vitesse angulaire	s^{-1}
ω	Fréquence angulaire, pulsation	s^{-1}

TABLEAU S.3: Indices et exposants

Symbole	Signification
aa	Air – air
abs	Absorbé, absorbeur
amb	Ambiant
app	Apparent
adh	Adhérence
CN	Corps noir
C	Capacitif
C	Contour (chemin) d'intégration
CM	Centre de masse, relatif au centre de masse
coll	Collecteur

TABLEAU S.3: Indices et exposants

Symbole	Signification
cond	Partie conductive d'un flux
chim	Chimique
compr	Compression
cond	Conductif
conv	Convectif
disp	Disponible
diss	Dissipatif
éch	Échangé
él	Électrique
éq	Équilibre
E	Énergie, relatif à l'énergie
EC	Électrochimique
f	Solvant, fluide
fus	Fusion
prod	Produit
grav	Gravitationnel
GC	Gravitochimique
H	Haut (température haute, température de la source chaude...)
hydr	Hydraulique
init	Initial
in	In, entrant
ind	Induit
cin	Cinétique
liq	Liquide
L	Moment cinétique, relatif au moment cinétique
L	Induction, relatif à l'induction
B	Bas (température, niveau...)
m	Masse, relatif à la masse
m, magn	Magnétique
max	Maximum
méc	Mécanique
min	Minimum
\mathcal{M}	Aimantation, relatif à l'aimantation
n, norm	Normal
net	Net (courant)
0	Origine d'un repère, valeur initiale
out	Out, sortant, émergent
p	Quantité de mouvement, relatif à la quantité de mouvement

TABLEAU S.3: Indices et exposants

Symbole	Signification
P	Pression, relatif à la pression, à pression constante
Q	Charge électrique, quantité Q
Q	Relatif à la charge électrique, à la quantité Q
rad	Radial
rad	Radiatif
réf	Valeur de référence
rés	Réservoir
R	Résistif, relatif à la résistance électrique
S	Entropie, relatif à l'entropie
S	Surface d'intégration
s	Soluté
tang	Tangentiel
therm	Thermique
TC	Thermochimique
TE	Thermoélectrique
TEC	Thermo-électrochimique
vap	Vapeur, vaporisation
V	Volume, hydraulique, relatif au volume, à volume constant
\mathcal{V}	Volume d'intégration
x, y, z	Relatif aux coordonnées spatiales
λ	Relatif à la longueur d'onde
ν	Relatif à la fréquence

APPENDICE 3

GLOSSAIRE

L'objectif de ce bref glossaire est de présenter certaines notions qui n'apparaissent pas dans la présentation usuelle de la physique ou qui en diffèrent. Les termes en italique apparaissent ailleurs dans le glossaire.

Bilan. Sert à tenir la comptabilité de l'évolution du contenu d'un système au moyen d'*équations de bilan* relatives aux *grandeurs semblables à un fluide* qui participent aux processus envisagés.

Bilan d'énergie. Formulation de l'*équation de bilan* relativement à l'*énergie*.

Bilan d'entropie. Formulation de l'*équation de bilan* relativement à l'*entropie*.

Calorique. Utilisé en tant qu'alternative pour la notion de *chaleur*. La théorie calorique de la chaleur peut être rendue formelle et correcte dans un sens moderne si on accepte que le calorique n'est pas conservé, qu'il peut être produit mais pas détruit. Dans ce cas, il est équivalent à l'*entropie* d'un corps.

Capacité thermique. Utilisé dans le sens de capacité en *entropie*, à savoir la dérivée par rapport à la température de la fonction d'*entropie*. Les «capacités thermiques» usuelles sont appelées respectivement *coefficients de température de l'énergie* et de l'*enthalpie*.

Chaleur. Terme informel pour l'*entropie*. Est équivalent au *calorique*. Communément, l'*énergie échangée* durant un processus de *chauffage* est appelée chaleur; cet usage n'est pas suivi dans cet ouvrage.

Chauffage. Processus de transfert de *chaleur (entropie)* à travers la surface d'un corps, à l'exclusion des transports en mode convectif. Le processus inverse est le refroidissement.

Coefficient de température de l'énergie. Dérivée de l'énergie par rapport à la température à volume constant. Appelé traditionnellement *capacité thermique* à volume constant.

Coefficient de température de l'enthalpie. Dérivée de l'enthalpie par rapport à la température à pression constante. Appelé traditionnellement *capacité thermique* à pression constante.

Courant. Terme informel pour le phénomène de transport d'une *grandeur semblable à un fluide*. Utilisé souvent en lieu et place de la grandeur qui sert à mesurer l'intensité d'un écoulement, le *flux*.

Courant d'énergie. Quantité d'énergie franchissant la surface d'un système par unité de temps au cours d'un processus de transport. Il faut le distinguer de la notion de *puissance*.

Courant d'entropie. Mesure du transfert d'*entropie* à travers la surface d'un système.

Densité. Densité spatiale d'une *grandeur semblable à un fluide*. L'intégrale de la densité d'une telle grandeur sur le volume d'un système donne la quantité de la *grandeur semblable à un fluide* contenue dans le système.

Densité de courant. Mesure formelle de la valeur locale d'un courant. L'intensité du *flux* est l'intégrale de surface d'une densité de courant. Pour une *grandeur semblable à un fluide* scalaire, la densité de courant est un vecteur.

Densité de flux. Densité de surface d'un *flux*. L'intégrale de surface d'une densité de flux fournit l'intensité du flux. Est équivalent à la *densité de courant*.

Densité de taux de source. Densité spatiale du *taux de source*. Son intégrale de volume est égale au taux de source.

Deuxième principe de la thermodynamique. Correspond à l'*équation de bilan* de l'*entropie*.

Différence de potentiel. Variation du *potentiel* entre deux points de l'espace.

Dynamique. Une théorie de la dynamique requiert la formulation d'*équations de bilan* et de *relations constitutives* relatives au cas particulier considéré. Les modèles de processus dynamiques reposent sur une distinction claire entre les équations de bilan et les lois constitutives.

Énergie. Grandeur qui accompagne tous les processus physiques et qui joue le même rôle dans chacun d'eux. Elle est utilisée pour quantifier le couplage de processus (*libération d'énergie*). Elle s'écoule toujours en compagnie de *grandeurs semblables à un fluide* qui servent de *porteurs d'énergie*.

Entropie. Grandeur formelle pour représenter la *chaleur* ou le *calorique*. L'entropie est la *grandeur semblable à un fluide* associée aux processus thermiques pour laquelle on peut, par conséquent, énoncer une *équation de bilan*. Elle peut être accumulée, peut s'écouler (*courant d'entropie*) et peut être créée (*production*).

Équation de bilan. Relation formelle qui établit le lien entre le taux de variation d'une *grandeur semblable à un fluide* associée à un corps et ses *courants* et éventuellement ses *taux de source* et *taux de production*.

Flux. Mesure formelle de la quantité d'une *grandeur semblable à un fluide* franchissant la surface d'un système par unité de temps. De manière informelle, cette grandeur est également appelée un *courant*. Le flux est compté positivement pour un courant qui pénètre dans le système.

Force d'entraînement. Terme informel pour une différence de *potentiel*. Par exemple, la force d'entraînement thermique est la différence du *potentiel* thermique en deux points de l'espace, à savoir la différence des *températures*.

Force d'entraînement chimique. Différence du *potentiel chimique*.

Grandeurs extensives. Grandeurs dont la quantité varie avec la taille d'un système. Les *grandeurs semblables à un fluide* sont un sous-ensemble des grandeurs extensives. Le volume est l'exemple d'une grandeur extensive qui n'est pas semblable à un fluide.

Grandeurs intensives. Grandeurs dont la valeur ne change pas lorsque le corps auquel elles sont associées est divisé en parties. Les *potentiels* sont un sous-ensemble des grandeurs intensives.

Grandeur semblable à un fluide. Les grandeurs qui possèdent une *densité* et une *densité de courant* (et dans certains cas une *densité de source* et une *densité de production*) sont appelées semblables à un fluide. On peut leur associer des *équations de bilan*. Elles constituent un sous-ensemble des *grandeurs extensives*. Les *grandeurs semblables à un fluide* classiques sont la quantité de mouvement, le moment cinétique, l'*entropie*, la charge électrique, la *quantité de matière* et la masse (gravitationnelle).

Irréversibilité. Contraire de *réversibilité*. La condition d'irréversibilité signifie que de l'*entropie* est produite durant un processus.

