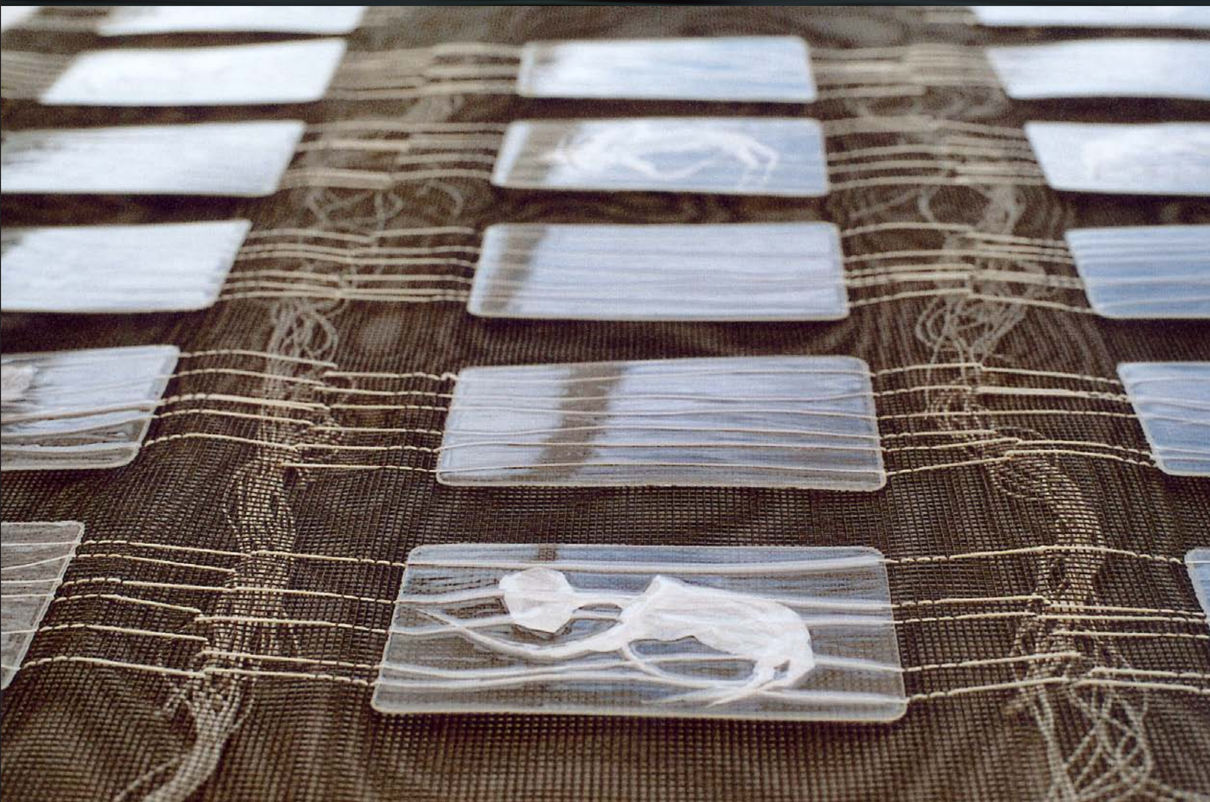
Enseignement des mathématiques

Algèbre linéaire

Aide-mémoire, exercices et applications

Deuxième édition

Robert C. Dalang
Amel Chaabouni



Presses polytechniques et universitaires romandes

Algèbre linéaire

Illustration de couverture (œuvre et photographie) : Fatma Charfi

Enseignement des mathématiques

Algèbre linéaire

Aide-mémoire, exercices et applications

Deuxième édition

Robert C. Dalang
Amel Chaabouni

Presses polytechniques et universitaires romandes

Les auteurs et l'éditeur remercient l'École polytechnique fédérale de Lausanne
dont le soutien financier a rendu possible la publication de cet ouvrage.

La collection « Enseignement des mathématiques » est dirigée par
le professeur Robert C. Dalang

Direction générale : Lucas Giossi
Directions édioriale et commerciale : Sylvain Collette et May Yang
Responsable de production : Christophe Borlat
Éditorial : Alice Micheau-Thiébaud et Jean Rime
Graphisme : Kim Nanette
Promotion et diffusion : Manon Reber
Comptabilité : Daniela Castan

EPFL Press est une maison d'édition de la Fondation des Presses polytechniques
et universitaires romandes (PPUR), qui publie principalement les travaux d'enseignement
et de recherche de l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL),
des universités et des hautes écoles.

PPUR, EPFL-Rolex Learning Center, Station 20, CH-1015 Lausanne,
info@epflpress.org, tél.: +41 21 693 21 30.

www.epflpress.org

Deuxième édition

ISBN 978-2-88074-616-2, version imprimée
ISBN 978-2-88914-278-1, version ebook (pdf), doi.org/10.55430/3120ALRCD

Avant-propos

Ce livre s'adresse aux étudiants ingénieurs de première année dont le cursus demande un apprentissage rigoureux de l'algèbre linéaire, fondé sur la maîtrise des concepts et les aptitudes à raisonner et à calculer. Il est formé de quatre parties aux objectifs différents.

La première partie, l'Aide-mémoire d'algèbre linéaire, rassemble en dix chapitres les principales notions, propriétés, théorèmes et formules présentés dans un premier cours d'algèbre linéaire pour étudiants ingénieurs. Chaque chapitre est complété par un ensemble important d'exercices de niveaux différents. Sauf pour ceux munis d'une étoile, la réponse ou une solution rédigée est donnée à la fin du livre. Cette première partie est conçue pour être un complément à une participation régulière à un cours ex cathedra : les exercices proposés permettent un travail hebdomadaire régulier, alors que les notions théoriques renseignent sur la matière enseignée et facilitent les révisions.

Les notions et résultats présentés dans cette première partie sont systématiquement accompagnés de références précises à l'un ou l'autre des livres suivants : *Algèbre linéaire,* par R. Cairoli, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991 ; *Linear Algebra (Applications Version),* 7th edition, par H. Anton et C. Rorrès, John Wiley & Sons, 1994. Ces références se présentent sous la forme [Cairoli, p.47] ou [Anton, p.170] et indiquent donc le livre et la page à consulter.

La deuxième partie du livre propose six applications de l'algèbre linéaire qui représentent des utilisations concrètes de cette matière en sciences de l'ingénieur. C'est un premier contact avec des sujets spécialisés que la plupart des étudiants retrouveront dans des cours plus avancés. L'étude de ces applications s'appuie sur les notions présentées dans la première partie, mais n'exige pas d'autres connaissances particulières. La bibliographie propose quelques références qui permettront aux étudiants qui le souhaiteraient d'approfondir ces thèmes. Chaque chapitre est aussi accompagné d'un ensemble d'exercices, dont la plupart avec solution, selon les mêmes principes que les exercices de la première partie.

Les préalables pour chacun des chapitres 11 à 16 sont les suivants : tous exigent une connaissance des chapitres 1 à 4 ; les chapitres 12 et 13 utilisent en outre le contenu du chapitre 6 ; et les chapitres 14 et 16 utilisent en outre certaines notions des chapitres 6 et 8.

La troisième partie du livre présente une sélection d'exercices de révision qui permet aux étudiants de se préparer pour l'examen de fin d'année. Contrairement aux exercices proposés à la fin d'un chapitre et qui se réfèrent principalement à la matière du chapitre en question, chaque exercice de révision porte sur la matière de plusieurs chapitres. Pour la plupart d'entre eux, une solution est donnée à la fin du livre.

La dernière partie du livre présente les solutions de tous les exercices des chapitres qui précèdent, à l'exception de ceux marqués d'une étoile.

Les choix de la matière théorique et des exercices présentés dans cet ouvrage ont été affinés aux cours de nombreuses années d'enseignement à différentes sections d'ingénieurs de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). Cette expérience a en particulier été mise à profit pour proposer des exercices de difficulté graduée : certains d'entre eux exercent directement un aspect de la théorie, alors que d'autres demandent des développements plus poussés.

En général, les objectifs principaux pour l'étudiant sont de bien comprendre les raisonnements et de bien assimiler les exemples et applications numériques présentés au cours ex cathedra et dans les exercices, car c'est à partir de là que l'étudiant sera capable d'utiliser l'algèbre linéaire dans les sciences de l'ingénieur. La première partie de cet ouvrage sert de référence de base quant à la matière enseignée et donne à l'étudiant l'outil nécessaire pour effectuer un travail d'approfondissement personnel. La grande variété des exercices proposés permet à l'enseignant de désigner périodiquement une partie de ces exercices pour un travail dirigé, afin de permettre à chaque étudiant de bien assimiler la matière. Les exercices avec étoile peuvent être utilisés pour un contrôle continu payant.

En revanche, les applications de la deuxième partie ont été conçues pour intéresser et motiver l'étudiant dans l'étude de l'algèbre linéaire, en lui proposant des sujets avec un contenu technique mais dont il aura souvent entendu parler avant le début de ses études universitaires. Les auteurs ont ainsi souhaité permettre à l'étudiant de prendre conscience de l'utilité des mathématiques, et en particulier de l'algèbre linéaire, pour la suite de ses études.

Apports de la deuxième édition

Le chapitre 16 de ce volume présente une application supplémentaire de l'algèbre linéaire, avec exercices et solutions. Les exercices de révision se trouvent donc dans le chapitre 17. Des corrections mineures ont été effectuées dans les autres chapitres.

R. Dalang et A. Chaabouni
Juillet 2004

Remerciements

Ce livre a été rédigé de 1995 à 2001 par étapes, grâce au soutien de la Direction de l'EPFL dans le cadre des « *Mesures pour la valorisation de l'enseignement des sciences de base* ». Un travail important, particulièrement sur le plan informatique, a été effectué par Maurice Casaréale, qui a notamment réalisé les dessins de fractales (chap. 11) et les stéréogrammes (chap. 15). Une partie des exercices est inspirée d'archives de séries d'exercices, conçus de 1981 à 1994, laissés par le professeur Renzo Cairoli et son assistant Jean-Claude Evard et rassemblés en 1995-96 par Alessandro Jori. Plusieurs personnes ont participé à la transcription en LaTeX des exercices et à la préparation de la première version de certaines des solutions. Il s'agit en particulier de Madame Erika Gindraux, Riadh Abaza, Maurice Casaréale, Giordano Favi, Phœbe Hoidn et Minka San Millan. Nous remercions toutes ces personnes pour leurs précieuses contributions à la réalisation de cet ouvrage.

Toute richesse diminue quand on en dépense,
excepté le savoir qui croît lorsqu'on le répand.

Al-Ghazzâlî (1058-1111)

Table des matières

Avant-propos **v**

Aide-mémoire et exercices **1**

1 Systèmes linéaires **3**

Aide-mémoire : Matrice associée à un système linéaire, solution générale d'un système, opérations élémentaires sur les lignes, méthode de résolution de Gauss, systèmes homogènes, systèmes inhomogènes. 3

Exercices 5

2 Calcul matriciel **11**

Aide-mémoire : Somme et produit de matrices, transposée d'une matrice, matrices inversibles, opérations matricielles par blocs, matrices diagonales, triangulaires et symétriques, relations avec les systèmes linéaires. 11

Exercices 14

3 Déterminants **23**

Aide-mémoire : Définition, propriétés, développements suivant une ligne ou une colonne, règle de Cramer, calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode des cofacteurs. 23

Exercices 25

4 Transformations de l'espace **31**

Aide-mémoire : L'espace de dimension n, interprétations géométriques, équations paramétriques de droites et de plans, transformations affines et matricielles, translations, homothéties et similitudes, ensemble image, composition de transformations. . 31

Exercices 33

5 Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ **37**

Aide-mémoire : Produit scalaire euclidien, norme et distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwartz, théorème de Pythagore, projections orthogonales sur une droite ou un plan. 37

Exercices 39

6 Espaces vectoriels **43**

Aide-mémoire : Espaces et sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires, familles libres ou liées, bases, notion de dimension, applications aux systèmes linéaires, théorème du rang. 43

Exercices 48

7 Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire **61**

Aide-mémoire : Produits scalaires dans les espaces de dimension finie et infinie, bases orthonormales, théorème de Pythagore généralisé, projection orthogonale, inégalité de Cauchy-Schwartz, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmid, problème de la meilleure approximation, solution d'un système linéaire au sens des moindres carrés, matrices orthogonales, changements de base. 61

Exercices 66

8 Valeurs et vecteurs propres **79**

Aide-mémoire : Définitions et premières propriétés, polynôme caractéristique d'une matrice, diagonalisation d'une matrice, sous-espaces propres, diagonalisation orthogonale des matrices symétriques, diagonalisation en nombres complexes. 79

Exercices 82

9 Transformations linéaires **89**

Aide-mémoire : Applications linéaires, noyau, image et rang d'une application linéaire, transformation de la matrice d'une application linéaire dans un changement de base, composition de transformations linéaires. 89

Exercices 92

10 Résolution de systèmes différentiels **103**

Aide-mémoire : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre, cas où la matrice du système est diagonalisable, recherche d'une solution particulière, exponentielle d'une matrice, solution générale, résolution à l'aide des nombres complexes. 103

Exercices 106

Applications de l'algèbre linéaire 111

11 Utilisation des transformations affines en infographie 113

Les objets fractals, similitudes simples, ensembles auto-semblables, dimension de Hausdorff, un algorithme pour dessiner les ensembles auto-semblables, exemples du tamis de Sierpinski et du tapis de Sierpinski. 113

Exercices 121

12 Cryptographie conventionnelle 125

Chiffrement de César, chiffrement de Hill, calcul matriciel modulo 26, déchiffrement de Hill, décryptage par attaque à texte clair connu. 125

Exercices 135

13 Les codes correcteurs d'erreurs 139

Opérations sur $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, $\mathcal{K}$-espaces vectoriels, codes linéaires, rendement d'un code linéaire, matrice génératrice du code, matrice de contrôle, correction d'un mot reçu comportant une erreur simple, codes de Hamming. 139

Exercices 148

14 Chaînes de Markov 151

Matrice de transition, vecteur d'état, vecteur stationnaire, vecteur des visites, chaînes de Markov en infographie. 151

Exercices 157

15 Stéréogrammes 161

La perspective naturelle, paires stéréoscopiques, dessin d'une paire stéréographique correspondant à une surface, dessin d'un stéréogramme pour une surface d'équation $z = h(x, y)$. 161

Exercices 178

16 Robustesse des réseaux informatiques 181

Graphes, matrice d'adjacence, graphes k-réguliers, connexité, bord, lien entre robustesse et valeurs propres, inégalité de Cheeger-Buser. 181

Exercices 194

Révision 199

17 Exercices de révision 201

Solutions des exercices 211

1 Systèmes linéaires 213

2 Calcul matriciel 219

3 Déterminants 229

4 Transformations de l'espace 235

5 Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ 239

6 Espaces vectoriels 243

7 Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire 255

8 Valeurs et vecteurs propres 269

9 Transformations linéaires 279

10 Résolution de systèmes différentiels 293

11 Utilisation des transformations affines en infographie 299

12 Cryptographie conventionnelle 303

13 Les codes correcteurs d'erreurs 309

14 Chaînes de Markov 313

15 Stéréogrammes 319

16 Robustesse des réseaux informatiques 323

17 Exercices de révision 331

Bibliographie 347

Première partie

Aide-mémoire et exercices

Chapitre 1

Systèmes linéaires

Donnée et solution d'un système linéaire

Un système linéaire est la donnée de m équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Les coefficients a_{ij} et b_i sont des nombres réels (cf. [Anton, p.2] et [Cairoli, p.89]). L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Solution d'un système linéaire. On appelle *solution* du système linéaire ci-dessus toute suite de n nombres $(k_1, \ldots, k_n)$ tels que les m équations sont vérifiées si l'on pose $x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$.

Solution générale d'un système linéaire. L'ensemble de toutes les solutions d'un système linéaire est appelé la *solution générale* du système.

Matrices associées à un système. La *matrice du système* et la *matrice augmentée du système* sont respectivement

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(cf. [Anton, p.4] et [Cairoli, p.93 et p.94]).

Résolution de systèmes linéaires

La méthode d'élimination des inconnues permet de résoudre facilement les systèmes linéaires de petite taille. Pour résoudre un système linéaire dont le nombre d'équations ou d'inconnues est élevé, il est avantageux d'introduire la notion de matrice échelonnée et d'opérer sur les lignes de la matrice augmentée du système comme indiqué ci-dessous dans la méthode de résolution de Gauss (cf. [Anton, p.5] et [Cairoli, p.90 et p.91]).

Matrices échelonnées. Une matrice est *échelonnée* si ses lignes satisfont aux deux conditions suivantes :

(1) Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

(2) L'indice de colonne du premier terme non nul de toute ligne non nulle est supérieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne qui la précède.

Pivot. Le premier coefficient non-nul sur une ligne non-nulle d'une matrice échelonnée est appelé un *pivot* (cf. [Anton, p.8] et [Cairoli, p.95]. *Attention* : la définition de Anton diffère par le fait que le pivot doit être 1).
Une matrice échelonnée non-nulle est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_{1j_1} \cdots} & & & \cdots & a_{1n} \\ & & & & \boxed{a_{2j_2} \cdots} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \mathbb{O} & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \mathbb{O} & & \boxed{a_{rj_r} \cdots} & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Forme échelonnée simplifiée. Une matrice est sous la forme *échelonnée simplifiée* si elle est échelonnée, tous les pivots sont des 1 et tous les autres coefficients de chaque colonne ayant un pivot sont nuls (cf. [Anton, p.8 et p.9] et [Cairoli, p.97 et p.98]).

Opérations élémentaires sur les lignes.

Type 1 : Echanger deux lignes.

Type 2 : Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Type 3 : Multiplier une ligne par un nombre k non nul.

(cf. [Anton, p.5] et [Cairoli, p.96])

Méthode de résolution de Gauss.

(1) Ecrire la matrice augmentée du système.

(2) Réduire, par les opérations du type 1, 2 et 3, la matrice augmentée à la forme échelonnée simplifiée.

(3) Attribuer une valeur arbitraire, appelée *paramètre*, aux inconnues qui n'ont pas de pivot.

(4) Exprimer les autres inconnues en fonction des paramètres.

(cf. [Anton, p.10] et [Cairoli, p.100])

Nombre de solutions d'un système linéaire. S'il y a un pivot dans la dernière colonne de la forme échelonnée (simplifiée) de la matrice augmentée du système, alors ce système n'a pas de solution. Dans le cas contraire, soit toutes les inconnues ont un pivot et alors le système admet une solution unique, soit il y a au-moins une variable sans pivot et alors le système admet une infinité de solutions.

Systèmes homogènes. Un *système homogène* est un système linéaire dont les coefficients du second membre sont nuls (cf. [Anton, p.17] et [Cairoli, p.89]). Un système linéaire qui n'est pas homogène est dit *inhomogène*.

Propriétés des systèmes homogènes. Tout système homogène admet au moins la solution $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Cette solution est appelée *solution nulle* ou *triviale*.
Un système homogène admet une infinité de solutions dans les deux cas suivants :

(1) La solution nulle n'est pas unique.

(2) Le système contient moins d'équations que d'inconnues.

(cf. [Anton, p.17 et p.19] et [Cairoli, p.105])

Exercices

1.1. Donner une interprétation géométrique de l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes sont solution du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

1.2. Trouver la solution générale des équations suivantes :

(a) $4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

(b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 5\,.$

1.3. Indiquer lesquelles de ces matrices sont sous forme échelonnée et lesquelles sont sous forme échelonnée simplifiée :

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Indiquer lesquelles de ces matrices sont sous forme échelonnée et lesquelles sont sous forme échelonnée simplifiée :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5. Réduire les matrices suivantes à la forme échelonnée :

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -2 & 3 & 15 & -10 \\ -3 & 5 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6. Réduire les matrices suivantes à la forme échelonnée :

(a) $\begin{pmatrix} 17 & 7 & -4 \\ 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 17 & 1 & -1 \\ -11 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1.7. Résoudre, par la méthode d'élimination des inconnues, le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & & & & & - & 3x_4 & = & -3\,. \end{array}\right.$$

1.8. Résoudre, par la méthode d'élimination des inconnues, le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1\,. \end{array}\right.$$

1.9. Soit $ax_1 + bx_2 = c$ et $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ deux équations linéaires ayant la même solution générale. Montrer que si $a \neq 0$, alors $\alpha \neq 0$, $b/a = \beta/\alpha$ et $c/a = \gamma/\alpha$.

1.10. (a) Trouver des équations linéaires en les variables x_1 et x_2 dont la solution générale est $x_1 = 6 - 3k$, $x_2 = k$, avec k dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $x_1 = k$, $x_2 = 2 - k/3$, est aussi la solution générale des équations de (a).

1.11. (a) Considérer la courbe $y = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ qui passe par les points (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$. Montrer que la suite de nombres a, b, c est solution du système d'équations linéaires dont la matrice augmentée correspondante est

$$\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 & y_1 + 2x_1^2 \\ x_2^3 & x_2 & 1 & y_2 + 2x_2^2 \\ x_3^3 & x_3 & 1 & y_3 + 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer la cubique $y = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ qui passe par les points $(2, 7)$, $(1, 3)$, $(3, 19)$.

1.12 (*). On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

(a) Trouver deux solutions a et b de la forme $a = (a_1, a_2, 1, 0)$, $b = (b_1, b_2, 0, 1)$.

(b) Vérifier que, pour tous nombres k et ℓ, $k\,a + \ell\,b$ est encore une solution.

(c) Vérifier que toute solution est de la forme $k\,a + \ell\,b$.

1.13 (*). Sachant que par trois points non colinéaires, il passe un cercle et un seul, et que l'équation d'un cercle du plan Oxy est de la forme

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0\,,$$

trouver une équation du cercle qui passe par les points $(1, -3/2)$, $(-1, 1/2)$ et $(3, 1/2)$.

1.14 (*). Trouver la solution générale des systèmes suivants :

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 10x_1 & - & 8x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

1.15. Résoudre, par la méthode de Gauss, les systèmes linéaires suivants :

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 16x_4 & = & 24 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 17x_4 & = & 19 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 12x_4 & = & 17\,. \end{array}\right.$$

1.16. Résoudre, par la méthode de résolution de Gauss, le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = & 3\,. \end{array}\right.$$

1.17. Résoudre simultanément les systèmes

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2\,, \end{array}\right.$$

en échelonnant la matrice des coefficients qu'ils ont en commun, doublement augmentée par les deux seconds membres.

1.18. Trouver la solution générale de chacun des deux systèmes ayant respectivement pour matrices augmentées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.19. Résoudre le système d'équations non linéaires en x, y et z, avec $-\pi/2 < z < \pi/2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x^2 & + & y^2 & - & 2\tan z & = & 3 \\ 2x^2 & - & y^2 & + & \tan z & = & 0 \\ & & y^2 & - & 5\tan z & = & 4\,. \end{array}\right.$$

1.20. Résoudre le système non linéaire suivant pour des angles α, β, γ tels que $0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ 0 \leq \beta \leq 2\pi,\ 0 \leq \gamma < \pi$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\sin(\alpha+\gamma) & - & 6\cos(\beta+\gamma) & + & 5\tan\gamma & = & 8 \\ \sin(\alpha+\gamma) & - & 3\cos(\beta+\gamma) & + & 2\tan\gamma & = & 4 \\ 3\sin(\alpha+\gamma) & - & 6\cos(\beta+\gamma) & - & 3\tan\gamma & = & 9\,. \end{array}\right.$$

1.21. Pour quelles valeurs réelles de a le système suivant a-t-il une infinité de solutions, exactement une solution, aucune solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & - & 2z & = & 4 \\ 3x & - & 4y & - & 9z & = & 5 \\ 4x & - & 7y & + & (a^2-20)z & = & a+6\,. \end{array}\right.$$

1.22. (a) Déterminer quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

possède une solution unique et calculer cette solution pour chacune de ces valeurs de λ.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions pour chacune des autres valeurs de λ.

1.23 (*). Pour quelle(s) valeur(s) de k le système suivant a-t-il des solutions non nulles ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (k+2)x & + & (3k+2)y & + & 5(k+2)z & = & 0 \\ (2k+5)x & + & (8k+5)y & + & 5(2k+5)z & = & 0 \\ x & + & (2k+1)y & + & (k^2+1)z & = & 0 \\ (k+1)x & + & (3k+1)y & + & 5(k+1)z & = & 0\,. \end{array}\right.$$

1.24 (*). (a) Echelonner la matrice augmentée associée au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 3kx_2 & + & x_3 & = & 3k \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & kx_3 & = & k+1\,, \end{array}\right.$$

où k dans $\mathbb{R}$ est un paramètre.

(b) Trouver la solution générale de ce système en fonction du paramètre k, en distinguant différents cas s'il y a lieu de le faire.

1.25 (*). Montrer que tout système linéaire possédant deux solutions distinctes x_1 et x_2 en possède une infinité.

1.26 (*). Est-ce que pour chaque nombre entier $n \geq 0$, on peut trouver un système linéaire dont le nombre de solutions est égal à n ?

CHAPITRE 2

Calcul matriciel

Une matrice A est *de type* $m \times n$ si elle possède m lignes et n colonnes. Le terme qui se trouve à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A est noté $(A)_{ij}$ ou a_{ij} si $A = (a_{ij})$. Si $m = n$, on dit que la matrice est *carrée d'ordre* n.

Opérations matricielles

Addition de matrices. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même type $m \times n$, alors $C = A + B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de type $m \times n$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (cf. [Anton, p.27] et [Cairoli, p.111]).

Multiplication d'une matrice par un nombre. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $m \times n$ et k un nombre. Alors $k \cdot A$ est la matrice définie par $(k \cdot A)_{ij} = k \cdot a_{ij}$. On écrit parfois kA.

Multiplication de matrices. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{jk})$ une matrice de type $n \times p$. Alors $C = A \cdot B$ est la matrice (c_{ik}) de type $m \times p$ définie par

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

(cf. [Anton, p.28] et [Cairoli, p.112]). On écrit parfois $C = AB$.

Propriétés. La multiplication matricielle est associative et distributive à droite et à gauche. De plus :

(1) $A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$ si k est un nombre ;

(2) si A est de type $n \times 1$, alors $k \cdot A = A \cdot (k)$.

En général, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Si $A \cdot B = B \cdot A$, on dit que A et B *commutent* (cf. [Anton, p.38] et [Cairoli, p.113]).

Ecriture matricielle d'un système linéaire. Tout système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ s'écrit sous la forme

$$A \cdot x = b\,,$$

où A est la matrice du système, x est l'*inconnue* et b le *second membre* (cf. [Anton, p.33] et [Cairoli, p.115]).

Transposée d'une matrice. On appelle *transposée* d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $m \times n$ et on note A^T la matrice de type $n \times m$ définie par $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ (cf. [Anton, p.33 et p.34] et [Cairoli, p.118]).

Propriétés de la transposée. La transposée d'une somme est la somme des transposées. La transposée d'un produit est le produit des transposées mais dans l'ordre inverse (cf. [Anton, p.46] et [Cairoli, p.118]).

Opérations matricielles par blocs. Une matrice $A = (a_{ij})$ peut être décomposée en blocs de sous matrices. On peut additionner ou multiplier deux matrices par blocs à condition que les types des blocs permettent l'exécution des opérations utilisées (cf. [Anton, p.30] et [Cairoli, p.116]).

Matrice nulle et matrice identité. On appelle *matrice nulle*, et on note $\mathbb{O}_{m\times n}$ ou $\mathbb{O}$, la matrice de type $m \times n$ dont chaque terme est nul. On appelle *matrice identité* d'ordre n, et on note I_n ou I, la matrice carrée de type $n \times n$ telle que $(I)_{ij} = 1$ si $i = j$ et $(I)_{ij} = 0$ sinon (cf. [Anton, p.40 et p.41] et [Cairoli, p.93]).

Matrices inversibles

Inverse d'une matrice. Soit A une matrice carrée de type $n \times n$. Si on peut trouver une matrice B de même type telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, alors on dit que A est *inversible*. La matrice B ainsi trouvée est unique, on l'appelle *matrice inverse* de A et on la note A^{-1} (cf. [Anton, p.42 et p.43] et [Cairoli, p.119]).

Propriétés de l'inverse. Soit A et B deux matrices de type $n \times n$.

(1) L'inverse d'un produit est le produit des inverses effectué dans l'ordre inverse. L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

(2) Si A est inversible et k est un entier positif, alors la matrice A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

(3) Si A est inversible et k est un nombre non nul, alors la matrice $k \cdot A$ est inversible et $(k \cdot A)^{-1} = 1/k \cdot A^{-1}$.

(4) Si $A \cdot B = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

(5) Si la matrice $A \cdot B$ est inversible, alors A et B sont inversibles.

(cf. [Anton, p.43 à 45] et [Cairoli, p.121 et p.122])

Matrices élémentaires. Une matrice de type $n \times n$ est *élémentaire* si on peut l'obtenir à partir de I_n en effectuant une seule des opérations élémentaires de type 1, 2 ou 3 sur les lignes de I_n (cf. [Anton, p.50] et [Cairoli, p.126]).

Propriétés des matrices élémentaires.

(1) Multiplier à gauche une matrice A par une matrice élémentaire revient à effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A.

(2) Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est une matrice élémentaire.
(cf. [Anton, p.51 et p.52] et [Cairoli, p.127 et p.128])

Théorème fondamental. *Soit A une matrice de type $n \times n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *A est inversible.*
(2) *La seule solution du système $A \cdot x = 0$ est $x = 0$.*
(3) *La forme échelonnée simplifiée de A est I_n.*
(4) *A est égale à un produit de matrices élémentaires.*

(cf. [Anton, p.53])

Calcul de la matrice inverse. Soit A une matrice inversible de type $n \times n$. La matrice augmentée n fois $(A \,\vdots\, I_n)$ admet pour forme échelonnée simplifiée la matrice $\left(I_n \,\vdots\, A^{-1}\right)$ (cf. [Anton, p.54] et [Cairoli, p.120]).

Nature de l'ensemble des solutions d'un système linéaire $A \cdot x = b$. Dans le cas général, il y a trois possibilités :
(1) Le système n'a pas de solution.
(2) Le système a exactement une solution.
(3) Le système a une infinité de solutions.
Dans le cas où la matrice A est carrée et inversible, le système $Ax = b$ a exactement une solution, qui est $x = A^{-1} \cdot b$ (cf. [Anton, p.59]).

Matrices particulières

Matrices diagonales. On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

et on la note $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (cf. [Anton, p.66] et [Cairoli, p.124]).

Propriétés des matrices diagonales. Le produit, l'inverse et la $k^{\text{ème}}$ puissance d'une matrice diagonale sont des matrices diagonales (cf. [Anton, p.67] et [Cairoli, p.124 et p.125]).

Matrices triangulaires. On appelle *matrice triangulaire supérieure* toute matrice carrée de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une *matrice triangulaire inférieure* (cf. [Anton, p.68] et [Cairoli, p.125]).

Propriétés des matrices triangulaires.

(1) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

(2) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.

(cf. [Anton, p.69] et [Cairoli, p.125])

Matrices symétriques. Une matrice A est *symétrique* si $A^T = A$. Si $A = (a_{ij})$, cette égalité s'écrit $a_{ij} = a_{ji}$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Propriété. Si A est une matrice symétrique et inversible, alors A^{-1} est symétrique (cf. [Anton, p.70] et [Cairoli, p.126]).

Exercices

2.1. Effectuer les calculs matriciels suivants :

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 13 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 14 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2.2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les colonnes d'une matrice A de type $m \times n$ et $b_1^T, b_2^T, \ldots, b_n^T$ les lignes d'une matrice B de type $n \times p$. Montrer que

$$AB = a_1 b_1^T + a_2 b_2^T + \cdots + a_n b_n^T\,.$$

2.3. Calculer A^n (n entier positif), lorsque

(a) $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (b) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + B^2 + 2A \cdot B$. Que remarquez-vous ?

2.5. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$.

2.6. Répondre par vrai ou faux, et justifier votre réponse.

(a) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$;

(b) $A^2 = \mathbb{O}_{n\times n} \Rightarrow A = \mathbb{O}_{n\times n}$;

(c) $AA^T = \mathbb{O}_{m\times m} \Rightarrow A = \mathbb{O}_{m\times n}$;

(d) $A^2 = A \Rightarrow A = I$ ou $A = \mathbb{O}_{n\times n}$.

2.7. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix},$$

où A, D, E, H sont des matrices du type $m_1 \times n_1$, $m_2 \times n_2$, $n_1 \times p_1$, $n_2 \times p_2$ respectivement.

(a) Vérifier la règle du produit matriciel par blocs

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}.$$

(b) A l'aide de (a), trouver l'inverse de

$$\begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

(c) Appliquer le résultat obtenu à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Soit K_n la matrice carrée d'ordre n ($n \geq 1$) dont tous les coefficients sont des 2. Montrer que

$$(I_n + K_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{2n+1} K_n \,.$$

2.9. Soit A une matrice carrée, B, C et D des matrices inversibles du même ordre que A telles que

$$B^{-1}(B^T C^T B^{-1})^{-1}(AB)^T = D \,.$$

Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de B, C et D.

2.10 (*). Montrer que si A est inversible, alors $(A+B)^n$ est inversible si et seulement si $\left(I + BA^{-1}\right)^n$ est inversible (n est un entier positif).

2.11. Soit A une matrice carrée.

(a) Montrer que si $A^4 = \mathbb{O}$, alors $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. Dans ce cas, $(I+A)$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

(b) Montrer que si $A^{n+1} = \mathbb{O}$, alors $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$. Dans ce cas, $(I+A)$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

(c) Déduire des questions précédentes l'inverse de la matrice donnée dans l'exercice 2.7(c).

2.12. (a) Soit A une matrice inversible d'ordre m, B une matrice inversible d'ordre n et C une matrice inversible d'ordre p. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & A \\ \mathbb{O} & B & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse en fonction des matrices A, B, et C.

(b) A l'aide de la formule obtenue, calculer l'inverse de la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.13 (*). (a) Soient a et b deux matrices de type $n \times 1$ telles que $a^T b \neq -1$. Montrer que la matrice $A = I_n + a\ b^T$ possède une inverse de la forme $B = I_n + k\,a\ b^T$, où k est un nombre qui reste à déterminer.

(b) En utilisant (a), résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 3\,. \end{array}\right.$$

2.14 (*). Soit $A = (a_{ij})$. En utilisant la définition du produit matriciel, calculer A^k, k un entier positif, lorsque

(a) $a_{ij} = i/j$, $i, j = 1, \ldots, n$;

(b) $a_{ij} = 2^{i+j}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

2.15. Soient A, B et C des matrices carrées de même ordre telles que B est inversible et

$$(ABC)^T B^T (BCB^{-1})^T = I\,.$$

(a) La matrice A est-elle inversible ?

(b) Si oui, exprimer son inverse en fonction de B et C.

2.16. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sont-elles élémentaires ? Si oui, donner leur inverse.

2.17. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, effectuer le produit $E_i A$. Quelle est l'opération élémentaire sur les lignes de A qui donne le même résultat ?

2.18. (a) Effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & e \\ 0 & c & 0 & f & 0 \\ d & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -g/d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -b/e \end{pmatrix}$$

avec $d \neq 0 \neq e$.

(b) Montrer que la matrice 5×5 ci-dessus n'est jamais inversible, quels que soient les nombres réels a, b, c, d, e, f, g et h.

2.19. Comment l'échange de deux lignes d'une matrice peut-il être effectué par un produit matriciel ?

2.20. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 17 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecrire la forme échelonnée simplifiée de A sous forme de produit $E_1E_2\cdots E_nA$, où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des matrices élémentaires.

2.21. Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que

$$A^3 - 2A^2 + 3A + 2I = 0\,.$$

(a) Montrer que la seule solution de l'équation $Ax = 0$ est $x = 0$.

(b) En déduire que A est inversible.

(c) Trouver l'inverse de A.

2.22. (a) Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

en réduisant la matrice augmentée $(A \,\vdots\, I_3)$ à la forme échelonnée simplifiée.

(b) Ecrire A^{-1} sous la forme d'un produit $E_1E_2\cdots E_n$, où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des matrices élémentaires.

2.23. Calculer si possible l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en réduisant la matrice augmentée $(A \,\vdots\, I_3)$ à la forme échelonnée simplifiée.

2.24 (*). (a) Par réduction à la forme échelonnée simplifiée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

doublement augmentée, trouver toutes les matrices X telles que $AX = I_2$.

(b) Quelles sont les matrices Y telles que $YA = I_3$?

2.25. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & b & a \\ b & 6 & b & 6 \\ b & a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice augmentée d'un système linéaire. Pour quelles valeurs de a et b le système a-t-il : (a) une solution unique ; (b) un ensemble de solutions dépendant d'un paramètre ; (c) un ensemble de solutions dépendant de deux paramètres et (d) aucune solution ?

2.26. Soit $Ax = b$ un système linéaire. On suppose qu'il a au moins une solution. Soit x_p une solution fixée de ce système. Montrer que toute solution x du système en question peut s'écrire sous la forme $x = x_p + x_0$, où x_0 est une solution du système homogène $Ax = 0$.

2.27. Trouver tous les nombres réels a, b et c pour lesquels la matrice A suivante est symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a-b+2c & a+b+c \\ 3+a & a-c & a+c \\ c & -2 & 7-b \end{pmatrix}.$$

2.28. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit aussi une matrice symétrique.

2.29 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons a_1, a_2 et a_3, respectivement, la première, deuxième et troisième colonne de A.

(a) Calculer $a_1 + a_2 + a_3$ et en déduire une solution x_p du système

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer $a_1 - 2a_2 + a_3$ et en déduire l'ensemble des solutions du système homogène $Ax = 0$.

(c) En utilisant (a), (b) et l'exercice 2.26, donner toutes les solutions du système

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2.30. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mettre A sous la forme $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure.

2.31 (*). Considérons l'équation matricielle $XA = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Transposer les deux membres de cette équation.

(b) Trouver toutes les solutions de l'équation transposée.

(c) En déduire les solutions de l'équation donnée.

2.32. Soit A et B des matrices carrées de même ordre telles que les matrices $I + A$ et $I + B$ soient inversibles. Montrer que

$$A = (I - B)(I + B)^{-1} \iff B = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Cette transformation est appelée *transformation de Cayley.*

2.33. Considérons la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(t) & f_3(t) \\ 0 & 0 & f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et soit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver des fonctions g_0, g_1, g_2 telles que

$$A(t) = g_0(t)\, I + g_1(t)\, C + g_2(t)\, C^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.34. Une matrice A est dite antisymétrique si $A^T = -A$. Démontrer les assertions suivantes.

(a) Toute matrice symétrique ou antisymétrique est carrée.

(b) Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

2.35 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Donner les matrices $A + A^T$ et $A - A^T$. Que remarquez-vous ?

(b) En déduire que la matrice A est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

(c) Peut-on généraliser le résultat de (b) à toute matrice carrée ? Justifier votre réponse.

2.36. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -15 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Effectuer $A^T A$ et en déduire A^{-1}.

2.37. Répondre par vrai ou faux, et justifier votre réponse.

(a) A est diagonale $\Rightarrow AB = BA$;

(b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

(c) $AB = BA \Rightarrow AB^T = B^T A$;

(d) $AB = BA$ et A^{-1} existe $\Rightarrow A^{-1}B = BA^{-1}$.

2.38 (*). Considérons deux systèmes linéaires $Ax = b_1$ et $Ax = b_2$ ayant la même matrice A. Montrer que si le premier système possède au moins une solution et si le second n'en possède aucune, alors le système $Ax = b_1 + b_2$ n'en possède aucune non plus.

2.39 (*). Soit $A = (a_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ deux matrices de type $n \times n$. Vérifier que si D et $AD - DA$ sont diagonales, alors A commute avec D.

2.40 (*). Soit M une matrice de type $n \times n$ et

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & I_{n-1} \\ \hline \mathbb{O}_{1\times 1} & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \end{array} \right).$$

(a) En écrivant

$$M = \left(\begin{array}{c|c} U_{1\times 1} & V_{1\times(n-1)} \\ \hline W_{(n-1)\times 1} & P_{(n-1)\times(n-1)} \end{array} \right),$$

effectuer le produit par blocs $A \cdot M$ après avoir vérifié que les types des blocs permettent l'exécution des opérations nécessaires.

(b) En écrivant

$$M = \left(\begin{array}{ccc} X_{(n-1)\times(n-1)} & \vdots & Y_{(n-1)\times 1} \\ --- & -- & --- \\ Z_{1\times(n-1)} & \vdots & T_{1\times 1} \end{array} \right),$$

effectuer le produit par blocs $M \cdot A$ et vérifier que les types des blocs permettent l'exécution des opérations nécessaires.

(c) Trouver des conditions sur les matrices U, V, W, P, X, Y, Z, et T pour que $A \cdot M = M \cdot A$.

(d) Calculer A^k, $k = 2, \ldots, n$.

(e) Exprimer l'ensemble des matrices qui commutent avec A en fonction des matrices A^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.41 (*). Soit P une matrice carrée d'ordre n ayant un et un seul 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne, les autres coefficients étant nuls.

(a) Résoudre le système $Px = 0$.

(b) Montrer que P est inversible.

(c) Calculer $P \cdot P^T$.

(d) Déterminer P^{-1}.

2.42 (*). Soit A une matrice de type $n \times m$ et B une matrice de type $m \times n$.

(a) Montrer que si la seule solution du système $(I_n - AB)x = 0$ est $x = 0$, alors le système $(I_m - BA)x = 0$ n'admet que la solution $x = 0$.

(b) La réciproque de (a) est-elle vraie ?

(c) Donner un exemple de matrices A et B qui ne vérifient pas la condition de (a).

2.43. Etant donnée une matrice $A = (a_{ij})$ de type $n \times n$, on définit la trace de A par

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Soit A et B deux matrices de type $n \times n$. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A \cdot B) = \mathrm{Tr}\,(B \cdot A)$.

Chapitre 3

Déterminants

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de type $n \times n$, on note $A^{i,j}$ la matrice de type $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Définition. On appelle *déterminant* de A et on note $\det A$, $|A|$, ou $\det(a_1, \ldots, a_n)$ si $a_1, \ldots, a_n$ sont les colonnes de A, le nombre donné par la formule récursive

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \, |A^{i,1}| \ ;$$

dans cette formule, le déterminant d'une matrice $A = (a)$ de type 1×1 est posé égal à a (cf. [Anton, p.83] et [Cairoli, p.138]).

Déterminants de matrices particulières. Si A est une matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure ou diagonale, alors son déterminant est égal au produit de ses coefficients diagonaux (cf. [Anton, p.87]).

Propriétés du déterminant.

(1) Multiplier par k une seule ligne, ou une seule colonne, d'une matrice a pour effet de multiplier le déterminant par k.

(2) Echanger deux lignes, ou deux colonnes, d'une matrice change le signe du déterminant.

(3) Ajouter à une ligne d'une matrice un multiple d'une autre ligne, ou à une colonne un multiple d'une autre colonne, ne change pas le déterminant.

(4) $\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + a'_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$
$= \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.
En général $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

(5) Transposer une matrice ne change pas le déterminant.

(6) Le déterminant d'un produit est le produit des déterminants.

(cf. [Anton, p.86 à p.95] et [Cairoli, p.139 et p.140])

Cas particuliers. Si la matrice A possède une colonne ou une ligne nulle, ou si elle a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, alors son déterminant est nul (cf. [Anton, p.89] et [Cairoli, p.140]).

Déterminant d'une matrice élémentaire. Le déterminant d'une matrice élémentaire obtenue en effectuant une opération élémentaire de type 1, 2 ou 3 sur les lignes de la matrice identité est respectivement -1, 1 et k.

Théorème. *Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Si A est inversible, alors*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\,.$$

(cf. [Anton, p.96] et [Cairoli, p.141])

Formule de Cramer. On considère le système linéaire $A \cdot x = b$, où la matrice $A = (a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n)$ est telle que $|A| \neq 0$. Les n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ sont données par

$$x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{|A|}$$

(cf. [Anton, p.109] et [Cairoli, p.148]).

Calcul de A^{-1} par la méthode des cofacteurs. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $n \times n$ telle que $|A| \neq 0$. On appelle *mineur* de a_{ij} le déterminant de $A^{i,j}$, *cofacteur* de a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}|A^{i,j}|$, *matrice des cofacteurs* de A la matrice $B = (b_{ij})$, où b_{ij} est le cofacteur de a_{ij}, et *adjointe* de A la matrice B^T. On note $\operatorname{adj} A$ l'adjointe de A.

La matrice inverse de A s'écrit sous la forme

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A$$

(cf. [Anton, p.106] et [Cairoli, p.149]).

Exercices

3.1. (a) En utilisant la définition du déterminant, calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 20 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(b) Soit A une matrice de type $n \times n$. Si $|A| = 3$, que vaut $|5A|$?

3.2. Calculer

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 11 & -4 & -2 & 7 & 6 & -3 \\ 43 & 4 & 0 & 0 & 17 & -8 \\ 28 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 18 & 5 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.3. Etant donné que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5\,,$$

calculer

(a) $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5g & 5h & 5i \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 5a+2d & d & g \\ 5b+2e & e & h \\ 5c+2f & f & i \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -a & d & g-4d \\ -b & e & h-4e \\ -c & f & i-4f \end{vmatrix}$.

3.4. En utilisant les propriétés des déterminants, trouver la valeur de $|A|+6|B|$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -18 & -6 & 12 & 41 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

3.5. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & 15 \\ 2 & 2 & 5 & 25 \\ 1 & 5 & 3 & 17 \end{vmatrix}$$

est nul (observer que 117, 135, 225 et 153 sont respectivement des multiples de 13, 15, 25 et 17).

3.6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 14 \\ 10 & 2 & 13 & 35 \\ 6 & 5 & 8 & 19 \\ 4 & 3 & -1 & 24 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer $|A|$.

3.7. (a) Réduire en un seul déterminant 4×4 l'expression $4A - B - 5C + 6D$, où

$$A = \begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & -7 \\ -15 & -3 & 91 & 4 \\ -20 & 0 & -1 & -6 \\ -8 & -6 & 12 & 9 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & -23 \\ -15 & -3 & 91 & -2 \\ -20 & 0 & -1 & 4 \\ -8 & -6 & 12 & -5 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} -7 & 21 & -5 & 16 \\ 3 & -3 & 18 & 91 \\ 4 & 0 & -28 & -1 \\ -2 & -6 & 41 & 12 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 3 & 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

(b) Trouver la valeur de $4A - B - 5C + 6D$.

3.8. Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n. Sachant que

$$|A| = |B^3|, \qquad |C| = |B^{-1}| \quad \text{et} \quad |ABC| = 8,$$

déterminer les valeurs de $|A|$, $|B|$ et $|C|$.

3.9 (*). Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(ce déterminant est appelé « déterminant de Vandermonde » et cette égalité se généralise à une matrice carrée d'ordre n).

3.10 (*). (a) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des matrices de type $n \times 1$ et k, ℓ dans $\mathbb{R}$. Posons $a = a_1 + \cdots + a_n$ et considérons les deux matrices

$$A = (a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n) \quad \text{et} \quad B = (ka + \ell a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, ka + \ell a_n)\,.$$

Additionner à la première colonne du déterminant de B toutes les autres colonnes, puis montrer, sans développer les déterminants, que

$$|B| = (nk + \ell)\ell^{n-1}|A|\,.$$

(b) En appliquant la formule ci-dessus, calculer $|B|$ en fonction des nombres p et q, lorsque

$$B = \begin{pmatrix} p & 2q & 2q & 2q & p \\ p & p & 2q & 2q & 2q \\ 2q & p & p & 2q & 2q \\ 2q & 2q & p & p & 2q \\ 2q & 2q & 2q & p & p \end{pmatrix}, \qquad \text{en utilisant } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.11. Calculer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}.$$

3.12. Résoudre l'équation suivante, dont l'inconnue est x :

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 5 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$$

3.13. (a) Soit A une matrice $n \times n$ inversible et k, ℓ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|kI_n + \ell A^{-1}| = \frac{|kA + \ell I_n|}{|A|}\,.$$

(b) A l'aide de la formule ci-dessus, calculer $|I_4 + A^{-1}|$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.14. Utiliser la formule de Cramer pour résoudre le système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7/2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 73/2 \\ 79 \end{pmatrix}.$$

3.15. Utiliser la formule de Cramer pour résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & x_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

3.16. Calculer l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode des cofacteurs. Donner chaque fois la matrice des cofacteurs.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{où} \;\; ad - bc \neq 0\,, \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.17. Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

3.18. Calculer

$$D_n = \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}^{n}.$$

3.19 (*). Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1+2a & 2a & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 2 & 2+3a & 3a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 & n-1+na \end{pmatrix}.$$

3.20 (*). Soit

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (n \text{ lignes et } n \text{ colonnes})\,.$$

Montrer que $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$ $(n \geq 3)$ et en déduire la valeur de D_n pour tout n.

3.21. Soit A une matrice carrée d'ordre m, B une matrice de type $m \times n$ et C une matrice de type $n \times m$. Supposons que $m > n$ et que $A = BC$. Démontrer alors que $\det(A) = 0$.

3.22. Considérons les matrices-colonnes

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & b_n \\ a_2 & a_2b_2+1 & a_2b_3 & \cdots & \cdots & a_2b_n \\ a_3 & a_3b_2 & a_3b_3+1 & \cdots & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_n & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_{n-1} & a_nb_n+1 \end{vmatrix}.$$

(b) Calculer $|I_n + ab^T|$ en appliquant d'abord la propriété d'additivité par rapport à la première colonne et en utilisant le résultat de (a).

Chapitre 4

Transformations de l'espace

L'espace $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des matrices-colonnes x de type $n \times 1$. Par commodité, on note parfois $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (cf. [Anton, p.167]).

Représentations géométriques. Si l'espace physique est muni d'un système de coordonnées d'origine O, alors chaque x dans $\mathbb{R}^n$ a deux interprétations :

– le point P de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$;

– le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(cf. [Anton, p.168]).

Interprétation géométrique des opérations dans $\mathbb{R}^n$. Soit x et y dans $\mathbb{R}^n$ et k un nombre. La somme $x + y$ et le produit kx peuvent s'interpréter respectivement comme la somme et le produit par k des vecteurs d'origines O correspondants.

Parallélisme dans $\mathbb{R}^n$. Deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ sont *parallèles* si l'un est multiple de l'autre.

Propriété. Pour $n \geq 2$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont parallèles si et seulement si le déterminant de chacune des matrices

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

est nul.

Droites et plans dans $\mathbb{R}^n$

Définition. Soit a, b et c dans $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $b \neq 0$, la *droite passant* par a et de *direction* b est l'ensemble des x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $x = a + k \cdot b$, où k est un nombre.

(2) Si b et c ne sont pas parallèles, le *plan passant* par a et de *directions* b et c est l'ensemble des x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $x = a + k \cdot b + \ell \cdot c$, où k et ℓ sont des nombres.

(cf. [Anton, p.160])

Equations paramétriques. Les *équations paramétriques* de la droite $x = a + k \cdot b$ et du plan $x = a + k \cdot b + \ell \cdot c$ sont respectivement

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + kb_1 \\ x_2 = a_2 + kb_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = a_n + kb_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + kb_1 + \ell c_1 \\ x_2 = a_2 + kb_2 + \ell c_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = a_n + kb_n + \ell c_n \end{cases}$$

(cf. [Anton, p.159] et [Cairoli, p.38 et p.39]).

Equation cartésienne d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. C'est une équation de la forme $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = \ell$, où k_1, k_2 et k_3 sont des nombres non tous nuls et ℓ est un nombre quelconque. L'ensemble des solutions de cette équation est un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Transformations matricielles et affines

La *transformation matricielle* associée à une matrice A de type $m \times n$ est l'application $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $T(x) = A \cdot x$ (cf. [Anton, p.182]. *Attention* : cette référence utilise le terme transformation linéaire). La *transformation affine* associée à une matrice A de type $m \times n$ et à b dans $\mathbb{R}^m$ est l'application $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $T(x) = A \cdot x + b$.

Cas particuliers. Dans le cas $m = n$,

(1) la *translation* de direction b est la transformation affine associée à I_n et b ;

(2) l'*homothétie* de rapport k est la transformation matricielle associée à $k \cdot I_n$; c'est une *contraction* de rapport k si $0 \leq k < 1$ et une *dilatation* de rapport k si $k > 1$ (cf. [Anton, p.191]) ;

(3) une *similitude simple* est une transformation affine associée à $k \cdot I_n$ et b.

Ensemble image. Soit T une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. L'*image* d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ par T est l'ensemble des y dans $\mathbb{R}^m$ de la forme $y = T(x)$, avec x dans E. Cet ensemble est noté $T(E)$ (cf. [Anton, p.181] et [Cairoli, p.158]).

Composition de transformations. La composée des transformations $T_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $T_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est la transformation notée $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et définie par $T_2 \circ T_1(x) = T_2\big(T_1(x)\big)$. La composée de deux transformations affines est une transformation affine (cf. [Anton, p.192] et [Cairoli, p.159]).

Transformations injectives et surjectives. Une transformation $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est *injective* si la relation $T(x) = T(y)$ entraîne $x = y$. Elle est *surjective* si pour tout y dans $\mathbb{R}^m$, il existe au moins un x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $T(x) = y$, autrement dit, si $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ (cf. [Anton, p.200] et [Cairoli, p.159]).

Théorème. *Soit A une matrice de type $n \times n$ et T la transformation matricielle associée à A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *A est inversible ;*
(2) *T est surjective ;*
(3) *T est injective ;*
(4) *Le système $A \cdot x = b$ admet une solution pour tout b dans $\mathbb{R}^n$.*

(cf. [Anton, p.201])

Exercices

4.1. Pour quelle(s) valeur(s) de k les éléments

$$x = (1 - k^2, 2 - k^2, 4 - k^2) \qquad \text{et} \qquad y = (6, 4, 0)$$

de $\mathbb{R}^3$ sont-ils parallèles ?

4.2. (a) Donner les équations paramétriques du plan $\mathbf{p}_1$ dans $\mathbb{R}^3$ dont l'équation cartésienne est $2x_1 - 5x_2 = -4$.

(b) Donner l'équation cartésienne du plan $\mathbf{p}_2$ de directions $\big((1, 1, 2), (-1, 3, 3)\big)$ passant par $(0, 1, 0)$.

(c) A quelles conditions doit satisfaire $x = (x_1, x_2, x_3)$ pour que x appartienne à la droite $\mathbf{d}$ de direction $(2, 0, 3)$ passant par $(-2, 1, 2)$.

(d) Trouver l'intersection du plan $\mathbf{p}$ d'équation cartésienne $x_1 - 3x_3 = 2$ et de la droite $\mathbf{d}$ de direction $(3, 2, 2)$ passant par $(2, 0, 5)$.

4.3. Soit $\mathbf{p}_1$ le plan de directions $\big((-3, 1, 2), (4, 0, -8)\big)$ passant par $(1, 1, 1)$ et $\mathbf{p}_2$ le plan de directions $\big(u = (1, 1, -6), v = (-7, 1, 10)\big)$ passant par $(0, 0, 0)$.

(a) Trouver l'intersection des plans $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$.

(b) Peut-on exprimer les équations de $\mathbf{p}_1$ en fonction des vecteurs u et v ? Justifier votre réponse.

(c) De la réponse à (b), peut-on déduire celle de (a) ?

4.4. Etant donnés deux éléments non parallèles a et b de $\mathbb{R}^n$, interpréter géométriquement l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ qui satisfont l'égalité

$$x = k \cdot a + \ell \cdot b$$

lorsque :

(a) $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq \ell \leq 1$;

(b) $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ et $k + \ell = 1$;

(c) $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ et $k + \ell \leq 1$;

(d) $0 \leq k + \ell \leq 1$.

4.5. Représenter géométriquement les trois droites

$$\mathbf{d}_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d}_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{d}_3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

k dans $\mathbb{R}$, ainsi que leur image par la transformation $T(x) = A \cdot x + b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.6. Calculer l'image du plan de $\mathbb{R}^3$, de directions $\big((1,1,-8),(2,2,-1)\big)$ et passant par $(3,0,5)$, par la transformation $T(x) = A \cdot x + b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 20 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \\ -4 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Donner une interprétation géométrique de cette image.

4.7. Sachant que le triangle de sommets $a = (2,2)$, $a+b = (1,2)$ et $a+c = (2,1)$ est envoyé par une transformation affine T sur le triangle de sommets respectifs $(4,13)$, $(1,15)$ et $(8,8)$, déterminer T.

(*Indication* : Supposer que $T(x) = Ax + d$. Observer que $T(a+b) - T(a) = A \cdot b$ et $T(a+c) - T(a) = A \cdot c$. En déduire la valeur de A, puis celle de d.)

4.8. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une transformation affine. Montrer que T est entièrement déterminée par ses valeurs en a, $a+b$ et $a+c$, où $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ et $c = (c_1, c_2)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $\det((b \,\vdots\, c)) \neq 0$.
(*Indication* : Supposer que $T(x) = A \cdot x + d$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} ;$$

montrer ensuite que la matrice $y = \big(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, d_1, d_2\big)$ est solution d'un système $B \cdot y = v$, où B est de type 6×6. Vérifier enfin que $\det(B) \neq 0$.)

4.9 (*). Soit $\mathbf{p}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_2+3x_3=2$ et $\mathbf{d}$ la droite de direction $(4,3,2)$ passant par $(3,0,7)$.

(a) Trouver, en fonction de k dans $\mathbb{R}$, l'image de $\mathbf{p}$ par la transformation $T_k(x)=A_k\cdot x+b$, où

$$A_k=\begin{pmatrix} k & 0 & 1\\ 0 & k & 0\\ 1 & 0 & k\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

et en donner une interprétation géométrique.

(b) Trouver l'ensemble des k tels que $T_k(\mathbf{p})\cap T_k(\mathbf{d})=\emptyset$.

4.10 (*). Soit H l'hyperplan formé de l'ensemble des $(x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $x_1+\cdots+x_n=0$. Discuter, en fonction du paramètre k dans $\mathbb{R}$, l'interprétation géométrique de l'image de H par la transformation $T_k(x)=A_k\cdot x+b_k$, où

$$A_k=\begin{pmatrix} 1 & k & \cdots & k\\ k & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & k\\ k & \cdots & k & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b_k=\begin{pmatrix}k\\k\\ \vdots\\ k\end{pmatrix}.$$

4.11. Dans $\mathbb{R}^2$, on se donne la contraction T_1 de rapport $1/2$ et les similitudes simples

$$T_2(x)=\frac{1}{2}\,x+\left(\frac{1}{2}\,,0\right) \qquad \text{et} \qquad T_3(x)=\frac{1}{2}\,x+\left(\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\right).$$

Déterminer l'image du triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1/2,1)$ par chacune des transformations T_i, $i=1,2,3$.

4.12 (*). Soit $T_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la transformation définie par

$$T_1(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2,2x_1+x_2)\,,$$

$T_2,T_3:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ les transformations définies par

$$\begin{aligned} T_2(x_1,x_2,x_3) &= \left(\frac{1}{2}\,x_1+\frac{1}{2}\,x_2,-x_1-x_2+x_3\right),\\ T_3(x_1,x_2,x_3) &= T_2(x_1,x_2,x_3)+(1,1). \end{aligned}$$

(a) Déterminer les matrices A_1, A_2, R_1 et R_2, respectivement, des transformations matricielles T_1, T_2, $T_1\circ T_2$ et $T_2\circ T_1$.

(b) Peut-on exprimer les matrices R_1 et R_2 en fonction des matrices A_1 et A_2 ?

(c) En déduire les matrices des transformations affines $T_3\circ T_1$ et $T_1\circ T_3$.

4.13. Indiquer lesquelles des transformations T_1, T_2, $T_1\circ T_2$, $T_2\circ T_1$ et T_3, de l'exercice 4.12, sont injectives ? Lesquelles sont surjectives ?

4.14. (a) Calculer $T_2 \circ T_1$, où T_1 et T_2 sont les deux transformations affines définies par

$$T_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2(y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que la transformation $T_2 \circ T_1$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, est surjective.

4.15 (*). Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k dans $\mathbb{R}$, la transformation matricielle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ associée à la matrice A_k de l'exercice 4.10 est-elle surjective ? injective ?

Chapitre 5

Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$

Définition et propriétés

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On appelle *produit scalaire euclidien* de a et b et on note $a \cdot b$ le nombre

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \,.$$

Puisque a et b sont des matrices de type $n \times 1$, on admet que le produit scalaire $a \cdot b$ est égal au produit matriciel $b^T \cdot a$ (cf. [Anton, p.169] et [Cairoli, p.50]).

Propriétés du produit scalaire. Le produit scalaire est commutatif et distributif par rapport à l'addition. De plus

1) $(k \cdot a) \cdot b = k \cdot (a \cdot b)$ si k est un nombre ;

2) $a \cdot a \geq 0$ et $a \cdot a = 0$ si et seulement si $a = 0$.

(cf. [Anton, p.170] et [Cairoli, p.49])

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. On appelle *norme euclidienne* de $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et on note $\|a\|$ le nombre

$$\|a\| = (a \cdot a)^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

(cf. [Anton, p.170] et [Cairoli, p.47]). On appelle *distance euclidienne* entre deux éléments a et b de $\mathbb{R}^n$ et on note $d(a, b)$ le nombre $d(a, b) = \|a - b\|$ (cf. [Anton, p.171]).

Interprétation géométrique. La norme et la distance dans $\mathbb{R}^n$ s'interprètent respectivement comme la longueur de vecteurs et la distance entre points de l'espace géométrique (cf. [Anton, p.128 et p.129]).

Formule géométrique pour le produit scalaire. Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$ et θ l'angle entre les vecteurs géométriques qui représentent a et b. Alors

$$a \cdot b = \|a\| \, \|b\| \cos \theta$$

(cf. [Anton, p.133] et [Cairoli, p.48]).

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, alors $|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$. Autrement dit $|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)^{1/2} \left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right)^{1/2}$ (cf. [Anton, p.171]).

Orthogonalité. Deux éléments a et b de $\mathbb{R}^n$ sont *orthogonaux* si $a \cdot b = 0$. L'angle entre les vecteurs qui représentent deux éléments orthogonaux est $\pi/2 + k\pi$, où k est un entier relatif (cf. [Anton, p.174] et [Cairoli, p.48]).

Théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$. *Si a et b dans $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux, alors* $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

(cf. [Anton, p.175])

Produit scalaire en fonction de la norme. Le produit scalaire de a et b dans $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$a \cdot b = \frac{1}{4} \left(\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2\right)$$

(cf. [Anton, p.174]).

Relation entre produit matriciel et produit scalaire. Le produit de deux matrices A et B de types respectifs $m \times n$ et $n \times p$ s'exprime en fonction des produits scalaires des lignes $\ell_1^T, \ldots, \ell_m^T$ de A et des colonnes $c_1, \ldots, c_p$ de B comme suit :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \ell_1^T \cdot c_1 & \cdots & \ell_1^T \cdot c_p \\ \vdots & & \vdots \\ \ell_m^T \cdot c_1 & \cdots & \ell_m^T \cdot c_p \end{pmatrix}$$

(cf. [Anton, p.177]).

Projections orthogonales

Définition. Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$. La *projection orthogonale* de b sur a est l'élément de $\mathbb{R}^n$ parallèle à a, noté $\operatorname{proj}_a b$, et tel que $b - \operatorname{proj}_a b$ est orthogonal à a.

Transformation matricielle associée à une projection orthogonale. Si a est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout élément b de $\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{proj}_a b = \frac{(b \cdot a)}{\|a\|^2} \cdot a \,.$$

De plus, l'application $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $T(x) = \operatorname{proj}_a x$ est la transformation matricielle associée à la matrice $A = (1/\|a\|^2)\, a \cdot a^T$ (cf. [Anton, p.136 et p.187] pour des cas particuliers et [Cairoli, p.48]).

Projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{p}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ et v dans $\mathbb{R}^3$. La *projection orthogonale* de v sur le plan $\mathbf{p}$ est l'élément de $\mathbf{p}$, noté $\operatorname{proj}_{\mathbf{p}} v$, tel que $v - \operatorname{proj}_{\mathbf{p}} v$ est parallèle à $n = (a, b, c)$, le vecteur normal au plan.

Transformation affine associée à une projection orthogonale sur un plan. Soit $\mathbf{p}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ et n le vecteur normal au plan. L'application $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x) = \operatorname{proj}_{\mathbf{p}} x$ est la transformation affine $T(x) = A \cdot x + f$, associée à la matrice $A = I_3 - (1/\|n\|^2)\, n \cdot n^T$ et à $f = (d/\|n\|^2) \cdot n$ (cf. [Anton, p.187]).

Exercices

5.1. Etant donné u dans $\mathbb{R}^n$, interpréter géométriquement l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient l'égalité $\|u + x\|^2 + \|u - x\|^2 = 4\|u\|^2$.

5.2. Soit u et v dans $\mathbb{R}^2$ et $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformation qui associe à x dans $\mathbb{R}^2$ l'élément $(x \cdot u, x \cdot v)$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que T est une transformation matricielle. A quelle condition est-elle injective ?

5.3. (Inégalités triangulaires) Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $d(a, b)$ la distance euclidienne entre a et b. Etablir les inégalités suivantes :

(a) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;

(b) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

5.4. Soit $\mathbf{d}$ une droite dans $\mathbb{R}^2$ et $T_{\mathbf{d}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformation qui associe à x dans $\mathbb{R}^2$ l'élément symétrique de x par rapport à $\mathbf{d}$.

(a) Si $\mathbf{d}$ passe par l'origine et est de pente $\tan(\theta/2)$, montrer que $T_{\mathbf{d}}$ est une transformation matricielle et que cette transformation est injective.

(b) Si la droite $\mathbf{d}$ est de pente $\tan(\theta/2)$ mais ne passe pas par l'origine, la transformation $T_{\mathbf{d}}$ reste-t-elle une transformation matricielle ? Est-elle une transformation affine ?

5.5. Soit u et v deux matrices de type $n \times 1$ et A et B deux matrices de type $n \times n$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(v^T B^T A u\right)^2 \leq (u^T A^T A u)(v^T B^T B v)\,.$$

5.6. Pour quelles valeurs de k les éléments u et v suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils orthogonaux ?

(a) $u = (1, 3, 1)$, $v = (2, 1, k)$;

(b) $u = (2, 1, 0)$, $v = (2, -4, k)$;

(c) $u = (k, -2, 1)$, $v = (k, 1, 1)$;

(d) $u = (k, k, 6)$, $v = (k, 4, 1)$.

5.7. Soit u et v des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $d(u, v) = \|u - v\|$ la distance euclidienne entre u et v.

(a) Montrer que si $\|u\| = \|v\|$, alors $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux.

(b) En déduire que, pour tous u et v non nuls, $u/\|u\| + v/\|v\|$ est orthogonal à $u/\|u\| - v/\|v\|$.

5.8. (Théorème de Pythagore) Montrer que si a et b dans $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux, alors
$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$
Application. Montrer que si a et b dans $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux et tels que $\|a\| = 3$ et $\|b\| = 4$, alors $d(a\ , b) = 5$.

5.9. (Théorème de Pythagore généralisé) Soit $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des éléments deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. Etablir l'identité suivante :
$$\left\|\sum_{i=1}^{m} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|^2 .$$
Application. Soit $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ non tous nuls ayant pour somme le vecteur nul. Montrer qu'ils ne peuvent pas être deux à deux orthogonaux.

5.10 (*). Soit $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des nombres. Démontrer l'inégalité
$$\left(\sum_{i=1}^{n} i k_i\right)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{i=1}^{n} k_i^2 .$$
Dans quel cas y a-t-il égalité ?

5.11 (*). A l'aide du théorème fondamental, montrer que si A est une matrice antisymétrique, alors $I + A$ est une matrice inversible.

5.12. (Projection orthogonale sur un vecteur) Soit $a \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la transformation définie par $T(x) = \mathrm{proj}_a\, x$. Montrer que $T(x) = Ax$, où $A = (1/\|a\|^2)\, a \cdot a^T$.
Application. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $a = (1, \ldots, 1)$.

5.13. Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$ avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|b - xa\|$ admet un minimum en $x_0 = (1/\|a\|^2)\, a \cdot b$.

5.14 (*)**.** (Projection orthogonale sur un plan) Soit $\mathbf{p}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

(a) Ecrire la transformation $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x) = \operatorname{proj}_{\mathbf{p}} x$ en fonction des coordonnées de x.

(b) La transformation T est-elle une transformation matricielle ? Si oui, donner sa matrice.

(c) La projection orthogonale sur le plan $\mathbf{p}'$ d'équation $x + y + z = 1$ est-elle une transformation matricielle ? Justifier votre réponse.

5.15 (*)**.** Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation matricielle associée à la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, $\big\|T(x)\big\| = \|x\|$.

(b) En déduire que $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer l'ensemble des x dans $\mathbb{R}^3$ tels que $T(x) = x$ et donner l'interprétation géométrique de cet ensemble.

Chapitre 6

Espaces vectoriels

Un *espace vectoriel* est un ensemble non vide V muni de deux opérations, appelées *addition* et *multiplication par un scalaire*, qui vérifient les huit propriétés suivantes.

Axiomes des espaces vectoriels

(1) L'addition est commutative.
(2) L'addition est associative.
(3) Il existe dans V un élément appelé *vecteur nul* et noté 0 tel que $0 + u = u$, pour tout u dans V.
(4) Pour chaque u dans V, il existe un élément dans V, appelé *opposé* de u et noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0$.
(5) Pour tous u et v dans V et tout nombre k, $k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v$.
(6) Pour tous nombres k, ℓ et tout u dans V, $(k + \ell) \cdot u = k \cdot u + \ell \cdot u$.
(7) Pour tous nombres k et ℓ et tout u dans V, $(k\ell) \cdot u = k \cdot (\ell \cdot u)$.
(8) Pour tout u dans V, $1 \cdot u = u$.

(cf. [Anton, p.215 et p.216] et [Cairoli, p.11])

Théorème. *Soit V un espace vectoriel. Pour tout nombre k et tout u dans V, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(a) $0 \cdot u = 0$ *;*
(b) $k \cdot 0 = 0$ *;*
(c) *Si $k \cdot u = 0$, alors $k = 0$ ou $u = 0$;*
(d) $(-1) \cdot u = -u$ *;*
(e) $(-k) \cdot u = k \cdot (-u) = -(k \cdot u)$*.*

(cf. [Anton, p.220] et [Cairoli, p.11 et p.12])

Sous-espaces vectoriels

Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. Si, muni des opérations de V, W est un espace vectoriel, alors on dit que W est un *sous-espace vectoriel* de V (cf. [Anton, p.222] et [Cairoli, p.16]).

Pour vérifier qu'un sous-ensemble W de V est un sous-espace vectoriel, on dispose de deux méthodes.

Méthode 1. Contrôler les trois propriétés suivantes :

(1) W n'est pas vide.

(2) Si u et v sont dans W, alors $u + v$ est dans W.

(3) Si u est dans W et k est un nombre, alors $k \cdot u$ est dans W.

(cf. [Anton, p.222])

Méthode 2. Contrôler les deux propriétés suivantes :

(1) 0 appartient à W.

(2) Si u et v sont dans W et k est un nombre, alors $u + k \cdot v$ est dans W.

(cf. [Cairoli, p.17])

Définition. Soit V un espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs dans V. Tout vecteur de la forme $k_1 \cdot u_1 + \cdots + k_n \cdot u_n$, où $k_1, \ldots, k_n$ sont des nombres, est appelé une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est noté $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_n)$ (cf. [Anton, p.226] et [Cairoli, p.15]).

Théorème. *L'ensemble* $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_n)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* V *(au sens de l'inclusion) qui contient* $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

(cf. [Anton, p.227] et [Cairoli, p.17])

Sous-espace engendré. L'ensemble $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_n)$ est appelé le sous-espace *engendré par* $u_1, \ldots, u_n$ (cf. [Anton, p.228] et [Cairoli, p.17]).

Somme et intersection de deux sous-espaces vectoriels

La *somme* de deux sous-espaces vectoriels W et W' d'un espace vectoriel V est l'ensemble, noté $W + W'$, des vecteurs de la forme $w + w'$, où w est dans W et w' dans W' (cf. [Cairoli, p.17]).

Proposition. La somme $W+W'$ et l'intersection $W\cap W'$ de deux sous-espaces vectoriels W et W' d'un espace vectoriel V sont des sous-espaces vectoriels de V (cf. [Cairoli, p.17]).

Dépendance et indépendance linéaire

Des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ d'un espace vectoriel sont *linéairement indépendants* si l'égalité $k_1 \cdot u_1 + \cdots + k_n \cdot u_n = 0$ entraîne que les nombres $k_1, \ldots, k_n$ sont tous nuls. Dans ce cas, on dit que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est *libre*.

Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont *linéairement dépendants* s'il existe des nombres non tous nuls $k_1, \ldots, k_n$ tels que $k_1 \cdot u_1 + \cdots + k_n \cdot u_n = 0$. Dans ce cas on dit que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est *liée* (cf. [Anton, p.232] et [Cairoli, p.20]).

Caractérisation de la dépendance et de l'indépendance linéaire. La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs u_i est combinaison linéaire des autres vecteurs u_j, $j \neq i$ (cf. [Anton, p.234] et [Cairoli, p.21]).

La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre si et seulement si aucun vecteur u dans V ne peut s'écrire de deux manières différentes comme combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_n$ (cf. [Cairoli, p.21]).

Bases d'un espace vectoriel. Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs dans un espace vectoriel V est une *base* de V si elle est libre et si $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n) = V$ (cf. [Anton, p.244] et [Cairoli, p.22]).

Ceci équivaut à dire que tout vecteur x de V s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$:

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n\,.$$

Cette dernière égalité s'appelle la *décomposition* de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont les *composantes* de x dans cette base (cf. [Anton, p.244] et [Cairoli, p.22]).

Opérations sur les composantes. Fixons une base d'un espace vectoriel V. Il y a correspondance biunivoque entre les vecteurs x de V et leurs composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans cette base. De plus :

(1) ajouter deux vecteurs de V revient à ajouter leurs composantes respectives ;

(2) multiplier un vecteur v par un nombre k revient à multiplier les composantes de v par k.

(cf. [Cairoli, p.23])

Théorème. *Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base d'un espace vectoriel* V*, alors toute famille de plus de* n *vecteurs de* V *est liée.*

(cf. [Anton, p.249] et [Cairoli, p.25])

Dimension d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel V est de *dimension finie* s'il admet une famille finie qui forme une base (cf. [Anton, p.249] et [Cairoli, p.24]).

Deuxième théorème fondamental. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*

(cf. [Anton, p.250] et [Cairoli, p.26])

Définition. La *dimension* d'un espace vectoriel V de dimension finie est le nombre de vecteurs dans une base de V. On la note $\dim V$. Par convention, la dimension de V est 0 si V ne contient que le vecteur nul (cf. [Anton, p.251] et [Cairoli, p.26]).

Agrandissement d'une famille libre. Soit $\{u_1, \ldots, u_m\}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel V et u dans V. La famille $\{u_1, \ldots, u_m, u\}$ est libre si et seulement si u n'appartient pas à $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_m)$ (cf. [Anton, p.252]).

Existence d'une sous-famille libre. Soit $\{u_1, \ldots, u_m\}$ une famille de vecteurs non tous nuls de V. Il existe $\ell \leq m$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq m$ tels que la sous-famille $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_\ell}\}$ est libre et $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_m) = \mathscr{L}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_\ell})$ (cf. [Anton, p.253] et [Cairoli, p.25]).

Théorème. *Soit* V *un espace vectoriel de dimension* $n > 0$.

(1) *Si une famille de* n *vecteurs de* V *est libre, alors elle est une base de* V.

(2) *Si une famille de* n *vecteurs engendre* V*, alors elle est une base de* V.

(cf. [Anton, p.253] et [Cairoli, p.26])

Rang d'une famille de vecteurs. Le *rang* d'une famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de vecteurs de V est le nombre $\dim \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$. On le note $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n)$ (cf. [Cairoli, p.27]).