- Liaison d'énergie.** Liaison d'énergie au courant d'une *grandeur semblable à un fluide* lorsqu'elle est portée d'un niveau bas à un niveau élevé du *potentiel*. Équivalent à *utilisation d'énergie*. Opposé à *libération d'énergie*.
- Libération d'énergie.** Libération d'énergie lorsque le *courant* d'une *grandeur semblable à un fluide* passe d'un niveau élevé à un niveau bas du *potentiel*. Contraire de *liaison d'énergie*.
- Niveau.** Terme informel pour *potentiel*. Les niveaux sont les grandeurs conjuguées (par rapport à l'énergie) des *grandeurs semblables à un fluide*.
- Porteur d'énergie.** *Grandeur semblable à un fluide* dans les processus de conduction.
- Potentiel.** Terme formel pour les grandeurs qui jouent le rôle de *niveaux* physiques, connues également en tant que *grandeurs intensives*. Il y a un potentiel associé à chacune des *grandeurs semblables à un fluide*. Les paires potentiel et grandeur semblable à un fluide associées sont respectivement la vitesse et la quantité de mouvement, la vitesse angulaire et le moment cinétique, la *température* et l'*entropie*, le potentiel et la charge électrique, le *potentiel chimique* et la *quantité de matière*, le potentiel gravitationnel et la masse grave.
- Potentiel chimique.** Le *potentiel* associé aux processus de variation ou d'écoulement de la *quantité de matière*.
- Premier principe de la thermodynamique.** C'est l'*équation de bilan* de l'*énergie*. Elle n'inclut que les taux de variation du contenu en énergie, les *courants d'énergie* et les *taux de source* d'énergie.
- Processus continus.** Processus qui sont spatialement continus, c'est-à-dire au cours desquels les variables changent d'un point à l'autre à l'intérieur d'un corps ou d'un système.
- Processus dissipatif.** Processus durant lequel de l'*entropie* est produite, donc un *processus irréversible*.
- Processus irréversible.** Processus qui entraîne de la *production d'entropie*.
- Processus supraconductif.** Processus de transport d'une *grandeur semblable à un fluide* qui ne nécessite pas de *force d'entraînement*.
- Processus uniformes.** Processus qui sont spatialement uniformes, c'est-à-dire au cours desquels des variables ont la même valeur en tous les points d'un corps ou d'un système à un instant donné.
- Production.** Terme informel pour le phénomène de production d'une *grandeur semblable à un fluide*. Une grandeur qui est produite peut s'accumuler à l'intérieur d'un système sans y avoir été transportée. La production (ou la destruction) est liée à la non-conservation d'une grandeur.
- Production d'entropie.** Processus de *production d'entropie* durant un *processus irréversible*.
- Puissance.** Taux de *libération d'énergie* ou taux de *liaison d'énergie*. La puissance est associée à un processus interne, en opposition à un processus externe, c'est-à-dire un processus de transport qui est quantifié au moyen de *courants d'énergie*.
- Puissance thermique.** *Puissance* associée à la chute de l'*entropie* entre des points de température élevée et basse. Correspond à la «puissance du feu» de Carnot.
- Quantité échangée.** Quantité d'une *grandeur semblable à un fluide* qui a franchi la surface d'un système transportée par un *courant* durant une certaine durée. Correspond formellement à l'intégrale temporelle du *flux*.
- Quantité de matière.** Mesure formelle de la quantité d'une substance utilisée au sens de la chimie, en termes de «nombre de moles» ou de «nombre de particules».

Relations constitutives. Lois particulières qui distinguent les systèmes et les circonstances. Les lois générales sont les *équations de bilan*.

Réversibilité. La condition de réversibilité signifie qu'il n'y a pas de *production d'entropie* durant un processus.

Source. Terme informel pour un processus au cours duquel une *grandeur semblable à un fluide* est transférée dans un système sans avoir à traverser la surface du système. Cela se produit lors de l'interaction entre des corps et des champs.

Taux de dissipation. Taux auquel l'*énergie* est liée en conséquence de la *production d'entropie* (voir *liaison d'énergie*).

Taux de production. Mesure formelle de la *production* d'une *grandeur semblable à un fluide*. Mesure la quantité de la grandeur produite à l'intérieur d'un système par unité de temps. Un taux de production négatif signifie que la grandeur est détruite.

Taux de production d'entropie. Taux auquel est produite de l'*entropie* lors d'un *processus irréversible*.

Taux de source. Mesure formelle de la *source* d'une grandeur semblable à un fluide. Il détermine la quantité de la grandeur délivrée dans le système par unité de temps.

Température. Mesure du degré de chaleur d'un corps. La température joue le rôle de *potentiel* thermique.

Utilisation d'énergie. Équivalent à *liaison d'énergie*.

APPENDICE 4

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARNHEIM R. (1969): *Visual Thinking*. University of California Press. Berkeley, CA.
- BEJAN A. (1988): *Advanced Engineering Thermodynamics*. John Wiley & Sons, New York.
- BENNETT C. O., J.E. MYERS (1965): *Momentum, Heat, and Mass Transfer*. Chemical Engineering Series, McGraw-Hill, New York.
- BIRD R. B., W.E. STEWART, E.N. LIGHTFOOT (1960): *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, New York.
- BORER T, P. FROMMENWILER, H. U. FUCHS, H. KNOLL, G. KOPACSY, W. MAURER, E. SCHUETZ, K. STUDER, *Physik – ein systemdynamischer Zugang*, 2. Auflage, h.e.p. verlag, Bern, 2005.
- BRODKEY R. S., H.C. HERSHEY (1988): *Transport Phenomena*. Chemical Engineering Series, McGraw-Hill, New York.
- BURKHARDT H. (1987): Systems physics: A uniform approach to the branches of classical physics. *Am.J.Phys.* **55**, 344–350.
- CALLEN H. B. (1985): *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd ed. Wiley & Sons, New York.
- CALLENDAR H. L. (1911): The caloric theory of heat and Carnot's principle. *Proc. Phys. Soc. (London)* **23**, 153–189.
- CARNOT S. (1824): *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, Bachelier, Paris.
- CLAUSIUS R. (1850): Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. *Annalen der Physik und Chemie* **79**, 368–397, 500–524.
- D'ANNA M., H. U. FUCHS, P. LUBINI (2008): System Dynamics Modeling: From Mechanics to Chemistry. A Dynamical Model of Mutarotation of Glucose. GIREP Conference, Nicosia.
- DUFFIE J.A., et W.A. BECKMAN (1991): *Solar Engineering of Thermal Processes*. 2nd ed. Wiley, New York.,
- EVANS V. GREEN M. (2005): *Cognitive Linguistics: An Introduction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.
- FALK G., F. HERRMANN eds. (1977–1982): *Konzepte eines zeitgemässen Physikunterrichts*, Heft 1–5. Schroedel, Hannover, Germany. <http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/publication/konzepte/index.html>.
- FALK G., F. HERRMANN, G.B. SCHMID (1983): Energy forms or energy carriers? *Am. J. Phys.* **51**, 1074–1077.
- FALK G., W. RUPPEL (1973): *Mechanik, Relativität, Gravitation*. Springer-Verlag, Berlin. (1976): *Energie und Entropie*. Springer-Verlag, Berlin.
- FEELY R. A., SABINE C. L., TAKAHASHI T., WANNINKHOF R. (2001): Uptake and storage of carbon dioxide in the ocean. *Oceanography* **14**, 18–32.
- FUCHS H. U. (1986): A surrealistic tale of electricity. *Am. J. Phys.* **54**, 907–909. (1987a): Entropy in the teaching of introductory thermodynamics. *Am. J. Phys.* **55**, 215–219. (1987b): Do we feel forces? In J.D. Novak ed.: *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions in Science and Mathematics*, Vol.III, p. 152–159. Cornell University, Ithaca, New York.

- (1987c): Thermodynamics – A “misconceived” theory. In J.D. Novak ed.: *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions in Science and Mathematics*, Vol.III, p. 160–167. Cornell University, Ithaca, New York.
- (1987d): Introductory mechanics on the basis of the continuum point of view. *Berichte der Gruppe Physik*, No.3a. Technikum Winterthur.
- (1987e): Classical continuum mechanics and fields: The local view. *Berichte der Gruppe Physik*, No.13. Technikum Winterthur.
- (1997a): The Continuum Physics Paradigm in physics instruction I. Images and models of continuous change. Zurich University of Applied Sciences at Winterthur.
- (1997b): The Continuum Physics Paradigm in physics instruction II. System dynamics modeling of physical processes. Zurich University of Applied Sciences at Winterthur.
- (1998): The Continuum Physics Paradigm in physics instruction III. Using the Second Law. Zurich University of Applied Sciences at Winterthur.
- (2002): *Modeling of Uniform Dynamical Systems*. Orell Füssli, Zurich.
- (2006): System Dynamics Modeling in Fluids, Electricity, Heat, and Motion. GIREP Invited Talk, Amsterdam. In E. van den Berg, T. Ellermeijer, O. Slooten: *Modeling in Physics and Physics Education*. Proceedings of the GIREP Conference 2006, August 20-25, Amsterdam.
- (2007): *From Image Schemas to Dynamical Models in Fluids, Electricity, Heat, and Motion*. An Essay on Physics Education Research. Zurich University of Applied Sciences at Winterthur.
- (2009): Introductory Chemical Dynamics—Using the Chemical Potential From the Start. An Informal Introduction to Chemical Processes. V Taller Iberoamericano de Enseñanza de la Física Universitaria. Universidad de La Habana, January 26-30, 2009.
- (2010): *The Dynamics of Heat. A Unified Approach to Thermodynamics and Heat Transfer*. Springer, New York.
- FUCHS H. U., G. ECOFFEY, E. SCHUETZ (2001-2010): *Physics as a Systems Science*. Online materials for an introductory university physics course. http://www.zhaw.ch/~fusa/PSS_VLE/index.html.
- GERMAIN P. (1973): The role of thermodynamics in continuum mechanics. In J.J. Delgado Domingos, M.N.R. Nina, and J.H. Whitelaw, eds.: *Foundations of Continuum Mechanics*. The Macmillan Press, London.
- GERHART P. M., R.J. GROSS (1985): *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Addison-Wesley, Reading MA.
- GIBBS J. W. (1892): Graphical methods in the thermodynamics of fluids. *Transactions of the Connecticut Academy of Sciences* **2**, 309–342.
- (1928) *The Collected Works of J. Willard Gibbs*. Longmans, Green & Co., New York.
- HEIDUCK G., F. HERRMANN, G.B. SCHMID (1987): Momentum flow in the gravitational field. *Eur. J. Phys.* **8**, 41–43.
- HERRMANN F. (2000): The Karlsruhe Physics Course. *Eur. J. Phys.* **21**, 49-58
- (1988) Energy density and stress: A new approach to teaching electromagnetism. *Am. J. Phys.* **57**, 707–714.
- (1997): Skripten zur Experimentalphysik, Mechanik, Abteilung für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe.
- (1997): Skripten zur Experimentalphysik, Elektrodynamik, Abteilung für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe.
- (1998–2010): *Der Karlsruhe Physik-Kurs*. Sekundarstufe I (3 Schülerbände, 1 Lehrerband), Sekundarstufe II (5 Schülerbände, 5 Lehrerhefte). Universität Karlsruhe and Aulis Verlag Deubner, Köln.
- (2009): The Absorption Refrigerator as a Thermal Transformer. *Eur. J. Phys.* **30**, 331-336.
- HERRMANN F., G. B. SCHMID (1983): Analogy between mechanics and electricity. *Eur. J. Phys.* **6**, 16-21.

- (1985): Momentum currents in the electromagnetic field. *Am. J. Phys.* **53**, 415–418.
- (1986): The Poynting vector field and the energy flow within a transformer. *Am. J. Phys.* **54**, 528–531.
- INCROPERA F. P., D.P. DEWITT (1985, 1996): *Fundamental of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, New York.
- isee systems (1996-2010): Stella. System dynamics modeling software.
- JOB G. (1972): *Neudarstellung der Wärmelehre*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M., Germany
- JOB G. (2010): Tabelle chemischer Potentiale. <http://www.job-stiftung.de/index.php?datensammlung>
- JOB G. F. HERRMANN (2006): Chemical potential – a quantity in search of recognition. *Eur. J. Phys.* **27**, 353-371.
- JOB G., R. RÜFFLER (2011): *Physikalische Chemie – Eine Einführung nach neuem Konzept mit zahlreichen Experimenten*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden. (Some English chapters can be found at <http://job-stiftung.de/index.php?id=36,99,0,0,1,0>)
- KLEIN S., et al (1991): EES. *Engineering Equation Solver*. F-Chart Software. Madison WI.
- KREITH F., M.S. BOHN (1986): *Principles of Heat Transfer*, 4th ed. Harper & Row Publishers, New York.
- LAI W. M., D. RUBIN, E. KREMPEL (1978): *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford UK.
- MACH E. (1923): *Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt*. 4. Auflage, Barth, Leipzig.
- MAURER W. (1989): Spannungszustände im Festkörper – einmal anders. *Technifo* **3**, No.2, 20–22. Technikum Winterthur.
- (1990a): Neues von den Pulsströmen. *Technifo* **4**, No.3, 18–19. Technikum Winterthur.
- (1990b): Ingenieurphysik auf neuen Wegen. *Technische Rundschau* **82** (29/30), 12–16.
- (1990c): Drehimpuls. *Technifo* **4**, No.4, 30–32. Technikum Winterthur.
- (1996): Der Impuls im Flüssigkeitsbild. *Praxis der Naturwissenschaften: Physik*, **45**(4), 35.
- MORAN M. J., H.N. SHAPIRO (1992): *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*. John Wiley and Sons, New York.
- MÜLLER I. (1985): *Thermodynamics*. Pitman, Boston.
- (1999): *Grundzüge der Thermodynamik*. Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin.
- OPPLIGER J. (1993): *Berechnungsgrundlagen für Luft-Wasser Solaranlagen*. Travail de diplôme, Technikum Winterthur, Winterthur, Suisse.
- PLANCK M. (1906): *Theorie der Wärmestrahlung*. Original and translation in The History of Modern Physics, vol. 11. American Institute of Physics, 1988.
- (1921): *Theorie der Wärmestrahlung*, 4th ed. Johann Amrosius Barth, Leipzig.
- (1926): *Treatise on Thermodynamics*, 3rd ed. Translated by A.Ogg, Dover Publications 1945.
- ROMER R. H. (2001): Heat is not a noun. *Am. J. Phys.* **69**, 107-109.
- SCHMID G. B. (1982): Energy and its carriers. *Phys. Educ.* **17**, 212–218.
- (1984): An up-to-date approach to Physics. *Am. J. Phys.* **52**, 794–799.
- TRUESDELL C. (1979): Absolute temperatures as a consequence of Carnot’s general axiom. *Archive for History of Exact Sciences* **20**, Number 3/4, 357–380.
- (1980): *The Tragicomical History of Thermodynamics*, Springer-Verlag, New York.
- (1984): *Rational Thermodynamics*. 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- WALKER G. (1973a): The Stirling Engine. *Sci. Am.* **229**, No.2 (August), 80–87.
- WU J. (1990): Are sound waves isothermal or adiabatic? *Am. J. Phys.* **58**, 694–696.
- ZEMANSKY M. W., R. H. DITTMAN (1981): *Heat and Thermodynamics*, 6th ed. McGraw-Hill, Singapore.

INDEX

A

accélération linéaire
 caractère vectoriel 407
 composantes tangentielle et normale 407

accumulation
 charge 67
 énergie 127–135, 599
 énergie dans un élément inductif 159, 405
 entropie 204, 208
 moment cinétique 321, 332
 quantité de mouvement 360, 366, 374, 390
 volume 16, 17
 voir aussi stockage

action à distance 625, 626, 680

adiabatique, *voir* processus adiabatique

affinité chimique
 tension chimique 256

aimantation
 champ démagnétisant 655
 définition 654
 densité superficielle de charge magnétique 654
 densité volumique de moments dipolaires magnétiques 654
 induite 656
 perméabilité absolue 656
 perméabilité relative 656
 susceptibilité magnétique 656

alimentation
 pompe à électricité 52, 76

Ampère
 loi d'Ampère-Maxwell 699
 vision ampérienne du magnétisme 629

analogie
 électrique
 processus de rotation 324
 processus de translation 367
 système cardiovasculaire 91
 hydraulique
 Carnot, machine thermique 210
 processus de rotation 324
 processus de translation 375, 390
 processus électriques 53, 55, 67
 processus liés à l'énergie 130, 132, 378

Archimède
 poussée 441

atmosphère isotherme

répartition de la pression 21, 440, 553

B

batterie 76, 288

Bernoulli, Daniel
 effet 31
 équation 382, 443, 552

bilan d'énergie 127–135
 capteur solaire aérothermique 573
 changement de phase 495
 conduction thermique 604
 conservation 114
 fluide parfait 464
 forme locale 598
 inclusion de sources 606
 inclusion des processus thermiques 210
 matériau simple 213
 premier principe de la thermodynamique 232
 processus continus 598
 thermoélectricité 616
 transfert d'entropie 515

bilan d'entropie 196, 208
 capteur solaire aérothermique 575, 576
 changement de phase 495
 conduction 511, 601–603
 conduction dépendante du temps 603
 convection 512
 deuxième principe de la thermodynamique 232
 fluide parfait 463
 forme locale 594, 602, 603
 inclusion de sources 514
 matériau simple 213
 processus de transport 511–515
 rayonnement 513–515
 thermoélectricité 616

bilan de chaleur, *voir* bilan d'entropie

bilan de charge 54, 62, 80, 82
 première loi de Kirchhoff 62
 thermoélectricité 616

bilan de masse
 changement de phase 495
 équation de continuité 594
 processus continus 593