Proposition. Soit $u_1, \ldots, u_m, u$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. Le vecteur u appartient à $\mathscr{L}(u_1, \ldots, u_m)$ si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_m) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_m, u)$ (cf. [Cairoli, p.28]).

Application aux systèmes linéaires

Soit A une matrice de type $m \times n$, $a_1, \ldots, a_n$ les colonnes de A et $\ell_1^T \ldots, \ell_m^T$ les lignes de A.

Espaces des lignes et des colonnes. L'*espace des colonnes* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par $a_1, \ldots, a_n$. L'*espace des lignes* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\ell_1 \ldots, \ell_m$. Le *rang* de A est la dimension de l'espace des colonnes de A. On le note $\mathrm{rg}\, A$ (cf. [Anton, p.259 et p.273] et [Cairoli, p.93]).

Proposition. Soit b dans $\mathbb{R}^m$. Le système $A \cdot x = b$ admet au moins une solution si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(A \,\vdots\, b)$ (cf. [Anton, p.277] et [Cairoli, p.94]).

Théorème. *Soit A une matrice de type $m \times n$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *Le système $A \cdot x = b$ possède une solution pour tout b dans $\mathbb{R}^m$.*
(2) $\mathrm{rg}\, A = m$.

(cf. [Anton, p.278])

Calcul du rang d'une matrice

Proposition. Soit A une matrice de type $m \times n$ et B une matrice obtenue en effectuant une seule opération élémentaire sur les lignes de A. Alors :
(a) $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$;
(b) les matrices A et B ont le même espace des lignes.
(cf. [Anton, p.263] et [Cairoli, p.99])

Méthode de calcul. Pour calculer le rang d'une matrice, on la réduit à la forme échelonnée.

Rang d'une matrice échelonnée. Le rang d'une matrice échelonnée L est égal à la dimension de l'espace des colonnes de L. Il est aussi égal à la dimension de l'espace des lignes de L et au nombre de pivots dans L (cf. [Anton, p.265] et [Cairoli, p.96]).

Théorème. *La dimension de l'espace des lignes d'une matrice A de type $m \times n$ est égale à la dimension de l'espace des colonnes de A ($= \operatorname{rg} A$).*

(cf. [Anton, p.273] et [Cairoli, p.99])

Méthode pour trouver des bases des espaces des lignes et des colonnes d'une matrice A.

(1) Réduire A à la forme échelonnée L.

(2) Les lignes non nulles de L constituent une base de l'espace des lignes de A.

(3) Les colonnes de A qui correspondent aux colonnes de L ayant des pivots forment une base de l'espace des colonnes de A.

(cf. [Anton, p.265])

Structure des solutions d'un système linéaire

Théorème du rang. *Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang r.*

(1) *L'ensemble des solutions du système $A \cdot x = 0$ est un sous-espace vectoriel W_0 de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$ (= nombre d'inconnues moins le rang de A).*

(2) *Soient b dans $\mathbb{R}^m$ et x_0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A \cdot x_0 = b$. L'ensemble des solutions du système $A \cdot x = b$ est l'image de W_0 par la translation de direction x_0, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $x_0 + w$, où w est dans W_0.*

(cf. [Anton, p. 225, p.275 et p.260] et [Cairoli, p.106 et p.107])

Exercices

6.1. L'ensemble des matrices de type 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

muni de l'addition matricielle ainsi que de la multiplication par un scalaire est-il un espace vectoriel ?

6.2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les ensembles donnés (munis des opérations indiquées) forment un espace vectoriel.

(a) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les opérations

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad \text{et} \quad k(x, y) = (kx, ky)\,.$$

(b) L'ensemble des matrices 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

avec l'addition matricielle et la multiplication par un scalaire.

(c) L'ensemble des matrices 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

avec l'addition matricielle et la multiplication par un scalaire.

6.3. L'ensemble V muni des opérations usuelles est-il un espace vectoriel ?

(a) V est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = 0$.

(b) V est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = 1$.

(c) Trouver une condition sur b pour que l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(1) = b$ soit un espace vectoriel.

6.4. Soit V un espace vectoriel, u dans V et k un nombre. En utilisant les axiomes (1) à (8) d'un espace vectoriel et les propriétés (a) et (b) du théorème p.43, établir (c) à (e) du même théorème :

(c) si $k \cdot u = 0$, alors $k = 0$ ou $u = 0$;

(d) $(-1) \cdot u = -u$;

(e) $(-k) \cdot u = k \cdot (-u) = -(k \cdot u)$.

6.5. Montrer que l'ensemble V des transformations matricielles $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ muni de l'addition $(T_A + T_B)(x) = T_A(x) + T_B(x)$ et de la multiplication $(k \cdot T_A)(x) = kT_A(x)$, k dans $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel.

6.6. *Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.* Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) 0 appartient à W ;

(b) si u, v sont dans W et k est un nombre, alors $u + kv$ est dans W.

Application. Soit $V = C^2(-\infty, \infty)$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois continûment différentiables. Est-ce que l'ensemble W des fonctions f dans V telles que $f' = f''$ est un sous-espace vectoriel de V ?

6.7. Montrer que l'ensemble W des y dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Ax = y$ pour au moins un x dans $\mathbb{R}^n$, où A est une matrice donnée de type $n \times n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

6.8 (*). Les sous-ensembles W de V suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ \big|\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{17\}\big\}$.

(b) $V = C^1\big([a,b]\big)$, $W = \big\{f \in V \ \big|\ f'(t_0) = 1\big\}$, où $t_0 \in [a,b]$ est fixé.

(c) $V = C^1\big([a,b]\big)$, $W = \big\{f \in V \ \big|\ f'(t_0) = 0\big\}$, où $t_0 \in [a,b]$ est fixé.

(d) $V =$ ensemble des suites réelles, $W =$ sous-ensemble des suites convergentes.

(e) $V =$ ensemble des suites réelles, $W =$ sous-ensemble des suites divergentes.

6.9 (*). Les ensembles V suivants, munis des opérations indiquées, sont-ils des espaces vectoriels ?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ muni de la multiplication par un scalaire usuelle et de l'addition définie par

$$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_2, u_2 + v_3, u_3 + v_1)\,.$$

(b) (Espace exponentiel) $V = \mathbb{R}_+^*$ muni des opérations

$$u + v = uv \qquad \text{et} \qquad k \cdot u = u^k$$

(k dans $\mathbb{R}$).

6.10 (*). (a) L'ensemble $V = \mathbb{R}^3$ muni de l'addition usuelle et de la multiplication par un scalaire définie par

$$k(u_1, u_2, u_3) = (ku_1, u_2, u_3)$$

est-il un espace vectoriel ?

(b) Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues dans $[-1, 1]$. Est-ce que les ensembles

$$W_0 = \left\{ f \in V \,\middle|\, \int_{-1}^{1} t f(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad W_1 = \left\{ f \in V \,\middle|\, \int_{-1}^{1} t f(t) dt = 1 \right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de V ? Justifiez votre réponse.

(c) Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 4. Soit W l'ensemble des polynômes dans V qui sont de la forme

$$p(t) = (k_1 + k_2 t)(t-1)^3\,, \qquad k_1, k_2 \text{ des nombres}\,.$$

Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

6.11. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble donné (muni des lois usuelles) forme un sous-espace vectoriel.

(a) $\big\{p \in \mathcal{P}_n \ \big|\ p(1) + p(-1) = 0\big\}$ (où $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$).

(b) $\big\{p \in \mathcal{P}_n \,\big|\, p(1) = 1\big\}$.

(c) L'image de l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_n \mid \operatorname{Tr}(X) = 0\}$ par l'application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{M}_n$ qui à X fait correspondre $3A^2X$, où A est dans $\mathcal{M}_n$ fixée. $\mathcal{M}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de type $n \times n$ et

$$\operatorname{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} (X)_{ii}\,.$$

(d) $\{M \in \mathcal{M}_n \mid \det(A \cdot M) = 0\}$, où $A \in \mathcal{M}_n$ est fixée.

6.12. Considérons les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées de type 2×2 :

(a) les matrices dont les coefficients ne sont pas des entiers ;

(b) les matrices A telles que

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (A)_{ij}^2 = 0\ ;$$

(c) les matrices A antidiagonales, c'est-à-dire vérifiant $(A)_{ij} = 0$ si $i + j \neq 3$;

(d) les matrices de la forme $a\,b^T$ (avec a et b dans $\mathbb{R}^2$).

Lesquels parmi ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

6.13. Lesquels, parmi les vecteurs suivants, sont-ils dans

$$\mathcal{L}\big((2,1,0,3),(3,-1,5,2),(-1,0,2,1)\big)\ ?$$

(a) 0 (b) $(3,-1,5,2)$ (c) $(2,3,-7,3)$ (d) $(1,1,1,1)$.

6.14. Soit $u_1 = (3,1,-1)$, $u_2 = (4,4,-7)$, $u_3 = (10,-2,8)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(a) A quelle condition doivent satisfaire b_1, b_2, b_3 pour que $b = (b_1,b_2,b_3)$ soit dans $\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$?

(b) Est-ce que le sous-espace engendré par u_1, u_2 et u_3 est $\mathbb{R}^3$?

6.15. *Somme et intersection de sous-espaces vectoriels.* Soit V un espace vectoriel. Montrer que :

(a) la somme $W + W'$ de deux sous-espaces W et W' de V est un sous-espace de V ;

(b) l'intersection $W \cap W'$de deux sous-espaces W et W' de V est un sous-espace de V.

Application. $V = \mathcal{M}_n$, W est l'ensemble des matrices dans V qui sont triangulaires supérieures et W' est l'ensemble des matrices dans V qui sont triangulaires inférieures. Identifier $W + W'$ et $W \cap W'$ et justifier d'une autre manière que ce sont bien des sous-espaces vectoriels de V.

6.16. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes, lesquelles sont linéairement indépendantes ?

(a) $\big\{(0,0,-1)\big\}$.

(b) $\big\{(5,1,-1),(1,1,5)\big\}$.

(c) $\big\{(1,3,3),(0,1,4),(5,6,3),(0,-1,5)\big\}$.

6.17. Soit a, b et c linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ et k un nombre. Posons $u_1 = ka+b$, $u_2 = a+kb$, $u_3 = ka+c$. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants.

6.18 (*). (a) Soit a_1, a_2 et a_3 dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\{a_1, a_2, a_3\}$ est libre si et seulement si $\det(a_1, a_2, a_3) \neq 0$.

(b) Soit p_1, p_2 et p_3 dans $\mathcal{P}_2$, l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2. Si $p_j(t) = a_{1j} + a_{2j}t + a_{3j}t^2$, montrer que $\{p_1, p_2, p_3\}$ est libre si et seulement si $\det(A) \neq 0$, où $A = (a_{ij})$. En déduire que $\{p_1, p_2, p_3\}$ est libre si et seulement si $\det(B) \neq 0$, où $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ et $b_{ij} = p_j^{(i-1)}(0)$ est la $(i-1)^{\text{ème}}$ dérivée de p_j en 0.

6.19 (*). Montrer que si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans $C\big([a,b]\big)$ sont linéairement indépendantes et si $f_1(t)M_1 + \cdots + f_n(t)M_n = \mathbb{O}$, pour tout t dans l'intervalle $[a,b]$, où $M_1, \ldots, M_n$ sont des matrices de type $m \times p$, alors $M_1 = \cdots = M_n = \mathbb{O}$.

6.20 (*). Soit $n \geq 2$ et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel. Montrer que si $x_1 \neq 0$ et si pour chaque i dans $\{2, \ldots, n\}$, le vecteur x_i n'est pas combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i-1}$, alors $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants.

6.21. (a) Soit V un espace vectoriel quelconque et soit x, y et z des vecteurs de V. Montrer que les familles suivantes sont liées :

(i) $\{0, x, y\}$;

(ii) $\{x - 2y, y - z, z + y - x\}$.

(b) Si $\{x, y\}$ est libre, montrer que $\{x - y, x + y\}$ est aussi libre.

(c) Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = e^t$ et $f_3(t) = e^{t^2}$. La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-elle libre ?

6.22. Vérifier que les vecteurs

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants, quels que soient a, b, c, d, e, f dans $\mathbb{R}$.

6.23. (a) Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. La famille $\{x, 6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$ est-elle une base de V ?

(b) Pour quelles valeurs de k dans $\mathbb{R}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants constituent-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = (k, 2, 2), \qquad v_2 = (2, k, 2) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, 2, k).$$

6.24. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6.25. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

(a) la droite d'équations paramétriques $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$;

(b) le plan d'équation cartésienne $3x - 2y + 5z = 0$;

(c) les vecteurs de la forme $(a, a+b, b)$.

6.26. Soit $(e_1, \ldots, e_6)$ une base d'un espace vectoriel V et soit W le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs $e_1 + e_6$, $e_3 - e_4$ et $e_5 - e_2$. A quelles conditions doivent satisfaire les composantes d'un vecteur x de V pour qu'il appartienne à W ?

6.27. Soit V l'espace vectoriel des matrices de type 2×2. Montrer que la famille de vecteurs

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de V.

6.28. (a) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de type 2×2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices de type 2×2.

(b) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

forment-elles une base de ce sous-espace ?

(c) Dans l'affirmative, calculer les coordonnées de

$$\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$$

dans cette base.

6.29 (*). (a) Soit K une matrice de type $n \times n$. Montrer que l'ensemble des matrices de type $n \times n$ qui commutent avec K est un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices de type $n \times n$.

(b) Déterminer ce sous-espace vectoriel lorsque

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Les matrices K et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

forment-elles une base de ce dernier sous-espace ?

6.30 (*). *Formule d'interpolation de Lagrange.* Dans l'espace vectoriel V des polynômes de degré ≤ 2, on considère les trois polynômes p_1, p_2, p_3 définis par

$$p_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2), \quad p_2(t) = -t(t-2), \quad p_3(t) = \frac{1}{2}t(t-1).$$

(a) Montrer que (p_1, p_2, p_3) est une base de V.
(b) Montrer que tout polynôme p dans V s'écrit sous la forme

$$p(t) = p(0)p_1(t) + p(1)p_2(t) + p(2)p_3(t).$$

6.31 (*). Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Vérifier que les n^2 matrices de la forme $a_i\, a_j^T$, i, j dans $\{1, \ldots, n\}$, sont linéairement indépendantes.

6.32 (*). Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est linéairement indépendante si et seulement s'il existe $t_1, \ldots, t_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\det\big(f_i(t_j)\big) \neq 0$.

6.33. Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les familles de vecteurs suivantes, lesquelles sont libres ?

(a) $\big\{6 - t^2, 1 + t + 4t^2\big\}$.

(b) $\big\{3 - t^2, 1 + 3t - t^2, 1 + t - t^2, 2 - t\big\}$.

(c) $\big\{2, 4\sin^2(t), \cos^2(t)\big\}$.

(d) $\big\{\sin^2(t), \cos^2(t)\big\}$.

6.34. Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel des matrices de type $n \times n$ qui sont :

(a) diagonales ;

(b) triangulaires inférieures ;

(c) antisymétriques ;

(d) de trace nulle.

6.35. Trouver une base de l'espace des colonnes ainsi qu'une base de l'espace des lignes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.36. (a) Déterminer le rang de la famille (c) de l'exercice 6.33.

(b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\mathrm{rg}(A) = 4$, où

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

6.37. Soit (e_1, e_2) une base d'un espace vectoriel V. Montrer que les couples de vecteurs ci-dessous sont des bases de V et calculer les composantes de e_1 et e_2 dans chacune de ces bases :

(a) $(ke_1, \ell e_2)$ $(k, \ell$ fixés non nuls$)$;

(b) (e_2, e_1) ;

(c) $(e_1 + ke_2, e_2 + \ell e_1)$ $(k, \ell$ fixés tels que $k\ell \neq 1)$.

6.38. Pour chacune des conditions ci-dessous, déterminer si le sous-ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 vérifient cette condition est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Si oui, trouver une base et la dimension de ce sous-espace.

(a) $x_2 = 0$ (b) $x_2 = 1$

(c) $x_1 = 2x_2 + x_3$ (d) $x_3 = x_1 x_2$.

6.39. Soit A une matrice de type $m \times n$ et B une matrice obtenue en effectuant une seule opération élémentaire sur les lignes de A.

(a) Montrer que A et B ont le même espace des lignes.

(b) Donner un exemple où A et B n'ont pas le même espace des colonnes.

(c) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

6.40. Décrire l'ensemble des triplets (x, y, z) rendant égal à 2 le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x & y \\ 1 & 2 & y & z \\ 3 & 2 & z & x \end{pmatrix}.$$

6.41 (*). Soit B la matrice formée par les trois premières lignes de la matrice A de l'exercice 6.35.

(a) Déterminer le rang de B.

(b) Le système suivant possède-t-il une solution ? Justifier votre réponse sans faire de calcul :

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.42 (*). Soit $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que cet espace vectoriel n'est pas de dimension finie.

6.43 (*). Pour chacune des familles de vecteurs ci-dessous, vérifier si elle constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et dans le cas affirmatif, exprimer les vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille considérée :

(a) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

6.44 (*). Pour chacune des familles de polynômes ci-dessous, vérifier si elle constitue une base de l'espace des polynômes de degré ≤ 2 et dans le cas affirmatif, exprimer les polynômes $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$ comme combinaisons linéaires des polynômes de la famille considérée :

(a) $q_1(t) = 1 + 2t^2$, $q_2(t) = 2 - t + t^2$, $q_3(t) = -3 + t - 3t^2$;

(b) $q_1(t) = 1 + 3t + t^2$, $q_2(t) = 1 + t^2$, $q_3(t) = t$;

(c) $q_1(t) = t^2$, $q_2(t) = t + t^2$, $q_3(t) = 2 + t$;

(d) $q_1(t) = 3 - t^2$, $q_2(t) = 1 + 3t - t^2$, $q_3(t) = 1 - t - t^2$, $q_4(t) = 1$.

6.45. Existe-t-il des valeurs réelles de k et ℓ pour lesquelles le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 - 1 & 2 \\ 0 & \ell^2 - 3 & k + 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est 1 ou 2 ? Si oui, déterminer ces valeurs.

6.46. Soit a, b, c, d, x et y des nombres. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Trouver une condition sur les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ x & y \end{vmatrix}$$

pour que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

6.47. Pour quelles valeurs de $b_1, \ldots, b_5$ le système suivant a-t-il au moins une solution ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ x_1 - x_2 = b_2 \\ x_1 + x_2 = b_3 \\ x_1 - 2x_2 = b_4 \\ x_1 + 5x_2 = b_5\,. \end{cases}$$

6.48. (a) Trouver la dimension du sous-espace des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_2 - 5x_3 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\,. \end{cases}$$

(b) Trouver une base du sous-espace W_0 des solutions de ce système.

(c) Quel est l'ensemble des solutions du système ayant la même matrice des coefficients et le second membre $(-4, 2, 0, -10, -2)$?

6.49. Soit A une matrice carrée d'ordre 5 et de rang égal à 3. Supposons que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -3$, $x_5 = -2$ soit une solution du système linéaire inhomogène $Ax = b$ et que l'ensemble des solutions du système homogène $Ax = 0$ soit donné par les formules

$$x_1 = -3r + 4s\,, \quad x_2 = r - s\,, \quad x_3 = r\,, \quad x_4 = s\,, \quad x_5 = s\,.$$

(a) Donner une base de l'ensemble des solutions de $Ax = 0$.

(b) Exprimer vectoriellement la solution générale de $Ax = b$ (remarquer que le nombre de paramètres dans la solution générale est égal au nombre d'inconnues moins le rang de A) et l'interpréter géométriquement.

6.50. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base de l'espace des lignes de A.

(b) Trouver une base de l'espace des colonnes de A.

6.51 (*). (a) Montrer que le rang d'une matrice A est supérieur ou égal à r si et seulement s'il existe une sous-matrice carrée de A de type $r \times r$ de déterminant non nul.

(b) Soit $a, b, \ldots, f$ des nombres distincts. Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e & f \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 & f^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 & f^3 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire la dimension de l'ensemble des solutions de $Ax = 0$.

6.52 (*). (a) Déterminer $\mathrm{rg}(I_{2n+1} + S)$, où S est la matrice définie par $(S)_{i,j} = \big(I_{2n+1}\big)_{i,2n+2-j}$.

(b) Trouver la dimension de l'espace des solutions de $(I_{2n+1} + S) \cdot x = 0$.

(c) Donner une base de l'espace des lignes et une base de l'espace des colonnes de $I_{2n+1} + S$.

6.53 (*). Considérons un système linéaire homogène $Ax = 0$, avec A de type $m \times n$.

(a) Quelle est la dimension minimale du sous-espace vectoriel des solutions lorsque $m \leq n$?

(b) Quelle est la dimension maximale de ce sous-espace ? Dans quel cas est-elle atteinte ?

6.54. Dans chacun des cas suivants, dire, sans le résoudre, si le système n'a aucune solution, une seule solution, plus d'une solution :

$$\text{(a)} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -9x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\text{(b)} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\text{(c)} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,. \end{array}\right.$$

6.55. Trouver la dimension du sous-espace des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & 2x_2 & & -2x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & & -4x_3 & & -2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & & +6x_3 & & +3x_5 & = & 0 \\ & -x_2 & & +x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

sans réduire la matrice associée.

6.56. Montrer que

$$f_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \ldots, f_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels distincts) sont linéairement indépendants dans $C\big(]a, b[\big)$. *Indication* : Utiliser l'exercice 3.9.

6.57. Soit a, b, c, d dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que si a et b sont linéairement indépendants et si la matrice $a\, c^T + b\, d^T$ est nulle, alors c et d sont nuls.

6.58. Soit $C^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions deux fois continûment dérivables. Montrer que si f, g et h sont des fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix} \not\equiv 0\,,$$

alors f, g et h sont linéairement indépendantes.

6.59. Considérons deux systèmes d'équations linéaires $Ax = b$ et $A'x' = b$, où A et A' sont deux matrices de type 2×2 de rang 2. Quelle est la relation entre les solutions x et x' lorsque :

(a) A' est la matrice obtenue de A en permutant ses deux colonnes ;

(b) A' est la matrice obtenue de A en multipliant sa première colonne par 3 ;

(c) A' est la matrice obtenue de A en ajoutant 5 fois la première colonne à la deuxième.

6.60 (*). Soit W un sous-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ d'un espace vectoriel V. Soient x et y deux vecteurs de V qui ne sont pas dans W. Soit U le sous-espace vectoriel engendré par W et x et U' le sous-espace vectoriel engendré par W et y. Montrer que

(a) $\dim U = n + 1 = \dim U'$;

(b) $\dim(U + U')$ est soit égal à $n + 1$, soit à $n + 2$;

(c) $\dim(U \cap U') = \begin{cases} n & \text{si } \dim(U + U') = n + 2, \\ n + 1 & \text{si } \dim(U + U') = n + 1. \end{cases}$

Donner un exemple où $\dim(U + U') = n + 1$ et un exemple où $\dim(U + U') = n + 2$.

6.61 (*). On dit qu'une matrice C de type $n \times n$ est *cyclique* s'il existe un vecteur x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $(\,x, Cx, C^2x, \ldots, C^{n-1}x\,)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que si une matrice A commute avec une matrice cyclique C, alors A est un polynôme en C de degré $\leq n - 1$, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $A = a_0\, I_n + a_1 C + a_2 C^2 + \cdots + a_{n-1} C^{n-1}$.

(b) En déduire que si A est une matrice de type $n \times n$ qui commute avec toutes les matrices $n \times n$, alors A est un multiple de l'identité.
Indication : A et A^T commutent alors avec la matrice cyclique

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

Produit scalaire

Soit V un espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* dans V toute opération qui, à chaque couple de vecteurs (u, v) associe un nombre, noté $\langle u, v\rangle$, et qui vérifie les propriétés suivantes. Pour tous vecteurs u, v, w dans V et tous nombres k et ℓ,

(a) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (symétrie)

(b) $\langle ku + \ell w, v\rangle = k\langle u, v\rangle + \ell\langle w, v\rangle$ (linéarité)

(c) $\langle u, u\rangle \geq 0$, avec égalité seulement pour $u = 0$ (positivité)

(cf. [Anton, p.287] et [Cairoli, p.50 et p.51]).

Norme d'un vecteur. On appelle *norme* d'un vecteur u et on note $\|u\|$ le nombre

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

(cf. [Anton, p.290] et [Cairoli, p.51]).

Propriétés de la norme.

(1) $\|u\| \geq 0$ et $\|u\| > 0$ si $u \neq 0$.

(2) $\|ku\| = |k|\,\|u\|$, pour tout nombre k.

(3) Si $u \neq 0$, alors $\|u/\|u\|\| = 1$.

(cf. [Anton, p.301] et [Cairoli, p.51])

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux. Deux vecteurs u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v\rangle = 0$ (cf. [Anton, p.303] et [Cairoli, p.53]).

Famille orthogonale. Une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs est *orthogonale* si les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ lorsque $i \neq j$ (cf. [Anton, p.312] et [Cairoli, p.53]).

Famille orthonormale. Une famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vecteurs dans V est *orthonormale* si elle est orthogonale et vérifie $\|u_i\| = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ (cf. [Anton, p.312] et [Cairoli, p.53]).

Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Un vecteur u dans V est *orthogonal* à W s'il est orthogonal à tout vecteur v de W (cf. [Anton, p.305] et [Cairoli, p.54]).

Orthogonalité et indépendance linéaire. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (cf. [Anton, p.315] et [Cairoli, p.54]).

Théorème de Pythagore. *Si u et v dans V sont orthogonaux, alors*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

(cf. [Anton, p.304] et [Cairoli, p.55])

Théorème de Pythagore généralisé. *Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille orthogonale de vecteurs dans V, alors*

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2 \quad .$$

(cf. [Cairoli, p.55])

Projection orthogonale sur une droite vectorielle

Définition. La *projection orthogonale* de u sur v est le vecteur noté $\operatorname{proj}_v u$ défini par

$$\operatorname{proj}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\, v$$

(cf. [Cairoli, p.55]).

Propriété. Le vecteur $u - \operatorname{proj}_v u$ est orthogonal à v (cf. [Cairoli, p.55]).

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\big|\langle u, v\rangle\big| \leq \|u\|\, \|v\|$$

(cf. [Anton, p.300] et [Cairoli, p.57]).

Remarque. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si u et v sont linéairement dépendants (cf. [Cairoli, p.57]).

Composantes d'un vecteur dans une base orthogonale. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale et u est un vecteur, alors

$$u = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2}\, e_1 + \frac{\langle u, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2}\, e_2 + \cdots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}\, e_n\,.$$

Si la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale, alors

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n$$

(cf. [Anton, p.313 et p.315] et [Cairoli, p.60]).

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Théorème. *Soit W un sous-espace vectoriel de V et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormale de W. Alors tout vecteur u de V peut s'écrire $u = w_1 + w_2$, où w_1 est dans W et w_2 est orthogonal à W. De plus,*

$$w_1 = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle u, e_r \rangle e_r\,.$$

On appelle w_1 *la projection orthogonale de u sur W*. Ce vecteur est noté $\mathrm{proj}_W\, u$ (cf. [Anton, p.317] et [Cairoli, p.63]).

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Le procédé consiste à construire une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un espace vectoriel V à partir d'une base quelconque $(e_1, \ldots, e_n)$ en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|}\,, \quad \text{où } w_1 = e_1\ ; \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|}\,, \quad \text{où } w_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1\ ; \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

$$u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}\,, \quad \text{où } w_k = e_k - \frac{\langle e_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 - \frac{\langle e_k, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2 - \cdots - \frac{\langle e_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2}\, w_{k-1}\ ;$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}\,, \quad \text{où } w_n = e_n - \frac{\langle e_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 - \frac{\langle e_n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2 - \cdots - \frac{\langle e_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}\, w_{n-1}$$

(cf. [Anton, p.318, p.319 et p.320] et [Cairoli, p.55]).

Problème de la meilleure approximation

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, W un sous-espace vectoriel de V de dimension finie et u dans V. Le vecteur w dans W qui minimise $\|u-w\|$ est appelé la *meilleure approximation de u dans W* (cf. [Cairoli, p.64]).

Proposition. Le vecteur $\operatorname{proj}_W u$ est la meilleure approximation de u dans W. De plus, $\|u - \operatorname{proj}_W u\| < \|u - w\|$ pour tout vecteur w dans W, $w \neq \operatorname{proj}_W u$ (cf. [Anton, p.328] et [Cairoli, p.64]).

Solution d'un système linéaire au sens des moindres carrés

Soit $m > n$, A une matrice de type $m \times n$ et b dans $\mathbb{R}^m$. Un vecteur x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\|A \cdot x - b\|$ est minimal s'appelle *solution du système linéaire $A \cdot x = b$ au sens des moindres carrés* (cf. [Anton, p.329]).

Théorème. *Toute solution du système $(A^T \cdot A) \cdot x = A^T \cdot b$ (équations normales) est une solution au sens des moindres carrés du système $A \cdot x = b$.*

(cf. [Anton, p.331])

Propriété. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont les colonnes de A et x est une solution au sens des moindres carrés de $A \cdot x = b$, alors $A \cdot x = \operatorname{proj}_{\mathcal{L}(a_1,\ldots,a_n)} b$ (cf. [Anton, p.331]).

Matrices orthogonales

Une matrice carrée A est appelée *matrice orthogonale* si $A^T \cdot A = I$. Ceci équivaut à dire que A est inversible et que $A^{-1} = A^T$ (cf. [Anton, p.338] et [Cairoli, p.200]).

Proposition. Une matrice A de type $n \times n$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes (ou ses lignes) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (cf. [Anton, p.339] et [Cairoli, p.201]).

Théorème. *Soit A une matrice de type $n \times n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *A est orthogonale.*
(2) *$\|A \cdot x\| = \|x\|$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ (conservation de la norme euclidienne).*
(3) *$(A \cdot x) \cdot (A \cdot y) = x \cdot y$, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ (conservation du produit scalaire euclidien).*

(cf. [Anton, p.340] et [Cairoli, p.201])

Changements de base

Etant donné une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel V et $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ dans V, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice-colonne formée à partir des composantes de u dans $\mathcal{B}$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Définition. Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une autre base de V, on appelle *matrice de passage* la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ définie par

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \Big([e'_1]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, [e'_2]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [e'_n]_{\mathcal{B}} \Big)$$

(cf. [Anton, p.343] et [Cairoli, p.177]).

Théorème. *Pour tout u dans V,*

$$[u]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'} .$$

(cf. [Anton, p.343] et [Cairoli, p.178])

Propriétés des matrices de passage.

(1) La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(2) Si V est muni d'un produit scalaire et si les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, alors la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est orthogonale.

(3) Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

(cf. [Anton, p.344 et p.346] et [Cairoli, p.178 et p.202])

Calcul de la matrice de passage. Pour déterminer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on fixe une base quelconque $\mathcal{B}''$ de V, puis on réduit la matrice

$$\Big([e_1]_{\mathcal{B}''} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [e_n]_{\mathcal{B}''} \,\vdots\, [e'_1]_{\mathcal{B}''} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [e'_n]_{\mathcal{B}''} \Big)$$

à la forme échelonnée simplifiée, qui est $(I_n \,\vdots\, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})$.

Exercices

7.1. Dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^3$, soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$. Indiquer lesquelles parmi les opérations suivantes sont des produits scalaires (pour les autres, préciser les propriétés non vérifiées) :

(a) $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + 5a_2b_2 + 5a_3b_3 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 - 2a_2b_3 - 2a_3b_2$;

(b) $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_2b_3 - a_3b_2$;

(c) $\langle a, b\rangle = 8a_1b_1 + 5a_2b_2 + 5a_3b_3 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1 + 2a_2b_3 + 2a_3b_2$.

7.2. Dans $V = \mathcal{M}_2$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2, soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Indiquer lesquelles parmi les opérations suivantes sont des produits scalaires sur V (pour les autres, préciser les propriétés non vérifiées) :

(a) $\langle A, B\rangle = a_1b_1 + 5a_2b_2 + 3a_3b_3 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_1 - 3a_2b_3 - 3a_3b_2 + a_4b_4$;

(b) $\langle A, B\rangle = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$;

(c) $\langle A, B\rangle = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2$.

7.3. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire défini dans l'exercice 7.1(a).

(a) Calculer $\langle e_i, e_j\rangle$, $i, j = 1, 2, 3$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trouver les vecteurs v de $\mathbb{R}^3$ tels que (e_1, v, e_3) est une famille orthogonale.

7.4. On munit $\mathcal{M}_2$ du produit scalaire défini dans l'exercice 7.2(a).

(a) Calculer $\langle E^{ij}, E^{k\ell}\rangle$, $i,j,k,\ell = 1,2$, où $E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2$ (voir la solution de l'exercice 6.34).

(b) Trouver les matrices M dans $\mathcal{M}_2$ tels que $(E^{11}, E^{12}+2E^{21}, M, E^{22})$ est une famille orthogonale.

7.5. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que l'opération qui, à chaque couple (p,q) d'éléments de $\mathcal{P}_2$ associe le nombre

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

est un produit scalaire dans $\mathcal{P}_2$.

7.6. En utilisant une proposition de ce chapitre, montrer que les trois vecteurs colonnes suivants de $\mathbb{R}^4$ forment une famille libre :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -28 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

7.7. Exhiber un produit scalaire dans $\mathbb{R}^4$ pour lequel les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont orthogonaux.

7.8. Est-il vrai que, quels que soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$, l'inégalité

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^2 \leq \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$$

est vérifiée ? Sinon, quelle modification peut-on apporter pour que l'inégalité soit vraie ?

7.9 (*). Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

(a) Montrer que l'opération qui, à chaque couple (p,q) d'éléments de $\mathcal{P}_2$ associe le nombre

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(0)q(1) + p(1)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

est un produit scalaire dans $\mathcal{P}_2$.

(b) Calculer $\langle p_i, p_j\rangle$, $i,j = 1,2,3$, où p_1, p_2, p_3 est la base canonique de $\mathcal{P}_2$.

(c) Cette opération est-elle un produit scalaire dans $\mathcal{P}_3$?

7.10 (*). (a) *Théorème de Pythagore généralisé.* Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille orthogonale. Montrer que

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2.$$

(b) Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, considérons le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Montrer que $(u_k(x) = \cos(kx),\ k = 1, 2, \dots, n)$ est une famille orthogonale.

(c) *Application.* Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)dx.$$

7.11 (*). Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3).$$

(a) Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $w = (0, 1, 0)$. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

(b) Soit

$$v_1 = (1, 1, 1), \qquad v_2 = (1, -1, 3), \qquad v_3 = (-2, 2, 3).$$

Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, en calculant les produits scalaires $\langle v_i, v_j\rangle$. Est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Calculer la projection orthogonale de w sur v_3.

7.12 (*). *Un exemple de l'inégalité de Minkowski.* Soit f et g des fonctions réelles continues définies sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 \big(f(x) + g(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(*Indication* : Démontrer le carré de l'inégalité.)

7.13. (a) Montrer que pour tous nombres réels a, b et γ :

$$(a\cos\gamma + b\sin\gamma) \le \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(b) Montrer l'inégalité stricte suivante :

$$\int_0^1 \sqrt{t}\, e^{-t/2}\, dt < \sqrt{\frac{e-1}{2e}}.$$

7.14. (a) Montrer que
$$\int_1^e \sqrt{\ln t}\, dt < \sqrt{2}.$$

(b) Montrer l'inégalité suivante :
$$\int_0^\pi \sqrt{t\,\sin t}\, dt < \pi.$$

7.15. (a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, l'inégalité suivante est satisfaite :
$$\begin{aligned}&(x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2)^2\\ &\qquad \le (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3)(y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_2y_3).\end{aligned}$$

(b) Montrer que tous les polynômes p et q de degré 2 vérifient l'inégalité suivante :
$$\begin{aligned}&\big(p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)\big)^2\\ &\qquad \le \Big(\big(p(0)\big)^2 + \big(p'(0)\big)^2 + \big(p''(0)\big)^2\Big)\Big(\big(q(0)\big)^2 + \big(q'(0)\big)^2 + \big(q''(0)\big)^2\Big).\end{aligned}$$

(c) L'inégalité donnée dans (b) reste-t-elle vérifiée si p et q sont des polynômes de degré $n > 2$?

(d) Dans quels cas chaque inégalité ci-dessus est-elle une égalité ?

7.16. (a) Vérifier que les vecteurs $v_1 = (-2, 2, -1)$, $v_2 = (1, 2, 2)$ et $v_3 = (2, 1, -2)$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien.

(b) Calculer ensuite les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) des vecteurs :
$$(1) \quad (-3, 3, 3)\ ; \qquad (2) \quad (9, -4, 1)\,.$$

7.17. (a) Vérifier que les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
forment une base orthogonale de $\mathcal{M}_2$ muni du produit scalaire
$$\langle A, B\rangle = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}\,.$$

(b) Calculer ensuite les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) du vecteur
$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

7.18. Soit les vecteurs

$$u_1 = (1,0,2,0)\,,\ u_2 = (0,0,1,-1)\,,\ u_3 = (1,1,2,6)\,,\ u_4 = (0,-1,1,-7)\,.$$

Trouver une base orthonormale de $\mathscr{L}\big(u_1,u_2,u_3,u_4\big)$ muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$.

7.19. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire défini dans l'exercice 7.1(a). Soit les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (0,0,1)$. Trouver une base orthonormale de $\mathscr{L}\big(u_1,u_2,u_3\big)$.

7.20. Trouver la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) de $b = (5, 2\sqrt{3}, 0, -1)$ sur l'espace des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x_4 = 0 \\ \sqrt{3}x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$$

7.21. Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire. Soient $(u_1,\ldots,u_n)$ et $(v_1,\ldots,v_n)$ deux familles de vecteurs de V telles que $\langle u_i, v_i\rangle = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$, et $\langle u_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. Montrer que :

(a) $u_1,\ldots,u_n$ sont linéairement indépendants ;

(b) $x = \langle x, v_1\rangle u_1 + \cdots + \langle x, v_n\rangle u_n$, pour tout x dans V ;

(c) si $(u_1,\ldots,u_n)$ est orthonormée, alors $u_i = v_i$ pour $i = 1,\ldots,n$.

7.22 (*). Trouver une base orthonormale (pour le produit scalaire euclidien) de l'espace vectoriel V engendré par les colonnes de A, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.23 (*). Trouver la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) du vecteur $b = (1,2,0,4)$ sur l'espace des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\,. \end{cases}$$

7.24 (*). Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Soit $c_0 = 1/\sqrt{2\pi}$, $c_1 = 1/\sqrt{\pi}\,\cos(x)$ et $f(x) = e^x$. Sachant que

$$\left(\frac{e^x}{2}\,(\cos x + \sin x)\right)' = e^x \cos x\,,$$

trouver la projection orthogonale de f sur l'espace $\mathscr{L}(c_0, c_1)$.

7.25 (*). *Coefficients de Fourier*. Considérons l'espace vectoriel V des fonctions réelles continues, définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π. Munissons cet espace de l'opération qui, à chaque couple (f, g) d'éléments de V associe le nombre

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\,.$$

(a) Montrer que cette opération est un produit scalaire dans V.

(b) En posant

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \quad \text{et} \quad s_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

montrer que la famille $\{c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots\}$ est orthonormale.

(c) Soit h dans V définie par $h(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Calculer la projection orthogonale de h sur chacun des vecteurs c_i et s_k, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ (les coefficients obtenus sont appelés les *coefficients de Fourier* de h).

(d) Déduire de (c) la projection orthogonale de h sur

$$W_n = \mathscr{L}\big(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_n, s_n\big)$$

(c'est le début de la série de Fourier de h).

7.26. (a) Trouver la solution au sens des moindres carrés du système linéaire $Ax = b$ et calculer ensuite la projection orthogonale de b sur l'espace des colonnes de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

(b) Résoudre l'exercice 7.20 au moyen de la méthode de résolution au sens des moindres carrés.

7.27. Trouver la solution au sens des moindres carrés du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1\,. \end{array}\right.$$

7.28. Soit A et B deux matrices orthogonales.

(a) Montrer que A^{-1} est orthogonale.

(b) Montrer que AB est orthogonale.

(c) Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

7.29. Montrer que si une matrice carrée A possède deux des trois propriétés ci-dessous, alors elle possède les trois :

(a) A est orthogonale ;

(b) A est symétrique ;

(c) A est involutive (c'est-à-dire que $A^2 = I_n$).

7.30. Déterminer α, β, γ et δ de sorte que la matrice

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & \gamma \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}$$

soit orthogonale.

7.31. Soit A une matrice de type $n \times n$ telle qu'il existe un nombre α et une matrice orthogonale U avec $A = \alpha U$.

(a) Calculer $|A|$.

(b) A est-elle inversible ?

(c) Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

7.32. (a) Dans $C\big([-1,1]\big)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)dt\,,$$

trouver la meilleure approximation de $p(t) = t^3$ par des polynômes de degré ≤ 2.

(b) Illustrer le résultat par une représentation graphique.

7.33. Dans $C\big([0,\pi]\big)$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la meilleure approximation de la fonction $f(t) = \sin t$ par un multiple de la fonction $g(t) = t$.

7.34 (*). Trouver la fonction polynômiale de degré ≤ 2 qui minimise l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \big(|x| - p(x)\big)^2 dx$$

avec $p \in \mathcal{P}_2$.
Indication : Considérer l'espace vectoriel $C([-1,1])$ des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[-1,1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\,.$$

7.35 (*). Soit V l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables sur $[0,1]$ et nulles en 0.

(a) Montrer que l'opération

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

définit un produit scalaire sur V (vous retrouverez ce produit scalaire en analyse numérique, dans l'étude de la méthode des éléments finis).

(b) Trouver la projection orthogonale de la fonction $h(t) = t^4$ sur le sous-espace engendré par les fonctions $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^3$.

7.36 (*). Trouver la fonction polynômiale de degré ≤ 2 qui minimise

$$\delta(p) = \sqrt{\big(y_1 - p(x_1)\big)^2 + \ldots + \big(y_4 - p(x_4)\big)^2},$$

avec p dans $\mathcal{P}_2$ et où les points (x_i, y_i) sont $(2,0)$, $(3,-10)$, $(5,-48)$, $(6,-76)$.

7.37 (*). Calculer la meilleure approximation de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

par des polynômes trigonométriques d'ordre $\leq 2n+1$, c'est-à-dire par des éléments du sous-espace W_n défini dans l'exercice 7.25.

7.38. Les matrices suivantes sont-elles orthogonales ? Si oui, trouver leur inverse.

$$\text{(a) } \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.39. (a) En observant que les lignes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2/3 & -2/3 & -1 \\ 1 & 3/2 & -3/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

sont orthogonales deux à deux, montrer que A est inversible.

(b) En utilisant (a), trouver la valeur de AA^T et, de là, celle de A^{-1}.

(c) En déduire que A est de la forme DU, où D est une matrice diagonale et U une matrice orthogonale.

7.40. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit ou égal à 3. Calculer $[p]_{\mathcal{B}}$, où $p(t) = 2 - t^2 + 3t^3$, $\mathcal{B}$ est la base (b_1, b_2, b_3, b_4) et

$$b_1(t) = -1 + t\,, \quad b_2(t) = 1 + t\,, \quad b_3(t) = t^2\,, \quad b_4(t) = t^3\,.$$

7.41. Soit V l'espace vectoriel des matrices de type 2×2 muni de la base $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ où

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $[A]_{\mathcal{B}}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Donner les composantes des vecteurs de la base canonique de V.

7.42. Considérons les bases $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, avec

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les matrices de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(b) Calculer $[w]_{\mathcal{B}}$, où

$$w = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

trouver ensuite $[w]_{\mathcal{B}'}$ à partir de $[w]_{\mathcal{B}}$, et enfin, verifier le résultat en calculant $[w]_{\mathcal{B}'}$ directement.

7.43. Soit $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases de $\mathbb{R}^4$ formées respectivement des vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) et (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4), où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e'_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver deux matrices A et A' telles que

$$[u]_{\mathcal{B}} = Au \quad \text{et} \quad [u]_{\mathcal{B}'} = A'u\,.$$

(b) Déterminer les coefficients de la matrice C satisfaisant

$$[u]_{\mathcal{B}'} = C[u]_{\mathcal{B}}\,.$$

(c) Que représentent les colonnes de C ?

7.44. Dans un espace vectoriel V de dimension finie n muni d'un produit scalaire et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on considère deux vecteurs a et b non orthogonaux et la matrice

$$A = I_n - \frac{2}{[a]_{\mathcal{B}}^T \cdot [b]_{\mathcal{B}}}\,[a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T\,.$$

(a) Calculer A^2.

(b) Montrer que si a est un multiple (non nul) de b, alors A est symétrique et orthogonale.

(c) Montrer que si A est orthogonale ou symétrique, alors a est un multiple de b.

7.45. Considérons une matrice A de type $n \times n$ dont les colonnes sont orthogonales deux à deux et non nulles et une matrice-colonne arbitraire b de type $n \times 1$.

(a) Sans faire de calcul, dire si le système $Ax = b$ admet des solutions.

(b) S'il admet des solutions, que peut-on dire de la solution générale ?

7.46. (a) A l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, montrer que toute matrice carrée inversible A de type $n \times n$ est le produit d'une matrice orthogonale U et d'une matrice triangulaire supérieure T.

(b) Calculer U et T lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.47 (*). Soit W le sous-espace vectoriel de $C\big(]-\infty, \infty[\big)$ engendré par $f_1(x) = \exp(x)$ et $f_2(x) = \exp(-x)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (g_1, g_2)$ est une base de W, où

$$g_1(x) = \sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

et

$$g_2(x) = \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\,.$$

(b) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, où $\mathcal{B}=(f_1,f_2)$.

(c) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(d) Calculer $[h]_{\mathcal{B}'}$ à partir de $[h]_{\mathcal{B}}$, où $h(x)=2\exp(x)-5\exp(-x)$.

(e) Vérifier le résultat en calculant directement $[h]_{\mathcal{B}'}$.

7.48 (*). Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ des polynômes, muni de la base $(p_0,p_1,p_2,\ldots)$ définie par $p_0(t)=1$, $p_1(t)=t$, $p_2(t)=t^2$, …, on considère le sous-espace vectoriel W engendré par les polynômes $q_1(t)=t^2+2$, $q_2(t)=t^2-2$, $q_3(t)=t^3+3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}=(q_1,q_2,q_3)$ et $\mathcal{B}'=(p_0,p_2,p_3)$ sont des bases de W.

(b) Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(c) Utiliser $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ pour calculer les composantes dans la base (q_1,q_2,q_3) des polynômes

$$p(t)=-1+3t^2-5t^3, \qquad q(t)=(t+a)(t+b)(t+c)\,,$$

après avoir déterminé la condition sur a,b,c pour que q appartienne à W.

7.49 (*). Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$, où

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

et

$$e'_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad e'_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e'_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(b) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(c) Vérifier que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}=(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$.

7.50 (*). On considère l'opération qui fait correspondre à tout couple (p,q) de polynômes le nombre

$$\langle p,q\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}p^{(k)}(0)\,q^{(k)}(0),$$

où l'exposant (k) indique la $k^{\text{ème}}$ dérivée.

(a) Montrer que cette opération est un produit scalaire dans l'espace vectoriel des polynômes.

(b) Montrer que la famille de monômes $(1,\ t,\ t^2/2!,\ t^3/3!,\ \ldots)$ est orthonormale (pour ce produit scalaire).

(c) Calculer la norme du polynôme $p(t)=1+2t^3$, d'abord directement, puis à l'aide du théorème de Pythagore.

7.51. *Polynômes d'Hermite.* La famille des polynômes d'Hermite $(H_n,\, n \geq 0)$, est définie par $H_0(t) = 1$ et

$$H_n(t) = \bigl(-1\bigr)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \bigl(e^{-t^2}\bigr), \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

(a) Calculer $H_1, \ldots, H_5$.

(b) Sachant que

$$\frac{d^2}{dt^2} \bigl(H_n(t)\bigr) - 2t \frac{d}{dt} \bigl(H_n(t)\bigr) + 2n\, H_n(t) = 0\,,$$

vérifier que la famille $(H_0, H_1, \ldots)$ est orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, q(t)\, e^{-t^2}\, dt\,,$$

où p et q sont des polynômes.

Chapitre 8

Valeurs et vecteurs propres

Soit A une matrice de type $n \times n$. Un vecteur x dans $\mathbb{R}^n$ est un *vecteur propre* de A associé à la *valeur propre* λ si $x \neq 0$, λ est un nombre et $A \cdot x = \lambda x$ (cf. [Anton, p.355] et [Cairoli, p.227 et p.228]).

Calcul des valeurs propres

Proposition. L'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des nombres λ tels que $\det(A - \lambda I) = 0$ (cf. [Anton, p.356] et [Cairoli, p.228]).

Polynôme caractéristique. La fonction $\lambda \longmapsto \det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n appelé *polynôme caractéristique* de A. La matrice A admet donc au plus n valeurs propres. Sauf mention du contraire, seules les solutions réelles de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ sont considérées comme valeurs propres (cf. [Anton, p.356] et [Cairoli, p.229]). *Attention* : Dans [Anton], le polynôme caractéristique est $\det(\lambda I - A)$.

Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux (cf. [Anton, p.358] et [Cairoli, p.230]).

Recherche des vecteurs propres

Soit λ une valeur propre de A. Pour déterminer les vecteurs propres de A associés à λ, on résout le système homogène $(A - \lambda I) \cdot x = 0$. Les solutions non nulles de ce système sont les vecteurs propres de A associés à λ (cf. [Anton, p.359] et [Cairoli, p.228]).

Diagonalisation de matrices

Une matrice A de type $n \times n$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale (cf. [Anton, p.365] et [Cairoli, p.233]).

Théorème. *Soit A une matrice de type $n \times n$.*

(1) *Si A est diagonalisable, alors A admet n vecteurs propres linéairement indépendants.*

(2) *Si A admet n vecteurs propres $p_1, \ldots, p_n$ linéairement indépendants, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors A est diagonalisable et*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,, \qquad \text{où } P = (p_1 \vdots \cdots \vdots p_n)\,.$$

(cf. [Anton, p.365 et p.367] et [Cairoli, p.233])

Théorème. *Des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*

(cf. [Anton, p.369])

Théorème. *Toute matrice A de type $n \times n$ qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

(cf. [Anton, p.370] et [Cairoli, p.233])

Sous-espaces propres

Soit λ une valeur propre de A. L'ensemble des solutions du système $(A - \lambda I) \cdot x = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé *sous-espace propre* de A associé à λ. Ce sous-espace est noté $S(\lambda)$ (cf. [Anton, p.371] et [Cairoli, p.227 et p. 228]).

Dimension maximale des sous-espaces propres. Soit λ_0 une valeur propre de A. Si k est la multiplicité de λ_0 en tant que racine du polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire si $\det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_0)^k p(\lambda)$, où $p(\lambda)$ est un polynôme tel que $p(\lambda_0) \neq 0$, alors

$$\dim S(\lambda_0) \leq k$$

(cf. [Anton, p.371] et [Cairoli, p.231]).

Théorème. *Une matrice A est diagonalisable (à l'aide d'une matrice P dont les coefficients sont des nombres réels) si et seulement si toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont réelles et pour toute racine λ de ce polynôme,* $\dim S(\lambda)$ *est égale à la multiplicité de λ en tant que racine de ce polynôme.*

(cf. [Cairoli, p.233])

Diagonalisation orthogonale

Proposition. Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique A, associés à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux pour le produit scalaire euclidien (cf. [Cairoli, p.244]).

Théorème. *Soit A une matrice de type $n \times n$.*
(1) *Si A est symétrique, alors toute solution de l'équation* $\det(A-\lambda I) = 0$ *est réelle.*
(2) *Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T \cdot A \cdot P$ est diagonale si et seulement si A est symétrique.*

(cf. [Anton, p.376] et [Cairoli, p.246])

Diagonalisation en nombres complexes

Dans ce paragraphe, les matrices sont à coefficients dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En remplaçant dans les chapitres 1 à 6 les nombres réels par des nombres complexes, tous les résultats qui y sont énoncés restent valables. Une telle généralisation conduit à des polynômes caractéristiques à coefficients complexes et par suite à des valeurs propres complexes et à une diagonalisation à l'aide de matrices P dont les coefficients sont des nombres complexes. Les conditions dans lesquelles une matrice est diagonalisable à l'aide d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont données par le théorème suivant.

Théorème. *Soit A une matrice de type $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une matrice P à coefficients dans $\mathbb{C}$ telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.*

(2) *A admet dans $\mathbb{C}^n$ n vecteurs propres linéairement indépendants.*

(3) *Pour toute racine λ dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de A,* $\dim S(\lambda)$ *est égale à la multiplicité de λ en tant que racine de ce polynôme (cette condition est vérifiée si toutes les valeurs propres sont simples).*

(cf. [Anton, p.544 et p.561] et [Cairoli, p.305])

Exercices

8.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les polynômes caractéristiques de A et de B.

(b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices A et B.

8.2. Vérifier que 7 est une valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 12 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

puis trouver, sans calcul, la dimension du sous-espace propre correspondant.

8.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les valeurs propres de A.

(b) Pour chaque valeur propre λ, déterminer le rang de $A - \lambda I$ ainsi que la dimension de l'ensemble des solutions du système $(A - \lambda I)x = 0$.

8.4. *Propriétés des valeurs propres.*

(a) Montrer qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.

(b) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

(c) Soit A une matrice carrée et k un entier positif. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors λ^k est une valeur propre de A^k.

8.5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6/5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les valeurs propres de A.

(b) Trouver les bases des sous-espaces propres de A.

(c) Peut-on déduire de (a) si A est inversible ou non ?

(d) Donner les valeurs propres de A^2.

(e) Donner les bases des sous-espaces propres de A^2.

8.6. Soit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les valeurs propres de B.

(b) Trouver les bases des sous-espaces propres de B.

(c) Déduire de (a) que B est inversible.

(d) Donner les valeurs propres de B^{-1}.

(e) Donner les bases des sous-espaces propres de B^{-1}.

8.7. Soit A et B deux matrices de type $n \times n$ et P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = B$. Montrer que les polynômes caractéristiques de A et B sont égaux.

8.8. Sans faire de calcul, trouver les valeurs propres de A^9, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \pi & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 13 & 3 & 2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

8.9. Soit A la matrice de l'exercice 8.3.

(a) En utilisant les résultats de l'exercice 8.3, montrer que A est diagonalisable.

(b) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

8.10. (a) Pour quelles valeurs de k et ℓ est-ce que 0 est une valeur propre de multiplicité algébrique 2 de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & \ell & 3 \end{pmatrix} ?$$

(b) Pour les valeurs de k et ℓ trouvées, A est-elle diagonalisable ?

8.11. (a) Soient A une matrice de type $n \times n$, P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Exprimer $A, A^2, A^3, \dots, A^n$ en fonction de P et $D, D^2, D^3, \dots, D^n$.

(b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n et $\lim_{n\to\infty} A^n$.

8.12. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}, \qquad \text{où } 0 \le p\,,\ q \le 1\,.$$

(a) Trouver les valeurs propres de P en fonction de p et q.

(b) Expliquer, sans faire de calcul, pourquoi P est diagonalisable pour tout choix de p et q.

(c) Diagonaliser P en fonction de p et q.

(d) Donner des conditions sur p et q pour l'existence de $\lim_{k\to\infty} P^k$.

(e) Calculer $\lim_{k\to\infty} P^k$ quand elle existe.

8.13. On définit l'exponentielle e^A d'une matrice A par la formule

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\,.$$

Dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculer chaque terme de la série et en déduire les coefficients de la matrice e^A.

8.14 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $e^A e^B$ et e^{A+B}.

8.15 (*). On définit le sinus d'une matrice A, noté $\sin(A)$, par la formule

$$\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculer chaque terme de la série et en déduire les coefficients de la matrice $\sin(A)$.

8.16 (*). *Valeurs propres d'une matrice orthogonale.* Soit A une matrice orthogonale de type $n \times n$, λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé à λ.

(a) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien. Calculer $\|Ax\|^2$ en fonction de λ et de $\|x\|$.

(b) En déduire que $\lambda = \pm 1$.

8.17 (*). Soit A une matrice de type $n \times n$ telle que $A^2 = A$.

(a) Vérifier que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

(b) Montrer que si $A \neq \mathbb{O}$, alors 1 est valeur propre de A, et que si $A \neq I_n$, alors 0 est valeur propre de A.

(c) Exhiber une matrice A non nulle, différente de I_n et vérifiant la relation $A^2 = A$.

8.18. Dans chacun des cas suivants, déterminer si A est diagonalisable et, dans l'affirmative, trouver la matrice P qui diagonalise A et calculer $P^{-1}AP$.

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1/2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.19. Diagonaliser orthogonalement la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.20. (a) Montrer que si v est une matrice de type $n \times 1$, alors $I_n - vv^T$ est orthogonalement diagonalisable.

(b) Montrer que si $v \neq 0$, alors v est un vecteur propre de $I_n - vv^T$.

(c) Montrer que si w est orthogonal à v (pour le produit scalaire euclidien) et $w \neq 0$, alors w est un vecteur propre de $I_n - vv^T$.

(d) Trouver une matrice orthogonale P qui diagonalise $I_n - vv^T$, avec $v^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.21. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) Montrer que les vecteurs propres de A sont orthogonaux.

(c) Diagonaliser orthogonalement A.

8.22. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2t & 0 \\ 0 & 1 & -3t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour quelles valeurs de t la matrice A admet-elle trois valeurs propres réelles ?

(b) Pour les valeurs de t trouvées en (a), quelle est la valeur propre qui a la plus grande valeur absolue ?

(c) Trouver les vecteurs propres de A associés à cette valeur propre.

(d) Existe-t-il des valeurs de t pour lesquelles A n'a que deux valeurs propres distinctes ? Si oui, trouver les vecteurs propres qui leur sont associés.

8.23. Montrer que le terme constant du polynôme caractéristique d'une matrice A est égal au déterminant de A.

8.24. Soit A et B deux matrices de type $n \times n$ ayant en commun n vecteurs propres linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $AB = BA$.

8.25. (a) Pour quelle raison la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale ?

(b) Diagonaliser A.

(c) Calculer A^n pour $n \geq 1$.

(d) La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = -1$?

8.26 (*). Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les valeurs propres de A.

(b) En vertu de quel théorème peut-on conclure que A est diagonalisable ?

(c) A l'aide de la formule exprimant la réduction de A à la forme diagonale, montrer, sans calculer la matrice de passage ni les puissances de A, que $A^4 - 5A^2 + 4I_4 = \mathbb{O}$.

(d) Relativement au polynôme caractéristique de A, quelle conclusion tirez-vous de (c) ?

8.27 (*). Soit A une matrice de type 3×3 dont les valeurs propres sont $-1, 2, 3$ et dont les vecteurs propres correspondants sont notés respectivement x_1, x_2, x_3.

(a) Ces trois vecteurs sont-ils des vecteurs propres de la matrice

$$B = I_3 + \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}A^2 \text{ ?}$$

(b) Quelles sont les valeurs propres de B ?

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Qu'en est-il de B ? Si la réponse est affirmative pour les deux matrices, peut-on les diagonaliser au moyen d'une même matrice P ? Justifier chacune des réponses.

8.28 (*). Considérons la matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Quelle propriété de A permet d'affirmer sans calcul que A est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale ?

(b) Quelle propriété de A permet d'affirmer sans calcul que toute valeur propre de A est égale à 1 ou -1 ?

(c) Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(d) Quelle est la transformation matricielle associée à A quand $n = 2$?

(e) Même question pour $n = 3$.

8.29 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer toutes les valeurs de a, b, c telles que $\det(A) = \det(B)$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

(b) Déterminer toutes les valeurs de a, b, c telles que A et B ont le même ensemble de valeurs propres.

(c) Est-ce qu'il existe des valeurs de a, b, c telles que (a) et (b) sont vérifiées simultanément ? Dans l'affirmative, existe-t-il une matrice R telle que $A = R^{-1}BR$? Si oui, déterminer R.

8.30. *Diagonalisation en nombres complexes.* Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les nombres complexes, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A, puis trouver une matrice inversible P à coefficients complexes telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

8.31. *Diagonalisation en nombres complexes.* Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les nombres complexes, calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Peut-on trouver une matrice inversible P à coefficients complexes telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale ? Si oui, trouver cette matrice.

Chapitre 9

Transformations linéaires

Définition

Une *transformation linéaire* (ou *application linéaire*) T est une application d'un espace vectoriel V dans un espace vectoriel W vérifiant, pour tout u et v dans V et tout nombre k,

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, et

(2) $T(ku) = kT(u)$

(cf. [Anton, p.383] et [Cairoli, p.160]).

Propriétés des transformations linéaires

(1) Si $T : V \longrightarrow W$ est une transformation linéaire, alors $T(0) = 0$ et $T(kv + \ell w) = kT(v) + \ell T(w)$, pour tous v et w dans V et tous nombres k et ℓ.

(2) Si $T_1 : V \longrightarrow W$ et $T_2 : W \longrightarrow U$ sont deux transformations linéaires, alors $T_2 \circ T_1 : V \longrightarrow U$ est aussi une transformation linéaire.

(3) Une transformation linéaire $T : V \longrightarrow W$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de V.

(4) L'image d'une famille liée par une transformation linéaire est aussi une famille liée.

(cf. [Anton, p.388 à p.391] et [Cairoli, p.161])

Images et images réciproques de sous-espaces vectoriels

Proposition. Soit $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire.

(1) L'image $T(S)$ de tout sous-espace vectoriel S de V est un sous-espace vectoriel de W.

(2) L'image réciproque $T^{-1}(U)$ de tout sous-espace vectoriel U de W est un sous-espace vectoriel de V.

(cf. [Anton, p.397] et [Cairoli, p.165])

Noyau, image et rang d'une transformation linéaire. Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire.

(1) On appelle *noyau* de T, et on note $\ker(T)$, le sous-espace vectoriel $T^{-1}\big(\{0\}\big)$; c'est l'ensemble des vecteurs v de V tels que $T(v) = 0$.

(2) On appelle *image* de T, et on note $\mathrm{Im}(T)$, le sous-espace vectoriel $T(V)$; c'est l'ensemble des vecteurs w de W tels que $w = T(v)$ pour au moins un v dans V.

(3) On appelle *rang* de T, et on note $\mathrm{rg}(T)$, la dimension de $\mathrm{Im}(T)$ lorsqu'elle est finie. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille génératrice de V, alors

$$\mathrm{rg}(T) = \mathrm{rg}\big(T(v_1), \ldots, T(v_n)\big) = \dim \mathscr{L}\big(T(v_1), \ldots, T(v_n)\big) .$$

(cf. [Anton, p.395 et p.397] et [Cairoli, p.166]. *Attention* : en anglais, $\ker(T)$ est appelé « *kernel* of T » et $\mathrm{Im}(T)$ est appelé « *range* of T ».)

Théorème. *Soit $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire. Si V est de dimension finie, alors*

$$\dim \ker(T) + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(T)}_{\mathrm{rg}(T)} = \dim V .$$

(cf. [Anton, p.398] et [Cairoli, p.167])

Transformations linéaires injectives. Une transformation linéaire $T : V \longrightarrow W$ est *injective* si $T(v_1) = T(v_2)$ entraîne $v_1 = v_2$. Elle est *surjective* si $\mathrm{Im}(T) = W$ (cf. [Anton, p.402] et [Cairoli, p.159]).

Proposition. Une transformation linéaire T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0\}$ (cf. [Anton, p.402] et [Cairoli, p.166]).

Cas des espaces vectoriels de dimension finie

Théorème. *Soient V et W deux espaces vectoriels de même dimension finie et $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est injective ;*
(2) $\ker(T) = \{0\}$ *;*
(3) *T est surjective.*

(cf. [Anton, p.404] et [Cairoli, p.168])

Matrices de transformations linéaires. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions respectivement n et m finies, $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ une base de W. La *matrice de la transformation T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$* est la matrice de type $m \times n$, noté $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, définie par

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \Big(\big[T(e_1)\big]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, \big[T(e_2)\big]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \big[T(e_n)\big]_{\mathcal{B}'} \Big)$$

(cf. [Anton, p.412] et [Cairoli, p.171]).

Théorème. *Pour tout v dans V,*

$$\big[T(v)\big]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}\,.$$

(cf. [Anton, p.412] et [Cairoli, p.174])

Notation. Si $V = W$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on écrit $[T]_{\mathcal{B}}$ au lieu de $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Composition de transformations linéaires. Soient V, W et U trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases respectives de ces trois espaces, $T : V \longrightarrow W$ et $S : W \longrightarrow U$ deux transformations linéaires.

Théorème. *La matrice de la transformation linéaire $S \circ T : V \longrightarrow U$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ est donnée par*

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\ .$$

(cf. [Anton, p.419] et [Cairoli, p.176])

Effet d'un changement de base sur la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel V et $T : V \longrightarrow V$ une transformation linéaire.

Théorème. *La matrice de T dans $\mathcal{B}'$ s'exprime à l'aide de la matrice de T dans $\mathcal{B}$ et de la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ par la relation*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,.$$

(cf. [Anton, p.427] et [Cairoli, p.179 et p.180])

Exercices

9.1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire et de la norme qui s'en déduit. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

(a) $T_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $T_1(x) = \langle v, x \rangle$, où v dans $\mathbb{R}^n$ est fixé ;

(b) $T_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $T_2(x) = \|x\|$;

(c) $T_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $T_3(x) = A \cdot x$, où A est une matrice de type $m \times n$ fixée.

9.2. Soit $\mathcal{M}_{mn}$ l'ensemble des matrices de type $m \times n$. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

(a) $T_1 : \mathcal{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $T_1(A) = \mathrm{Tr}(A)$;

(b) $T_2 : \mathcal{M}_{mn} \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$, avec $T_2(A) = A^T$;

(c) $T_3 : \mathcal{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $T_3(A) = \sum_{k=1}^{n} (A_{1k})^2$.

9.3. (a) Soit $V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T : V \to W$ la transformation définie par $T(f) = f'$. Montrer que T est linéaire.

(b) Soit $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}$, x_0 un nombre fixé dans $\mathbb{R}$ et $T : V \to W$ définie par $T(f) = f(x_0)$. Montrer que T est linéaire.

9.4. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et u un vecteur non nul de V.

(a) Montrer que pour tout w dans V, l'application T_w de $\mathbb{R}$ dans V définie par $T_w(x) = x \cdot w$ est linéaire.

(b) Montrer que l'application $T : V \longrightarrow V$ définie par $T(v) = \mathrm{proj}_u\, v$ est linéaire.

9.5. Dans chacun des cas suivants, dire si l'application T de l'espace vectoriel V dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

(a) V est l'espace des matrices de type 2×2 et $T(X) = \det(X)$.

(b) V est $\mathbb{R}^2$, v est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$ et $T(x) = \det(x \,\vdots\, v)$.

9.6. Considérons la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (1, -2, 0)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$, et soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformation linéaire telle que

$$T(v_1) = (4, 1)\,, \qquad T(v_2) = (0, 1)\,, \qquad T(v_3) = (-1, 0)\,.$$

Trouver une formule pour $T(x_1, x_2, x_3)$ et en déduire $T(1, 2, 7)$. (*Indication :* On peut utiliser l'exercice 2.23.)

9.7. Existe-t-il une application linéaire T de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$, où $\mathcal{P}_2$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2, qui vérifie

$$T(1 + t) = 1\,, \;\; T(1 - t) = t\,, \;\; T(1) = t^2 \;?$$

Si oui, donner $T(p)$ pour un polynôme quelconque p.

9.8. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

(a) Vérifier que l'application $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ définie par $T\big(p(x)\big) = xp(x)$ est linéaire.

(b) Donner le noyau de T.

(c) Trouver une base de l'image de T.

9.9. Décrire le noyau et l'image des applications linéaires définies dans l'exercice 9.3.

9.10 (*). Dans chacun des cas suivants, dire si l'application considérée est linéaire.

(a) L'application $T : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt\,,$$

pour tout $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) L'application $T : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $T(f)(x) = f(x + v)$, où v dans $\mathbb{R}$ est fixé.

(c) L'application $T : V \longrightarrow W$ définie par $T(x) = T_0(x) + w$, où T_0 est une application linéaire de l'espace vectoriel V dans l'espace vectoriel W et w dans W est fixé.

9.11 (*). *Une transformation de type shift.* Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)\,.$$

(a) Montrer que T est linéaire.

(b) Déterminer $T \circ T$. Est-ce que $T \circ T$ est linéaire ?

(c) Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, déterminer $T(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

9.12 (*). Soit T une application linéaire d'un espace vectoriel V dans un espace vectoriel W et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V. Montrer que si la famille $\big\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\big\}$ est libre, alors la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ l'est aussi.

9.13 (*). Considérons l'application $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ définie par $T(A) = A - A^T$.

(a) Montrer que T est linéaire.

(b) Décrire le noyau et l'image de T.

9.14. Soit T l'application lineaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(x) = A \cdot x$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base du noyau de T.

(b) Donner une base de l'image de T.

(c) Quel est le rang de T ?

9.15. Soit $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 et soit $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

une base canonique de V. Déterminer le noyau, l'image, et le rang de chacune des deux transformations suivantes après avoir démontré qu'elles sont linéaires.

(a) $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $T(A) = [A]_{\mathcal{B}}$.

(b) $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$, définie par

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3 + x_4M_4\,.$$

(c) Déterminer la condition sur m et n pour pouvoir généraliser ces deux transformations à $\mathcal{M}_{n\times n}$ et $\mathbb{R}^m$.

9.16. Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit T la transformation matricielle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ associée à A. Montrer que si A est symétrique, alors chaque vecteur de $\ker(T)$ est orthogonal (pour le produit scalaire euclidien) à tous les vecteurs de $\mathrm{Im}(T)$.

9.17. Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que si T est une application linéaire bijective de V dans W, alors $\dim(V) = \dim(W)$.

9.18. (a) Trouver une transformation linéaire bijective de $\mathcal{P}_3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3, dans $\mathbb{R}^4$ et donner son inverse.

(b) Peut-on trouver une transformation linéaire bijective de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

9.19. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et T l'application de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ définie par $T(p) = p' + 3p''$.

(a) Trouver une base du noyau de T.

(b) Trouver une base de l'image de T.

9.20. Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ définie dans l'exercice 9.15. Considérons l'application linéaire $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ définie par

$$T_1(e_1) = M_1 + M_2\,, \quad T_1(e_2) = M_3 + M_4\,, \quad T_1(e_3) = M_1 + M_3\,,$$

où $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^3$, et l'application linéaire T_2 de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T_2(B) = \mathrm{Tr}(B)$, pour tout B dans $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Ecrire les matrices, par rapport aux bonnes bases, de T_1, T_2 et $T_2 \circ T_1$.

9.21. Soit T une transformation linéaire de $\mathcal{S}_{2\times 2}$ dans $\mathcal{M}_{2\times 2}$, où $\mathcal{M}_{2\times 2}$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ (cf. exercice 9.15) et $\mathcal{S}_{2\times 2}$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ des matrices symétriques muni de la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3)$, où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices de $\mathcal{S}_{2\times 2}$ suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer $[A_1]_{\mathcal{E}}$, $[A_2]_{\mathcal{E}}$ et $[A_3]_{\mathcal{E}}$.

(b) Peut-on trouver $T(A)$, pour tout A dans $\mathcal{S}_{2\times 2}$, si on ne connaît que $T(A_1)$, $T(A_2)$ et $T(A_3)$?

(c) Trouver la matrice de T dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$, sachant que

$$\big[T(A_1)\big]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \big[T(A_2)\big]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \big[T(A_3)\big]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

9.22. Soit T une application linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie dans un espace vectoriel W. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base de $\ker(T)$ et si $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ sont des vecteurs de V tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, alors $\big(T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$. Quelle relation existe-t-il entre $\dim\big(\ker(T)\big)$ et $\mathrm{rg}(T)$?

9.23 (*). Soit V et W deux espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Supposons que $\dim V = n$. Démontrer les assertions suivantes.

(a) Si $\ker(T) = \{0\}$, alors l'image d'une famille libre est libre.

(b) Si $\dim\big(\ker(T)\big) = 0$, alors $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = n$.

(c) Si $\dim\big(\ker(T)\big) = n$, alors $\mathrm{rg}(T) = 0$.

9.24 (*). Soit

$$V = \left\{ v = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell \\ k \\ k \end{pmatrix}, \ \ell, k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad W = \left\{ w = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donner une base de V et une base de W.

(c) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ qui complète celle de V.

(d) Trouver une application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant $\ker(T) = V$ et $\mathrm{Im}(T) = W$.

(e) Déterminer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ par T.

(f) T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

9.25 (*). Soient A, B et C des matrices de types $m \times n$, $m \times p$ et $p \times n$ respectivement, telles que

$$A = BC\,.$$

On appelle encore noyau et image d'une matrice le noyau et l'image de la transformation matricielle associée canoniquement à cette matrice. Démontrer les assertions suivantes.

(a) Si les matrices A et B ont le même rang, alors elles ont la même image.

(b) Si les matrices A et C ont le même rang, alors elles ont le même noyau.

9.26 (*). Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère le plan $\mathbf{p}$ d'équation $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et le vecteur $v = e_1 + 3e_2 - e_3$. Soit T la transformation linéaire déterminée par $T(x) = x$, pour tout x dans $\mathbf{p}$, et $T(v) = 3v$. Calculer $[T]_{\mathcal{B}}$.

9.27. A l'aide de l'information donnée et sachant que la transformation T est linéaire, déterminer dans chacun des cas ci-dessous la dimension de $\ker(T)$.

(a) $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ est de rang 3.

(b) $T : \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ est de rang 1, où $\mathcal{P}_n$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

(c) $T : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ayant pour image $\mathbb{R}^3$.

(d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ est de rang 3, où $\mathcal{M}_{2\times 2}$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

9.28. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n. Déterminer dans chacun des cas suivants si la transformation linéaire T est bijective.

(a) $T : V \longrightarrow V$ telle que $\dim\big(\ker(T)\big) = 0$.

(b) $T : V \longrightarrow V$ telle que $\mathrm{rg}(T) = n - 1$.

(c) $T : V \longrightarrow V$ telle que $\mathrm{Im}(T) = V$.

(d) $T : V \longrightarrow \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel des polynômes, telle que $\mathrm{rg}(T) = n$.

(e) $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n < m$.

9.29. Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Soit $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^2$ et $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$T(X) = \begin{pmatrix} Xv \\ -- \\ Xw \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver $T(I_2)$.

(b) Montrer que T est une transformation linéaire et bijective.

(c) Ecrire $T(X)$ en fonction des coefficients $(X)_{ij} = x_{ij}$.

(d) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ définie dans l'exercice 9.15 et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

9.30. Soit V et W deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m, avec $n > m$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de W. Pour tout $1 \leq k \leq m$, on considère l'application linéaire T_k de V dans W telle que

$$\begin{cases} T_k(e_i) = f_i & \text{si } 1 \leq i \leq k\,, \\ T_k(e_i) = a_{1,i}f_1 + \cdots + a_{k,i}f_k & \text{si } k < i \leq n\,, \end{cases}$$

où $a_{1,i}, \ldots, a_{k,i}$ sont des nombres.

(a) Trouver la matrice $[T_k]_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$.

(b) Construire un exemple pour $V = \mathbb{R}^4$ et $W = \mathbb{R}^3$.

9.31. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9x_1 + 23x_2 \\ 20x_1 \\ 9x_1 + 33x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver la matrice $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ dans les bases $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Vérifier que pour tout x dans $\mathbb{R}^2$, $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}} = \big[T(x)\big]_{\mathcal{B}'}$.

9.32. Soient x_1, x_2 et x_3 trois nombres réels distincts tels que $x_1 < x_2 < x_3$, et soit $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$T\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que T est une application linéaire.

(b) Montrer que T est injective. Est-elle bijective ?

(c) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = \big(2, 2-x, (2-x)^2\big)$ une base de $\mathcal{P}_2$. Déterminer la matrice $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

(d) Verifier que si k_1, k_2 et k_3 sont trois nombres réels quelconques, alors,

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}\right) = k_1 P_1(x) + k_2 P_2(x) + k_3 P_3(x)\,,$$

où

$$P_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,, \qquad P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,,$$

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,.$$

9.33. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de V, W un sous-espace vectoriel de V et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base orthonormée de W. Soit $[P]_{\mathcal{B}}$ la matrice de la projection de V sur W dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$[P]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{m} [f_i]_{\mathcal{B}} \, [f_i]_{\mathcal{B}}^{T}\,.$$

Rappel. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors le produit scalaire s'exprime par la formule $\langle x, y\rangle = [y]_{\mathcal{B}}^T \cdot [x]_{\mathcal{B}}$.

9.34. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_4 \\ 4x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 \\ x_1 & + & 4x_4 & & \\ 2x_2 & + & 3x_3 & & \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base de $\mathrm{Im}(T)$ et une base de $\ker(T)$.

(b) Déterminer la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$, où

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.35 (*). Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Considérons la base $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ de $\mathcal{P}_2$, où $p_1(x) = x^2 - 3x + 2$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = x^2 - x - 2$. Soit $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ la transformation linéaire telle que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver $\left[T(p_1)\right]_{\mathcal{B}}$, $\left[T(p_2)\right]_{\mathcal{B}}$ et $\left[T(p_3)\right]_{\mathcal{B}}$.

(b) Trouver $T(p_1)$, $T(p_2)$ et $T(p_3)$.

(c) Déterminer $T(p)(x)$ pour un polynôme quelconque p dans $\mathcal{P}_2$. *Remarque.* On peut exprimer un polynôme dans la base $\mathcal{B}$ plus facilement si l'on constate que $p_1(x) = (x-1)(x-2)$, $p_2(x) = (x-1)(x+1)$ et $p_3(x) = (x-2)(x+1)$.

(d) Calculer $T(x^2 + 3x + 5)$ à partir de (c).

9.36 (*). Considérons la transformation linéaire $D : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ défini par $D(p)(x) = xp'(x)$. En (a) et (b) ci-dessous, déterminer la matrice de D dans la base (p_1, p_2, p_3) :

(a) $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$;

(b) $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = 3x + 2$, $p_3(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

(c) Calculer $D(4x^2 - 16x + 1)$ à l'aide de la matrice déduite de (a).

(d) Calculer $D(4x^2 - 16x + 1)$ à l'aide de la matrice déduite de (b).

9.37 (*). Soit $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ la transformation linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+2c \\ c+3d & d \end{pmatrix}$$

et $S : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ définie par

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3 \,.$$

(a) Montrer que S est une transformation linéaire bijective.

(b) Déterminer la matrice de T^2 dans la base canonique de l'exercice 9.15 de deux façons différentes.

(c) Soit $G = S \circ T \circ S^{-1} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$. Déterminer la matrice $[G]_{\mathcal{B}'}$ de G dans la base canonique $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}_3$.

(d) Donner $G(p)$, où p est un polynôme quelconque de $\mathcal{P}_3$.

9.38 (*). Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $\mathcal{E}' = (e_1', e_2', e_3')$, où $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (0,1,1)$. Calculer la matrice $[T]_{\mathcal{E}'}$ de T par rapport à cette base.

(b) Même question pour la base $\mathcal{E}'' = (e_1'', e_2'', e_3'')$, où $e_1'' = (2,-1,2)$, $e_2'' = (0,1,-1)$ et $e_3'' = (0,0,1)$.

(c) Calculer les matrices des applications linéaires T^2, T^3 et T^{10} dans la base canonique.

9.39. Soit V l'espace vectoriel des matrices symétriques de type 2×2 muni de la base

$$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et W l'espace vectoriel des matrices diagonales de type 2×2 muni de la base canonique

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Considérons la transformation linéaire $T_1 : W \longrightarrow V$ définie par

$$T_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

et $T_2 : V \longrightarrow V$ définie par

$$T_2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 2b+4c \\ 2b+4c & 4c \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que T_2 est une transformation linéaire.

(b) Déterminer les matrices $[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, $[T_2]_{\mathcal{B}'}$ et $[T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(c) Donner une formule reliant les matrices de (b) et vérifier sa validité.

9.40. Désignons par W l'espace vectoriel des matrices diagonales de type 2×2 muni de sa base canonique (cf. exercice 9.39). Soit $T_1 : W \longrightarrow \mathcal{P}_2$ la transformation linéaire définie par

$$T_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = 2a - 3bx^2$$

et soit $T_2 : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$ la transformation linéaire définie par

$$T_2(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 3b & 3c \end{pmatrix}.$$

(a) Donner $[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, $[T_2]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ et $[T_1]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sont les bases canoniques de W, $\mathcal{M}_{2\times 2}$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement.

(b) Relier par une formule les matrices de (a).

(c) Vérifier par le calcul la validité de la formule exhibée en (b).

9.41. Déterminer les matrices $[T]_{\mathcal{B}}$ et $[T]_{\mathcal{B}'}$, où $T : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ est définie par $T\big(p(x)\big) = p(x+1)$, $\mathcal{B} = (3x+6, 2x+10)$ et $\mathcal{B}' = (2, 2x+3)$. Vérifier ensuite que $[T]_{\mathcal{B}'} = [P]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot [P]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

9.42. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base d'un espace vectoriel V et soit $T : V \longrightarrow V$ une transformation linéaire telle que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver $[T]_{\mathcal{B}'}$, où $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est la base de V définie par

$$v_1 = u_1\,, \qquad v_2 = u_1 + u_2\,, \qquad v_3 = u_1 + u_2 + u_3\,.$$

9.43. Soient M_1 et M_2 deux matrices de type $n \times n$ telles qu'il existe une matrice inversible P vérifiant $M_2 = P^{-1} \cdot M_1 \cdot P$. Dans ce cas, on dit que M_1 et M_2 sont *semblables.*

(a) Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(x) = M_1 \cdot x$. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que M_2 soit la matrice de la transformation T dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.44. Dans les deux cas ci-dessous, trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de T est diagonale :

(a) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2)$;

(b) $T(x_1, x_2) = (4x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$.

9.45. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ définie par $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

(a) Vérifier que T est une application linéaire et obtenir sa représentation matricielle dans les bases canoniques.

(b) Faire un changement de base dans $\mathbb{R}^3$ pour obtenir la représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour T.

(c) Déterminer une matrice inversible P telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.46. Soit V un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et T l'application linéaire de V dans V dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T dans la base $\mathcal{B}' = (2e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$.

(b) A l'aide de (a), calculer la matrice $[T^n]_{\mathcal{B}}$ de T^n dans la base $\mathcal{B}$.

9.47 (*). Soit $T : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x) = x(1, -2, 3)$.

(a) Montrer que T est une application linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques.

(b) Faire un changement de base dans $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une représentation matricielle dont tous les coefficients sont 1.

(c) Déterminer une matrice inversible P telle que

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.48 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice d'une application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ (munis des bases canoniques).

(a) Déterminer une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de T est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la nouvelle base de $\mathbb{R}^2$.

(b) En déduire une matrice inversible P telle que

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.49 (*). Dans un espace vectoriel V de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on considère une transformation linéaire et inversible T. On sait que dans ce cas, les vecteurs $e_1' = T^{-1}(e_1), \ldots, e_n' = T^{-1}(e_n)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de V.

(a) Montrer que pour tout x dans V, $[x]_{\mathcal{B}'} = \big[T(x)\big]_{\mathcal{B}}$.

(b) En déduire que la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.

Chapitre 10

Résolution de systèmes différentiels

Systèmes différentiels du premier ordre

Un *système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants* est la donnée de n équations différentielles de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \dot{x}_1(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1n}x_n(t) & + & b_1 \\ \dot{x}_2(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2n}x_n(t) & + & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & & \vdots & \\ \dot{x}_n(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{nn}x_n(t) & + & b_n \end{array}\right.$$

où $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sont les fonctions inconnues, et a_{ij} et b_i sont des nombres réels (cf. [Cairoli, p.248]).

Ecriture matricielle. Tout système différentiel linéaire du premier ordre s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b\,,$$

où

$$A = (a_{ij})\,, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(cf. [Cairoli, p.248]).

Existence et unicité des solutions. Pour tout c dans $\mathbb{R}^n$, il existe une solution et une seule de l'équation $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b$ telle que $x(0) = c$ (cf. [Cairoli, p.249]).

Structure de l'ensemble des solutions lorsque $b = 0$

Soit V l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ et W l'ensemble des solutions de l'équation *homogène* $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$.

Proposition. L'ensemble W est un sous-espace vectoriel de V de dimension n (cf. [Cairoli, p.249 et p.250]).

Calcul des solutions de l'équation homogène dans le cas où A est diagonale. Si $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, alors le système admet une solution unique

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{a_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{a_n t} \end{pmatrix} \qquad \text{telle que } x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(cf. [Anton, p.442 et p.443]).

Calcul des solutions de l'équation homogène dans le cas où A est diagonalisable. Soit $P = (p_1 \mid \cdots \mid p_n)$ une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Si $y(t)$ est la solution de l'équation $\dot{y}(t) = D \cdot y(t)$, alors $x(t) = P \cdot y(t)$ est la solution de l'équation $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ (cf. [Anton, p.444]). De plus,

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} p_n \,,$$

où $k_1, \ldots, k_n$ sont des nombres.

Structure de l'ensemble des solutions lorsque $b \neq 0$

Soit $x_0(t)$ une solution particulière de l'équation $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b$. Toute solution de cette équation est de la forme

$$x(t) = x_0(t) + z(t)$$

où $z(t)$ est une solution de l'équation homogène associée $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ (cf. [Cairoli, p.250]).

Recherche d'une solution particulière

Exponentielle d'une matrice. Etant donné une matrice A de type $n \times n$, on appelle *exponentielle de A*, et on note $\exp(A)$, la matrice définie par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

(cf. [Cairoli, p.128 à p.130]).

Propriétés.

(1) La série qui définit $\exp(A)$ converge toujours.

(2) $\exp(\mathbb{O}) = I$, $\exp(kI) = e^k I$.

(3) Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

(4) $\big(\exp(A)\big)^{-1} = \exp(-A)$.

(5) Si P est une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$, alors $\exp(A) = P \cdot \mathrm{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) \cdot P^{-1}$.

(6) La fonction $t \longmapsto \exp(tA)$ est dérivable et $\big(\exp(tA)\big)' = A \cdot \exp(tA)$.

(cf. [Cairoli, p.130 et p.236])

Proposition. Si la matrice A est inversible, alors $x_0(t) = A^{-1} \cdot (\exp(tA) - I) \cdot b$ est une solution particulière de $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b$.

Solution générale d'un système différentiel

Théorème. *Soit c dans $\mathbb{R}^n$. Si la matrice A est inversible, alors l'unique solution du système différentiel $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b$ telle que $x(0) = c$ est*

$$x(t) = \exp(tA) \cdot c + A^{-1} \cdot \big(\exp(tA) - I\big) \cdot b\,.$$

(cf. [Cairoli, p.252]. *Attention* : Cairoli traite le cas général où les coordonnées de b sont des fonctions $b_i(t)$.)

Résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients complexes

Pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b\,,$$

où A est une matrice de type $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et b est dans $\mathbb{C}^n$, on peut appliquer tous les résultats présentés ci-dessus en remplaçant les nombres réels par des nombres complexes. La propriété « A est diagonalisable » doit alors être remplacée par « A est diagonalisable à l'aide d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ » (cf. [Cairoli, p.306]).

Résolution à l'aide des nombres complexes d'un système différentiel à coefficients réels

Soit A une matrice de type $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. S'il existe une matrice $P = (p_1 \vdots \cdots \vdots p_n)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors l'ensemble des solutions du système différentiel

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$$

peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = k_1 \Re(e^{\lambda_1 t} p_1) + \cdots + k_n \Re(e^{\lambda_n t} p_n) + k_1' \Im(e^{\lambda_1 t} p_1) + \cdots + k_n' \Im(e^{\lambda_n t} p_n)$$

où $\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z, et k_ℓ, k_ℓ', $\ell = 1, \ldots, n$, sont des nombres réels. *Attention* : il n'y a que n vecteurs linéairement indépendants dans l'expression de $x(t)$. En effet, si $\lambda_\ell = \alpha_\ell + i\beta_\ell$ est une valeur propre complexe de A et $p_\ell = u_\ell + iv_\ell$ est un vecteur propre complexe associé à λ_ℓ, alors $\overline{\lambda_\ell} = \alpha_\ell - i\beta_\ell$ est aussi une valeur propre de A et $\overline{p_\ell} = u_\ell - iv_\ell$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda_\ell}$.

Expression réduite. Toute solution du système $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ s'exprime sous la forme

$$x(t) = \sum \left(c_\ell e^{\alpha_\ell t} \left[\cos(\beta_\ell t) u_\ell - \sin(\beta_\ell t) v_\ell \right] + c_\ell' e^{\alpha_\ell t} \left[\sin(\beta_\ell t) u_\ell + \cos(\beta_\ell t) v_\ell \right] \right),$$

où la somme porte sur les valeurs propres $\lambda_\ell = \alpha_\ell + i\beta_\ell$ de A telles que $\beta_\ell \geq 0$, $p_\ell = u_\ell + iv_\ell$ et c_ℓ et c_ℓ' sont des nombres réels (cf. [Cairoli, p.307]).

Exercices

10.1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions différentiables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit W le sous-espace vectoriel de V dont les éléments sont les solutions du système différentiel

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{H}$$

Soit $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ les solutions de (H) telles que

$$z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $(z_1(t), \ldots, z_n(t))$ est une base de W.

10.2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = d, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = c\,, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

10.4. Résoudre l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 0\,.$$

(*Indication* : Poser $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = \dot{y}(t)$, écrire l'équation différentielle du second ordre comme un système différentiel du premier ordre, puis résoudre par rapport à $y_1(t)$ et $y_2(t)$.)

10.5. Soit A une matrice de type $n \times n$.

(a) Montrer que $\big(\exp(tA)\big)' = A\exp(tA)$.

(b) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Montrer que $\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})P^{-1}$.

10.6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver des nombres a_1, a_2, a_3 et une matrice inversible P tels que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

(b) Déduire de (a) la valeur de $\exp(tA)$ pour t dans $\mathbb{R}$.

(c) Vérifier que $\big(\exp(tA)\big)' = A\exp(tA)$.

10.7. Soit A comme dans l'exercice 10.2.

(a) Calculer $\exp(tA)$.

(b) Donner la solution générale du système $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$, où

$$b = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

10.8. Soit A comme dans l'exercice 10.3.

(a) Calculer $\exp(tA)$.

(b) Donner la solution générale du système $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$, où

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.9. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) - 2y_1(t) + 6y_2(t) - \dot{y}_1(t) - 3\dot{y}_2(t) = 0 \\ \ddot{y}_2(t) + 2y_1(t) - 6y_2(t) - \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) = 0\,. \end{cases}$$

(*Indication* : Ecrire ce système différentiel du second ordre comme un système différentiel du premier ordre en posant $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ et résoudre ensuite par rapport à x.)

10.10. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^n pour tout entier n. (*Indication* : Ecrire A comme somme de deux matrices particulières.)

(b) Calculer $\exp(tA)$.

(c) Donner la solution générale du système $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

10.11 (*). Résoudre l'équation différentielle

$$2\dddot{y}(t) - \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = 0\,.$$

(*Indication* : Poser $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = \dot{y}(t)$ et $y_3(t) = \ddot{y}(t)$, puis écrire l'équation différentielle du troisième ordre comme un système différentiel du premier ordre, et enfin, résoudre par rapport à y_1, y_2 et y_3.)

10.12 (*). Soit A comme dans les exercices 10.2 et 10.7 et

$$b(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le vecteur $y(s) = \big(\exp(-sA)\big) \cdot b(s)$, pour s dans $\mathbb{R}$.

(b) Calculer le vecteur $v(t) = \int_0^t y(s)\,ds$.

(c) Calculer le vecteur $x(t) = \big(\exp(tA)\big) \cdot v(t)$ et vérifier que $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$.

10.13 (*). Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) - 3\dot{y}_1(t) - 3y_2(t) = 0 \\ \ddot{y}_2(t) - 3\dot{y}_2(t) - 2\dot{y}_1(t) = 0\,. \end{cases}$$

(*Indication* : Procéder comme dans l'exercice 10.9.)

10.14. *Résolution à l'aide des nombres complexes.* En utilisant les nombres complexes, résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = d\,, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10.15 (*). *Résolution à l'aide des nombres complexes.* En utilisant les nombres complexes, résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = d\,, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -9/2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie

Applications de l'algèbre linéaire

Chapitre 11

Utilisation des transformations affines en infographie

Objectifs

Un des objectifs de l'infographie est de créer des algorithmes efficaces pour représenter des figures ou des objets sur un écran d'ordinateur. Le mode de représentation choisi doit faciliter le stockage et la transmission de l'information. Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment certaines notions des chapitres 1 à 4, et plus particulièrement les transformations affines, peuvent être utilisées pour réaliser à l'aide d'un ordinateur des dessins d'une classe d'objets couramment appelés des *fractales*.

Nous rappelons tout d'abord quelques méthodes usuelles pour dessiner des courbes et des figures géométriques simples.

Dessin d'une courbe à l'ordinateur. Le tracé de courbes simples, telles les paraboles, hyperboles et autres courbes de la forme $y = f(x)$, est généralement réalisé en effectuant un tracé point par point, ou tout au moins en reliant une suite de points situés sur la courbe par des segments de droites, comme illustré dans la figure 11.1.

Fig. 11.1 – Une courbe et son dessin approximatif à l'écran.

Dessin d'une figure géométrique. Les dessins de figures géométriques simples, telles les carrés, rectangles, disques, etc., sont généralement réalisés non pas selon le principe du tracé, comme les courbes, mais selon une méthode de remplissage : l'ordinateur noircit l'intérieur de la figure, comme dans la figure 11.2.

FIG. 11.2 – Dessin d'un carré par la méthode du remplissage.

Pour des figures simples, il est facile d'expliquer à l'ordinateur au moyen d'un programme quelle est la région à noircir.

Les objets fractals

Les *fractales* sont des objets irréguliers qui ont été beaucoup étudiés ces vingt dernières années, à cause des multiples applications dans lesquelles elles interviennent. Citons par exemple la modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, ou encore la description mathématique de la surface d'un nuage ou du feuillage d'un arbre.

Quatre fractales particulières. Dans ce chapitre, nous allons examiner quatre fractales particulières. Le *tamis de Sierpinski,* le *tapis de Sierpinski,* le *tétraèdre de Sierpinski* et *l'éponge de Menger.* Ces fractales sont représentées dans les illustrations aux pages 119 et 120. Il est assez naturel de dire que ces objets sont « plus épais » qu'une courbe mais « plus fins » qu'une figure géométrique simple.

Dans l'image du tamis de Sierpinski, on observe de nombreux trous triangulaires. La méthode du tracé ne conviendrait pas pour dessiner cet objet, car il serait très difficile de donner à l'ordinateur la description du tracé à effectuer. De plus, réaliser ce tracé prendrait beaucoup de temps. D'autre part, la méthode du remplissage ne convient pas non plus, car il serait tout aussi difficile d'expliquer à l'ordinateur quelles régions il faudrait noircir.

Compléments mathématiques

Pour expliquer le procédé qui permet de dessiner les fractales mentionnées ci-dessus, nous aurons besoin de quelques notions théoriques adaptées au problème.

Similitudes simples. Rappelons tout d'abord qu'une *similitude simple* du plan est une transformation affine $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$T(x) = s \cdot x + b = (s \cdot I_2) \cdot x + b\,,$$

où $0 < s < 1$ et b est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Une similitude simple T est donc la composée d'une contraction de rapport s et d'une translation de direction b.

Ensembles autosemblables. Un ensemble E dans $\mathbb{R}^n$ est *autosemblable* s'il existe s dans $]0,1[$ et m similitudes (simples) $T_1, \ldots, T_m$, toutes de rapport s, telles que

$$E = T_1(E) \cup \cdots \cup T_m(E) \tag{11.1}$$

et les ensembles $T_i(E)$ ne se chevauchent pas. Plus précisément, dans $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) les ensembles $T_i(E)$ peuvent avoir un bord en commun, mais pas de surface (respectivement volume) en commun.

Exemple. Soit E le carré unité. Nous allons vérifier que E est un ensemble autosemblable. Posons $s = 1/2$ et $m = 4$. Considérons en outre les quatre similitudes simples T_1, T_2, T_3 et T_4 de rapport $1/2$ définies par les formules

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad T_4(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

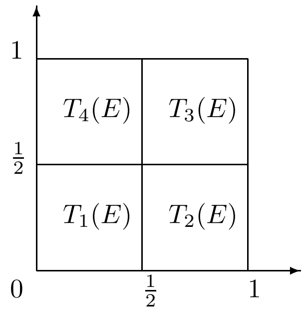


Fig. 11.3 – Décomposition de E en quatre carrés plus petits.

On voit sur la figure 11.3 que E est la réunion des quatres carrés $T_1(E)$, $T_2(E)$, $T_3(E)$ et $T_4(E)$, et que ceux-ci ne se chevauchent pas. Le carré E est donc un ensemble autosemblable.

Dimension d'un ensemble autosemblable. Nous allons donner ici la définition de la dimension d'un ensemble autosemblable. Cette notion diffère de celle relative aux espaces vectoriels.

La *dimension* (de Hausdorff) de l'ensemble autosemblable E défini en (11.1) est le nombre

$$d_H(E) = \frac{\ln m}{\ln(1/s)}\,.$$

On notera que m est le nombre de similitudes et que s est le rapport commun de ces similitudes.

Dans le cas du carré unité considéré ci-dessus, on trouve que

$$d_H(\text{carré unité}) = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2\,.$$

Un algorithme pour dessiner les ensembles autosemblables

Soit E_0 un ensemble quelconque dans $\mathbb{R}^2$ et $T_1, \ldots, T_m$ les similitudes simples de la formule (11.1). On va effectuer une suite de dessins, chacun construit à partir du précédent.

Etape 0 : Dessiner E_0.

Etape 1 : Dessiner $E_1 = T_1(E_0) \cup \cdots \cup T_m(E_0)$.

Etape 2 : Dessiner $E_2 = T_1(E_1) \cup \cdots \cup T_m(E_1)$.

$\vdots$

Etape n : Dessiner $E_n = T_1(E_{n-1}) \cup \cdots \cup T_m(E_{n-1})$.

$\vdots$

L'intérêt d'effectuer cette suite de dessins est expliqué par le résultat suivant.

Théorème. *La suite d'ensembles E_n s'approche de l'unique ensemble E tel que*

$$E = T_1(E) \cup \cdots \cup T_m(E)\,.$$

Au bout d'un certain nombre d'étapes, les dessins successifs vont donc se stabiliser autour d'une forme fixe, qui est le dessin de l'ensemble E. Dans beaucoup de cas, le nombre d'étapes nécessaires sera relativement petit.

Exemple. *Dessin du tamis de Sierpinski.* Posons $s = 1/2$, $m = 3$ et considérons les trois similitudes simples de rapport $1/2$ définies par les formules

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Prenons pour ensemble E_0 le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1/2,1)$.

Chaque étape de l'algorithme de dessin requiert alors trois calculs, soit un par similitude (voir la figure 11.4). On remarque que T_2 et T_3 sont chacune la composée de T_1 et d'une translation. Par conséquent, une fois que $T_1(E_{n-1})$ est dessiné, $T_2(E_{n-1})$ et $T_3(E_{n-1})$ s'obtiennent en appliquant une translation à $T_1(E_{n-1})$.

La valeur de la dimension de Hausdorff du tamis de Sierpinski est facile à calculer. Elle vaut

$$d_H(\text{tamis}) = \frac{\ln 3}{\ln \dfrac{1}{1/2}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,585\,.$$

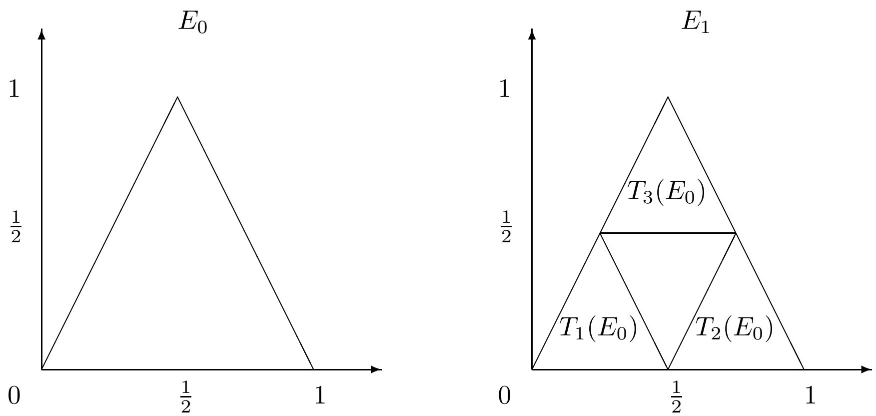


FIG. 11.4 – L'étape 1 pour le tamis de Sierpinski.

Exemple. *Dessin du tapis de Sierpinski.* Posons $s = 1/3$, $m = 8$ et considérons les huit similitudes simples de rapport 1/3 définies par les formules

$$T_1(x) = \frac{1}{3}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T_4(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

$$T_5(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad T_6(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

$$T_7(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad T_8(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Prenons pour ensemble E_0 le carré unité. Chaque étape de l'algorithme de dessin requiert alors huit calculs (voir la figure 11.5). On remarque à nouveau que pour $j = 2, \ldots, 8$, $T_j(E_{n-1})$ est obtenu en appliquant une translation à $T_1(E_{n-1})$.

La dimension de Hausdorff du tapis de Sierpinski se calcule comme suit :

$$d_H(\text{tapis}) = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{1/3}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1,893\,.$$

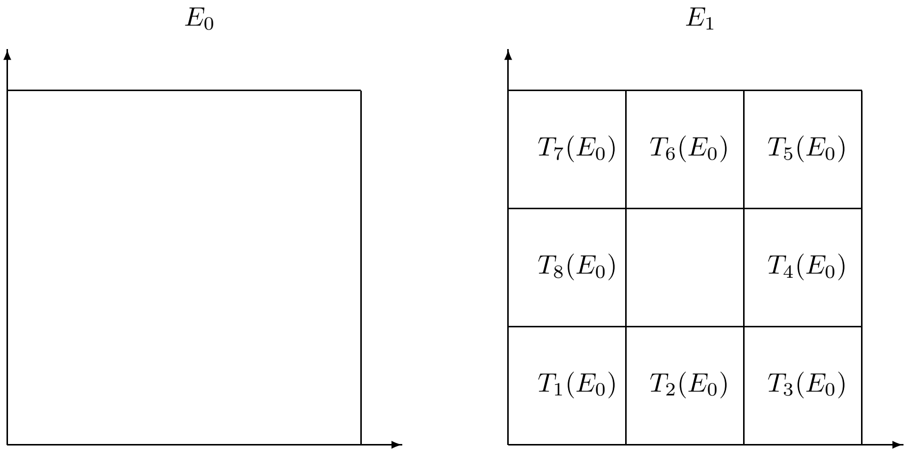


FIG. 11.5 – L'étape 1 pour le tapis de Sierpinski.

D'autres types de problèmes

A part le problème du dessin des fractales que nous avons examiné ici, il y a plusieurs autres problèmes intéressants liés à ces objets.

Par exemple, quelle serait une méthode simple et économique pour transmettre ces images à travers un réseau informatique ? Si l'on considère qu'un écran d'ordinateur est constitué de 1024×1024 pixels, est-on vraiment obligé de transmettre à travers le réseau la liste des pixels à colorier en noir ? Il serait préférable de transmettre plutot un ensemble d'informations plus réduit.

En fait, l'algorithme de dessin que nous avons décrit ci-dessus fournit une réponse à cette question : il suffit de transmettre les quelques nombres qui définissent les transformations affines $T_1, \ldots, T_m$ pour permettre la reconstitution de l'image ailleurs dans le réseau. Des variantes de cette approche sont utilisées pour de nombreuses images qui se trouvent sur le réseau Internet.

Un autre type de question serait : quelle est la résistance électrique du tamis de Sierpinski ? Ce type de question apparaît notamment dans des modèles de semiconducteurs. Nous n'y répondrons pas ici.

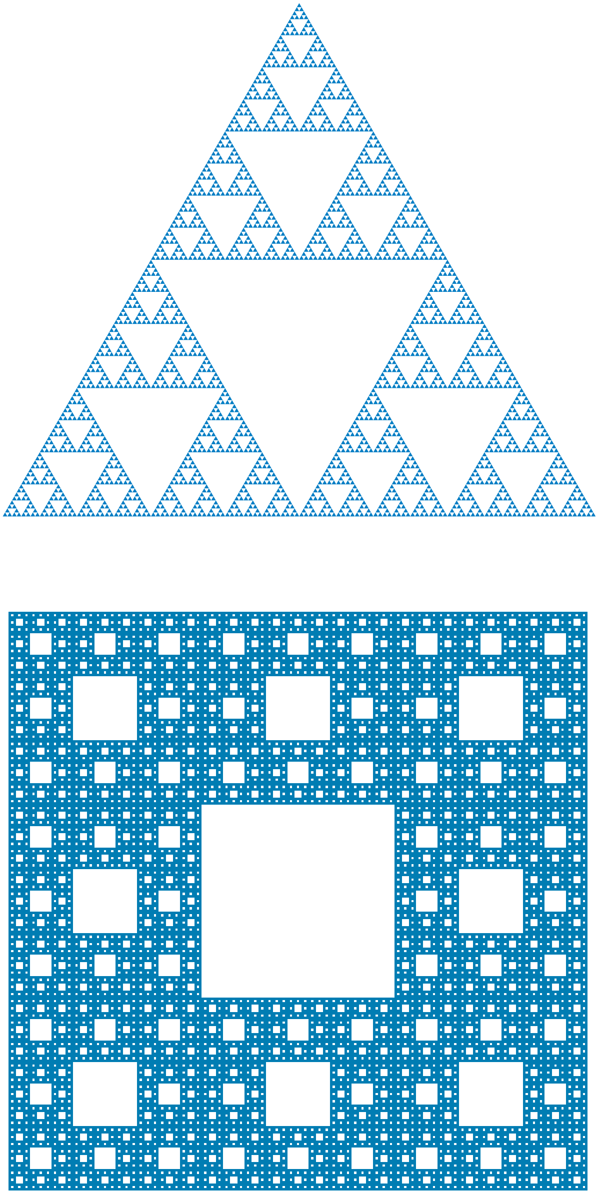


FIG. 11.6 – Le tamis et le tapis de Sierpinski.

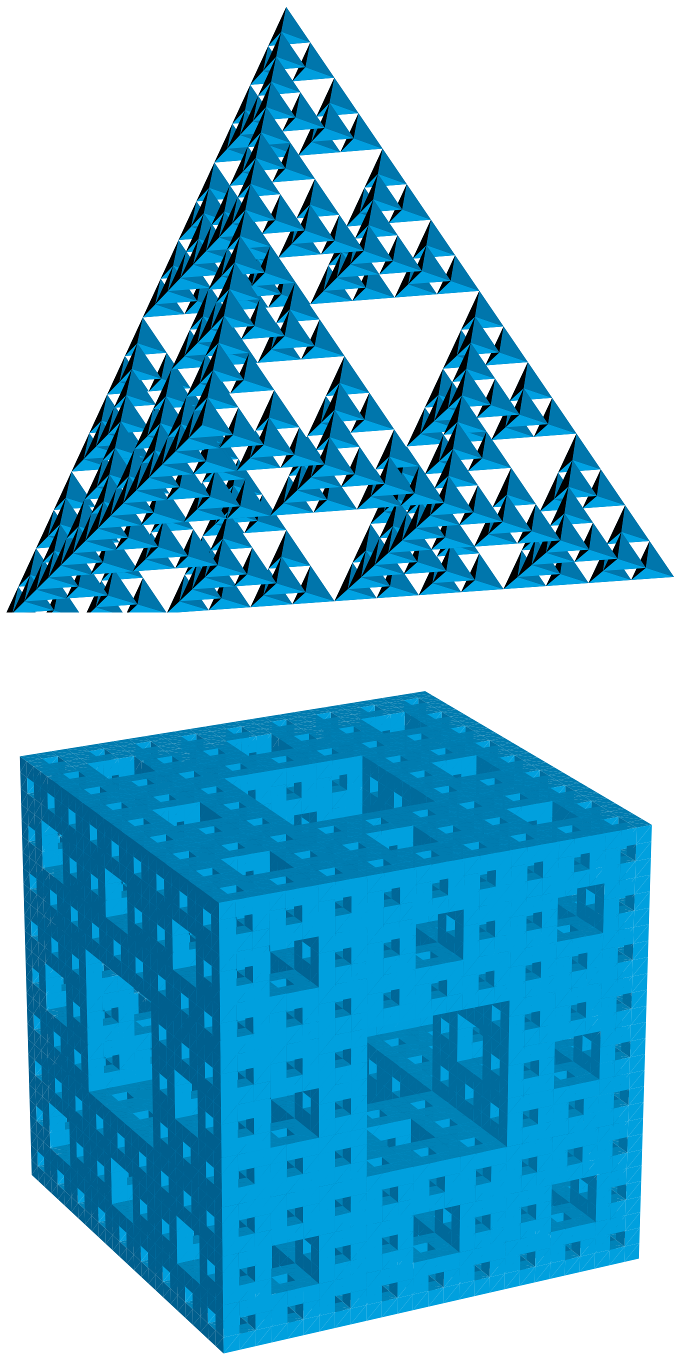
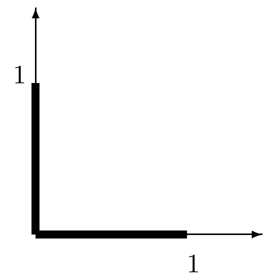


Fig. 11.7 – Le tétraèdre de Sierpinski et l'éponge de Menger

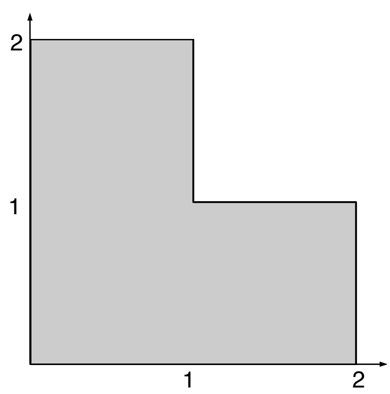
Exercices

11.1. Montrer qu'un segment de droite d'extrémités $(1,0)$ et $(2,1)$ est un ensemble autosemblable.

11.2. L'ensemble E formé par la réunion des deux segments d'extrémités respectives $(0,0)$ et $(1,0)$, $(0,0)$ et $(0,1)$, est-il un ensemble autosemblable ? Justifier votre réponse.



11.3. Soit E la portion du plan représentée ci-dessous, délimitée par les segments d'extrémités respectives $(0,0)$ et $(2,0)$, $(2,0)$ et $(2,1)$, $(2,1)$ et $(1,1)$, $(1,1)$ et $(1,2)$, $(1,2)$ et $(0,2)$ et enfin $(0,2)$ et $(0,0)$. Montrer qu'il existe s dans $]0,1[$, un entier m et des transformations affines T_i, $i=1,\ldots,m$, chacune d'elle étant la composée d'une contraction de rapport s, d'une rotation et d'une translation, telles que $E=\bigcup_{i=1}^{m} T_i(E)$ et les ensembles $T_i(E)$ ne se chevauchent pas.



11.4. Dand $\mathbb{R}^2$, les deux similitudes simples

$$T_1(x)=\frac{1}{4}\,x \qquad \text{et} \qquad T_2(x)=\frac{1}{4}\,x+\begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

déterminent l'ensemble fractal appelé *ensemble de Cantor*.

(a) En choisissant le carré unité comme ensemble initial E_0, esquisser les deux premières étapes de l'algorithme de la page 116.

(b) Déterminer la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor.

11.5 (*). Les similitudes simples

$$T_1(x) = \frac{1}{3}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad T_3(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

$$T_4(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_5(x) = \frac{1}{3}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

déterminent une fractale à partir de l'ensemble initial E_0 égal au carré unité.

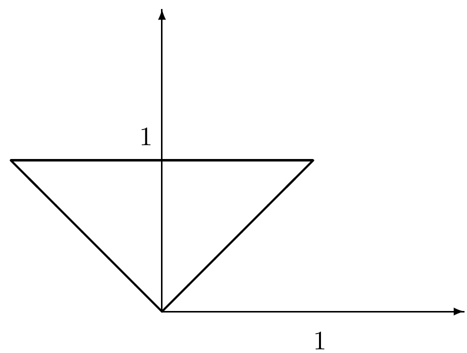
(a) Esquisser les deux premières étapes de l'algorithme de la page 116.

(b) Déterminer la dimension de Hausdorff de cet ensemble.

11.6. Dans $\mathbb{R}^2$, soit T_1, T_2 et T_3 des similitudes simples définies par

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,x\,, \quad T_2(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_3(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et E_0 l'ensemble égal à la réunion du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,1)$, du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(-1,1)$ et du segment d'extrémités $(-1,1)$ et $(1,1)$.

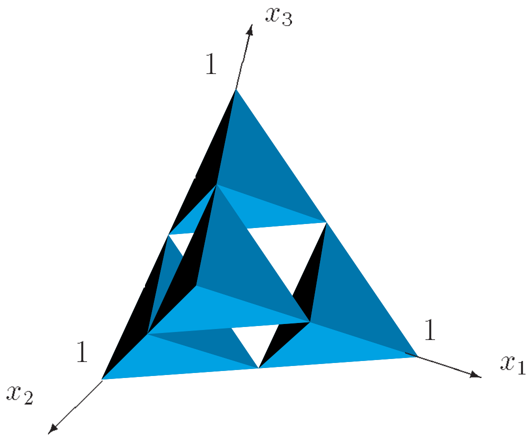


(a) L'ensemble initial étant E_0, esquisser les trois premières étapes de l'algorithme de la page 116.

(b) Déterminer la dimension de Hausdorff de l'ensemble E que dessine l'algorithme.

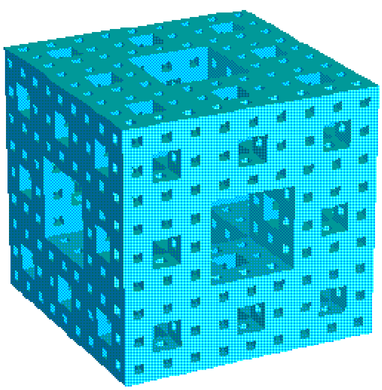
(c) Quel est cet ensemble E ?

11.7. Soit E_0 le tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$ de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Une étape de l'algorithme de dessin de la page 116 donne lieu à la figure suivante :



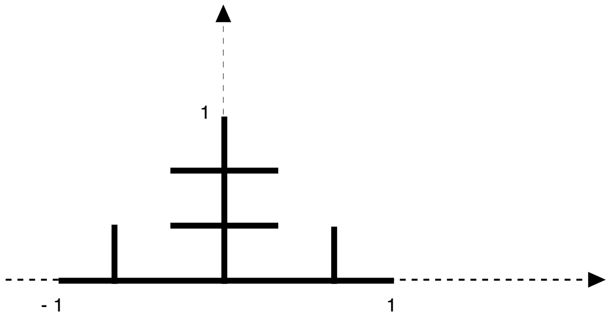
Déterminer les similitudes simples utilisées et la dimension de Hausdorff de l'ensemble autosemblable E que dessinera l'algorithme.

11.8. Soit E_0 le cube unité dans $\mathbb{R}^3$. Trois étapes de l'algorithme de dessin de la page 116 donnent lieu à la figure suivante. Déterminer les similitudes simples utilisées et la dimension de Hausdorff de l'ensemble autosemblable E que dessinera l'algorithme.



11.9 (*). Peut-on dessiner le tamis de Sierpinski à l'aide de l'algorithme de la page 116 en utilisant comme ensemble initial E_0 le carré unité ? Si oui, donner les similitudes qui servent à cette construction et esquisser les ensembles E_1, E_2 et E_3 obtenus respectivement à la première, deuxième et troisième étape de l'algorithme.

11.10 (*). Soit E_0 l'ensemble égal à la réunion du segment d'extrémités $(-1,0)$ et $(1,0)$ et du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(0,1)$. Une étape de l'algorithme de dessin de la page 116 donne lieu à l'ensemble E_1 représenté sur la figure suivante :



(a) Déterminer les similitudes simples qu'utilise l'algorithme.

(b) Esquisser l'ensemble E_2 obtenu à la deuxième étape.

(c) Déterminer la dimension de Hausdorff de l'ensemble autosemblable E que dessine l'algorithme.

Chapitre 12

Cryptographie conventionnelle

Origines et principes

Un des problèmes les plus anciens de la communication à distance est le maintien de la confidentialité des messages. Jusque dans les années 1970, les principaux intéressés étaient les militaires et les diplomates, mais le développement des réseaux informatiques a rendu attentif les banques et de nombreuses entreprises à l'importance de ce problème. La sécurité des données est devenue l'une des priorités des gestionnaires des réseaux de communication et le champ d'application et les techniques de la théorie de la cryptographie connaissent donc aujourd'hui un essor considérable.

La cryptographie étudie plus spécifiquement les moyens de protéger la confidentialité et l'intégrité de l'information : un fraudeur peut non seulement essayer de lire un message, tel un dossier médical, mais aussi de modifier son contenu ou son origine, par exemple pour falsifier un ordre bancaire.

Le principe de la cryptographie, illustré dans la figure 12.1, est d'abord de transformer un message clair M en un cryptogramme C paramétrisé par une clé K. Cette opération est appelée *chiffrement* : C est obtenu par une transformation E_K (de chiffrement ou *encryption* en anglais) et donc $C = E_K(M)$.

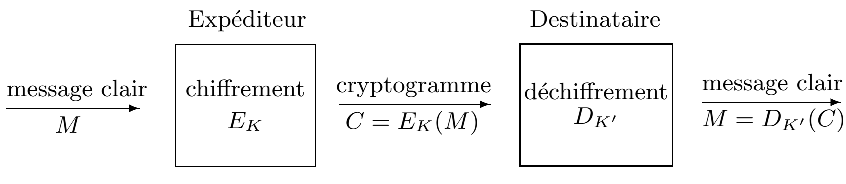


Fig. 12.1 – Schéma d'une procédure de cryptographie.

Ce cryptogramme est alors transmis au destinataire qui le retransforme en un message clair. Cette opération est appelée *déchiffrement* et est effectuée à l'aide d'une transformation $D_{K'}$ (de déchiffrement ou *decryption* en anglais) paramétrisé par une clé K'. La transformation $D_{K'}$ est l'inverse de celle de chiffrement, c'est-à-dire $M = D_{K'}(C) = D_{K'}\big(E_K(M)\big)$. En principe, il suffit à l'expéditeur de connaître la clé K et au destinataire de connaître la clé K'.

Un autre problème est celui du *décryptage*, aussi appelé *crypto-analyse*, qui a pour but de transformer un cryptogramme en texte clair sans posséder *a priori* la clé, ni parfois même la méthode de chiffrement. La *cryptologie* regroupe à la fois cryptographie et crypto-analyse : le but de la cryptographie est alors de rendre la crypto-analyse difficile, voir impossible.

On distingue deux types de cryptographie : la cryptographie *conventionnelle* ou *à clé secrète*, qui est celle où $K = K'$ et où la connaissance de E_K donne D_K, et la cryptographie *à clé publique* ou *à deux clés*, qui est celle où $K \neq K'$ et où $D_{K'}$ est difficile à déterminer même si on connaît E_K.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de cryptographie conventionnelle qui fait appel aux transformations matricielles et qui est appelée *méthode de Hill*, du nom de Lester S. Hill qui l'a introduite en 1929. Pour motiver l'utilisation de cette méthode, examinons d'abord un exemple simple.

Chiffrement de César (50 av. J.C.)

Soit $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'alphabet utilisé pour rédiger les messages, où les lettres sont rangées dans leur ordre alphabétique, et σ la bijection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ définie par $\sigma(x_i) = x_{i+3}$ si $i < n-2$, $\sigma(x_{n-2}) = x_1$, $\sigma(x_{n-1}) = x_2$ et $\sigma(x_n) = x_3$.

Le chiffrement de César consiste à remplacer chaque lettre x_i par la lettre $\sigma(x_i)$, c'est-à-dire par la lettre trois positions plus loin dans l'alphabet. Pour l'alphabet anglais, ce chiffrement s'écrit comme indiqué sur la figure 12.2.

Clair	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Chiffré	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fig. 12.2 – Le chiffrement de César.

Par exemple, la lettre A dans le message clair est remplacée par la lettre D dans le cryptogramme, la lettre B par E et ainsi de suite. Avec le chiffrement de César, le message clair d'Omar Khayyam (l'un des plus grand mathématiciens du Moyen Age, an 1021 environ)

A HAIR PERHAPS DIVIDES THE FALSE AND TRUE

devient :

D KDLU SHUKDSV GLYLGHV WKH IDOVH DQG WUXH

Un tel chiffrement est appelé *chiffrement par substitution monoalphabétique*, car il consiste à remplacer chaque lettre de l'alphabet par une autre à l'aide d'une bijection dont l'inverse sert au déchiffrement.

Dans notre exemple, le déchiffrement consiste à remplacer chaque lettre x_j par $\sigma^{-1}(x_j) = x_{j-3}$ si $j > 3$, $\sigma^{-1}(x_3) = x_n$, $\sigma^{-1}(x_2) = x_{n-1}$ et $\sigma^{-1}(x_1) = x_{n-2}$, c'est-à-dire par la lettre qui la précède de trois positions dans l'alphabet. Remarquons qu'ici la clé K est le chiffre 3 et les transformations E_K et D_K sont données respectivement par les fonctions σ et σ^{-1}.

Pour un tel chiffrement, la crypto-analyse est relativement facile : il suffit de déterminer la fréquence de chaque lettre dans le cryptogramme et de la comparer à celle d'un texte clair dans la même langue. En effet, on constate que le cryptogramme contient 34 lettres réparties comme suit :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	0	0	5	0	0	3	5	1	0	3	3	0	0	1	0	1	0	2	0	3	3	2	1	1	0

Les plus fréquentes sont D et H. Or, on sait qu'en anglais la lettre E est la plus fréquente avec une fréquence de 12,74 %. Si on remplace D par E et si on déchiffre en remplaçant chaque lettre par la lettre suivante dans l'alphabet, on constate que ce n'est pas le bon choix. En revanche, si on remplace H par E et si on déchiffre en remplaçant chaque lettre par son image par l'application σ^{-1}, le message clair apparaît.

Même dans le cas où la bijection d'un chiffrement par substitution monoalphabétique est une permutation plus compliquée des lettres de l'alphabet, la crypto-analyse par comparaison des fréquences des lettres du cryptogramme avec celles de la langue du message permet généralement de trouver assez rapidement le message clair. Ceci n'incite pas à l'utilisation du chiffrement par substitution et montre l'utilité d'autres techniques de chiffrement.

Chiffrement de Hill

On admet que les messages sont écrits dans un alphabet $\mathcal{A}$ de n lettres. Cet alphabet est identifié à l'ensemble $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ en faisant correspondre à chaque lettre de $\mathcal{A}$ un nombre dans $\mathcal{F}$.

On considérera dans la suite l'alphabet anglais, chaque lettre étant identifiée à son numéro dans l'ordre alphabétique, comme dans le chiffrement de César, sauf pour la lettre Z qui est identifiée au nombre 0. On obtient le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

$\mathcal{F}$ est donc l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 25, 0\}$, que l'on munit d'une *addition* et d'une *multiplication* par des entiers, analogues aux opérations d'addition et de multiplication par des entiers pour les heures d'une montre (voir la figure 12.4).

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$-p$
$-q$	0	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	p

FIG. 12.3 – Table des opposés.

Ainsi, $p+q \equiv r$ et $k \cdot p \equiv t$, où r et t sont respectivement le reste de la division par 26 de $p+q$ et de $k \cdot p$, et l'opposé de q est $-q \equiv 26 - q$ (voir la figure 12.3).

EXEMPLES. $-3 \equiv 23$, $2 + 6 \equiv 8$, $14 \cdot 3 \equiv 16$ et $13 \cdot 3 \equiv 13$.

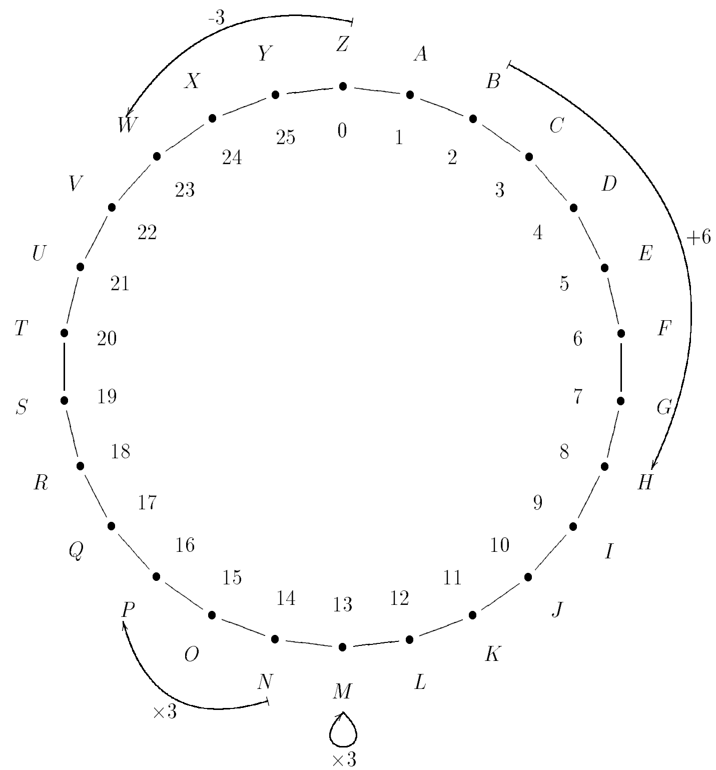


FIG. 12.4 – Exemples d'addition et de multiplication d'éléments de $\mathcal{F}$.

Le chiffrement de Hill s'effectue en quatre étapes.

Etape 1. On choisit une matrice K de type $\ell \times \ell$ dont les coefficients sont des nombres dans $\mathcal{F}$ et qui est inversible (dans un sens qui sera précisé). Cette matrice est la clé K du chiffrement.

Etape 2. On regroupe chaque bloc de ℓ lettres consécutives du message clair M en un bloc a_i (si nécessaire, on complète le dernier bloc par des lettres quelconques). On représente les a_i par une matrice-colonne dans $\mathcal{F}^\ell$ à l'aide de l'identification ci-dessus. Le message M est donc représenté par une matrice $(a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_k)$.

Etape 3. En chiffrant chaque a_i en un cryptogramme c_i à l'aide de l'application matricielle T_K de $\mathcal{F}^\ell$ dans $\mathcal{F}^\ell$ associée à la matrice K, on obtient $c_i = T_K(a_i) = K \cdot a_i$. Ainsi, le cryptogramme $C = (c_1 \vdots c_2 \vdots \cdots \vdots c_k)$ est donné par $C = K \cdot (a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_k)$.

Etape 4. On représente le cryptogramme $C = (c_1 \vdots c_2 \vdots \cdots \vdots c_k)$ par sa valeur alphabétique (écrite horizontalement).

Un tel chiffrement est appelé un ℓ-*chiffrement* de Hill.

Exemple de chiffrement de Hill. On se propose de chiffrer, par un 3-chiffrement de Hill, la phrase du mathématicien Otto Blumenthal (1876-1944),

RIGOR IS NO FOE OF SIMPLICITY

Etape 1. On choisit pour clé la matrice K donnée par

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etape 2. En regroupant les lettres par trois, on obtient les blocs

RIG ORI SNO FOE OFS IMP LIC ITY

que l'on représente par leurs valeurs dans $\mathcal{F}^3$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} 18 & 15 & 19 & 6 & 15 & 9 & 12 & 9 \\ 9 & 18 & 14 & 15 & 6 & 13 & 9 & 20 \\ 7 & 9 & 15 & 5 & 19 & 16 & 3 & 25 \end{pmatrix}.$$

Etape 3. On calcule le cryptogramme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 15 & 19 & 6 & 15 & 9 & 12 & 9 \\ 9 & 18 & 14 & 15 & 6 & 13 & 9 & 20 \\ 7 & 9 & 15 & 5 & 19 & 16 & 3 & 25 \end{pmatrix}.$$

et on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 17 & 25 & 20 & 13 & 15 & 10 & 21 \\ 25 & 3 & 23 & 17 & 11 & 20 & 25 & 19 \\ 8 & 16 & 22 & 0 & 14 & 12 & 24 & 2 \end{pmatrix}.$$

Etape 4. Le cryptogramme

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 17 & 25 & 20 & 13 & 15 & 10 & 21 \\ 25 & 3 & 23 & 17 & 11 & 20 & 25 & 19 \\ 8 & 16 & 22 & 0 & 14 & 12 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

s'écrit sous forme alphabétique

XYH QCP YWV TQZ MKN OTL JYX USB

L'avantage de ce chiffrement est qu'il mélange bien les lettres et rend ainsi inefficace la crypto-analyse par comparaison des fréquences des lettres. En effet, dans le cryptogramme précédent, on remarque par exemple que la lettre X a remplacé deux lettres différentes du message clair, soit les lettres R et C.

Pour déchiffrer le cryptogramme, il est nécessaire d'utiliser une nouvelle notion d'inverse d'une matrice.

Matrices inversibles modulo 26

Soit K une matrice de type $\ell \times \ell$ à coefficients dans $\mathcal{F}$. On dit que cette matrice est *inversible modulo* 26 s'il existe une matrice K' de type $\ell \times \ell$ à coefficients dans $\mathcal{F}$ vérifiant $K \cdot K' = K' \cdot K = I$. Dans cette formule, le produit des matrices indiquées est obtenu en utilisant dans le produit matriciel les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathcal{F}$ décrites ci-dessus. Si elle existe, la matrice K' est unique, est notée K^{-1} et est appelée *matrice inverse modulo* 26 de K.

On peut vérifier que la matrice K de l'exemple précédent est inversible modulo 26 et a pour inverse

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 2 \\ 25 & 25 & 4 \\ 2 & 1 & 21 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la matrice inverse modulo 26. On admettra les résultats suivants :

(1) Chaque élément x de $\mathcal{F}$ qui n'est ni divisible par 2 ni par 13 admet un inverse x^{-1} dans $\mathcal{F}$ vérifiant $xx^{-1} = x^{-1}x \equiv 1$. La table des inverses est la suivante :

x	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
x^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

(2) Une matrice de type $\ell \times \ell$ à coefficients dans $\mathcal{F}$ est inversible modulo 26 si et seulement si son déterminant, calculé avec les méthodes du chapitre 3 et les opérations de $\mathcal{F}$, n'est pas divisible par 2 ou par 13.

(3) L'inverse d'une matrice vérifiant (2) se calcule par les méthodes du chapitre 2 mais en faisant les opérations dans $\mathcal{F}$.

Exemple. On se propose de calculer l'inverse modulo 26 de la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 25 \\ 0 & 25 & 1 \\ 25 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons d'abord le déterminant de K pour vérifier que K est inversible :

$$|K| = 1 \cdot (25 - 3) + 25 \cdot (24 - (25)^2) \equiv 22 + 25 \cdot 23 \equiv 22 + 3 \equiv 25\,.$$

D'après (1), K est inversible. Pour calculer K^{-1}, on va réduire la matrice augmentée

$$(K \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 24 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 25 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

à la forme échelonnée simplifiée. On ajoute $1 \equiv -25$ fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 24 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_1 - 24L_3 \equiv L_1 + 2L_3 \\ L_2 - 25L_3 \equiv L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

On ajoute à la ligne 1 (respectivement à la ligne 2) 2 fois la ligne 3 (respectivement la ligne 3) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 25 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{c} \\ \nwarrow \\ \swarrow \end{array}$$

On échange les lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 25 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_1 - 25L_3 \equiv L_1 + L_3 \\ \\ \end{array}$$

On ajoute la ligne 3 à la ligne 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(I \,\vdots\, K^{-1} \right) .$$

Ainsi,

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 & 25 \\ 0 & 25 & 1 \\ 25 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Déchiffrement

Dans le cas où le chiffrement de Hill est effectué à l'aide d'une matrice K inversible modulo 26, l'application T_K utilisée pour le chiffrement est bijective et $(T_K)^{-1} = T_{K^{-1}}$. On peut donc déchiffrer le cryptogramme par l'application matricielle de chiffrement associée à la clé $\mathcal{K} = K^{-1}$. En effet, si $c_i = T_K(a_i)$, alors $a_i = T_{K^{-1}}(c_i)$ et le message clair d'un cryptogramme $C = (c_1 \vdots \cdots \vdots c_k)$ est donné par

$$M = \left(T_{K^{-1}}(c_1) \vdots \cdots \vdots T_{K^{-1}}(c_k)\right) = K^{-1} \cdot C = K^{-1}(c_1 \vdots \cdots \vdots c_k)\,.$$

Exemple de déchiffrement de Hill. Pour déchiffrer le cryptogramme

YWIACNOKOENHYWIQSJJPSNPEFSYKTPVOXYSM

sachant qu'il est chiffré par un 3-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice K de l'exemple précédent, on écrit la représentation numérique du cryptogramme après avoir regroupé chaque groupe de trois lettres successives en un bloc et on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 1 & 15 & 5 & 25 & 17 & 10 & 14 & 6 & 11 & 22 & 25 \\ 23 & 3 & 11 & 14 & 23 & 19 & 16 & 16 & 19 & 20 & 15 & 19 \\ 9 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 19 & 5 & 25 & 16 & 24 & 13 \end{pmatrix}.$$

On calcule la représentation numérique du message clair en effectuant le produit de la matrice K^{-1} par la matrice C et on obtient

$$\begin{aligned} K^{-1} \cdot C &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 23 & 12 & 6 & 20 & 13 & 9 & 9 & 14 & 8 & 19 & 2 \\ 8 & 15 & 4 & 13 & 8 & 1 & 3 & 19 & 5 & 1 & 20 & 12 \\ 5 & 18 & 15 & 1 & 5 & 20 & 19 & 9 & 24 & 21 & 9 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sous forme alphabétique, ce message devient

THE WOR LDO FMA THE MAT ICS ISI NEX HAU STI BLE

et le message clair est donc

THE WORLD OF MATHEMATICS IS INEXHAUSTIBLE

(cette phrase est de Constance Reid, née en 1918 et aujourd'hui un des principaux biographes de mathématiciens).

Limites de la méthode de chiffrement de Hill

Pour décrypter un cryptogramme chiffré par la méthode de Hill, il suffit au cryptanalyste de reconnaître un mot ou une partie du message pour pouvoir déduire tout son contenu. C'est *l'attaque à texte clair connu.* En effet, on sait qu'une transformation matricielle sur un espace vectoriel, donc une transformation linéaire, est entièrement déterminée par l'image d'une base, ce qui nous amène à utiliser la méthode suivante pour notre problème.

Soient $c_1, \ldots, c_\ell$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{F}^\ell$, qui sont des représentations numériques de cryptogrammes, et $a_1, \ldots, a_\ell$ les messages clairs correspondants : $a_i = K^{-1} \cdot c_i$. Si on appelle A la matrice de type $\ell \times \ell$ ayant pour colonnes $a_1, \ldots, a_\ell$ et C celle ayant pour colonnes $c_1, \ldots, c_\ell$, on voit que $K^{-1} \cdot C = A$, ou encore que

$$C^T \cdot \left(K^{-1}\right)^T = A^T .$$

Cette égalité est équivalente à $K^{-1} = A \cdot C^{-1}$, ce qui permet déjà de calculer K^{-1}. Cependant, le calcul sera plus rapide si l'on procède comme suit. Soit $X = (x_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, x_\ell)$ une matrice de type $\ell \times \ell$. L'égalité $C^T \cdot X = A^T$ peut s'interpréter comme l'écriture matricielle de ℓ systèmes linéaires à ℓ inconnues $C^T \cdot x_i = b_i$, $i = 1, \ldots, \ell$ où x_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de X et b_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A^T.

Trouver la matrice K^{-1} équivaut donc à résoudre ces ℓ systèmes. On peut les résoudre simultanément en réduisant la matrice augmentée ℓ fois $(C^T \,\vdots\, A^T)$ à la forme échelonnée simplifiée, qui est $(I \,\vdots\, (K^{-1})^T)$. Une fois la matrice K^{-1} déterminée, il est évident que le message clair est vite reconstitué.

Exemple de décryptage. Le message

MATHEMATICS KNOWS NO RACES
OR GEOGRAPHIC BOUNDARIES

du célèbre mathématicien David Hilbert (1862-1943), est suivi par le message crypté

BSVKWQXWSMBVQGOXSUWFSKZXRMMTJTWEJDSOYSOJTO

Si l'on parvient à savoir que ce cryptogramme commence par

FOR MATHEMATICS

et qu'il a été obtenu par un 3-chiffrement de Hill, on peut reconstituer le message clair. En effet, la représentation numérique des trois premiers blocs de trois lettres du cryptogramme est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 24 \\ 19 & 23 & 23 \\ 22 & 17 & 19 \end{pmatrix}.$$

De même, la représentation numérique des trois premiers blocs de trois lettres du message clair correspondant est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 8 \\ 15 & 1 & 5 \\ 18 & 20 & 13 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée simplifiée de

$$\left(C^T \,\vdots\, A^T\right) = \left(\begin{array}{rrr:rrr} 2 & 19 & 22 & 6 & 15 & 18 \\ 11 & 23 & 17 & 13 & 1 & 20 \\ 24 & 23 & 19 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right)$$

s'obtient en faisant les opérations élémentaires suivantes. Multiplier la deuxième ligne par $(11)^{-1} \equiv 19$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 19 & 22 & 6 & 15 & 18 \\ 1 & 21 & 11 & 13 & 19 & 16 \\ 24 & 23 & 19 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \nwarrow \\ \swarrow \\ \end{array}$$

Echanger les lignes 1 et 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 21 & 11 & 13 & 19 & 16 \\ 2 & 19 & 22 & 6 & 15 & 18 \\ 24 & 23 & 19 & 8 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \equiv L_2 + 24L_1 \\ L_3 - 24L_1 \equiv L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Ajouter à la ligne 2 (respectivement à la ligne 3) 24 fois la ligne 1 (respectivement 2 fois la ligne 1) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 21 & 11 & 13 & 19 & 16 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 13 & 15 & 8 & 17 & 19 \end{array}\right) \qquad 3^{-1}L_2 \equiv 9L_2$$

Multiplier la ligne 2 par $3^{-1} \equiv 9$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 21 & 11 & 13 & 19 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & 15 & 8 & 17 & 19 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 - 21L_2 \equiv L_1 + 5L_2 \\ \\ L_3 - 13L_2 \equiv L_3 + 13L_2 \end{array}$$

Ajouter à la ligne 1 (respectivement à la ligne 3) 5 fois la ligne 2 (respectivement 13 fois la ligne 2) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 23 & 24 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 8 & 4 & 19 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ (15)^{-1}L_3 \equiv 7L_3 \end{array}$$

Multiplier la ligne 3 par $15^{-1} \equiv 7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 23 & 24 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 - 11L_3 \equiv L_1 + 15L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Ajouter 15 fois la ligne 3 à la ligne 1, pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) = \left(I \mid (K^{-1})^T\right) .$$

Ainsi,

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

A l'aide de cette matrice, on déchiffre le cryptogramme donné, dont la représentation numérique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 24 & 13 & 17 & 24 & 23 & 11 & 18 & 20 & 23 & 4 & 25 & 10 \\ 19 & 23 & 23 & 2 & 7 & 19 & 6 & 0 & 13 & 10 & 5 & 19 & 19 & 20 \\ 22 & 17 & 19 & 22 & 15 & 21 & 19 & 24 & 13 & 20 & 10 & 15 & 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

La forme alphabétique du message décrypté est

FOR MAT HEM ATI CST HEC ULTURA LWO RLD ISO NEC OUN TRY

ce qui permet de retrouver le message clair

FOR MATHEMATICS THE CULTURAL WORLD IS ONE COUNTRY

Conclusion

Les différentes méthodes présentées ci-dessus donnent un premier aperçu de la cryptographie à clé secrète. Ce type de procédé cryptographique connaît principalement deux faiblesses. L'une est la relative facilité par laquelle l'attaque à texte clair connu permet de décrypter l'ensemble du cryptogramme. Même si différentes parades existent, comme l'introduction en différents points du message de blocs destinés à perturber un éventuel décrypteur (*traffic padding* en anglais), la sécurité de ce procédé reste insuffisante pour de nombreux besoins.

La deuxième faiblesse de la cryptographie à clé secrète est le problème de l'échange de la clé : la clé K doit être connue par l'expéditeur et par le destinataire, et si la clé est interceptée au moment où l'une des parties communique la clé à l'autre, toute la suite de la procédure est compromise.

On utilise donc plutôt aujourd'hui la cryptographie à deux clés, dont l'une est publique et accessible à tous, et l'autre est connue de l'expéditeur uniquement (ou du destinataire uniquement). Ce type de cryptographie utilise des transformations non linéaires plus difficiles à décrypter que celles présentées dans ce chapitre. Ces techniques de cryptage font l'objet de livres plus spécialisés.

Exercices

12.1. Le cryptogramme

GNJSAJSZJ

est obtenu par substitution monoalphabétique (du même type que le chiffrement de César). Retrouver le message clair par comparaison des fréquences des lettres.

12.2. Le cryptogramme

VYARFGCVERNIRHTYRDHR

PRYHVDHVARIRHGCNFIBVE

est obtenu par substitution monoalphabétique (du même type que le chiffrement de César) d'un proverbe français. Retrouver le message clair par comparaison des fréquences des lettres.

12.3. (a) Calculer les déterminants modulo 26 de chacune des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 25 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Déduire de (a) lesquelles parmi les matrices $A_1, \ldots, A_4$ sont inversibles modulo 26 et calculer leurs inverses.

12.4. Les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 19 & 10 \\ 17 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 20 \\ 20 & 13 & 9 \end{pmatrix}$$

sont-elles inversibles modulo 26 ? Calculer leur inverse quand il existe.

12.5. Trouver le message clair correspondant au cryptogramme

YCIVCSGGLS

sachant qu'il est obtenu par un 2-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

12.6. Trouver le message clair correspondant au cryptogramme d'une citation du physicien et mathématicien Josiah Willard Gibbs (1839-1903) :

KWQXWSMBVQMLQYWYJPSWVUYH

On admettra que ce cryptogramme est obtenu par un 3- chiffrement de Hill à l'aide de la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 0 \\ 0 & 15 & 16 \\ 25 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

12.7. Proposer un 3-chiffrement de Hill (différent de ceux qui apparaissent ailleurs dans ce chapitre) pour chiffrer la citation d'Alfred North Whitehead (1861-1947) :

WAR CAN PROTECT ; IT CANNOT CREATE

12.8. Retrouver le message clair correspondant au cryptogramme

WEADZCMAHOBNFGWEEF

sachant qu'il est obtenu par un 2-chiffrement de Hill et que le message clair commence par VOULOIR.

12.9 (*). (a) Sans faire de calcul, expliquer pourquoi la matrice

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 2 \\ 19 & 22 & 16 \\ 1 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible modulo 26.

(b) Calculer l'inverse modulo 26 de la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Retrouver le message clair correspondant au cryptogramme

TSALVTBPEJZEAMIWYEL

sachant qu'il est obtenu par un 3-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice K.

12.10 (*). Trouver le message clair correspondant au cryptogramme d'une citation du mathématicien Alfred North Whitehead (1861-1947) :

MAREGDGRUIGBZUYPFHVDEDIIODP

On admettra que ce cryptogramme est obtenu par un 3-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

12.11 (*). Retrouver le message clair correspondant au cryptogramme

KYIVXXERMIBSRKQVSSFF

sachant qu'il est obtenu par un 2-chiffrement de Hill et que le message clair commence par I WANT.

Chapitre 13

Les codes correcteurs d'erreurs

Informations digitalisées

De nombreux systèmes de communication traitent aujourd'hui les informations sous forme digitalisées. Par exemple, les lettres de l'alphabet sont enregistrées à l'aide du code ASCII : chaque lettre est représentée par un « mot » formé de huit *bits*, chaque bit étant soit 0, soit 1. Ou encore, une photo en noir et blanc sera souvent divisée en 800×600 *pixels*, ou petits carrés, chaque pixel ayant un parmi 64 niveaux de gris. Chaque niveau de gris est associé à un nombre entier entre 0 et 63, qui est représenté dans le système binaire par un mot formé de six bits : 000000 représente le blanc et 111111 le noir.

Communiquer des informations digitalisées revient alors à transmettre une suite de mots formés de zéros et de uns. Ainsi, transmettre une photo en noir et blanc revient à émettre une longue suite de mots de six bits chacun. Cependant, il arrive parfois qu'un 0 émis soit interprété par le récepteur comme un 1, ou qu'un 1 émis soit interprété comme un 0. Cela se produit en particulier lorsque le canal de transmission est bruyant. Dans ces circonstances, on effectue d'abord un codage préalable de l'information, afin qu'il soit possible de reconstituer l'information initiale malgré les erreurs apparues au cours de la transmission. La transmission d'informations se fait alors en trois étapes principales, comme illustré dans la figure 13.1.

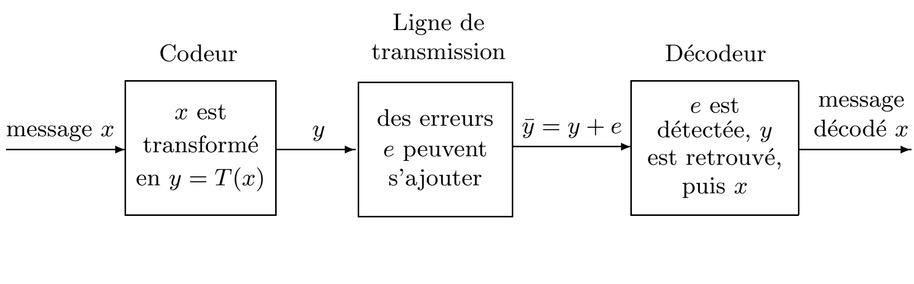


Fig. 13.1 – Schéma d'une procédure de codage et décodage.

La théorie des codes correcteurs d'erreurs a pour objectif de proposer des méthodes performantes de codage et décodage qui limitent la dégradation des informations transmises. Dans ce chapitre, nous présentons une brève introduction à cette théorie, qui s'appuie sur les outils des chapitres 1 à 6 et sur quelques notions mathématiques nouvelles.

Opérations numériques sur $\mathcal{K} = \{0, 1\}$

On définit sur $\mathcal{K} = \{0, 1\}$ une addition et une multiplication selon les tables de la figure 13.2. On remarquera qu'ajouter 1 revient à dire qu'une erreur s'est produite, alors qu'ajouter 0 signifie qu'il n'y a pas eu d'erreur. Ces deux opérations ont essentiellement les mêmes propriétés que leurs analogues en nombres réels, à savoir la commutativité, l'associativité, la distributivité, etc.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Fig. 13.2 – Tables d'addition et de multiplication dans $\mathcal{K}$.

Exemple. Dans $\mathcal{K}$, $1 + 1 + 1 = (1 + 1) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Notion de $\mathcal{K}$-espace vectoriel

Soit V un ensemble, $+$ et $\cdot$ deux opérations qui vérifient les huit axiomes d'espace vectoriel lorsque les nombres réels et leurs opérations sont remplacés par les éléments de $\mathcal{K}$ et les opérations ci-dessus. On dit alors que V est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel.

Propriétés des $\mathcal{K}$-espaces vectoriels. Toutes les notions et propriétés que nous avons vues pour les espaces vectoriels restent valables pour les $\mathcal{K}$-espaces vectoriels, en particulier celles relatives aux sous-espaces vectoriels, familles libres, bases, dimension et rang d'une famille de vecteurs.

Exemple. $\mathcal{K}^n$, l'espace des matrices-colonnes de type $n \times 1$ à coefficients dans $\mathcal{K}$, est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension n (analogue à $\mathbb{R}^n$). En effet, considérons les matrices-colonnes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.1}$$

Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{K}^n$.

Une particularité des $\mathcal{K}$-espaces vectoriels. Soit V un $\mathcal{K}$-espace vectoriel et u dans V. Alors

$$-u = u\,.$$

En effet,

$$u + u = 1 \cdot u + 1 \cdot u = (1+1) \cdot u = 0 \cdot u = 0\,.$$

Principe du codage

Supposons que l'on souhaite pouvoir transmettre 2^ℓ *messages* différents. On admet que chaque message est représenté par un *mot* de ℓ bits, c'est-à-dire par un élément de $\mathcal{K}^\ell$. Afin de pouvoir détecter d'éventuelles erreurs de transmission, on adjoint à ce mot des bits supplémentaires, appelés *bits de contrôle*, pour former un élément de $\mathcal{K}^n$, où $n > \ell$.

La manière la plus simple de fabriquer des éléments de $\mathcal{K}^n$ à partir d'éléments de $\mathcal{K}^\ell$ est d'utiliser une transformation matricielle $T : \mathcal{K}^\ell \longrightarrow \mathcal{K}^n$. Dans ce cas, on parle d'un *code linéaire*. Les éléments du $\mathcal{K}$-sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(T)$ sont appelés des *mots codés*.

Exemple. *Code de répétition de longueur* 3. Admettons qu'il s'agit de transmettre l'un ou l'autre de deux messages : $1 =$ oui ou $0 =$ non. Soit $\ell = 1$, $n = 3$ et $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^3$ définie par

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = (x, x, x)\,.$$

On a donc ajouté deux bits de contrôle, identiques au bit à transmettre : au lieu de transmettre 1, on transmet 111, et au lieu de transmettre 0, on transmet 000.

Si l'un des trois bits reçus est erroné, on peut retrouver le mot transmis : par exemple, si on reçoit 010, on remarque que 010 diffère de 000 en une seule position, alors qu'il diffère de 111 en deux positions. Par conséquent, on corrige en 000, soit $0 =$ non. Si on reçoit 110, on corrige en 111, soit oui.

On vérifie sans peine que s'il y a une erreur de transmission en au plus une position, alors elle sera détectée et corrigée. S'il y a plus d'une erreur, le mot transmis ne sera pas retrouvé. Cependant, la faiblesse principale de cette méthode de codage est qu'il faut trois fois plus de temps pour transmettre chaque message.

Rendement d'un code. Le rendement r d'un code linéaire $T : \mathcal{K}^\ell \longrightarrow \mathcal{K}^n$ est le nombre $r = \ell/n$. Dans l'exemple précédent, $r = 1/3$.

Objectif de la théorie des codes correcteurs d'erreurs. L'objectif est de créer des codes de rendement élevé qui corrigent une ou plusieurs erreurs. Les opérations de codage, de détection des erreurs et de décodage devront être aussi simples et rapides que possibles.

Construction et utilisation d'un code linéaire

(1) *Codage.* Soit $T : \mathcal{K}^\ell \longrightarrow \mathcal{K}^n$ la transformation matricielle associée à la matrice $G = (g_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, g_\ell)$ de type $n \times \ell$. La matrice G sera appelée *matrice génératrice* du code.

Pour transmettre le message x dans $\mathcal{K}^\ell$, on calcule, puis on envoie, le mot codé

$$y = G \cdot x = (g_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, g_\ell) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} = x_1 \cdot g_1 + \cdots + x_\ell \cdot g_\ell \,.$$

Tout mot codé est donc dans l'espace des colonnes de G. Afin d'avoir autant de mots codés que de messages à transmettre, il est nécessaire que $\mathrm{rg}(G) \geq \dim \mathcal{K}^\ell = \ell$. Puisque $\mathrm{rg}(G)$ est au plus égal au nombre de colonnes de G, à savoir ℓ, nous concluons que G doit avoir la propriété

$$\mathrm{rg}(G) = \ell \,.$$

Dans ce cas, les colonnes de G forment une base de $\mathrm{Im}(T)$.