bilan de moment cinétique 322, 327, 346

bilan de quantité de matière 252, 283, 543, 559, 593
 changement de phase 495

bilan de quantité de mouvement 362, 372

- forme locale 594
- bilan de volume 4, 15–18, 36, 39, 44
 - fluide parfait 464
 - représentation graphique 4
 - systèmes ouverts 544
- bilan des sauterelles 585
- Biot-Savart
 - loi 660
- bouteille magnétique 735
- Boyle-Mariotte
 - loi 264
- C**
- calorique et chaleur 195, 199, 204
- capacité 24
 - électrique 67
 - entropique 196, 215–218
 - à aimantation constante 491
 - à pression constante 467
 - à volume constant 465
 - gaz parfait 470
 - rapport des capacités 471
 - rayonnement du corps noir 486
 - tableau 217
 - hydraulique 24
 - moment cinétique 332
 - quantité de mouvement 361, 374
 - thermique
 - à pression constante 472
 - à volume constant 472
- capteur solaire thermique
 - aérothermique 572–578
 - bilan d'énergie 573
 - bilan d'entropie 575, 576
 - minimisation de l'entropie 572
 - optimisation 575
 - pertes d'énergie 573
 - pertes d'entropie 572, 576
 - production d'eau chaude 569–572
 - production d'entropie 569, 572
- caractéristique
 - électrique
 - capacitive 67
 - courant-tension 71
 - diode 74, 176
 - lampe fluorescente 75
 - ohmique 72
 - résistive 70
 - source de tension 77
 - hydraulique
 - capacitive 24
 - écoulement laminaire 28
 - écoulement turbulent 28
 - pompe 32
 - PV d'une pompe 104, 189
 - résistive 28
 - thermique
 - entropie-température 215
- Carnot 199, 210
 - cycle 231, 469, 486
- Cavendish
 - constante de gravitation 680
 - peser la Terre 682
- ceintures de Van Allen 737
- centre de masse
 - accélération 420
 - définition 333
 - théorème 420
 - vitesse 420
- centrifuge
 - effet d'inertie 746
- chaleur
 - et entropie 204
 - généralités 203–206
 - grandeur extensive thermique 204
 - latente
 - stockage 578–581
 - molaire 472
 - production 205
 - propriétés 203
 - puissance 210
 - selon la thermodynamique
 - traditionnelle 204, 211
 - spécifique 472
 - voir aussi* entropie
- champ
 - conservatif 640
 - en tant que système physique 625, 631
 - interaction avec les corps 514
 - principe de superposition 632
 - vecteur de l'interaction
 - entre charges électriques 56, 626
 - entre masses 680
 - entre objets magnétisés 627
- champ électrostatique
 - circulation 640
 - contraintes 645
 - densité d'énergie 645
 - déplacement électrique D 651
 - en présence de matière 649–653
 - flux du champ 634
 - intensité
 - à partir de la force sur une charge 632
 - champ dipolaire 643
 - charge ponctuelle 633
 - condensateur plan 636
 - en tant que gradient du potentiel 639
 - loi de Coulomb 633
 - polarisation 649
 - potentiel 638
 - champ dipolaire 643
 - charge ponctuelle 638
 - gradient 639
 - puits et collines 640
 - source 636
 - théorème de Gauss 635
- champ gravitationnel
 - contraintes 681
 - densité d'énergie 682
 - intensité
 - à partir de la force sur une masse 680
 - en tant que gradient du potentiel 680
 - loi de la gravitation universelle 679
 - lois de Képler 678
 - masse en tant que charge
 - gravitationnelle 630
 - modèle géocentrique de Ptolémée 678
 - modèle héliocentrique de Copernic 678
 - mouvement képlerien 741
 - orbites planétaires 738

- peser la Terre 682
 potentiel 680
 vitesse de libération 740
 vitesse de satellisation 740
 champ magnétostatique
 aimantation induite 656
 champ magnétique et courant électrique 660–674
 champ magnétique \mathcal{H}
 champ démagnétisant 655
 intensité
 à partir de la force sur une charge 653
 à partir du potentiel scalaire 656
 potentiel scalaire 656
 théorème de Gauss 655
 circulation 661
 contraintes 659
 définition de l'ampère 671
 densité d'énergie 659
 effet Hall 673
 en présence de matière 656–658
 force de Laplace 669
 force de Lorentz 670
 force entre courants parallèles 671
 induction magnétique \mathcal{B}
 absence de sources 655
 définition 655
 théorème de Gauss 655
 intensité
 boucle de courant 664
 câble coaxial 667
 champ dipolaire 662, 664
 courant rectiligne 660, 664
 solénoïde 663
 spire de courant 662
 loi de Biot-Savart 660
 champs statiques
 description graphique
 lignes de champ 632
 surfaces orthogonales 632
 description mathématique
 intensité du champ 632
 principe de superposition 632
 champs variables
 électrique
 déplacement diélectrique \mathcal{D} 700
 loi d'Ampère-Maxwell 699
 tourbillonnaire 689
 électromagnétique
 densité d'énergie 703
 densité de flux d'énergie 703
 densité de quantité de mouvement 707
 équations de Maxwell 701
 vecteur de Poynting 704
 magnétique
 effet des variations 689
 loi d'induction de Faraday 692
 phénomène de self-induction 696
 sens du courant ou du champ induit 690
 tension et courant induits 689
 changement de phase 257, 494–504
 bilan d'énergie 495
 bilan d'entropie 495
 bilan de quantité de matière 495
 dépendance pression de vapeur-température 503
 diagramme TS 497
 diagramme TS de phase 499
 énergie et variation de volume 497
 enthalpie latente de vaporisation 497
 entropie 495
 entropie latente de vaporisation 497
 équilibre chimique 502
 lien entre entropie et enthalpie 497
 ligne de liquide saturé 499
 point critique 499
 point de fusion
 dépendance de la pression 500, 501
 potentiel chimique 501
 pression de vapeur 502
 quantité de matière 495
 relation pression-température 499
 sublimation 499
 vaporisation à différentes pressions 499
 charge électrique
 conservation 52
 courant 60
 double nature 51
 échangée 60
 interaction entre charges 55
 taux de variation 59
 variation 59
 charge magnétique
 concept 628
 correspondance avec les pôles 628, 653
 inséparabilité des dipôles 628
 lien avec l'aimantation 654
 origine de l'aimantation 628
 vision coulombienne du magnétisme 628, 653
 chauffage
 à température constante 207, 465
 à volume constant 207, 465
 fluide parfait 465–467
 fluides simples 213
 gaz parfait 465–468
 transfert d'énergie 481
 modèle uniforme 213
 par absorption et émission de rayonnement 526
 transfert d'énergie 211
 transfert d'entropie 204
 chauffage à écoulement 554–555
 bilans en régime stationnaire 554
 production d'entropie 555
 chute d'eau
 Carnot, puissance motrice du feu 210
 production d'énergie électrique 110
 puissance délivrée 116
 cinématique
 dans un repère accéléré 744–751
 dans un repère galiléen 406–411
 circuit cardiovasculaire 91
 pulmonaire 91
 systémique 91
 circuit électrique 52
 analogie hydraulique 52

- circuit hydraulique
différence de pression 21
- circulation d'un champ vectoriel
champ électrostatique 640
champ magnétostatique 661
concept 640
- Clausius 193, 211
- coefficient
d'adhérence 412
de chauffage 215
de concentration du potentiel chimique 260
de convection 221
de diffusion 278
de frottement sec 412
de performance 230
de pression du potentiel chimique 259
de température de l'énergie (chaleur massique)
gaz parfait 472
magnétisation 491
matériaux simples 216
de température de l'enthalpie 472, 481
de température de la pression 202
de température de la résistivité 202
de température du potentiel chimique 258
de transmission de la chaleur (de l'énergie)
par conduction 220
par convection 220
par rayonnement 537
de transmission global de l'entropie 220
- Peltier 302, 312, 316, 615
Seebeck 299, 312, 316, 615
stoechiométrie 253
- combustion
pouvoir énergétique 273
- compression
taux de production de volume 464
transfert d'énergie 464
- comptabilisation, *voir* équations de bilan
- concentration 251–252
diffusion 278
équilibre 279
et potentiel chimique 260
gradient 278
- condensateur
à plaques parallèles 68
élément de stockage 50, 67
enroulé 69
sphérique 68
supercondensateur 84
- conductance
électrique 71
entropique 304
hydraulique 29
processus de rotation 341
thermique(énergie) 220
thermique(entropie) 220
transfert d'entropie 521
- conduction
charge électrique 70
mécanismes 73
densité de flux 591
densité de flux d'énergie 597
quantité de mouvement 369, 386, 594
- conduction thermique
bilan d'énergie 604
bilan d'entropie 208, 601–603
dépendante du temps 603, 612–614
équation du champ de température 605, 607, 612
inclusion de sources 602, 606
loi de Fourier 604
production d'entropie 205, 605
transfert d'entropie 198, 204, 220–224, 511
- conductivité
électrique 72
entropique 517, 604
thermique (énergie) 221, 520, 606
- conservation
charge électrique 52
des éléments 253
énergie 114
moment cinétique 324
quantité de mouvement 366
- constante
d'équilibre
réactions chimiques 283
transport de substances 280
de Curie 491
de Faraday 250, 290, 318
de gravitation 680
de rayonnement 487
diélectrique 68, 633
- constante de temps
capacitive 38, 41, 81, 82
inductive 153
- contraintes
champ électrostatique 645
champ gravitationnel 681
champ magnétostatique 659
transfert de quantité de mouvement 369
- convection
bilan d'entropie 512
densité de flux 591
densité de flux d'énergie 597
entropie 204, 512
force d'entraînement 512
quantité de mouvement 371
systèmes ouverts 538–544
transport de quantité de matière 252, 277
- coordonnées polaires 409
- Copernic
modèle héliocentrique 678
- Coriolis
effet d'inertie 747
- Coulomb
loi d'interaction entre charges électriques 633
vision coulombienne du magnétisme 628, 653
- couple
flux de moment cinétique 326
- courant
charge électrique 60
convectif