(2) *Contrôle à la réception.* Lors de la réception d'un mot $\overline{y}$, on souhaite tout d'abord reconnaître si $\overline{y}$ est l'un des 2^ℓ mots codés ou non. En effet, s'il y a eu des erreurs pendant la transmission, $\overline{y}$ n'est peut-être pas égal au mot y transmis. Le plus simple serait de disposer d'une matrice C à n colonnes, appelée *matrice de contrôle*, ayant la propriété suivante :

$$C \cdot \overline{y} = 0 \text{ si et seulement si } \overline{y} \text{ est dans } \mathrm{Im}(T) \,.$$

L'ensemble des solutions du système homogène $C \cdot \overline{y} = 0$ doit donc avoir dimension ℓ. Par conséquent, $n - \mathrm{rg}(C) = \ell$ et C doit avoir la propriété

$$\mathrm{rg}(C) = n - \ell \,.$$

(3) *Correction.* La matrice-colonne $s = C \cdot \overline{y}$ est appelée *syndrome* du mot reçu. Les mots codés sont caractérisés par un syndrome $s = 0$. Lorsque $s \neq 0$, on aimerait une méthode pour retrouver y à partir de $\overline{y}$.

(4) *Décodage.* Finalement, ayant retrouvé y, il s'agit de déterminer le message x. Pour cela, il sera utile de disposer d'une matrice D de type $\ell \times n$, appelée *matrice de décodage*, telle que

$$x = D \cdot y \text{ si et seulement si } y = G \cdot x \,.$$

Détermination des matrices C et D à partir de G. Soit A la forme échelonnée simplifiée de la matrice $(G \,\vdots\, I_n)$. Nous savons qu'il existe une matrice R de type $n \times n$, égale à un produit de matrices élémentaires, telle que

$$A = R \cdot (G \,\vdots\, I_n) = (R \cdot G \,\vdots\, R \cdot I_n) = (R \cdot G \,\vdots\, R) \,.$$

Puisque $\mathrm{rg}(G) = \ell$, A possède ℓ pivots dans les ℓ premières colonnes, donc

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & \\ --- & R \\ \mathbb{O}_{(n-\ell)\times\ell} & \end{array} \right)$$

et

$$R \cdot G = \left(\begin{array}{c} I_\ell \\ --- \\ \mathbb{O}_{(n-\ell)\times\ell} \end{array} \right). \tag{13.2}$$

Ecrivons

$$R = \left(\begin{array}{c} D \\ -- \\ C \end{array} \right)$$

où D est une matrice de type $\ell \times n$ et C est de type $(n-\ell) \times n$. D'après (13.2),

$$D \cdot G = I_\ell \qquad \text{et} \qquad C \cdot G = \mathbb{O}_{(n-\ell)\times\ell}\,. \tag{13.3}$$

Un mot reçu $\overline{y}$ est un mot codé s'il est dans $\mathrm{Im}(T)$, c'est-à-dire si le système

$$G \cdot x = \overline{y}$$

admet une solution. Afin de résoudre ce système, on réduit la matrice augmentée $(G \mid \overline{y})$ à la forme échelonnée simplifiée, ce qui revient à effectuer le produit

$$\begin{aligned} R \cdot (G \mid \overline{y}) = \left(\begin{array}{c} D \\ -- \\ C \end{array} \right) \cdot (G \mid \overline{y}) &= \left(\begin{array}{c|c} D \cdot G & D \cdot \overline{y} \\ -- \;\; -- & -- \\ C \cdot G & C \cdot \overline{y} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & D \cdot \overline{y} \\ --- \;\; -- & -- \\ \mathbb{O}_{(n-\ell)\times\ell} & C \cdot \overline{y} \end{array} \right). \end{aligned}$$

En remarquant que $D \cdot \overline{y}$ et $C \cdot \overline{y}$ sont des matrices colonnes de type $\ell \times 1$ et $(n-\ell) \times 1$ respectivement, on déduit que le système $G \cdot x = \overline{y}$ admet une solution si et seulement si

$$C \cdot \overline{y} = 0\,.$$

La matrice de contrôle cherchée est donc C. La solution du système $G \cdot x = \overline{y}$ est

$$x = D \cdot \overline{y}\,.$$

La matrice de décodage est donc D.

Exemple. Dans le cas du code de répétition de longueur 3, on vérifie immédiatement que

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Choix possibles de la matrice de contrôle. La matrice de contrôle n'est pas unique : celle trouvée par la méthode décrite ci-dessus dépend en particulier de l'ordre des opérations élémentaires utilisées lors du calcul de la matrice R. Compte tenu de (13.3), on voit que $C \cdot G = 0$ et en fait, on peut vérifier que toute matrice C de type $(n-\ell) \times n$, de rang $n-\ell$ et telle que $C \cdot G = 0$ est une matrice de contrôle.

Correction d'un mot reçu $\overline{y}$ comportant une erreur simple. Si le mot codé transmis est y et s'il y a eu une seule erreur qui porte sur le bit en position k, le mot reçu est $\overline{y} = y + e_k$, où e_k est défini en (13.1). Si $C = (c_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, c_n)$, le récepteur calcule le syndrome

$$s = C \cdot \overline{y} = C \cdot (y + e_k) = C \cdot y + C \cdot e_k = 0 + c_k = c_k \,.$$

Si toutes les colonnes de C sont distinctes et non nulles, on reconnaîtra la colonne k de C et on saura donc quel est le bit erroné.

Dans le cas où l'on se limite à corriger des erreurs simples, la procédure de codage et décodage peut donc être résumée comme dans la figure 13.3.

Le code de Hamming H_7

On pose $\ell = 4$ et $n = 7$ (il y aura donc trois bits de contrôle). Soit C_7 la matrice de type 3×7 définie par

$$C_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le *code de Hamming* H_7 est la procédure de codage linéaire admettant C_7 comme matrice de contrôle.

Ayant seulement trois lignes, la matrice C_7 est de rang au plus 3. Mais parmi ses colonnes, il y a les trois vecteurs de la base canonique de $\mathcal{K}^3$. On en déduit que $\mathrm{rg}(C_7) = 3$. La dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{K}^7$ formé de toutes les solutions du système homogène $C_7 \cdot y = 0$ est $7 - \mathrm{rg}(C_7) = 7 - 3 = 4 = \ell$ comme souhaité. Puisque son rendement est $r = 4/7$, il est plus économique que le code de répétition de longueur 3.

On obtient l'ensemble des solutions du système $C_7 \cdot y = 0$ en réduisant C_7 à la forme échelonnée simplifiée, et on trouve que toute solution y de ce système est de la forme

$$y = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

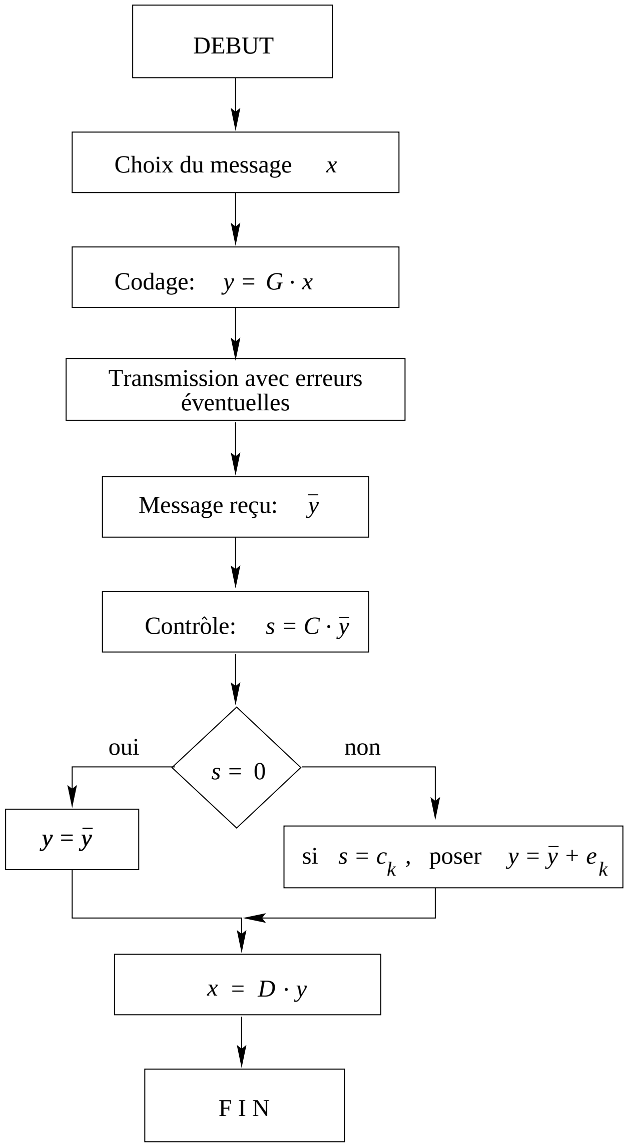


FIG. 13.3 – Organigramme de la procédure de codage et décodage.

Par conséquent, la matrice génératrice G est la matrice de type 7×4 formée des quatres colonnes ci-dessus. Puisque

$$G \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

le message se retrouve dans les composantes 3, 5, 6 et 7, et par conséquent, la matrice de décodage s'écrit sans calcul supplémentaire :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple d'utilisation du code de Hamming H_7. Admettons que l'on utilise le code de Hamming H_7. Si le récepteur reçoit $\overline{y} = (0,0,1,0,0,0,1)$, on calcule le syndrome $s = C_7 \cdot \overline{y} = (1,0,0)$. Comme il n'est pas nul, le mot reçu comporte une erreur. Admettons qu'il y ait une seule erreur. En comparant le syndrome s avec les colonnes de C_7, on remarque que s est la quatrième colonne de C_7. Par conséquent, c'est le quatrième bit de $\overline{y}$ qui est erroné. Sous l'hypothèse d'une erreur simple, le mot émis était $y = \overline{y} + e_4 = (0,0,1,1,0,0,1)$, et le message était $x = (1,0,0,1)$.

Remarque. La colonne k de la matrice de contrôle du code de Hamming est la représentation du nombre k en binaire. Par exemple, en binaire, $1 = 001$, $2 = 010$, $4 = 100$, et c'est pourquoi la première colonne de H est $(0,0,1)$, la deuxième est $(0,1,0)$ et ainsi de suite.

Grâce à cette disposition, le syndrome est la représentation binaire de la position du bit erroné. La correction de cette erreur est alors immédiate. Dans l'exemple, le mot reçu était $\overline{y} = (0,0,1,0,0,0,0,1)$ et le syndrome est $s = (1,0,0)$. Mais 100 est la représentation binaire de 4, donc l'erreur est située au quatrième bit.

Probabilité de transmission correcte

Lorsqu'on utilise le code de Hamming H_7, on transmet des suites de 7 bits au lieu de suites de 4 bits. Comme chaque mot codé est plus long, il y a plus de chance qu'une erreur apparaisse dans l'un des bits d'un mot codé. En contre-partie, on peut corriger une erreur simple. A-t-on gagné quelque chose, c'est-à-dire, est-ce que la probabilité de transmission correcte du message est plus élevée avec codage ou sans codage ?

Soit p la probabilité qu'un seul bit soit transmis correctement, $P_1(p)$ la probabilité de transmission correcte sans utiliser de procédure de codage et $P_2(p)$ la probabilité de transmission correcte si on utilise le code de Hamming H_7. La théorie des probabilités permet, si l'on admet que les erreurs se produisent de manière indépendante dans les différentes positions, d'exprimer $P_1(p)$ et $P_2(p)$ en fonction de p :

$$P_1(p) = p^4\,, \qquad P_2(p) = 7p^6 - 6p^7\,.$$

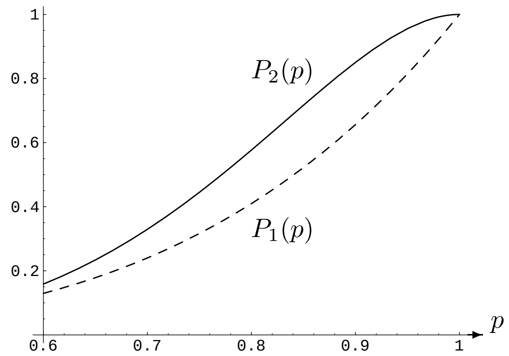


FIG. 13.4 – Graphes des probabilités $P_1(p)$ et $P_2(p)$.

Ces deux fonctions sont représentées sur la figure 13.4. On voit immédiatement que lorsque p est voisin de 1, $P_2(p)$ est beaucoup plus grand que $P_1(p)$ et donc il est avantageux d'utiliser le code de Hamming dans un tel cas.

CODES UTILISÉS DANS LA PRATIQUE

Le choix de la procédure de codage dépend des circonstances. Par exemple, la sonde Mariner 9 a envoyé à la terre des photos en noir et blanc de la planète Mars, chaque photo étant digitalisée comme décrit dans l'introduction. Vu que la distance était très grande et le signal émis relativement faible, les possibilités de transmission incorrecte étaient importantes. La NASA a utilisé une procédure de codage avec $\ell = 6$ et $n = 32$, pour un rendement de moins de 20 % ($r = 0{,}19$), mais le code corrigeait *sept* erreurs !

En revanche, pour transmettre de grandes quantités d'informations par un canal très fiable, on utilise parfois une procédure de codage avec $\ell = 231$ et $n = 255$, pour un rendement $r = 0{,}9$, qui corrige trois erreurs seulement.

How much knowledge
have we lost in information ?
How much wisdom
have we lost in knowledge ?

T.S. Eliot, Prix Nobel 1948.

Exercices

13.1. (a) Montrer que les vecteurs (1,0,0,0), (1,0,1,0) et (0,1,1,0) dans $\mathcal{K}^4$ sont linéairement indépendants.

(b) Montrer que les vecteurs (1,0,0,0), (1,0,1,0) et (0,0,1,0) dans $\mathcal{K}^4$ sont linéairement dépendants.

13.2. Soit W l'ensemble des $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathcal{K}^3$ vérifiant $x_1+x_2+x_3 = 0$.

(a) Montrer que W est un $\mathcal{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^3$.

(b) Trouver une base de W et en déduire la dimension de W.

(c) Ecrire tous les éléments de W.

13.3. On considère le code de Hamming H_7.

(a) Quels sont les mots codés qui correspondent respectivement aux messages 1011, 1100, 0111, 1010 ?

(b) Parmi les mots reçus suivants : 1010110, 1100110, 0100001, lesquels comportent une erreur ? Retrouver les messages transmis.

13.4. On considère le code de Hamming H_7.

(a) Quels sont les mots codés qui correspondent respectivement aux messages 1110, 0110, 0101, 1111 ?

(b) Parmi les mots reçus suivants : 1100100, 1100000, 1111001, lesquels comportent une erreur ? Retrouver les messages transmis.

13.5. (a) Déterminer une matrice de contrôle du code défini par la matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Après contrôle des erreurs, décoder les mots reçus suivants : 0111101, 0100110, 1010010.

(c) Quel est le défaut de ce code ?

13.6. (a) Déterminer une matrice de contrôle du code défini par la matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Après contrôle des erreurs, décoder les mots reçus suivants : 1101011, 0110111 et 0111000.

(c) Quel est le défaut de ce code ?

13.7. Soit G de type $n \times \ell$ la matrice génératrice d'un code linéaire. Montrer qu'une matrice C est une matrice de contrôle de ce code si et seulement si $C \cdot G = 0$ et $\mathrm{rg}(C) = n - \ell$.

13.8. On considère la matrice C formée de toutes les matrices-colonnes non nulles de $\mathcal{K}^4$.

(a) Quel est le type de la matrice C ?

(b) Quel est le rang de C ?

(c) Considérons un code linéaire défini par une transformation matricielle T dont la matrice de contrôle est C. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(T)$?

(d) Quel est le rendement de ce code ?

13.9 (*). (a) Déterminer une matrice de contrôle du code défini par la matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} & & I_5 & & \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Quel est le rendement de ce code ?

(c) Ce code peut-il détecter une erreur simple ?

(d) Retrouver les messages transmis à partir des mots reçus suivants (sachant qu'il y a au plus une erreur simple) : 1111111111, 1010101010, 1010011011.

(e) Pour les mots reçus suivants : $y_1 = 1010111010$ et $y_2 = 1010011000$, trouver le mot c_i du code qui minimise le nombre de bits non nuls de $y_i - c_i$.

13.10 (*). On considère un code linéaire ayant pour matrice de contrôle la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Quel est le rang de C ?

(b) Déterminer une matrice génératrice de ce code.

(c) Quel est le rendement de ce code ?

(d) Déterminer une matrice de décodage de ce code.

(e) Ce code peut-il détecter une erreur simple ?

Chapitre 14

Chaînes de Markov

Phénomènes aléatoires

Chaque individu ou entreprise est régulièrement confronté à des situations d'incertitude, telles les prévisions de la demande, les prix futurs des matières premières, ou les conditions économiques à venir. Ces situations peuvent généralement être analysées à l'aide d'outils mathématiques issus de la théorie des probabilités. Les chaînes de Markov sont le modèle mathématique le plus utilisé pour l'étude et la simulation de phénomènes aléatoires qui évoluent au cours du temps. Dans ce chapitre, nous allons introduire ces modèles, puis utiliser des techniques des chapitres 1 à 8 pour les étudier.

Considérons tout d'abord deux exemples.

Exemple 1. *Prévisions météorologiques.* On se limite, pour simplifier, à trois types de prévisions :

$$E_1 = \text{ensoleillé}\,, \qquad E_2 = \text{nuageux}\,, \qquad E_3 = \text{pluvieux}\,.$$

Si, aujourd'hui, on est dans l'état E_j, il y a une probabilité p_{ij} d'être demain dans l'état E_i.

Exemple 2. *Location de voitures.* Une entreprise loue des voitures dans trois villes E_1, E_2 et E_3. Les clients peuvent louer une voiture dans n'importe laquelle de ces villes et la rendre dans n'importe quelle autre. On admet, pour simplifier, que les voitures sont toutes louées le matin et rendues le soir même.

Si la voiture est louée le matin dans la ville E_j, on note p_{ij} la probabilité qu'elle soit rendue le soir dans la ville E_i.

Variantes. Dans l'exemple 2, on parle de villes et de voitures, et l'unité de temps est de un jour. Mais on pourrait très bien remplacer « ville » par « ordinateur », « voiture » par « paquet d'informations », et prendre pour unité de temps la milliseconde. On aurait alors un modèle pour la circulation des informations dans un réseau d'ordinateurs. Ce type de modèle est d'ailleurs utilisé dans la pratique pour la conception et le dimensionnement de ces réseaux.

Matrice de transition

On concevra une chaîne de Markov comme une particule (ou voiture, dans l'exemple 2) qui se déplace successivement d'un état vers un autre. S'il y a n états possibles $E_1, \ldots, E_n$, on note p_{ij} la probabilité, partant de E_j, d'arriver en E_i en une étape. La matrice

$$P = (p_{ij})$$

de type $n \times n$ est la *matrice de transition* de la chaîne.

On remarquera que dans le symbole p_{ij}, le deuxième indice j représente l'état de départ et le premier indice i l'état d'arrivée. La somme des coefficients dans une colonne est donc égale à 1.

Exemple 2 (suite). *Location de voitures.* Supposons qu'il y a trois villes ($n = 3$) et que la matrice de transition P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \tag{14.1}$$

Alors $p_{1,2} = 0{,}3$ est la probabilité qu'une voiture louée le matin dans la ville E_2 soit rendue le soir dans la ville E_1.

Jour après jour, les voitures vont se promener de ville en ville. Il est souvent commode de représenter les déplacements possibles, et leur probabilité, dans un diagramme comme celui de la figure 14.1, appelé *diagramme de transition.*

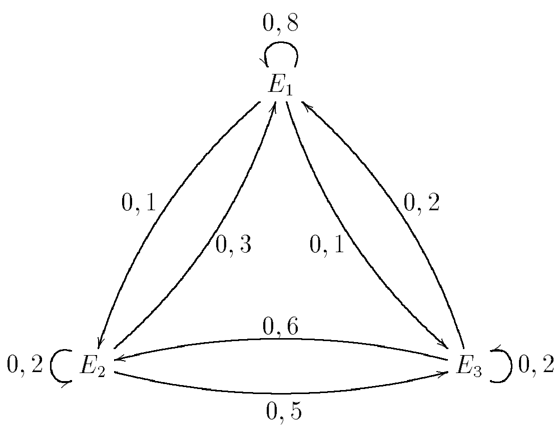


FIG. 14.1 – Le diagramme de transition pour l'exemple 2.

Proportion de véhicules dans chaque état. Imaginons que l'entreprise dispose de 1000 véhicules. Soit $x_i^{(0)}$ la proportion de véhicules qui se trouve au matin du jour 0 dans la ville E_i.

Une possibilité, par exemple, est qu'initialement la moitié des véhicules se trouve dans la ville E_1 et l'autre moitié dans la ville E_2. Dans ce cas, on aurait

$$x_1^{(0)} = 0{,}5 = 50\,\%\,, \qquad x_2^{(0)} = 0{,}5 = 50\,\%\,, \qquad x_3^{(0)} = 0\,.$$

Une autre possibilité est qu'initialement, toutes les voitures se trouvent dans la ville E_1. Dans ce cas, on aurait

$$x_1^{(0)} = 1 = 100\,\%\,, \qquad x_2^{(0)} = 0\,, \qquad x_3^{(0)} = 0\,.$$

Quelles que soient les proportions initiales, observons que l'on a

$$x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_3^{(0)} = 1 = 100\,\%\,.$$

Vecteur d'état

On appellera *vecteur d'état* tout élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ et $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Le vecteur $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ formé à partir de la proportion $x_i^{(0)}$ de véhicules initialement dans la ville E_i est donc un vecteur d'état. Si $x_i^{(k)}$ est la proportion moyenne de véhicules dans la ville E_i au matin du jour k, nous allons déterminer le lien entre le vecteur d'état $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ et $x^{(0)}$.

Proposition. Le vecteur d'état $x^{(k)}$ s'exprime à l'aide du vecteur $x^{(k-1)}$ et de la matrice de transition P par la formule

$$x^{(k)} = P \cdot x^{(k-1)}\,.$$

De plus, $x^{(k)} = P^k \cdot x^{(0)}$.

Justification. A l'étape k, la proportion moyenne $x_i^{(k)}$ de véhicules dans la ville E_i peut se calculer à l'aide du vecteur d'état $x^{(k-1)}$. En effet, pour chaque ville E_j, la proportion moyenne de véhicules qui quittent E_j pour arriver en une seule étape en E_i est p_{ij}, et donc

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_j^{(k-1)}\,.$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= P \cdot x^{(k-1)} \\ &= P \cdot (P \cdot x^{(k-2)}) = P^2 \cdot x^{(k-2)} \\ &\;\vdots \\ &= P^k \cdot x^{(0)}\,. \end{aligned}$$

Vecteur d'état stationnaire. Un vecteur d'état x est *stationnaire* si

$$x = P \cdot x,$$

autrement dit, si x est un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1.

Dans l'exemple de location des voitures, si un vecteur d'état $x^{(k)}$ est stationnaire, alors la proportion moyenne de voitures dans chaque ville sera pratiquement la même jour après jour. Ceci serait d'un intérêt évident pour l'entreprise, au niveau des places de parc à réserver, par exemple.

Exemple 2 (suite). *Location de voitures.* Soit P la matrice définie en (16.1). Alors la seule solution $x = (x_1, x_2, x_3)$ du système $x = P \cdot x$ qui vérifie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ est

$$x_1 = \frac{34}{61} \simeq 0{,}557\,, \qquad x_2 = \frac{14}{61} \simeq 0{,}230\,, \qquad x_3 = \frac{13}{61} \simeq 0{,}213\,.$$

Par conséquent, s'il y a initialement 557 voitures en E_1, 230 voitures en E_2 et 213 en E_3, alors ces nombres ne changeront pratiquement pas au cours du temps !

Parcours d'une seule voiture

Nous allons maintenant suivre le parcours d'une voiture. Imaginons que cette voiture soit initialement dans la ville E_1, ensuite elle est rendue le soir en E_3, puis le jour suivant en E_2, etc., comme indiqué dans la figure 14.2.

Matin	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Ville	E_1	E_3	E_2	E_3	E_1	E_1	E_2	$\cdots$

FIG. 14.2 – Le parcours d'une voiture.

On s'intéresse aux nombres

$$N_i(k) = \text{nombre de visites à l'état } E_i \text{ pendant les étapes 0 à } k\,.$$

Pour le parcours de la figure 14.2,

$$N_1(0) = 1\,, \qquad N_2(0) = 0\,, \qquad N_3(0) = 0\,,$$

$$N_1(6) = 3\,, \qquad N_2(6) = 2\,, \qquad N_3(6) = 2\,.$$

On constate en particulier que

$$N_1(6) + N_2(6) + N_3(6) = 7 = 6 + 1\,,$$

et, pour une chaîne de Markov avec n états, que

$$N_1(k) + N_2(k) + \cdots + N_n(k) = k + 1\,. \tag{14.2}$$

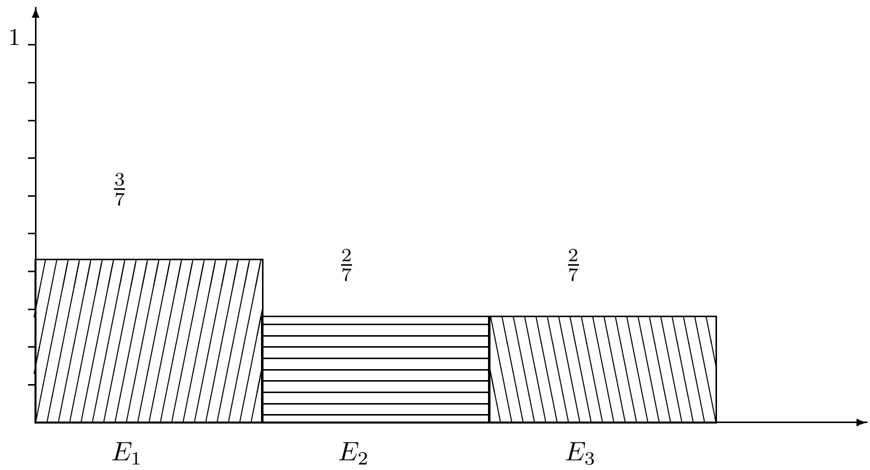
Vecteur des visites. Le vecteur

$$\left(\frac{N_1(k)}{k+1}, \frac{N_2(k)}{k+1}, \ldots, \frac{N_n(k)}{k+1}\right)$$

est appelé *vecteur des visites* (effectuées jusqu'à l'étape k). D'après (16.2),

$$\frac{N_1(k)}{k+1} + \frac{N_2(k)}{k+1} + \cdots + \frac{N_n(k)}{k+1} = 1\,.$$

Il est naturel de représenter graphiquement le vecteur des visites par un histogramme, comme dans la figure 14.3.



$$\left(\frac{N_1(6)}{7}, \frac{N_2(6)}{7}, \frac{N_3(6)}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right) \simeq (0{,}43; 0{,}28; 0{,}28)$$

FIG. 14.3 – Représentation du vecteur des visites.

Evolution du vecteur des visites. Si l'on simule le parcours d'une voiture et que l'on représente graphiquement et successivement les vecteurs des visites à chaque étape pour la chaîne de Markov de l'exemple 2, on constate que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{N_1(k)}{k+1}, \frac{N_2(k)}{k+1}, \frac{N_3(k)}{k+1}\right) = (0{,}557\,;\ 0{,}230\,;\ 0{,}213)\,.$$

Par conséquent, d'une part, la chaîne « oublie » son état initial, et d'autre part, les proportions de visites à chaque état convergent vers les coefficients du vecteur d'état stationnaire.

Cette observation est un cas particulier du résultat général suivant, que nous énonçons sans démonstration.

Théorème. *Supposons que la matrice de transition P est telle que pour un certain n, tous les coefficients de P^n sont strictement positifs. Alors :*

(a) *il y a un seul vecteur stationnaire x ;*

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k+1}\big(N_1(k), \ldots, N_n(k)\big) = x$;

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} P^k = (x \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, x)\,.$

Chaînes de Markov en infographie

Afin de montrer la richesse du champ d'application des chaînes de Markov, nous donnons ici un exemple d'utilisation, très différente de celle décrite ci-dessus, qui fait le lien avec les questions abordées au chapitre 11.

Rappelons qu'un écran d'ordinateur est typiquement composé de 1024×1024 pixels (i,j), $i = 0, \ldots, 1023$, $j = 0, \ldots, 1023$. Considérons les trois points

$$A_1 = (0,0)\,, \qquad A_2 = (1024, 0)\,, \qquad A_3 = (512, 1024)\,.$$

On suppose qu'au départ, tous les pixels sont blancs. On va colorier certains pixels en noir à l'aide d'une chaîne de Markov dont les états sont les pixels de l'écran. Cette chaîne de Markov est définie comme suit.

Au départ, la chaîne se trouve en $(0,0)$. Ensuite, la chaîne se déplace selon la règle ci-dessous, et chaque pixel visité par la chaîne sera colorié en noir.

Règle de déplacement. Si la chaîne est en (i,j), on choisit au hasard l'un des points A_1, A_2 ou A_3 et on effectue la moitié du chemin vers le point choisi. Plus précisément, avec probabilité $1/3$, on choisira A_1 et la chaîne se déplacera de (i,j) vers

$$T_1(i,j) = \left(\left[\frac{i}{2}\right], \left[\frac{j}{2}\right]\right),$$

où $[u]$ désigne la partie entière du nombre u. De même, on choisira avec probabilité $1/3$ le point A_2 (respectivement A_3), et la chaîne se déplacera de (i,j) vers

$$T_2(i,j) = \left(512 + \left[\frac{i}{2}\right], \left[\frac{j}{2}\right]\right)$$

(respectivement

$$T_3(i,j) = \left(256 + \left[\frac{i}{2}\right],\ 512 + \left[\frac{j}{2}\right]\right)).$$

Que dessine cette chaîne de Markov ? Après un grand nombre d'étapes, l'ensemble des états visités par la chaîne ci-dessus sera colorié en noir, ce qui réalise un dessin à l'écran. Quel est ce dessin ?

En fait, il suffit de simuler le déplacement de cette chaîne de Markov pour constater que le dessin réalisé est celui de l'une des fractales que nous avons déjà rencontrée au chapitre 11.

Il vaut la peine de relever que la technique de dessin présentée ici est utilisée dans différentes applications, par exemple pour la compression d'images en vue de leur stockage sur CD-Rom. Ces applications sont décrites dans des ouvrages plus spécialisés.

Exercices

14.1. Considérons la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 & 7/10 \\ 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/2 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les vecteurs d'états $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ si le vecteur d'état initial est $x^{(0)} = (0, 0, 1)$.

(b) Déterminer le vecteur d'état stationnaire relatif à la matrice P.

14.2. Considérons la matrice de transition

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/5 & 1/2 \\ 7/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les vecteurs d'états $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ si le vecteur d'état initial est $x^{(0)} = (0, 1, 0)$.

(b) Déterminer le vecteur d'état stationnaire relatif à la matrice $\widetilde{P}$.

14.3. (a) Montrer que les diagrammes de transition associés aux matrices de transition P de l'exercice 14.1 et $\widetilde{P}$ de l'exercice 14.2 sont les mêmes.

(b) Retrouver la solution de l'exercice 14.2(b) à l'aide de celle de l'exercice 14.1(b).

(c) Trouver une matrice orthogonale R telle que $\widetilde{P} = R^{-1} \cdot P \cdot R$.

14.4. Considérons la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le vecteur d'état stationnaire relatif à P.

(b) Calculer P^k et $\lim_{k\to\infty} P^k$.

(c) Soit $x^{(0)}$ le vecteur d'état initial. Calculer $\lim_{k\to\infty} P^k \cdot x^{(0)}$.

14.5. Considérons la matrice de transition

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le vecteur d'état stationnaire relatif à $\widetilde{P}$.

(b) Diagonaliser la matrice $\widetilde{P}$, puis calculer $\widetilde{P}^k$ et $\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k$.

(c) Soit $x^{(0)}$ le vecteur d'état initial. Calculer $\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k \cdot x^{(0)}$.

14.6. (a) Montrer que les diagrammes de transition associés aux matrices de transition P de l'exercice 14.4 et $\widetilde{P}$ de l'exercice 14.5 sont identiques.

(b) Retrouver les résultats de l'exercice 14.5 à l'aide de ceux de l'exercice 14.4.

14.7. Soit $P = (p_{ij})$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov et soit x un vecteur d'état. Montrer que $y = P \cdot x$ est aussi un vecteur d'état.

14.8. Soit $P = (p_{ij})$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov ayant n états et dont le vecteur d'état stationnaire est $x = (c, \ldots, c)$, où c est un nombre positif. Montrer qu'alors $p_{i1} + \cdots + p_{in} = 1$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, puis calculer c.

14.9. (a) Montrer qu'on peut trouver une matrice de transition P, de type $n \times n$, non égale à l'identité et telle que $P^2 = P$.

(b) Donner un exemple dans le cas $n = 2$ et dans le cas $n = 3$.

(c) Une telle matrice est-elle inversible ?

14.10. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le vecteur d'état stationnaire relatif à P. La solution est-elle unique ?

(b) Diagonaliser la matrice P, puis calculer P^k. Que peut-on dire de $\lim_{k\to\infty} P^k$?

(c) Pourquoi n'a-t-on pas, en (a) et (b), des solutions analogues à celles de l'exercice 14.4 ?

14.11. Le problème suivant est issu d'une étude de la succession des jours pluvieux et des jours secs pendant la période pluvieuse dans une ville méditerranéenne. Désignons par E_1 l'état « sec », par E_2 l'état « pluvieux » et par p_{ij}, où $i, j = 1, 2$, la probabilité qu'un jour soit dans l'état E_i sachant que le jour précédent était dans l'état E_j. A partir de données portant sur 27 années d'observation, la matrice de transition suivante a été établie :

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0{,}750 & 0{,}338 \\ 0{,}250 & 0{,}662 \end{pmatrix}.$$

(a) Sachant qu'aujourd'hui il fait beau temps, calculer la probabilité que dans 10 jours il pleuve.

(b) Est-ce que la probabilité qu'il fasse beau temps dans n jours tend vers une certaine valeur lorsque n devient très grand ? Si oui, quelle est cette valeur et est-ce qu'elle dépend de l'état du temps qu'il fait aujourd'hui ?

(*Indication* : On peut utiliser les résultats de l'exercice 8.12.)

Chapitre 15

Stéréogrammes

La perception visuelle de la distance est l'un des avantages de la vision binoculaire. En effet, un être doté d'un seul œil, qui se tiendrait immobile, ne percevrait pas les distances des objets situés dans son champ visuel. En revanche, il est facile pour le cerveau humain d'effectuer la reconstitution tridimensionnelle d'une scène observée avec les deux yeux. Cette aptitude est mise à profit par des appareils appelés stéréoscopes, qui présentent à chaque œil une image différente et donnent à l'utilisateur l'impression qu'il « voit » une scène tridimensionnelle.

Si le phénomène de stéréoscopie est connu depuis très longtemps, ce n'est que depuis quelques dizaines d'années qu'on a découvert que certaines images planes ont la propriété remarquable suivante : si on montre cette même image aux deux yeux, alors le cerveau humain perçoit (ou reconstitue) une scène tridimensionnelle (cf. les exemples p.173 à 177). Ces images sont appelées des *stéréogrammes*. Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment réaliser ce type d'images, à l'aide des techniques des chapitres 1 à 4.

Le monde vu par un seul œil

Imaginons un œil immobile situé à l'origine d'un système de coordonnées $Oxyz$, regardant dans la direction Oz, qui observe, comme dans la figure 15.1, un point P à travers une feuille transparente située dans le plan $z = f$, où f est un nombre que l'on prendra égal à 40 cm.

Pour cet œil, il n'y a pas de différence entre le fait de voir le point P ou bien de voir le point $T(P)$, où $T(P)$ est défini comme suit :

> $T(P)$ est le point d'intersection du plan $z = f$ et de la droite passant par les deux points O et P.

Repère dans le plan de la feuille. Soit $O'XY$ un repère dans le plan de la feuille transparente. Par commodité, on choisit pour origine O' le point $(0, 0, f)$, pour axe $O'X$ la droite parallèle à Ox passant par O', et pour axe $O'Y$ la droite parallèle à Oy passant par O' (cf. fig. 15.2).

Coordonnées de $T(P)$ dans le repère $O'XY$. Les relations entre les coordonnées (X, Y) et (x, y, z) d'un point situé dans le plan $z = f$ sont tout

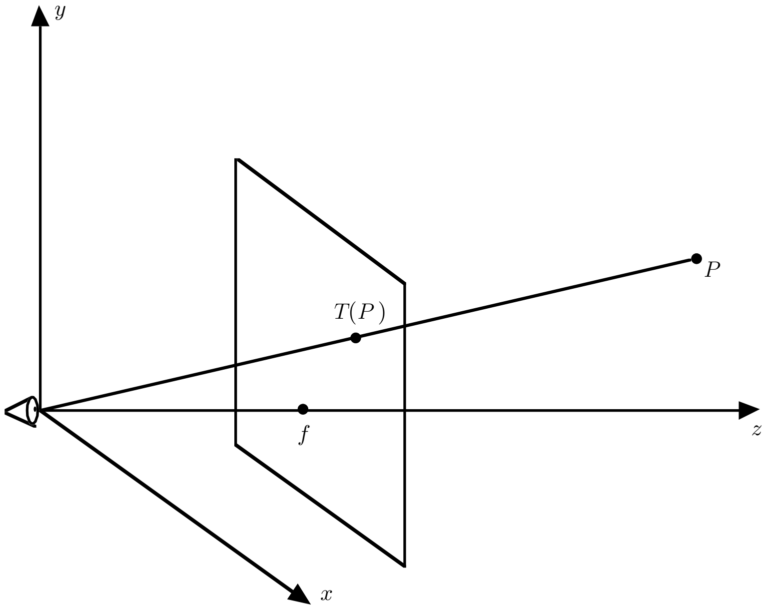


FIG. 15.1 – Le point P vu de l'origine.

simplement

$$X = x \qquad \text{et} \qquad Y = y\,.$$

Afin de calculer les coordonnées (X, Y) de $T(P)$, observons que les coordonnées de tout point de la droite passant par $O = (0,0,0)$ et $P = (x,y,z)$ sont de la forme

$$k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad k \text{ un nombre}\,.$$

Le seul point de cette droite qui est situé dans le plan de la feuille est celui pour lequel

$$k\,z = f\,, \qquad \text{d'où } k = \frac{f}{z}\,.$$

Les coordonnées du point $T(P)$ sont donc

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{z}\,x \\ \frac{f}{z}\,y \\ f \end{pmatrix}.$$

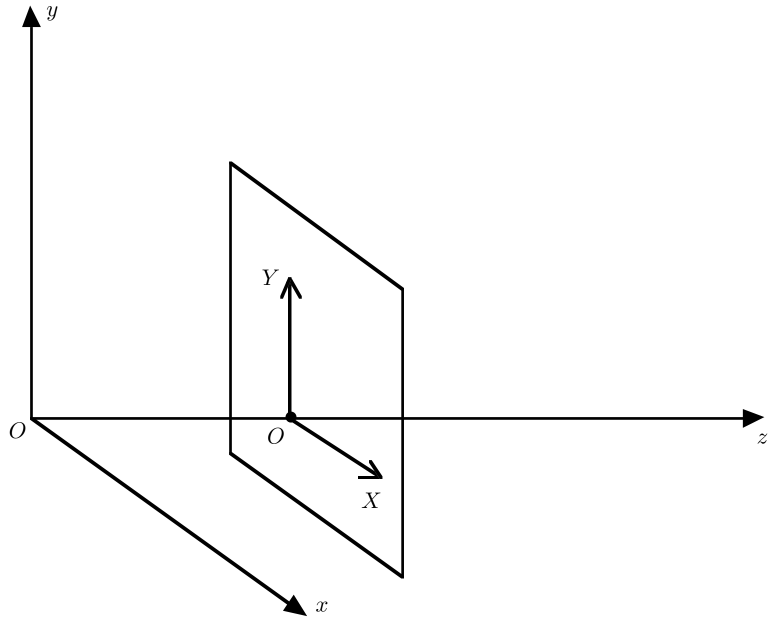


FIG. 15.2 – Repères de l'espace et du plan.

Nous en déduisons les coordonnées de $T(P)$ dans le repère $O'XY$:

$$X = f\,\frac{x}{z}\,, \qquad Y = f\,\frac{y}{z}\,. \tag{15.1}$$

Les formules (15.1) définissent une transformation T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on peut écrire de manière équivalente comme suit :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1/z \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

Exemple 1. Considérons le tétraèdre de sommets

$$P_1 = (1{,}2; -0{,}5; 65)\,, \qquad P_2 = (3; 1{,}5; 63)\,,$$
$$P_3 = (4; -1; 62)\,, \qquad P_4 = (1{,}8; -1{,}5; 62)\,.$$

En appliquant les formules (15.1) ou (15.2), on trouve

$$T(P_1) = (0{,}74; -0{,}31)\,, \qquad T(P_2) = (1{,}9; 0{,}95)\,,$$
$$T(P_3) = (2{,}58; -0{,}64)\,, \qquad T(P_4) = (1{,}16; -0{,}97)\,.$$

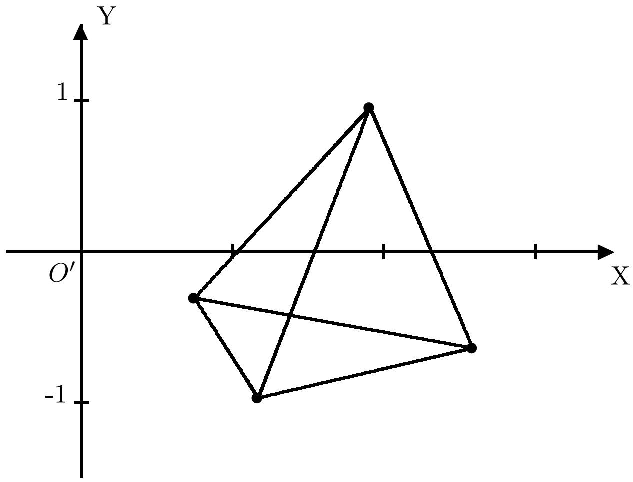


FIG. 15.3 – Représentation plane d'un tétraèdre.

En plaçant l'origine O' du repère $O'XY$ n'importe où sur une feuille de papier, on peut dessiner ces quatre points et relier chaque paire de points par un segment, comme sur la figure 15.3.

Un seul œil immobile situé au point O ne fera pas de différence entre cette image et la vue du tétraèdre.

Le point de vue de l'autre œil

Jusqu'à présent, nous avons considéré un seul œil situé à l'origine O. Si cet œil est notre œil gauche, nous avons aussi un œil droit, et nous allons maintenant analyser ce que voit l'œil droit.

Nous admettrons que l'œil droit est positionné au point $(e, 0, 0)$ du repère $Oxyz$, où $e = 7$ cm (cf. fig. 15.4). L'œil gauche voit le point $P = (x, y, z)$ comme s'il était situé sur la feuille transparente au point $T_G(P)$, qui n'est autre que le point $T(P)$ calculé en (15.2) :

$$T_G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1/z \end{pmatrix}. \tag{15.3}$$

L'œil droit voit le point P sur la feuille transparente au point $T_D(P)$, dont nous allons calculer les coordonnées dans le repère $O'XY$.

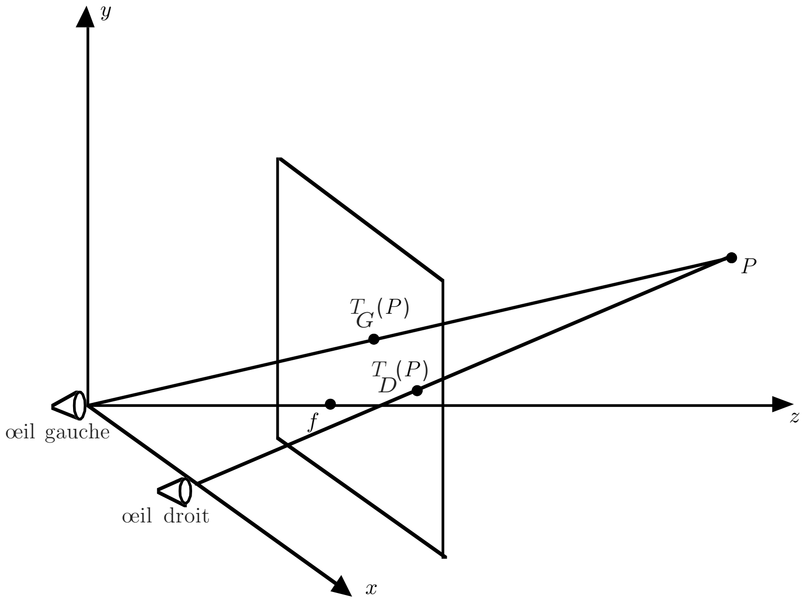


FIG. 15.4 – Le point P vu par deux yeux.

Coordonnées de $T_D(P)$ dans le repère $O'XY$. Le point $T_D(P)$ est défini par la propriété suivante :

> $T_D(P)$ est le point d'intersection du plan $z = f$ et de la droite passant par les deux points $(e, 0, 0)$ et P.

Les coordonnées de tout point de cette droite sont de la forme

$$\begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x - e \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad k \text{ un nombre},$$

et le seul point de cette droite qui est situé dans le plan de la feuille transparente est celui tel que

$$k\,z = f\,, \qquad \text{d'où } k = \frac{f}{z}\,.$$

Les coordonnées du point $T_D(P)$ sont donc

$$\begin{pmatrix} e + f(x - e)/z \\ fy/z \\ f \end{pmatrix}.$$

Dans le repère $O'XY$, ce point a pour coordonnées

$$X = e + \frac{f}{z}\,(x - e)\,, \qquad Y = \frac{f}{z}\,y\,. \tag{15.4}$$

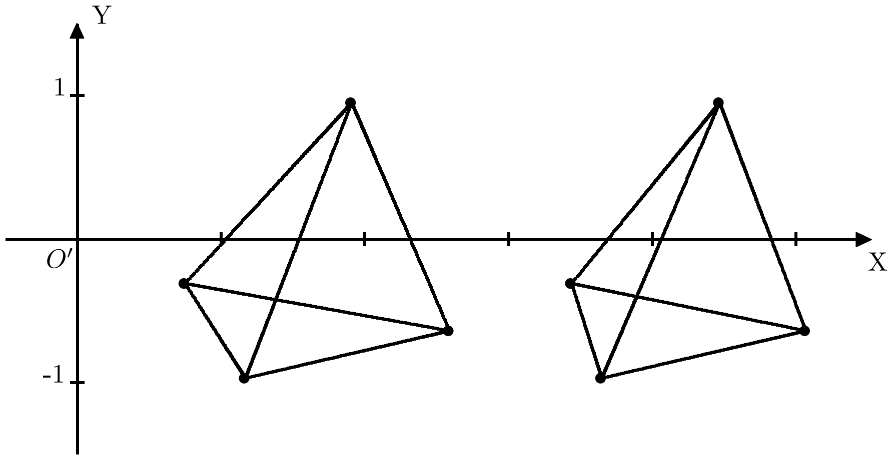


FIG. 15.5 – Une paire stéréoscopique.

Les formules (15.4) définissent la transformation T_D de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Elles s'écrivent de manière équivalente comme suit :

$$T_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & -ef \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1/z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15.5}$$

Ce que voient les deux yeux. Reprenons l'exemple 1, mais cette fois-ci, les deux yeux regardent le tétraèdre de sommets P_1, P_2, P_3 et P_4. L'œil gauche voit ce qui est dessiné sur la figure 15.3. L'œil droit voit les points $T_D(P_1)$, $T_D(P_2)$, $T_D(P_3)$ et $T_D(P_4)$, dont on calcule les coordonnées à l'aide de la formule (15.5) :

$$T_D(P_1) = (3{,}43; -0{,}31)\,, \qquad T_D(P_2) = (4{,}46; 0{,}95)\,,$$

$$T_D(P_3) = (5{,}06; -0{,}64)\,, \qquad T_D(P_4) = (3{,}64; -0{,}97)\,.$$

On peut maintenant dessiner les deux images, que voient l'œil droit et l'œil gauche respectivement, sur un seul dessin, comme à la figure 15.5.

Cette paire d'images est appelée une *paire stéréoscopique.* En fixant son regard sur cette paire pendant un certain temps, on voit apparaître derrière la feuille de papier un tétraèdre. Deux autres exemples de paires stéréoscopiques sont donnés dans les figures 15.13 et 15.14.

DESSIN DE SURFACES

Au lieu de dessiner des objets formés de sommets reliés par des segments de droites, nous allons indiquer comment dessiner des surfaces opaques.

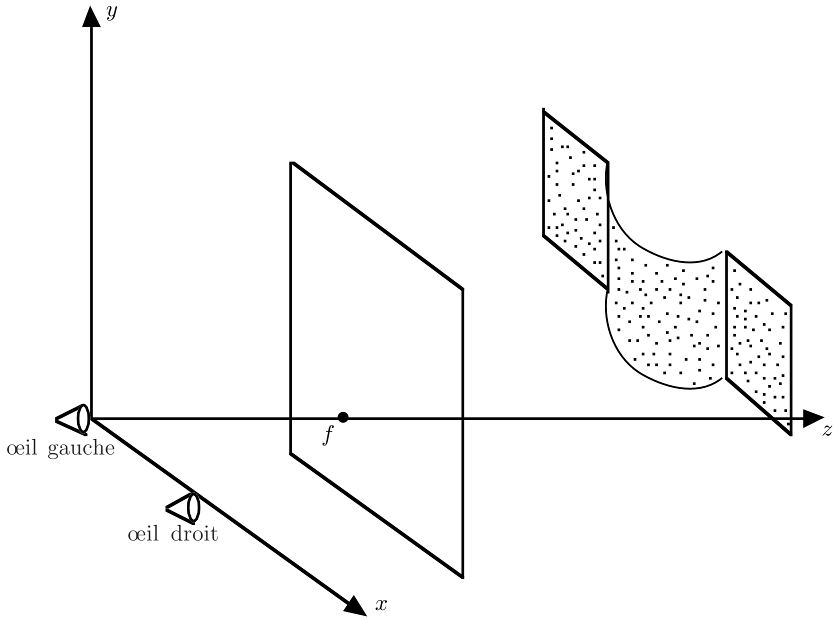


FIG. 15.6 – Une surface saupoudrée de points noirs.

On va admettre que cette surface est blanche, mais pour qu'elle soit mieux visible, on supposera qu'elle est couverte de points noirs, disposés un peu partout sur la surface (comme si la surface blanche était saupoudrée de grains de poivre).

De manière générale, la surface est donnée par une équation de la forme

$$z = h(x, y)\,,$$

et la situation est telle que le montre la figure 15.6.

Exemple 2. *Dessin d'un enfoncement sphérique.* Considérons le morceau de surface d'équation

$$z = \begin{cases} 58 + \sqrt{16 - (x-3)^2 - y^2} & \text{si } (x-3)^2 + y^2 + (60-58)^2 < 16 \\ 60 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

où $0 \leq x \leq 6$ et $-10 \leq y \leq 10$.

Cette surface est une bande verticale dans le plan d'équation $z = 60$ avec un enfoncement formé d'un morceau de coupole sphérique de rayon 4 dont le centre a pour coordonnées $(3, 0, 58)$.

Pour dessiner cette surface, on va la remplir de points noirs placés au hasard. Pour chaque point noir P, on va dessiner $T_G(P)$ et $T_D(P)$ sur la feuille. Cela donne l'algorithme dont l'organigramme est indiqué à la figure 15.7.

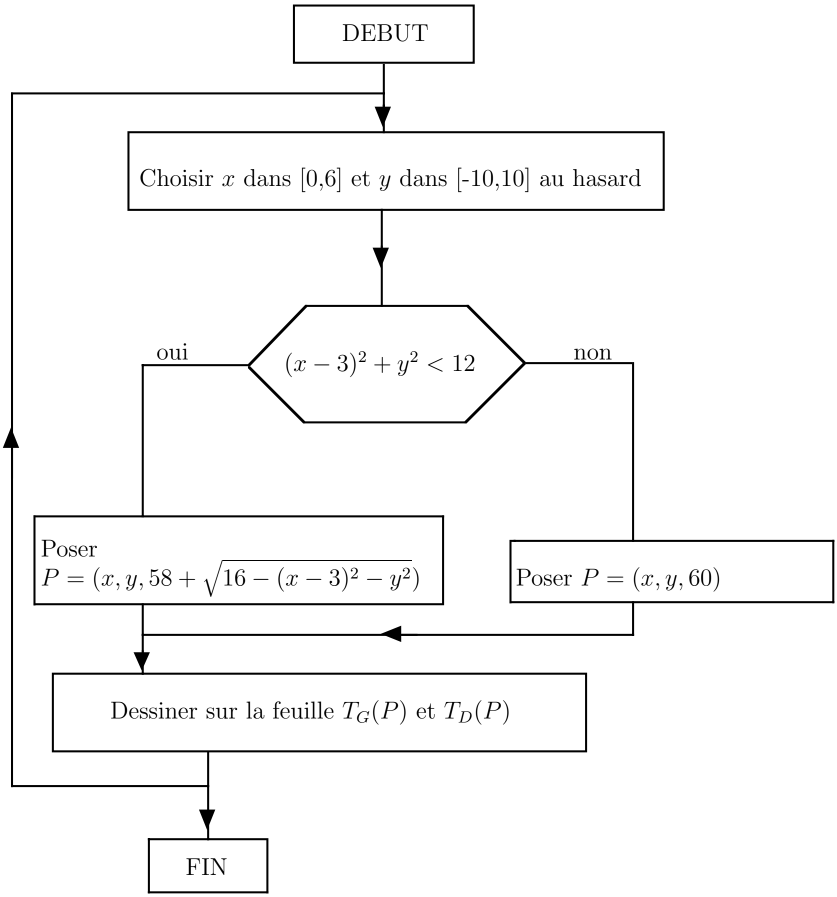


FIG. 15.7 – Algorithme pour dessiner un enfoncement sphérique.

Limite du procédé. Ce procédé ne fonctionne bien que dans le cas où les images de la surface toute entière par T_G et T_D, respectivement, ne sont pas plus larges que la moitié de l'écart entre les deux yeux, soit environ 3,5 cm. Deux exemples sont donnés dans la figure 15.15. Pour dessiner des surfaces plus grandes, il sera nécessaire de procéder autrement.

Dessin d'une surface quelconque

Nous cherchons à dessiner une surface blanche recouverte de nombreux points noirs, mais sans trop limiter la taille de la surface : elle devrait pouvoir avoir les dimensions d'une feuille A4 ou A3. Pour ce faire, il faudra choisir les points noirs sur la surface de manière très astucieuse, comme nous allons le voir.

Choix astucieux des points sur la surface. L'équation de la surface est à nouveau $z = h(x, y)$. L'intersection de cette surface avec le plan Oxz est une courbe C. Considérons un point noir P sur cette courbe, situé à gauche de l'observateur.

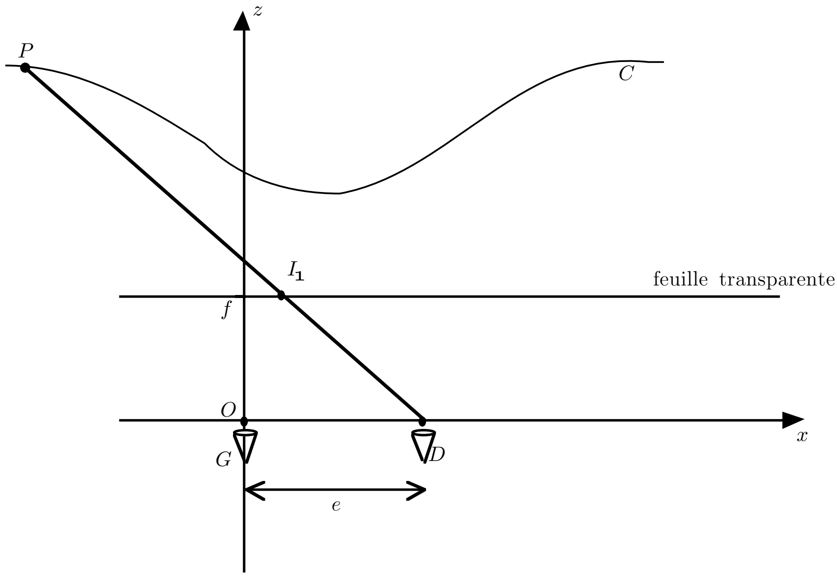


FIG. 15.8 – Vue dans le plan Oxz.

L'œil droit voit ce point P comme s'il était sur la feuille transparente en $I_1 = T_D(P)$, comme indiqué à la figure 15.8.

Dès que l'on dessine le point I_1 sur la feuille, I_1 est aussi vu par l'œil gauche. Pour l'œil gauche, ce point pourrait très bien être sur la courbe C, à l'endroit P_1 indiqué à la figure 15.9.

Mais si P_1 est un point noir sur C, il est vu par l'œil droit sur la feuille transparente, au point I_2 indiqué à la figure 15.10.

A nouveau, le point I_2 sur la feuille est aussi vu par l'œil gauche, et il pourrait très bien être sur la courbe à l'endroit P_2, auquel cas il serait vu par l'œil droit en I_3 et ainsi de suite, comme indiqué à la figure 15.11.

Chaque point noir P sur la surface donne donc lieu à une suite de points $I_1, I_2, I_3, \dots$ sur la feuille. En pratique, après moins de dix points, on sort de la feuille.

On choisit alors un autre point P, on recalcule une nouvelle suite I_1, I_2, ..., et ainsi de suite, jusqu'à avoir suffisamment de points noirs sur C pour que la courbe soit apparente.

Double interprétation des points dessinés. On remarque que les points I_1, I_2, I_3, ..., sont interprétés différemment par chaque œil : l'œil gauche pense que I_2 correspond à P_2, alors que l'œil droit pense que I_2 correspond à P_1.

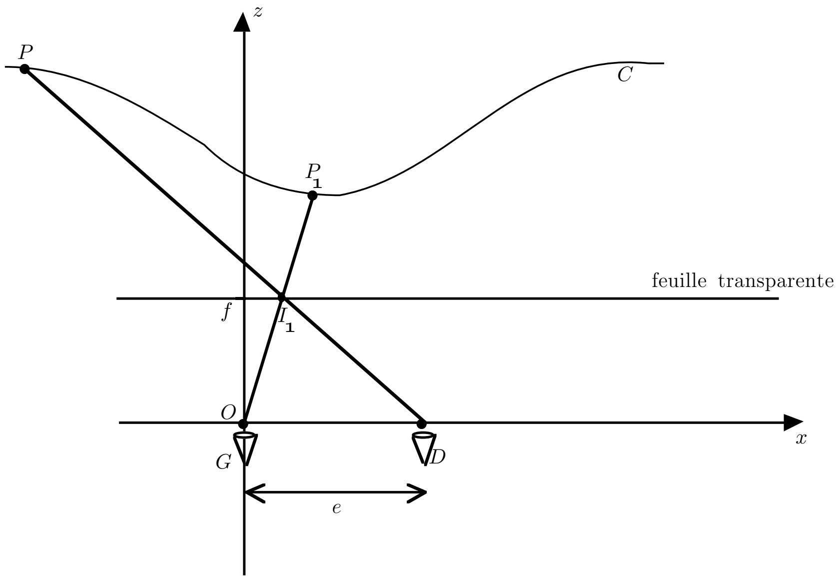


FIG. 15.9 – L'œil gauche voit I_1 en P_1.

Formules pour calculer les coordonnées des points $I_1, I_2, I_3, \ldots$ On considère les applications T_G et T_D comme étant définies sur S, plutôt que sur $\mathbb{R}^3$ tout entier. On admet que

$$T_G : S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad T_D : S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{sont bijectives}\,.$$

Dans ce cas, pour un point P sur S, on voit que

$$\begin{aligned} I_1 &= T_D(P)\,, & P_1 &= T_G^{-1}(I_1)\,,\\ I_2 &= T_D(P_1)\,, & P_2 &= T_G^{-1}(I_2)\,,\\ I_3 &= T_D(P_2)\,, & &\ldots \end{aligned}$$

Procédure de dessin. Si on choisit suffisamment de points noirs P et, pour chaque P, on dessine la suite de points $I_1, I_2, I_3, \ldots$, le cerveau humain réussit à reconstituer la surface S en regardant les points dessinés.

L'algorithme de dessin est donc celui dont l'organigramme est indiqué à la figure 15.12. Cet algorithme a été utilisé pour réaliser la figure 15.18. Une variante de l'algorithme a produit la figure 15.16.

Complexité des calculs. Même pour une surface $z = h(x, y)$ avec h relativement simple (par exemple un polynôme de degré 2), les formules explicites pour $T_G^{-1}(X, Y)$ peuvent être compliquées. Divers raffinements permettent d'accélérer les calculs, mais ils ne font pas partie de notre propos.

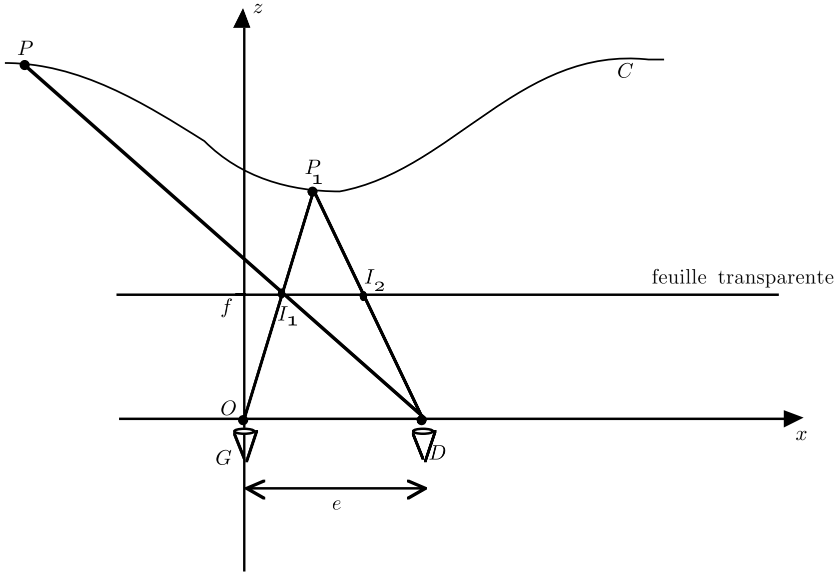


FIG. 15.10 – L'œil droit voit P_1 en I_2.

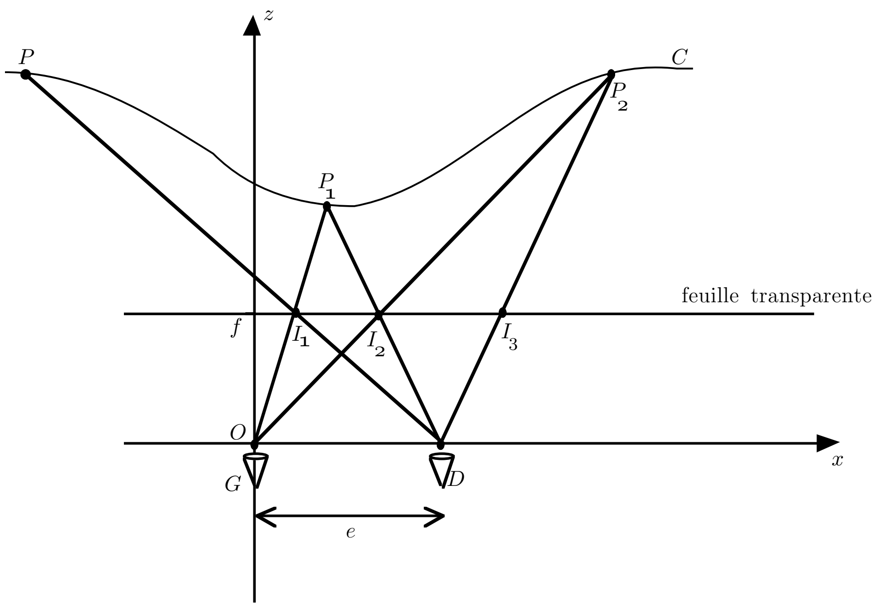


FIG. 15.11 – La suite de points I_1, I_2, I_3, ...

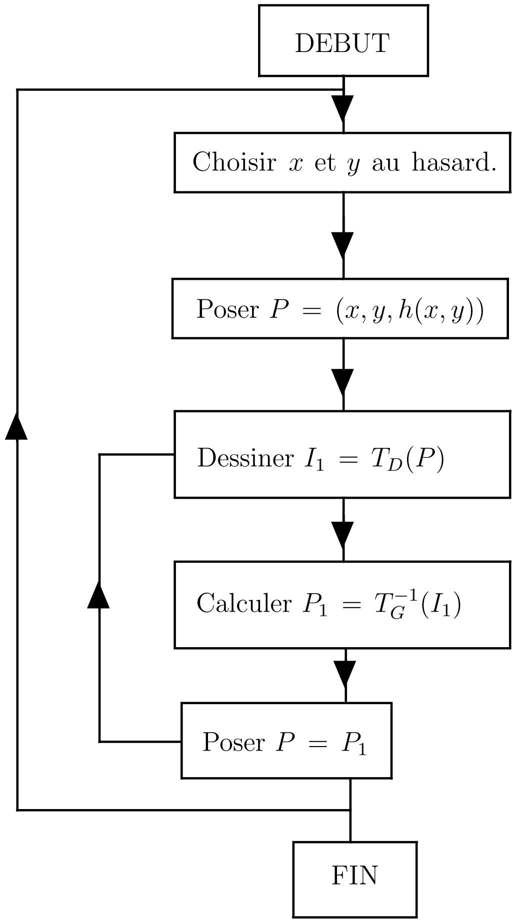


FIG. 15.12 – Algorithme de dessin d'une surface d'équation $z = h(x, y)$.

UTILISATION DE MOTIFS ESTHÉTIQUES

Dans l'algorithme décrit à la figure 15.12, le motif de base est le point : chaque point noir P donne lieu à la suite de points $I_1, I_2, \ldots$ Pour rendre l'image plane plus attrayante, il est possible d'utiliser d'autres motifs : cercle, courbe, figure géométrique, etc. Le procédé reste le même : on dessine l'image J_1 d'un motif M par la transformation T_D, on calcule $M_1 = T_G^{-1}(J_1)$, on remplace M par M_1, et on itère comme dans l'algorithme ci-dessus. Des images de ce type se trouvent dans le commerce sous forme de poster ou de livre (voir la Bibliographie).

Techniques de visualisation

Pour percevoir la scène tridimensionnelle dans les images des pages qui suivent, on peut procéder de la manière suivante. Pour les figures 15.13 et 15.14, positionner une feuille de papier blanc de largeur 20 à 40 cm perpendiculairement au livre, de sorte que la tranche de la feuille se superpose à l'axe de symétrie de la figure. Puis appuyer le bout de son nez sur la tranche opposée de la feuille, afin que chaque œil ne voit qu'un seul des dessins. Fixer les deux images jusqu'à ce qu'elles se fondent en un seul objet tridimensionnel.

Pour les figures 15.15 et 15.16, procéder comme ci-dessus en agissant par rapport aux deux gros points noirs.

Pour les figures 15.17 et 15.18, positionner le livre de sorte que les deux gros points noirs se trouvent en face des yeux. Les deux yeux observent toute l'image. Fixer les deux points noirs jusqu'à ce qu'ils se fondent en un troisième point situé au milieu des deux premiers. A ce moment-là, le centre de l'image devrait apparaître dans une forme tridimensionnelle.

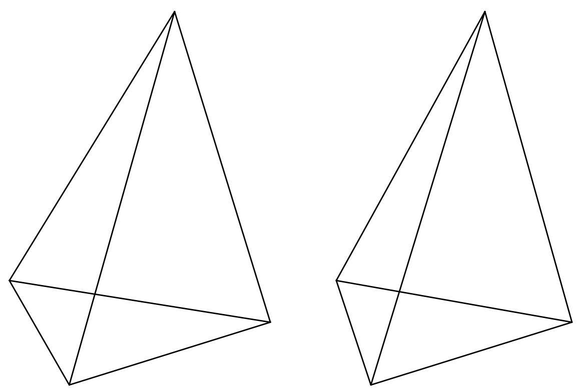


Fig. 15.13 – Paires stéréographiques

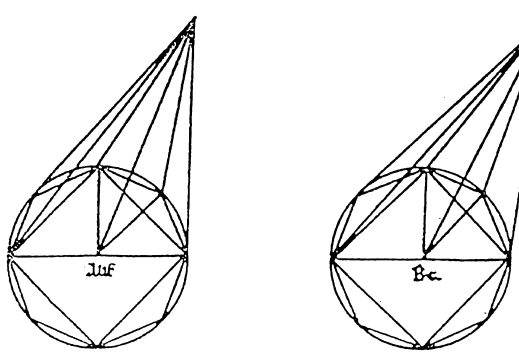


Fig. 15.14 – Dessin découvert dans un manuscrit du XIII^{e} siècle

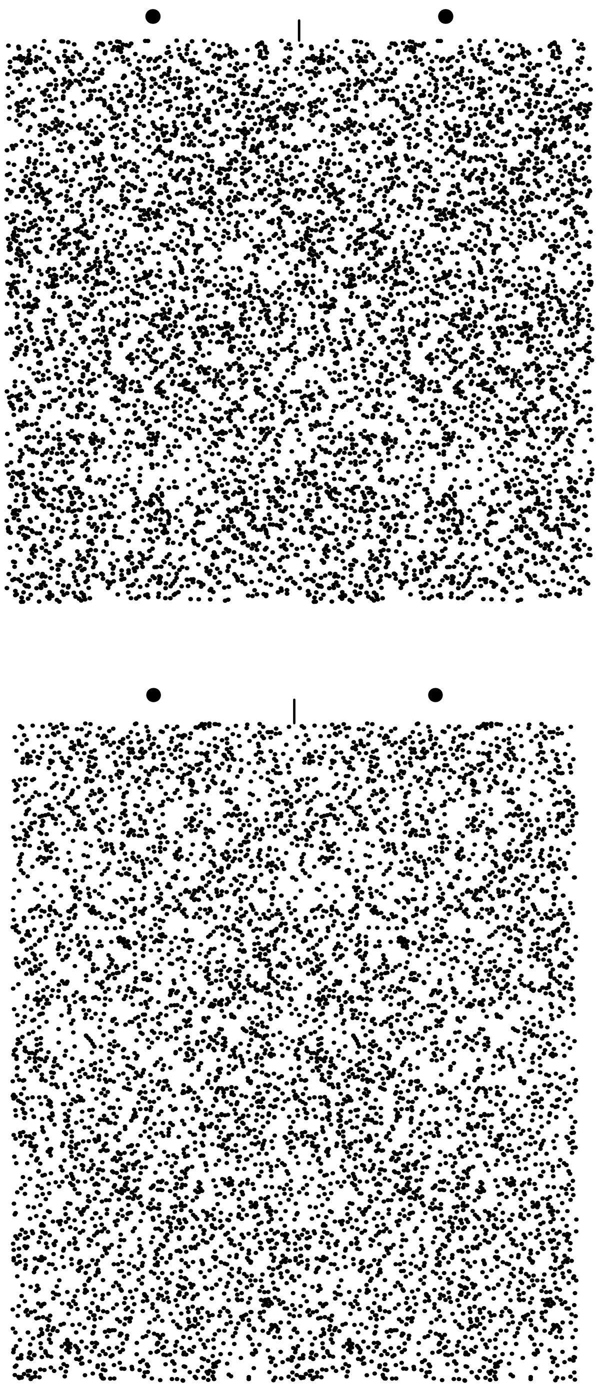


FIG. 15.15 – Paires stéréographiques avec points aléatoires

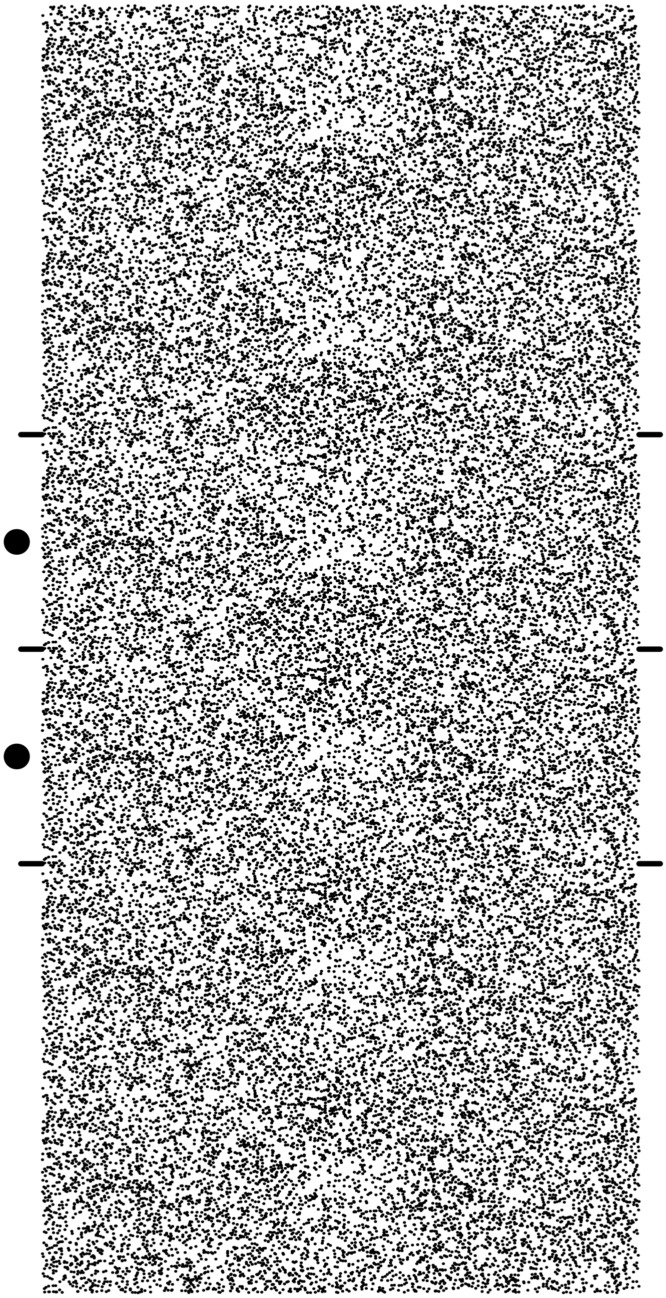


Fig. 15.16 – Paires stéréographiques avec un champ de vision élargi

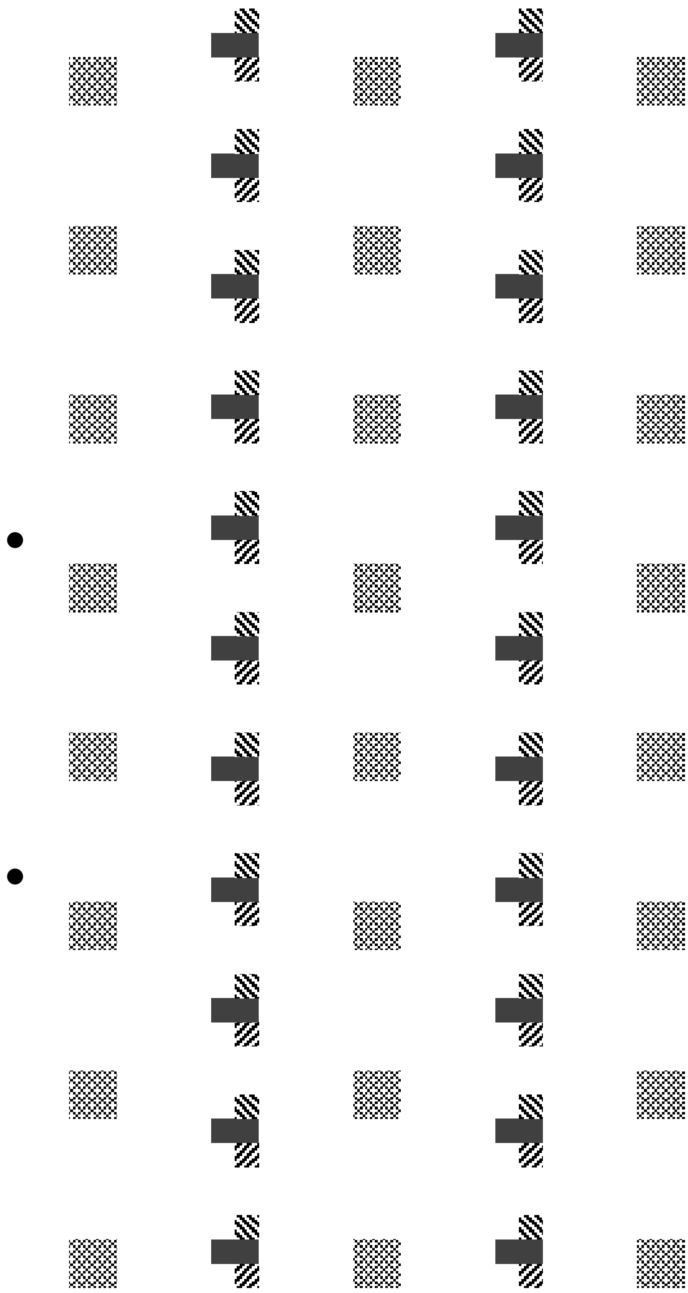


Fig. 15.17 – Motifs répétés

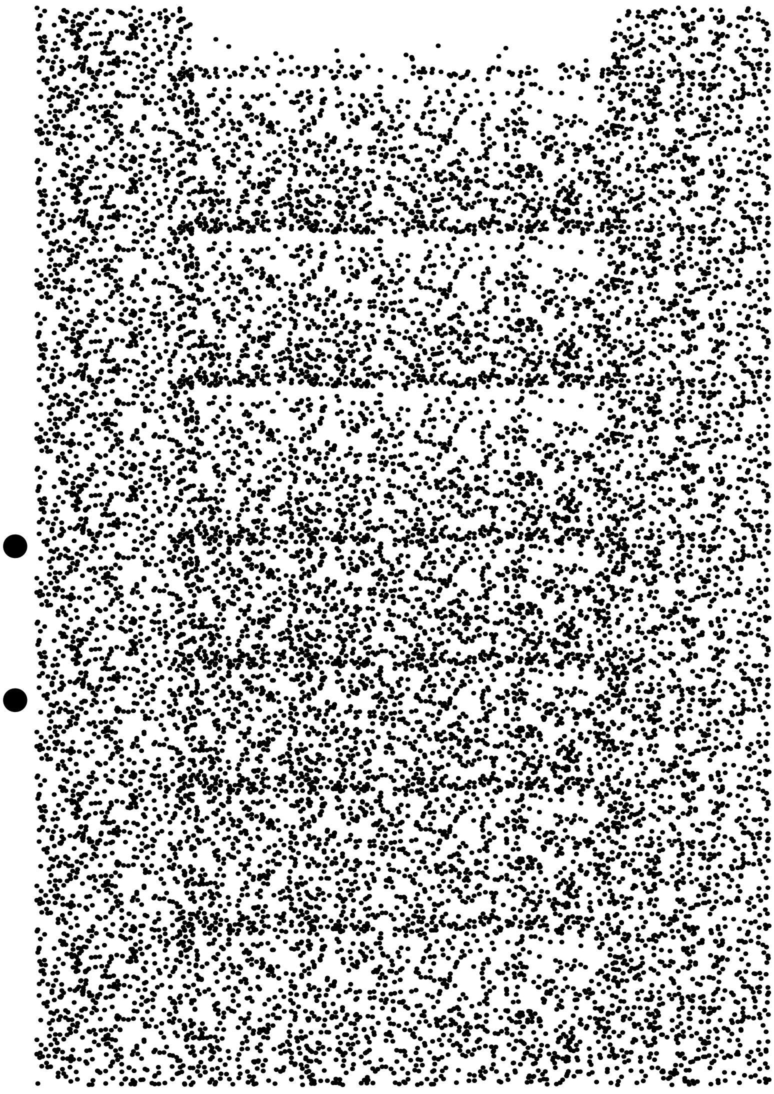


Fig. 15.18 – Pont parabolique

Exercices

15.1. Etudier l'injectivité et la surjectivité des transformations T_G et T_D de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par les formules (15.3) et (15.4) des pages 164 et 165 respectivement.

15.2. Donner une interprétation géométrique de l'hypothèse sur S de la page 170 : « les transformations T_G et T_D de S dans $\mathbb{R}^2$ définies par les formules (15.3) et (15.4) sont bijectives ».

15.3. Soit T_G et T_D de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par les formules (15.3) et (15.4). Avec $e = 7$ cm et $f = 40$ cm (dans la notation de ce chapitre), dessiner la paire stéréographique qui correspond à la pyramide de sommets

$$P_1 = (0{,}5; -2{,}5; 2f)\,, \qquad P_2 = (5; -2; 2f-2)\,,$$

$$P_3 = (5; 2; 2f-2)\,, \qquad P_4 = (0{,}5; 2{,}5; 2f)\,, \qquad P_5 = (3; 0; 2f-10)\,.$$

15.4. Comme dans l'exercice 15.3, dessiner la paire stéréographique qui correspond au prisme de sommets

$$P_1 = (1; -1; 65)\,, \qquad P_2 = (1{,}8; -2; 62)\,, \qquad P_3 = (4{,}2; -1{,}5; 65)\,,$$

$$P_4 = (1; 2; 65)\,, \qquad P_5 = (1{,}8; 1; 62)\,, \qquad P_6 = (4{,}2; 1{,}5; 65)\,.$$

15.5. Décrire explicitement l'algorithme de dessin, donné pour un enfoncement sphérique dans la figure 15.7, dans le cas où l'on souhaite dessiner la pyramide de l'exercice 15.3.

15.6 (*). Décrire explicitement l'algorithme de dessin, donné pour un enfoncement sphérique dans la figure 15.7, dans le cas où l'on souhaite dessiner le prisme de l'exercice 15.4.

15.7. En vue de dessiner le pont parabolique défini par

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} + 62 & \text{si } |y| \le 8 \text{ et } -6 \le x \le 12\,, \\ 80 & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

trouver une formule explicite pour $T_G^{-1}(X, Y)$.

15.8 (*). Même question qu'à l'exercice 15.7, en remplaçant le pont parabolique par le toit défini par

$$z = \begin{cases} \dfrac{20}{9}(x+6) + 60 & \text{si } |y| \le 10 \text{ et } -6 \le x \le 3\,, \\ -\dfrac{20}{9}(x-12) + 60 & \text{si } |y| \le 10 \text{ et } 3 \le x \le 12\,, \\ 60 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

15.9. Pour cet exercice, les calculs seront facilités par l'utilisation d'une calculatrice. Avec les données de l'exercice 15.7, considérer les deux points $P_0 = (-11; 10; 2f)$ et $Q_0 = (-11; 7; 2f)$.

(a) Avec $e = 7$ cm et $f = 40$ cm, calculer $I_1, J_1, I_2, J_2, I_3, J_3$, où $I_{\ell+1} = T_D(P_\ell)$, $J_{\ell+1} = T_D(Q_\ell)$ et $P_{\ell+1} = T_G^{-1}(I_{\ell+1})$, $Q_{\ell+1} = T_G^{-1}(J_{\ell+1})$, $\ell = 0, 1, 2$.

(b) Dessiner $I_1, J_1, I_2, J_2, I_3, J_3$.

15.10 (*). Mêmes questions qu'à l'exercice 15.9 avec les données de l'exercice 15.8 et les deux points $P_0 = (-9; 8; 60)$ et $Q_0 = (-9; 6; 60)$.

Chapitre 16

Robustesse des réseaux informatiques

Réseaux peer-to-peer

Internet nous donne des moyens d'échange d'informations à une échelle sans précédent : courrier électronique, commerce, opérations banquaires ont transformé communications, affaires et placements comme peu d'inventions auparavant. Internet a aussi rendu possible la distribution de copies de livres, de vidéos, de musiques et de logiciels sous format numérique presque sans effort et sans coût. Pour des raisons d'efficacité, mais aussi pour des raisons commerciales et de sécurité, ces échanges de documents numériques sont souvent effectués à travers des réseaux structurés d'ordinateurs, appelés réseaux *peer-to-peer* (*peer-to-peer* signifie d'égal à égal en anglais). Chaque ordinateur, ou nœud du réseau, ne communique directement qu'avec un petit nombre d'autres ordinateurs du réseau, appelés *voisins*, et peut jouer à la fois le rôle de client ou de serveur. Chaque gros fichier est découpé en petits morceaux et chaque morceau est stocké sur un ou plusieurs ordinateurs différents du réseau. Un utilisateur peut reconstituer un fichier en questionnant ses voisins, qui questionnent à leur tour leurs voisins, etc. Ainsi, aucun des nœuds n'est responsable de l'entier du fichier, ce qui a été mis à profit par des entreprises comme Napster et Gnutella.

Un réseau *peer-to-peer* est une structure complexe, dans laquelle circule une grande quantité d'informations. La qualité du réseau dépend de la fiabilité des communications entre tous les ordinateurs du réseau, et pas seulement entre plus proches voisins. En effet, il est nécessaire que l'intégrité et l'accès aux informations soient préservés même si quelques connexions entre ordinateurs voisins sont interrompues (par exemple par des pannes du réseau). Lorsque c'est le cas, on dit que le réseau est *robuste*.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser des techniques des chapitres 1 à 8, et en particulier les notions de valeur propre et de vecteur propre, pour analyser la robustesse des réseaux *peer-to-peer*. Cette analyse s'appuie sur quelques notions mathématiques nouvelles.

Graphes

Les notions suivantes sont issues de la théorie des graphes.

Graphe simple. Un *graphe simple* (ou *graphe*) $G = (V, E)$ consiste en un ensemble non vide V, dont les éléments sont appelés *sommets* ou *nœuds*, et en un ensemble E de paires de sommets, chaque paire étant appelée une *arête*. Si v et w sont des sommets de G et s'il existe une arête de la forme vw, on dit que cette arête *joint* v à w et que v et w sont *adjacents* ou *voisins*. Dans un graphe simple, il y a au plus une arête qui joint v à w et vw désigne la même arête que wv. De plus, il n'y a pas de *boucle* de la forme vv.

On représente un réseau *peer-to-peer* à l'aide d'un graphe de la manière suivante : à chaque ordinateur correspond un sommet v du graphe, et deux sommets v et w sont voisins si les ordinateurs correspondants peuvent communiquer directement l'un avec l'autre.

Exemple. Le graphe dans la figure 16.1 ci-dessous représente un réseau *peer-to-peer* formé de quatre ordinateurs. L'ordinateur v communique directement avec les trois autres, mais l'ordinateur z ne communique avec u qu'en interrogeant v. Ainsi, ce réseau n'est pas robuste, car si la connexion entre v et z est interrompue, alors z ne peut plus communiquer avec u ou w.

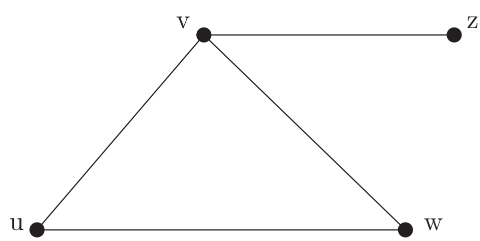


Fig. 16.1 – Exemple de réseau peu robuste.

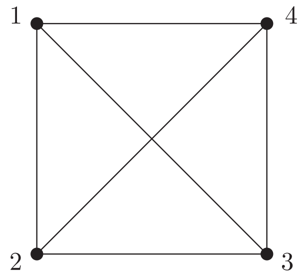
Matrice d'adjacence

Soit G un graphe avec n sommets numérotés de 1 à n. La *matrice d'adjacence* $A(G) = (a_{ij})$ est la matrice de type $n \times n$ dont le coefficient a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (0 ou 1) joignant les sommets i et j, pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

La matrice d'adjacence détermine de manière univoque le graphe, puisque ij est une arête du graphe si et seulement si $a_{ij} = 1$. Il est donc facile de déterminer l'ensemble des voisins du sommet i à partir de la donnée de $A(G)$ et, réciproquement, de déterminer $A(G)$ en connaissant uniquement l'ensemble des voisins de chaque sommet. Observons que ces informations « locales » sur le graphe sont celles dont disposent individuellement chacun des ordinateurs du réseau.

Exemple. La figure 16.2 ci-dessous montre un graphe et sa matrice d'adjacence.

La matrice d'adjacence d'un graphe G dépend de la numérotation des sommets de G. Si on change la numérotation des sommets, la nouvelle matrice d'adjacence s'obtient, à partir de l'ancienne, en permutant certaines lignes puis les colonnes correspondantes (cf. exercice 14.3).



$$\begin{array}{c c} \text{Sommet} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fig. 16.2 – Un graphe et sa matrice d'adjacence.

Propriétés de la matrice d'adjacence. Soit G un graphe ayant n sommets.

(1) La matrice d'adjacence $A(G)$ est une matrice symétrique. En effet, $a_{ij} = a_{ji}$, par définition, puisque ces deux coefficients sont égaux au nombre d'arêtes joignant les sommets i et j. Chaque coefficient a_{ij} est égal à 0 ou à 1.

(2) Tous les coefficients de la diagonale de $A(G)$ sont nuls. En effet, pour tout i, le coefficient a_{ii} est égal au nombre d'arêtes joignant le sommet i à lui-même, c'est-à-dire le nombre de boucles joignant i à lui-même. Ainsi, $a_{ii} = 0$ puisque le graphe est sans boucle.

(3) Toutes les valeurs propres λ_i de la matrice $A(G)$ sont réelles puisque $A(G)$ est symétrique. En les répétant selon leurs multiplicités et en les rangeant par ordre décroissant, on obtient

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

(4) Les valeurs propres de $A(G)$ ne changent pas si on change la numérotation des sommets du graphe G. En effet, notons G' le graphe obtenu en changeant la numérotation des sommets de G. D'après l'exercice 14.3, il existe une matrice inversible P telle que $A(G') = P \cdot A(G) \cdot P^{-1}$. Les matrices $A(G)$ et $A(G')$ ont donc les mêmes valeurs propres.

Graphes k-réguliers

Soit G un graphe simple et k un entier positif. On dit que G est *k-régulier* si chaque sommet de G est joint à exactement k autres sommets de G, autrement dit si chaque sommet a k voisins.

Intérêt des graphes k-réguliers. Un graphe k-régulier ayant n sommets possède $nk/2$ arêtes (en effet, k arêtes partent de chaque sommet et chaque arête joint deux sommets). Ainsi, dans un réseau représenté par un graphe k-régulier, le nombre d'arêtes est proportionel au nombre de sommets, ce qui limite la complexité du réseau. De plus on peut montrer (mais nous ne le ferons pas ici) que dans un tel réseau, la charge de travail liée aux communications entre ordinateurs se répartit de manière équilibrée entre tous les ordinateurs du réseau.

EXEMPLE. Dans la figure 16.3, les graphes C_3 et C_4 sont 2-réguliers et K_5 est 4-régulier. Le graphe C_3 est un *cycle* sur trois sommets et C_4 est un cycle sur quatre sommets.

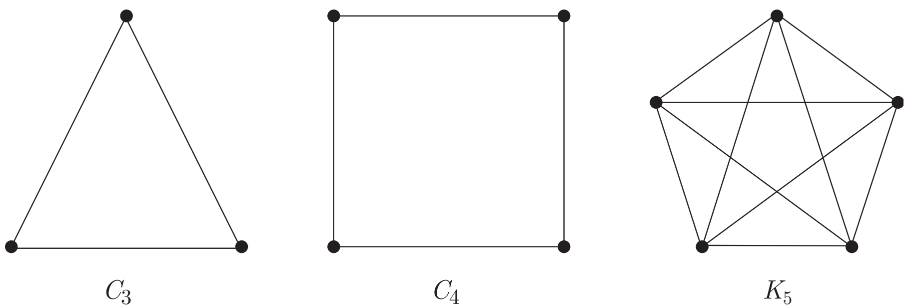


FIG. 16.3 – Des graphes réguliers.

Les matrices d'adjacence des graphes C_3, C_4 et K_5 représentés dans la figure 16.3 sont $A(C_3) = M_1$, $A(C_4) = M_2$ et $A(K_5) = M_3$, où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne vaut 2 pour C_3 et C_4 et vaut 4 pour K_5.

MATRICE D'ADJACENCE D'UN GRAPHE k-RÉGULIER

Soit G un graphe k-régulier. Alors pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$. En effet, pour i fixé, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est le nombre total d'arêtes joignant le sommet i à d'autres sommets du graphe. Ce nombre est donc égal à k puisque G est k-régulier. De même, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k$, pour tout j.

Proposition. Supposons que G est k-régulier.

(a) Soit λ une valeur propre de $A(G)$. Alors $|\lambda| \leq k$.

(b) Le vecteur $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre de $A(G)$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = k$.

Démonstration. (a) Soit λ une valeur propre de $A(G)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ. Alors $\lambda x = A(G) \cdot x$, ce qui signifie que pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j .$$

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| \geq |x_j|$, pour tout $j = 1, \ldots, n$. Alors $|x_{i_0}| \neq 0$ puisque $x \neq 0$. En remarquant que $a_{ij} \geq 0$, on observe que

$$\begin{aligned} |\lambda|\, |x_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\, x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\, |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = k\, |x_{i_0}|\,, \end{aligned}$$

et donc que $|\lambda| \leq k$.

(b) Pour tout i,

$$\big(A(G) \cdot \mathbb{1}\big)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbb{1}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k = k \cdot \mathbb{1}_i,$$

donc $\mathbb{1}$ est un vecteur propre de $A(G)$ associé à la valeur propre k.

Connexité

Graphe Connexe. Un graphe $G = (V, E)$ est *connexe* si pour tout sous-ensemble non vide W de V avec $W \neq V$, il y a au moins une arête de E qui joint un sommet de W à un sommet de $V \setminus W$.

Interprétation. Pour un graphe, la notion de connexité est une notion globale : elle indique si le graphe est d'un seul tenant ou pas. Si le graphe représente un réseau *peer-to-peer*, le graphe est connexe si et seulement si chaque ordinateur peut accéder aux informations stockées sur tous les autres, éventuellement en questionnant des ordinateurs intermédiaires. On va montrer ci-dessous qu'il est possible de déterminer si un graphe est connexe en examinant les valeurs propres de sa matrice d'adjacence.

Exemple de graphe connexe. Un tel exemple est donné dans la figure 16.4.

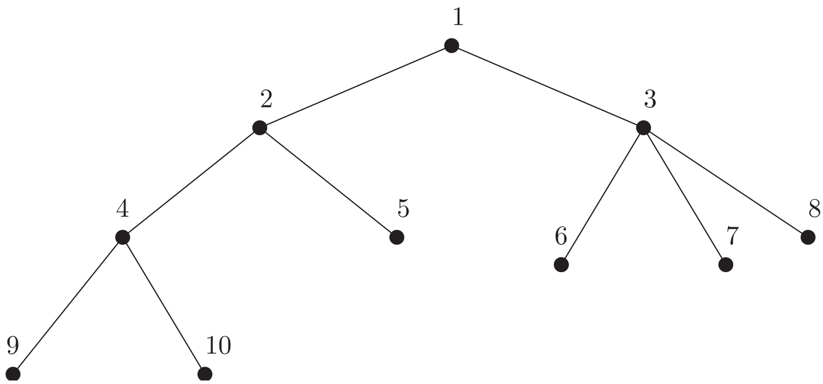


Fig. 16.4 – Un graphe connexe.

Exemple de graphe non connexe. Soit $G = (V, E)$, où $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ et les arêtes sont représentées dans la figure 16.5. Si ce graphe représente un réseau *peer-to-peer*, alors l'ordinateur a ne peut pas accéder aux informations stockées sur f, et inversement.

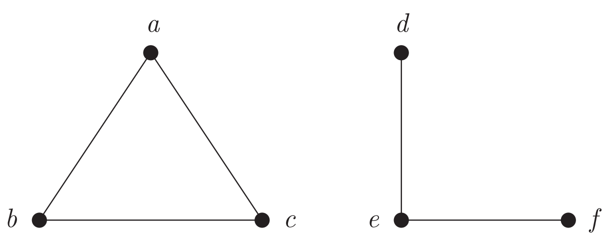


Fig. 16.5 – Un graphe non connexe.

Caractérisation de la connexité

Théorème. Soit G un graphe k-régulier et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de $A(G)$. Alors le graphe G est connexe si et seulement si $\lambda_1 > \lambda_2$, autrement dit, $\lambda_1 = k$ est une valeur propre de multiplicité 1.

Démonstration. Supposons que $\lambda_1 > \lambda_2$ et montrons alors que G est connexe. Si G n'était pas connexe, alors il y aurait un sous-ensemble W de V tel que $\emptyset \neq W \neq V$ et aucune arête de G ne joint un sommet de W à un sommet de $V \setminus W$. On numérote les sommets de V de sorte que les p premiers sommets soient ceux de W et les $n-p$ derniers soient ceux de $V \setminus W$. La matrice $A(G)$ s'écrit alors

$$A(G) = \left(\begin{array}{c:c} A_1 & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & A_2 \end{array} \right),$$

où A_1 est une matrice de type $p \times p$ et A_2 une matrice de type $(n-p) \times (n-p)$. Observons que pour $i = 1, \ldots, p$, $\sum_{j=1}^{p} (A_1)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$ et pour $i = p+1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n-p} (A_2)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$. Par conséquent, les vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$, où

$$x_1 = \cdots = x_p = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{p+1} = \cdots = x_n = 0,$$

et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, où

$$y_1 = \cdots = y_p = 0 \qquad \text{et} \qquad y_{p+1} = \cdots = y_n = 1,$$

sont linéairement indépendants et vérifient $A(G) \cdot x = k\,x$ et $A(G) \cdot y = k\,y$. Ainsi, la dimension d du sous-espace propre associé à la valeur propre k est telle que $d \geq 2$. Sachant que $d \leq m$, où m est la multiplicité de la valeur propre k en tant que racine du polynôme caractéristique de $A(G)$, on en déduit que $m \geq 2$, c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = k$, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda_1 > \lambda_2$.

Réciproquement, supposons que G est connexe et montrons que $\lambda_1 > \lambda_2$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à la valeur propre k et soit i_0 tel que $x_{i_0} = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$. Alors, $k\,x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\, x_j$, donc

$$x_{i_0} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\, x_j = \frac{1}{k} \sum_{j \text{ voisin de } i_0} x_j\,. \tag{16.1}$$

Cette égalité implique que $x_j = x_{i_0}$ pour tout sommet j voisin du sommet i_0, puisque, s'il existait un sommet j_0 voisin de i_0 tel que $x_{j_0} < x_{i_0}$, on aurait

$$\frac{1}{k} \sum_{j \text{ voisin de } i_0} x_j < \frac{1}{k}\, k\, x_{i_0} = x_{i_0}\,,$$

ce qui contredirait (16.1). Comme G est connexe, on obtient, de proche en proche, que $x_j = x_{i_0}$ pour tout sommet j. L'espace propre associé à la valeur propre k est donc de dimension 1. Puisque la matrice $A(G)$ est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre $\lambda_1 = k$ est égale à cette dimension, c'est-à-dire à 1, ce qui signifie que $\lambda_1 > \lambda_2$.

Exemple. On considère encore les graphes C_3, C_4 et K_5 de la figure 16.3. On vérifie facilement que les valeurs propres de $A(C_3)$ sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et ceux de $A(C_4)$ sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -2$. Dans ces deux cas, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ce qui confirme le théorème car ces graphes sont connexes. Les valeurs propres de $A(K_5)$ sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$. On constate que $\lambda_1 > \lambda_2$ et que K_5 est connexe.

La notion de bord

Bord d'un sous-ensemble de sommets. Soit $G = (V, E)$ un graphe et W un sous-ensemble de V. On appelle *bord* de W et on note ∂W le sous-ensemble de E formé des arêtes de G qui joignent un sommet de W à un sommet de $V \setminus W$. Remarquons que $\partial W = \partial(V \setminus W)$.

Exemple. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ les graphes représentés dans la figure 16.6. Tous les deux ont le même ensemble de sommets

$$V_1 = V_2 = \{a, b, c, d, e, f\},$$

mais des ensembles différents d'arêtes, puisque

$$E_1 = \{ab,\ ac,\ bc,\ cd,\ de,\ df,\ ef\}$$

et

$$E_2 = \{ab,\ ac,\ af,\ bc,\ cd,\ de,\ ef\}.$$

Si $W = \{a, b, c\} \subset V_1$, alors $\partial W = \{cd\}$ et si $U = \{a, b, c\} \subset V_2$, alors $\partial U = \{cd, af\}$. Dans un réseau *peer-to-peer* représenté par le graphe G_1, il suffit que la connexion entre les ordinateurs c et d soit interrompue pour que b ne puisse plus communiquer avec e. En revanche, dans la configuration G_2, b pourra encore communiquer avec e même si l'une des connexions cd ou af (mais pas les deux simultanément) est interrompue. Ainsi, bien qu'il y ait le même nombre d'arêtes dans G_1 et G_2, la configuration G_2 représente un réseau plus robuste que G_1.

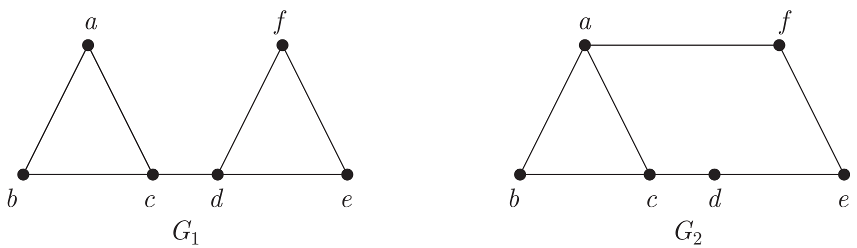


Fig. 16.6 – Deux réseaux.

Une mesure de la robustesse

Si S est un ensemble (de sommets ou d'arêtes), on note $|S|$ le nombre d'éléments de S.

La connectivité entre W et $V \setminus W$. Soit W un sous-ensemble de V tel que $\emptyset \neq W \neq V$. Posons

$$c(W) = \frac{|\partial W|}{\min\{|W|, |V \setminus W|\}}.$$

Si $|W| \leq |V \setminus W|$, le nombre $c(W)$, appelé la *connectivité* entre W et $V \setminus W$, représente le rapport entre le nombre d'arêtes qui relient W à $V \setminus W$ et le nombre de sommets de W. Si G représente un réseau *peer-to-peer*, aucun ordinateur de W ne pourra communiquer avec un ordinateur de $V \setminus W$ si les $c(W) \cdot |W|$ connexions de ∂W sont simultanément interrompues. Il est donc intéressant que la connectivité $c(W)$ soit grande.

La constante isopérimétrique. La *constante isopérimétrique* ou *constante d'expansion* d'un graphe $G = (V, E)$ est le nombre

$$i(G) = \min_W c(W),$$

où W parcourt les sous-ensembles de V tels que $\emptyset \neq W \neq V$. Ainsi, pour chacun de ces sous-ensembles W, $c(W) \geq i(G)$, et la constante isopérimétrique $i(G)$ est une mesure de la robustesse du graphe G : plus $i(G)$ est grand, plus chaque ensemble de sommets est bien connecté à son complémentaire et un grand nombre de chemins est disponible pour propager l'information.

Exemple. Pour évaluer $i(G_1)$ et $i(G_2)$, où G_1 et G_2 sont les graphes de la figure 16.6, il suffit, dans chaque cas, de prendre le minimum sur les sous-ensembles W ayant 1, 2 ou 3 sommets, car W et $V_i \setminus W$, $i = 1, 2$ jouent le même rôle dans la formule qui définit $i(G)$.

Soit $W \subset V_1$. En énumérant les différentes possibilités, on voit facilement que dans G_1,

- si $|W| = 1$, alors $|\partial W|$ vaut 2 ou 3 et $c(W)$ vaut 2 ou 3,
- si $|W| = 2$, alors $|\partial W|$ vaut 2, 3, 4 ou 5 et $c(W)$ vaut 1, 3/2, 2 ou 5/2,
- si $|W| = 3$, alors $|\partial W|$ vaut 1, 4 ou 5 et $c(W)$ vaut 1/3, 4/3 ou 5/3,

ce qui donne $i(G_1) = 1/3$.

De même, en énumérant les différents sous-ensembles U de V_2, on constate que dans G_2,

- si $|U| = 1$, alors $|\partial U|$ vaut 2 ou 3 et $c(U)$ vaut 2 ou 3,
- si $|U| = 2$, alors $|\partial U|$ vaut 2, 3, 4 ou 5 et $c(U)$ vaut 1, 3/2, 2 ou 5/2 ,
- si $|U| = 3$, alors $|\partial U|$ vaut 2, 3, 4, 5 ou 6 et $c(U)$ vaut 2/3, 1, 4/3, 5/3 ou 2,

ce qui montre que $i(G_2) = 2/3 > i(G_1)$. Ceci reflète le fait relevé ci-dessus, à savoir que le graphe G_2 est plus robuste que G_1.

La difficulté de calculer $i(G)$. Il est généralement très difficile de calculer la valeur exacte de $i(G)$. Par exemple, si le réseau comporte $n = 100$ sommets, il y a $2^{100} \simeq 1{,}27 \cdot 10^{30}$ sous-ensembles W de V pour lesquels on doit évaluer $c(W)$, ce qui dépasse même les capacités d'un gros ordinateur. Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une bonne estimation de la constante isopérimétrique $i(G)$ à l'aide des valeurs propres de la matrice d'adjacence $A(G)$.

Lien entre robustesse et valeurs propres

L'inégalité de Cheeger-Buser. Soit G un graphe simple et k-régulier ayant n sommets, $A(G)$ la matrice d'adjacence de G et $k = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de $A(G)$. Alors

$$\frac{k - \lambda_2}{2} \leq i(G) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2)}.$$

Remarques

(1) On constate que $i(G) = 0$ si et seulement si $\lambda_2 = k$, c'est-à-dire si et seulement si G n'est pas connexe. Si $\lambda_1 > \lambda_2$, alors $i(G)$ est d'autant plus petit que λ_2 est proche de $k = \lambda_1$. Ainsi, la robustesse d'un réseau *peer-to-peer* est liée à l'écart entre les deux plus grandes valeurs propres de $A(G)$.

(2) Le calcul des valeurs propres de $A(G)$ ne prend qu'une fraction de seconde sur un ordinateur personnel. L'inégalité de Cheeger-Buser est donc très précieuse.

Exemples

- Soit C_n un cycle sur n sommets. On peut montrer (cf. exercice 16.15) que

$$i(C_n) = \frac{2}{[n/2]} \simeq \frac{4}{n}. \tag{16.2}$$

- Soit K_n un graphe à n sommets dont chacun est voisin des $n-1$ autres sommets. On peut montrer (cf. exercice 16.16) que

$$i(K_n) = n - \frac{[n]}{2} \simeq \frac{n}{2}. \tag{16.3}$$

  De plus, $\lambda_1 = n - 1$ et $\lambda_2 = -1$ (cf. exercice 16.9), d'où $k - \lambda_2 = n$ et l'inégalité de Cheeger-Buser donne

$$\frac{n}{2} \leq i(K_n) \leq \sqrt{2n(n-1)}.$$

Il est clair que pour n assez grand, le graphe K_n est bien mieux connecté que C_n, ce qui se quantifie par les propriétés

$$\lim_{n\to\infty} i(K_n) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} i(C_n) = 0,$$

d'après (16.2) et (16.3).

Perspectives

L'analyse des réseaux *peer-to-peer* par des méthodes mathématiques qui font en particulier appel à l'algèbre linéaire est un thème de recherche actif qui donnera lieu à des nouveaux résultats théoriques et pratiques.

Complément

Nous donnons ici une démonstration de l'inégalité de Cheeger-Buser.

Lemme 1. Posons $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$. Alors

$$\lambda_2 = \sup_{x \neq 0,\, x \cdot \mathbb{1} = 0} \frac{x^T \cdot A(G) \cdot x}{x^T \cdot x}.$$

Démonstration. Soit $P = (p_1 \mathrel{\vdots} \cdots \mathrel{\vdots} p_n)$ une matrice orthogonale et $D = \mathrm{diag}(k, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que $P^T \cdot A(G) \cdot P = D$. Puisque $\mathbb{1}$ est un vecteur propre de $A(G)$ associé à la valeur propre k, on peut supposer que p_1 est un multiple de $\mathbb{1}$, donc $p_1 = 1/\sqrt{n} \cdot \mathbb{1}$ vu que $\|p_1\| = 1$. Soit x dans $\mathbb{R}^n$ et $y = P^T \cdot x$. Alors $y_1 = p_1^T \cdot x = (1/\sqrt{n})(\mathbb{1} \cdot x)$ et

$$\frac{x^T \cdot A(G) \cdot x}{x^T \cdot x} = \frac{x^T \cdot P \cdot D \cdot P^T \cdot x}{x^T \cdot P \cdot P^T \cdot x} = \frac{y^T \cdot D \cdot y}{y^T \cdot y}.$$

De plus, $x \neq 0$ et $x \cdot \mathbb{1} = 0$ si et seulement si $y \neq 0$ et $y_1 = 0$. Par conséquent,

$$\sup_{x \neq 0,\, x \cdot \mathbb{1} = 0} \frac{x^T \cdot A(G) \cdot x}{x^T \cdot x} = \sup_{y \neq 0,\, y_1 = 0} \frac{y^T \cdot D \cdot y}{y^T \cdot y}. \tag{16.4}$$

Or, pour $y \neq 0$ tel que $y_1 = 0$,

$$y^T \cdot D \cdot y = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \, y_i^2 \leq \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 = \lambda_2 \, y^T \cdot y.$$

Ainsi,

$$\frac{y^T \cdot D \cdot y}{y^T \cdot y} \leq \lambda_2. \tag{16.5}$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ce qui montre que le membre de droite de (16.4) est égal à λ_2, et le lemme est démontré.

Lemme 2. Posons

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, (x_i - x_j)(y_i - y_j), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathcal{E}(x, y) = k \, y^T \cdot x - x^T \cdot A(G) \cdot y.$$

Démonstration. On constate que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_i y_i + x_j y_j - x_i y_j - x_j y_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \frac{1}{2} x^T A(G) y - \frac{1}{2} y^T A(G) x \\
&= k \, x^T \cdot y - x^T \cdot A(G) \cdot y.
\end{aligned}$$

Démonstration de l'inégalité de Cheeger-Buser. Commençons par la borne inférieure. Soit $W \subset V$ tel que $0 \neq |W| \leq |V \setminus W|$, et donc $|V \setminus W| \geq \frac{1}{2}|V|$. Posons

$$x_i = |V \setminus W| \quad \text{si} \quad i \in W \qquad \text{et} \qquad x_i = -|W| \quad \text{si} \quad i \in V \setminus W.$$

Alors $x \neq 0$ et $x \cdot \mathbb{1} = |V \setminus W| \cdot |W| - |W| \cdot |V \setminus W| = 0$. D'après les lemmes 1 et 2, et puisque $a_{ij}(x_i - x_j)^2 = 0$ si l'arête $ij \notin \partial W$,

$$\begin{aligned}
\lambda_2 \quad &\geq \quad \frac{x^T \cdot A(G) \cdot x}{x^T \cdot x} = \frac{-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i - x_j)^2 + k\, x^T \cdot x}{x^T \cdot x} \\
&= \quad \frac{-\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot |\partial W| \left(|V \setminus W| + |W|\right)^2}{|V \setminus W|^2 |W| + |W|^2 |V \setminus W|} + k \\
&= \quad -\frac{|\partial W|\,|V|}{|W|\,|V \setminus W|} + k \geq -2\frac{|\partial W|}{|W|} + k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{k - \lambda_2}{2} \leq \frac{|\partial W|}{|W|}.$$

Comme cette inégalité vaut pour tout W tel que $0 \neq |W| \leq |V \setminus W|$, on en déduit que

$$\frac{k - \lambda_2}{2} \leq i(G).$$

Montrons maintenant la borne supérieure. Soit $x \neq 0$ tel que $A(G) \cdot x = \lambda_2 \cdot x$ et $x \cdot \mathbb{1} = 0$. Puisque $x \cdot \mathbb{1} = 0$, quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer que

$$0 < \left|S(x)\right| \leq \left|V \setminus S(x)\right| < |V|, \qquad \text{où} \quad S(x) = \{i \mid x_i > 0\}, \tag{16.6}$$

et quitte à multiplier x par un nombre positif, on peut supposer que $\|y\| = 1$, où

$$y_i = x_i \quad \text{si} \quad x_i > 0 \qquad \text{et} \qquad y_i = 0 \quad \text{si} \quad x_i \leq 0.$$

Observons que

$$i(G) = i(G) \cdot \|y\|^2 = 2\,i(G) \sum_{j=1}^{n} \int_0^{y_j} t\,dt = 2\,i(G) \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} t\,1_{\{y_j > t\}}\,dt.$$

Permutons la somme et l'intégrale pour obtenir

$$2\,i(G) \int_0^{\infty} t \left(\sum_{j=1}^{n} 1_{\{y_j > t\}} \right) dt = 2\,i(G) \int_0^{\infty} t\,|W_t|\,dt,$$

où $W_t = \{j \mid y_j > t\}$. L'intégrand est nul pour $t > \sup_i y_i$. Observons que pour $0 < t < \sup_i y_i$, $\emptyset \neq W_t \subset S(x)$ et donc, en tenant compte de (16.6),

$0 < |W_t| \leq \left|S(x)\right| < |V|$ et $|W_t| \leq \left|S(x)\right| \leq \left|V \setminus S(x)\right| \leq |V \setminus W_t|$. D'après la définition de $i(G)$, l'intégrand est donc majoré par $t\,|\partial W_t|\,/i(G)$ pour $0 < t < \sup_i y_i$. Ainsi,

$$i(G) \leq 2\int_0^\infty t\,|\partial W_t|\;dt = 2\int_0^\infty t\left(\sum_{(i,j)\colon y_i \leq t < y_j} a_{ij}\right) dt.$$

En permutant somme et intégrale, cette expression devient

$$2\sum_{(i,j)\colon y_j > y_i} a_{ij}\int_{y_i}^{y_j} t\;dt = \sum_{(i,j)\colon y_j > y_i} a_{ij}\,(y_j^2 - y_i^2) = \sum_{(i,j)\colon y_j > y_i} a_{ij}\,\left|y_j^2 - y_i^2\right|,$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\left|y_j^2 - y_i^2\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(\sqrt{a_{ij}}\;|y_j - y_i|\right)\left(\sqrt{a_{ij}}\;|y_j + y_i|\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, ceci est majoré par

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\big(y_j - y_i\big)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\big(y_i + y_j\big)^2\right)^{1/2}\\
&\quad\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\mathcal{E}(y,y)\big)^{1/2}\left(2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\big(y_i^2 + y_j^2\big)\right)^{1/2}\\
&\quad\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\mathcal{E}(y,y)\big)^{1/2}\left(4k\|y\|^2\right)^{1/2}\\
&\quad= \sqrt{2k}\,\big(\mathcal{E}(y,y)\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de $\mathcal{E}(y,y)$ et de y, et d'après le lemme 2,

$$\mathcal{E}(y,y) \leq \mathcal{E}(y,x) = k\,y^T\cdot x - y^T\cdot A(G)\cdot x.$$

Puisque x est un vecteur propre de $A(G)$, ceci devient

$$k\,y^T\cdot x - y^T\cdot(\lambda_2\,x) = (k-\lambda_2)\,y^T\cdot x = (k-\lambda_2)\,y^T\cdot y = k-\lambda_2\,,$$

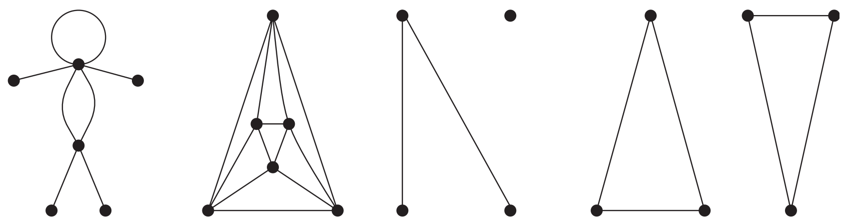
puisque $y^T\cdot y = 1$. Ainsi,

$$i(G) \leq \sqrt{2k}\big(\mathcal{E}(y,y)\big)^{1/2} \leq \sqrt{2k(k-\lambda_2)}\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

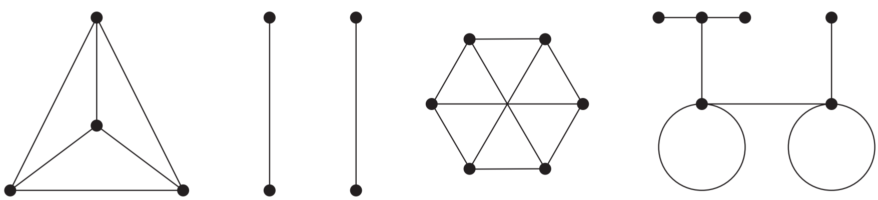
Exercices

16.1. Indiquer lesquels de ces graphes sont simples, lesquels sont connexes et lesquels sont k-réguliers ; dans ce dernier cas, déterminer k.



G_1 G_2 G_3 G_4

16.2. Indiquer lesquels de ces graphes sont simples, lesquels sont connexes et lesquels sont k-réguliers ; dans ce dernier cas, déterminer k.



H_1 H_2 H_3 H_4

16.3. Ecrire la matrice d'adjacence de chaque graphe simple de l'exercice 16.1.

16.4. Ecrire la matrice d'adjacence de chaque graphe simple de l'exercice 16.2.

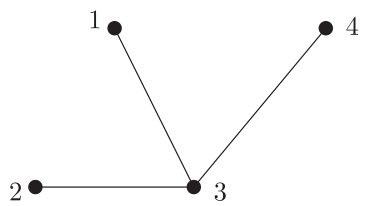
16.5. Dessiner le graphe G dont la matrice d'adjacence est

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

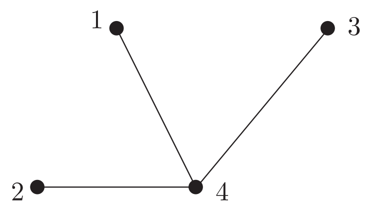
16.6. Dessiner le graphe G dont la matrice d'adjacence est

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.7. Les graphes G_1 et G_2 ci-dessous représentent un même graphe avec des labels différents. Donner la matrice d'adjacence de chacun de ces graphes et trouver une relation entre ces matrices.

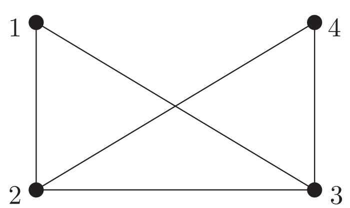


G_1

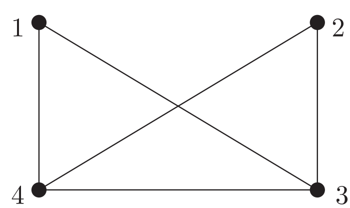


G_2

16.8. Les graphes H_1 et H_2 ci-dessous représentent un même graphe avec des labels différents. Donner la matrice d'adjacence de chacun de ces graphes et trouver une relation entre ces matrices.



H_1



H_2

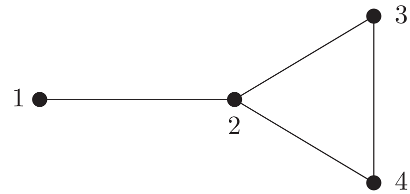
16.9. Montrer que les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe K_n $(n \geq 2)$ avec n sommets tous adjacents les uns aux $n-1$ autres sont

$$\lambda_1 = n - 1, \qquad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = -1.$$

16.10. (a) Soit A une matrice symétrique de type $n \times n$. Montrer que la somme des valeurs propres de A est $\mathrm{Tr}(A)$. (*Indication* : On peut utiliser l'exercice 2.43 et le fait que A est diagonalisable.)

(b) Déduire de (a) que si G est un graphe simple avec n sommets et A est sa matrice d'adjacence, alors la somme des valeurs propres de A est nulle.

16.11. Considérons le graphe suivant :

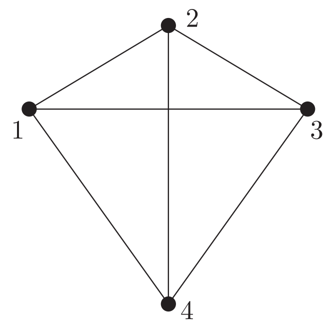


(a) Ecrire la matrice d'adjacence A de ce graphe.

(b) Calculer A^2.

(c) On dit qu'un chemin du graphe d'extrémités i et j est de *longueur* ℓ s'il joint i à j à l'aide de ℓ arêtes du graphe. Montrer que le coefficient $(A^2)_{ij}$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A^2 représente le nombre de chemins différents de longueur 2 entre les sommets i et j.

16.12 (*). Considérons le graphe G ci-dessous et le sous-ensemble W formé des sommets 1 et 2 de G.



(a) Déterminer le bord de W.

(b) Déterminer $i(G)$.

(c) Ecrire la matrice d'adjacence $A(G)$.

(d) Calculer les valeurs propres de $A(G)$.

(e) Donner la valeur numérique des membres de gauche et de droite de l'inégalité de Cheeger-Buser dans ce cas.

16.13 (*). Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et G le graphe ayant pour matrice d'adjacence la matrice M. Indiquer, en utilisant les propriétés de la matrice M si :

(a) G est simple ;

(b) G est k-régulier ;

(c) G est connexe (*Indication* : Effectuer des permutations sur les lignes et les colonnes de $M - \lambda I$ en vue d'utiliser le résultat de l'exercice 17.7(c)) ;

(d) on peut déduire la valeur de la constante isopérimétrique de G.

16.14. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et G le graphe ayant pour matrice d'adjacence la matrice M. Indiquer, en utilisant les propriétés de la matrice M si G est :

(a) simple ;

(b) k-régulier ;

(c) connexe (*Indication* : Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice $M - \lambda I$ en vue d'utiliser le résultat de l'exercice 17.7(c)) ;

(d) bipartite ? (un graphe ayant n sommets est *bipartite* si on peut colorier ses sommets avec deux couleurs telles que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. On admettra la propriété suivante : un graphe simple, connexe et k-régulier est bipartite si et seulement si la plus petite valeur propre de sa matrice d'adjacence est $-k$).

(e) Dessiner le graphe G et vérifier les résultats trouvés dans (a), (b), (c) et (d).

16.15. Soit C_n un cycle sur n sommets (voir figure 16.3 pour les cas $n = 3$ et $n = 4$), les sommets étant numérotés consécutivement le long du cycle.

(a) Montrer que

$$i(C_n) = \frac{2}{[n/2]} \simeq \frac{4}{n},$$

où $[x]$ est la partie entière de x.

(b) Soit A_n la matrice d'adjacence de C_n. Montrer que, pour tout entier k, les vecteurs u_k ayant pour $j^{\text{ème}}$ composante $\cos\big((j-1)2k\pi/n\big)$ et v_k ayant pour $j^{\text{ème}}$ composante $\sin\big((j-1)2k\pi/n\big)$, c'est-à-dire

$$u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2k\pi/n) \\ \vdots \\ \cos((n-1)2k\pi/n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2k\pi/n) \\ \vdots \\ \sin((n-1)2k\pi/n) \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A_n associés à la valeur propre $\lambda_k = 2\cos(2k\pi/n)$.

(c) Montrer que les vecteurs u_k, $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$ et v_k, $k = 1, \ldots, \big[(n-1)/2\big]$ sont linéairement indépendants.

(d) Estimer $\lambda_1 - \lambda_2$ et déduire l'inégalité de Cheeger-Buser dans ce cas.

16.16. Soit K_n un graphe à n sommets dont chacun est voisin des $n-1$ autres sommets.

(a) Montrer que
$$i(K_n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] \simeq \frac{n}{2}.$$

(b) Déduire de l'exercice 16.9 la valeur de $\lambda_1 - \lambda_2$ et écrire l'inégalité de Cheeger-Buser dans ce cas.

Troisième partie

Révision

Chapitre 17

Exercices de révision

17.1. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes en justifiant brièvement ou en donnant un contre-exemple.

(a) Soit A une matrice de type $m \times n$. S'il existe $x_0 \neq 0$ vérifiant $A \cdot x_0 = 0$, alors le système $A \cdot x = 0$ admet une infinité de solutions.

(b) Si A et B sont deux matrices carrées de même type, alors $A \cdot B = B \cdot A$.

(c) Toute matrice diagonale est inversible et son inverse est diagonale.

(d) Si A est une matrice symétrique et inversible, alors A^{-1} est symétrique.

(e) L'image d'un plan par une transformation matricielle est un plan.

(f) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ pour toutes les matrices A et B de même type.

(g) Si A et B sont de type $m \times n$, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ si et seulement si les matrices A et B ont le même espace des lignes.

17.2. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes en justifiant brièvement ou en donnant un contre-exemple.

(a) Si A est une matrice de type $m \times n$ et de rang r et b est dans $\mathbb{R}^m$, $b \neq 0$, alors l'ensemble des solutions du système $A \cdot x = b$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$.

(b) Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si u et v sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux de V, alors ils sont linéairement indépendants.

(c) Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et u dans V. Alors

$$u = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \cdots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n \,.$$

(d) Soit A une matrice de type $m \times n$ et b dans $\mathbb{R}^m$. Il existe au moins un x dans $\mathbb{R}^n$ solution du système $A \cdot x = b$ au sens des moindres carrés.

(e) Soit A une matrice de type $n \times n$. Si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

(f) Soit V et W deux espaces vectoriels de dimensions finies et $T : V \longrightarrow W$ une transformation linéaire. Alors T est injective si et seulement si T est surjective.

(g) Soit V un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $T : V \longrightarrow V$ une transformation linéaire bijective. Alors $\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = \left[T\right]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

17.3. Soit $V = C\big(]-1/7\,,\,1/7[\big)$ et

$$f_1(t) = \cos(t)\,, \quad f_2(t) = \cos(2t)\,, \quad f_3(t) = \cos(3t)\,, \quad -\frac{1}{7} < t < \frac{1}{7}\,.$$

Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

17.4. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Sachant que 10 est une valeur propre de A, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = D$.

(b) Trouver la solution générale du système différentiel $\dot{x} = Ax$.

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$B = \frac{1}{10}\,A\,.$$

(c) Sans faire de longs calculs mais en justifiant votre réponse, déterminer les valeurs propres de B.

(d) Sans faire de longs calculs, trouver le vecteur d'état stationnaire de cette chaîne.

(e) Sans faire de longs calculs, donner la valeur de $\lim_{k\to+\infty} B^k$.

17.5 (*). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel V. Soit $T : V \longrightarrow V$ la transformation linéaire définie par

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base de $\ker(T)$.

(b) Trouver une base de $\mathrm{Im}(T)$.

Soit e_1', e_2', e_3' et e_4' les vecteurs de V définis par

$$e_1' = e_1\,, \qquad e_2' = e_1 + e_2\,, \qquad e_3' = e_2 + e_3\,, \qquad e_4' = e_3 + e_4\,.$$

(c) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ est une base de V.

(d) Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(e) Quelle est la formule qui relie la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T dans la base $\mathcal{B}'$ à la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$?

17.6. Soit A une matrice symétrique de type $n \times n$ et $V = \mathbb{R}^n$. Pour tous x, y dans V, on pose
$$\langle x, y \rangle = (Ax) \cdot y\,,$$
où « $\cdot$ » est le produit scalaire euclidien et Ax est le produit matriciel de A avec x.

(a) Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, alors cette opération définit un produit scalaire sur V. (*Indication* : on pourra utiliser l'égalité $\langle x, y \rangle = y^T Ax$).

Dans ce qui suit, on se place dans le cas particulier où $n = 4$ et
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

On admettra que les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives. Considérons les trois vecteurs
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux relativement au produit scalaire $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$.

(c) Trouver un quatrième vecteur e_4 tel que (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base orthogonale de V.

(d) Soit W le sous-espace de V engendré par $\{e_1, e_2, e_3\}$. Trouver la meilleure approximation du vecteur
$$x = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$
par des éléments de W.

17.7. Soit A, B et C trois matrices de type $n \times n$, $I = I_n$ la matrice identité.

(a) Exprimer en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$ le déterminant
$$\left| \begin{array}{c:c} A & \mathbb{O} \\ \hdashline B & I \end{array} \right|.$$

(Expliquer vos calculs.)

(b) Trouver une matrice M telle que
$$\left(\begin{array}{c:c} A & \mathbb{O} \\ \hdashline B & C \end{array} \right) = M \left(\begin{array}{c:c} I & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & C \end{array} \right).$$

(c) Exprimer en fonction de $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(C)$, le déterminant

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline B & C \end{array}\right|.$$

Pour la suite, on suppose que n est *impair* et que C est inversible.

(d) Exprimer le plus simplement possible, en fonction de $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(C)$, le déterminant

$$\left|\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline A & \mathbb{O} \end{array}\right|.$$

(*Indication* : on pourra utiliser l'égalité

$$\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline A & \mathbb{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & I \\ \hline C & \mathbb{O} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C^{-1}A & \mathbb{O} \\ \hline B & C \end{array}\right).)$$

17.8. Soit W et W' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $W \cap W'$, $f_1, \ldots, f_m$ des vecteurs tels que $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une base de W, $g_1, \ldots, g_\ell$ des vecteurs tels que $(e_1, \ldots, e_n, g_1, \ldots, g_\ell)$ est une base de W'.

(a) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_\ell)$ est une base de $W + W'$.

(b) Montrer que $\dim(W + W') + \dim(W \cap W') = \dim(W) + \dim(W')$.

17.9. (a) Déterminer l'ensemble C des valeurs de k pour lesquelles le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & kx_2 & - & x_3 & = & 5 \\ (k-5)x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

peut être résolu par la méthode de Cramer.

(b) Exprimer la solution à l'aide de la formule de Cramer lorsque k est dans C (ne pas développer les déterminants).

(c) Dans le cas où $k = 6$, réduire la matrice augmentée à la forme échelonnée simplifiée pour trouver la solution générale du système.

17.10 (*). Soit V l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables sur l'intervalle $[0, 1]$.

(a) Montrer que l'opération

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \big(f'(t)g'(t) + f(t)g(t)\big)\, dt$$

définit un produit scalaire sur V.

(b) Trouver une base orthonormale du sous-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 relativement au produit scalaire ci-dessus.

(c) Quelle est la meilleure approximation de la fonction t^2 par des polynômes de degré ≤ 1 ?

17.11 (*). Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ la transformation linéaire définie par

$$T(p)(t) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)t + 5ct^2$$

lorsque $p(t) = a + bt + ct^2$.

(a) Ecrire la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ de T dans la base $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$.

(b) Déterminer $\ker(T)$.

(c) Est-ce que T est surjective ? Justifier votre réponse.

(d) Soit $\mathcal{B}' = (p_1, p_2, p_3)$ la base de $\mathcal{P}_2$ définie par

$$p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 + t)\,, \qquad p_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(t - 1)\,, \qquad p_3(t) = t^2\,.$$

Trouver la matrice $\big[T\big]_{\mathcal{B}'}$ de T dans la base $\mathcal{B}'$.

(e) Posons

$$T^k = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ fois}}\,.$$

A l'aide de (d), calculer $T^k(p)(t)$ lorsque $p(t) = a + bt + ct^2$.

17.12. Soit $T_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T_2 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ trois transformations matricielles définies par $T_1(x) = A \cdot x$, $T_2(y) = B \cdot y$ et $T_3(z) = C \cdot z$ où A, B et C sont des matrices de type $m \times n$, $m \times p$ et $p \times n$, respectivement, telles que

$$A = BC\,.$$

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(T_1)$ est égal à l'espace des colonnes de A.

(b) Montrer que si A et B ont le même rang, alors $\mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{Im}(T_2)$.

17.13. Soit V un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de V. Soit $T : V \to V$ la transformation linéaire définie par

$$\begin{aligned} T(e_1) &= -e_2 - e_4\,, & T(e_2) &= 3e_1 + e_2 + 3e_3 + 2e_4\,,\\ T(e_3) &= 2e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4\,, & T(e_4) &= -3e_1 - 3e_3 - e_4\,. \end{aligned}$$

(a) Ecrire la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ de T dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Trouver une base de $\ker(T)$.

(c) Trouver une base de $\mathrm{Im}(T)$.

(d) Soient $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ une base de V et λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des nombres tels que la matrice $[T]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Montrer que $[e_i']_{\mathcal{B}}$ est un vecteur propre de $[T]_{\mathcal{B}}$ associé à la valeur propre λ_i, $i = 1, \ldots, 4$.

(e) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de V et des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $[T]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

17.14. Soit a un nombre et $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre 6 définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1-a & \text{si } i = j\,, \\ 1 & \text{si } i \neq j\,. \end{cases}$$

(a) Trouver la valeur de $\det(A)$ par un calcul direct de ce déterminant.

(b) Vérifier que $\lambda_1 = -a$ est une valeur propre de A.

(c) Donner une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -a$.

(d) Trouver un autre sous-espace propre de A. (*Indication* : exploiter le fait que A est symétrique.)

(e) Quelle est la valeur propre correspondant à cet autre sous-espace propre ?

(f) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

(g) Déduire de (f) la valeur de $\det(A)$.

17.15 (*). Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 4 et W l'ensemble des polynômes dans V qui sont de la forme $p(t) = \left(k_1 t + k_2 t^2\right)(t-1)^2$, k_1, k_2 des nombres. On munit V du produit scalaire et de la norme définis comme suit : si p désigne le polynôme $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4$ et q désigne le polynôme $q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + q_4 t^4$, alors

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 \quad \text{et} \quad \left\|p\right\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}\,.$$

(a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

(b) Donner une base de W (justifier votre réponse).

(c) A l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormale de W.

(d) Soit r le polynôme défini par $r(t) = 10t^4$. Trouver $\mathrm{proj}_W(r)$.

(e) Montrer que pour tout w dans W, $\left\|r - w\right\| > 8$.

17.16. Soit $A = (a_1 \vdots \cdots \vdots a_m)$ une matrice carrée d'ordre m, $B = (b_1 \vdots \cdots \vdots b_n)$ une matrice de type $m \times n$ et $C = (c_{ij})$ une matrice de type $n \times m$. Supposons que $m > n$ et que $A = BC$.

(a) Exprimer la colonne a_j de A en fonction des b_i et des c_{ij}.

(b) Déduire de (a) que $\mathrm{rg}\, A \leq n$.

17.17. On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & k_1 \\ x_2 + x_3 & = & k_2 \\ & & \\ x_{n-1} + x_n & = & k_{n-1} \\ x_n + x_1 & = & k_n \end{array} \right. \qquad \text{où } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Ecrire la matrice A_n du système.

(b) Calculer le déterminant de A_n en fonction de n.

(c) Déterminer le rang de A_n en fonction de n.

(d) Dans le cas $n = 3$, donner la solution du système à l'aide de la formule de Cramer.

(e) Dans le cas $n = 4$, dire à quelle condition le système admet au moins une solution et exprimer la solution générale du système.

17.18 (*). Soit T la transformation matricielle associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer l'image par T du plan d'équation $4x - y + z = 0$.

(b) Expliquer pourquoi la transformation T est linéaire.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(d) Donner la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ de T dans la base $\mathcal{B}$.

(e) Calculer la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ de T dans la base $\mathcal{B}'$.

(f) Est-ce que T est injective ? Justifier votre réponse.

17.19 (*). Soit

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

(a) Expliquer brièvement pourquoi il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T AP$ est diagonale.

(b) Montrer que $\pi - 1$ et $\pi + 3$ sont des valeurs propres de la matrice A.

(c) Trouver une base de chacun des sous-espaces propre de A associés à $\pi - 1$ et $\pi + 3$.

(d) Trouver une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $P^T AP = D$.

(e) Trouver la solution générale du système différentiel $\dot{x} = Ax$.

17.20. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T : V \longrightarrow V$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$;

(b) $\ker(T \circ T) = \ker(T)$.

17.21. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 1 \\ 0 & 25 & 1 \\ 1 & 1 & 25 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de A.

(b) Peut-on déduire de (a) que A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

(c) Est-ce que A est orthogonalement diagonalisable ? Justifier votre réponse.

(d) Trouver la solution générale du système différentiel $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

(e) Si on considère A comme une matrice à coefficients dans $\mathcal{F} = \{0, 1, \ldots, 25\}$, calculer l'inverse modulo 26 de A à l'aide des opérations dans $\mathcal{F}$.

Rappel. Dans $\mathcal{F}$, $1 + 25 = 0$ et $25 \times 25 = 1$.

(f) Déchiffrer le cryptogramme HZGVZD sachant que le message a été chiffré par un 3-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice A.

17.22. Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et T une transformation linéaire non nulle de V dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que T est surjective.

(b) Calculer la dimension de $\ker(T)$.

(c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_j, e_{j+1}, \ldots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \ldots, e_j)$ est une base de $\ker(T)$ et $e_{j+1}, \ldots, e_n$ ne sont pas dans $\ker(T)$. Que vaut j ?

(d) Soit S une autre transformation linéaire de V dans $\mathbb{R}$ telle que $\ker(S) = \ker(T)$. Montrer qu'il existe un nombre k tel que $S(v) = kT(v)$ pour tout v dans V.

17.23. Soit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de type $n \times n$ définie par $A = a \cdot a^T$.

(a) Déterminer le rang de A.

(b) Que vaut le déterminant de A ?

(c) Montrer que A^2 est proportionnelle à A.

(d) Montrer que $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ est une valeur propre de A.

(e) Montrer que $\lambda = 0$ est une valeur propre de A.

(f) Trouver la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$.

(g) Est-ce-que A est orthogonalement diagonalisable ? Justifier votre réponse.

17.24. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ une base de l'espace vectoriel V des polynômes de degré ≤ 3, où

$$e'_1 = t + t^2\,, \qquad e'_2 = 1 - t^3\,, \qquad e'_3 = 1 + t^3\,, \qquad e'_4 = -t + t^2\,.$$

Soit $T : V \longrightarrow V$ la transformation linéaire définie par

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) La transformation T est-elle injective ?

(b) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, trouver $[T(e'_i)]_{\mathcal{B}'}$.

(c) Trouver $T(e'_1)$, $T(e'_2)$, $T(e'_3)$ et $T(e'_4)$.

(d) Déterminer $T(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3)$.

(e) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de V, où

$$e_1 = 1\,, \qquad e_2 = t\,, \qquad e_3 = t^2\,, \qquad e_4 = t^3\,.$$

Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(f) Déterminer $[T]_{\mathcal{B}}$.

17.25. Déchiffrer le cryptogramme ISUXTCYTPO sachant qu'il est obtenu par un 2-chiffrement de Hill et que le message clair commence par BEST. *Rappel.* Dans $\mathcal{F} = \{0, 1, \ldots, 25\}$, $1 + 25 = 0$, $3 \times 9 = 1$ et $23 \times 17 = 1$.

Quatrième partie

Solutions des exercices

1. Systèmes linéaires

1.1. En faisant la somme des deux équations, on obtient $4x_1 = 0$. La solution du système est donc $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = k$, avec k un nombre. L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ cherché est la droite passant par l'origine et de direction $(0, 0, 1)$.

1.2. (a) La solution générale du système est $x_1 = k$, $x_2 = 4k + 3\ell$, $x_3 = \ell$, avec k, ℓ dans $\mathbb{R}$.

(b) La solution générale est $x_1 = 5 + k - 2\ell$, $x_2 = \ell$, $x_3 = k$, avec k, ℓ dans $\mathbb{R}$.

1.3. Echelonnées : (c), (d), (e), (f), (g) et (h). Echelonnées simplifiées : (d), (e), (g) et (h).

1.4. Echelonnées : (a), (c), (d), (e), (f) et (h). Echelonnées simplifiées : (a), (d), (e) et (h).

1.5. Réponses possibles :

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -15 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -93/46 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

1.6. Réponses possibles :

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ (b) $$\begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (d) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.7. Par la méthode d'élimination des inconnues, nous obtenons le nouveau système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - 2x_3 \phantom{{} - x_4} = 0\,, \end{cases}$$

ce qui donne la solution $x_1 = \ell - 1$, $x_2 = 2k$, $x_3 = k$, $x_4 = \ell$, avec k, ℓ dans $\mathbb{R}$.

1.8. Par la méthode d'élimination des inconnues, nous obtenons le nouveau système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1\,, \end{cases}$$

ce qui donne la solution $x_1 = (1-k+\ell)/2$, $x_2 = (1-k-3\ell)/2$, $x_3 = k$, $x_4 = \ell$, avec k, ℓ dans $\mathbb{R}$.

1.9. La solution de la première équation est $x_1 = (c - bk)/a$, $x_2 = k$, k un nombre quelconque, qui satisfait aussi, par hypothèse, la deuxième équation, c'est-à-dire $\alpha(c-bk)/a+\beta k = \gamma$ pour tout k dans $\mathbb{R}$, d'où $k(a\beta-\alpha b) = a\gamma-\alpha c$. En particulier, $k = 0$ donne $a\gamma = \alpha c$, puis $k = 1$ fournit $a\beta = \alpha b$. On en déduit que si $\alpha = 0$, alors $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ car $a \neq 0$. Dans ce cas, la solution $x_1 = c/a+1$, $x_2 = 0$ de $\alpha x_1+\beta x_2 = \gamma$, n'est pas une solution de $ax_1+bx_2 = c$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc $\alpha \neq 0$ et on peut déduire des égalités $a\gamma = \alpha c$ et $a\beta = \alpha b$ que $b/a = \beta/\alpha$ et $c/a = \gamma/\alpha$.

1.10. (a) $ax_1 + 3ax_2 = 6a$, avec $a \neq 0$.

(b) $ak + 3a\left(2 - \dfrac{1}{3}\,k\right) = 6a\,.$

1.11. (a) Le fait que (x_i, y_i) appartienne à la courbe donnée signifie que $ax_i^3 - 2x_i^2 + bx_i + c = y_i$, autrement dit que la suite de nombres a, b, c satisfait l'équation linéaire en les variables x, y et z suivante : $x_i^3x + x_iy + z = y_i + 2x_i^2$, et ceci, pour $i = 1, 2, 3$.

(b) Par (a), la donnée des différents points nous fournit le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée correspondante est

$$\begin{pmatrix} (1)^3 & 1 & 1 & 3+2(1)^2 \\ (2)^3 & 2 & 1 & 7+2(2)^2 \\ (3)^3 & 3 & 1 & 19+2(3)^2 \end{pmatrix}.$$

On peut résoudre ce système par la méthode d'élimination des inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution est $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$.

1.15. Après échelonnement (et simplification) de la matrice augmentée du système par la méthode de résolution de Gauss, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution du premier système est donc

$$x_1 = -k - \ell\,,\ x_2 = k\,,\ x_3 = -\ell\,,\ x_4 = 0 \text{ et } x_5 = \ell\,,\ \text{avec } k, \ell \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

Le second système n'admet aucune solution car la forme échelonnée simplifiée de la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.16. Après échelonnement (et simplification) de la matrice augmentée du système par la méthode de résolution de Gauss, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc

$$x_1 = \frac{3}{2}\,, \qquad x_2 = x_3 = 0\,, \qquad x_4 = \frac{1}{2}\,.$$

1.17. La matrice des coefficients commune aux deux systèmes, augmentée doublement, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle admet pour forme échelonnée simplifiée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solution du premier système est donc $x_1 = -3$, $x_2 = 6 - k$, $x_3 = 5 - k$ et $x_4 = k$, avec k dans $\mathbb{R}$, et la solution du deuxième système est $x_1 = 1$, $x_2 = 4 - \ell$, $x_3 = 2 - \ell$ et $x_4 = \ell$, avec ℓ dans $\mathbb{R}$.

1.18. On peut résoudre les deux systèmes simultanément : on échelonne la matrice doublement augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution du premier système est donc $x_1 = -2k - 5/2$, $x_2 = k + 1/2$ et $x_3 = k$, k dans $\mathbb{R}$. Le deuxième système n'a pas de solution.

1.19. En posant $x_1 = x^2$, $x_2 = y^2$ et $x_3 = \tan z$, on se ramène à un système linéaire qu'on résout par la méthode de Gauss. On obtient $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ et $z = \pi/4$.

1.20. En posant $x_1 = \sin(\alpha + \gamma)$, $x_2 = \cos(\beta + \gamma)$ et $x_3 = \tan \gamma$, on se ramène à un système linéaire qu'on résout par la méthode de Gauss. On obtient la matrice échelonnée et simplifiée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vu les conditions sur les angles, on obtient $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi$ et $\gamma = 0$.

1.21. Une forme échelonnée de la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & a^2 - 9 & a - 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si $a = 3$, le système admet une infinité de solutions ; si $a = -3$, le système n'a aucune solution ; si $a \neq \pm 3$, le système admet exactement une solution.

1.22. (a) Une forme échelonnée de la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Pour qu'il existe une solution unique, il faut que $\lambda - 1 \neq 0$ et $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$, autrement dit que $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$. Dans ce cas, la forme échelonnée simplifiée de la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/(\lambda + 2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(\lambda + 2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(\lambda + 2) \end{pmatrix}$$

et la solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 1/(\lambda + 2)$.

(b) Dans le cas où $\lambda = 1$, la forme échelonnée simplifiée de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la solution est $x_1 = 1 - \ell - k$, $x_2 = \ell$ et $x_3 = k$, avec k, ℓ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas où $\lambda = 2$, une forme échelonnée de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système n'a pas de solution.

2. Calcul matriciel

2.1.

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 8 & 13 & 28 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

2.2.

$$\begin{aligned} AB &= \big((a_1 \,\vdots\, \mathbb{O}) + (\mathbb{O} \,\vdots\, a_2 \,\vdots\, \mathbb{O}) + \cdots + (\mathbb{O} \,\vdots\, a_n)\big)B \\ &= (a_1 \,\vdots\, \mathbb{O})B + (\mathbb{O} \,\vdots\, a_2 \,\vdots\, \mathbb{O})B + \cdots + (\mathbb{O} \,\vdots\, a_n)B \\ &= (a_1 \,\vdots\, \mathbb{O}) \begin{pmatrix} b_1^T \\ -- \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} + \cdots + (\mathbb{O} \,\vdots\, a_n) \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ -- \\ b_n^T \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1^T + a_2 b_2^T + \cdots + a_n b_n^T\,. \end{aligned}$$

2.3. (a) $A^n = I_2$ si n est pair et $A^n = A$ sinon.

(b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^n = 0$ si $n \geq 3$.

2.4. D'une part,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{d'où} \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^2 + B^2 + 2A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

On constate que la formule pour le carré de la somme de nombres $(k+\ell)^2 = k^2 + \ell^2 + 2k\ell$, n'est pas valable en général pour les matrices.

2.5. Supposons qu'il existe une matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telle que $B^2 = A$. On effectue le calcul de B^2 et cette égalité devient

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En comparant les coefficients des matrices de chaque membre de l'égalité, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 + bc & = & 0 \\ b(a+d) & = & 1 \\ c(a+d) & = & 0 \\ bc + d^2 & = & 0\,. \end{cases}$$

De la deuxième équation, nous déduisons que $a + d \neq 0$ et donc que $c = 0$ d'après la troisième. Par conséquent, $a = d = 0$ (cela se voit en égalant c à zéro dans la première et la quatrième équation). Mais dans ce cas, la deuxième équation ne peut pas être satisfaite.

2.6. (a) Faux, car, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \pm I_2\,.$$

(b) Faux, comme le montre le contre-exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vrai, car l'hypothèse implique que, pour tout $1 \leq i \leq m$, l'élément (i,i) de la matrice AA^T est nul, donc

$$\left(AA^T\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \left((A)_{ik}\right)^2 = 0\,,$$

ce qui entraîne $(A)_{i1} = (A)_{i2} = \cdots = (A)_{in} = 0$, d'où $(A)_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Autrement dit, A est la matrice nulle.

(d) Faux, car

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{mais} \quad \mathbb{O}_{2\times 2} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 .$$

2.7.

$$\text{(a) } MN \;=\; \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} W & \vdots & X \\ -- & -- & -- \\ Y & \vdots & Z \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{}_{p_1 \text{ col.}} & & \underbrace{}_{p_2 \text{ col.}} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \} \quad m_1 \text{ lignes} \\ \\ \} \quad m_2 \text{ lignes} \end{array}$$

Pour $1 \leq k \leq p_2$,

$$\begin{aligned} (MN)_{i(p_1+k)} &= \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (M)_{ij}(N)_{j(p_1+k)} = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}f_{jk} + \sum_{j=1}^{n_2} b_{ij}h_{jk} \\ &= (AF)_{ik} + (BH)_{ik} . \end{aligned}$$

Ainsi $X = AF + BH$. On procède de manière analogue pour W, Y, Z.
(b) Posons

$$M^{-1} = N = \left(\begin{array}{ccc} E & \vdots & F \\ -- & -- & -- \\ G & \vdots & H \end{array}\right),$$

où E (respectivement H) est une matrice carrée d'ordre m (respectivement n).
Alors

$$I_{m+n} = MM^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} E + BG & \vdots & F + BH \\ --- & -- & --- \\ G & \vdots & H \end{array}\right),$$

et donc $G = \mathbb{O}$, $H = I_n$, $E = I_m$, $F = -B$. Ainsi,

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} I_m & \vdots & -B \\ -- & -- & -- \\ \mathbb{O} & \vdots & I_n \end{array}\right).$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.8.

$$\begin{aligned} (I_n + K_n) \cdot \left(I_n - \frac{1}{2n+1}K_n\right) &= I_n + \frac{2n}{2n+1}\, K_n - \frac{1}{2n+1}\, K_n^2 \\ &= I_n + \frac{1}{2n+1}\,(2nK_n - K_n^2) \\ &= I_n , \end{aligned}$$

car $K_n^2 = 2nK_n$.

2.9. En applicant les régles d'inversion et de transposition d'un produit de matrices, on obtient $\left(C^T\right)^{-1}A^T = D$, d'où

$$A\left(D^{-1}\left(C^T\right)^{-1}\right)^T = I^T = I\,,$$

et donc $A^{-1} = C^{-1}\left(D^T\right)^{-1}$.

2.11. (a) Il suffit de constater que $(I + A + A^2 + A^3)(I - A) = I - A^4 = I$. La matrice $(I + A) = \big(I - (-A)\big)$ est inversible, car $(-A)$ vérifie $(-A)^4 = 0$, et son inverse est donc $(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3$.

(b) De même, $(I + A + A^2 + \cdots + A^n)(I - A) = I - A^{n+1} = I$. La matrice $(I + A) = \big(I - (-A)\big)$ est inversible, car $(-A)^{n+1} = 0$ et son inverse est $(I + A)^{-1} = I - A + A^2 + \cdots + (-1)^n A^n$.

(c) La matrice considérée s'écrit sous la forme $I + A$ avec $A^2 = 0$. Son inverse est donc

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.12. (a) Posons

$$N = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ U & V & W \\ R & S & T \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ p \text{ lignes} \\ \}\ n \text{ lignes} \\ \}\ m \text{ lignes} \end{matrix}$$

$$\qquad \underbrace{}_{m \text{ col.}} \quad \underbrace{}_{n \text{ col.}} \quad \underbrace{}_{p \text{ col.}}$$

En effectuant le produit $M \cdot N$ par blocs et en égalisant le résultat avec la matrice

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I_p \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$AR = I_m\,, \quad AS = \mathbb{O}_{m\times n}\,, \quad AT = \mathbb{O}_{m\times p}\,, \quad BU = \mathbb{O}_{n\times m}\,, \quad BV = I_n\,,$$

$$BW = \mathbb{O}_{n\times p}\,, \quad CX = \mathbb{O}_{p\times m}\,, \quad CY = \mathbb{O}_{p\times n} \quad \text{et} \quad CZ = I_p\,.$$

Comme les matrices A, B et C sont inversibles, on déduit que $R = A^{-1}$, $V = B^{-1}$, $Z = C^{-1}$, et que les matrices X, Y, U, W, S, T sont nulles. Par conséquent,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & C^{-1} \\ \mathbb{O} & B^{-1} & \mathbb{O} \\ A^{-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

(b) En posant

$$A = I_2\,, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (-3)\,,$$

on déduit de ce qui précède que

$$\left(M'\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.15. De l'égalité

$$\left(ABC\right)^T B^T \left(BCB^{-1}\right)^T = I\,,$$

on déduit que $BC(ABC) = I$. Donc BC est inversible et son inverse est $(BC)^{-1} = ABC$. De plus, $A(BC)^2 = I$. Par conséquent, A est inversible et son inverse est $A^{-1} = (BC)^2$.