- énergie 543
- entropie 541
- quantité de mouvement 541
- substances dissoutes 539
- courant électrique et champ magnétique 660–674
- de déplacement 700
- de Foucault 697
- énergie 124
 - écoulement d'un fluide sous pression 543
 - électrique 131
 - facteur de chargement 124
 - hydraulique 124
 - thermique 211, 220
- entropie 208, 211
- induit 689
- intensité 5, 14
- moment cinétique 325, 327
- quantité de matière 252
- quantité de mouvement 362, 367, 369, 541, 595
 - par convection 541
 - variation de l'intensité 147
 - volume 4, 8
- Curie
 - température 658
- cyclotron 734
- D**
- densité
 - gradient 586
 - grandeur extensive 588
 - quantité de mouvement 589
 - taux de production 592
 - taux de source 592
- densité d'énergie
 - champ électromagnétique 703
 - champ électrostatique 645, 652
 - champ gravitationnel 682
 - champ magnétostatique 659
 - écoulement de fluide 383, 443, 543
 - fluide 597
 - onde électromagnétique 721
 - pression d'un gaz 389
 - rayonnement du corps noir 485
- densité de courant (flux)
 - conductif 591
 - convectif 591
 - énergie 520, 597
 - énergie de l'onde électromagnétique 722
 - énergie du champ électromagnétique 703
 - entropie 519, 591, 601
 - masse 591
 - quantité de matière 278, 559
 - quantité de mouvement 369, 591, 595, 708
 - quantité de mouvement de l'onde électromagnétique 722
- densité du flux magnétique \mathcal{B} 655
- déplacement électrique \mathcal{D} 651
- dérivée matérielle 513, 596
- désaimantation adiabatique 493
- désintégration radioactive 257, 285
- deuxième principe de la thermodynamique 232
- diagramme de phase 500
- diagramme PV
 - cycle cardiaque 104, 189
- diagramme TS
 - caractéristique entropie-température 215
 - chauffage à volume constant 207
 - cycle de Carnot 231
 - eau et éthylène glycol 215
 - processus adiabatique 207
 - processus isotherme 207
 - vaporisation 497
 - vaporisation d'eau 499
- diagramme TV
 - chauffage isochore d'un fluide parfait 466
 - chauffage isotherme d'un fluide parfait 465
 - cycle de Carnot 469
 - entropie du rayonnement du corps noir 487
 - processus adiabatique du gaz parfait 470, 483
- diagrammes de dynamique des systèmes 16
- diagrammes de niveau
 - potentiel 64, 80, 82
 - pression 21, 39
 - température 220, 224
- diagrammes de processus 17
 - accumulation d'énergie dans un élément inductif 159
 - accumulation d'entropie 204
 - apport d'énergie dans un système 125
 - bilan de quantité de matière 253
 - cellule électrolytique 289
 - centrale hydroélectrique 111
 - chaîne de processus 112
 - champ magnétique et induction 150
 - changement de phase 497
 - charge d'un condensateur 132
 - chauffage d'eau 209
 - chauffage d'un corps 214
 - chauffage/détente d'un fluide parfait 463
 - collision de glisseurs 404
 - compression de l'air 194
 - conduite 33
 - conservation de l'énergie 114
 - destruction et production d'espèces 255
 - différence de pression inductive 147
 - dissipation 117
 - dissipation dans les processus chimiques 273
 - dissipation lors du transfert d'entropie 224
 - élément électrochimique 290
 - énergie dans les processus chimiques 271
 - énergie transférée par un flux de quantité de mouvement 379
 - équivalent windkessel du système cardiovasculaire 95
 - flux d'énergie lors d'une vidange 134
 - flux de chaleur 197
 - flux de quantité de matière 255

- flux lors du couplage par
 - embrayage 344–345
 - générateur thermoélectrique 298, 316
 - glissement relatif 416
 - lien entre entropie et énergie 211
 - machine thermique 229
 - machine thermique dissipative 231
 - machine thermique idéale 229
 - moteur de Stirling 199
 - pompe à chaleur idéale 229
 - pompe à chaleur Peltier 296, 317
 - pompe électrique 112, 200
 - processus de rotation 326
 - processus de roulement 433
 - processus de translation 368
 - processus électrochimiques 288
 - production d'entropie 205
 - puissance des processus de rotation 331
 - puissance des processus de
 - translation 379
 - résistance 71
 - résistance et inductance 148
 - source réelle 78
 - système cardiovasculaire 94
 - système turbine et générateur 200
 - thermoplongeur 110, 212
 - transfert d'énergie 113
 - transfert d'énergie en rotation 331
 - transfert d'entropie 220
 - turbine et pompe 33
 - turbine-générateur 111
 - vaporisation d'eau 198, 495
 - diamagnétisme 657
 - différence de potentiel
 - à l'origine d'un processus 64
 - causée par un processus 64
 - chimique
 - force d'entraînement 255–264
 - puissance chimique 271
 - tension chimique 256
 - différence de pression 15
 - différence de vitesse angulaire 322, 342
 - force d'entraînement 64
 - inductive 150
 - libération d'énergie 112, 120
 - tension 51, 60
 - thermique 211
 - différence de pression 3, 15, 45
 - capacitive 22, 24
 - caractéristique capacitive 24
 - caractéristique résistive 28
 - circuit hydraulique 21
 - inductive 147
 - résistive 22, 28
 - différence de température
 - force d'entraînement thermique 194
 - puissance thermique 211
 - différence de vitesse angulaire 322, 342
 - diffusion
 - charge électrique 553
 - entropie 227, 511, 553
 - production d'entropie 227
 - transport de quantité de matière 252, 277–283
 - vapeur dans l'air 557
 - diode
 - caractéristique 176
 - modèle dynamique 177
 - dipôle
 - de Hertz 720
 - électrique 627
 - moment dipolaire 649
 - potentiel et champ 643
 - magnétique 629
 - inséparabilité 628
 - moment dipolaire 662
 - dissipation
 - production d'entropie 212
 - taux de dissipation 212
 - transfert d'entropie 224
 - divergence
 - concept 592, 636
 - théorème de Gauss 592, 636
 - domaines de Weiss 658
 - dynamique des systèmes 4
- E**
- eau
 - liquide comprimé 494
 - liquide saturé 494
 - mélange liquide-vapeur 494
 - potentiel chimique 257
 - pression de vapeur 502
 - vaporisation
 - diagramme TS 499
 - vaporisation à différentes pressions 499
 - écoulement
 - irrotationnel 443
 - laminaire 442
 - potentiel 445
 - tourbillonnaire 446
 - turbulent 30, 442
 - voir aussi* courant
 - effet d'inertie 746
 - accélération d'Euler 747
 - centrifuge 746
 - Coriolis 747
 - effet magnétocalorique 489–494
 - efficacité
 - Carnot 231
 - du processus 117
 - selon la deuxième loi 230
 - module Peltier 316
 - selon la première loi 230
 - thermique 230
 - élastance
 - hydraulique 24
 - variable du ventricule gauche 107
 - électricité
 - bilan de charge 62
 - capacité 67
 - champ électrique 56
 - charge 58
 - conductance 71
 - conducteurs et isolants 57
 - conducteurs ohmiques 72
 - conservation de la charge 52
 - courant de charge 60
 - différence de potentiel 60
 - force d'entraînement 51, 64

- induction 150
- influence 56
- interaction entre charges 55
- modèle RLC 164
- modèles RC 80–84
- modèles RL 152–156
- potentiel 59
- résistance 70
- tension 60
- électrolyse 249
- embrayage à friction
 - transfert de moment cinétique 342
- énergie
 - accumulation 127–135
 - condensateur 131
 - dans un élément inductif 405
 - inductance 161
 - processus de translation 378
 - voir aussi* bilan d'énergie
 - compression isotherme 468
 - conservation 114
 - couplage de processus 111–115
 - courant 124
 - chimique 271
 - écoulement d'un fluide sous
 - pression 543
 - électrique 125
 - hydraulique 124
 - processus de translation 379
 - thermique 211
 - densité
 - champ électromagnétique 703
 - champ électrostatique 645, 652
 - champ gravitationnel 682
 - champ magnétostatique 659
 - écoulement de fluide 383, 443, 543
 - fluide 597
 - onde électromagnétique 721
 - pression d'un gaz 389
 - rayonnement du corps noir 485
 - densité de flux
 - onde électromagnétique 722
 - détente adiabatique 483
 - gaz parfait 480
 - libérée 112
 - dans la conduction d'entropie 605
 - intégrale de la puissance 120
 - travail 120
 - mesure de l'accomplissement 112
 - paramagnétisme 492
 - partie intrinsèque de l'énergie
 - molaire 548
 - porteurs d'énergie 123–127
 - potentielle 114
 - processus chimiques 271–273
 - processus continus 597–598
 - propriétés 114
 - sources 515, 598, 606
 - taux de libération, *voir* puissance
 - transfert 112, 123–127
 - et porteurs d'énergie 123–127
 - gaz parfait 481
 - lors de chauffage ou
 - refroidissement 210, 481
 - processus de translation 379
 - travail 112, 120
 - enthalpie
 - coefficient de température 472
 - de fusion 496
 - de vaporisation 496
 - écoulement de fluide 543
 - gaz parfait 480
 - latente de vaporisation 497
 - entropie
 - accumulation 204
 - gaz parfait 478
 - bilan, *voir* bilan d'entropie
 - calorique 195, 203
 - capacité, *voir* capacité, entropique
 - changement de phase 495
 - conduction 601–614
 - conductivité 517, 604
 - corps noir 487
 - courant 208
 - conduction 517–520
 - convectif 541
 - cycle de Carnot 231
 - densité 519, 591, 594, 601
 - écoulement à travers des surfaces 512
 - loi de Fourier 517–520, 604
 - échangée 208, 465–466, 469
 - généralités 203–206
 - grandeur extensive thermique 204
 - latente
 - changement de phase 495
 - de fusion 496
 - de l'eau (0°C à 4°C) 465
 - de vaporisation 496, 497
 - fluide parfait 465
 - gaz parfait 467, 480
 - par rapport à l'aimantation 491
 - par rapport à la pression 468
 - par rapport au volume 465
 - rayonnement du corps noir 485
 - signe 465
 - stockage 578–581
 - minimisation
 - capteur solaire thermique 572
 - molaire 251
 - paramagnétisme 491
 - pertes
 - capteur solaire thermique 572, 576
 - systèmes ouverts 538
 - porteur d'énergie 211
 - processus chimiques 273–275
 - production
 - capteur solaire thermique 569, 572
 - chauffage à écoulement 555
 - conduction thermique 520, 605
 - dispositif thermoélectrique 617
 - dissipation 212
 - irréversibilité 205
 - mélange 555
 - pression de vapeur 502
 - processus 205
 - rayonnement 526–529
 - réactions chimiques 273
 - systèmes d'écoulement 553–555
 - transfert d'entropie 224
 - transfert de chaleur 511–515