2.16. Seules les matrices B et E sont élémentaires et leurs inverses respectives sont

$$B^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17.

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi la matrice que l'on obtient en multipliant la troisième ligne de A par 3.

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi la matrice que l'on obtient en permutant les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ lignes de A.

$$E_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -9 & 41 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi la matrice que l'on obtient en additionnant (-5) fois la $1^{\text{ère}}$ ligne de A à la $3^{\text{ème}}$ ligne de A.

2.18. (a) Le résultat est la matrice-colonne nulle.

(b) Si $d = 0$ ou $e = 0$, la matrice n'est pas inversible car elle a au moins une colonne de zéros (cf. le théorème fondamental) : dans ce cas, sa forme échelonnée simplifiée ne peut être I_5. Dans le cas où $d \neq 0 \neq e$, en désignant par A la matrice 5×5 en question, (a) indique que le système homogène $Ax = \mathbb{O}_{5\times 1}$ ne possède pas que la solution nulle. Ainsi, du théorème fondamental à nouveau, nous déduisons que A n'est pas inversible.

2.19. L'échange des lignes i et j d'une matrice peut être effectué en multipliant la matrice à gauche par la matrice élémentaire obtenue en échangeant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de la matrice identité.

2.20. Appelons $\widetilde{A}$ la forme échelonnée simplifiée de A ; un exemple possible d'écriture est alors :

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6 A\,,$$

où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La suite des facteurs $E_1, \ldots, E_n$ n'est pas univoquement déterminée. Il est intéressant de noter que E_6 correspond ici à la première opération élémentaire effectuée sur A.

2.21. (a) Soit x tel que $Ax = 0$. La relation donnée implique que

$$0 = 0x = (A^3 - 2A^2 + 3A + 2I)x = (A^2 - 2A + 3I)Ax + 2x = 2x\,,$$

donc $x = 0$.

(b) Cette propriété découle de (a), d'après le théorème fondamental.

$$\text{(c) } A^3 - 2A^2 + 3A + 2I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot (A^2 - 2A + 3I) = -2I$$
$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \left[-\frac{1}{2}(A^2 - 2A + 3I)\right] = I\,.$$

Donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}(A^2 - 2A + 3I)$.

2.22. (a) La forme échelonnée simplifiée de $(A \,\vdots\, I_3)$ est $(I_3 \,\vdots\, B)$, où

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/4 \\ -2 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

(b) $A^{-1} = E_1E_2E_3E_4E_5E_6E_7$, où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_7 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que E_7 correspond ici à la première opération élémentaire effectuée sur A. La suite des facteurs $E_1, E_2, \ldots$, ainsi que leur nombre, ne sont pas univoquement déterminés.

2.23.

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2.25. Une forme échelonnée de la matrice étant

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -b & 6-2a \\ 0 & 1 & b/3 & a/3 \\ 0 & 0 & b(a-3) & (a-3)^2 \end{pmatrix},$$

on déduit les réponses suivantes : (a) $a \neq 3$, $b \neq 0$; (b) $a = 3$, $b \neq 0$; (c) $a = 3$, $b = 0$; (d) $a \neq 3$, $b = 0$.

2.26. Soit x une solution quelconque. Il faut trouver un x_0 qui satisfait $x = x_p + x_0$ et qui est solution du système $Ax = 0$. En posant $x_0 = x - x_p$, on répond à la question. En effet, on a bien $x = x_p + x_0$ et

$$Ax_0 = A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0\,.$$

2.27. Comme A doit être symétrique, nous en déduisons le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & - & b & + & 2c & = & 3+a \\ a & + & b & + & c & = & c \\ a & & & + & c & = & -2\,, \end{array} \right.$$

dont l'unique solution est $a = -7$, $b = 7$ et $c = 5$. De plus, ce sont les seules valeurs pour lesquelles A est symétrique.

2.28. Soit A et B deux matrices symétriques. En considérant que $(AB)^T = B^T A^T = BA$, il apparaît clairement que AB est symétrique (i.e. $(AB)^T = AB$) si et seulement si A et B commutent. (En particulier, les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques.)

2.30. Soit E_{ij}^k la matrice élémentaire obtenue en ajoutant k fois la $j^{\text{ème}}$ ligne à la $i^{\text{ème}}$ ligne de I_3. On réduit A à la forme échelonnée U et on obtient

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = E_{32}^{-2} E_{31}^{-1/3} E_{21}^{-2/3} A\,,$$

donc

$$A = E_{21}^{2/3} E_{31}^{1/3} E_{32}^{2} U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} U\,.$$

2.32.

$$\begin{aligned} A = (I-B)(I+B)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad A(I+B) = I - B \\ &\Leftrightarrow \quad B + AB = I - A \\ &\Leftrightarrow \quad (I+A)B = I - A \\ &\Leftrightarrow \quad B = (I+A)^{-1}(I-A). \end{aligned}$$

En multipliant l'identité

$$(I-A)(I+A) = I + A - A - A^2 = (I+A)(I-A)$$

à gauche et à droite par $(I+A)^{-1}$, on obtient l'identité

$$(I+A)^{-1}(I-A) = (I-A)(I+A)^{-1}\,,$$

d'où la conclusion.

2.33. Les fonctions g_0, g_1 et g_2 satisfont l'équation $A = g_0 I + g_1 C + g_2 C^2$ si et seulement si

$$\begin{aligned} f_1 &= g_0 + g_1 + g_2\,, \\ f_2 &= g_0 + 2g_1 + 4g_2\,, \\ f_3 &= g_1 + 4g_2\,. \end{aligned}$$

En résolvant, on obtient

$$\begin{aligned} g_0 &= 4f_1 - 3f_2 + 2f_3\,, \\ g_1 &= -4f_1 + 4f_2 - 3f_3\,, \\ g_2 &= f_1 - f_2 + f_3\,. \end{aligned}$$

2.34. (a) Evidente.

(b) Soit $A = (a_{ij})$. Alors $A^T = -A$ signifie $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous i, j. Pour $i = j$, on obtient $a_{ii} = 0$.

2.36.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 270 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 2/5 & 0 & -1/5 \\ 3/270 & -15/270 & 6/270 \end{pmatrix}.$$

2.37. (a) Faux, car, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Faux, car $AB \neq BA$ en général.

(c) Faux, car, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Vrai, car de $AB = BA$, on déduit que $A^{-1}AB = A^{-1}BA$, c'est-à-dire $B = A^{-1}BA$ et enfin $BA^{-1} = A^{-1}B$.

2.43. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} \\ &= \mathrm{Tr}(BA). \end{aligned}$$

3. Déterminants

3.1. (a) Le premier déterminant vaut

$$(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot 2=-240$$

et le second vaut

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2&-1&0&1\\0&0&2&5\\0&4&1&0\\0&7&-1&-1\end{vmatrix} &= 2\cdot\begin{vmatrix}0&2&5\\4&1&0\\7&-1&-1\end{vmatrix}\\ &= 2\cdot\big((-2)(-4)+5\cdot(-11)\big)=2\cdot(-47)=-94\,.\end{aligned}$$

(b) $|5A|=5^n|A|=3\cdot 5^n$.

3.2. Pour calculer D, on ajoute la première ligne à la sixième et on développe le déterminant par rapport à cette dernière. On obtient

$$\begin{aligned} D &= (-2)\begin{vmatrix}0&0&0&0&-3\\-4&-2&7&6&-3\\4&0&0&17&-8\\0&0&0&5&-4\\5&0&-3&0&9\end{vmatrix}=(-2)(-3)\begin{vmatrix}-4&-2&7&6\\4&0&0&17\\0&0&0&5\\5&0&-3&0\end{vmatrix}\\ &= (-2)(-3)(2)\begin{vmatrix}4&0&17\\0&0&5\\5&-3&0\end{vmatrix}=(-2)(-3)(2)(-5)\begin{vmatrix}4&0\\5&-3\end{vmatrix}\\ &= (-2)(-3)(2)(-5)(4)(-3)=720\,.\end{aligned}$$

3.3. Les réponses sont : (a) -40 ; (b) -125 ; (c) -25 ; (d) 5.

3.4.

$$\begin{aligned}|A|+6\,|B| &= \begin{vmatrix}2&21&16&-5\\0&-3&91&18\\0&0&-1&-2\\-18&-6&12&41\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&21&16&-5\\0&-3&91&18\\0&0&-1&-2\\18&6&-18&-36\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}2&21&16&-5\\0&-3&91&18\\0&0&-1&-2\\0&0&-6&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&21&16&-5\\0&-3&91&18\\0&0&-1&-2\\0&0&0&17\end{vmatrix}\\ &= 102\,.\end{aligned}$$

3.5. En ajoutant 100 fois la première colonne et 10 fois la deuxième à la troisième, on obtient 9 fois la dernière, d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & 15 \\ 2 & 2 & 5 & 25 \\ 1 & 5 & 3 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 117 & 13 \\ 1 & 3 & 135 & 15 \\ 2 & 2 & 225 & 25 \\ 1 & 5 & 153 & 17 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 15 & 15 \\ 2 & 2 & 25 & 25 \\ 1 & 5 & 17 & 17 \end{vmatrix} = 0\,.$$

3.6. (b) D'après (a),

$$|A| = 2 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 8 = -384\,.$$

3.7. (a) $4A - B$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & -28 \\ -15 & -3 & 91 & 16 \\ -20 & 0 & -1 & -24 \\ -8 & -6 & 12 & 36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & 23 \\ -15 & -3 & 91 & 2 \\ -20 & 0 & -1 & -4 \\ -8 & -6 & 12 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & -5 \\ -15 & -3 & 91 & 18 \\ -20 & 0 & -1 & -28 \\ -8 & -6 & 12 & 41 \end{vmatrix}.$$

$(4A - B) - 5C$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 37 & 21 & 16 & -5 \\ -15 & -3 & 91 & 18 \\ -20 & 0 & -1 & -28 \\ -8 & -6 & 12 & 41 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -35 & 21 & 16 & -5 \\ 15 & -3 & 91 & 18 \\ 20 & 0 & -1 & -28 \\ -10 & -6 & 12 & 41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ -18 & -6 & 12 & 41 \end{vmatrix}.$$

$(4A - B - 5C) + 6D$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ -18 & -6 & 12 & 41 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 18 & 6 & -12 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 16 & -5 \\ 0 & -3 & 91 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

(b) $4A - B - 5C + 6D = 2 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 5 = 30$.

3.8. D'après les propriétés du déterminant et les hypothèses,

$$|ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = |A| \cdot |B| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot |B| \cdot |B|^{-1} = |A| = 8\,.$$

On déduit de $|A| = |B^3| = |B|^3$ que $|B| = 2$ et de $|C| = |B|^{-1}$ que $|C| = 1/2$.

3.11. En écrivant

$$D = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

et en remarquant que pour tout n,

$$(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2 = 2\,,$$

on voit facilement que $L_4 - 2L_3 + L_2 = L_3 - 2L_2 + L_1$, où chaque L_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice. On a donc $L_4 = 3L_3 - 3L_2 + L_1$ et par conséquent $D = 0$.

3.12. En développant les déterminants, on trouve que les solutions sont

$$x = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{3-7}{4} = -1\,.$$

3.13. (a) $|kI_n + \ell A^{-1}| \cdot |A| = \big|(kI_n + \ell A^{-1})A\big| = |kA + \ell I_n|$.

(b) $|I_4 + A^{-1}| = \dfrac{|A+I_4|}{|A|} = 0$.

3.14. On trouve $|A| = -113$ et

$$x_1 = -\frac{1}{113}\begin{vmatrix} 60 & 2 & 0 \\ 73/2 & 1 & 7/2 \\ 79 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 3\,, \qquad x_2 = 18\,, \qquad x_3 = 1\,.$$

3.15. Le système s'écrit $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $|A| = -4$ et la solution est

$$x_1 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,, \qquad x_2 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$x_3 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,, \qquad x_4 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,.$$

3.16. La matrice des cofacteurs de A est

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La matrice des cofacteurs de B est

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -10 & 17 & 3 \\ 16 & -20 & -3 \end{pmatrix},$$

$|B| = 9$ et donc

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -10 & 17 & 3 \\ 16 & -20 & -3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & -10 & 16 \\ 6 & 17 & -20 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.17. Le déterminant de toute matrice A antisymétrique d'ordre n vérifie $|A| = |-A^T| = |-A| = (-1)^n|A|$. Si n est impair, on obtient $|A| = -|A|$, donc $|A| = 0$.

3.18. En développant le déterminant D_n par rapport à la première ligne à chaque étape, on obtient

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdots (-1)^3 \cdot (-1)^2 = (-1)^{n(n+3)/2}\,.$$

On en déduit que $D_n = 1$ si $n = 4p$ ou $n = 4p+1$ et $D_n = -1$ si $n = 4p+2$ ou $n = 4p+3$.

3.21. On construit des matrices carrées $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$, d'ordre m, en augmentant les matrices B et C par des 0 comme suit :

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbb{O}_{m\times(m-n)} \end{array} \right) \qquad \text{et} \qquad \tilde{C} = \left(\begin{array}{c} C \\ \hline \mathbb{O}_{(m-n)\times m} \end{array} \right).$$

On a alors $|\tilde{B}| = |\tilde{C}| = 0$ et par suite $|A| = |BC| = |\tilde{B}\tilde{C}| = |\tilde{B}| \cdot |\tilde{C}| = 0$. (*Attention* : $|B|$ et $|C|$ ne sont pas définies car ces matrices ne sont pas carrées.)

3.22. (a) Pour calculer D_n, on ajoute à la deuxième colonne $-b_2$ fois la première colonne, à la troisième colonne $-b_3$ fois la première, et ainsi de suite jusqu'à la dernière colonne à laquelle on ajoute $-b_n$ fois la première colonne. On obtient ainsi

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

(b) D'après l'indication, $|I_n + ab^T|$ est égal à

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2+1 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3+1 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n+1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_2+1 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ 0 & a_3b_2 & a_3b_3+1 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n+1 \end{vmatrix}.$$

D'où

$$|I_n + ab^T| = a_1b_1D_n + |I_{n-1} + a'b'^T|\,,$$

où

$$a' = \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b' = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

En itérant le procédé, on obtient

$$\begin{aligned} |I_n + ab^T| &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + \left|I_1 + a^{(n-1)}\big(b^{(n-1)}\big)^T\right| \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n + 1\,, \end{aligned}$$

où $a^{(n-1)} = a_n$ et $b^{(n-1)} = b_n$.

4. Transformations de l'espace

4.1. On calcule les trois déterminants 2×2 formés à l'aide de x et y et on cherche pour quelles valeurs de k ils s'annulent tous. On trouve $k = \pm 2$. (Alternativement, on remarque que la dernière composante de x doit être nulle pour qu'il y ait parallélisme, d'où $k^2 = 4$, et l'on voit ensuite que x et y sont multiples l'un de l'autre quand $k = \pm 2$.)

4.2. (a) On pose $x_2 = k$ et $x_3 = \ell$ avec k et ℓ dans $\mathbb{R}$, et l'on obtient

$$x_1 = -2 + \frac{5}{2}k\,, \qquad x_2 = k \quad \text{et} \quad x_3 = \ell\,.$$

(b) $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5$.

(c) Les conditions à remplir sont $x_2 = 1$ et $3x_1 - 2x_3 = -10$ (il s'agit des équations de deux plans dont $\mathbf{d}$ est l'intersection).

(d) On substitue les équations paramétriques de la droite dans celle du plan et on en déduit la valeur du paramètre au point d'intersection. On trouve le point $(-13, -10, -5)$.

4.3. (a) Chercher x dans l'intersection des deux plans revient à chercher k_1, k_2, ℓ_1, ℓ_2 tels que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \ell_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \ell_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ce système de trois équations à quatre inconnues n'a pas de solution.

(b) La réponse est oui. En effet, le premier vecteur directeur de $\mathbf{p}_1$ est $(v+u)/2$ et le deuxième est $(u - v)/2$.

(c) La réponse est oui. En effet, de (b) on déduit que $\mathbf{p}_1$ est le plan de directions (u, v) passant par $(1, 1, 1)$. Il est donc parallèle au plan $\mathbf{p}_2$ et n'a aucun point commun avec lui.

4.4. (a) Il s'agit du parallélogramme dont deux côtés sont les vecteurs a et b ;

(b) il s'agit de la petite diagonale du parallélogramme précédent ;

(c) il s'agit du triangle dont les côtés sont les vecteurs a, b et $a - b$;

(d) il s'agit de la bande comprise entre deux droites parallèles de direction $a - b$ dont l'une passe par une extrémité de a (ou de b) et l'autre passe par l'autre extrémité de a (ou de b).

4.5. On calcule l'image des trois points d'intersection : $T(0,0) = (3,0)$, $T(1,0) = (5,1)$ et $T(1,2) = (3,5)$. Ainsi, l'image du triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ est le triangle de sommets $(3,0)$, $(5,1)$, $(3,5)$. On en déduit que les images des trois droites sont

$$\begin{aligned} T(\mathbf{d}_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} ;\ k \text{ dans } \mathbb{R} \right\}, \\ T(\mathbf{d}_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ k \text{ dans } \mathbb{R} \right\}, \\ T(\mathbf{d}_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ;\ k \text{ dans } \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ces informations permettent de représenter géométriquement les trois droites et leur image.

4.6. Le plan donné est l'ensemble des x de la forme

$$x = \begin{pmatrix} 3 + k + 2\ell \\ k + 2\ell \\ 5 - 8k - \ell \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -3A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

l'image du plan par T est l'ensemble des y de la forme

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une droite dans $\mathbb{R}^4$.

4.7. $T(x) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4.8. En supposant, comme dans l'indication, que $T(x) = A \cdot x + d$ et que

$$T(a) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad T(a+b) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(a+c) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2, v_1, v_2, w_1 et w_2 sont donnés, nous obtenons le système $B \cdot y = v$ de six équations linéaires en les variables a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, d_1, d_2, où

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & 1 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & 0 & 1 \\ a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Il suffit maintenant de vérifier que $\det(B) \neq 0$. Ceci entraînera l'existence et l'unicité de la solution du système $B \cdot y = v$, donc l'unicité des coefficients de A et de d, ce qui est la conclusion demandée. Après permutation des lignes de B, on voit que $-\det(B)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1+b_1 & a_2+b_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1+c_1 & a_2+c_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

car, par hypothèse, $\det(b \,\vdots\, c) \neq 0$.

4.11. Tout x dans le triangle Δ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1/2,1)$ est de la forme

$$x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } k \geq 0,\ \ell \geq 0 \text{ et } k+\ell \leq 1\,.$$

Donc $T_1(x)$ est de la forme

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\ell\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

avec $k \geq 0$, $\ell \geq 0$, et $k+\ell \leq 1$, et $T_1(\Delta)$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1/2,0)$ et $(1/4,1/2)$. De même,

$$T_2(x) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \geq 0,\ \ell \geq 0 \text{ et } k+\ell \leq 1\,,$$

$T_2(\Delta)$ est le triangle de sommets $(1/2,0)$, $(1/2,0)+(1/2,0) = (1,0)$ et $(1/4,1/2)+(1/2,0) = (3/4,1/2)$. Enfin,

$$T_3(x) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \geq 0,\ \ell \geq 0 \text{ et } k+\ell \leq 1\,,$$

donc $T_3(\Delta)$ est le triangle de sommets $(1/4,1/2)$, $(3/4,1/2)$ et $(1/2,1)$.

4.13. Les transformations injectives sont T_1 et $T_2 \circ T_1$. Les transformations surjectives sont T_2, $T_2 \circ T_1$ et T_3.

4.14. (a) $T_2 \circ T_1(x) = A \cdot x$, où

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible, donc la transformation $T_2 \circ T_1$ est surjective.

5. Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$

5.1. $\|u+x\|^2 + \|u-x\|^2 = \|u\|^2 + 2u\cdot x + \|x\|^2 + \|u\|^2 - 2u\cdot x + \|x\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|x\|^2 = 4\|u\|^2$. Par conséquent, $\|x\| = \|u\|$. Cet ensemble est donc la sphère centrée à l'origine et de rayon $\|u\|$.

5.2. Si $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ et $x = (x_1, x_2)$, alors $T(x) = (u_1x_1 + u_2x_2, v_1x_1 + v_2x_2)$. On en déduit que $T(x) = A\cdot x$, où

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

T est donc une transformation matricielle. T est injective si et seulement si $|A| \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs u et v ne sont pas parallèles.

5.3. (a) $\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + 2\,a\cdot b + b\cdot b \leq \|a\|^2 + 2\,|a\cdot b| + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\,\|a\|\cdot\|b\| + \|b\|^2 = \big(\|a\| + \|b\|\big)^2$.

(b) $d(a,c) = \|a-c\| = \|a-b+b-c\| \leq \|a-b\| + \|b-c\| = d(a,b) + d(b,c)$.

5.4. (a) Soit b un vecteur directeur de $\mathbf{d}$. Vu que $x - T_{\mathbf{d}}(x)$ est orthogonal à b et que $\big(x + T_{\mathbf{d}}(x)\big)/2$ appartient à $\mathbf{d}$, on déduit que $\|x\| = \big\|T_{\mathbf{d}}(x)\big\|$ et que l'angle entre x et b est le même que celui entre b et $T_{\mathbf{d}}(x)$. Par conséquent, si $x = (x_1, x_2) = \big(\|x\|\cos\alpha, \|x\|\sin\alpha\big)$, alors

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{d}}(x) &= \big(\|x\|\cos(\theta-\alpha)\,,\ \|x\|\sin(\theta-\alpha)\big) \\
&= \big(\|x\|(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)\,,\ \|x\|(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)\big) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \|x\|\cos\alpha \\ \|x\|\sin\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De plus, $|A| = -1 \neq 0$, donc $T_{\mathbf{d}}$ est injective.

(b) Dans ce cas, $T_{\mathbf{d}}$ n'est pas une transformation matricielle car $T_{\mathbf{d}}(0) \neq 0$, mais c'est une transformation affine. C'est la transformation de (a) suivie d'une translation.

5.5. Posons $a = Au$ et $b = Bv$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|a \cdot b|^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2$ ou encore $|Au \cdot Bv|^2 \leq \|Au\|^2\|Bv\|^2$. Or, le produit scalaire $Au \cdot Bv$ est égal au produit matriciel $(Bv)^T Au = v^T B^T Au$. De même, $\|Bv\|^2 = Bv \cdot Bv = (Bv)^T Bv = v^T B^T Bv$ et $\|Au\|^2 = u^T A^T Au$. D'où $(v^T B^T Au)^2 \leq (u^T A^T Au)(v^T B^T Bv)$.

5.6. (a) $u \cdot v = 2 + 3 + k = 0$, d'où $k = -5$.

(b) $u \cdot v = 4 - 4 = 0$, donc u et v sont orthogonaux pour tout k.

(c) $u \cdot v = k^2 - 2 + 1 = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) = 0$, donc $k = 1$ ou bien $k = -1$.

(d) $u \cdot v = k^2 + 4k + 6 = (k+2)^2 + 2 \neq 0$, donc pour tout k, u et v ne sont pas orthogonaux.

5.7. (a) $(u + v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 + v \cdot u - u \cdot v - \|v\|^2 = 0$.

(b) Posons

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|} \qquad \text{et} \qquad v_1 = \frac{v}{\|v\|}\,.$$

Alors $\|u_1\| = \|v_1\| = 1$ et d'après (a), $u_1 + v_1$ et $u_1 - v_1$ sont orthogonaux.

5.8. $\|a + b\|^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$ car $a \cdot b = 0$. *Application.* Si $a \cdot b = 0$, alors $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = 0$ et donc a et $-b$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore, $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \| - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = 9 + 16 = 25$, d'où $\|a - b\| = 5$ et $d(a, b) = \|a - b\| = 5$.

5.9.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^m v_i\right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^m v_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m v_k\right) = \sum_{i=1}^m \left(v_i \cdot \left(\sum_{k=1}^m v_k\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(v_i \cdot v_i + \sum_{k \neq i} v_i \cdot v_k\right) = \sum_{i=1}^m \|v_i\|^2\,.
\end{aligned}$$

Application. Supposons que les v_i sont deux à deux orthogonaux. Alors

$$\sum_{i=1}^m \|v_i\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^m v_i\right\|^2 = 0\,,$$

ce qui n'est pas possible si un des v_i est non nul.

5.12. Supposons $a \neq 0$. Cherchons k tel que $(x - ka) \cdot a = 0$, c'est-à-dire $x \cdot a - ka \cdot a = 0$, d'où $k = (x \cdot a)/\|a\|^2$. Ainsi,

$$\operatorname{proj}_a x = \frac{1}{\|a\|^2}\,(x \cdot a)a = \frac{1}{\|a\|^2}\,\big(a \cdot (x \cdot a)\big) = \frac{1}{\|a\|^2}\,(a \cdot a^T \cdot x) = \underbrace{\Big(\frac{1}{\|a\|^2}\,a\,a^T\Big)}_{A} x\,.$$

Application. Dans le cas où $a = (1, \ldots, 1)$, la matrice de la projection est

$$A = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

5.13. D'après l'exercice 5.12, $x_0 a = \operatorname{proj}_a b$. Par conséquent, pour tout x,

$$\|b - xa\| = \big\|(b - \operatorname{proj}_a b) + (\operatorname{proj}_a b - xa)\big\|.$$

Comme $(b - \operatorname{proj}_a b)$ est orthogonal à a, donc aussi à $(\operatorname{proj}_a b - xa)$, nous obtenons, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|b - xa\|^2 = \|b - \operatorname{proj}_a b\|^2 + \|\operatorname{proj}_a b - xa\|^2 \geq \|b - \operatorname{proj}_a b\|^2 = \|b - x_0 a\|^2 .$$

6. Espaces vectoriels

6.1. Les propriétés d'espace vectoriel sont toutes clairement vérifiées, le vecteur nul étant la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'opposé de la matrice de l'énoncé étant la matrice

$$\begin{pmatrix} -a & -(a+b) \\ -(a+b) & -b \end{pmatrix}.$$

6.2. (a) Ce n'est pas un espace vectoriel, car les propriétés (5) et (6) d'un espace vectoriel ne sont pas vérifiées. Par exemple, $(1+1)(1,1) = (2,2) \neq (3,3) = 1(1,1) + 1(1,1)$.

(b) Ce n'est pas un espace vectoriel, car il n'y a pas de vecteur nul dans cet ensemble.

(c) C'est un espace vectoriel, car les propriétés d'espace vectoriel sont toutes vérifiées avec les lois données.

6.3. (a) Puisque V est contenu dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que V en est un sous-espace vectoriel. Clairement, la fonction $0_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $0_\mathbb{R}(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ appartient à V. D'autre part, pour tous f, g dans V et tout nombre k, $(f + kg)(1) = f(1) + kg(1) = 0$ et donc $f + kg$ appartient à V. Ainsi, V est un sous-espace vectoriel et donc un espace vectoriel.

(b) Soit f et g dans V. Alors $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2$. Donc $f + g$ n'appartient pas à V et, par conséquent, V n'est pas un espace vectoriel.

(c) Soient f et g telles que $f(1) = g(1) = b$. Si $(f + g)(1) = b$, alors $2b = f(1) + g(1) = (f + g)(1) = b$. Donc $2b = b$, ce qui implique que $b = 0$. D'après (a), la condition cherchée est donc $b = 0$.

6.4. (c) Supposons que $k \cdot u = 0$. Si $k = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $k \neq 0$, montrons que $u = 0$:

$$u \overset{(8)}{=} 1 \cdot u \overset{k \neq 0}{=} \left(\frac{1}{k} \cdot k\right) \cdot u \overset{(7)}{=} \frac{1}{k} \cdot (k \cdot u) \overset{\text{hyp.}}{=} \frac{1}{k} \cdot 0 \overset{\text{(b)}}{=} 0\,.$$

(d) Il faut vérifier que $u + (-1) \cdot u = 0$. Or,

$$u + (-1) \cdot u \overset{(8)}{=} 1 \cdot u + (-1) \cdot u \overset{(6)}{=} \big(1 + (-1)\big) \cdot u = 0 \cdot u \overset{(a)}{=} 0\,.$$

(e)
$$\begin{aligned} k \cdot (-u) &\overset{(d)}{=} k \cdot \big((-1) \cdot u\big) \overset{(7)}{=} \big(k \cdot (-1)\big) \cdot u = (-k) \cdot u = \big((-1) \cdot k\big) \cdot u \\ &\overset{(7)}{=} (-1) \cdot (k \cdot u) \overset{(d)}{=} -(k \cdot u)\,. \end{aligned}$$

6.5. La transformation $T_{\mathbb{O}}$, associée à la matrice nulle et qui à tout x dans $\mathbb{R}^n$ fait correspondre $T_{\mathbb{O}}(x) = 0$, est le vecteur nul de V. Chaque vecteur T_A dans V admet pour opposé le vecteur T_{-A}, car $(T_A + T_{-A})(x) = T_A(x) + T_{-A}(x) = A \cdot x + (-A) \cdot x = 0$. Les autres propriétés d'espace vectoriel sont clairement vérifiées.

6.6. Supposons que les deux conditions (a) et (b) sont vérifiées. Alors W n'est pas vide, car il contient l'élément 0 (d'après (a)). Si u et v sont dans W, on applique (b) pour $k = 1$ et on voit que $u + kv = u + v$ appartient à W ; d'autre part pour un vecteur quelconque v de W, en choisissant $u = 0$ (par (a)), on déduit de (b) que le vecteur $0 + kv = kv$ appartient aussi à W. Réciproquement, si u est dans W, $0 = 0u$ est dans W ; et enfin, comme kv appartient à W pour tous v dans W et k dans $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout u dans W, $u + kv$ appartient à W.

Application. La fonction nulle est bien dans W. Soit f et g dans W. Alors

$$\big(f + k \cdot g\big)' = f' + k \cdot g' = f'' + k \cdot g'' = \big(f + k \cdot g\big)''$$

donc $f + kg$ est dans W. L'ensemble W est donc bien un sous-espace vectoriel de V.

6.7. L'élément 0 est bien dans W car il s'écrit $0 = A \cdot 0$. Soit y_1, y_2 dans W et k un nombre. Il existe alors x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $y_1 = A \cdot x_1$ et $y_2 = A \cdot x_2$. Le vecteur $x = x_1 + kx_2$ de $\mathbb{R}^n$ vérifie $A \cdot x = y_1 + ky_2$, ce qui implique que $y_1 + ky_2$ est dans W.

6.11. (a) La fonction nulle vérifie bien $p(1) + p(-1) = 0$ et, pour tous p_1, p_2 dans l'ensemble donné,

$$\begin{aligned} (p_1 + kp_2)(1) + (p_1 + kp_2)(-1) &= p_1(1) + kp_2(1) + p_1(-1) + kp_2(-1) \\ &= \big[p_1(1) + p_1(-1)\big] + \big[p_2(1) + p_2(-1)\big] \\ &= 0 + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

(b) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel car le polynôme nul n'est pas contenu dans l'ensemble donné ($\mathbf{0}(1) = 0 \neq 1$).

(c) C'est un sous-espace vectoriel. En effet, d'une part, $\mathbb{O} = 3A^2\mathbb{O}$ et $\mathrm{Tr}(\mathbb{O}) = 0$; d'autre part, si $M = 3A^2X$ et $N = 3A^2Y$ sont telles que $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(Y) = 0$, alors $M + kN = 3A^2(X + kY)$ et $\mathrm{Tr}(X + kY) = 0$. Donc, par l'exercice 6.6 ci-dessus, nous concluons que l'ensemble donné est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

(d) La réponse dépend de la valeur du déterminant de A. En effet, nous savons que $\det(AM) = \det(A)\det(M)$, donc si $\det(A) = 0$, toutes les matrices vérifient la condition et l'ensemble en question est l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$. Si par contre $\det(A) \neq 0$, cela force $\det(M) = 0$. Notre ensemble se réduit donc à l'ensemble des matrices de déterminant nul. Or, cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel car, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

est de déterminant non nul.

6.12. (a) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, car, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

appartient à l'ensemble considéré, tandis que $2A$ a tous ses coefficients entiers et ne lui appartient donc pas.

(b) On vérifie aisément que la seule matrice qui vérifie la condition est la matrice nulle. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$.

(c) C'est un sous-espace vectoriel car la matrice nulle, la somme de deux matrices antidiagonales et leurs multiples par un scalaire sont antidiagonales.

(d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, car, par exemple, la matrice

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne peut s'écrire sous cette forme. En effet, si $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$, alors il faudrait que $a_1 b_1 = a_2 b_2 = 1$ et $a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0$, ce qui n'est pas possible.

6.13. (a) Comme $V = \mathscr{L}\big((2,1,0,3), (3,-1,5,2), (-1,0,2,1)\big)$ est un espace vectoriel, il contient nécessairement 0.

(b) Le vecteur $(3,-1,5,2) = 0 \cdot (2,1,0,3) + 0 \cdot (-1,0,2,1) + 1 \cdot (3,-1,5,2)$ est bien dans V.

(c) Il s'agit d'établir l'éventuelle existence de nombres k_1, k_2 et k_3 tels que

$$k_1(2,1,0,3) + k_2(3,-1,5,2) + k_3(-1,0,2,1) = (2,3,-7,3)\,,$$

autrement dit, d'examiner le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2k_1 & + & 3k_2 & - & k_3 & = & 2 \\ k_1 & - & k_2 & & & = & 3 \\ & & 5k_2 & + & 2k_3 & = & -7 \\ 3k_1 & + & 2k_2 & + & k_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

et de déterminer s'il admet au moins une solution. La résolution de ce dernier par la méthode de Gauss fournit la solution $k_1 = 2$, $k_2 = -1$ et $k_3 = -1$, ce qui signifie que $(2,3,-7,3)$ appartient à V.

(d) On procède comme en (c) et on aboutit à un système sans solution, donc $(1,1,1,1)$ n'appartient pas à V.

6.14. (a) La condition est $-3\,b_1 + 17\,b_2 + 8\,b_3 = 0$.

(b) $\mathbb{R}^3$ n'est pas le sous-espace engendré par u_1, u_2 et u_3 car, par exemple, $b = (1,1,1)$ ne vérifie pas la condition indiquée en (a).

6.15. (a) Soit $x_1 = w_1 + w_1'$ et $x_2 = w_2 + w_2'$ deux éléments quelconques de $W + W'$ et k un nombre ; alors clairement, W et W' étant des espaces vectoriels, le vecteur

$$x_1 + kx_2 = w_1 + w_1' + k(w_2 + w_2') = w_1 + kw_2 + w_1' + kw_2'$$

appartient à $W + W'$, puisque $w_1 + kw_2$ appartient à W et $w_1' + kw_2'$ appartient à W'. De plus, $0 = 0 + 0$ est bien un élément de $W + W'$.

(b) 0 appartient à $W \cap W'$ car 0 appartient à W et à W' par hypothèse. Soit u, v dans $W \cap W'$ et k un nombre. Alors $u + kv$ appartient à $W \cap W'$, car W et W' sont des sous-espaces vectoriels.

Application. Dans ce cas, $W + W' = \mathcal{M}_{nn} = V$ et $W \cap W'$ est l'ensemble des matrices diagonales de V. Ce sont bien des sous-espaces vectoriels de V.

6.16. (a) $k(0,0,-1) = (0,0,0)$ entraîne $k = 0$, cette famille est donc libre.

(b) On cherche k_1 et k_2 tels que $k_1(5,1,-1) + k_2(1,1,5) = (0,0,0)$. Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution est $k_1 = k_2 = 0$. Par conséquent, la famille est libre.

(c) On procède comme en (b) et on aboutit à un système homogène ayant une infinité de solutions. La famille est donc liée.

6.17. Soient μ_1, μ_2, μ_3 des nombres tels que $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 = 0$. Alors $\mu_1(ka + b) + \mu_2(a + kb) + \mu_3(ka + c) = 0$. Cette égalité peut s'écrire

$$(k\mu_1 + \mu_2 + k\mu_3)a + (\mu_1 + k\mu_2)b + \mu_3 c = 0\,.$$

Comme a, b, c sont linéairement indépendants, ceci implique que $\mu_3 = 0$, $k\mu_1 + \mu_2 = 0$ et $\mu_1 + k\mu_2 = 0$, donc $\mu_2 = k^2\mu_2$. Si $k \neq \pm 1$, cela entraîne $\mu_2 = \mu_1 = 0$ et donc la famille est libre. Si $k = \pm 1$, la famille est clairement liée.

6.21. (a) (i) $1 \cdot 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$;

(ii) $x - 2y = (-1) \cdot (y - z) + (-1) \cdot (z + y - x)$.

(b) $0 = k_1(x - y) + k_2(x + y) = k_1 x - k_1 y + k_2 x + k_2 y = (k_1 + k_2)x + (k_2 - k_1)y$, d'où $k_1 + k_2 = k_2 - k_1 = 0$. Ainsi, $k_2 = k_1 = 0$.

(c) C'est une famille libre. En effet, si $k_1 \cdot 1 + k_2 e^t + k_3 e^{t^2} = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}$, alors, en posant $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$, nous formons un système linéaire homogène qui n'a que la solution triviale $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

6.22. L'expression $k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 0$ s'écrit sous forme de système comme suit :

$$\begin{cases} k_1 + k_2a + k_3b + k_4d = 0 \\ \qquad k_2 + k_3c + k_4e = 0 \\ \qquad\qquad k_3 + k_4f = 0 \\ \qquad\qquad\qquad k_4 = 0\,. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $k_4 = 0$, ce qui implique $k_3 = 0$, puis $k_2 = 0$ et pour finir, $k_1 = 0$.

6.23. (a) C'est une base de V. En effet, cherchons à écrire un polynôme quelconque de V comme combinaison linéaire des vecteurs de notre famille :

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= k_1x + k_2(6 - x^2) + k_3(1 + x + 4x^2) \\ &= 6k_2 + k_3 + (k_1 + k_3)x + (4k_3 - k_2)x^2\,. \end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

qui n'admet qu'une seule solution pour tout (a, b, c) si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Or $\det(A) = -24$, ce qui entraîne que tout polynôme $a + bx + cx^2$ s'écrit d'une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs de notre famille.

(b) On procède comme en (a). Le fait que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$ équivaut au fait que le système linéaire

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x$$

admet, pour tout x dans $\mathbb{R}^3$, une solution unique. Autrement dit, la matrice A du système est inversible. En fait, $\det(A) = (k - 2)^2(k + 4)$. Ainsi, l'ensemble des valeurs de k qui font de (v_1, v_2, v_3) une base est $\mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$.

6.24. Appelons les vecteurs de la famille énoncée respectivement $u_1, \ldots, u_4$ et montrons que cette famille est libre. L'égalité $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = 0$ n'est vérifiée que pour $k_1 = \cdots = k_4 = 0$. La famille donnée est ainsi une base du sous-espace considéré.

6.25. (a) Par exemple : $\big\{(2, -1, 4)\big\}$.

(b) Par exemple : $\big\{(-5, 0, 3); (2, 3, 0)\big\}$.

(c) Par exemple : $\big\{(1, 1, 0); (0, 1, 1)\big\}$.

6.26. Un vecteur quelconque w de W s'écrit

$$\begin{aligned} w &= k_1(e_1+e_6)+k_2(e_3-e_4)+k_3(e_5-e_2) \\ &= k_1e_1+k_1e_6+k_2e_3-k_2e_4+k_3e_5-k_3e_2\,. \end{aligned}$$

Les conditions sur les composantes d'un vecteur $x = x_1e_1+\cdots+x_6e_6$ de V pour appartenir à W sont donc $x_1 = x_6$, $x_3 = -x_4$ et $x_5 = -x_2$.

6.27. Montrons que ces vecteurs sont linéairement indépendants. De l'égalité

$$k_1\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{O}\,,$$

on déduit le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3k_1 & & & & & + & k_4 & = & 0 \\ 6k_1 & - & k_2 & - & 8k_3 & & & = & 0 \\ 3k_1 & - & k_2 & - & 12k_3 & - & k_4 & = & 0 \\ -6k_1 & & & - & 4k_3 & + & 2k_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Ce système admet l'unique solution $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Ces quatre vecteurs sont donc linéairement indépendants. Ils appartiennent à V, un espace vectoriel de dimension 4, et forment donc une base de V.

6.28. (a) Soit a, b, c, d, e, f, k des nombres. Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+kd & b+ke \\ b+ke & c+kf \end{pmatrix}$$

est symétrique et que l'ensemble des matrices symétriques contient la matrice nulle, l'assertion est démontrée.

(b) Comme dans l'exercice 6.23 (a), le fait que les trois matrices constituent une base équivaut au fait que le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & + & 2k_2 & + & 4k_3 & = & a \\ -2k_1 & + & k_2 & - & k_3 & = & b \\ k_1 & + & 3k_2 & - & 5k_3 & = & c \end{array}\right.$$

admet une solution unique pour tout a, b, c dans $\mathbb{R}$. C'est bien le cas, car

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -52 \neq 0\,.$$

Ainsi, les trois matrices, en tant que vecteurs dans l'espace des matrices symétriques, forment une base.

(c) Les coordonnées sont la solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} k_1 & + & 2k_2 & + & 4k_3 & = & 4 \\ -2k_1 & + & k_2 & - & k_3 & = & -11 \\ k_1 & + & 3k_2 & - & 5k_3 & = & -7\,, \end{array}\right.$$

qui est $k_1 = 4$, $k_2 = -2$ et $k_3 = 1$.

6.33. (a) Cette famille est libre. En effet,

$$k_1(6-t^2)+k_2(1+t+4t^2)=0\,,\qquad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}\,,$$

entraîne nécessairement $k_1=k_2=0$.

(b) Cette famille est liée, car elle contient quatre vecteurs, alors que l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est de dimension 3.

(c) Cette famille est liée car

$$2-\frac{1}{2}\,4\sin^2(t)-2\cos^2(t)=0\,,\qquad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

(d) Cette famille est libre car, par exemple, les deux équations

$$k_1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+k_2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\qquad \text{et}\qquad k_1\sin^2(0)+k_2\cos^2(0)=0$$

entraînent $k_1=k_2=0$.

6.34. Il s'agit dans chaque cas d'exhiber une base et d'en compter les éléments. Notons E^{ij} la matrice définie par

$$\left(E^{ij}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}1 & \text{si } k=i \text{ et } \ell=j\,,\\ 0 & \text{si } k\neq i \text{ ou } \ell\neq j\,.\end{cases}$$

(a) Une base est $(E^{ii},\ 1\leq i\leq n)$. La dimension est n.

(b) Une base pour l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures est formée par la famille $\{E^{ij},\ 1\leq j\leq i\leq n\}$. La dimension est $n(n+1)/2$.

(c) Une base est formée par la famille $\{E^{ij}-E^{ji},\ 1\leq i<j\leq n\}$. La dimension est $n(n-1)/2$.

(d) Une base est formée par la famille

$$\{E^{ij}\,,\ i\neq j\}\cup\{E^{ii}-E^{nn}\,,\ 1\leq i\leq n-1\}\,.$$

La dimension est n^2-1.

6.35. Les trois premières lignes $\{\ell_1^T,\ell_2^T,\ell_3^T\}$ forment clairement une famille libre. De plus, elles engendrent $\mathcal{L}(\ell_1,\ldots,\ell_4)$, car

$$\ell_4=(0,0,0,0,0,0,0)=0\cdot\ell_1+0\cdot\ell_2+0\cdot\ell_3\,.$$

Les colonnes c_1, c_4 et c_6 de A sont clairement linéairement indépendantes et elles engendrent les autres colonnes de A, car $c_2=3c_1$, $c_3=-2c_1$, $c_5=2c_4+4c_1$ et enfin $c_7=2c_6+c_4-c_1$.

6.36. (a) Dans l'exercice 6.33, on a vu que $\{\sin^2(t),\cos^2(t)\}$ est une famille libre et que $\{2,4\sin^2(t),\cos^2(t)\}$ est liée. Il en découle que le rang de cette dernière est 2.

(b) $\mathrm{rg}(A)=4$ si et seulement si $\det(A)\neq 0$. Or, $\det(A)=-k\,(k+2)(k-1)$. Nous en déduisons que $\mathrm{rg}(A)=4$ si et seulement si k est dans $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$.

6.37. (a) Soient λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 k e_1 + \lambda_2 \ell e_2 = 0$. Alors $\lambda_1 k = \lambda_2 \ell = 0$ et comme k, $\ell \neq 0$, on en déduit que $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Ceci montre bien que $(ke_1, \ell e_2)$ est une base. (Dans tout cet exercice, il suffit de montrer l'indépendance linéaire car on est toujours en présence de 2 $(= \dim(E))$ vecteurs.) Les composantes de e_1 et e_2 dans la nouvelle base sont $(1/k, 0)$ et $(0, 1/\ell)$, respectivement.

(b) e_2 et e_1 sont linéairement indépendants, ils forment donc une base. Dans cette base, les composantes de e_1 et e_2 sont $(0, 1)$ et $(1, 0)$, respectivement.

(c) Soient λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(e_1 + ke_2) + \lambda_2(e_2 + \ell e_1) = 0$. Alors $(\lambda_1 + \ell\lambda_2)e_1 + (k\lambda_1 + \lambda_2)e_2 = 0$, donc $\lambda_1 + \ell\lambda_2 = 0$ et $k\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Il s'ensuit que $\lambda_2(-k\ell + 1) = 0$. Or, vu l'hypothèse, nous déduisons que $\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. Dans cette base, les composantes de e_1 et e_2 sont

$$\frac{1}{k\ell - 1}\,(-1, k) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{k\ell - 1}\,(\ell, -1)\,,$$

respectivement.

6.38. Notons S_a, S_b, S_c, S_d les sous-ensembles des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes vérifient respectivement les conditions (a), (b), (c) et (d).

(a) Le vecteur $(0, 0, 0, 0)$ vérifie la condition (a), il est donc dans S_a. Si $x = (x_1, 0, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, 0, y_3, y_4)$ sont dans S_a et k est un nombre, alors le vecteur $x + ky = (x_1 + ky_1, 0, x_3 + ky_3, x_4 + ky_4)$ vérifie la condition (a), il est donc aussi dans S_a. S_a est par conséquent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui admet $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ pour base et qui est de dimension 3.

(b) Le vecteur $(0, 0, 0, 0)$ ne vérifie pas la condition (b) et n'est donc pas dans S_b. L'ensemble S_b n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(c) S_c est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet, le vecteur $(0, 0, 0, 0)$ vérifie la condition (c). De plus, si $x = (2x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (2y_2 + y_3, y_2, y_3, y_4)$ sont dans S_c et k est un nombre, alors le vecteur

$$x + ky = \big(2(x_2 + ky_2) + (x_3 + ky_3)\,,\, x_2 + ky_2\,,\, x_3 + ky_3\,,\, x_4 + ky_4\big)$$

vérifie la condition (c), il est donc dans S_c. On vérifie facilement que $e_1' = (2, 1, 0, 0)$, $e_2' = (1, 0, 1, 0)$ et $e_3' = (0, 0, 0, 1)$ forment une base de S_c, qui est donc de dimension 3.

(d) S_d n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car, par exemple, le vecteur $(1, 1, 1, 0)$ est dans S_d, mais $2(1, 1, 1, 0) = (2, 2, 2, 0)$ ne vérifie pas la condition (d) et n'est pas dans S_d.

6.39. (a) Appelons $\ell_1^T, \ldots, \ell_m^T$ les lignes de A, $\ell_1'^T, \ldots, \ell_m'^T$ celles de B et montrons que $\mathscr{L}(\ell_1, \ldots, \ell_m) \subset \mathscr{L}(\ell_1', \ldots, \ell_m')$ (pour l'inclusion réciproque, il suffira d'intervertir les rôles de A et de B).

Soit u dans $\mathscr{L}(\ell_1, \ldots, \ell_m)$. Si B résulte d'une permutation des lignes de A, ou, si une ligne de A a été multipliée par un nombre non nul, alors il est clair que u est dans $\mathscr{L}(\ell_1', \ldots, \ell_m')$. Considérons le cas où B résulte de l'opération

$\ell_i'^T = \ell_i^T + \alpha \ell_j^T$ ($\alpha \neq 0$). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $i = 1$ et $j = 2$. Alors

$$\begin{aligned} u &= k_1\ell_1 + \cdots + k_m\ell_m \\ &= k_1(\ell_1' - \alpha\ell_2) + k_2\ell_2 + \cdots + k_m\ell_m \\ &= k_1\ell_1' + (k_2 - \alpha k_1)\ell_2 + k_3\ell_3 + \cdots + k_m\ell_m \\ &= k_1\ell_1' + (k_2 - \alpha k_1)\ell_2' + k_3\ell_3' + \cdots + k_m\ell_m' \end{aligned}$$

qui est bien un élément de $\mathscr{L}(\ell_1', \ldots, \ell_m')$.

(b) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En permutant les lignes de la matrices A de type 2×1, nous obtenons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui n'appartient manifestement pas à $\mathscr{L}(A)$.

(c) Supposons que $\mathrm{rg}(A) = r$ et appelons $\widetilde{A}$ la matrice formée à partir d'une famille de r colonnes de A linéairement indépendantes. Soit $\widetilde{B}$ la matrice obtenue en effectuant sur les lignes de la matrice $\widetilde{A}$ l'unique opération élémentaire qui a donné B à partir de A. Les colonnes de $\widetilde{B}$ sont donc des colonnes de B. De l'équivalence des systèmes

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mathbb{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{B}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mathbb{O}, \qquad k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}\ ,$$

nous déduisons que la seule solution du système

$$\widetilde{B}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

est $k_1 = \cdots = k_r = 0$, car les colonnes de $\widetilde{A}$ constituent une famille libre. Donc celles de $\widetilde{B}$ constituent aussi une famille libre. Enfin, comme B possède r colonnes linéairement indépendantes, nous en déduisons que $\mathrm{rg}(B) \geq r$, donc $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$. Remarquons que la matrice A s'obtient à partir de B à l'aide d'une seule opération élémentaire. Nous pouvons donc intervertir les rôles de A et B et obtenir l'inégalité $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$, d'où l'égalité $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$.

6.40. Une forme échelonnée de la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & y & z \\ 0 & 4 & 2y - x & 2z - y \\ 0 & 0 & z - y - x & x - z - y \end{pmatrix}.$$

Pour que la matrice soit de rang 2, il faut qu'elle ait exactement deux pivots. Il faut donc que $z - y - x = 0$ et $x - z - y = 0$, d'où les conditions $y = 0$ et $x = z$.

6.45. Cette matrice n'est jamais de rang égal à 1, quelles que soient les valeurs de k et ℓ dans $\mathbb{R}$, car la première et la troisième colonne sont linéairement indépendantes. Son rang vaut 2 si et seulement si $k = \pm 1$ et $\ell = \pm\sqrt{3}$.

6.46. Si $\mathrm{rg}(A) = 2$, alors deux lignes de A sont linéairement indépendantes, donc un au moins des déterminants mentionnés est non nul.

6.47. Les b_i qui répondent à la question sont les composantes des vecteurs de

$$\mathscr{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\\5\end{pmatrix}\right).$$

Plus explicitement, une forme échelonnée de la matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & b_2 + 2b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & b_4 + 3b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & b_5 - 4b_1 + 3b_3 \end{pmatrix}.$$

Le système a donc une solution si et seulement si $b_1 = k$, $b_3 = \ell$, $b_2 = -2k + 3\ell$, $b_4 = -3k + 4\ell$, $b_5 = 4k - 3\ell$ avec k, ℓ des nombres.

6.48. (a) Notons $c_1, \ldots, c_5$ les colonnes de la matrice A du système. On remarque que $c_2 = c_1 - c_3$, $c_4 = -2c_1$, $c_5 = 2c_1 + c_3$ et que c_1, c_3 sont linéairement indépendants. On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et que la dimension de l'espace des solutions vaut $5 - 2 = 3$.

(b) Après résolution de ce système homogène, on trouve que les matrices-colonnes $(-1, 1, 1, 0, 0)$, $(2, 0, 0, 1, 0)$, $(-3, 1, 0, 0, 1)$ forment une base de W_0.

(c) On remarque que $(0, 0, 2, 0, 0)$ est une solution particulière. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$(0, 0, 2, 0, 0) + k_1(-1, 1, 1, 0, 0) + k_2(2, 0, 0, 1, 0) + k_3(-3, 1, 0, 0, 1)\,,$$

où k_1, k_2, k_3 sont des nombres.

6.49. (a) Comme un élément de l'ensemble des solutions de $Ax = 0$ s'écrit

$$x = r\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

une base est clairement

$$\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

(b) D'après le théorème p.48, la solution générale de $Ax = b$ est l'ensemble des x de la forme

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où k, ℓ sont des nombres. Géométriquement, ceci est le plan dans $\mathbb{R}^5$ passant par le point $(-1, 2, 4, -3, -2)$ et de directions $(-3, 1, 1, 0, 0)$, $(4, -1, 0, 1, 1)$.

6.50. (a) Une base est $\big((1, 2, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 4)\big)$.

(b) Une base est $\big((2, 1, 0, 3), (-2, 0, 5, -3), (0, 1, 0, 0)\big)$.

6.54. (a) Le rang de la matrice du système est 1, car toutes ses colonnes sont proportionnelles. Or, le rang de la matrice augmentée du système est 2. Le système n'a donc pas de solution.

(b) La matrice A du système est de rang 3 car ses trois lignes sont linéairement indépendantes, et il en est de même pour la matrice augmentée. Le système a donc au moins une solution. Le sous espace vectoriel W des solutions du système homogène $Ax = 0$ est de dimension 1 $(= 4 - 3)$. Le système considéré a une infinité de solutions, puisque la somme d'une solution particulière et d'un vecteur de W est aussi une solution du système initial.

(c) Puisque le second membre du système est égal à la troisième colonne de la matrice du système moins la deuxième, c'est un élément de l'espace des colonnes de cette matrice. Le rang de cette matrice est 3, car les trois dernières lignes sont linéairement indépendantes. Le système admet donc une seule solution.

6.55. Notons A la matrice de ce système homogène et ℓ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. On remarque facilement que $\ell_3 = -2\ell_1$, $\ell_4 = 3\ell_1$ et $\ell_2 = -2\ell_5$, et, de plus, que ℓ_1 et ℓ_5 sont linéairement indépendants. On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et que la dimension du sous-espace des solutions est $5 - 2 = 3$.

6.56. D'après l'exercice 6.32, il suffit de trouver des nombres $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\det\big(f_i(t_j)\big) \neq 0$. Posons $t_j = j - 1$ (i.e. $t_1 = 0, \ldots, t_n = n - 1$). Alors, d'après l'exercice 3.9,

$$\det\big(f_i(t_j)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & \ldots & e^{\lambda_n} \\ e^{2\lambda_1} & e^{2\lambda_2} & \ldots & e^{2\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{(n-1)\lambda_1} & e^{(n-1)\lambda_2} & \ldots & e^{(n-1)\lambda_n} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}) \,.$$

Par conséquent $\det\big(f_i(t_j)\big) \neq 0$, car les λ_i sont tous distincts.

6.57. Notons

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} a \cdot c^T + b \cdot d^T &= \left(a \cdot c_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a \cdot c_n\right) + \left(b \cdot d_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b \cdot d_n\right) \\ &= \left(a \cdot c_1 + bd_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, ac_n + bd_n\right). \end{aligned}$$

Si $a \cdot c^T + b \cdot d^T = \mathbb{O}$, alors $ac_k + bd_k = 0$ pour tout k, donc $c_k = d_k = 0$ pour tout k. On en déduit que $c = d = 0$.

6.58. Supposons que f, g et h sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire qu'il existe $(k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) + k_3 h(t) = 0\,, \qquad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

En dérivant cette expression, une, puis deux fois, on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} k_1 f'(t) & + & k_2 g'(t) & + & k_3 h'(t) & = & 0\,, \\ k_1 f''(t) & + & k_2 g''(t) & + & k_3 h''(t) & = & 0\,, \end{array} \quad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

Donc

$$k_1 \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \\ h''(t) \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbb{R}\,,$$

ce qui entraîne

$$\begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix} \equiv 0\,,$$

qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $\{f, g, h\}$ est libre.

6.59. Notons a_1 et a_2 les colonnes de A et x_1, x_2 les composantes de x. Le système $Ax = b$ s'écrit $x_1 a_1 + x_2 a_2 = b$.

(a) Dans ce cas, le système $A'x' = b$ s'écrit $x'_1 a_2 + x'_2 a_1 = b$, où x'_1 et x'_2 sont les composantes de x'. Les solutions x et x' vérifient donc $x'_1 = x_2$ et $x'_2 = x_1$.

(b) Dans ce cas, le système $A'x' = b$ s'écrit $3x'_1 a_1 + x'_2 a_2 = b$. Les solutions x et x' vérifient donc $3x'_1 = x_1$ et $x'_2 = x_2$.

(c) Dans ce cas, le système $A'x' = b$ s'écrit

$$x'_1 a_1 + x'_2(a_2 + 5a_1) = (x'_1 + 5x'_2)a_1 + x'_2 a_2 = b\,.$$

Les solutions x et x' vérifient donc $x'_1 + 5x'_2 = x_1$ et $x'_2 = x_2$, donc $x'_1 = x_1 - 5x_2$.

7. Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

7.1. (a) Cette opération est un produit scalaire. En effet, les propriétés de symétrie et de linéarité sont clairement vérifiées. Pour la positivité, en complétant les carrés, nous obtenons

$$a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 + 4a_1a_2 - 4a_2a_3 = (a_1 + 2a_2)^2 + (a_2 - 2a_3)^2 + a_3^2 \geq 0\,,$$

ce qui entraîne aussi que $a = 0$ si $\|a\| = 0$.

(b) Ce n'est pas un produit scalaire, car la propriété de positivité est en défaut : $(0,1,1) \neq (0,0,0)$ mais $\big\langle (0,1,1),(0,1,1)\big\rangle = 0$.

(c) C'est un produit scalaire. Les propriétés de symétrie et de linéarité sont clairement vérifiées. Pour la positivité, en complétant les carrés, nous obtenons

$$\begin{aligned} &8a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 + 4a_1a_2 - 4a_1a_3 + 4a_2a_3 \\ &\qquad = (a_1 + 2a_2)^2 + (a_2 + 2a_3)^2 + (2a_1 - a_3)^2 + 3a_1^2 \geq 0\,, \end{aligned}$$

ce qui entraîne aussi que $a = 0$ si $\|a\| = 0$.

7.2. (a) Cette opération est un produit scalaire. En effet, les propriétés de symétrie et de linéarité sont clairement vérifiées. Pour la positivité, en complétant les carrés, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_1^2 &+ 5a_2^2 + 3a_3^2 + 4a_1a_2 - 2a_1a_3 - 6a_2a_3 + a_4^2 \\ &= (a_1 + 2a_2 - a_3)^2 + a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_2a_3 + a_4^2 \\ &= (a_1 + 2a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 + a_3^2 + a_4^2 \\ &\geq 0\,, \end{aligned}$$

ce qui entraîne aussi que $A = \mathbb{O}$ si $\|A\| = 0$.

(b) Ce n'est pas un produit scalaire, car la propriété de positivité est en défaut : $I_2 \neq \mathbb{O}$ mais $\langle I_2, I_2\rangle = 0$.

(c) Ce n'est pas un produit scalaire, car la linéarité n'est pas vérifiée :

$$\langle I_2 + I_2, I_2\rangle = 16 \neq 8 = 4 + 4 = \langle I_2, I_2\rangle + \langle I_2, I_2\rangle\,,$$

ou encore $\langle 2I_2, I_2\rangle = 16 \neq 8 = 2\langle I_2, I_2\rangle$.

7.3. (a) Sachant que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, on applique la formule du produit scalaire et on obtient $\langle e_1, e_1\rangle = 1$, $\langle e_1, e_2\rangle = 2$, $\langle e_1, e_3\rangle = 0$, $\langle e_2, e_2\rangle = 5$, $\langle e_2, e_3\rangle = -2$ et $\langle e_3, e_3\rangle = 5$.

(b) La famille (e_1, e_2, e_3) étant une base de $\mathbb{R}^3$, un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$, où k_1, k_2, k_3 sont des nombres. Pour que la famille (e_1, v, e_3) soit orthogonale, il faut que $\langle e_1, v\rangle = k_1 + 2k_2 = 0$, $\langle e_3, v\rangle = -2k_2 + 5k_3 = 0$ et $\langle e_1, e_3\rangle = 0$, ce qui est bien le cas. On en déduit que $v = k(-10e_1 + 5e_2 + 2e_3)$, où k est un nombre quelconque.

7.4. (a) Sachant que

$$E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on applique la formule du produit scalaire et on obtient $\langle E^{11}, E^{11}\rangle = 1$, $\langle E^{11}, E^{12}\rangle = 2$, $\langle E^{11}, E^{21}\rangle = -1$, $\langle E^{11}, E^{22}\rangle = 0$, $\langle E^{12}, E^{12}\rangle = 5$, $\langle E^{12}, E^{21}\rangle = -3$, $\langle E^{12}, E^{22}\rangle = 0$, $\langle E^{21}, E^{21}\rangle = 3$, $\langle E^{21}, E^{22}\rangle = 0$ et $\langle E^{22}, E^{22}\rangle = 1$.

(b) Une matrice M dans $\mathcal{M}_2$ s'écrit $M = k_1E^{11} + k_2E^{12} + k_3E^{21} + k_4E^{22}$, où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des nombres. Comme la famille $(E^{11}, E^{12} + 2E^{21}, E^{22})$ est orthogonale, pour que la famille $(E^{11}, E^{12} + 2E^{21}, M, E^{22})$ soit orthogonale, il suffit que $\langle E^{11}, M\rangle = k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$, $\langle E^{12}, M\rangle + 2\langle E^{21}, M\rangle = 2k_1 + 5k_2 - 3k_3 - 2k_1 - 6k_2 + 6k_3 = -k_2 + 3k_3 = 0$ et $\langle E^{22}, M\rangle = k_4 = 0$. On en déduit que $M = k(-5E^{11} + 3E^{12} + E^{21})$, où k est un nombre quelconque.

7.5. Soit p, q, r dans $\mathcal{P}_2$ et ℓ, m dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle p, q\rangle &= p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) \\ &= q(0)p(0) + q'(0)p'(0) + q''(0)p''(0) = \langle q, p\rangle\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \ell p + mq, r\rangle &= \sum_{k=0}^{2} (\ell p + mq)^{(k)}(0)r^{(k)}(0) \\ &= \ell\left(\sum_{k=0}^{2} p^{(k)}(0)r^{(k)}(0)\right) + m\left(\sum_{k=0}^{2} q^{(k)}(0)r^{(k)}(0)\right) \\ &= \ell\langle p, r\rangle + m\langle q, r\rangle\,,\end{aligned}$$

et

$$\langle p, p\rangle = \sum_{k=0}^{2} \left(p^{(k)}(0)\right)^2 \geq 0\,.$$

Si $\|p\|^2 = 0$, alors $\big(p(0)\big)^2 + \big(p'(0)\big)^2 + \big(p''(0)\big)^2 = 0$, d'où $p(0) = p'(0) = p''(0) = 0$. Ainsi, $p \equiv 0$, car si $p(t) = k_0 + k_1t + k_2t^2$, alors $p(0) = k_0$, $p'(0) = k_1$ et $p''(0) = 2k_2$.

7.6. Les trois vecteurs proposés sont orthogonaux pour le produit scalaire euclidien. Ils constituent donc une famille libre.

7.7. Un produit scalaire possible est

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4\,.$$

7.8. Non. L'inégalité est fausse car, par exemple, avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_n = 0$, le membre de gauche vaut 4 et le membre de droite vaut 2. L'inégalité correcte est $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)$, qui n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien) au carré, appliquée aux vecteurs $(1, 1, \ldots, 1)$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^2 &= \Big|\big\langle(1, 1, \ldots, 1), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big\rangle\Big|^2\\ &\leq \big\|(1, 1, \ldots, 1)\big\|^2\big\|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big\|^2 = n(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)\,.\end{aligned}$$

7.13. (a) En considérant $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien, nous avons :

$$\begin{aligned}a\cos\gamma + b\sin\gamma &= \big\langle(a, b), (\cos\gamma, \sin\gamma)\big\rangle\\ &\leq \big\|(a, b)\big\| \cdot \big\|(\cos\gamma, \sin\gamma)\big\| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.\end{aligned}$$

(b) Posons $f(t) = \sqrt{t}$ et $g(t) = e^{-t/2}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sqrt{t}\,e^{-t/2}\,dt\right|^2 &= \left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right|^2 = \big|\langle f, g\rangle\big|^2\\ &\leq \|f\|^2\|g\|^2 = \int_0^1 t\,dt \int_0^1 e^{-t}\,dt = \frac{e-1}{2e}\,.\end{aligned}$$

De plus, comme $\sqrt{t}$ et $e^{-t/2}$ sont linéairement indépendantes, l'inégalité est stricte.

7.14. (a) Soit $f(t) = 1$ et $g(t) = \sqrt{\ln t}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left|\int_1^e \sqrt{\ln t}\,dt\right|^2 &= \left|\int_1^e f(t)g(t)\,dt\right|^2 = \big|\langle f, g\rangle\big|^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2\\ &= \int_1^e dt \int_1^e (\ln t)\,dt = (e-1)(t\,\ln t - t)\Big|_{x=1}^{x=e} = (e-1) < 2\,.\end{aligned}$$

(b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{t\sin t}\,dt &= \big\langle\sqrt{t}, \sqrt{\sin t}\big\rangle\\ &< \big\|\sqrt{t}\big\|\big\|\sqrt{\sin t}\big\| = \left(\textstyle\int_0^\pi t\,dt\right)^{1/2}\left(\textstyle\int_0^\pi \sin t\,dt\right)^{1/2} = \pi\,.\end{aligned}$$

L'inégalité est stricte car $\sqrt{t}$ et $\sqrt{\sin t}$ sont linéairement indépendantes.

7.15. (a) On considère l'opération qui, à chaque couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^3$, associe le nombre

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 .$$

On vérifie facilement que cette opération définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ et que l'inégalité cherchée est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (au carré) pour ce produit scalaire appliquée à x et y.

(b) De l'exercice 7.5, nous savons que l'opération

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

définit un produit scalaire dans $\mathcal{P}_2$. L'inégalité proposée est donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz (au carré) pour ce produit scalaire appliquée aux polynômes p et q.

(c) On peut aussi voir l'inégalité proposée en (b) comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz (au carré) pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ appliquée à $x = \big(p(0), p'(0), p''(0)\big)$ et $y = \big(q(0), q'(0), q''(0)\big)$. Cette inégalité est donc valable pour tous polynômes p et q.

(d) Dans (a), l'égalité n'a lieu que si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire s'il existe un nombre $k \neq 0$ tel que $x = ky$.
Dans (b), l'égalité n'a lieu que si les polynômes p et q sont linéairement dépendants, c'est-à-dire s'il existe un nombre $k \neq 0$ tel que $p = kq$.
Dans (c), l'égalité n'a lieu que si

$$x = \big(p(0), p'(0), p''(0)\big) \quad \text{et} \quad y = \big(q(0), q'(0), q''(0)\big)$$

sont linéairement dépendants, donc si et seulement si la partie de degré 2 de p est proportionnelle à la partie de degré 2 de q.

7.16. (a) $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

(b) Soit u le vecteur donné. Posons $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ et calculons d'abord $\|v_i\|^2$ avec $i = 1, 2, 3$: $\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 = 9$. Ainsi :

(1) $[u]_{\mathcal{B}} = \left(\dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}, \dfrac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}, \dfrac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2}\right) = (1, 1, -1)$;

(2) $[u]_{\mathcal{B}} = \left(-3, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

7.17. (a) $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

(b) Soit A la matrice donnée. Posons $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ et calculons d'abord $\|v_i\|^2$ avec $i = 1, \ldots, 4$: $\|v_1\|^2 = 7$, $\|v_2\|^2 = 21$, $\|v_3\|^2 = 6$, $\|v_4\|^2 = 2$. Ainsi,

$$[A]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{\langle A, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}, \ldots, \frac{\langle A, v_4\rangle}{\|v_4\|^2}\right) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{11}{63}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{2}\right).$$

7.18. Comme $u_4 = u_1 + u_2 - u_3$, $\mathscr{L}\big(u_1, u_2, u_3, u_4\big) = \mathscr{L}\big(u_1, u_2, u_3\big)$. Orthogonalisons (u_1, u_2, u_3) par le procédé de Gram-Schmidt :

$$w_1 = u_1 = (1, 0, 2, 0)\,,$$

$$w_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{w_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 = \left(-\frac{2}{5}\,, 0\,, \frac{1}{5}\,, -1\right),$$

$$w_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{\mathscr{L}(w_1, w_2)} u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2 = (-2, 1, 1, 1)\,,$$

et finalement,

$$\widetilde{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\, w_1\,, \qquad \widetilde{u}_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}\, w_2 \quad \text{et} \quad \widetilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}\, w_3\,.$$

Ainsi,

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}, 0, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{5}{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

est la base cherchée.

7.19. Il est évident que $\big(u_1, u_2, u_3\big)$ est une famille libre. On orthogonalise (u_1, u_2, u_3) par le procédé de Gram-Schmidt :

$$w_1 = u_1 = (1, 0, 0)\,,$$

$$w_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{w_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 = (-2, 1, 0)\,,$$

$$w_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{\mathscr{L}(w_1, w_2)} u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2 = (-4, 2, 1)\,.$$

Puisque $\|w_1\| = \|w_2\| = \|w_3\| = 1$, $\widetilde{u}_1 = w_1$, $\widetilde{u}_2 = w_2$ et $\widetilde{u}_3 = w_3$. Ainsi $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3) = \big((1, 0, 0), (-2, 1, 0), (-4, 2, 1)\big)$ est la base cherchée.

7.20. Pour résoudre le système, on met la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sous forme échelonnée simplifiée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la solution

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = \sqrt{3}k_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, k_2\,, \quad x_3 = k_1 \quad \text{et} \quad x_4 = k_2\,, \quad k_1, k_2 \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

Autrement dit, toute solution du système est de la forme $k_1\big(0,\sqrt{3},1,0\big) + k_2\big(0,2/\sqrt{3},0,1\big)$, k_1, k_2 dans $\mathbb{R}$. Il s'agit donc de trouver la projection orthogonale de b sur $\mathscr{L}\big((0,\sqrt{3},1,0),(0,2/\sqrt{3},0,1)\big) = \mathscr{L}(e_1,e_2)$. Pour ce faire, il suffit d'orthonormaliser (e_1,e_2) par le procédé de Gram-Schmidt, qui donne

$$u_1 = \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right) \qquad \text{et} \qquad u_2 = \left(0,\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

puis d'appliquer la formule $\operatorname{proj}_W b = \langle b,u_1\rangle u_1 + \langle b,u_2\rangle u_2$. On obtient finalement

$$\operatorname{proj}_W b = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right).$$

Alternative. Voir la solution de l'exercice 7.26(b).

7.21. (a) Si $k_1u_1 + \cdots + k_nu_n = 0$, alors

$$k_i = \langle k_1u_1 + \cdots + k_nu_n, v_i\rangle = 0\,.$$

(b) Comme $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre et que la dimension de V est n, la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de V. Si x est dans V, alors $x = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$ et on voit que $\langle x,v_i\rangle = x_i$.

(c) Si la base $(u_1,\ldots,u_n)$ est orthonormale, alors

$$v_i = \langle v_i,u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle v_i,u_n\rangle u_n = \langle v_i,u_i\rangle u_i = u_i\,.$$

7.26. (a) Il faut résoudre le système linéaire $A^TA\cdot x = A^T\cdot b$. Or,

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^T\cdot b = \begin{pmatrix} 27\\ -33\end{pmatrix},$$

ce qui donne $x_1 = 9/2$ et $x_2 = -3$ comme solution au sens des moindres carrés de $A\cdot x = b$. En posant $W = \mathscr{L}\big(\{a_1,a_2\}\big)$, où $A = (a_1 \,\vdots\, a_2)$, nous avons

$$\operatorname{proj}_W b = A\cdot x = A\begin{pmatrix} 9/2\\ -3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9\\ -24\\ 15\end{pmatrix}.$$

(b) En cherchant une base de l'ensemble des solutions du système donné, on forme la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 2\\ 2 & 7/3\end{pmatrix} \ \text{ et } \ A^T\cdot b = \begin{pmatrix} 6\\ 3\end{pmatrix}.$$

On calcule la solution au sens des moindres carrés de $A\cdot x = b$, qui est

$$x = \begin{pmatrix} 3/2\\ 0\end{pmatrix},$$

et enfin $\operatorname{proj}_W b = A\cdot x = (0,\, 3\sqrt{3}/2,\, 3/2,\, 0)$.

7.27. Soit A la matrice du système. Alors

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ce qui donne le système $A^T A \cdot x = A^T \cdot b$ à résoudre. La solution de ce dernier système est

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7.28. Sachant que $A^T A = I$ et $B^T B = I$, on a :

(a) $(A^{-1})(A^{-1})^T = (A^{-1})(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I$;

(b) $(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I$;

(c) $|A|^2 = |A||A| = |A||A^T| = |AA^T| = |I| = 1$.

7.29. (1) Si A est orthogonale et symétrique, alors $AA = AA^T = I$, donc A est involutive.

(2) Si A est symétrique et involutive, alors $AA^T = AA = I$, donc A est orthogonale.

(3) Si A est orthogonale et involutive, alors $A = AI = AAA^T = A^2 A^T = A^T$, donc A est symétrique.

7.30. En effectuant le produit $A^T A$, qui doit être égal à la matrice identité si A est orthogonale, nous déduisons les valeurs requises de α, β, γ et δ suivantes : $\alpha = 4$, $\beta = \gamma = 0$ et $\delta = \pm 5$.

7.31. (a) $|A| = |\alpha U| = \alpha^n |U| = \pm \alpha^n$.

(b) D'après le calcul précédent, nous voyons que A est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.

(c) Si $\alpha \neq 0$, alors $A(\alpha^{-1} U^T) = (\alpha U)(\alpha^{-1} U^T) = UU^T = I_n$, donc $\alpha^{-1} U^T$ est l'inverse de A.

7.32. (a) On cherche à calculer la projection de t^3 sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1, t, t^2)$. Une possibilité est de chercher k_1, k_2 et k_3 tels que $q(t) = t^3 - (k_1 + k_2 t + k_3 t^2)$ soit orthogonal à $1, t, t^2$:

$$\left.\begin{array}{rcccl} 0 & = & \langle q\,, 1 \rangle & = & \dfrac{-2}{3} - k_3 - 2k_1 \\[2ex] 0 & = & \langle q\,, t \rangle & = & \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3} k_2 \\[2ex] 0 & = & \langle q\,, t^2 \rangle & = & \dfrac{-2}{5} k_3 - \dfrac{2}{3} k_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow k_1 = k_3 = 0 \text{ et } k_2 = \frac{3}{5}.$$

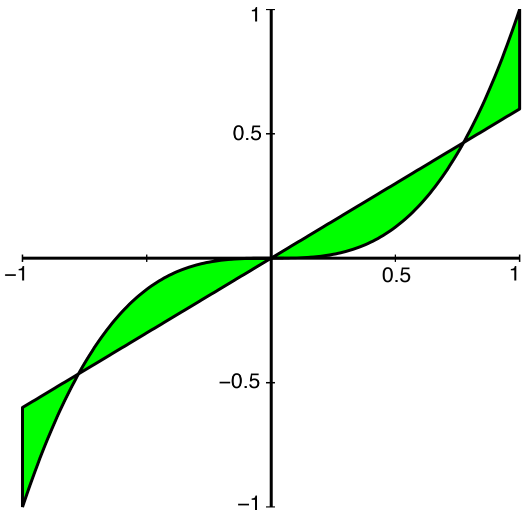
La meilleure approximation de $p(t)$ par des polynômes de degré ≤ 2 est donc $s(t) = (3/5)t$. Une autre possibilité est d'orthogonaliser la base $(1, t, t^2)$ au moyen du procédé de Gram-Schmidt, puis d'effectuer la projection orthogonale de t^3 sur $W = \mathscr{L}(1, t, t^2)$. Le procédé de Gram-Schmidt donne la base orthonormée

$$(e_1', e_2', e_3') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, t, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\, t^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right).$$

Ainsi, la projection orthogonale est

$$\mathrm{proj}_W(t^3) = \underbrace{\langle t^3, e_1' \rangle}_{0} e_1' + \langle t^3, e_2' \rangle e_2' + \underbrace{\langle t^3, e_3' \rangle}_{0} e_3' = \frac{3}{2}\, t \int_{-1}^{1} t^4 \, dt = \frac{3}{5}\, t\,.$$

(b) Les graphes de $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto \frac{3}{5}t$ sont donnés dans la figure ci-dessous. Remarquons que l'erreur commise en approximant t^3 par un polynôme $r(t)$ de degré ≤ 2 est $\|t^3 - r(t)\|$. Cette erreur est minimale avec $r(t) = (3/5)t$ et vérifie $\|t^3 - (3/5)t\|^2 < A$, où A est l'aire en gris sur la figure.



7.33. La meilleure approximation est

$$\mathrm{proj}_g f = \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}\, g = \frac{\pi}{\pi^3/3}\, t = \frac{3}{\pi^2}\, t\,.$$

7.38. (a) On vérifie sans peine que cette matrice est orthogonale. Son inverse est donc sa transposée.

(b) La matrice n'est pas orthogonale car le produit scalaire de la première colonne avec la dernière n'est pas nul.

7.39. (a) Comme les lignes de A sont orthogonales deux à deux et non nulles, elles sont linéairement indépendantes et donc A est inversible d'après les théorèmes p.47 et p.33.

(b) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, soit ℓ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. Alors

$$AA^T = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{pmatrix} \cdot (\ell_1^T\, \ell_2^T\, \ell_3^T\, \ell_4^T) = \begin{pmatrix} ||\ell_1||^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ||\ell_2||^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ||\ell_3||^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ||\ell_4||^2 \end{pmatrix} = \Delta\,,$$

d'où $A(A^T\Delta^{-1}) = I_4$. La matrice A est donc inversible et son inverse est

$$A^{-1} = A^T\Delta^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 12 \\ -2 & -6 & 6 & 18 \\ 2 & -6 & -6 & 18 \\ 3 & -9 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

(c) Posons $D = \operatorname{diag}\big(\|\ell_1\|, \ldots, \|\ell_4\|\big)$. La matrice D est inversible d'après (a), et vérifie $D^2 = \Delta$. Comme $AA^T = \Delta = D^2$, on a $D^{-1}AA^TD^{-1} = I = (D^{-1}A)(D^{-1}A)^T$, car D est diagonale. La matrice $U = D^{-1}A$ est donc orthogonale et $A = DU$.

7.40. Posons $[p]_{\mathcal{B}} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Alors $p(t) = 2 - t^2 + 3t^3 = k_1(-1+t) + k_2(1+t) + k_3t^2 + k_4t^3$. Ainsi, k_1, k_2, k_3, k_4 est la solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -k_1 & + & k_2 & & & & & = & 2 \\ k_1 & + & k_2 & & & & & = & 0 \\ & & & & k_3 & & & = & -1 \\ & & & & & & k_4 & = & 3\,. \end{array}\right.$$

On obtient $[p]_{\mathcal{B}} = (-1, 1, -1, 3)$.

7.41. (a) Posons $[A]_{\mathcal{B}} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Alors

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, k_1, k_2, k_3, k_4 est la solution d'un système linéaire. On obtient $[A]_{\mathcal{B}} = (-1, 3, 1, 0)$.

(b) On voit facilement que :

$$[E^{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [E^{12}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[E^{21}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [E^{22}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.42. (a) Au préalable, constatons que les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées pour le produit scalaire euclidien. Par définition,

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left([u_1]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, [u_2]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, [u_3]_{\mathcal{B}'}\right).$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est orthonormée,

$$[u_i]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} u_i \cdot v_1 \\ u_i \cdot v_2 \\ u_i \cdot v_3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & \sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ -17/3\sqrt{5} & 10/3\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 4/3 & 4/3 & -7/3 \end{pmatrix}.$$

Comme les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est orthogonale et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1} = (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^T$.

(b) Comme en (a),

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w \cdot u_1 \\ w \cdot u_2 \\ w \cdot u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$[w]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [w]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11/\sqrt{5} \\ -11/3\sqrt{5} \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$[w]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} w \cdot v_1 \\ w \cdot v_2 \\ w \cdot v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11/\sqrt{5} \\ -11/3\sqrt{5} \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

7.43. (a) Posons $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et

$$u = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont les composantes de u dans la base $\mathcal{B}$ qu'on détermine en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

On obtient $k_4 = u_4$, $k_3 = u_3 - u_4$, $k_2 = u_2 - u_3$ et $k_1 = u_1 - u_2$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a bien

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

De façon analogue, on trouve

$$A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On déduit de (a) que

$$[u]_{\mathcal{B}'} = A'u = A'A^{-1}[u]_{\mathcal{B}}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} C = A'A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Si $C = \big(c_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, c_4\big)$ et $u = e_j$, alors

$$\begin{aligned} [e_j]_{\mathcal{B}'} &= \big(c_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, c_4\big) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ position } j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ &= c_j\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ colonne de C est la matrice-colonne formée des composantes de e_j dans la base $\mathcal{B}'$, donc $C = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

7.44. Posons $z = \langle a, b\rangle = [a]_{\mathcal{B}}^T \cdot [b]_{\mathcal{B}} = \langle b, a\rangle = [b]_{\mathcal{B}}^T \cdot [a]_{\mathcal{B}} \neq 0$ et $s = 1/z$.

(a) $A^2 = I_n^2 - 4s[a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T + 4s^2[a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T \cdot [a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T = I_n^2 - 4s[a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T + 4s^2[a]_{\mathcal{B}} \cdot z[b]_{\mathcal{B}}^T = I_n$.

(b) Soit k dans $\mathbb{R}$ tel que $k \neq 0$ et $a = kb$. Posons $t = 2/\|b\|^2$. Alors $A^T = \left(I_n - t[b]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T\right)^T = I_n - t[b]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T = A$, donc A est symétrique. Comme A est involutive d'après (a) (cf. exercice 7.29), A est orthogonale.

(c) A est involutive d'après (a). Si de plus, A est orthogonale, alors A est symétrique (cf. exercice 7.29), ce qui implique que $[b]_{\mathcal{B}} \cdot [a]_{\mathcal{B}}^T = [a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T$, d'où $\left([b]_{\mathcal{B}} \cdot [a]_{\mathcal{B}}^T\right) \cdot [a]_{\mathcal{B}} = \left([a]_{\mathcal{B}} \cdot [b]_{\mathcal{B}}^T\right) \cdot [a]_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire $b\|a\|^2 = az$ et $a = s\|a\|^2 b = \lambda b$, où $\lambda = s\|a\|^2$.

7.45. (a) Comme les colonnes de A sont deux à deux orthogonales, elles forment une famille libre de n vecteurs. Il en résulte que le rang de A vaut n. Ainsi, on a $n \leq \operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A \,\vdots\, b) \leq n$ et le système a donc une solution.

(b) Le système $Ax = b$ possède exactement une solution, qui est $x = A^{-1}b$ (A étant inversible par (a)).

7.46. (a) Soit $A = (a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n)$ une matrice inversible. Alors les vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ sont linéairement indépendants et, d'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout j dans $\{1, \ldots, n\}$, $(u_1, \ldots, u_j)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $a_1, \ldots, a_j$. Par conséquent, pour chaque j dans $\{1, \ldots, n\}$, il existe des nombres réels $t_{1j}, \ldots, t_{jj}$ tels que $a_j = t_{1j}u_1 + \cdots + t_{jj}u_j$. Il résulte directement de la définition du produit matriciel que $A = UT$, avec $U = (u_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, u_n)$ orthogonale et

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

(b) A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, on trouve

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -\sqrt{14} & 1 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{14} & -4 \\ \sqrt{3} & \sqrt{14} & 5 \end{pmatrix},$$

et

$$T = U^{-1}A = U^TA = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 14\sqrt{3} & 14\sqrt{3} & 10\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{14} & 4\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

7.51. (a) $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$, $H_3(t) = 8t^3 - 12\,t$, $H_4(t) = 16\,t^4 - 48t^2 + 12$, $H_5(t) = 32\,t^5 - 160\,t^3 + 120\,t$.

(b) Soit m et n deux entiers non négatifs et distincts. Il faut montrer que $\langle H_m, H_n\rangle = 0$, c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}\,dt = 0\,.$$

Or H_m vérifie

$$H_m''(t) - 2tH_m'(t) + 2mH_m(t) = 0\,.$$

En multipliant cette égalité par $H_n(t)$, on obtient

$$H_m''(t)H_n(t) - 2tH_m'(t)H_n(t) + 2mH_m(t)H_n(t) = 0\,. \tag{7.1}$$

De même, H_n vérifie

$$H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0\,.$$

En multipliant cette égalité par $H_m(t)$, on obtient

$$H_n''(t)H_m(t) - 2tH_n'(t)H_m(t) + 2nH_n(t)H_m(t) = 0\,. \tag{7.2}$$

De (7.1) et (7.2), on déduit que

$$\begin{aligned} 2(n-m)H_m(t)H_n(t) &= H_m''(t)H_n(t) - H_n''(t)H_m(t) \\ &\quad -2t\big(H_m'(t)H_n(t) - H_n'(t)H_m(t)\big)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2(n-m)\langle H_m, H_n\rangle &= 2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(H_m''(t)H_n(t) - H_n''(t)H_m(t)\big)e^{-t^2}\,dt \\ &\quad -2\int_{-\infty}^{\infty} t\big(H_m'(t)H_n(t) - H_n'(t)H_m(t)\big)e^{-t^2}\,dt\,. \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans la dernière intégrale, on voit que celle-ci est égale à

$$\begin{aligned} &\Big[\big(H_m'(t)H_n(t) - H_n'(t)H_m(t)\big)e^{-t^2}\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} \\ &\qquad - \int_{-\infty}^{\infty}\big(H_m''(t)H_n(t) - H_n''(t)H_m(t)\big)e^{-t^2}\,dt\,. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$2(n-m)\langle H_m, H_n\rangle = \Big[\big(H_m'(t)H_n(t) - H_n'(t)H_m(t)\big)e^{-t^2}\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 0\,,$$

car pour tout polynôme p,

$$\lim_{t\to\pm\infty} p(t)e^{-t^2} = 0\,.$$

Ceci montre que $\langle H_m, H_n\rangle = 0$.

8. Valeurs et vecteurs propres

8.1. (a) Le polynôme caractéristique de A est $(2-\lambda)(3+\lambda)^2$, celui de B est $(-2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+10)$.

(b) Les valeurs propres de A sont 2 et -3. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres 2 et -3 sont respectivement

$$k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad k\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \ell\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \ell\neq 0\,.$$

L'unique valeur propre de B est -2 et les vecteurs propres qui lui sont associés sont de la forme

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad k\neq 0\,.$$

8.2. Notons L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $A-7I_5$, $i=1,\ldots,5$. On remarque que $L_1=-2L_2=(2/3)L_5$, donc $\det(A-7I_5)=0$ et 7 est bien une valeur propre de A. En remarquant aussi que $L_3=(5/2)L_4$ et que L_1 et L_3 sont linéairement indépendantes, on déduit que le rang de $A-7I_5$ est 2 et que la dimension du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 7 est $5-2=3$.

8.3. (a) $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^2(-4-\lambda)$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et -4.

(b) Le rang de $A-I_3$ est 1 et la dimension du sous-espace des solutions de $(A-I_3)x=0$ est 2. Le rang de $A+4I_3$ est 2 et la dimension cherchée est 1.

8.4. (a) On sait que A est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$. Or, $\det(A)=\det(A-0I)$ et $\det(A-0I)\neq 0$ si et seulement si $\lambda=0$ n'est pas une valeur propre de A.

(b) Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $x\neq 0$ tel que $Ax=\lambda x$. Comme A est inversible, $x=\lambda A^{-1}x$, et puisque $\lambda\neq 0$ d'après (a), $A^{-1}x=\lambda^{-1}x$ et λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

(c) Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé à λ. Alors

$$A^kx=A^{k-1}Ax=A^{k-1}\lambda x=\lambda A^{k-2}Ax=\lambda^2A^{k-2}x=\cdots=\lambda^kx\,.$$

8.5. (a) Les solutions de l'équation caractéristique

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6/5 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ -5 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda^2) = 0$$

sont les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

(b) Pour trouver les bases cherchées, on résout les trois systèmes linéaires $(A - \lambda_i I)x = 0$ avec $i = 1,2,3$, et on obtient respectivement

$$\left(v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right), \quad \left(v_2 = \begin{pmatrix} -2+4\sqrt{2} \\ -5+5\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}\right), \quad \left(v_3 = \begin{pmatrix} -2-4\sqrt{2} \\ -5-5\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Oui, la matrice A n'est pas inversible, car $\lambda = 0$ est une valeur propre de A, donc $\det(A) = 0$.

(d) Si x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, il vérifie $Ax = \lambda x$, donc $A^2 x = \lambda^2 x$ et λ^2 est une valeur propre de A^2 associée au même vecteur propre x. Les valeurs propres de A^2 sont donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$, cette dernière étant de multiplicité 2.

(e) D'après (d), (v_1) est une base du sous-espace associé à λ_1 et (v_2, v_3) une base du sous-espace associé à λ_2, où v_1, v_2, v_3 sont les vecteurs trouvés en (b).

8.6. (a) On calcule le polynôme caractéristique

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)(2-\lambda)\,,$$

ce qui donne les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 2$.

(b) Les bases cherchées sont obtenues en résolvant les trois systèmes linéaires $(B - \lambda_i I)x = 0$, $i = 1,2,3$. Les bases des sous-espaces propres correspondant respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 sont

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \left(e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \left(e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Comme $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de B, $\det(B) \neq 0$. La matrice B est donc inversible.

(d) D'après l'exercice 8.4 (b), si λ est une valeur propre de B alors λ^{-1} est une valeur propre de B^{-1}. Les valeurs propres de B^{-1} sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3^{-1} = 1/2$.

(e) D'après l'exercice 8.4 (b), si x est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, alors il est un vecteur propre de B^{-1} associé à la valeur propre λ^{-1}. On déduit donc de (b) que (e_1, e_2) est une base du sous-espace associé à λ_1, (e_3) à λ_2 et (e_4) à λ_3^{-1}, où e_1, e_2, e_3, e_4 sont les vecteurs trouvés en (b).

8.7. Par hypothèse, $B = P^{-1}AP$, donc le polynôme caractéristique de B est

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I_n P) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P) \\ &= \det\big(P^{-1}(A - \lambda I_n)P\big) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n)\,,\end{aligned}$$

qui est le polynôme caractéristique de A.

8.8. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale, qui sont 1, π, 0 et 1/3. D'après l'exercice 8.4(c), les valeurs propres de A^9 sont 1, π^9, 0 et 3^{-9}.

8.9. (a) D'après l'exercice 8.3, les racines du polynôme caractéristique de A sont réelles et la dimension de chaque sous-espace $S(\lambda)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ, donc A est diagonalisable.

(b) D'après l'exercice 8.3, les valeurs propres de A sont 1 et -4. Des bases des sous-espaces $S(1)$ et $S(-4)$ sont respectivement

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on a

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

8.10. (a) L'équation

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2(6 - \lambda) + \lambda(k + \ell - 11) - 3k - \ell + 6 = 0$$

indique que $\lambda = 0$ est une racine double si et seulement si $k + \ell - 11 = 3k + \ell - 6 = 0$, autrement dit, si $k = -5/2$ et $\ell = 27/2$.

(b) Pour les valeurs de k et ℓ trouvées, le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 27/2 & 3 \end{pmatrix}$$

est 2. Ainsi, d'après le théorème du rang, la dimension de $S(0)$ vaut $3 - 2 = 1$. A n'est donc pas diagonalisable.

8.11. (a) De l'égalité $P^{-1}AP = D$, on déduit que $A = PDP^{-1}$. De plus,

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

et si $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$, alors

$$A^n = AA^{n-1} = PDP^{-1}PD^{n-1}P^{-1} = PD^nP^{-1}\,.$$

(b) Les valeurs propres de A sont 1 (double) et 1/2, des bases des sous-espaces propres $S(1)$ et $S(1/2)$ sont respectivement

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$$

et $A = PDP^{-1}$. Ainsi,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-1}(1-2^{-n}) & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^{-1}(1-2^{-n}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

8.12. (a) On calcule le polynôme caractéristique

$$\det(P-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\big(\lambda-(1-p-q)\big)\,,$$

ce qui donne les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-p-q$.

(b) Si $p+q \neq 0$, alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et P est diagonalisable, sinon, P est déjà diagonale.

(c) Si $p+q \neq 0$, les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et $1-p-q$ sont

$$k\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ell\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k \text{ et } \ell \text{ non nuls}.$$

Donc $Q^{-1}PQ = D$, où

$$Q = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} \ \text{et} \ Q^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}.$$

(d) De l'égalité $P^k = QD^kQ^{-1}$, on déduit que $\lim_{k\to\infty} P^k$ existe si et seulement si $\lim_{k\to\infty} D^k$ existe. Il suffit donc d'examiner l'existence de $\lim_{k\to\infty}(1-p-q)^k$, car $D^k = \operatorname{diag}\big(1,(1-p-q)^k\big)$. L'hypothèse $0 \le p+q \le 2$ entraîne les inégalités $-1 \le 1-p-q \le 1$, qui permettent de conclure que la limite existe si et seulement si $-1 \ne 1-p-q$, c'est-à-dire $p+q \ne 2$.

(e) Si $0 < p+q < 2$, alors $\lim_{k\to\infty}(1-p-q)^k = 0$ et

$$\lim_{k\to\infty} P^k = Q\cdot \operatorname{diag}(1,0)\cdot Q^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}.$$

Si $p+q=0$, $\lim_{k\to\infty} P^k = I_2$.

8.13. Pour calculer A^n, on va diagonaliser A (cf. la solution de l'exercice 8.11(a)). Le polynôme caractéristique de A étant λ^2-25, ses valeurs propres sont -5 et 5, les vecteurs propres associés respectifs sont

$$k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ell\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k \text{ et } \ell \text{ non nuls},$$

d'où

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^A &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{-5}+2e^5 & -6(e^{-5}-e^5) \\ -e^{-5}+e^5 & 2e^{-5}+3e^5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.18. (a) A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc $-1/2$ et -1, chacune étant de multiplicité algébrique égale à 2 : il suffit donc d'examiner les dimensions des sous-espaces propres associés $S(-1/2)$ et $S(-1)$. Après résolution des systèmes homogènes respectifs $\big(A+(1/2)I\big)x = 0$ et $(A+I)x=0$, nous obtenons, pour chacun des sous-espaces propres $S(-1/2)$ et $S(-1)$, une base formée de deux vecteurs, ce qui prouve que A est diagonalisable. Une matrice qui diagonalise A est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les deux premières colonnes sont une base des solutions du premier système mentionné et les deux dernières une base des solutions du deuxième système. De plus, $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-1/2,-1/2,-1,-1)$.

(b) Nous remarquons à nouveau que A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc $-1/2$ et -1. Cette fois, les dimensions respectives de $S(-1/2)$ et $S(-1)$ sont 2 et 1. Puisque A n'a pas quatre vecteurs propres linéairement indépendants, A n'est pas diagonalisable.

8.19. Les valeurs propres de A sont 2 (de multiplicité 3) et -1. Des vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 2 sont $(0,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(-1/2,1,0,0)$ et un vecteur propre associé à la valeur propre -1 est $(-1,-1/2,1,0)$. Puisque A est symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable à l'aide de la matrice P dont les colonnes s'obtiennent en orthogonalisant les vecteurs propres trouvés par le procédé de Gram-Schmidt. D'où

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/3 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2/3 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Remarquer l'étape supplémentaire, par rapport à la diagonalisation, pour rendre P orthogonale).

8.20. (a) La matrice $I_n - vv^T$ est orthogonalement diagonalisable car elle est symétrique. En effet, $(I_n - vv^T)^T = I_n - (vv^T)^T = I_n - vv^T$.

(b) Le vecteur v vérifie $(I_n - vv^T)v = v - vv^Tv = v(1 - v^Tv) = v\big(1 - \|v\|^2\big) = \big(1 - \|v\|^2\big)v$. C'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - \|v\|^2$.

(c) Si $v^Tw = w \cdot v = 0$, alors $(I_n - vv^T)w = w - vv^Tw = w$. Donc w est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

(d) D'après (b), $v = (1,0,1)$ est un vecteur propre de $I_3 - vv^T$ associé à la valeur propre -1. Tout vecteur orthogonal à v est de la forme $k(1,0,-1) + \ell(0,1,0)$, donc une base orthogonale du sous-espace propre $S(1)$ associé à la valeur propre 1 est $\big((1,0,-1),(0,1,0)\big)$, car la dimension de $S(1)$ ne peut excéder 2. Pour obtenir la matrice P, il suffit donc de normaliser ces trois derniers vecteurs et on obtient

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.21. (a) Le polynôme caractéristique de A est $(-\lambda)(\lambda^2 - 1)$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

(b) La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont distinctes, donc ses vecteurs propres sont orthogonaux.

(c) Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 0$ sont solution de $Ax = 0$, donc ils sont de la forme $k(0,0,1)$, avec $k \neq 0$. Ceux associés à $\lambda_2 = 1$ sont solution de $(A - I)x = 0$, donc de la forme $k(1,1,0)$, avec $k \neq 0$, tandis que ceux associés à $\lambda_3 = -1$ sont solution de $(A + I)x = 0$, donc de la forme $k(1,-1,0)$, $k \neq 0$.

On en déduit que $P^T AP = D$, où

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.22. (a) Le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2t & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -3t \\ 1 & t & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t(\lambda-1) & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -3t \\ 1 & t & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t(\lambda-1) & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda & -3t \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big(\lambda^2 - (1-3t^2)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A admet trois valeurs propres réelles si et seulement si $1 - 3t^2 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $t^2 \leq 1/3$. Donc l'ensemble des t qui donnent trois valeurs propres réelles est l'intervalle $[-1/\sqrt{3}\,,\, 1/\sqrt{3}]$ et ces valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{1-3t^2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{1-3t^2}$.

(b) Quelle que soit la valeur de t dans l'intervalle $[-1/\sqrt{3}\,,\, 1/\sqrt{3}]$, on voit facilement que $|\lambda_2| = |\lambda_3| \leq 1 = |\lambda_1|$. D'autre part, si $t = 0$, on a $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. La réponse est donc $\lambda_1 = 1$ (dans le cas où $t = 0$, les deux valeurs propres 1 et -1 ont la même valeur absolue).

(c) Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ sont solution de $(A - I)x = 0$. Une forme échelonnée de

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & -3t \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{étant} \qquad \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -3t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deux cas se présentent :

- si $t \neq 0$, les vecteurs $x = k(-t, 1, 0)$ avec $k \neq 0$ sont les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ;
- si $t = 0$, les vecteurs

$$x = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } k^2 + \ell^2 \neq 0$$

  sont les vecteurs propres associés à la valeur propre 1.

Les vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -1$ sont solution de $(A + I)x = 0$, avec $t = 0$. Ils sont donc de la forme $x = k\,(1, 0, -1)$, $k \neq 0$.

(d) En examinant le polynôme caractéristique, on distingue deux cas :

- le cas $1 - 3t^2 = 0$ ($t = \pm 1/\sqrt{3}$), où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Dans ce cas, la matrice A a pour forme échelonnée simplifiée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs propres associés à la valeur propre 0, qui sont solution de $Ax = 0$, sont de la forme

$$x = k \begin{pmatrix} -2 \\ 3t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k \neq 0, \quad \text{où } t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,;$$

– le cas $t = 0$, où $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$ et dans ce cas nous avons déjà trouvé les vecteurs propres en (c).

8.23. Désignons par $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de A. Son terme constant c_0 se trouve alors en posant $\lambda = 0$. Ainsi $c_0 = p(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$.

8.24. Soit P la matrice ayant pour colonnes les n vecteurs propres linéairement indépendants de A. Alors $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale. Puisque B a les mêmes vecteurs propres que A, on a aussi $P^{-1}BP = D'$, où D' est une matrice diagonale. Ainsi, puisque deux matrices diagonales commutent, on a

$$\begin{aligned} AB &= (PDP^{-1})(PD'P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D'P^{-1} = PDD'P^{-1} \\ &= PD'DP^{-1} = PD'P^{-1}PDP^{-1} = (PD'P^{-1})(PDP^{-1}) = BA\,. \end{aligned}$$

8.25. (a) La matrice A est orthogonalement diagonalisable car elle est symétrique.

$$\begin{aligned} \text{(b) } \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 25) \\ &= (2-\lambda)(\lambda+5)(\lambda-5)\,. \end{aligned}$$

Les vecteurs $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 3)$ et $(-3, 0, 1)$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 2, 5, et -5. On normalise ces vecteurs pour former les colonnes de la matrice orthogonale

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$P^T AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après la solution de l'exercice 8.11 (a),

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix} P^T \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5^n + 9(-5)^n & 0 & 3(5)^n - 3(-5)^n \\ 0 & 10 \cdot 2^n & 0 \\ 3(5)^n - 3(-5)^n & 0 & 9(5)^n + (-5)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Oui. En effet, D est inversible et $A = PDP^{-1}$ est un produit de matrices inversibles, donc A est aussi inversible et son inverse est $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^T$. Puisque

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -5^{-1} \end{pmatrix},$$

on déduit que

$$A^{-1} = PD^{-1}P^T = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 0 & 25 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

8.30. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = -(3 + \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 10).$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1 - 3i$ et $\lambda_3 = 1 + 3i$. Les vecteurs propres correspondants sont, respectivement, les matrices colonnes $k(1, 0, 0)$, $k(-1 + 3i, 5 + 15\,i, 10)$ et $k(-1 - 3i, 5 - 15\,i, 10)$, $k \neq 0$, k dans $\mathbb{C}$. Ainsi, la matrice cherchée est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 + 3i & -1 - 3i \\ 0 & 5 + 15i & 5 - 15i \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

et son inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -i/30 & 1/20 + i/60 \\ 0 & i/30 & 1/20 - i/60 \end{pmatrix}.$$

8.31. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2.$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$, chacune étant double. Les vecteurs propres associés à λ_1 sont solutions du système $(A - iI)x = 0$, qui a pour matrice des coefficients

$$A - iI = \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée simplifiée de $A - iI$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres sont donc $(ik, k, 0, 0)$, $k \neq 0$, k dans $\mathbb{C}$. De même, les vecteurs propres associés à λ_2 sont solutions du système $(A + iI)x = 0$ et sont donc $(-ik, k, 0, 0)$, $k \neq 0$, k dans $\mathbb{C}$. On ne peut pas trouver une matrice inversible qui répond à la question car λ_1 est de multiplicité 2 et le sous-espace propre $S(\lambda_1)$ qui lui est associé est de dimension 1 (c'est d'ailleurs aussi le cas pour λ_2).

9. Transformations linéaires

9.1. (a) La linéarité de T_1 découle de celle du produit scalaire.

(b) T_2 n'est pas linéaire. En effet, pour $x \neq 0$,

$$T_2(-x) = \|-x\| = \sqrt{\langle -x, -x\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\| \neq -T_2(x)\,.$$

(c) T_3 est linéaire, d'après les propriétés du produit matriciel.

9.2. (a) T_1 est linéaire. En effet,

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} + \sum_{i=1}^{n}(B)_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

et

$$\mathrm{Tr}(kA) = \sum_{i=1}^{n}(kA)_{ii} = k\sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} = k\,\mathrm{Tr}(A)\,.$$

(b) T_2 est linéaire. En effet, $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(kA)^T = kA^T$.

(c) T_3 n'est pas linéaire, car $T_3(-A) = T_3(A) \neq -T_3(A)$ si la première ligne de A n'est pas nulle.

9.3. (a) La transformation T est linéaire, car $T(kf + \ell g) = (kf + \ell g)' = kf' + \ell g' = kT(f) + \ell T(g)$ si k, ℓ sont dans $\mathbb{R}$ et f, g sont dans V.

(b) La transformation T est linéaire, car $T(kf + \ell g) = (kf + \ell g)(x_0) = kf(x_0) + \ell g(x_0) = kT(f) + \ell T(g)$.

9.4. (a) Soit k, ℓ, x, y dans $\mathbb{R}$. Alors $T_w(kx + \ell y) = (kx + \ell y)w = kxw + \ell yw = kT_w(x) + \ell T_w(y)$. L'application T_w est donc linéaire pour tout w.

(b) Soit P_u l'application de V dans $\mathbb{R}$ définie par $P_u(v) = \langle u, v\rangle$. Cette dernière application est clairement linéaire d'après les propriétés du produit scalaire. Or,

$$T(v) = \mathrm{proj}_u\, v = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}\, u = \big(T_{u/\|u\|^2} \circ P_u\big)(v)\,.$$

T est donc bien linéaire, car elle est la composée de deux applications linéaires.

9.5. (a) La transformation T n'est pas linéaire, car si $\det(X) \neq 0$, $T(kX) = \det(kX) = k^2 \det(X) \neq k\det(X) = kT(X)$.

(b) La transformation T est linéaire, car

$$\det(kx \,\vdots\, v) = k\det(x \,\vdots\, v) \quad \text{et} \quad \det(x + y \,\vdots\, v) = \det(x \,\vdots\, v) + \det(y \,\vdots\, v)\,.$$

9.6. Soit x dans $\mathbb{R}^3$. Si $[x]_{\mathcal{B}} = (k_1, k_2, k_3)$, alors

$$x = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

et

$$\begin{aligned} T(x) &= k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + k_3 T(v_3) \\ &= k_1(4,1) + k_2(0,1) + k_3(-1,0) \\ &= (4k_1 - k_3, k_1 + k_2)\,. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour exprimer $T(x)$ en fonction de $[x]_{\mathcal{E}} = (x_1, x_2, x_3)$, il suffit d'exprimer $[x]_{\mathcal{B}}$ en fonction de $[x]_{\mathcal{E}}$ à l'aide de l'égalité $[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}\,[x]_{\mathcal{E}}$. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ qui est la matrice de l'exercice 2.23. On a donc

$$k_1 = \frac{1}{11}\,(2x_1 + x_2 + x_3)\,,\quad k_2 = \frac{1}{11}\,(7x_1 - 2x_2 - 2x_3)\,,\quad k_3 = \frac{1}{11}(8x_1 + 4x_2 - 7x_3)\,.$$

D'où

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{11}\,(11\,x_3, 9x_1 - x_2 - x_3)\,.$$

Finalement, $T(1,2,7) = (7,0)$.

9.7. Posons $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = 1 - t$ et $p_3(t) = 1$. On remarque que $(1/2)p_1 + (1/2)p_2 = p_3$, donc toute application linéaire T de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$ doit vérifier

$$T(p_3) = \frac{1}{2}\,T(p_1) + \frac{1}{2}\,T(p_2)\,.$$

L'application T ne peut donc être linéaire, puisque

$$T(p_3) = t^2 \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t = \frac{1}{2}\,T(p_1) + \frac{1}{2}\,T(p_2)\,.$$

9.8. (a) Soit k, ℓ dans $\mathbb{R}$ et p, q dans $\mathcal{P}_2$. Alors

$$\begin{aligned} T\big(kp(x) + \ell q(x)\big) &= x\big(kp(x) + \ell q(x)\big) \\ &= kxp(x) + \ell xq(x) = kT\big(p(x)\big) + \ell T\big(q(x)\big) \end{aligned}$$

donc T est linéaire.

(b) Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dans $\mathcal{P}_2$. Si $p(x)$ est dans $\ker(T)$, alors $T\big(p(x)\big) = xp(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$ est le polynôme nul, d'où $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Donc $p(x)$ est le polynôme nul et $\ker(T) = \{0\}$.

(c) Soit $q(x)$ dans $\mathrm{Im}(T)$. Il existe $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tel que $q(x) = T\big(p(x)\big) = xp(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$, donc $\{x, x^2, x^3\}$ engendre $\mathrm{Im}(T)$. Comme cette famille est libre, elle est une base de $\mathrm{Im}(T)$.

9.9. (a) Une fonction f est dans $\ker(T)$ si et seulement si $T(f) = 0 = f'$. Le noyau de T est donc le sous-espace des fonctions constantes. Pour toute fonction g dans W, sa primitive

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

vérifie $T(f) = g$. L'application T est donc surjective et son image est W.

(b) Une fonction f est dans $\ker(T)$ si et seulement si $T(f) = 0 = f(x_0)$. Le noyau de T est donc le sous-espace des fonctions qui s'annulent en x_0. Pour tout nombre k, la fonction constante $f(x) = k$ vérifie $T(f) = f(x_0) = k$. L'application T est donc surjective et son image est $\mathbb{R}$.

9.14. (a) Le noyau de T est le sous-espace des solutions du système $A \cdot x = 0$. La forme échelonnée simplifiée de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc une base de $\ker(T)$ est

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(b) L'image de T est l'espace des colonnes de A. Notons a_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. En examinant la forme échelonnée simplifiée de A, on voit que (a_1, a_2, a_4) est une base de l'image de T.

(c) $\mathrm{rg}(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = 3$.

9.15. (a) La linéarité découle des propriétés des opérations sur les composantes. Si $A = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4$ et A appartient à $\ker(T)$, alors

$$T(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

d'où $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, c'est-à-dire $A = 0_V$. Autrement dit, $\ker(T) = \{0_V\}$. Soit à présent $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ dans $\mathbb{R}^4$. On voit facilement que $y = [x]_{\mathcal{B}} = T(x)$, où l'on a posé $x = y_1 M_1 + y_2 M_2 + y_3 M_3 + y_4 M_n$. Ainsi, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$, autrement dit T est surjective et $\mathrm{rg}(T) = \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

(b) La linéarité est évidente. Déterminons le noyau de S. Soit donc $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $Sx = 0_V = x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 + x_4 M_4$. Alors $x_1 = \cdots = x_4 = 0$ car $\{M_1, \ldots, M_4\}$ est une famille libre. Ceci montre que $\ker(S) = \{0\}$ et la transformation S est donc injective. Soit y dans V. Il existe $y_1, \ldots, y_4$ dans $\mathbb{R}$ tels que $y = y_1 M_1 + \cdots + y_4 M_4$. On a alors

$$y = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

D'où $\mathrm{Im}(S) = V$ et $\mathrm{rg}(S) = 4$.

(c) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n\times n}$ est de dimension n^2. On peut donc généraliser les résultats de (a) et (b) à des applications de $\mathcal{M}_{n\times n}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

9.16. Soit x dans $\ker(T)$ et z dans $\operatorname{Im}(T)$. Par définition de $\operatorname{Im}(T)$, il existe y dans $\mathbb{R}^n$ tel que $z = Ay$. Par conséquent,

$$\langle x, z\rangle = \langle x, Ay\rangle = (Ay)^T \cdot x = y^T A^T x = y^T Ax = \langle Ax, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0\,.$$

Ainsi, tous les vecteurs de $\ker(T)$ sont orthogonaux aux vecteurs de $\operatorname{Im}(T)$.

9.17. D'après le théorème p.90, nous avons

$$\dim V = \dim\ker(T) + \dim\operatorname{Im}(T)\,.$$

Comme la transformation T est bijective, elle est injective et par conséquent $\dim\ker(T) = 0$. De plus, T est surjective, donc $\operatorname{Im}(T) = W$. Nous en déduisons que $\dim V = \dim W$.

9.18. (a) Soit $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ la transformation définie par

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)\,.$$

On vérifie sans peine que cette transformation est linéaire. Si $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ est dans $\ker(T)$, cela signifie que $T(p) = (0,0,0,0)$. Par suite, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et donc p est le polynôme nul. On voit alors que $\ker(T) = \{0\}$ et donc que T est injective. Les espaces vectoriels $\mathcal{P}_3$ et $\mathbb{R}^4$ étant tous deux de dimension 4, l'injectivité de T implique la surjectivité. Ainsi, T est bijective. Son inverse est définie par $T^{-1}(b_0, b_1, b_2, b_3) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$. Remarquons que $T' : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $T'(p) = \big(p(0), p'(0), p''(0), p'''(0)\big)$ répond aussi à la question.

(b) Comme la dimension de $\mathcal{P}_3$ est différente de celle de $\mathbb{R}^3$, nous déduisons de l'exercice 9.17 qu'il ne peut pas y avoir de transformation linéaire bijective entre ces deux espaces.

9.19. Soit $p(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3$ un polynôme de degré ≤ 3. Un bref calcul donne $T(p)(t) = (k_1 + 6k_2) + (2k_2 + 18k_3)t + 3k_3 t^2$. On voit alors facilement que $T(p) \equiv 0$ si et seulement si $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(a) Nous déduisons du calcul précédent que $\{1\}$ est une base de $\ker T$.

(b) Puisque $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$ et $\dim\ker(T) = 1$, le théorème p.90 nous affirme que $\dim\operatorname{Im}(T) = 3$. Or, $\operatorname{Im}(T)$ est contenu dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont la dimension est 3. Par conséquent, $\operatorname{Im}(T) = \mathcal{P}_2$. Ainsi, $(1, t, t^2)$ est une base de $\operatorname{Im}(T)$.

9.20. On écrit $T_1(e_1) = M_1 + M_2$ dans la base $\mathcal{B}$ et on obtient $\big[T_1(e_1)\big]_{\mathcal{B}} = (1,1,0,0)$. On procède de même pour $T_1(e_2)$ et $T_1(e_3)$, ce qui permet d'écrire la matrice

$$\big[T_1\big]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \Big(\big[T_1(e_1)\big]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \big[T_1(e_2)\big]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \big[T_1(e_3)\big]_{\mathcal{B}}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{C} = \{1\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$. On a $\big[T_2(M_i)\big]_{\mathcal{C}} = T_2(M_i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$. Or $T_2(M_1) = 1$, $T_2(M_2) = 0$, $T_2(M_3) = 0$, $T_2(M_4) = 1$, d'où

$$\big[T_2\big]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\big[T_2 \circ T_1\big]_{\mathcal{C},\mathcal{E}} = \big[T_2\big]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot \big[T_1\big]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.21. (a) On peut écrire $A_1 = 3E_1 + 2E_2$, $A_2 = 3E_1 + 2E_2 + E_3$ et $A_3 = E_1 + E_2 + E_3$, d'où $[A_1]_{\mathcal{E}} = (3, 2, 0)$, $[A_2]_{\mathcal{E}} = (3, 2, 1)$ et $[A_3]_{\mathcal{E}} = (1, 1, 1)$.

(b) La famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est libre, car

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Cette famille de trois vecteurs est donc une base de $\mathcal{S}_{2\times 2}$, puisque cet espace est de dimension 3. On en déduit que pour tout A dans $\mathcal{S}_{2\times 2}$, il existe k_1, k_2, k_3 tels que $A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3$ et donc $T(A) = k_1 T(A_1) + k_2 T(A_2) + k_3 T(A_3)$. La réponse est donc oui.

(c) Notons $\mathcal{E}'$ la base (A_1, A_2, A_3). D'après l'hypothèse, la matrice de T dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{B}$ est

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}'} = \Big(\big[T(A_1)\big]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \big[T(A_2)\big]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \big[T(A_3)\big]_{\mathcal{B}}\Big) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 9 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Or, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}'} \cdot P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$ et

$$P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 9 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.22. Il est facile de voir que $\big\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\big\}$ engendre $\mathrm{Im}(T)$. En effet, pour y dans $\mathrm{Im}(T)$, il existe x dans V tel que $T(x) = y$. Dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, un vecteur x de V s'écrit sous la forme $x = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n$, donc

$$y = T(x) = k_1 T(e_1) + \cdots + k_n T(e_n) = k_{m+1} T(e_{m+1}) + \cdots + k_n T(e_n).$$

Montrons que $\{T(e_{m+1}), \dots, T(e_n)\}$ est une famille libre. Si

$$k_{m+1}T(e_{m+1}) + \cdots + k_nT(e_n) = 0 = T(k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_ne_n)\,,$$

alors $k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_ne_n$ est dans $\ker(T)$ et donc il existe des nombres $k_1, \dots, k_m$ tels que

$$k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_ne_n = k_1e_1 + \cdots k_me_m\,,$$

car $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de $\ker(T)$. On en déduit que $k_1 = \cdots = k_m = k_{m+1} = \cdots = k_n = 0$, ce qui montre que $\{T(e_{m+1}), \dots, T(e_n)\}$ est libre et par suite que c'est une base de $\mathrm{Im}(T)$. Cette base contient $n - m$ vecteurs et donc $\mathrm{rg}(T) = n-m$. Comme $\dim\ker(T) = m$, puisque $\ker(T)$ possède une base formée de m vecteurs, on constate que $\dim\ker(T) + \mathrm{rg}(T) = n = \dim(V)$.

9.27. On utilise la formule $\dim\ker(T) + \mathrm{rg}(T) = \dim(V)$ si $T : V \longrightarrow W$ est linéaire.

(a) $\dim\ker(T) = 2$.

(b) $\dim\ker(T) = 4$.

(c) $\dim\ker(T) = 3$.

(d) $\dim\ker(T) = 1$.

9.28. (a) Vu que $\dim\ker(T) = 0$, on en déduit que T est injective. Elle est donc bijective.

(b) La réponse est non, car T n'est pas surjective.

(c) De $\mathrm{Im}(T) = V$, on déduit que T est surjective. Elle est donc bijective.

(d) La réponse est non car $\mathrm{Im}(T)$, qui est de dimension finie, ne peut égaler $\mathcal{P}$, qui est de dimension infinie, et T n'est donc pas surjective.

(e) De l'hypothèse, on déduit que $\dim\ker(T) \neq 0$ et donc que T n'est pas injective.

9.29. (a) $T(I_2) = (v_1, v_2, w_1, w_2)$.

(b) Soit k_1, k_2 dans $\mathbb{R}$ et $X, Y \in \mathcal{M}_2$. Alors

$$\begin{aligned}
T(k_1X + k_2Y) &= \big((k_1X + k_2Y)v, (k_1X + k_2Y)w\big)\\
&= (k_1Xv + k_2Yv, k_1Xw + k_2Yw)\\
&= k_1(Xv, Xw) + k_2(Yv, Yw)\\
&= k_1T(X) + k_2T(Y)\,.
\end{aligned}$$

Montrons que T est bijective. Comme $\dim(\mathcal{M}_2) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, il suffit de voir par exemple que T est injective. Soit X dans $\mathcal{M}_2$ tel que

$$T(X) = 0 = \begin{pmatrix} Xv \\ -- \\ Xw \end{pmatrix}.$$

En notant $A = (v \,\vdots\, w)$ la matrice ayant pour colonnes v et w et en remarquant que A est inversible, on déduit que $XA = (Xv \,\vdots\, Xw) = \mathbb{O}$, donc $X = \mathbb{O} \cdot A^{-1} = \mathbb{O}$ et $\ker(T) = \{\mathbb{O}\}$.

(c) De la définition de T, on déduit que

$$T(X) = \left(x_{11}v_1 + x_{12}v_2,\ x_{21}v_1 + x_{22}v_2\ ,\ x_{11}w_1 + x_{12}w_2,\ x_{21}w_1 + x_{22}w_2\right).$$

(d) La matrice $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est égale à $\left([T(M_1)]_{\mathcal{B}'} \vdots \cdots \vdots [T(M_4)]_{\mathcal{B}'}\right)$, où $M_1, \ldots, M_4$ sont définies dans l'exercice 9.15. Par conséquent,

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut déduire cette matrice de (c), car

$$[X]_{\mathcal{B}} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}).$$

9.30. (a) Par définition, $[T_k]_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \left([T_k(e_1)]_{\mathcal{F}} \vdots \cdots \vdots [T_k(e_n)]_{\mathcal{F}}\right)$. Dans la base $(f_1, \ldots, f_m)$, on a

$$\big[T_k(e_1)\big]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \big[T_k(e_k)\big]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Pour $i > k$,

$$\big[T_k(e_i)\big]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusion,

$$\big[T_k\big]_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|ccc} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ I_k & \vdots & & \vdots \\ & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ \hline \mathbb{O}_{m-k,k} & & \mathbb{O}_{m-k,n-k} & \end{array}\right).$$

(b) On prend par exemple $k = 2$ et $T_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1{+}x_3, x_2{+}2x_3{+}x_4, 0)$. Dans les bases canoniques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$,

$$[T_2]_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.31. (a) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 11/2 & 5 \\ 2 & 6 \\ 15/2 & 6 \end{pmatrix},$$

puisque $T(u_1) = (11/2,\, 2,\, 15/2)$ et $T(u_2) = (5, 6, 6)$. Pour répondre à la question, on détermine la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B}',\mathcal{E}}$, qui est l'inverse de

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

et on applique l'égalité $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{E}} \cdot [T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, ce qui donne

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/2 & 5 \\ 2 & 6 \\ 15/2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme tout élément $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ a pour composantes dans la base $\mathcal{B}$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -(1/5)x_1 + (3/5)x_2 \\ (2/5)x_1 - (1/5)x_2 \end{pmatrix},$$

nous en déduisons que

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -(1/5)x_1 + (3/5)x_2 \\ (11/10)x_1 - (3/10)x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{E}} \cdot \big[T(x)\big]_{\mathcal{E}} = \big[T(x)\big]_{\mathcal{B}'}.$$

9.32. (a) Soit k, ℓ dans $\mathbb{R}$ et p, q dans $\mathcal{P}_2$. Alors

$$\begin{aligned} T\big((kp+\ell q)(x)\big) &= \begin{pmatrix} kp(x_1) + \ell q(x_1) \\ kp(x_2) + \ell q(x_2) \\ kp(x_3) + \ell q(x_3) \end{pmatrix} \\ &= k\begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ q(x_3) \end{pmatrix} \\ &= kT\big(p(x)\big) + \ell T\big(q(x)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, T est linéaire.

(b) Soit p dans $\ker(T)$. Alors $T\big(p(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 0$. Comme le seul polynôme de degré 2 qui a au moins 3 racines distinctes est le polynôme nul, nous concluons que $\ker(T) = \{0_{\mathcal{P}_2}\}$ et donc que la transformation linéaire T est injective. De plus, comme les espaces considérés sont de même dimension, on en déduit que T est bijective.

$$\begin{aligned}\text{(c)}\quad [T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}} &= \left([T(2)]_{\mathcal{E}} \,\vdots\, [T(2-x)]_{\mathcal{E}} \,\vdots\, [T((2-x)^2)]_{\mathcal{E}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2-x_1 & (2-x_1)^2 \\ 2 & 2-x_2 & (2-x_2)^2 \\ 2 & 2-x_3 & (2-x_3)^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(d) Sachant que T est linéaire et bijective, son inverse T^{-1} est aussi linéaire. On en déduit que

$$T^{-1}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k_1T^{-1}(e_1) + k_2T^{-1}(e_2) + k_3T^{-1}(e_3)\,.$$

Posons $P_1(x) = T^{-1}(e_1)$. Alors $T(P_1(x)) = e_1$, d'où $P_1(x_1) = 1$, $P_1(x_2) = 0$ et $P_1(x_3) = 0$. Des deux dernières égalités, on déduit que $P_1(x) = c(x-x_2)(x-x_3)$, où c est une constante déterminée par $P_1(x_1) = 1$. Finalement, on trouve que

$$P_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,.$$

On détermine de même $P_2(x) = T^{-1}(e_2)$ et $P_3(x) = T^{-1}(e_3)$.

9.33. Pour tout x dans V,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, f_i\rangle f_i\,,$$

puisque la base $(f_1, \ldots, f_m)$ est orthonormée, et donc

$$[P(x)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{m} [f_i]_{\mathcal{B}}\langle x, f_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} [f_i]_{\mathcal{B}}\, [f_i]_{\mathcal{B}}^T\, [x]_{\mathcal{B}} = \left(\sum_{i=1}^{m} [f_i]_{\mathcal{B}}\, [f_i]_{\mathcal{B}}^T\right) [x]_{\mathcal{B}}\,.$$

D'où le résultat.

9.34. (a) On peut écrire $T(x) = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im(T) est alors l'espace des colonnes de A. Une forme échelonnée simplifiée de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a trois pivots dans les trois premières colonnes, donc les trois premières colonnes de A forment une base de l'espace des colonnes de A. Par conséquent, une base de $\mathrm{Im}(T)$ est

$$\left(\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Un vecteur x est dans $\ker(T)$ si et seulement si $Ax = 0$. A l'aide de la forme échelonnée simplifiée de A, on voit que

$$\ker(T) = \mathscr{L}\begin{pmatrix} -12\\ -12\\ 8\\ 3\end{pmatrix}.$$

(b) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors $[T]_{\mathcal{B}} = A$, d'où $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Or,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 & -6\\ -1 & 5 & 12 & 10\\ 1 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

9.39. (a) La linéarité se vérifie immédiatement.

(b) Tout d'abord,

$$T_2 \circ T_1(e_1) = T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = e_1' + 2e_2'\,.$$

De même,

$$T_2 \circ T_1(e_2) = T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix} = e_1' + 4e_2' + 4e_3'\,.$$

Nous en déduisons que

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ [T_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \text{ et } [T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) La formule reliant les matrices de (b) est $[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [T_2]_{\mathcal{B}'} \cdot [T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.40. (a) Tout d'abord,

$$T_2 \circ T_1(e_1) = T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T_2 \circ T_1(e_2) = T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2(-3x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$T_2(1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$[T_2]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, nous obtenons

$$T_1(e_1) = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad T_1(e_2) = T_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3x^2$$

et nous en déduisons que

$$[T_1]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) La formule reliant ces matrices est

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [T_2]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} \cdot [T_1]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}.$$

(c) On a bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

9.41. Posons $p_1(x) = 3x+6$, $p_2(x) = 2x+10$, $q_1(x) = 2$, $q_2(x) = 2x+3$. Alors $\mathcal{B} = (p_1, p_2)$ et $\mathcal{B}' = (q_1, q_2)$. Les calculs donnent

$$T(p_1) = 3x+9 = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \quad \text{et} \quad T(p_2) = 2x+12 = -\frac{2}{9}p_1 + \frac{4}{3}p_2\,,$$

d'où

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $T(q_1) = 2 = q_1$ et $T(q_2) = 2x+5 = q_1 + q_2$, ce qui donne

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, soit $\mathcal{B}''$ la base canonique $(1, x)$. On utilise la méthode de calcul de la matrice de passage donnée p.66. On réduit la matrice

$$\left(P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} \,\vdots\, P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\right) = \left(\begin{array}{cc:cc} 6 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

à la forme échelonnée simplifiée $(I \,\vdots\, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})$, ce qui donne

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.42. D'après l'hypothèse,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{d'où} \quad P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et en effectuant le produit, on obtient

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.43. (a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $M_1 = [T]_{\mathcal{B}}$. Comme $P^{-1} \cdot M_1 \cdot P = M_2$, en posant $\mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_n)$, où b_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de P, on a $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et M_2 est la matrice de T dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tels que $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 2e_2$ et $T(e_3) = -e_3$. La matrice A est la matrice de T dans la base $\mathcal{E}$ et B est celle de T dans la base $\mathcal{E}' = (e_2, e_3, e_1)$. Posons

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, donc A et B sont semblables.

9.44. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La base cherchée est la base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$, où e_1' et e_2' sont des vecteurs propres de $[T]_{\mathcal{B}}$.

(a) Puisque

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres λ de $[T]_{\mathcal{B}}$ vérifient $\big|[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_2\big| = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, et des vecteurs propres correspondants respectivement aux valeurs propres 2 et 3 sont $e_1' = (1,-1)$ et $e_2' = (-1,2)$.

(b) Puisque

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres λ de $[T]_{\mathcal{B}}$ vérifient

$$\big|[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_2\big| = \lambda^2 - 5\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) = 0\,.$$

Un vecteur propre correspondant à la valeur propre $(5+\sqrt{21})/2$ est $e_1' = \big(1\,,\,(3-\sqrt{21})/2\big)$ et un correspondant à la valeur propre $(5-\sqrt{21})/2$ est $e_2' = \big(1\,,\,(3+\sqrt{21})/2\big)$.

9.45. (a) T est linéaire, car

$$\begin{aligned} T\big(k(x_1,x_2,x_3) + \ell(y_1,y_2,y_3)\big) &= T(kx_1+\ell y_1, kx_2+\ell y_2, kx_3+\ell y_3) \\ &= kx_1+\ell y_1 - 2(kx_2+\ell y_2) + 3(kx_3+\ell y_3) \\ &= kT(x_1,x_2,x_3) + \ell T(y_1,y_2,y_3)\,. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_1$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$. Alors $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Si $\mathcal{B}' = (v_1,v_2,v_3)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ telle que $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $T(v_1) = 1$, $T(v_2) = 0$ et $T(v_3) = 0$. Ceci permet de déterminer les coordonnées des v_i dans la base $\mathcal{B}_3$. Posons $[v_i]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} \end{pmatrix}$. Alors $k_{11} - 2k_{12} + 3k_{13} = 1$ et $k_{i1} - 2k_{i2} + 3k_{i3} = 0$ pour $i = 2,3$. Une solution de ces équations est donnée par

$$v_1 = (0,1,1)\,, \qquad v_2 = (2,1,0) \quad \text{et} \quad v_3 = (-3,0,1)\,,$$

qui forment bien une base de $\mathbb{R}^3$ (cette solution n'est pas unique).

(c) Si l'on pose $P = P_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}'}$, on sait que P est inversible et que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot P = [T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} \cdot P = [T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P = P_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}'} = \big([v_1]_{\mathcal{B}_3} \,\vdots\, [v_2]_{\mathcal{B}_3} \,\vdots\, [v_3]_{\mathcal{B}_3}\big) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.46. (a) Déterminons d'abord la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Par hypothèse, $e_1' = 2e_1 + e_2$ et $e_2' = e_1 + 2e_2$, d'où

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On applique l'égalité $[T]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \cdot A \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et on obtient

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Des égalités $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$ et $[T \circ T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^2$, on déduit que

$$[T^n]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^n \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}.$$

On effectue les calculs et on obtient

$$[T^n]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^n & 2(3^n - 2^n) \\ 2(2^n - 3^n) & 4(3^n - 2^{n-2}) \end{pmatrix}.$$

10. Résolution de systèmes différentiels

10.1. Montrons d'abord que la famille $\{z_1, \ldots, z_n\}$ est libre. Si $k_1, \ldots, k_n$ sont des nombres vérifiant $k_1 z_1(t) + \cdots + k_n z_n(t) = 0$ pour tout t, alors, pour $t = 0$, on a $k_1 z_1(0) + \cdots + k_n z_n(0) = 0$. Les k_i sont donc une solution du système linéaire $I_n \cdot x = 0$, d'où $k_1 = \cdots = k_n = 0$.
Montrons que la famille $\{z_1, \ldots, z_n\}$ engendre W. Soit z une solution de (H). Soit $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les composantes du vecteur colonne $z(0)$ et posons $y(t) = \ell_1 z_1(t) + \cdots + \ell_n z_n(t)$. La fonction $y(t)$ est une solution de (H) qui vérifie $y(0) = z(0)$, donc $y(t) = z(t) = \ell_1 z_1(t) + \cdots + \ell_n z_n(t)$ pour tout t, vu la propriété d'unicité de la solution de (H) satisfaisant à la condition initiale donnée.

10.2. Les valeurs propres de A sont -3 et 3. Les vecteurs propres associés sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une solution générale s'écrit

$$k_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En tenant compte de la condition initiale, on trouve que

$$x(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.3. Les valeurs propres de A sont -2, 2 et 4. Les vecteurs propres associés sont respectivement

$$p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une solution générale s'écrit $k_1 e^{-2t} p_1 + k_2 e^{2t} p_2 + k_3 e^{4t} p_3$ et la solution cherchée est

$$x(t) = -e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.4. Posons, comme le suggère l'indication, $y_1(t) = y(t)$ et $y_2(t) = \dot{y}(t)$. On a alors $\dot{y}_1(t) = y_2(t)$ et $\dot{y}_2(t) = \ddot{y}(t) = 2\dot{y}(t) + 8y(t) = 2y_2(t) + 8y_1(t)$ ce qui s'écrit aussi $\dot{x}(t) = Ax(t)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont -2 et 4 et les vecteurs propres associés respectifs sont

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x(t) = c_1 e^{-2t} p_1 + c_2 e^{4t} p_2$ et $y_1(t)$, la première composante de $x(t)$, nous donne $y(t) = y_1(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t}$, avec c_1, c_2 des nombres arbitraires.

10.5. (a)

$$\begin{aligned}
\left(e^{tA}\right)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(tA)^k\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,A^k t^k\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,kA^k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\,A^k t^{k-1} \\
&= A\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\,A^\ell t^\ell = Ae^{tA}\,.
\end{aligned}$$

(b) Si $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, alors

$$\begin{aligned}
e^A = e^{PDP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(PDP^{-1}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,D^k\right)P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{k!}\,a_1^k,\, \ldots,\, \frac{1}{k!}\,a_n^k\right)\right)P^{-1} \\
&= P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,a_1^k,\, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,a_n^k\right)P^{-1} \\
&= P\operatorname{diag}\left(e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}\right)P^{-1}\,.
\end{aligned}$$

10.6. (a) Le polynôme caractéristique de A est $|A - \lambda I_3| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, donc les valeurs propres de A sont 1 (double) et 4. Les vecteurs propres qui leur sont associés forment les colonnes de P. Les matrices cherchées sont $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) = \operatorname{diag}(1, 1, 4)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) De la diagonalisation de A en (a), on déduit $A = P \cdot \mathrm{diag}(1,1,4) \cdot P^{-1}$ d'où

$$tA = P \cdot \big(t\,\mathrm{diag}(1,1,4)\big) \cdot P^{-1} = P \cdot \mathrm{diag}(t,t,4t) \cdot P^{-1}$$

et, d'après l'exercice 10.5 (b),

$$\exp(tA) = P \cdot \mathrm{diag}(e^t, e^t, e^{4t}) \cdot P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & e^t - e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ e^t - e^{4t} & 2e^t + e^{4t} & e^t - e^{4t} \\ -e^t + e^{4t} & e^t - e^{4t} & 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}.$$

(c) $$\big(\exp(tA)\big)' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + 4e^{4t} & e^t - 4e^{4t} & -e^t + 4e^{4t} \\ e^t - 4e^{4t} & 2e^t + 4e^{4t} & e^t - 4e^{4t} \\ -e^t + 4e^{4t} & e^t - 4e^{4t} & 2e^t + 4e^{4t} \end{pmatrix} = A\exp(tA)\,.$$

10.7. (a) De la solution de l'exercice 10.2, on déduit que $tA = P \cdot \mathrm{diag}(-3t, 3t) \cdot P^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et d'après l'exercice 10.5 (b),

$$e^{tA} = P \cdot \mathrm{diag}\left(e^{-3t}, e^{3t}\right) \cdot P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-3t} + 5e^{3t} & -5e^{-3t} + 5e^{3t} \\ -e^{-3t} + e^{3t} & 5e^{-3t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

(b) Puisque A est inversible, une solution particulière est donnée par $x_0(t) = A^{-1}\left(e^{tA} - I_2\right)b$. En remplaçant e^{tA} par la matrice trouvée en (a) et en effectuant les produits matriciels, on obtient

$$x_0(t) = 3\begin{pmatrix} -e^{-3t} + 1 \\ e^{-3t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, si on pose $x(0) = (c_1, c_2)$, alors la solution générale s'écrit

$$x(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-3t} + 5e^{3t} & -5e^{-3t} + 5e^{3t} \\ -e^{-3t} + e^{3t} & 5e^{-3t} + e^{3t} \end{pmatrix} x(0) + 3\begin{pmatrix} -e^{-3t} + 1 \\ e^{-3t} - 1 \end{pmatrix}.$$

10.8. (a) On déduit de la solution de l'exercice 10.3 que

$$tA = P \cdot \mathrm{diag}(-2t, 2t, 4t) \cdot P^{-1}\,,$$

où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et d'après l'exercice 10.5 (b),

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \cdot \mathrm{diag}\left(e^{-2t}, e^{2t}, e^{4t}\right) \cdot P^{-1} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-2t} + 3e^{2t} + 2e^{4t} & 2e^{-2t} - 2e^{4t} & -e^{-2t} + 3e^{2t} - 2e^{4t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{4t} & 4e^{-2t} + 2e^{4t} & -2e^{-2t} + 2e^{4t} \\ -e^{-2t} + 3e^{2t} - 2e^{4t} & -2e^{-2t} + 2e^{4t} & e^{-2t} + 3e^{2t} + 2e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Une solution particulière est donnée par $x_0(t) = A^{-1}\left(e^{tA} - I_3\right) b$, d'où

$$x_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}-1 \\ 0 \\ e^{2t}-1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, si on pose $x(0) = (c_1, c_2)$, alors la solution générale s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-2t}+3e^{2t}+2e^{4t} & 2e^{-2t}-2e^{4t} & -e^{-2t}+3e^{2t}-2e^{4t} \\ 2e^{-2t}-2e^{4t} & 4e^{-2t}+2e^{4t} & -2e^{-2t}+2e^{4t} \\ -e^{-2t}+3e^{2t}-2e^{4t} & -2e^{-2t}+2e^{4t} & e^{-2t}+3e^{2t}+2e^{4t} \end{pmatrix} x(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}-1 \\ 0 \\ e^{2t}-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10.9. Posons, comme le propose l'indication, $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = y_2(t)$, $x_3(t) = \dot{y}_1(t)$ et $x_4(t) = \dot{y}_2(t)$. On a alors $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_3$, $\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = x_4$, $\dot{x}_3 = \ddot{y}_1 = 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4$ et $\dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = -2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4$. Ce système s'écrit aussi $\dot{x}(t) = Ax(t)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A étant $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda-2)^2(\lambda+4)$, on en déduit que les valeurs propres de A sont 0, 2 et -4. Quatre vecteurs propres linéairement indépendants sont

$$p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution générale du système est $x(t) = k_1 p_1 + k_2 e^{2t} p_2 + k_3 e^{2t} p_3 + k_4 e^{-4t} p_4$. Les deux premières composantes de $x(t)$ sont donc respectivement

$$y_1(t) = 3k_1 + k_3 e^{2t} + k_4 e^{-4t} \quad \text{et} \quad y_2(t) = k_1 + k_2 e^{2t} - k_4 e^{-4t},$$

avec k_1, k_2, k_3, k_4 des nombres arbitraires.

10.10. (a) On peut écrire la matrice $A = 3I_2 + B$ en remarquant que $B^2 = 0$. D'où, pour tout entier n,

$$A^n = (3I_2 + B)^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} B = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

car B et I_2 commutent et $B^m = 0$ si $m \geq 2$.

(b) On déduit de (a) que

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\big((3t)^k I_2 + k(3)^{k-1} t^k B\big) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(3t)^k\right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\,(3t)^{k-1}\right) tB \\ &= e^{3t} I_2 + e^{3t} tB \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) La solution générale cherchée est

$$x(t) = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix},$$

où c_1, c_2 sont des nombres.

10.14. On commence par diagonaliser la matrice A. Vu que

$$\det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)^2 + 4 = (\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i)$$

les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3 + 2i$ et $\lambda_2 = 3 - 2i$. Les vecteurs propres associés respectifs sont donc

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution générale du système :

$$x(t) = k_1 e^{3t+2it} p_1 + k_2 e^{3t-2it} p_2 = \begin{pmatrix} 2ik_1 e^{3t+2it} - 2ik_2 e^{3t-2it} \\ k_1 e^{3t+2it} + k_2 e^{3t-2it} \end{pmatrix}.$$

Pour avoir $x(0) = d$, les nombres k_1, k_2 doivent vérifier $2ik_1 - 2ik_2 = 2$ et $k_1 + k_2 = 0$, d'où $k_1 = -i/2$ et $k_2 = i/2$. La solution cherchée est donc

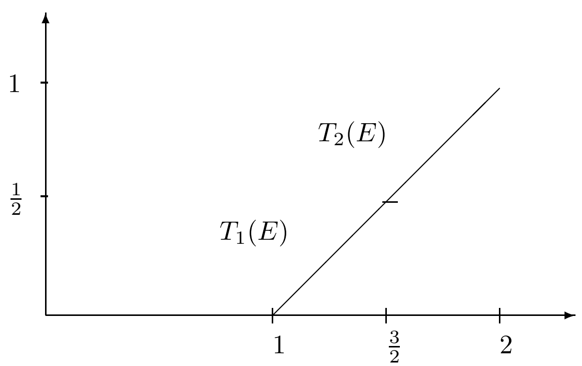
$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t+2it} + e^{3t-2it} \\ (-i/2)(e^{3t+2it} - e^{3t-2it}) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

11. Utilisation des transformations affines en infographie

11.1. Soit E le segment de droite de l'énoncé. Posons

$$T_1(x) = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}x + \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Alors $E = T_1(E) \cup T_2(E)$. Puisque $T_1(E)$ et $T_2(E)$ ont en commun le seul point $(3/2, 1/2)$, E est un ensemble autosemblable.



11.2. La réponse est non. Notons E l'ensemble considéré : E est un angle droit. Soit T_1 une similitude différente de l'identité et telle que $T_1(E)$ est contenu dans E. Comme les similitudes conservent les angles, $T_1(E)$ est aussi un angle droit, par conséquent le sommet de cet angle droit doit se trouver à l'origine. Le complémentaire de $T_1(E)$ dans E ne contient pas d'angle droit et ne peut donc contenir l'image de E par une similitude. Il n'est donc pas possible de trouver m similitudes $T_1, \ldots, T_m$ de rapport s dans $]0, 1[$ telles que $E = T_1(E) \cup \cdots \cup T_m(E)$ et les $T_i(E)$ ne se chevauchent pas.

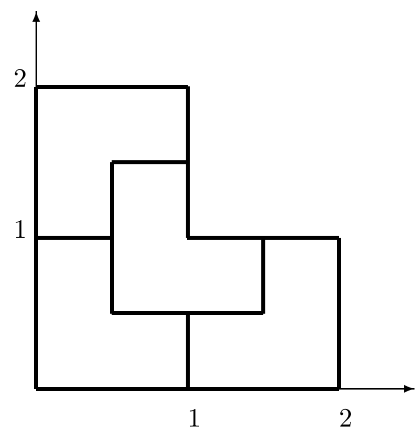
11.3. On voit sur la figure qui suit qu'on peut écrire E comme réunion des images de E par les quatre transformations suivantes :

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

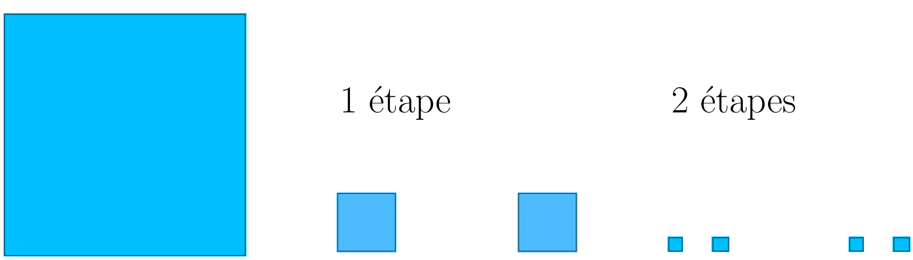
$$T_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T_4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



11.4. (a)

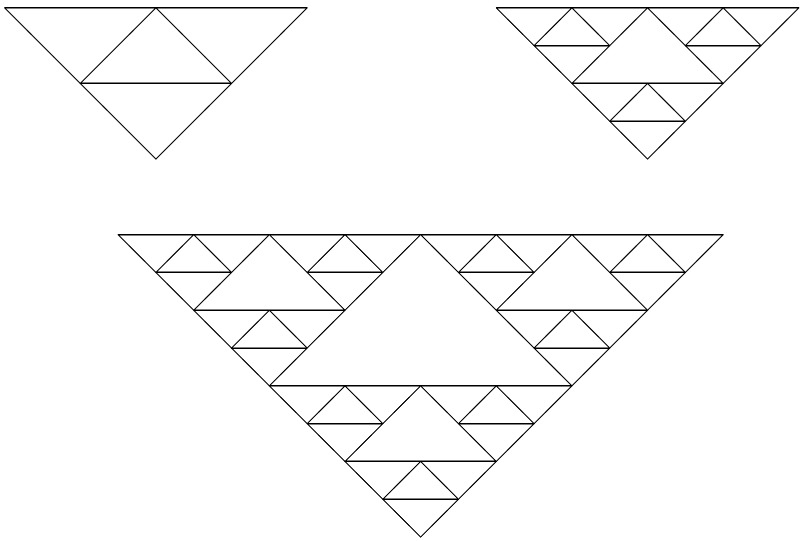


(b) La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor est

$$d_H(\text{ensemble de Cantor}) = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$$

($m = 2$ et $s = 1/4$).

11.6. (a)



(b) La dimension cherchée est $d_H(E) = \ln 3/\ln 2$ ($m = 3$ et $s = 1/2$).

(c) A une rotation près, E est le tamis de Sierpinski qui est déterminé par les similitudes T_1, T_2 et T_3, l'ensemble initial étant quelconque.

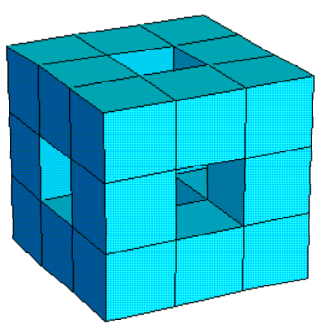
11.7. Les similitudes sont

$$T_1(x) = \frac{1}{2}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_4(x) = \frac{1}{2}\,x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La dimension cherchée $d_H(E) = \ln 4/\ln 2 = 2$ ($m = 4$ et $s = 1/2$).

11.8. Après une étape, l'algorithme dessine la figure suivante :



L'algorithme utilise donc les $m = 20$ similitudes simples suivantes :

$$T_1(x) = \frac{1}{3}\,x\,, \qquad T_2(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{1}{3}\,, 0, 0\right),$$

$$T_3(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, 0, 0\right), \qquad T_4(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\,, 0\right),$$

$$T_5(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\,, 0\right), \qquad T_6(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{1}{3}\,, \frac{2}{3}\,, 0)\right),$$

$$T_7(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, \frac{2}{3}\,, 0\right), \qquad T_8(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, \frac{1}{3}\,, 0\right),$$

$$T_9(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, 0, \frac{1}{3}\right), \qquad T_{10}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$T_{11}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\right), \qquad T_{12}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, \frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\right),$$

$$T_{13}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, 0, \frac{2}{3}\right), \qquad T_{14}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{1}{3}\,, 0, \frac{2}{3}\right),$$

$$T_{15}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, 0, \frac{2}{3}\right), \qquad T_{16}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\,, \frac{2}{3}\right),$$

$$T_{17}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\right), \qquad T_{18}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(\frac{1}{3}\,, \frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\right),$$

$$T_{19}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, \frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\right), \qquad T_{20}(x) = \frac{1}{3}\,x + \left(0, \frac{1}{3}\,, \frac{2}{3}\right).$$

Dans ce cas $m = 20$ et $s = 1/3$, donc $d_H(E) = \ln 20/\ln 3$.

12. Cryptographie conventionnelle

12.1. Dans ce cryptogramme, la lettre J est la plus fréquente : elle représente la lettre E, la plus fréquente en français comme en anglais. Si on déchiffre en remplaçant chaque lettre par la lettre qui la précède de cinq positions dans l'alphabet, on obtient

$$\text{BIENVENUE}\,.$$

12.2. Dans ce cryptogramme, la lettre R est la plus fréquente : elle représente la lettre E, la plus fréquente en français comme en anglais. Si on déchiffre en remplaçant chaque lettre par la lettre qui la précède de 13 positions dans l'alphabet, on obtient

IL N'EST PIRE AVEUGLE QUE

CELUI QUI NE VEUT PAS VOIR.

12.3. (a) Calculons les déterminants modulo 26 :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 18 \equiv 12\,, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 21 \equiv 13\,,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 12 \equiv 21\,, \qquad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 25 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 20 \equiv 9\,.$$

(b) Le déterminant de A_1 étant pair, A_1 n'est pas inversible modulo 26. Le déterminant de A_2 étant divisible par 13, A_2 n'est pas inversible modulo 26. La matrice A_3 est inversible modulo 26. Pour calculer son inverse, on réduit à la forme échelonnée simplifiée la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On multiplie la ligne 1 par $(7)^{-1} = 15$, puis on ajoute 22 fois la ligne 1 à la ligne 2, ensuite on multiplie la ligne 2 par $(3)^{-1} = 9$ et, enfin, on ajoute 7 fois la ligne 2 à la ligne 1 et on obtient

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \end{array}\right).$$

On en déduit l'inverse

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_4 est inversible modulo 26. Pour calculer son inverse, on réduit la matrice A_4 augmentée avec I_3 à la forme échelonnée simplifiée et on obtient

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 14 \\ 9 & 1 & 14 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12.4. Calculons les déterminants modulo 26.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 18 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant étant pair, A_1 n'est pas inversible modulo 26.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 19 & 10 \\ 17 & 25 \end{vmatrix} = 19.$$

Cette matrice est inversible modulo 26. Pour calculer son inverse, on réduit à la forme échelonnée simplifiée la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 19 & 10 & 1 & 0 \\ 17 & 25 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On multiplie la ligne 1 par $(19)^{-1} = 11$, puis on ajoute 9 fois la ligne 1 à la ligne 2 et, ensuite, on ajoute 20 fois la ligne 2 à la ligne 1 et on obtient

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 15 & 20 \\ 0 & 1 & 21 & 1 \end{array}\right).$$

On en déduit que

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 20 \\ 20 & 13 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 8 \\ 20 & 1 & 5 \\ 9 & 20 & 13 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant 6 fois la ligne 1 à la ligne 2 et 17 fois la ligne 1 à la ligne 3, on obtient $|A_3| = 19 - 7 = 12$. La matrice A_3 n'est donc pas inversible modulo 26.

12.5. On calcule d'abord l'inverse de K en réduisant à la forme échelonnée simplifiée la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 17 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

à l'aide des opérations suivantes : multiplier la ligne 2 par $(9)^{-1} = 3$, puis ajouter 9 fois la ligne 2 à la ligne 1. On obtient

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On écrit la représentation numérique du cryptogramme après avoir formé un bloc avec chaque groupe de deux lettres successives et on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 9 & 3 & 7 & 12 \\ 3 & 22 & 19 & 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

On calcule la représentation numérique du message clair, donnée par

$$K^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 9 & 3 & 7 & 12 \\ 3 & 22 & 19 & 7 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 22 & 14 & 5 \\ 9 & 14 & 5 & 21 & 5 \end{pmatrix},$$

dont la représentation alphabétique est BIENVENUEE, donc le message clair est

BIENVENUE .

Remarque. Le message clair est le même qu'à l'exercice 12.1. A noter que la cryptoanalyse par comparaison des fréquences des lettres est inopérante ici.