- vaporisation d'eau 498
 - produite 208
 - propriétés 203
 - relation avec la température et l'énergie 210–213
 - sources 514, 602
 - spécifique 215
 - transfert 511–515
 - conductance 220
 - conduction 511, 601–614
 - convection 512
 - couches composites 220, 225
 - lors de chauffage ou refroidissement 220–224
 - modes de transfert 204
 - rayonnement 513–515
 - résistance thermique 221
 - variation 208, 216
 - équation d'état
 - gaz et rayonnement 487
 - gaz parfait 467
 - rayonnement du corps noir 485
 - substance paramagnétique 490
 - thermique 467
 - équation de champ
 - température 605, 607, 612
 - équations de bilan 5, 15–18
 - forme instantanée 16
 - forme intégrée 16, 593
 - forme locale 586, 593
 - processus continus 593–596
 - systèmes ouverts 544
 - voir aussi* bilan de ...
 - équations raides 181, 311
 - équilibre
 - niveaux électriques 50
 - niveaux hydrauliques 1
 - températures 193
 - équilibre
 - chimique 502
 - hydrostatique 439
 - réactions chimiques 283
 - étoiles
 - masse molaire 487
 - rayonnement interne 487
 - Euler
 - effet d'inertie 747
 - évaporation 557–562
 - courant de quantité de matière 558
 - diffusion de vapeur 558
 - eau chaude 557
 - eau froide 560
 - refroidissement 560
 - excitation magnétique \mathcal{H} 654
 - expérience
 - à-coup de courant 696
 - caractéristique d'une source de tension 77
 - Cavendish 682
 - charge et décharge d'un condensateur 53
 - chauffage d'un cylindre de cuivre 194
 - chauffage de glycol 218
 - collision de deux disques 320
 - collision entre deux glisseurs 358
 - conduction dans une barre de cuivre 522
 - contact thermique entre deux corps 193
 - couplage de processus électrique et thermique 110
 - décharge d'un supercondensateur 85
 - décomposition de la murexide 240
 - démarrage d'un courant d'eau 144
 - diffusion de sel à travers une membrane 242
 - diffusion de sel dans l'eau 244
 - diffusion de toluène de l'eau vers l'air 245
 - double nature de la charge électrique 51
 - dynamique d'une lampe à incandescence 532
 - écoulement de chaleur dans une barre 198
 - effet Bernoulli 31
 - électrisation par frottement 49
 - équilibre des niveaux électriques 50
 - évaporation d'eau chaude 558
 - évaporation d'eau froide 560
 - fusion de glace 199
 - influence magnétique 629
 - influence électrostatique 56
 - interaction entre charges électriques 55
 - libération de chaleur latente 578
 - mélange de sel et d'eau 540
 - module Peltier 300–307
 - mutarotation du glucose 246
 - Ersted 629
 - oscillations du pendule de Pohl 348
 - oscillations entre réservoirs communicants 144
 - oscillations forcées du pendule de Pohl 349
 - refroidissement d'eau dans une canette 195
 - refroidissement de cire liquide 578
 - réservoirs communicants 2
 - résistance ohmique 71
 - résistivité du tungstène 534
 - Rüchardt 475
 - Rutherford 731
 - self-induction 695
 - séparation de moments cinétiques opposés 323
 - trempage de coeurs de pommes de terre 246
 - vaporisation d'eau 198, 497
 - variation de la pression d'un gaz avec la température 202
 - variation de la résistance avec la température 202
- F**
- Faraday
 - constante 250, 290, 318
 - loi d'induction 692
 - ferromagnétisme
 - domaines de Weiss 658
 - hystérésis 658
 - température de Curie 658
 - fluide
 - newtonien 447

- parfait 442
 bilan d'énergie 464
 bilan d'entropie 463
 bilan de volume 464
 capacité entropique 465
 chauffage 465–467
 chauffage isochore 465
 compression 464
 écoulement potentiel 445
 entropie latente 465
 équation de Bernoulli 443
 équation de continuité 443
 équations de bilan 463
 propriétés 463
 transfert d'énergie 464
- propriétés 439
- statique
 équilibre hydrostatique 439
 poussée d'Archimède 441
- visqueux 446
 couche limite 447
 effet Magnus 446, 452
 loi de Hagen-Poiseuille 447
 nombre de Reynolds 450
 similitude dynamique 450
- flux 3
 densité 590
 facteur 5
 synonyme pour courant 8
- flux d'un champ vectoriel
 concept 634
 divergence 636
 surface gaussienne 634
 théorème de Gauss 635
- force
 apparente 746
 d'inertie 746
 accélération d'Euler 747
 centrifuge 746
 de Coriolis 747
- entre courants parallèles 671
- fictive 746
- force d'adhérence 412
- force de contact 411
- force et flux de quantité de mouvement 397–402
- force normale 412
- Laplace 669
- lien avec l'induction 400
- Lorentz 670, 732
- moment d'une force 422
- puissance d'une force 403
- travail produit 404
- force d'entraînement
 chimique 240, 255–264
 convection 512
 électrique 51, 64
 flux de chaleur 194
 hydraulique 19, 28
 inductive 145
 thermique 201
 thermique (conduction) 511
- Foucault
 courants 697
- Fourier
 loi 517–520
 conduction thermique 604
 flux d'énergie 520
- fraction
 masse-volume 251
 massique 251
 molaire 251
- fréquence
 lien avec la vitesse angulaire 330
 mouvement de rotation 330
- frottement 386
- G**
- Gauss
 théorème 592, 635
- Gay-Lussac
 loi 265
- gaz de photons 484
- gaz parfait
 capacité entropique 470
 chauffage 465–468
 constante des gaz parfaits 264
 contenu en entropie 478
 énergie 480–484
 enthalpie 480–484
 entropie latente 467, 480
 équation d'état 264, 467
 lois constitutives 467–473
 mélanges 264
 modèle corpusculaire 387
 potentiel chimique 268
 processus adiabatique 470–471
 relation entre entropie latente et capacité entropique 467
- générateur
 électrique 697
 thermoélectrique 297, 303
- Gibbs
 potentiel chimique 240
 relation fondamentale
 écoulement de fluide 551
 fluide parfait 480
 fluides simples 214
 substance paramagnétique 492
- gradient
 concentration 278
 de la densité 586
 potentiel chimique 278
 potentiel du champ électrostatique 639
 potentiel électrique 73
 pression 20, 28
 température 220, 520, 604
- grandeur de niveau
 chimique 240
 électrique 50, 59
 hydraulique 1
 processus de rotation 321, 326
 processus de translation 360, 368
 thermique 194, 201
- grandeur extensive 9
 chaleur 195
 charge électrique 50, 58
 densité 588
 énergie 115
 entropie 196, 204