12.6. On calcule d'abord l'inverse de K en réduisant la matrice K, augmentée de la matrice identité, à la forme échelonnée simplifiée à l'aide des opérations suivantes : ajouter la ligne 1 à la ligne 3, puis multiplier la ligne 2 par $(15)^{-1} = 7$, puis ajouter 20 fois la ligne 2 à la ligne 3, ensuite multiplier la ligne 3 par $(9)^{-1} = 3$, puis ajouter 18 fois la ligne 3 à la ligne 2 et enfin ajouter 2 fois la ligne 2 à la ligne 1. On en déduit

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On forme un bloc avec chaque groupe de 3 lettres successives pour obtenir la représentation numérique du cryptogramme :

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 24 & 13 & 17 & 17 & 25 & 19 & 21 \\ 23 & 23 & 2 & 13 & 25 & 10 & 23 & 25 \\ 17 & 19 & 22 & 12 & 23 & 16 & 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

On effectue le produit

$$K^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 1 & 3 & 19 & 1 & 21 & 5 \\ 1 & 5 & 20 & 19 & 1 & 14 & 1 & 5 \\ 20 & 13 & 9 & 9 & 12 & 7 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

qui est la représentation numérique du message clair

MATHEMATICS IS A LANGUAGE .

12.7. La matrice

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible modulo 26, car $|K| = 9$ est inversible modulo 26. La représentation numérique du message clair est

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 3 & 16 & 20 & 20 & 3 & 14 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 18 & 5 & 9 & 1 & 15 & 18 & 20 \\ 18 & 14 & 15 & 3 & 20 & 14 & 20 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

La représentation numérique du cryptogramme est donnée par le produit

$$K \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 11 & 11 & 2 & 23 & 10 & 14 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 15 & 1 & 3 & 19 & 2 & 8 \\ 19 & 15 & 7 & 8 & 3 & 15 & 9 & 23 & 25 \end{pmatrix},$$

qui s'écrit sous forme alphabétique

ICSWCOKBGKOHBACWCOJSINBWHHY.

12.8. La représentation numérique des deux premiers blocs de deux lettres du cryptogramme est

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 23 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

et celle du message clair correspondant est

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\left|\widetilde{C}\right| = 9$, donc $\widetilde{C}^T$ est inversible. La matrice augmentée

$$(\widetilde{C}^T \,\vdots\, \widetilde{A}^T) = \left(\begin{array}{cc:cc} 23 & 5 & 22 & 15 \\ 1 & 4 & 21 & 12 \end{array}\right)$$

a la forme échelonnée simplifiée

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) = \left(I_2 \,\vdots\, (K^{-1})^T\right).$$

Ainsi,

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La représentation numérique du cryptogramme étant

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 1 & 0 & 13 & 8 & 2 & 6 & 23 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 15 & 14 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

la représentation numérique du message clair est

$$K^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 15 & 18 & 5 & 20 & 15 & 22 & 9 \\ 15 & 12 & 9 & 3 & 19 & 16 & 21 & 15 & 18 \end{pmatrix},$$

dont la forme alphabétique donne le message clair

VOULOIR C'EST POUVOIR .

Autre méthode. Puisque la matrice $\widetilde{A}$ doit vérifier $\widetilde{A} = K^{-1} \cdot \widetilde{C}$ et que $\widetilde{C}$ est inversible, on déduit que $K^{-1} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{C}^{-1}$. Pour calculer $\widetilde{C}^{-1}$, on réduit à la forme échelonnée simplifiée la matrice augmentée

$$(\widetilde{C} \,\vdots\, I_2)$$

et on trouve que

$$\widetilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}.$$

La matrice K^{-1} est donc obtenue en effectuant le produit matriciel

$$\widetilde{A} \cdot \widetilde{C}^{-1} = K^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 11 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on termine en effectuant le produit $K^{-1} \cdot C$. Remarquons que cette dernière méthode demande plus d'opérations que la première.

13. Les codes correcteurs d'erreurs

13.1. (a) Si $k_1(1,0,0,0) + k_2(1,0,1,0) + k_3(0,1,1,0) = (0,0,0,0)$, alors $(k_1 + k_2, k_3, k_2 + k_3) = (0,0,0,0)$ et donc $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(b) Il suffit de constater que

$$(1,0,0,0) + (1,0,1,0) + (0,0,1,0) = (0,0,0,0)\,,$$

car dans $\mathcal{K}$, $1 + 1 = 0$.

13.2. (a) Il suffit d'observer que W est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{K}^3$ du système linéaire $C \cdot x = 0$, avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients dans $\mathcal{K}$. Ainsi, W est un $\mathcal{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^3$.

(b) Soit u dans W, donc tel que $C \cdot u = 0$. On pose $u_2 = k$ et $u_3 = \ell$, où k et ℓ sont des éléments de $\mathcal{K}$. Alors $u_1 = k + \ell$ et donc u est de la forme

$$u = \begin{pmatrix} k+\ell \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = ke_1 + \ell e_2\,, \qquad \text{où } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{e_1, e_2\}$ engendre W et est libre, c'est donc une base de W et $\dim W = 2$.

(c) On déduit de (b) que

$$\begin{aligned} W &= \left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ k, \ell \text{ dans } \mathcal{K} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

13.3. (a) Les mots codés sont

$$T(1,0,1,1) = (0,1,1,0,0,1,1)\,, \qquad T(1,1,0,0) = (0,1,1,1,1,0,0)$$

$$T(0,1,1,1) = (0,0,0,1,1,1,1) \qquad \text{et} \qquad T(1,0,1,0) = (1,0,1,1,0,1,0)\,.$$

(b) Soit y_1, y_2 et y_3 les trois mots reçus de l'énoncé. Pour détecter une erreur dans le mot codé y_i, $i = 1, 2, 3$, on calcule le syndrome $s_i = C_7 \cdot y_i$. On trouve $s_1 = (0, 0, 1)$, $s_2 = (0, 0, 0)$ et $s_3 = (1, 0, 1)$. Comme s_1 et s_3 sont non nuls, les mots reçus correspondant sont erronés. Puisque $s_1 = 001$ représente 1 en binaire, l'erreur est e_1. Le message corrigé est 0010110 et le message transmis est $x_1 = 1110$. Puisque $s_2 = 000$, le message est $x_2 = 0110$. Puisque $s_3 = 101$ représente 5 en binaire, l'erreur est e_5. Le message corrigé est 0100101 et le message transmis est $x_3 = 0101$.

13.4. (a) Les mots codés sont

$$T(1,1,1,0) = (0,0,1,0,1,1,0)\,, \qquad T(0,1,1,0) = (1,1,0,0,1,1,0)\,,$$

$$T(0,1,0,1) = (0,1,0,0,1,0,1) \qquad \text{et} \qquad T(1,1,1,1) = (1,1,1,1,1,1,1)\,.$$

(b) Soit y_1, y_2 et y_3 les trois mots codés de l'énoncé. Pour détecter une erreur dans le mot codé y_i, $i = 1, 2, 3$, on calcule le syndrome $s_i = C_7 \cdot y_i$. On trouve $s_1 = (1, 1, 0)$, $s_2 = (0, 1, 1)$ et $s_3 = (0, 1, 1)$. Ils sont tous non nuls, donc les mots reçus correspondants sont erronés. Puisque $s_1 = 110$ représente 6 en binaire, l'erreur est e_6. Le message corrigé est 1100110 et les composantes 3, 5, 6 et 7 donnent le message transmis qui est $x_1 = 0110$. Puisque $s_2 = 011$ représente 3 en binaire, l'erreur est e_3, le message corrigé est 1110000 et le message transmis est $x_2 = 1000$. Puisque $s_3 = 011$, le message corrigé est 1101001 et le message transmis est $x_3 = 0001$.

13.5. (a) On réduit la matrice augmentée $(G \,\vdots\, I_7)$ à la forme échelonnée simplifiée et on obtient

$$\left(\begin{array}{c:c} I_4 & D \\ \hdashline \mathbb{O}_{3\times 4} & C \end{array}\right), \qquad \text{où } D = \left(\mathbb{O}_{4\times 3} \,\vdots\, I_4 \right)$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit y_1, y_2 et y_3 les mots reçus de l'énoncé. On calcule d'abord les syndromes $s_i = C \cdot y_i$ et on trouve $s_1 = (0, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0)$ et $s_3 = (1, 1, 0)$. Puisque $s_1 = 0$, 0111101 est un mot codé et, d'après la forme de la matrice D, les quatres dernières composantes donnent le mot décodé 1101. Puisque s_2 est la deuxième colonne de C, l'erreur est e_2, le mot corrigé est 0000110 et le mot décodé est 0110. Puisque s_3 est la quatrième et la septième colonne de C, on ne peut, dans ce cas, savoir si l'erreur est e_4 ou e_7.

(c) Ce code détecte une erreur simple mais ne permet pas toujours de la corriger d'une façon unique.

13.6. (a) On réduit la matrice augmentée $(G \,\vdots\, I_7)$ à la forme échelonnée simplifiée et on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc} I_4 & \vdots & D \\ --- & -- & --- \\ \mathbb{O}_{3\times 4} & \vdots & C \end{array} \right), \qquad \text{où } D = (\ I_4 \,\vdots\, \mathbb{O}_{4\times 3}\ )$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit y_1, y_2 et y_3 les trois mots reçus de l'énoncé. On calcule d'abord les syndromes $s_i = C \cdot y_i$ et on trouve $s_1 = (0,0,0)$, $s_2 = (0,0,1)$ et $s_3 = (1,0,1)$. Puisque $s_1 = 0$, 1101011 est un mot codé et, d'après la forme de la matrice D, les quatre premières composantes donnent le mot décodé 1101. Puisque s_2 est la septième colonne de C, l'erreur est e_7, le mot corrigé est 0110110 et le mot décodé est 0110. Puisque s_3 est la première ou la deuxième colonne de C, on ne peut, dans ce cas, savoir si l'erreur est e_1 ou e_2.

(c) Ce code détecte une erreur simple mais ne permet pas toujours de la corriger d'une façon unique.

13.7. La matrice C est une matrice de contrôle si elle a la propriété

$$C \cdot y = 0 \iff y = G \cdot x \qquad \text{pour un } x \text{ dans } \mathcal{K}^\ell.$$

Montrons que $\mathrm{rg}(C) = n - \ell$. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^n$ formé par les solutions du système $C \cdot y = 0$. Puisque

$$\mathrm{rg}(G) = \ell = \dim W = n - \mathrm{rg}(C),$$

on a bien $\mathrm{rg}(C) = n - \ell$. Montrons que $C \cdot G = 0$. Pour tout x dans $\mathcal{K}^\ell$, $y = G \cdot x$ vérifie $C \cdot y = 0 = C \cdot G \cdot x$. En particulier, $C \cdot G \cdot e_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{K}^\ell$. Les vecteurs colonnes $C \cdot G \cdot e_i$ forment les ℓ colonnes de la matrice $C \cdot G$, donc $C \cdot G = 0$ car c'est une matrice dont toutes les colonnes sont nulles.

Réciproquement, supposons que $C \cdot G = 0$ et que $\mathrm{rg}(C) = n - \ell$ et montrons que C est une matrice de contrôle. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^n$ formé par les solutions du système $C \cdot y = 0$. Alors W est un $\mathcal{K}$-sous-espace vectoriel de dimension $n - \mathrm{rg}(C) = \ell$. Soit W_0 l'espace des colonnes de G. Alors W_0 est un $\mathcal{K}$-sous-espace vectoriel de dimension ℓ. Si y appartient à W_0, alors il existe x tel que $y = G \cdot x$ et $C \cdot y = C \cdot G \cdot x = 0$, donc y appartient à W et W_0 est contenu dans W. On conclut que $W = W_0$, car $\dim W = \dim W_0$. Autrement dit $C \cdot y = 0 \iff y = G \cdot x$.

13.8. (a) Il y a $2^4 = 16$ éléments dans $\mathcal{K}^4$, dont l'élément 0000 qui n'est pas admis parmi les colonnes de C. La matrice C admet donc $2^4 - 1$ colonnes et 4 lignes. Elle est donc de type 4×15.

(b) Parmi les colonnes de C, il y a les quatre vecteurs de la base canonique de $\mathcal{K}^4$, donc $\mathrm{rg}(C) = 4$.

(c) Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^{15}$ formé par les solutions du système $C \cdot y = 0$. Alors $\mathrm{Im}(T)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^{15}$ formé de l'ensemble des y dans $\mathcal{K}^{15}$ tels que $C \cdot y = 0$. La dimension de $\mathrm{Im}(T)$ est donc $15 - \mathrm{rg}(C) = 11$.

(d) Le rendement est $r = 11/15$.

14. Chaînes de Markov

14.1. (a) On obtient

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{pmatrix} 7/10 \\ 1/5 \\ 1/10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^{(2)} = Px^{(1)} \, (= P^2 x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}23 \\ 0{,}52 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

(b) On résout le système $(I_3 - P)\,x = 0$ et l'on retient la solution $x = (x_1, x_2, x_3)$ telle que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. On trouve

$$x = \begin{pmatrix} 11/36 \\ 29/72 \\ 7/24 \end{pmatrix}.$$

14.2. (a) On obtient

$$x^{(1)} = \widetilde{P}x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x^{(2)} = \widetilde{P}x^{(1)} \, (= \widetilde{P}^2 x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}24 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

(b) On résout le système $(I_3 - \widetilde{P})x = 0$ et l'on retient la solution x telle que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. On trouve

$$x = \begin{pmatrix} 7/24 \\ 11/36 \\ 29/72 \end{pmatrix}.$$

14.3. (a) Il suffit de dessiner les deux diagrammes de transition et d'identifier respectivement les états E_1, E_2, E_3 de P aux états $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_3$, $\widetilde{E}_1$ de $\widetilde{P}$.

(b) Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ le vecteur d'état stationnaire relativement à la matrice P. D'après (a), la permutation $\tilde{x} = Sx = (x_3, x_1, x_2)$ de (x_1, x_2, x_3) est le vecteur stationnaire de $\widetilde{P}$. Ceci est effectivement vérifié par le résultat de l'exercice 14.2.

(c) En remarquant qu'une permutation des lignes puis des colonnes de P nous donne $\widetilde{P}$ et en écrivant le produit des matrices élémentaires associées à ces permutations, on obtient $\widetilde{P} = S \cdot P \cdot R$ avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement que $S = R^{-1} = R^T$ et donc que la matrice R est orthogonale. Ainsi $\widetilde{P} = R^{-1} \cdot P \cdot R$.

14.4. (a) On procède comme dans l'exercice 14.1(b). Le vecteur d'état stationnaire obtenu est

$$x = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 8/35 \\ 12/35 \end{pmatrix}.$$

(b) Afin de calculer P^k, on diagonalise P. Les valeurs propres de P sont 1, $-1/4$ et $-1/6$ et des vecteurs propres associés respectifs sont

$$\begin{pmatrix} 5/4 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 5/4 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et $D = \operatorname{diag}(1, -1/4, -1/6) = Q^{-1} \cdot P \cdot Q$. Alors $P^k = Q \cdot D^k \cdot Q^{-1}$. Enfin,

$$\lim_{k\to\infty} P^k = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 3/7 \\ 8/35 & 8/35 & 8/35 \\ 12/35 & 12/35 & 12/35 \end{pmatrix}.$$

(c) Pour tout vecteur d'état initial $x^{(0)}$,

$$\lim_{k\to\infty} P^k x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 8/35 \\ 12/35 \end{pmatrix}.$$

14.5. (a) On procède comme dans l'exercice 14.2(b). Le vecteur d'état stationnaire est

$$x = \begin{pmatrix} 12/35 \\ 3/7 \\ 8/35 \end{pmatrix}.$$

(b) Afin de calculer $\widetilde{P}^k$, on diagonalise $\widetilde{P}$. Les valeurs propres de $\widetilde{P}$ sont 1, $-1/4$ et $-1/6$ et des vecteurs propres associés respectifs sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5/4 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $D = \mathrm{diag}(1, -1/4, -1/6) = Q^{-1} \cdot \widetilde{P} \cdot Q$. Alors $\widetilde{P}^k = Q \cdot D^k \cdot Q^{-1}$. Enfin,

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 12/35 & 12/35 & 12/35 \\ 3/7 & 3/7 & 3/7 \\ 8/35 & 8/35 & 8/35 \end{pmatrix}.$$

(c) Pour tout vecteur d'état initial $x^{(0)}$,

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k x^{(0)} = \begin{pmatrix} 12/35 \\ 3/7 \\ 8/35 \end{pmatrix}.$$

14.6. (a) Il suffit de dessiner les deux diagrammes de transition et d'identifier les états E_1, E_2, E_3 de P aux états $\widetilde{E}_2$,$\widetilde{E}_3$, $\widetilde{E}_1$ de $\widetilde{P}$. De plus, on constate que $\widetilde{P} = S \cdot P \cdot R$, où S et R sont les matrices données dans la solution de l'exercice 14.3.

(b) Comme dans l'exercice 14.3, le vecteur stationnaire relativement à $\widetilde{P}$ est $Sx = (x_3, x_1, x_2)$, où $x = (x_1, x_2, x_3)$ est celui relatif à P. On déduit de l'égalité $\widetilde{P} = R^{-1} \cdot P \cdot R$ que $\widetilde{P}^k = R^{-1} \cdot P^k \cdot R$ et que

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k = R^{-1} \cdot \left(\lim_{k\to\infty} P^k\right) \cdot R = S \cdot \left(\lim_{k\to\infty} P^k\right),$$

puisque les trois coefficients sur une ligne donnée de $\lim_{k\to\infty} P^k$ sont égaux. On voit aussi qu'une permutation des lignes de la matrice $\lim_{k\to\infty} P^k$, à l'aide de la matrice S, donne $\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}^k$. Finalement,

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{k\to\infty} \widetilde{P}^k x^{(0)} &= \lim_{k\to\infty} \big(R^{-1} \cdot P^k \cdot R\big) x^{(0)} \\ &= R^{-1} \cdot \left(\lim_{k\to\infty} P^k \cdot \big(R \cdot x^{(0)}\big)\right) \\ &= (y_3, y_1, y_2)\,, \end{aligned}$$

où

$$(y_1, y_2, y_3) = \lim_{k\to\infty} P^k \cdot \big(R \cdot x^{(0)}\big) = \lim_{k\to\infty} P^k \cdot x^{(0)}\,.$$

14.7. Chaque coefficient p_{ij} de la matrice P représente la probabilité de passer de l'état E_j à l'état E_i en une étape, et donc $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur d'état. Le vecteur $y = (y_1, \ldots, y_n) = Px$ vérifie donc $y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq 0$, car c'est une somme de termes positifs. En outre,

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ij}\right) x_j = \sum_{j=1}^n x_j = 1\,.$$

Par conséquent, y est bien un vecteur d'état.

14.8. Le vecteur d'état $x = (c, \ldots, c)$ étant stationnaire, il vérifie $P \cdot x = x$, ce qui s'écrit $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} c = c$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, ou encore $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. La somme des coefficients d'un vecteur d'état étant 1, on a $c + \cdots + c = nc = 1$, donc $c = 1/n$.

14.9. (a) Si on se donne un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ et $x_1 + \cdots + x_n = 1$, comme par exemple $x_i = 1/n$, alors la matrice $P = (x \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, x)$, de type $n \times n$, vérifie

$$P \cdot x = x_1 \cdot x + \cdots + x_n \cdot x = (x_1 + \cdots + x_n) \cdot x = x\,,$$

donc

$$P^2 = (Px \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, Px) = (x \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, x) = P\,.$$

(b) On peut prendre par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = P^2 \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix} = P^2\,.$$

(c) Non, car si P était inversible, alors de $P^2 = P$ on déduirait que $P = I_n$, ce que l'hypothèse exclut.

14.10. (a) Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors $P \cdot x = (x_3, x_2, x_1)$. Donc un vecteur d'état stationnaire est $x = (1/3, 1/3, 1/3)$, car on doit aussi avoir $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Cette solution n'est pas unique, puisque $x = (1/2, 0, 1/2)$ et $x = (0, 1, 0)$ sont aussi des vecteurs d'état stationnaires.

(b) Les valeurs propres de P sont 1 (double) et -1. Des vecteurs propres associés respectifs sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1) = Q^{-1} P Q$. Alors

$$P^k = Q \cdot D^k \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} (1 + (-1)^k)/2 & 0 & (1 - (-1)^k)/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1 - (-1)^k)/2 & 0 & (1 + (-1)^k)/2 \end{pmatrix}.$$

On constate que P^k n'admet pas de limite quand k tend vers l'infini.

(c) La matrice P ne vérifie pas les hypothèses du théorème p.156 qui entraînent l'unicité du vecteur d'état stationnaire et la convergence de P^k. En effet, puisque $P^2 = I_3$, pour tout n, la matrice P^n, qui est soit P soit I_3, n'a pas la propriété que tous ses coefficients sont non nuls.

14.11. (a) Désignons par $p_1^{(k)}$, respectivement $p_2^{(k)}$, la probabilité qu'il fasse beau temps, respectivement qu'il pleuve, dans k jours et posons

$$x^{(k)} = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Le vecteur d'état initial étant $x^{(0)} = (1, 0)$, nous avons $x^{(10)} = P^{10} \cdot x^{(0)}$. Pour calculer P^{10}, on peut utiliser les résultats de (c) de l'exercice 8.12 avec $p = 0{,}250$ et $q = 0{,}338$ et on obtient

$$\begin{aligned} P^{10} = Q \cdot D^{10} \cdot Q^{-1} &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} + \frac{\left(1-p-q\right)^{10}}{p+q} \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}57489 & 0{,}57475 \\ 0{,}42511 & 0{,}42525 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $p_2^{(10)} = 0{,}42511$.

(b) Oui, d'après l'exercice 8.12, car $p + q \neq 2$. Comme $p + q \neq 0$, on déduit de l'exercice 8.12 que

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \frac{1}{p+q}\,(q, p) = \left(0{,}57483\,,\ 0{,}42517\right),$$

par conséquent, $p_1^{(k)} \to 0{,}57483$ lorsque $k \to \infty$. Cette probabilité ne dépend pas de $x^{(0)}$, comme le montre la relation

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \frac{1}{p+q}\,(q, p)\,.$$

15. Stéréogrammes

15.1. La transformation T_G est donnée par

$$T_G(x,y,z) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1/z \end{pmatrix} = \left(f\frac{x}{z}\,,\, f\frac{y}{z}\right)$$

pour tout $z \neq 0$. En remarquant que les points (x,y,z) et (kx,ky,kz), $k \neq 0$, ont la même image par T_G, on déduit que T_G n'est pas injective. La transformation T_G est surjective. En effet, pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, l'élément (x,y,f) de $\mathbb{R}^3$ vérifie bien $T_G(x,y,f) = (x,y)$.

La transformation T_D est donnée par

$$T_D(x,y,z) = \begin{pmatrix} f & 0 & -ef \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1/z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{f}{z}\,x - \frac{f}{z}\,e + e\,,\, \frac{f}{z}\,y\right)$$

pour tout $z \neq 0$. En remarquant que les points (x,y,z) et $\big(k(x-e)+e, ky, kz\big)$, $k \neq 0$, ont la même image par T_D, on déduit que T_D n'est pas injective. La transformation T_D est surjective. En effet, pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, l'élément (x,y,f) de $\mathbb{R}^3$ vérifie bien $T_D(x,y,f) = (x,y)$.

15.2. Les transformations T_G et T_D sont bijectives si tout point du plan $z = f$ est l'image par chacune de ces transformations d'un point de S et d'un seul, c'est-à-dire toute droite joignant un œil à un point du plan $z = f$ coupe S et le coupe en un seul point. La surface S s'étend donc à l'infini dans toutes les directions et toute la surface S est visible, ou encore S n'a pas de parties cachées.

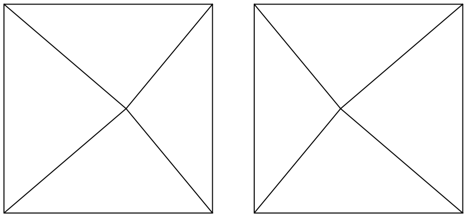
15.3. Les images des sommets de la pyramide par T_G et T_D sont

$$T_G(P_1) = \left(\frac{1}{4}\,,\, -\frac{5}{4}\right), \quad T_G(P_2) = \left(\frac{100}{39}\,,\, -\frac{40}{39}\right), \quad T_G(P_3) = \left(\frac{100}{39}\,,\, \frac{40}{39}\right),$$
$$T_G(P_4) = \left(\frac{1}{4}\,,\, \frac{5}{4}\right), \qquad T_G(P_5) = \left(\frac{12}{7}\,,\, 0\right)$$

et

$$T_D(P_1) = \left(\frac{15}{4}\,,\, -\frac{5}{4}\right), \quad T_D(P_2) = \left(\frac{233}{39}\,,\, -\frac{40}{39}\right), \quad T_D(P_3) = \left(\frac{233}{39}\,,\, \frac{40}{39}\right),$$
$$T_D(P_4) = \left(\frac{15}{4}\,,\, \frac{5}{4}\right), \qquad T_D(P_5) = \left(\frac{33}{7}\,,\, 0\right).$$

D'où le dessin



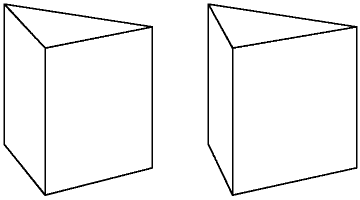
15.4. Les images des sommets par T_G et T_D sont

$$T_G(P_1) = (0{,}62;\ -0{,}62)\,, \qquad T_G(P_2) = (1{,}16;\ -1{,}29)\,,$$
$$T_G(P_3) = (2{,}58;\ -0{,}93)\,, \qquad T_G(P_4) = (0{,}62;\ 1{,}23)\,,$$
$$T_G(P_5) = (1{,}16;\ 0{,}65)\,, \qquad T_G(P_6) = (2{,}58;\ 0{,}93)$$

et

$$T_D(P_1) = (3{,}32;\ -0{,}62)\,, \qquad T_D(P_2) = (3{,}64;\ -1{,}29)\,,$$
$$T_D(P_3) = (5{,}28;\ -0{,}93)\,, \qquad T_D(P_4) = (3{,}32;\ 1{,}23)\,,$$
$$T_D(P_5) = (3{,}64;\ 0{,}65)\,, \qquad T_D(P_6) = (5{,}28;\ 0{,}93)\,.$$

D'où le dessin



15.5. Choisir x dans $[-1, 6]$ et y dans $[-3, 3]$ au hasard. Si $|x - 2{,}75| > 2{,}25$ et $|y| > 2{,}5$, poser $P = (x, y, 80)$; sinon, poser

$$P = \big(x, y, (82 - 4x)\big)$$

si (x, y) est dans le triangle de sommets $(0{,}5;\ -2{,}5)$, $(0{,}5;\ 2{,}5)$ et $(3; 0)$; sinon, poser

$$P = \big(x, y, (70 - 4y)\big)$$

si (x, y) est dans le triangle de sommets $(0{,}5;\ -2{,}5)$, $(5; -2)$ et $(3; 0)$; sinon, poser

$$P = \big(x, y, (58 + 4x)\big)$$

si (x, y) est dans le triangle de sommets $(5; -2)$, $(5; 2)$ et $(3; 0)$; sinon, poser

$$P = \big(x, y, (70 + 4y)\big)$$

si (x, y) est dans le triangle de sommets $(5; 2)$, $(0{,}5;\ 2{,}5)$ et $(3; 0)$. Dessiner sur la feuille $T_G(P)$ et $T_D(P)$ et recommencer.

15.7. Soit I_1 le point de composantes (X, Y, f) dans le repère $Oxyz$. Calculer $T_G^{-1}(X, Y)$ équivaut à chercher l'intersection de la droite OI_1 avec la surface $z = f(x)$ du pont parabolique. On obtient les équations

$$x = kX\,, \qquad y = kY\,, \qquad z = kf = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 62\,,$$

que l'on résout par rapport à k. On obtient une équation du second degré en k :

$$\frac{X^2}{4}\,k^2 - \left(f + \frac{3X}{2}\right) k + 62 = 0\,.$$

La valeur de k qui donne le point visible du pont parabolique, à savoir celui qui est le plus proche de O, est

$$k = \frac{f + 3X/2 - \sqrt{\left(f + 3X/2\right)^2 - 62\,X^2}}{X^2/2}\,. \tag{$*$}$$

Avec cette valeur de k,

$$T_G^{-1}(X, Y) = \begin{cases} (kX, kY, kf) & \text{si } |kY| < 8 \text{ et } -6 \le kX \le 12\,, \\ (2X, 2Y, 80) & \text{sinon}\,. \end{cases} \tag{$**$}$$

15.9. (a) On calcule les coordonnées de I_1 et J_1 à l'aide de la formule (15.4) et on obtient

$$I_1 = (-2; 5) \qquad \text{et} \qquad J_1 = (-2; 3{,}5)\,.$$

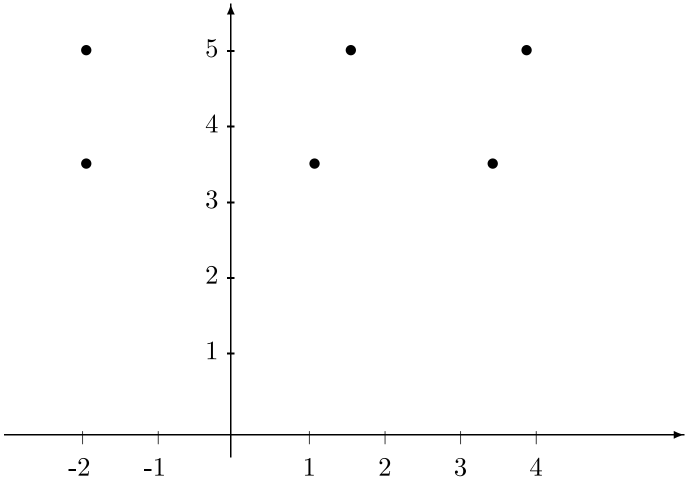
Pour calculer $T_G^{-1}(I_1)$ et $T_G^{-1}(J_1)$, on utilise les formules $(*)$ et $(**)$ de la solution de l'exercice 15.7. Pour $X = -2$, on trouve $k = 1{,}759$ (c'est le même pour I_1 et J_1), d'où $kX = -3{,}518$ et $kY = 8{,}796$ pour $Y = 5$. Par conséquent, $P_1 = T_G^{-1}(I_1) = (-4; 10; 80)$. De même, $kX = -3{,}518$ et $kY = 6{,}157$ pour $Y = 3{,}5$. Par conséquent, $Q_1 = T_G^{-1}(J_1) = (-3{,}518;\ 6{,}157;\ 70{,}373)$. On reprend le procédé et on obtient

$$I_2 = (1{,}5;\ 5) \qquad \text{et} \qquad J_2 = (1{,}02;\ 3{,}5)\,,$$

puis $k = 1{,}497$ pour I_2 et $k = 1{,}507$ pour J_2, d'où $P_2 = (2{,}25;\ 7{,}486;\ 59{,}89)$ et $Q_2 = (1{,}54;\ 5{,}27;\ 60{,}28)$, ce qui permet de conclure que

$$I_3 = (3{,}825;\ 5) \qquad \text{et} \qquad J_3 = (3{,}377;\ 3{,}5)\,.$$

(b)



16. Robustesse des réseaux informatiques

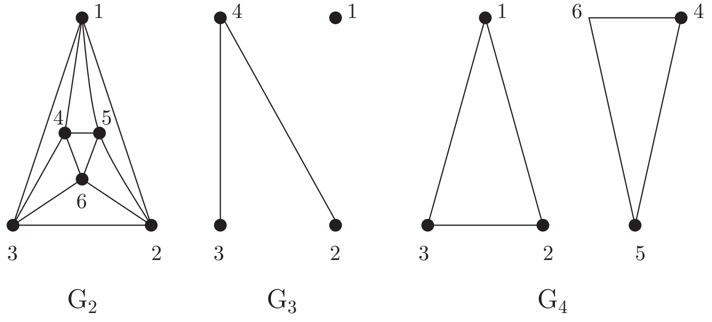
16.1.

Graphe	Simple	Connexe	k-régulier	k
G_1	non	oui	non	–
G_2	oui	oui	oui	4
G_3	oui	non	non	–
G_4	oui	non	oui	2

16.2.

Graphe	Simple	Connexe	k-régulier	k
H_1	oui	oui	oui	3
H_2	oui	non	oui	1
H_3	oui	oui	oui	3
H_4	non	oui	non	–

16.3. D'après la solution de l'exercice 16.1, seul le graphe G_1 n'est pas simple. On numérote les sommets des autres graphes comme suit :



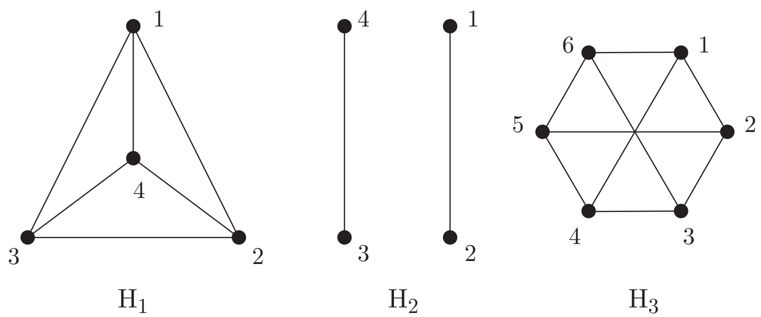
et on déduit les matrices d'adjacences.

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(G_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A(G_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.4. D'après la solution de l'exercice 16.2, seul le graphe H_4 n'est pas simple. On numérote les sommets des autres graphes comme suit :



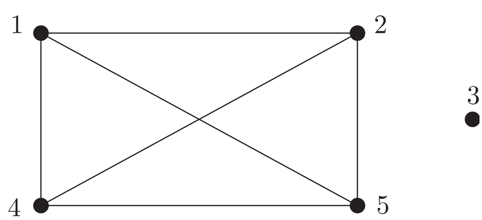
et on déduit les matrices d'adjacences.

$$A(H_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(H_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

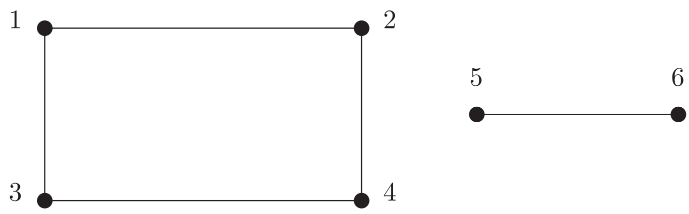
et

$$A(H_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.5. Ce graphe a cinq sommets reliés par des arêtes comme suit :



16.6. Ce graphe a six sommets reliés par des arêtes comme suit :



16.7. Les matrices d'adjacence des graphes G_1 est G_2 sont respectivement

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que le graphe G_2 est obtenu à partir de G_1 en permutant les sommets 3 et 4. Si on permute donc les lignes 3 et 4 de la matrice $A(G_1)$ puis les colonnes 3 et 4 de la matrice obtenue, on retrouve la matrice $A(G_2)$. Ceci revient à multiplier la matrice $A(G_1)$, à gauche, par la matrice élémentaire E obtenue en permutant les lignes 3 et 4 de I_4, puis à multiplier à droite le résultat par E. En effet,

$$E \cdot A(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E \cdot A(G_1) \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A(G_2).$$

16.8. Les matrices d'adjacence des graphes H_1 est H_2 sont respectivement

$$A(H_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A(H_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe H_2 est obtenu à partir de H_1 en permutant les sommets 2 et 4. Pour la même raison que dans la solution de l'exercice 16.7, si F est la matrice élémentaire obtenue en permutant les lignes 2 et 4 de I_4, alors

$$F \cdot A(H_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$F \cdot A(H_1) \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A(H_2).$$

16.9. Observons que

$$A(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $p_n(\lambda) = \det(A(K_n) - \lambda I)$. En ajoutant à la dernière ligne la somme des autres lignes, on constate que

$$p_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En soustraillant la dernière ligne à chacune des autres lignes, on obtient

$$p_n(\lambda) = (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n-1-\lambda)(-1-\lambda)^{n-1}.$$

On en déduit que les valeurs propres du graphe K_n, sont

$$\lambda_1 = n-1, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = -1.$$

16.10. (a) La matrice A est diagonalisable, puisque symétrique. Il existe donc une matrice P inversible telle que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et les λ_i sont les valeurs propres de A. Il en découle d'après l'exercice 2.43 que

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(P \cdot D \cdot P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1} \cdot P \cdot D) = \operatorname{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(b) Il suffit de remarquer que $a_{jj} = 0$, pour tout j, puisque le graphe est sans boucle. La diagonale de A est donc nulle et $\operatorname{Tr}(A) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

16.11. (a) La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) On remarque que le coefficient a_{ij} de la matrice d'adjacence A, étant égal au nombre d'arêtes entre les sommets j et i, est égal au nombre de chemins différents de longueurs 1 entre les sommets i et j. Soit m_{ij} le nombre de chemins différents de longueur 2 entre les sommets i et j. Alors m_{ij} est la somme des nombres de chemins différents de longueurs 2 entre i et j constitués d'un chemin de longueur 1 entre i et k et d'un chemin de longueur 1 entre k et j, en variant k du sommet 1 au sommet 4. D'où

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} a_{kj} = \left(A^2\right)_{ij}.$$

On peut contrôler aisément ce résultat en inspectant le graphe.

16.14. (a) Oui, ce graphe est simple car, sur la diagonale de M, il n'y a que des 0, donc il n'y a pas de boucles, et les coefficients de M sont des 1 ou des 0, donc il n'y a pas d'arêtes multiples.

(b) Oui, ce graphe simple est 3-régulier car la somme des coefficients de chaque ligne de M est 3.

(c) Pour calculer les valeurs propres de M, on calcule $k(\lambda) = \det(M - \lambda I)$, en remplaçant la dernière ligne de la matrice $M - \lambda I$ par la somme de toutes ses lignes. On a donc

$$\begin{aligned} k(\lambda) &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

D'après la solution de l'exercice 17.7, on a

$$\begin{aligned}
k(\lambda) &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\lambda^4(-3-\lambda).
\end{aligned}$$

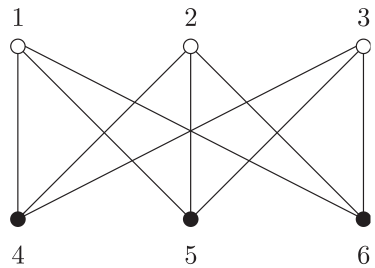
Les valeurs propres de M sont donc :

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_6 = -3.$$

Dans ce cas, la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence est simple. Ce graphe simple et 3-régulier est donc connexe.

(d) Oui, ce graphe est bipartite car il est simple, connexe, 3-régulier et sa plus petite valeur propre est -3.

(e)



On constate bien que G n'a pas de boucle, que chaque sommet de G a 3 voisins, que G est connexe et que, si on colorie les sommets 1, 2, 3 en blanc et les sommets 4, 5, et 6 en noir, alors aucune arête ne joint deux sommets de même couleur.

16.15. (a) Dans le cycle C_n à n sommets, chaque sommet est voisin de deux autres. C_n est donc un graphe 2-régulier avec n arêtes. Si W et W' sont deux sous-ensembles non-vides de C_n ayant chacun k sommets, $0 \neq k \neq n$, tels que W est connexe et W' ne l'est pas, alors ∂W a deux arêtes mais $|\partial W'| > 2$. Donc le sous-ensemble W pour lequel $c(W)$ est minimal sera formé de $[n/2]$ sommets consécutifs du cycle, et

$$i(C_n) = \frac{2}{[n/2]} \sim \frac{4}{n}.$$

(b) La matrice d'adjacence du graphe est $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Puisque $1 = \cos(2kn\pi/n)$ et $0 = \sin(2kn\pi/n)$,

$$A_n \cdot u_k = \begin{pmatrix} \cos(2k\pi/n) + \cos\bigl(2k(n-1)\pi/n\bigr) \\ \cos(0\pi/n) + \cos(4k\pi/n) \\ \vdots \\ \cos\bigl(2k(j-2)\pi/n\bigr) + \cos(2kj\pi/n) \\ \vdots \\ \cos\bigl(2k(n-2)\pi/n\bigr) + \cos(2kn\pi/n) \end{pmatrix}$$

et

$$A_n \cdot v_k = \begin{pmatrix} \sin(2k\pi/n) + \sin\bigl(2k(n-1)\pi/n\bigr) \\ \sin(0\pi/n) + \sin(4k\pi/n) \\ \vdots \\ \sin\bigl(2k(j-2)\pi/n\bigr) + \sin(2kj\pi/n) \\ \vdots \\ \sin\bigl(2k(n-2)\pi/n\bigr) + \sin(2kn\pi/n) \end{pmatrix}.$$

En utilisant les égalités

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

et

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

on obtient

$$A_n \cdot u_k = 2\cos\frac{2k\pi}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2k\pi/n) \\ \vdots \\ \cos\bigl((n-1)2k\pi/n\bigr) \end{pmatrix} = \left(2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot u_k$$

et

$$A_n \cdot v_k = 2\cos\frac{2k\pi}{n}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2k\pi/n) \\ \vdots \\ \sin\bigl((n-1)2k\pi/n\bigr) \end{pmatrix} = \left(2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot v_k.$$

(c) On remarque que, pour $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$, les valeurs propres $\alpha_k = 2\cos(2k\pi/n)$ sont distinctes. Puisque des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants, il suffit de montrer que, pour $k = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, u_k et v_k sont linéairement indépendants. C'est bien le cas puisque pour ces valeurs de k,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2k\pi/n) & \sin(2k\pi/n) \end{vmatrix} = \sin\frac{2k\pi}{n} \neq 0.$$

(d) On déduit de (b) et (c) que, dans le cas où $n = 2p$, les n vecteurs propres $(u_0, u_1, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ de A_n forment une famille libre, donc A_n admet deux valeurs propres simples $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_p = 2\cos(2p\pi/n) = -2$ et $p-1$ valeurs propres doubles $\alpha_k = 2\cos(2k\pi/n)$, $k = 1, \ldots, p-1$, et dans le cas où $n = 2\ell + 1$, les n vecteurs propres de A_n $(u_0, u_1, \ldots, u_\ell, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$ forment une famille libre, donc A_n admet une valeur propre simple $\alpha_0 = 2$ et ℓ valeurs propres doubles $\alpha_k = 2\cos(2k\pi/n)$, $k = 1, \ldots, \ell$. Dans les deux cas, on a $\alpha_0 = 2 > \alpha_1 = 2\cos(2\pi/n) > \alpha_k = 2\cos(2k\pi/n)$, $k = 2, \ldots, [n/2]$. Par conséquent, avec les notations du chapitre 16, $\lambda_1 = \alpha_0$, $\lambda_2 = \alpha_1$,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) \sim \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2$$

et l'inégalité de Cheeger-Buser donne

$$\frac{2\pi^2}{n^2} \sim 1 - \cos\frac{2\pi}{n} \leq i(C_n) \leq \sqrt{8\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)} \sim \frac{4\pi}{n}.$$

16.16. (a) Puisque chaque sommet du graphe K_n est voisin des $n-1$ autres sommets, c'est un graphe $(n-1)$-régulier. Si $W \subseteq V$ est tel que $|W| = \ell$, alors $|V \setminus W| = n - \ell$ et $|\partial W| = \ell(n-\ell)$, car chaque sommet de W est voisin de chaque sommet de $V \setminus W$. Remarquons que $c(W)$ ne change pas si on remplace ℓ par $n - \ell$. Pour calculer $i(K_n)$, on peut donc supposer que $\ell \leq n - \ell$, c'est-à-dire $\ell \leq n/2$. Dans ce cas $c(W) = n - \ell$ et $c(W)$ est minimal lorsque ℓ est maximal, c'est-à-dire $\ell = [n/2]$. Par conséquent,

$$i(K_n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] \sim \frac{n}{2}.$$

(b) D'après l'exercice 16.9, $\lambda_1 = n - 1$ et $\lambda_2 = -1 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n$, donc $\lambda_1 - \lambda_2 = (n-1) - \lambda_2 = n$ et l'inégalité de Cheeger-Buser donne

$$\frac{n}{2} \leq i(K_n) \leq \sqrt{2n(n-1)}.$$

17. Exercices de révision

17.1. (a) Vrai, car pour tout k dans $\mathbb{R}$, kx_0 est aussi une solution.

(b) Faux, car l'égalité ne vaut que si A et B commutent.

(c) Faux, car la matrice $\operatorname{diag}(1, 0)$ est diagonale mais n'est pas inversible. Néanmoins, l'inverse d'une matrice diagonale inversible est diagonale.

(d) Vrai, car dans ce cas, la transposée de l'égalité $A \cdot A^{-1} = I$ est $(A^{-1})^T \cdot A = I$, ce qui implique que $A^{-1} = (A^{-1})^T$.

(e) Faux car, par exemple, si les colonnes de la matrice de la transformation sont égales, alors les images des deux vecteurs directeurs du plan sont deux vecteurs proportionnels et, s'ils ne sont pas nuls, l'image du plan est une droite.

(f) Faux car, par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $\det(A + B) = \det(I) = 1$ mais $\det(A) = \det(B) = 0$.

(g) Faux car, par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 1$ mais les deux lignes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

17.2. (a) Faux, car 0 n'est pas une solution du système $A \cdot x = b$.

(b) Vrai, car si $ku + \ell v = 0$, alors $0 = \langle u, ku + \ell v \rangle = k\|u\|^2$, d'où $k = 0$ et donc $\ell = 0$.

(c) Faux car, par exemple, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel ; de plus $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 2$ mais

$$u = (0, 1) \neq \langle u, e_1 \rangle e_1 + \frac{1}{2} \langle u, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{2} (1, 1).$$

(d) Vrai, car x est solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$ équivaut à $Ax = \operatorname{proj}_W b$, où W est l'espace des colonnes de A. Or ce dernier système admet au moins une solution car $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\big(A \mathrel{\vdots} \operatorname{proj}_W b\big)$.

(e) Faux car, par exemple, $A = \operatorname{diag}(1, 0)$ est diagonalisable.

(f) Faux car, par exemple, si $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $T(x) = (x, 0)$, alors $\ker(T) = \{0\}$, donc T est injective mais aucun y dans $\mathbb{R}$ ne vérifie $T(y) = (0, 2)$, donc T n'est pas surjective. A noter que l'assertion est vraie sous l'hypothèse supplémentaire $\dim(V) = \dim(W)$.

(g) Vrai, car si $T \circ T^{-1} = I_d$, alors

$$\left[T \circ T^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = \left[I_d\right]_{\mathcal{B}} = I\,.$$

17.3. Les équations $k_1 \cos(t) + k_2 \cos(2t) + k_3 \cos(3t) = 0$ pour tout t dans $]-1/7, 1/7[$ impliquent (par dérivation à l'ordre 2 et 4) que pour tout t dans $]-1/7, 1/7[$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -k_1 \cos(t) & - & 2^2 k_2 \cos(2t) & - & 3^2 k_3 \cos(3t) & = & 0 \\ k_1 \cos(t) & + & 2^4 k_2 \cos(2t) & + & 3^4 k_3 \cos(3t) & = & 0\,. \end{array}\right.$$

En posant $t = 0$, on obtient donc le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & + & k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ k_1 & + & 2^2 k_2 & + & 3^2 k_3 & = & 0 \\ k_1 & + & 2^4 k_2 & + & 3^4 k_3 & = & 0\,, \end{array}\right.$$

qui n'a clairement que la solution triviale puisque le déterminant de la matrice des coefficients n'est pas nul. Ainsi, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

17.4. (a) On calcule d'abord le polynôme caractéristique de A. En ajoutant à la première ligne de $A - \lambda I$ ses deux autres lignes, on obtient

$$\det(A - \lambda I) = (10 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 sont les solutions des système respectifs

$$(A - 10\,I)x = 0\,, \qquad (A - 6I)x = 0 \quad \text{et} \quad (A - 5I)x = 0$$

et s'écrivent respectivement sous la forme kp_1, ℓp_2 et tp_3 avec $k, \ell, t \neq 0$, où

$$p_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $P = \left(p_1 \,\vdots\, p_2 \,\vdots\, p_3\right)$ et $D = \operatorname{diag}(10, 6, 5)$ on obtient $P^{-1}AP = D$.

(b) La solution étant $k_1 e^{10t} p_1 + k_2 e^{6t} p_2 + k_3 e^{5t} p_3$, elle s'écrit

$$x(t) = \begin{pmatrix} 9k_1 e^{10t} - k_2 e^{6t} + k_3 e^{5t} \\ 7k_1 e^{10t} + k_2 e^{6t} - 2k_3 e^{5t} \\ 4k_1 e^{10t} + k_3 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

(c) Si λ est une valeur propre de B, alors $10\,\lambda$ est une valeur propre de A. En effet

$$\det(B-\lambda I)=\det\left(\frac{1}{10}\,A-\lambda I\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^3\det(A-10\,\lambda I)=0\,.$$

Les valeurs propres de B sont donc $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6/10$ et $\lambda_3=5/10$.

(d) Sachant que, pour tout nombre k, kp_1 vérifie $A(kp_1)=10\,kp_1$ on en déduit que $B(kp_1)=kp_1$. Le vecteur d'état stationnaire x vérifie donc $x=kp_1$ avec $k(9+7+4)=1$, d'où

$$x=\frac{1}{20}\,p_1=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}9\\7\\4\end{pmatrix}.$$

(e) On sait que $\lim_{k\to\infty}B^k=\big(x\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,x\big)$, où x est le vecteur d'état stationnaire. Donc

$$\lim_{k\to\infty}B^k=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}9&9&9\\7&7&7\\4&4&4\end{pmatrix}.$$

17.6. (a) On vérifie la symétrie :

$$\langle x,y\rangle=y^T(Ax)=\big(y^T(Ax)\big)^T=\big(Ax\big)^Ty=x^T(A^Ty)=x^T(Ay)=\langle y,x\rangle$$

puis la linéarité :

$$\begin{aligned}\langle k_1x_1+k_2x_2,y\rangle &= y^T\big(A(k_1x_1+k_2x_2)\big)=k_1y^T(Ax_1)+k_2y^T(Ax_2)\\ &= k_1\langle x_1,y\rangle+k_2\langle x_2,y\rangle\end{aligned}$$

et enfin la positivité : la matrice A étant symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que $A=PDP^T$. Ainsi,

$$\langle x,x\rangle=x^T(PDP^Tx)=\big(P^Tx\big)^TD(P^Tx)\,.$$

Notons $z=P^Tx$. Si $z=(z_1,\ldots,z_n)$, alors

$$z^TDz=\lambda_1z_1^2+\cdots+\lambda_nz_n^2\geq 0\quad\text{car }\lambda_i\geq 0\text{ pour tout }i\,.$$

Si $\langle x,x\rangle=0$, alors

$$z^TDz=0\iff z_1=\cdots=z_n=0\iff P^Tx=0\,,$$

car $\lambda_i>0$ pour tout $i=1,\ldots,n$. Donc $x=0$. Ces trois propriétés étant vérifiées, il s'ensuit que l'opération donnée est bien un produit scalaire.

(b) On vérifie que

$$\langle e_1,e_2\rangle=e_2^T(Ae_1)=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}=0\,.$$

De même, on trouve $\langle e_1,e_3\rangle=\langle e_2,e_3\rangle=0$.

(c) Le vecteur e_4 cherché doit vérifier $\langle e_1, x\rangle = 0$, $\langle e_2, x\rangle = 0$ et $\langle e_3, x\rangle = 0$. Or,

$$\langle e_1, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}(Ae_1) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0\,,$$
$$\langle e_2, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}(Ae_2) = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\,,$$
$$\langle e_3, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}(Ae_3) = x_4 = 0\,.$$

Ceci conduit au système homogène

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

On le résout et on trouve par exemple $e_4 = (-2, 1, 1, 0)$.

(d) La meilleure approximation de x par des éléments de W est la projection orthogonale de x sur W. Pour la déterminer, on calcule

$$\langle x, e_1\rangle = 0\,, \qquad \langle x, e_2\rangle = 30\,, \qquad \langle x, e_3\rangle = 12\,,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = 5\,, \qquad \langle e_2, e_2\rangle = 5 \quad \text{et} \quad \langle e_3, e_3\rangle = 1\,.$$

D'où

$$\operatorname{proj}_W(x) = 6e_2 + 12e_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ -24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

17.7. (a) On développe le déterminant selon la dernière colonne et on recommence cette opération jusqu'à obtenir

$$\left|\begin{array}{c:c} A & \mathbb{O} \\ \hdashline B & I \end{array}\right| = \det(A)\,.$$

(b) On décompose la matrice cherchée M en blocs M_1, M_2, M_3, M_4 pour pouvoir effectuer le produit

$$\left(\begin{array}{c:c} A & \mathbb{O} \\ \hdashline B & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} M_1 & M_2 \\ \hdashline M_3 & M_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} I & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & C \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c:c} M_1 & M_2C \\ \hdashline M_3 & M_4C \end{array}\right).$$

En identifiant les deux matrices, on obtient $M_1 = A$, $M_3 = B$, $M_2C = \mathbb{O}$ et $M_4C = C$. Une solution possible est $M_1 = A$, $M_3 = B$, $M_2 = \mathbb{O}$ et $M_4 = I$. D'où

$$M = \left(\begin{array}{c:c} A & \mathbb{O} \\ \hdashline B & I \end{array}\right).$$

(c) D'après (b),

$$\det\begin{pmatrix} A & \vdots & \mathbb{O} \\ -- & - & -- \\ B & \vdots & C \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & \vdots & \mathbb{O} \\ -- & - & -- \\ B & \vdots & I \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} I & \vdots & \mathbb{O} \\ -- & - & -- \\ \mathbb{O} & \vdots & C \end{pmatrix}$$
$$= \det(A)\cdot\det(C)\,.$$

(d) D'après l'indication et (c),

$$\det\begin{pmatrix} B & \vdots & C \\ -- & - & -- \\ A & \vdots & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \vdots & I \\ -- & - & -- \\ C & \vdots & \mathbb{O} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} C^{-1}A & \vdots & \mathbb{O} \\ -- & - & -- \\ B & \vdots & C \end{pmatrix}$$
$$= \left((-1)^{n+2}\right)^n \det(C)\det(C^{-1}A)\det(C)$$
$$= -\det(A)\det(C)\,.$$

17.8. (a) Montrons que la famille $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_\ell)$ engendre l'espace vectoriel $W+W'$. Soit v un élément de $W+W'$. Il s'écrit $v=w+w'$, où w est dans W et w' est dans W'. Puisque $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_m)$ est une base de W, elle engendre W. On peut donc écrire

$$w=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n+\mu_1f_1+\cdots+\mu_mf_m\,, \tag{$*$}$$

où λ_i, μ_j sont des nombres. De même, on peut exprimer w' dans la base $(e_1,\ldots,e_n,g_1,\ldots,g_\ell)$:

$$w'=\lambda'_1e_1+\cdots+\lambda'_ne_n+\mu'_1g_1+\cdots+\mu'_\ell g_\ell\,, \tag{$**$}$$

où λ'_i, μ'_j sont des nombres. Compte tenu de $(*)$ et $(**)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} v &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_ie_i+\sum_{i=1}^m \mu_if_i\right)+\left(\sum_{i=1}^n \lambda'_ie_i+\sum_{i=1}^\ell \mu'_ig_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n(\lambda_i+\lambda'_i)e_i+\sum_{i=1}^m \mu_if_i+\sum_{i=1}^\ell \mu'_ig_i\,. \end{aligned}$$

Ainsi, v est élément de $\mathscr{L}(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_\ell)$.

Montrons à présent que $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_\ell)$ est une famille libre. Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell)$ des nombres tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_ie_i+\sum_{i=1}^m \beta_if_i+\sum_{i=1}^\ell \gamma_ig_i=0\,.$$

Cette égalité donne $\sum_{i=1}^n \alpha_ie_i+\sum_{i=1}^m \beta_if_i=-\sum_{i=1}^\ell \gamma_ig_i$. Puisque le membre de gauche de cette dernière égalité appartient à W et celui de droite à W',

on déduit que $-\sum_{i=1}^{\ell}\gamma_i g_i \in W \cap W'$. Par conséquent, il existe des nombres $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tels que
$$-\sum_{i=1}^{\ell}\gamma_i g_i = \sum_{i=1}^{n}\delta_i e_i\,.$$
Ainsi $\sum_{i=1}^{n}\delta_i e_i + \sum_{i=1}^{\ell}\gamma_i g_i = 0$. Comme $(e_1, \ldots, e_n, g_1, \ldots, g_\ell)$ est une famille libre, il s'ensuit que $\delta_i = 0$ et $\gamma_i = 0$. Dès lors, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{m}\beta_i f_i = 0$ et comme $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$ est une famille libre, $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$. Ainsi $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_\ell)$ est libre. Cette famille est donc une base de $W + W'$.

(b) Selon la partie (a), $\dim(W \cap W') = n$, $\dim(W) = n + m$, $\dim(W') = n + \ell$ et $\dim(W + W') = n + m + \ell$. Ainsi,
$$\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')\,,$$
ce qui nous donne la formule cherchée.

17.9. (a) La forme matricielle de ce système est $Ax = b$, où
$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ k-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Pour pouvoir le résoudre par la méthode de Cramer, il faut que $\det(A) \neq 0$. Or, une forme échelonnée de A étant
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & k-6 & -5 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix},$$
on déduit que $C = \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$.

(b) La solution demandée est $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec
$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 5 & k & -1 \\ 7 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ k-5 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$
$$x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & k & 5 \\ k-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$
(c) Dans ce cas, la forme échelonnée simplifiée de la matrice augmentée est
$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 14/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
D'où la solution générale $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec
$$x_1 = \frac{14}{5} - 3t\,, \qquad x_2 = t\,, \qquad x_3 = \frac{3}{5}\,, \qquad t \text{ un nombre}\,.$$

17.12. (a) L'espace des colonnes de A est l'ensemble des y dans $\mathbb{R}^m$ de la forme

$$y = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n\,, \qquad \text{où } A = (a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n) \text{ et } x_1, \ldots, x_n \text{ dans } \mathbb{R}\,.$$

Or, $\mathrm{Im}(T_1)$ est l'ensemble des y dans $\mathbb{R}^m$ tels qu'il existe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$y = Ax = (a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n\,.$$

Ces deux ensembles sont donc identiques.

(b) Soit y dans $\mathrm{Im}(T_1)$. Il existe x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $y = Ax = B(Cx)$. Donc y est dans $\mathrm{Im}(T_2)$ et $\mathrm{Im}(T_1) \subset \mathrm{Im}(T_2)$. D'après (a) et l'hypothèse,

$$\dim \mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \dim \mathrm{Im}(T_2)\,.$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{Im}(T_2)$.

17.13. (a) Puisque $[T]_{\mathcal{B}} = \big([T(e_1)]_{\mathcal{B}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [T(e_4)]_{\mathcal{B}}\big)$, on obtient

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Un vecteur v dans V est dans $\ker(T)$ si $T(v) = 0$, ce qui revient à $[T]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [0]_{\mathcal{B}}$. Donc $[v]_{\mathcal{B}}$ doit être une solution du système $[T]_{\mathcal{B}} \cdot x = 0$. La forme échelonnée simplifiée de $[T]_{\mathcal{B}}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{d'où } [v]_{\mathcal{B}} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où k est un nombre. Une base de $\ker(T)$ est donc formée du seul vecteur

$$v_0 = e_1 + e_2 + e_4\,.$$

(c) Un vecteur w est dans $\mathrm{Im}(T)$ s'il existe v dans V tel que $T(v) = w$, ce qui équivaut à $[T]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}}$. Donc $[w]_{\mathcal{B}}$ doit être dans l'espace des colonnes de $[T]_{\mathcal{B}}$. Nous avons vu ci-dessus que la forme échelonnée simplifiée de $[T]_{\mathcal{B}}$ admet trois pivots dans les trois premières colonnes. Les trois premières colonnes de $[T]_{\mathcal{B}}$, à savoir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment donc une base de l'espace des colonnes de cette matrice. Posons

$$\begin{aligned} w_1 &= T(e_1) = e_2 + e_4\,, \\ w_2 &= T(e_2) = 3e_1 + e_2 + 3e_3 + 2e_4\,, \\ w_3 &= T(e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4\,. \end{aligned}$$

Alors (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathrm{Im}(T)$.

(d) D'après l'hypothèse,

$$[T(e_1')]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'} \cdot [e_1']_{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 [e_1']_{\mathcal{B}'}\,,$$

d'où $T(e_1') = \lambda_1 e_1'$. Donc

$$\lambda_1 [e_1']_{\mathcal{B}} = [T(e_1')]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot [e_1']_{\mathcal{B}}\,,$$

ce qui implique que $[e_1']_{\mathcal{B}}$ est un vecteur propre de la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ associé à la valeur propre λ_1. On procède de même avec $[e_i']_{\mathcal{B}}$, pour $i = 2, 3, 4$.

(e) D'abord, déterminons les vecteurs propres de la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $-\lambda(\lambda-1)(2-\lambda)(1+\lambda)$ et les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ et $\lambda_4 = 0$. Les vecteurs propres respectifs sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et d'après (d), la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_4, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_4)$ répond à la question.

Ainsi,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On réduit la matrice augmentée $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \,\vdots\, I_4)$ à la forme échelonnée simplifiée, qui est $(I_4 \,\vdots\, P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})$, et on obtient

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17.14. (a) En ajoutant à la première colonne de A ses cinq autres colonnes, on obtient

$$\det(A) = (6-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant ci-dessus, on retranche la première colonne à chacune des cinq autres, puis on développe le déterminant suivant la première ligne et on obtient

$$\det(A) = (6-a)(-a)^5 = a^5(a-6)\,.$$

(b) Tous les coefficients de $(A + aI_6)$ sont égaux à 1. En particulier, ses lignes sont proportionnelles, donc son déterminant est nul. De $\det(A + aI_6) = 0$, on déduit que $-a$ est une valeur propre de A.

(c) On cherche une base de l'espace des solutions du système $(A + aI_6) \cdot x = 0$. Une forme échelonnée simplifiée de $(A + aI_6)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc } x = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}$$

où k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 sont des nombres. Une base du sous-espace propre $S(-a)$ est donc $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) La matrice A étant symétrique, ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \neq -a$, alors $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour le produit scalaire usuel et $(e_1, \ldots, e_5)$ la base trouvée dans (c). D'où

$$-x_1 + x_2 = -x_1 + x_3 = -x_1 + x_4 = -x_1 + x_5 = -x_1 + x_6 = 0$$

et $x = x_1 v$ où $v = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. L'autre sous-espace propre est donc $\mathscr{L}(v)$.

(e) Il suffit de calculer Av et de remarquer qu'il est formé par la somme des colonnes de A, on obtient donc $Av = (6-a)v$. On en déduit que $\mathscr{L}(v)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 6 - a$.

(f) On dispose de six vecteurs propres de A linéairement indépendants. Si on pose $P = \left(e_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, e_5 \,\vdots\, v\right)$ et $D = \operatorname{diag}(-a, -a, -a, -a, -a, 6 - a)$, alors $P^{-1}AP = D$.

(g) D'après (f),

$$\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(D) = a^5(a-6)\,.$$

17.16. (a) De l'hypothèse $A = BC$, on déduit que si

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n\,,$$

alors pour tout $k = 1, \ldots, m$, $a_{kj} = \sum_{i=1}^n b_{ki}c_{ij}$, d'où

$$a_j = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_{1i}c_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{mi}c_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_{ij} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_{ij} b_i\,.$$

(b) De (a), on déduit que a_j est dans $\mathscr{L}(b_1, \ldots, b_n)$ pour tout $j = 1, \ldots, m$ et par conséquent que $\mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m) \subset \mathscr{L}(b_1, \ldots, b_n)$ et $\dim \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_m) \leq n$. Donc $\operatorname{rg} A \leq n$.

17.17. (a) La matrice du système est

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On développe le déterminant de A_n selon la première colonne et on obtient $\det(A_n) = \det(T_{n-1}) + (-1)^{n+1}\det(T'_{n-1})$, où T_{n-1} est une matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale et T'_{n-1} est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale. Par conséquent,

$$\det(A_n) = 1 + (-1)^{n+1}\,.$$

(c) Si n est impair, alors $\det(A_n) = 2 \neq 0$, donc A_n est inversible et sa forme échelonnée simplifiée est I_n, qui a n pivots. Par conséquent, $\operatorname{rg}(A_n) = n$. Si n est pair, alors $\det(A_n) = 0$ et donc $\operatorname{rg}(A_n) \leq n - 1$. Mais les $n - 1$ premières lignes de A_n sont linéairement indépendantes, d'où $\operatorname{rg}(A_n) = n - 1$.

(d) Dans ce cas,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det(A_3) = 2$. On peut donc appliquer la formule de Cramer et obtenir la solution $x = (x_1, x_2, x_3)$, où

$$x_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ k_2 & 1 & 1 \\ k_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 1 \\ 1 & k_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad x_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 1 & 0 & k_3 \end{vmatrix},$$

et finalement

$$x = \frac{1}{2}\,(k_1 - k_2 + k_3,\ \ k_1 + k_2 - k_3,\ \ -k_1 + k_2 + k_3)\,.$$

(e) Dans ce cas, si on note L une forme échelonnée de la matrice augmentée du système, alors

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 - k_1 + k_2 - k_3 \end{pmatrix}.$$

Il en découle que si $k_4 - k_1 + k_2 - k_3 \neq 0$, alors ce système n'a pas de solution. La condition cherchée est donc $k_4 - k_1 + k_2 - k_3 = 0$, et dans ces conditions la solution générale est

$$x = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_2 - k_3 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où t est un nombre.

17.20. (a)$\Rightarrow$(b) : Montrons que $\ker(T) \subset \ker(T \circ T)$. Soit x dans $\ker(T)$. Alors $T(x) = 0$ et donc $T\big(T(x)\big) = 0$, car T est linéaire. Ainsi $T \circ T(x) = 0$ et x appartient à $\ker(T \circ T)$.

Montrons que $\ker(T \circ T) \subset \ker(T)$. Soit y dans $\ker(T \circ T)$. Alors $T\big(T(y)\big) = 0$ et donc $T(y)$ est dans $\ker(T)$. Or, $T(y)$ est dans $\mathrm{Im}(T)$, par conséquent $T(y)$ est dans $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$ d'après l'hypothèse. Ainsi, $T(y) = 0$ et donc y est dans $\ker(T)$.

Des inclusions $\ker(T) \subseteq \ker(T \circ T)$ et $\ker(T \circ T) \subseteq \ker(T)$ on déduit l'égalité $\ker(T \circ T) = \ker(T)$.

(b)$\Rightarrow$(a) : Soit x dans $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)$. Il existe y tel que $x = T(y)$ et $T(x) = 0$. D'où $T(x) = T\big(T(y)\big) = T \circ T(y) = 0$. Donc y appartient à $\ker(T \circ T) = \ker(T)$, d'après l'hypothèse. Ainsi, $x = T(y) = 0$, donc $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

17.21. (a) Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = (25 - \lambda)(25 - \sqrt{2} - \lambda)(25 + \sqrt{2} - \lambda)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$\lambda_1 = 25\,, \qquad \lambda_2 = 25 - \sqrt{2}\,, \qquad \lambda_3 = 25 + \sqrt{2}\,.$$

(b) Oui, A est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes.

(c) Oui, A est orthogonalement diagonalisable car elle est symétrique.

(d) Pour résoudre ce système, on diagonalise A. Les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 sont les solutions des systèmes respectifs

$$(A - 25\,I)x = 0\,, \qquad \big(A - (25 - \sqrt{2})I\big)x = 0 \quad \text{et} \quad \big(A - (25 + \sqrt{2})I\big)x = 0$$

et s'écrivent respectivement sous la forme kp_1, $k \neq 0$, kp_2, $k \neq 0$ et kp_3, $k \neq 0$, où

$$p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système différentiel est donc

$$x(t) = k_1 e^{25t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{(25-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + k_3 e^{(25+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(e) On réduit la matrice augmentée $(A \,\vdots\, I)$ à la forme échelonnée simplifiée à l'aide des opérations de $\mathcal{F}$ et on obtient $(I \,\vdots\, A^{-1})$, avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Sachant que le cryptogramme est obtenu par un 3-chiffrement de Hill à l'aide de la matrice A, on regroupe chaque groupe de trois lettres successives en un bloc, puis on écrit sa représentation numérique et on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

On déchiffre en effectuant le produit

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 15 & 0 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

La représentation alphabétique de ce message est GOODZZ donc le message clair est GOOD.

17.22. (a) Par hypothèse, la transformation T est non nulle, donc il existe v_0 dans V tel que $T(v_0) \neq 0$ et donc $\dim \operatorname{Im}(T) \geq 1$. Mais $\operatorname{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, d'où $\dim \operatorname{Im}(T) \leq 1$. Par conséquent, $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$ et T est surjective.

(b) Puisque T est linéaire, $\dim \ker(T) = \dim(V) - \dim \operatorname{Im}(T) = n - 1$.

(c) Si $(e_1, \ldots, e_j)$ est une base de $\ker(T)$, alors $\dim\ker(T) = j$. Donc $j = n-1$ d'après (b)

(d) Le vecteur e_n de la base $\mathcal{B}$ n'est pas dans $\ker(T) = \ker(S)$, donc $T(e_n) \neq 0$ et $S(e_n) \neq 0$. Posons $\ell = S(e_n)/T(e_n)$. Alors $S(e_j) = \ell T(e_j) = 0$, pour tout $j = 1, \ldots, n-1$, et $S(e_n) = \ell T(e_n)$. Donc $S(v) = \ell T(v)$ pour tout v dans V, car l'égalité a lieu pour tous les vecteurs d'une base.

17.23. (a) En remarquant que $A = \big(a_1 a \,\vdots\, a_2 a \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n a\big)$, on déduit que les colonnes de A sont toutes proportionnelles à a, qui est non nul, et donc que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

(b) Comme les colonnes de A sont proportionnelles, $\det(A) = 0$.

(c) $A^2 = a \cdot a^T \cdot a \cdot a^T = a \cdot (a^T \cdot a) \cdot a^T = \|a\|^2 A$.

(d) En remarquant que $A \cdot a = a \cdot a^T \cdot a = a \cdot (a^T \cdot a) = \|a\|^2 a$, on déduit que $\|a\|^2$ est une valeur propre de A.

(e) Puisque $\det(A) = 0$, $\lambda = 0$ est une valeur propre de A.

(f) La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda = 0$ est la dimension du sous-espace des solutions du système $A \cdot x = 0$, qui est égale à $n - \mathrm{rg}(A) = n-1$.

(g) La matrice A est orthogonalement diagonalisable car elle est symétrique ; en effet, $A^T = \big(a \cdot a^T\big)^T = a \cdot a^T = A$.

17.24. (a) Puisque $\det\big([T]_{\mathcal{B}'}\big) = -5 \neq 0$, $\ker(T) = \{0\}$ et la transformation T est injective.

(b) Comme e'_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}'$, $b_i = \big[T(e'_i)\big]_{\mathcal{B}'}$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$, d'où

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) De (b), on déduit que

$$\begin{array}{lclcl} T(e'_1) & = & e'_1 + 2e'_2 + e'_4 & = & 2 + 2t^2 - 2t^3 \\ T(e'_2) & = & e'_1 + e'_3 & = & 1 + t + t^2 + t^3 \\ T(e'_3) & = & e'_2 + e'_3 & = & 2 \\ T(e'_4) & = & e'_2 + 2e'_4 & = & 1 - 2t + 2t^2 - t^3 \,. \end{array}$$

(d) Pour déterminer l'image d'un vecteur par T, il faut d'abord calculer ses composantes dans la base $\mathcal{B}'$. Si $k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + c_3 e'_3 + c_4 e'_4$, alors

$$c_1 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \qquad c_2 = \frac{k_0 - k_3}{2}, \qquad c_3 = \frac{k_0 + k_3}{2}, \quad c_4 = \frac{k_2 - k_1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&T(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3)\\
&\qquad = c_1 T(e_1') + c_2 T(e_2') + c_3 T(e_3') + c_4 T(e_4')\\
&\qquad = \frac{1}{2}\,(3k_0 + k_1 + 3k_2 + k_3) + \frac{1}{2}\,(k_0 + 2k_1 - 2k_2 - k_3)t\\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\,(k_0 + 2k_2 - k_3)t^2 + \frac{1}{2}\,(k_0 - k_1 - 3k_2 - k_3)t^3\,.
\end{aligned}$$

(e) On sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big([e_1']_{\mathcal{B}} \vdots \cdots \vdots [e_4']_{\mathcal{B}}\big)$. On obtient donc facilement

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, à l'aide du calcul effectué en (d), on obtient

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) On peut déduire $[T]_{\mathcal{B}}$ de (d) ou effectuer le produit $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Dans les deux cas, on obtient

$$[T]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

17.25. Sachant que le cryptogramme est obtenu par un 2-chiffrement de Hill, on regroupe chaque groupe de deux lettres successives en un bloc puis on écrit sa représentation numérique et on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 20 & 25 & 16\\ 19 & 24 & 3 & 20 & 15 \end{pmatrix}.$$

La représentation numérique des deux premiers blocs de deux lettres du cryptogramme est donc

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 21\\ 19 & 24 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible dans $\mathcal{F}$ car $|D| \equiv 25$ et 25 est inversible. De même, la représentation numérique des deux premiers blocs de deux lettres du message clair est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 19\\ 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer K^{-1}, où K est la clé du chiffrement, on réduit la matrice $(D^T \mid A^T)$ à la forme échelonnée simplifiée et on obtient

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(I \mid (K^{-1})^T\right), \qquad \text{d'où } K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et la représentation numérique du message clair est

$$K^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 23 & 19 & 5 \\ 5 & 20 & 9 & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de retrouver le message clair

BEST WISHES .

Bibliographie

Livres d'algèbre linéaire

- H. Anton & C. Rorrès, *Elementary Linear Algebra* (Applications Version), 7th edition, John Wiley & Sons, New York, 1994 ;
- M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall International Editions, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991 ;
- R. Cairoli, *Algèbre linéaire*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991 ;
- S. Lang, *Algèbre linéaire* 1, InterEditions, Paris, 1976 ;
- P. C. Shields, *Linear Algebra*, Worth Publishers, Inc., 1976.

Références pour le dessin de fractales (chapitre 11)

- B. B. Mandelbrot, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, 4ème édition, Flammarion, Paris, 1996 ;
- B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W.H. Freemann, San Francisco, 1982.

Références pour la cryptographie conventionnelle (chapitre 12)

- G. Robin, *Algorithmique et cryptographie, Mathématiques et Applications* Vol. 8, Ellipses, 1992 ;
- B. Schneier, *Applied cryptography*, 2nd edition, J. Wiley & Sons, New York, 1996.

Références pour les codes correcteurs d'erreurs (chapitre 13)

- J. H. Van Lint, *Introduction to coding theory*, Springer, New York, 1982.

Références pour les chaînes de Markov (chapitre 14)

- S. M. Ross, *Initiation aux probabilités*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1996.

Références pour les stéréogrammes (chapitre 15)

- S. Horibuchi (ed), *SuperStereograM*, Cadence Books, San Francisco, 1994 ;
- M. S. Terrell & R.E. Terrell, Behind the Scenes of a Random Dot Stereogram, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 101, No. 8 (1994), 715-724 ;
- D. Marr, *Vision*, Freeman and Co., New York, 1982 ;
- E. Natonek, *3D-MBA : Système de reconnaissance d'objets par vision basé modèles 3-D appliqué aux mondes virtuels robotisés*, Thèse No. 1477, IMT-DMT, EPFL, 1996.

Références pour la robustesse des réseaux informatiques (chapitre 16)

- K. Aberer, *P-Grid : A Self-Organizing Access Structure for P2P Information Systems*, Lecture Notes in Computer Science 2172, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2001, pp. 179-194 ;
- P. Diaconis & D. Stroock, *Geometric bounds for eigenvalues of Markov Chains*, Annals Applied Probab 1 (1991), pp. 36-61 ;
- G. Davidoff, P. Sarnak & A. Valette, *Elementary number theory, group theory and Ramanujan graphs*, London Mathematical Society Student Texts 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003 ;
- J. Dodziuk, *Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks* ; Transactions of the American Math. Soc. 284 (1984), pp. 787-799 ;
- A. Seary & W. Richards, *The Physics of Networks* (1997), `http://www.sfu.ca/~richards/Pages/physics.pdf`
- R. J. Wilson & J. J. Watkins, *Graphs : An Introductory Approach*, J. Wiley & Sons, New York, 1990.