- moment cinétique 321, 323
- quantité de matière 240, 248
- quantité de mouvement 360, 365
- volume 9
- grandeur intensive 9
 - potentiel chimique 241, 255
 - potentiel électrique 51, 59
 - pression 9
 - température 196, 201
 - vitesse 360
 - vitesse angulaire 321, 326
- grandeur semblable à un fluide
 - charge électrique 50, 58
 - entropie 196, 204
 - liste 205, 368
 - quantité de mouvement 361
 - voir aussi* grandeur extensive
- grandeurs molaires 251
- grandeurs primitives
 - chimie 248, 255
 - électricité 58
 - hydraulique 8
 - processus de rotation 323
 - processus de translation 365
 - thermodynamique 201
- gravité
 - source de quantité de mouvement 371
- H**
- Hagen-Poiseuille
 - loi 29, 447
- Hall
 - effet 673
- Hertz
 - dipôle 720
- Hooke
 - loi 400
- horseshoe orbit 758
- Huygens-Steiner
 - théorème de l'axe parallèle 338
- hydraulique
 - capacité 24
 - courant de volume 14
 - différence de pression 15, 21
 - force d'entraînement 19
 - induction 147
 - modèle RLC 164
 - modèles RC 35–43
 - modèles RL 152–156
 - résistance 28
 - volume 9
- hystérésis 658
- I**
- inductance
 - électrique 157
 - hydraulique 157, 372
- induction
 - électrique 150
 - courants de Foucault 697
 - générateur électrique 697
 - loi au moyen de la tension 692
 - loi au moyen des champs 693
 - microphone et haut-parleur 698
 - moteur électrique synchrone 697
 - phénomène de self-induction 696
 - transformateur 698
 - hydraulique 147, 550
 - puissance 159
- inertie
 - effets inductifs 143, 144
 - électrique 150
 - fluide 143, 144
 - force (effet) d'inertie 746
 - processus de rotation 332–341
 - processus de translation 361, 374
- influence
 - électrique 56, 626
 - magnétique 629
- intensité
 - courant 5, 14
 - état électrique
 - potentiel 59
 - état thermique
 - température 201
- irréversibilité, *voir* production d'entropie
- isentropique, *voir* processus adiabatique
- isotherme, *voir* processus isotherme
- K**
- Képler
 - lois du mouvement planétaire 678
 - trajectoires képlériennes 741
- Kirchhoff
 - première loi
 - électrique 62
 - hydraulique 44
 - seconde loi
 - électrique 64, 67
 - hydraulique 22
 - puissance 120
- L**
- Lagrange
 - points 751
 - satellisation autour de L4 754
- Laplace
 - force 669
- Lawrence
 - cyclotron 734
- libration 757
- liquide comprimé 499
- lit de galets 599
- loi des mailles
 - électrique 64, 67
 - hydraulique 22
 - puissance 120
- loi des noeuds
 - électrique 62
 - hydraulique 44
- lois constitutives 8
 - chaleur et processus
 - thermiques 213–228
 - électricité 64, 67, 70
 - et équations de bilan 17
 - gaz parfait 467–473
 - hydraulique 17, 37–45
 - migration des sauterelles 586

- rayonnement du corps noir 486
thermoélectricité 616
- Lorentz
force 670, 732
- M**
- machine thermique
coefficient de performance 230
cycle de Carnot 231
diagramme de processus 210, 229
efficacité 230
idéale 229
pompe à chaleur idéale 229
principe de fonctionnement 210
- magnétisation, *voir* aimantation
- magnétisme et chaleur 489–494
capacité entropique à aimantation
constante 491
couplage magnéto-calorique 490
désaimantation adiabatique 493
entropie latente par rapport à
l'aimantation 491
équation d'état d'une substance
paramagnétique 490
relation fondamentale de Gibbs 492
- Magnus
effet 446, 452
- masse
capacité en quantité de mouvement 361,
374
densité de flux 591
en tant que charge gravitationnelle 630
équivalence masse-énergie 391
masse inerte 361, 374
masse inerte et masse pesante 376
molaire 251
à l'intérieur des étoiles 487
- Maxwell
équations du champ
électromagnétique 701
loi d'Ampère-Maxwell 699
- mélange
production d'entropie 555
- mélanges
eau fraîche et eau salée 540
fraction molaire 265
pression partielle 266
- microphone et haut-parleur 698
- miroir magnétique 735
- modèles de dynamique des systèmes
bouteille magnétique 736
capteur solaire thermique 571
chaîne de condensateurs 84
chaîne de réservoirs 42
charge d'un condensateur 82
solution analytique 82
chauffage d'un corps solide 226
chauffage de glycol 219
chute de caissettes à cupcakes 386
circuit RLC 164
traitement analytique 167
collision de deux disques 322
collision entre deux glisseurs 361, 380
condensateurs couplés 72
conduction de l'entropie 522
corps en contact thermique 224
couplage par embrayage 343
décharge d'un condensateur 80
solution analytique 81
décomposition de murexide 241
démarrage d'un courant 154
désintégration radioactive 285
diffusion 42, 279
diffusion de sel 243
diffusion du toluène 281
diode 177
avec propriétés capacitatives 179
avec propriétés inductives 180
dynamique d'une lampe à
incandescence 532
effet Coriolis 748
électrique du circuit cardiovasculaire 96,
98, 183
équations raides 181
équilibre des températures 226
expérience de Rutherford 731
hydraulique du circuit
cardiovasculaire 99, 102, 104, 185,
187, 188
lancement vertical d'une fusée 550
libération de chaleur latente 579
mélange d'eau fraîche et d'eau salée 540
module Peltier 308, 310, 314
mouvement képlerien 741
mutarotation du glucose 284
pendule de Pohl 352
perméabilité des globules rouges 281
problèmes numériques 181
refroidissement d'eau 195, 222
refroidissement de cire liquide 579
refroidissement par évaporation 560
relations algébriques circulaires 177
remplissage d'un réservoir 38
solution analytique 39
réservoirs communicants 15, 23, 26, 31
satellisation autour de L4 755
vidange d'un réservoir 36
solution analytique 36
windkessel 41
windkessel électrique 83
- modélisation de systèmes dynamiques
équations raides 181, 311
philosophie 4–7
problèmes numériques 181, 311
relations algébriques circulaires 177
structure des modèles 15–17
- module Peltier
coefficient Peltier 302, 312, 316
coefficient Seebeck 299, 312, 316
conductance entropique 304
conduction d'entropie 296
efficacité selon la deuxième loi 316
générateur thermoélectrique 297, 303
lois constitutives 311
pompe à chaleur 296, 301
production d'entropie 296
puissance 304
refroidisseur 296, 301
rôle de l'énergie 315
structure 298

- moment cinétique
 accumulation 321, 332
 bilan, *voir* bilan de moment cinétique
 capacité, *voir* moment d'inertie
 conservation 324, 339
 courant 325, 327
 lien avec les forces 422
 échangé 327
 grandeur extensive en rotation 323
 induction 346
 oscillations 346
 propriétés 323–325
 transfert 327, 341
 conductance 341
 embrayage à friction 342
 induction 346
 par arbre rigide
 (supraconduction) 341
 résistance 341
 moment d'inertie 332–341
 moment d'une force 422
 moment dipolaire
 électrique 649
 magnétique 654, 662
 monopôle magnétique
 concept 628
 non-existence 628, 653, 661
 moteur électrique synchrone 697
 mouvement de libration 757
 mouvement planétaire 738
 mouvement relatif 743
- N**
- Newton
 dynamique des fluides 447
 loi de la gravitation universelle 679
 lois de la dynamique 365, 397–402
 niveau, *voir* grandeur de niveau
- O**
- Ørsted
 expérience 629
- Ohm
 conducteurs ohmiques 72
 loi de résistance 71
- onde
 équation de propagation 712
 équation différentielle 435
 exemples 711
 harmonique
 équation 713
 paramètres 713
 propagation dans un gaz 478
 propagation dans un solide 437
- onde électromagnétique
 caractéristiques 718
 densité d'énergie 721
 densité de flux d'énergie 722
 densité de flux de quantité de
 mouvement 722
 dipôle de Hertz 720
 existence 717
 pression radiative 723
 orbite en fer à cheval 758
- orbites planétaires 738
- oscillations 162–171
 hydrauliques 163
 modèle RLC 164
 pendule de Pohl 346
 résonance 348–351
 sur un plan horizontal 417
 traitement analytique 167
- osmose 269
 coeurs de pommes de terre 246
 globules rouges 281
- P**
- paramagnétisme 657
- pebble bed 599
- Peltier
 coefficient 302, 312, 615
voir aussi module Peltier
- perméabilité magnétique
 absolue 656
 du vide 654
 relative 656
- permittivité
 du vide 68, 633
 relative 69, 651
- pile à combustible 76, 288
- Pohl
 oscillations du pendule 346
- point critique 499
- point de fusion
 équilibre des potentiels chimiques 258
 influence de la pression 259
- points de Lagrange 751
- polarisation
 électrique 56, 626, 649
 moment dipolaire 649
 susceptibilité 650
 magnétique 629, 656
 moment dipolaire 654, 662
- pompage
 de la charge 52, 64
 élévation du potentiel 52, 64
- pompe à chaleur
 pompe à chaleur Peltier 296
- pompes
 caractéristique 32
 différence de pression 22
 force d'entraînement 19
 intermittente 104, 106, 187
- potentiel
 champ électrostatique 638
 champ dipolaire 643
 charge ponctuelle 638
 gradient 639
 puits et collines 640
 chimique 240, 255–264
 changement de phase 501
 dépendance de la concentration 260
 dépendance de la pression 259
 dépendance de la température 258
 écoulement de fluide 551
 valeurs 257, 260–264
 vapeur et liquide 503
 électrique 51, 59, 64
 électrochimique 289

- et courant d'énergie 124
 et transfert d'énergie 112
 hydraulique 9
 processus de rotation 321, 326
 processus de translation 360, 368
 thermique 201, 232
 thermoélectrique 618
- potentiels combinés
 potentiel électrochimique 289, 615
 potentiel gravitochimique 275
 potentiel thermo-électrochimique 616
- Poynting
 vecteur 704
- premier principe de la
 thermodynamique 232
- pression 2
 de vapeur 502
 force d'entraînement hydraulique 19
 osmotique 269
 partielle 266
 air et vapeur 558
 potentiel hydraulique 9
 radiative 723
- pression sanguine
 diastolique 92
 en mmHg 92
 systolique 92
- problème à trois corps restreint 751
- processus
 adiabatique 207
 compression 207
 détente 207
 gaz parfait 470–471
 chaînes de processus 111
 continus
 conduction thermique 601–614
 équations de bilan 593–596
 thermoélectricité 615
 exemples de couplage 112
 isotherme 207
 compression 207
 compression d'un fluide parfait 465
 détente 207
 spontané ou contraint 17
 transport
 par convection 538–544, 587
 par rayonnement 524–537, 587
- production d'entropie, *voir* entropie
 pseudoforce 746
- Ptolémée
 modèle géocentrique 678
- puissance 110
 bilan dans les circuits 120
 chute d'eau 116
 module Peltier 304
 processus chimique 271
 processus de translation 379
 processus électrique 119
 processus gravitationnel 116
 processus hydraulique 119
 processus inductif 159
 processus thermique 210
 processus thermoélectrique 618
 puissance d'un moment 424
 puissance d'une force 403
 taux de libération d'énergie 120
 puits, *voir* source
- Q**
- quantité
 d'électricité 58
 de fluide 8
 quantité de matière
 concept 248–253
 courant 252, 539
 mesure de la quantité de substance 8
 réactions chimiques 248–250
 taux de production 252
 quantité de mouvement
 accumulation 360, 366, 374, 390
 bilan, *voir* bilan de quantité de mouve-
 ment
 capacité 374
 caractère vectoriel 366
 conservation 366
 courant 364, 369, 371
 densité 589
 densité dans le champ
 électromagnétique 707
 densité de flux 369, 591, 595
 onde électromagnétique 722
 échange 362, 365, 386
 échangée 363, 365
 grandeur extensive en translation 365
 porteur d'énergie 378
 propriétés 366–367
 transfert
 conduction 369, 594
 contraintes 369
 convection 371, 541, 594
 courant 362, 367, 369
 par la lumière 390
 par le champ magnétique 362
 par rayonnement 371
 résistance 386
 quantité échangée
 charge électrique 60
 volume 14
 quantité, mesure de 8
- R**
- rayonnement
 à l'intérieur d'une étoile 487
 absorbeurs sélectifs 532
 absorption 527–529
 absorptivité 530
 bilan d'énergie 486, 515
 bilan d'entropie 486, 513–515
 constante de Stefan-Boltzmann 525
 émission 527–529
 émissivité 530
 interaction entre corps et champ 514
 loi de Kirchhoff 530
 production d'entropie 526–529
 rayonnement du corps noir 484–489,
 525–529
 capacité entropique 486
 densité d'énergie 485
 énergie 485

- entropie latente 485
- pression 485
- réflexivité 530
- solaire
 - constante solaire 536
- surfaces grises 530–532
- surfaces opaques 524–532
- température 486
- thermique 485
- transfert d'entropie 524–526
- réacteur nucléaire 600
- réactions chimiques
 - bilan de quantité de matière 283
 - changement de phase 501
 - désintégration radioactive 285
 - exothermiques et endothermiques 273
 - production d'entropie 273
 - quantité de matière 248
- réactions électrochimiques 290
- référentiel 406
 - inertiel 743
- refroidissement, *voir* chauffage
- refroidisseur Peltier 296
- rendement 117
- résistance
 - électrique 70
 - hydraulique 28
 - processus de rotation 341
 - processus de translation 386
 - thermique 221, 524
 - transfert d'entropie 521
- résistivité 72
- résonance 348–351
- Reynolds
 - nombre 450
- rotationnel
 - concept 665
 - théorème d'Ampère 661, 665
- roulement
 - étude du mouvement 429–435
- Rutherford
 - expérience 731
- S**
- sauterelles
 - bilan 585
 - lois constitutives 586
 - migration 583–588
 - naissance et mort 585
 - rayonnement et convection 587
 - transports conductifs 584
- Seebeck
 - coefficient 299, 312, 615
- self-induction 696
- solide rigide
 - centre de masse 420
 - décomposition du mouvement 423
 - mouvement 420
 - propriétés 333
 - rotation autour d'un axe de direction
 - constante 424–428
- solutions
 - diluées 268
 - osmose 268
 - potentiel chimique 269
- pression osmotique 268
- pression partielle 268
- soluté 268
- solvant 268
- son
 - propagation dans l'air. 477
 - vitesse du son dans un gaz parfait 478
- source
 - de tension 52, 76
 - caractéristique 77
 - du champ électrostatique 636
 - énergie 598, 606
 - entropie 606
 - équation de champ avec sources 607
 - quantité de mouvement 371
 - sauterelles 587
 - synonyme pour alimentation 52
- spectromètre de masse 733
- spin
 - moment cinétique intrinsèque 325
- Stefan-Boltzmann
 - loi 487
- Stirling
 - moteur 199
- stockage
 - chaleur latente 578–581
 - charge électrique 67
 - énergie 127–135, 161, 351, 599
 - entropie 204, 208, 308, 603, 612
 - moment cinétique 321
 - quantité de mouvement 360, 366, 374, 390
 - volume 24
- substances
 - briques fondamentales 248
 - et charge électrique 249
 - quantité de matière 248–250
- supraconduction
 - électrique 76
 - transfert de moment cinétique 341
- surface gaussienne 634
- surfaces 632
- susceptibilité
 - électrique 650
 - magnétique 656
- systèmes d'écoulement
 - analyse 553–555
 - effets inductifs 550
 - production d'entropie 553–555
- systèmes ouverts 538–557
 - analyse 547–551
 - avec effets mécaniques 547–553
 - courant d'énergie 547
 - en mouvement 548
 - potentiel chimique 551
 - processus thermiques 538
 - volume de contrôle 513
- T**
- taux de production
 - densité 585, 592, 601
 - entropie 208, 212, 224
 - quantité de matière 252
 - volume 464
- taux de source

- densité 592
- énergie 515, 527
- entropie 514, 527, 534
- quantité de mouvement 371
- spécifique 592
 - quantité de mouvement 598
- taux de variation 9
 - charge électrique 59
 - courant électrique 150
 - énergie 213, 515, 527
 - entropie 208, 527, 534
 - flux volumique 147
 - quantité de mouvement 372
 - volume 9
- température
 - à la surface de la Terre 536
 - à la surface du Soleil 536
 - absolue 202
 - absolue et potentiel thermique 232
 - accès aux basses températures 493
 - changement de phase 198
 - coefficient de pression 202
 - du gaz parfait 202
 - échelle Celsius 202
 - échelle Kelvin 202
 - équation de champ 605, 607, 612
 - gradient 604
 - mesure du degré de chaleur 201
 - niveau thermique 194
 - potentiel thermique 201
- tenseur du flux de quantité de mouvement 592, 595, 707
- tension chimique 256
- tension électrique 51, 60
 - chute de potentiel 60
 - différence de potentiel 51
 - tension à vide 78
 - tension aux bornes 51, 64, 78
 - tension capacitive 67
 - tension induite 150, 689
 - tension résistive 71
- thermocouple 298
- thermoélectricité
 - bilan d'énergie 616
 - bilan d'entropie et charge 616
 - coefficient Peltier 302, 316, 615
 - coefficient Seebeck 299, 316, 615
 - densité de puissance 618
 - en tant que processus chimique 317
 - lois constitutives 616
 - potentiel 618
 - production d'entropie 617
 - voir aussi* module Peltier
- thermomètre
 - à gaz 202
 - à résistance électrique 202
 - au mercure 202
- trajectoire 406
- transformateur 698
- transformation intégrale
 - théorème de la divergence 592
- travail 404
- ceintures 737
- vapeur
 - pression 502
 - saturée 495
 - surchauffée 495
- variation 9
 - de l'entropie à partir de la capacité 216
 - de l'intensité du courant 145, 147, 150
 - de la charge électrique 59
 - du volume 9
 - du volume à partir de la capacité 25
 - du volume à partir du taux de variation 10
- vitesse
 - caractère vectoriel 379, 407
 - de libération 740
 - de satellisation 740
 - niveau de mouvement 360
 - potentiel du mouvement de translation 360, 368
- vitesse angulaire
 - niveau de rotation 321, 326
 - potentiel rotatoire 321
- volume 8, 9
 - corps et volume de contrôle 513
 - échangé 14
 - équation de bilan 16
 - molaire 251
 - taux de production 464
 - variation du volume 9

W

- windkessel
 - électrique 83
 - hydraulique 41
 - modèle du circuit cardiovasculaire 94, 183

V

Van Allen

